

Questão-aula 1

1.1. $0,20 \times 80 = 16$

Resposta: 16 jovens

1.2. $80 - (12 + 14 + 8 + 20 + 16) = 10$

Resposta: 10 jovens

1.3. $\frac{20}{80} \times 100 = 25\%$

Resposta: Engenheiro informático (com 25% dos votos).

1.4. Não obteve maioria absoluta pois para isso teria de alcançar mais de 50% dos votos, ou seja, pelo menos 41 votos.

2.1. Número total de votos: $130 + 100 + 85 = 315$

Almeida: 130 votos

$$\frac{130}{315} \times 100 \approx 41,3\%$$

Resposta: O Almeida vence a eleição com aproximadamente 41,3% dos votos como primeira preferência.

2.2. Almeida: 130 votos

Bento: 100 votos

Damião: 85 votos (eliminado)

Castro: 0 votos (eliminado)

Nova contagem

Almeida: $130 + 85 = 215$ votos

Bento: 100 votos

Resposta: O vencedor é o Almeida.

Questão-aula 2

1.1. a) Candidatos eliminados: Castro (0 votos em primeira preferência)

Nova contagem

Almeida: 130 votos

Bento: 100 votos

Damião: 85 votos (eliminado)

Nova contagem

Almeida: $130 + 85 = 215$ votos

Bento: 100 votos

Resposta: O vencedor é o Almeida.

b) Pontuações

Almeida: $130 \times 4 + 100 \times 2 + 85 \times 2 = 890$ pontos

Castro: $130 \times 3 + 100 \times 3 + 85 \times 3 = 945$ pontos

Damião: $130 \times 2 + 100 \times 1 + 85 \times 4 = 700$ pontos

Bento: $130 \times 1 + 100 \times 4 + 85 \times 1 = 615$ pontos

Resposta: O vencedor é o Castro.

c) Almeida vs. Castro (130 vs. 185)

Vencedor: Castro

Almeida vs. Damião (230 vs. 85)

Vencedor: Almeida

Almeida vs. Bento (215 vs. 100)

Vencedor: Almeida

Castro vs. Bento (215 vs. 100)

Vencedor: Castro

Castro vs. Damião (230 vs. 85)

Vencedor: Castro

Bento vs. Damião (100 vs. 215)

Vencedor: Damião

Resposta: O vencedor é o Castro.

1.2. Podemos concluir que métodos eleitorais diferentes podem conduzir a resultados diferentes e consequentemente vencedores distintos numa mesma eleição.

2.1. a) Vermelho: $10 + 10 = 20$ votos

Amarelo: 12 votos

Vencedor: Vermelho

b) Amarelo: $10 + 12 = 22$ votos

Azul: 10 votos

Vencedor: Amarelo

2.2. Seguindo uma lógica de transitividade, o vencedor seria o vermelho pois “vermelho vence amarelo” e “amarelo vence azul”.

No entanto, na realidade quem vence o confronto é o azul, pois alcança $12 + 10 = 22$ votos contra apenas 10 votos do vermelho.

Estamos perante o que usualmente se designa por Paradoxo de Condorcet.

Questão-aula 3

1.1. O Ricardo vence a eleição com 70% de aprovações.

O Nuno obtém 50% de aprovações e o Daniel 60%.

1.2. Só haverá alteração caso seja o Ricardo a desistir (ou a ser desclassificado), passando a ser o Daniel o vencedor.

No entanto, o número de aprovações que cada um dos candidatos obtém mantém-se inalterado, ou seja, não existe transferência de votos entre candidatos.

2.1.

	Robalos	Marmotas	Trutas	Sardinhas
1	245	852	207	624
2	123	426	104	312
3	82	284	69	208
4	61	213	52	156
5	49	170	41	125
6	41	142	35	104

Robalos: 1 mandato
Marmotas: 4 mandatos
Trutas: nenhum mandato
Sardinhas: 3 mandatos

2.2.

	Robalos	Marmotas	Trutas	Sardinhas
1	245	852	207	624
3	82	284	69	208
5	49	170	41	125
7	35	122	30	89
9	27	95	23	69

Robalos: 1 mandato
Marmotas: 3 mandatos
Trutas: 1 mandato
Sardinhas: 3 mandatos

Questão-aula 4

1. Divisor-padrão: $\frac{1928}{8} = 241$ (isto significa que cada um dos oito lugares / mandatos representa 241 eleitores)

2. Quota-padrão (Robalos) = $\frac{245}{241} \approx 1,0166$ Quota-padrão (Marmotas) = $\frac{852}{241} \approx 3,5353$

Quota-padrão (Trutas) = $\frac{207}{241} \approx 0,8589$ Quota-padrão (Sardinhas) = $\frac{624}{241} \approx 2,5892$

3.

Associação	N.º de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Robalos	245	1,0166	1	0,0166		1
Marmotas	852	3,5353	3	0,5353		3
Trutas	207	0,8589	0	0,8589	1	1
Sardinhas	624	2,5892	2	0,5892	1	3
Total	1928		6			8

Robalos: 1 mandato
Marmotas: 3 mandatos
Trutas: 1 mandato
Sardinhas: 3 mandatos

4.

Associação	N.º de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 3	Total a atribuir
Robalos	245	0,9570	0	0,9570	1	1
Marmotas	852	3,3281	3	0,3281		3
Trutas	207	0,8086	0	0,8086	1	1
Sardinhas	624	2,4375	2	0,4375		2
Fanecas	120	0,4688	0	0,4688	1	1
Total	2048		5			8

Robalos: 1 mandato

Marmotas: 3 mandatos

Trutas: 1 mandato

Sardinhas: 2 mandatos

Fanecas: 1 mandato

A Associação Sardinhas perde um mandato com a introdução da Associação Fanecas (Paradoxo do Novo Estado).

