

MACS

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

10.º ANO

Elisabete Longo • Isabel Branco
Atividades complementares Eduardo Cunha



Planificação	4
Guia de exploração de recursos multimédia	11
Resolução de atividades do Manual	21
Atividades complementares	47
Fichas de trabalho	77
Teste de diagnóstico	113
Testes de avaliação	116
Teste global	144
Soluções	153

Introdução	3
Programa	4
Propostas de Planificações	4
Tema 1 Métodos de apoio à decisão	4
Tema 2 Estatística	7
Tema 3 Modelos matemáticos	9
Guia de exploração de recursos multimédia	11
Sugestões de Resolução de Algumas Atividades do Manual	21
Tema 1 Métodos de apoio à decisão	21
Teoria matemática das eleições	21
Teoria da partilha equilibrada	31
Tema 3 Modelos matemáticos	44
Problemas matemáticos da área financeira	44
Atividades complementares	47
1. Estratégias eleitorais	47
2. Ordem do dia e votação estratégica	52
3. Estudo eleitoral na minha freguesia	56
4. Código de César: a estatística na criptologia	59
5. Simuladores nos modelos financeiros	63
Fichas de trabalho	77
Teste de diagnóstico	113
Testes de avaliação	116
Teste global	144
Soluções	153
Fichas de trabalho	153
Teste de diagnóstico	157
Testes de avaliação	158
Teste global	159

Introdução

O presente **Caderno de Apoio do Professor** que irá acompanhar o Manual da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, para o curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades, pretende ser mais um auxiliar ao dispor do professor, que lhe facultará algumas propostas quer a nível de organização das aulas, quer a nível de sugestões de atividades.

Assim, para um maior apoio ao professor apresentamos juntamente com o Manual, que já contém muitos e variados exemplos e atividades, na sua maioria relativos a situações concretas da vida quotidiana, os seguintes materiais:

- Um conjunto de fichas de trabalho/avaliação que poderão ser polícopiadas e trabalhadas individualmente, ou em grupo, na sala de aula, como atividade extra para consolidação dos conteúdos (por exemplo, como trabalho de casa) ou até mesmo como elemento de avaliação. A razão pela qual decidimos não incluir fichas globais prende-se com o facto de que cada grupo ou turma em geral, e cada aluno em particular, serem casos distintos e o ritmo de trabalho e de aprendizagem ser muito variável. Assim, o professor poderá, com a variedade de exercícios e atividades propostas, criar as suas próprias fichas globais ou incluir apenas alguns exercícios dos diferentes temas.
- Um teste diagnóstico, seis testes com conteúdos limitados e de acordo com a ordem do Manual, e um teste global.
- Um Caderno de Exercícios com muitos e variados exercícios e atividades para consolidar conceitos e técnicas de cálculo. Por se tratar de um programa bastante inovador e porque muitas das justificações das atividades têm por base raciocínios e não cálculos, decidimos incluir neste Caderno de Apoio ao Professor algumas resoluções possíveis das atividades propostas relativamente ao **Tema 1 – Métodos de apoio à decisão** e **Tema 3 – Modelos financeiros**, bem como sugestões de atividades que nos pareceram oportunas.

Deste modo, o professor poderá obter neste Caderno mais um apoio, que esperamos que seja importante, nas diversas sugestões de resolução apresentadas.

O **Tema 1 – Métodos de apoio à decisão** e o **Tema 3 – Modelos matemáticos** são tratados com assuntos muito atuais e que fornecem inúmeras opções de trabalho de campo, que incentivam à investigação e ao espírito de iniciativa dos estudantes.

O **Tema 2 – Estatística** tem conteúdos que poderão ser facilmente aplicados em conjunto com os outros dois temas.

Programa

O Programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais é composto por três temas que estão organizados no manual da seguinte forma:

- **Tema 1: Métodos de apoio à decisão**

Capítulo 1 – Teoria matemática das eleições

Capítulo 2 – Teoria da partilha equilibrada

- **Tema 2: Estatística**

Capítulo 1 – Estatística

- **Tema 3: Modelos matemáticos**

Capítulo 1 – Modelos financeiros

À exceção do Capítulo 1 – Teoria matemática das eleições, que funciona como módulo inicial, devendo, por isso, ser o primeiro assunto a abordar, todos os outros podem ser reordenados pelo Professor de acordo com as condições em que trabalha, por forma a proporcionar um maior proveito aos seus alunos.

Propostas de Planificações

Fazemos de seguida uma referência aos objetivos da disciplina para cada tema bem como uma proposta de planificação. Relembramos que 1 aula corresponde a 90 minutos.