Questão-aula 5

1. Método de Jefferson

Divisor-padrão	16,7333
Divisor modificado	16,1

Nível	N.º de alunos	Quota-padrão	Quota inferior
2.º Ciclo	80	4,7809	4
3.º Ciclo	242	14,4622	14
Secundário	180	10,7570	10
Total	502		28

Nível	N.º de alunos	Quota modificada	Quota modificada inferior
2.º Ciclo	80	4,9689	4
3.º Ciclo	242	15,0311	15
Secundário	180	11,1801	11
Total	502		30

2.º ciclo: 4 representantes

3.º ciclo: 15 representantes

Secundário: 11 representantes

2. Método de Webster

Divisor-padrão	16,7333
----------------	---------

Nível	N.º de alunos	Quota-padrão	Quota arredondada
2.º Ciclo	80	4,7809	5
3.º Ciclo	242	14,4622	14
Secundário	180	10,7570	11
Total	502		30

2.º ciclo: 5 representantes

3.º ciclo: 14 representantes

Secundário: 11 representantes

3. Método de Hill-Huntington

Divisor padrão	16,73
----------------	-------

Nível	N.º de alunos	Quota-padrão	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
2.º Ciclo	80	4,7809	4	5	4,4721	5
3.º Ciclo	242	14,4622	14	15	14,4914	14
Secundário	180	10,7570	10	11	10,4881	11
Total	502					30

2.º ciclo:

5 representantes

3.º ciclo:

14 representantes

Secundário:

11 representantes

Questão-aula 6

1.1. Candidato A: 104 pontos

$$10 \times 3 + 8 \times 3 + 12 \times 2 + 6 \times 2 + 14 \times 1 = 104$$

Candidato B: 98 pontos

$$10 \times 2 + 8 \times 1 + 12 \times 3 + 6 \times 1 + 14 \times 2 = 98$$

Candidato C: 98 pontos

$$10 \times 1 + 8 \times 2 + 12 \times 1 + 6 \times 3 + 14 \times 3 = 98$$

Resposta: O vencedor é o Candidato A .

1.2. A vs. B (A: $10 + 8 + 6 = 24$; B: $12 + 14 = 26$)

Vence B

A vs. C ($10 + 8 + 12 = 30$; C: $6 + 14 = 20$)

Vence A

B vs. C ($10 + 12 = 22$; C: $8 + 6 + 14 = 28$)

Vence C

2. Hamilton

Divisor padrão	338,5000
----------------	----------

Ilha	População	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal)	Total a atribuir
					1	
Melursus	1840	5,4357	5	0,4357	1	6
Tremarctos	1090	3,2201	3	0,2201		3
Arctodus	1132	3,3442	3	0,3442		3
Total	4062		11			12

Adams

Divisor-padrão	338,5000
Divisor modificado	370

Ilha	População	Quota-padrão	Quota superior
Melursus	1840	5,4357	6
Tremarctos	1090	3,2201	4
Arctodus	1132	3,3442	4
Total	4062		14

Ilha	População	Quota modificada	Quota modificada superior
Melursus	1840	4,9730	5
Tremarctos	1090	2,9459	3
Arctodus	1132	3,0595	4
Total	4062		12

Webster

Divisor-padrão	338,5000
Divisor modificado	330

Ilha	População	Quota-padrão	Quota arredondada
Melursus	1840	5,4357	5
Tremarctos	1090	3,2201	3
Arctodus	1132	3,3442	3
Total	4062		11

Ilha	População	Quota modificada	Quota modificada arredondada
Melursus	1840	5,5758	6
Tremarctos	1090	3,3030	3
Arctodus	1132	3,4303	3
Total	4062		12

Hill-Huntington

Divisor-padrão	338,50
Divisor modificado	330

Ilha	População	Quota-padrão	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
Melursus	1840	5,4357	5	6	5,4772	5
Tremarctos	1090	3,2201	3	4	3,4641	3
Arctodus	1132	3,3442	3	4	3,4641	3
Total	4062					11

Ilha	População	Quota-padrão	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Quota modificada arredondada pela regra H-H
Melursus	1840	5,5758	5	6	5,4772	6
Tremarctos	1090	3,3030	3	4	3,4641	3
Arctodus	1132	3,4303	3	4	3,4641	3
Total	4062					12

Ilha	Hamilton	Adams	Webster	Hill-Huntington
Melursus	6	5	6	6
Tremarctos	3	3	3	3
Arctodus	3	4	3	3

Questão-aula 7

- 1.1. António
- 1.2. Bruno
- 1.3. Bruno
- 1.4. Eduardo
- 1.5. Carlos e Diego. Utilizam o método do divisor-selecionador.
2. Parcela 1: Herdeiro C
Parcela 2: Herdeiro A
Parcela 3: Herdeiro B

Questão-aula 8Distribuição dos itens

Mónica: baralho de cartas e bola de voleibol ($10 + 35 = 45$ pontos)

Filipe: Trivial Pursuit, monopólio e raquetes ($25 + 30 + 20 = 75$ pontos)

Vencedor inicial: Filipe

Item a transferir

Trivial Pursuit: $\frac{25}{20} = 1,25$

Monopólio: $\frac{30}{25} = 1,2$

Raquetes: $\frac{20}{10} = 2$

Item a transferir: Monopólio

Nova pontuação

Mónica: baralho de cartas, bola de voleibol e monopólio ($10 + 35 + 25 = 70$ pontos)

Filipe: Trivial Pursuit e raquetes ($25 + 20 = 45$ pontos)

Como ao transferir o item Monopólio a Mónica fica com mais pontos do que o Filipe, então o item terá de ser fracionado para poder ser partilhado por ambos.

Seja x a fração do item que fica com o Filipe. Então:

$$25 + 30x + 20 = 10 + 25(1 - x) + 35 \Leftrightarrow 30x + 25x = 10 + 25 + 35 - 25 - 20 \Leftrightarrow 55x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{55} \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$$

Ou seja, $x \approx 0,4545$.

Distribuição final (partilha equilibrada dos bens)

O Filipe fica com o Trivial Pursuit, as raquetes e aproximadamente 45,45% do Monopólio (totalizando cerca de 58,6 pontos).

A Mónica fica com o baralho de cartas, a bola de voleibol e aproximadamente 54,55% do Monopólio (totalizando cerca de 58,6 pontos).

Questão-aula 9

	Constança	Tiago	Vasco
Valor total licitado	535 000,00	570 000,00	572 000,00
Valor justo	178 333,33	190 000,00	190 666,67
Distribuição dos bens	Jóias	Casa	Automóvel e Apartamento
Valor total dos bens atribuídos	50 000,00	210 000,00	142 000,00
Saldo	128 333,33	-20 000,00	48 666,67
	Recebe	Paga	Recebe
Dinheiro disponível 43 000,00	14 333,33	14 333,33	14 333,33
Total final	192 666,67	204 333,33	205 000,00

Distribuição final (partilha equilibrada dos bens)

A Constança fica com as jóias e recebe

142 666,67 € em dinheiro.

O Tiago fica com a casa e paga 5 666,67 €.

O Vasco fica com o automóvel e o apartamento e recebe 63 000 € em dinheiro.

Questão-aula 10

1. $\frac{19,6\% - 10,9\%}{10,9\%} \approx 0,8\%$

Percentagem de aumento: 0,8% (aprox.)

2. $19,6 - 10,9 = 8,7$

Aumento: 8,7 pontos percentuais.

3. Mulheres

4. Menor número de dias: ano 2004 / Maior número de dias: ano 2008

5. Mulheres: $\frac{519 - 333}{333} \times 100 \approx 55,86\%$ / Homens: $\frac{33 - 11}{11} \times 100 = 200\%$

A maior percentagem de aumento verificou-se nos homens (com um aumento de 200%), enquanto que relativamente às mulheres o aumento foi de aproximadamente 55,86%.

Questão-aula 11

1. $100\% - (19,51\% + 10,98\% + 25,61\% + 29,27\%) = 14,63\%$

14,63% dos alunos preferem os canais de informação.

2. Desporto: $0,2561 \times 82 = 21$

Animação: $0,1098 \times 82 = 9$

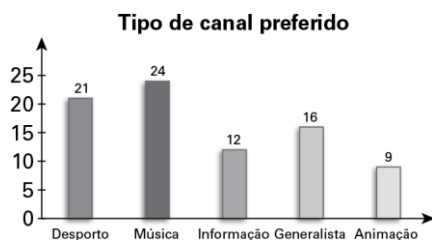
$21 - 9 = 12$

12 alunos a mais.

3.

Tipo de canal	Freq. abs.	Freq. abs. acum.	Freq. rel.	Freq. rel. (%)	Freq. rel. acum.	Freq. rel. acum. (%)
Desporto	21	21	0,2561	25,61%	0,2561	25,61%
Música	24	45	0,2927	29,27%	0,5488	54,88%
Informação	12	57	0,1463	14,63%	0,6951	69,51%
Generalista	16	73	0,1951	19,51%	0,8902	89,02%
Animação	9	82	0,1098	10,98%	1	100%
Total	82	---	1	100%	---	---

4.



Questão-aula 12

1.

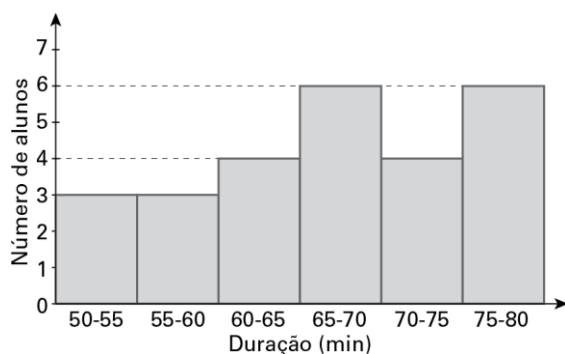
```

5 | 0 0 1 5 7 8
6 | 0 0 1 4 5 6 6 8 8 9
7 | 0 0 1 3 5 5 7 7 8 9
    
```

2. Vamos considerar classes com amplitude 5 (embora a aplicação da Regra de Sturges, que é meramente indicativa, nos conduza a classes de amplitude 5,8).

Tempo (minutos)	Freq. abs.	Freq. abs. acum.	Freq. rel.	Freq. rel. acum.
[50; 55[	3	3	0,12	0,12
[55; 60[	3	6	0,12	0,24
[60; 65[	4	10	0,15	0,39
[65; 70[	6	16	0,23	0,62
[70; 75[	4	20	0,15	0,77
[75; 80[	6	26	0,23	1
Total	26	---	1	---

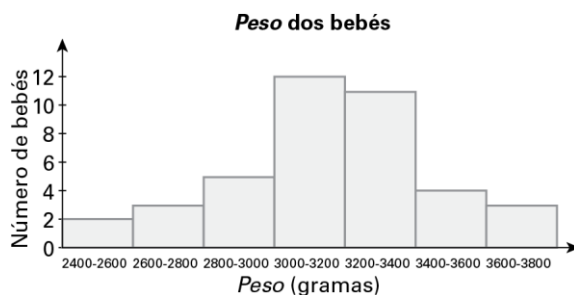
3.



Questão-aula 13

1. [3000;3200[

2.



3.1. $\tilde{x} = P_{50} = 3167$

Vejam os:

Área das barras do histograma:

$$A_1 = 200 \times 2 = 400$$

$$A_1 + A_2 = 200 \times (2 + 3) = 1000$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 200 \times (2 + 3 + 5) = 2000$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 200 \times (2 + 3 + 5 + 12) = 4400$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 200 \times (2 + 3 + 5 + 12 + 11) = 6600$$

Determinação da mediana (Percentil de ordem 50): $x = \frac{50 \times 40 \times 200}{100} = 4000$

Logo, $P_{50} \in [3000; 3200[$.

Assim, $2000 + (P_{50} - 3000) \times 12 = 4000 \Leftrightarrow P_{50} = \frac{4000 - 2000}{12} + 3000$.

$$P_{50} \approx 3167$$

3.2. $Q_3 = P_{75} = 3345$

Determinação do 3.º quartil (Percentil de ordem 75): $x = \frac{75 \times 40 \times 200}{100} = 6000$

Logo, $P_{75} \in [3200; 3400[$.

Assim, $4400 + (P_{75} - 3200) \times 11 = 6000 \Leftrightarrow P_{75} = \frac{6000 - 4400}{11} + 3200$.

$$P_{75} \approx 3345$$

3.3. $P_{60} = 3236$

Determinação do percentil de ordem 60: $x = \frac{60 \times 40 \times 200}{100} = 4800$

Logo, $P_{60} \in [3200; 3400[$.

Assim, $4400 + (P_{60} - 3200) \times 11 = 4800 \Leftrightarrow P_{60} = \frac{4800 - 4400}{11} + 3200$.

$$P_{60} \approx 3236$$

3.4. $P_{25} = 3000$

Determinação do 1.º quartil (Percentil de ordem 25): $x = \frac{25 \times 40 \times 200}{100} = 2000$

Logo $P_{25} \in [3000; 3200[$.

Assim, $2000 + (P_{25} - 3000) \times 12 = 2000 \Leftrightarrow P_{25} = \frac{2000 - 2000}{12} + 3000$.

$$P_{25} = 3000$$

4. Podemos afirmar que, pelo menos, 60% dos bebés que nasceram na maternidade tinham um peso inferior ou igual a 3236 gramas ou que, no máximo, 40% dos bebés nasceram com um peso superior a 3236 gramas.

Questão-aula 14

1.

1		9 9 9
2		0 0 1 1 1 3 8
3		0 1 1 2 4 6 7 9
4		1 2 2 4 5 6

2. 1.º quartil: 21

Determinação do 1.º quartil (Percentil de ordem 25): $x = \frac{25 \times 24}{100} = 6$ (inteiro)

$$\text{Logo, } Q_1 = P_{25} = \frac{X_{(6)} + X_{(7)}}{2} = \frac{21 + 21}{2} = 21.$$

Mediana: 31

Determinação do 2.º quartil (Percentil de ordem 50): $x = \frac{50 \times 24}{100} = 12$ (inteiro)

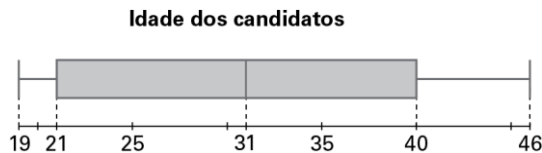
$$\text{Logo, } Q_2 = P_{50} = \frac{X_{(12)} + X_{(13)}}{2} = \frac{31 + 31}{2} = 31.$$

3.º quartil: 40

Determinação do 3.º quartil (Percentil de ordem 75): $x = \frac{75 \times 24}{100} = 18$ (inteiro)

$$\text{Logo, } Q_3 = P_{75} = \frac{X_{(18)} + X_{(19)}}{2} = \frac{39 + 41}{2} = 40.$$

3.



Questão-aula 15

$$1.1. \bar{x} = \frac{3 \times 0 + 7 \times 1 + 10 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5}{25} = 1,8$$

Cada aluno leu, em média, 1,8 livro nas férias.

1.2. A média seria igual a $1,8 + 2$, ou seja, 3,8 livros.

1.3. $\frac{50 \times 25}{100} = 12,5$ (não inteiro), logo, P_{50} é o elemento de ordem $[12,5] + 1$, ou seja, de ordem 13.

Assim, $P_{50} = X_{(13)} = 2$.

A mediana é 2 livros.

2.1. 3 7 10 12 18, $\bar{x} = 10$ e $\tilde{x} = 10$

e 2 5 8 15 20, $\bar{x} = 10$ e $\tilde{x} = 8$

2.2. 2 6 8 10 12, $\bar{x} = 7,6$ e $\tilde{x} = 8$

e 3 4 8 8 10, $\bar{x} = 6,6$ e $\tilde{x} = 8$

Questão-aula 16

$$1. \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5} = 12 \Leftrightarrow X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 60$$

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{6} = 13 \Leftrightarrow \frac{60 + X_6}{6} = 13 \Leftrightarrow X_6 = 6 \times 13 - 60 \Leftrightarrow X_6 = 18$$

$$X_6 = 18$$

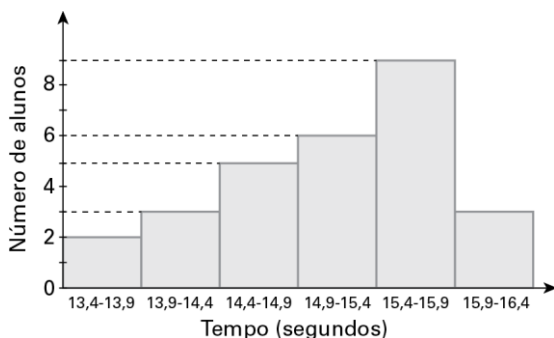
2.1.

Tempos (segundos)	Frequências absolutas
[13,4 ; 13,9[	2
[13,9 ; 14,4[	3
[14,4 ; 14,9[	5
[14,9 ; 15,4[	6
[15,4 ; 15,9[	9
[15,9 ; 16,4[	3
Total	28

2.2. $\bar{x} = \frac{13,65 \times 2 + 14,15 \times 3 + 14,65 \times 5 + 15,15 \times 6 + 15,65 \times 9 + 16,15 \times 3}{28} \approx 15,1$

Tempo médio: 15,1 segundos.

2.3.



2.4. $P_{50} = 15,2$ (Podemos afirmar que, pelo menos, 50% dos alunos obtiveram um tempo inferior ou igual a 15,2 segundos ou que, no máximo, 50% dos alunos obtiveram um tempo superior a 15,2 segundos).

$P_{80} = 15,8$ (Podemos afirmar que, pelo menos, 80% dos alunos obtiveram um tempo inferior ou igual a 15,8 segundos ou que, no máximo, 20% dos alunos obtiveram um tempo superior a 15,8 segundos).

Vamos exemplificar o cálculo do percentil para a ordem 80:

Determinamos $\frac{80 \times 28 \times 0,5}{100} = 11,2$. A área 11,2 só é atingida no 5.º retângulo do histograma. De facto:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0,5 \times 2 + 0,5 \times 3 + 0,5 \times 5 + 0,5 \times 6 = 8$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 8 + 0,5 \times 9 = 12,5$$

Assim, o percentil de ordem 80 encontra-se no intervalo [15,4 ; 15,9[.

$$(P_{80} - 15,4) \times 9 + 8 = 11,2 \Leftrightarrow P_{80} = \frac{11,2 - 8}{9} + 15,4$$

Então, $P_{80} = 15,8$.

Questão-aula 17

1. No conjunto B. Como o desvio-padrão é menor, podemos afirmar que as idades das mulheres desse grupo são mais homogêneas (estão mais concentradas ou estão menos dispersas) relativamente à idade média do grupo (26 anos).

2.1. Martinho: $\frac{17 + 11 + 3 \times 14 + 2 \times 12 + 2 \times 16}{9} = 14$

Diogo: $\frac{2 \times 11 + 2 \times 13 + 2 \times 17 + 14 + 2 \times 15}{9} = 14$

2.2. Martinho

$$\text{Amplitude amostral} = 17 - 11 = 6$$

$$\text{Desvio-padrão} = 2,06 \text{ (2 c. d.)}$$

Diogo

$$\text{Amplitude amostral} = 17 - 11 = 6$$

$$\text{Desvio-padrão} = 2,24 \text{ (2 c. d.)}$$

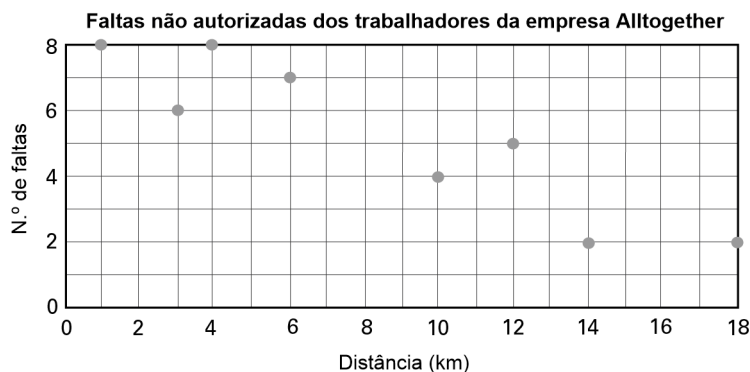
- 2.3. Nas duas amostras as amplitudes são iguais, logo, a medida que melhor caracteriza a dispersão dos dados é o desvio-padrão. Como as médias são iguais e o desvio-padrão das classificações do Martinho é inferior, podemos afirmar que as suas classificações estão menos dispersas, ou seja, estão mais concentradas em torno da classificação média 14.

Questão-aula 18

1. Opção (A)

2. Opção (A)

3.1.

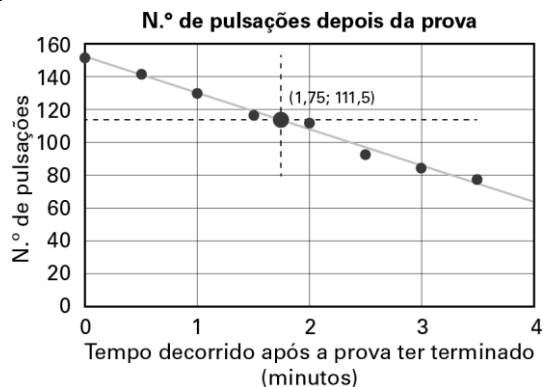


3.2. $r = -0,92$

Podemos afirmar que existe uma correlação negativa forte entre as variáveis, ou seja, observa-se uma correlação forte entre o número de faltas não autorizadas dos trabalhadores e a distância às suas residências, sendo que à medida que a distância aumenta (diminui), o número de faltas diminui (aumenta).

Questão-aula 19

1. e 2.



$$\text{Equação da reta de regressão: } y = -21,714x + 149,5$$

3.1. $y = -21,714 \times 1,8 + 149,5 \approx 110,4$

Teria cerca de 110 pulsações por minuto.

3.2. $y = -21,714 \times 30 + 149,5 \approx -501,92$

O resultado não faz sentido no contexto do problema pois teria um número negativo de pulsações.

3.3. $100 = -21,714x + 149,5 \Leftrightarrow x = \frac{149,5 - 100}{21,714}$

Então, $x \approx 2,3$.

Terá passado cerca de 2,3 minutos.

Questão-aula 20

1. $r \approx -0,16$

Podemos afirmar que a correlação entre as variáveis é fraca, ou seja, a nota a Português e a nota a Educação Física não estão relacionadas *suficientemente bem* para que se possam fazer estimativas ou tirar conclusões de uma a partir da outra.

2.

Ed. Física Português	Suficiente	Bom	Muito Bom	Total
Suficiente	1	3	2	6
Bom	1	1	0	2
Muito Bom	0	4	0	4
Total	2	8	2	12

Questão-aula 21

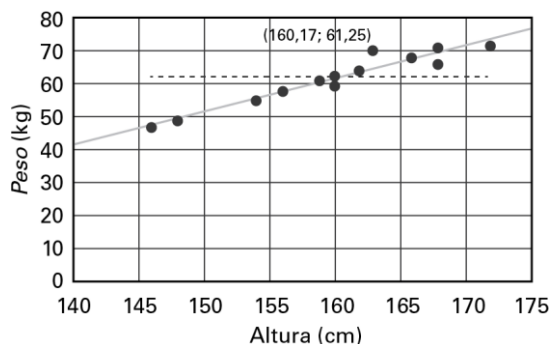
1. (1) Por exemplo: “Número de pontos das equipas no campeonato” e “número de golos marcado pelas equipas no campeonato”.

Correlação positiva forte.

(2) Por exemplo: “Latitude de cidades localizadas no hemisfério norte” e “Temperatura média das cidades localizadas no hemisfério norte”.

Correlação negativa forte.

2.1.



Equação da reta de regressão: $y = 0,973x - 94,615$

2.2. (a) $y = 0,973 \times 153 - 94,615 = 54,254$

Espera-se que tenha aproximadamente 54,3 kg de peso.

(b) $71 = 0,973x - 94,615 \Leftrightarrow x = \frac{71 + 94,615}{0,973}$

Então, $x \approx 170,2$.

Espera-se que tenha aproximadamente 170,2 cm de altura.

2.3. $r = 0,94$ (correlação positiva forte)

Questão-aula 22

1. $780 + 55 = 835$ €

Preço final

Com o desconto A: $0,77 \times 835 = 642,95$ €

Com o desconto B: $\frac{835 \times 100}{123} \approx 678,86$ €

É mais vantajoso optar pelo “Desconto A”.

$$2.1. \text{ IPC}(2015) = \frac{370}{320} \times 100 = 115,625$$

$$\text{IPC}(2016) = \frac{345}{320} \times 100 = 107,8125$$

$$2.2. \text{ a) } \frac{\text{IPC}(2015) - \text{IPC}(2014)}{\text{IPC}(2014)} \times 100 = \frac{115,625 - 100}{100} \times 100 \approx 15,6\%$$

$$\text{ b) } \frac{\text{IPC}(2016) - \text{IPC}(2015)}{\text{IPC}(2015)} \times 100 = \frac{107,8125 - 115,625}{115,625} \times 100 \approx -6,8\%$$

Questão-aula 23

$$1.1. 10\,000(1 + 0,028 \times 3) = 10\,840 \text{ €}$$

Teremos no banco 10 840 €.

$$1.2. 10\,000(1 + 0,028)^3 \approx 10\,863,74 \text{ €}$$

Teremos no banco 10 863,74 €.

$$2.1. 25\,000(1 + 0,16)^5 \approx 52\,508,54 \text{ €}$$

Terão de pagar 52 508,54 €.

$$2.2. 25\,000 \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{5 \times 4} \approx 54\,778,08 \text{ €}$$

Terão de pagar 54 778,08 €.

$$3. 4200 = C_0(1 + 0,035)^{4 \times 3} \Leftrightarrow C_0 = \frac{4200}{(1 + 0,035)^{12}}$$

$$C_0 \approx 2779,49$$

Capital inicial: 2779,49 €.

Questão-aula 24

O António deixou o seu automóvel estacionado no parque da Estação do Oriente durante um dia e mais 30 minutos (24 horas e 30 minutos). De acordo com a tabela, pagou então 6,50 €.

A Conceição deixou o seu automóvel estacionado no parque da Estação de Braga durante dois dias e mais 4 horas e 15 minutos (52 horas e 15 minutos). De acordo com a tabela, pagou então 8 €.

O António pagou 6,50 € e a Conceição 8 €.

Teste de avaliação 1

$$1.1. \text{ Alvim (A): } \frac{25}{150} \times 100 \approx 16,7\%$$

$$\text{Cardoso (C): } \frac{45}{150} \times 100 = 30\%$$

$$\text{Pereira (P): } \frac{30}{150} \times 100 = 20\%$$

$$\text{Ramos (R): } \frac{50}{150} \times 100 \approx 33,3\%$$

$$1.2. \frac{150}{2} + 1 = 75 + 1 = 76$$

No mínimo 76 votos.

1.3. A: 25 votos (eliminado)

R: 50 votos

P: 30 votos (eliminado)

C: 45 votos

Nova contagem:

R: 50 votos

C: 45 + 25 + 30 = 100 votos

Vencedor: Cardoso

1.4. A: $25 \times 4 + 50 \times 1 + 30 \times 3 + 45 \times 2 = 330$ pontos

C: $25 \times 3 + 50 \times 2 + 30 \times 2 + 45 \times 4 = 415$ pontos

P: $25 \times 2 + 50 \times 3 + 30 \times 4 + 45 \times 1 = 365$ pontos

R: $25 \times 1 + 50 \times 4 + 30 \times 1 + 45 \times 3 = 390$ pontos

Vencedor: Cardoso

2.1. Homem-Aranha: $120 + 150 = 270$ votos

Capitão América: $120 + 88 = 208$ votos

Super-Homem: 204 votos

2.2. Homem-Aranha: $\frac{270}{562} \times 100 \approx 48\%$

Capitão América: $\frac{208}{562} \times 100 \approx 37\%$

Super-Homem: $\frac{204}{562} \times 100 \approx 36\%$

3.1. Alfa: $\frac{650}{4589} \times 40 \approx 5,67$ lugares

Beta: $\frac{1820}{4589} \times 40 \approx 15,86$ lugares

Delta: $\frac{1120}{4589} \times 40 \approx 9,76$ lugares

Ómega: $\frac{999}{4589} \times 40 \approx 8,71$ lugares

Uma mera distribuição proporcional produz resultados não inteiros, o que não conduz a uma distribuição exata dos lugares (que têm de ser necessariamente inteiros).

3.2. Divisor-padrão = $\frac{4589}{40} = 114,7250$

Significa que cada um dos 40 lugares na Direção representa aproximadamente 115 000 habitantes dos países que pertencem à organização.

3.3. Alfa: 6,6657 Beta: 15,8640

Delta: 9,7625 Ómega: 8,7078

3.4. a) Método de Hamilton

Divisor-padrão 114,7250

País	N.º de habitantes	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 3	Total a atribuir
Alfa	650	5,6657	5	0,6657		5
Beta	1820	15,8640	15	0,8640	1	16
Delta	1120	9,7625	9	0,7625	1	10
Ómega	999	8,7078	8	0,7078	1	9
Total	4589		37			40

b) Método de Jefferson

Divisor-padrão 114,7250
Divisor modificado 110

País	N.º de habitantes	Quota-padrão	Quota inferior
Alfa	650	5,6657	5
Beta	1820	15,8640	15
Delta	1120	9,7625	9
Ómega	999	8,7078	8
Total	4589		37

País	N.º de habitantes	Quota modificada	Quota modificada inferior
Alfa	650	5,9091	5
Beta	1820	16,5455	16
Delta	1120	10,1818	10
Ómega	999	9,0818	9
Total	4589		40

- 3.5. Através do método de Jefferson não há influência pois cada um dos países mantém o número de lugares que já tinha. Já no que diz respeito ao método de Hamilton, verifica-se que Ómega perde um lugar para Alfa. Estamos na presença de um dos paradoxos de Hamilton, mais concretamente o Paradoxo do Novo Estado. Vejamos:

Método de Jefferson

Divisor-padrão	116,3409
Divisor modificado	110

País	N.º de habitantes	Quota-padrão	Quota inferior
Alfa	650	5,5870	5
Beta	1820	15,6437	15
Delta	1120	9,6269	9
Ómega	999	8,5868	8
Psi	530	4,5556	4
Total	5119		41

País	N.º de habitantes	Quota modificada	Quota modificada inferior
Alfa	650	5,9091	5
Beta	1820	16,5455	16
Delta	1120	10,1818	10
Ómega	999	9,0818	9
Psi	530	4,8182	4
Total	5119		44

Método de Hamilton

Divisor padrão	116,3409
----------------	----------

País	N.º de habitantes	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 3	Total a atribuir
Alfa	650	5,5870	5	0,5870	1	6
Beta	1820	15,6437	15	0,6437	1	16
Delta	1120	9,6269	9	0,6269	1	10
Ómega	999	8,5868	8	0,5868		8
Psi	530	4,5556	4	0,5556		4
Total	5119		41			44

Teste de avaliação 2

1.

	Amílcar	Constantino
Valor total licitado	465,00	510,00
Valor Justo	232,50	255,00
Distribuição dos bens	Rembrandt	Van Gogh Picasso Salvador Dalí
Valor total dos bens atribuídos	200,00	330,00
Saldo	32,50	- 75,00
	Recebe	Paga
Dinheiro disponível 42,50	21,25	21,25
Total final	253,75	276,25

Distribuição final

Amílcar: fica com a pintura de Rembrandt e recebe 53 750 € em dinheiro.

Constantino: fica com as pinturas de Van Gogh, Picasso e Salvador Dalí, recebe 21 250 € e paga 75 000 € em dinheiro (ou seja, na prática tem de dispendir 53 750 €).

2.1. Marisa: Opção A

2.2. Renato: Opção A

3.1. Hondt

	Portugal	Espanha	França	Reino Unido	Itália
1	22	32	36	28	25
2	11	16	18	14	12,5
3	7,33	10,67	12	9,33	8,33
4	5,50	8,00	9,00	7,00	6,25
5	4,40	6,40	7,20	5,60	5,00
6	3,67	5,33	6,00	4,67	4,17

Portugal: 1 representante
 Espanha: 2 representantes
 França: 3 representantes
 Reino Unido: 2 representantes
 Itália: 2 representantes

Hill-Huntington

Divisor-padrão	14,30
----------------	-------

País	N.º de trabalhadores	Quota-padrão	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
Portugal	22	1,5385	1	2	1,4142	2
Espanha	32	2,2378	2	3	2,4495	2
França	36	2,5175	2	3	2,4495	3
Reino Unido	28	1,9580	1	2	1,4142	2
Itália	25	1,7483	1	2	1,4142	2
Total	143					11

Divisor modificado	15
--------------------	----

País	N.º de trabalhadores	Quota-padrão modificada	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Quota modificada arredondada pela regra H-H
Portugal	22	1,4667	1	2	1,4142	2
Espanha	32	2,1333	2	3	2,4495	2
França	36	2,4000	2	3	2,4495	2
Reino Unido	28	1,8667	1	2	1,4142	2
Itália	25	1,6667	1	2	1,4142	2
Total	143					10

Portugal: 2 representantes
 Espanha: 2 representantes
 França: 2 representantes
 Reino Unido: 2 representantes
 Itália: 2 representantes

- 3.2. Podemos observar que o método de Hondt favorece a filial maior (com mais trabalhadores), França, penalizando a filial mais pequena, Portugal, que tem menos um representante comparativamente com o resultado da aplicação do método de Hill-Huntington.

4.

Divisor-padrão	5,0000
----------------	--------

Marca	N.º de automóveis	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de automóveis extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Seat	12	2,4000	2	0,4000		2
Kia	16	3,2000	3	0,2000		3
Hyundai	20	4,0000	4	0,0000		4
Fiat	14	2,8000	2	0,8000	1	3
Opel	18	3,6000	3	0,6000	1	4
Total	80		14			16

Constituição do grupo:

Seat: 2 automóveis
 Fiat: 3 automóveis

Kia: 3 automóveis
 Opel: 4 automóveis

Hyundai: 4 automóveis

Teste de avaliação 3

1.1.

3	3 6
4	0 1 8
5	0 3 3 7 9
6	0 2 3 7 8 9
7	2 2 4 9 9
8	0 1 3 5 5
9	1

1.2. A década de 60.

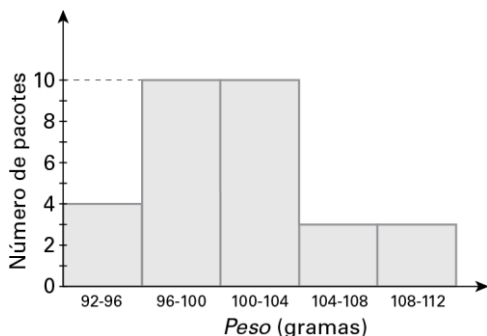
2.

x_i	n_i	N_i	$f_i (\%)$	F_i
12	7	7	17,5	17,5
13	14	21	35	52,5
14	3	24	7,5	60
15	6	30	15	75
16	10	40	25	100
	40		100	

3.1.

Pesos (g)	Freq. absoluta	Freq. relativa
[92 ; 96[	4	0,1333
[96 ; 100[	10	0,3333
[100 ; 104[	10	0,3333
[104 ; 108[	3	0,10
[108 ; 112[	3	0,10
Total	30	1 (aprox.)

3.2.



3.3. $\bar{x} = \frac{4 \times 94 + 10 \times 98 + 10 \times 102 + 3 \times 106 + 3 \times 110}{30} = 100,8$

Peso médio dos pacotes da amostra: 100,8 g.

3.4. a) 3.º quartil: 103,4 g

b) $P_{90} = 108$ g

4.1. Lobitos: $0,20 \times 120 = 24$

Exploradores: $0,30 \times 120 = 36$

Pioneiros: $0,35 \times 120 = 42$

Caminheiros: $0,15 \times 120 = 18$

4.2.

Divisor-padrão	5,4545
Divisor modificado	5

Grupo	N.º de inscritos	Quota-padrão	Quota inferior
Lobitos	24	4,4000	4
Exploradores	36	6,6000	6
Pioneiros	42	7,7000	7
Caminheiros	18	3,3000	3
Total	120		20

Grupo	N.º de inscritos	Quota modificada	Quota modificada inferior
Lobitos	24	4,8000	4
Exploradores	36	7,2000	7
Pioneiros	42	8,4000	8
Caminheiros	18	3,6000	3
Total	120		22

Lobitos: 4 elementos

Exploradores: 7 elementos

Pioneiros: 8 elementos

Caminheiros: 3 elementos

Teste de avaliação 4

1. A informação apresentada desta forma não é imparcial pois o bloguista optou por apresentar os dados graficamente utilizando escalas diferentes no eixo vertical (onde se encontram as frequências absolutas), transmitindo a ideia de que não só o blogue XPTO teve uma grande evolução comparativamente com o blogue ALFAOMEGA mas também, como as barras são mais altas, que obteve um número de visualizações muito superior. Ora, isto não corresponde à “verdade”, pois se observarmos com atenção, o número de visualização de ambos os blogues ao longo dos três anos é muito semelhante. Assim, apesar de os dados não estarem incorretos, os gráficos foram elaborados com o claro objetivo de influenciar opiniões.

2.1. $\bar{x} = \frac{525 \times 10 + 575 \times 15 + 625 \times 12 + 675 \times 8 + 725 \times 5}{50} = 608$

Os smartphones da loja custam, em média, 608 €.

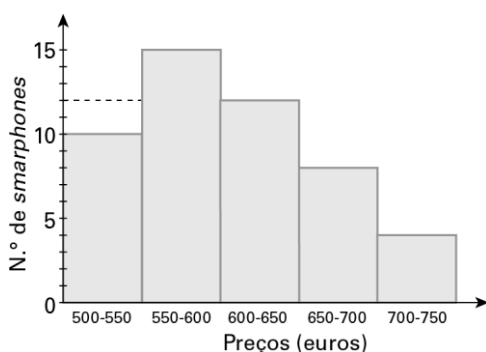
2.2.

Classe	x_i'	n_i	$(x_i' - \bar{x})^2$	$n_i (x_i' - \bar{x})^2$
[500 ; 550[	525	10	6889	68 890
[550 ; 600[	575	15	1089	16 335
[600 ; 650[	625	12	289	3 468
[650 ; 700[	675	8	4489	35 912
[700 ; 750[	725	5	13 689	68 445
Total		50		193 050

Variancia: $s^2 = \frac{193\,050}{50-1} \approx 3939,80$

Desvio-padrão: $s = \sqrt{\frac{193\,050}{50-1}} \approx 62,77$

2.3.



2.4. Área das barras do histograma:

$$A_1 = 50 \times 10 = 500$$

$$A_1 + A_2 = 50 \times (10 + 15) = 1250$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 50 \times (10 + 15 + 12) = 1850$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 50 \times (10 + 15 + 12 + 8) = 2250$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 50 \times 50 = 2500$$

Determinação do 1.º quartil (Percentil de ordem 25): $x = \frac{25 \times 50 \times 50}{100} = 625$

Logo, $P_{25} \in [550; 600[$.

Assim, $500 + (P_{25} - 550) \times 15 = 625 \Leftrightarrow P_{25} = \frac{625 - 500}{15} + 550$.

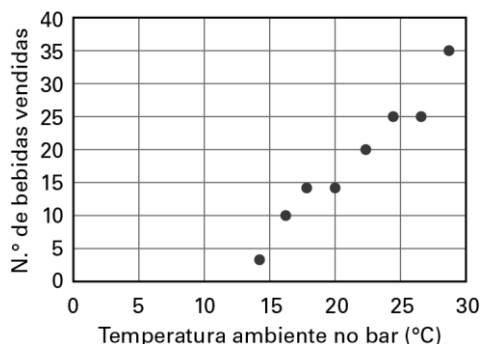
$$Q_1 = P_{25} \approx 558,3$$

De modo análogo, $Q_2 = P_{50} = 600$ e $Q_3 = P_{75} \approx 653,1$.

Amplitude interquartis: $Q_3 - Q_1 = 653,1 - 558,3 = 94,8$

3. A mediana e o P_{60} são as únicas medidas que certamente permaneceram inalteradas.

4.1.



4.2. Média das temperaturas: 21 °C

Média do número de bebidas: 18,4 bebidas

4.3. $r \approx 0,98$ (correlação positiva muito forte)

4.4. Equação da reta de regressão: $y = 1,97x - 23$

4.5. a) $y = 1,97 \times 25 - 23 = 26,25$

Estima-se que serão vendidas cerca de 26 bebidas.

b) $30 = 1,97x - 23 \Leftrightarrow x = \frac{30 + 23}{1,97}$

Então, $x \approx 26,9$. Estima-se que a temperatura seja de, aproximadamente, 27 °C.

Teste de avaliação 5

1.1. $C_4 = 14\,000(1+0,06)^4 \approx 17\,674,68$

Valor acumulado: 17 674,68 €.

1.2. $C_{10} = 14\,000(1+0,06)^{10} \approx 25\,071,88$

Valor acumulado: 25 071,88 €.

1.3. $n = 4 \text{ anos} = 4 \times 4 \text{ trimestres} = 16 \text{ trimestres}$

$C_{16} = 14\,000(1+0,015)^{16} \approx 17\,765,80$

A melhor opção seria o banco Y.

1.4. $C_4 = 14\,000 \left(1 + \frac{0,06}{3}\right)^{3 \times 4} \approx 17\,755,39$

A melhor opção é o banco Y.

2. $20\,125 = C_0(1+0,03 \times 5) \Leftrightarrow C_0 = \frac{20\,125}{1+0,03 \times 5} \Leftrightarrow C_0 = 17\,500$

Capital investido: 17 500 €.

3. Valor do automóvel em 2015:

$0,84^3 \times 23\,599 \approx 13\,987,22 \text{ €}$

Podemos considerar que o Sr. Castro fez um bom negócio ao vender o automóvel por 15 000 €.

4. $275 \times 1,07^{16} \approx 811,85 \text{ €}$

Ganha agora cerca de 811,85 €.

5. Preço sem IVA:

650 ----- 121%

$x \text{ ----- } 100\% \quad x = \frac{650 \times 100}{121} \approx 537,19$

Preço com IVA em 2011: $1,23 \times 537,19 \approx 660,74$

Em janeiro de 2011 custa 660,74 €.

6.1. Balança A

Média: 65,2

Desvio-padrão: 0,22

Balança B

Média: 65,2

Desvio-padrão: 0,19

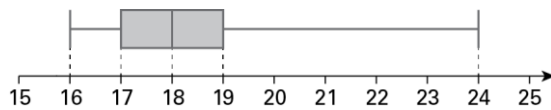
6.2. A balança mais fiável é a B pois é a que apresenta um menor desvio-padrão, o que é indicador de existir maior homogeneidade nos valores das pesagens.

7.1. $\bar{x} = \frac{16 \times 50 + 17 \times 65 + 18 \times 120 + 19 \times 45 + 20 \times 32 + 21 \times 24 + 22 \times 10 + 23 \times 12 + 24 \times 8}{366} \approx 18,4$

A idade média é de, aproximadamente, 18,4 anos.

7.2. $Q_1 = P_{25} = 17$; $Q_2 = P_{50} = 18$; $Q_3 = P_{75} = 19$

7.3.



7.4. $\frac{80 \times 366}{100} = 292,8$ (não é inteiro)

Assim, P_{80} é o elemento de ordem $[292,8] + 1$ na amostra ordenada, ou seja, o elemento de ordem 293.

Através das frequências absolutas acumuladas, observa-se que o elemento de ordem 293 é o 20. Assim, $P_{80} = 20$.

Podemos afirmar que, pelo menos, 80% dos jovens que estavam no festival tinham idade inferior ou igual a 20 ou que, no máximo, 20% dos jovens tinham idade superior a 20.