Tema 1: Métodos de apoio à decisão

Capítulo 1 – Teoria matemática das eleições (11 aulas)

Objetivos

- Perceber como se contabilizam os mandatos em algumas eleições.
- Perceber que os resultados podem ser diferentes se forem diferentes os métodos de contabilização.
- Estudar situações paradoxais.
- Analisar algumas condições para se ter um sistema adequado.
- Perceber que há limitações à melhoria dos sistemas.

Planificação

Conteúdos	Sugestões	N.º de aulas
1. Apresentação dos objetivos do capítulo, bem como da necessidade de uma teoria das eleições	Discussão, com a turma, sobre a necessidade de uma teoria das eleições. Os alunos poderão, discutir em grupo a atividade da pág. 8 e passar, posteriormente, as suas ideias à turma. Deverá ser feita uma pequena revisão de proporções e percentagens visto ser um pré-requisito para este tema. Para isso, podem resolver-se os exercícios de aplicação 1 a 16 na pág. 30	2
2. Sistema de votação maioritário. Paradoxo de Condorcet	Após a resolução dos exemplos apresentados no Manual (págs. 10 e 11), os alunos poderão resolver (em grupo) as atividades propostas (págs. 10 e 11) e os exercícios de aplicação indicados nas margens.	1
3. Sistema de votação preferencial 3.1 Método da pluralidade	Este método é muito simples pelo que pode dar-se algum tempo para os alunos resolverem o exemplo da pág. 12 e chegarem eles próprios a essa conclusão. Inicialmente, poderá existir alguma dificuldade na forma como é apresentada a informação (esquemas preferenciais) pelo que se pode sugerir a passagem para uma tabela. Em seguida, podem resolver a atividade da pág. 13.	1
3.2 Método run-off (simples e sequencial)	Os dois exemplos resolvidos são bastante clarificadores da aplicação e diferença entre estes dois métodos. Em seguida, os alunos podem resolver a atividade da pág. 16; a última alínea desta atividade é elucidativa da possibilidade de, com pequenas alterações, obter vencedores diferentes.	1
3.3 Método de Borda	O Manual apresenta, nas págs. 17 e 18 dois exemplos bastante elucidativos da aplicação deste sistema. Resolução (em grupo, por exemplo) da atividade proposta na pág. 18 e discussão das conclusões na aula. Poderão ainda resolver-se os exercícios sugeridos nas margens.	1
3.4 Método de Condorcet	O Manual apresenta na pág. 19 um exemplo bastante elucidativo da aplicação deste método. A atividade da pág. 20 poderá ser uma proposta para um trabalho de grupo a apresentar em sala de aula	1
4. Sistema de aprovação	A discussão dos dois exemplos apresentados no Manual, na pág. 24, evidenciam as vantagens deste sistema, conduzindo à observação de uma propriedade. Podem resolver-se, em seguida, a atividade da pág. 25 do Manual e os exercícios de aplicação indicados nas margens.	2
5. Atividades	Podem discutir-se as atividades propostas pelo Professor ou pelos alunos, ou então consolidar os conceitos do capítulo através da resolução de exercícios, quer os propostos no Manual, quer nas fichas fotocopiáveis (Fichas 1 a 3), quer no Caderno de Exercícios.	2(*)

(*) Estas aulas poderão ser repartidas ao longo do capítulo, sempre que o Professor considere oportuno uma aula, total ou parcialmente, dedicada à resolução de atividades/exercícios.

Capítulo 2 – Teoria da Partilha Equilibrada (32 aulas)

Objetivos

- Familiarizar os estudantes com as dificuldades de uma partilha equilibrada.
- Experimentar pelo menos um algoritmo numa situação real.
- Comparar a aplicação de dois algoritmos que produzam resultados diferentes numa mesma situação.

Planificação

Conteúdos	Sugestões	N.º de aulas
1. O que é uma divisão equilibrada?	• Podem discutir-se as atividades 1 a 5 propostas nas págs. 34 a 36 do Manual, que são sugestivas e que se prestam a diferentes interpretações e resultados finais	2
2. Os diferentes casos de partilhas	• Distinção entre os tipos de partilha a estudar, com exemplos sugeridos pelo Professor e pelos alunos: pode construir-se um esquema com exemplos de partilhas no caso discreto (divisão justa e proporcional) e partilhas no caso contínuo. Para isso, na aula anterior, o professor pode sugerir aos alunos que pesquisem na internet e levem para a aula exemplos de testamentos/partilhas	1
3. Partilhas no caso discreto – Divisão justa 3.1 Método do ajuste na partilha	• O Manual apresenta na pág. 38 um exemplo muito elucidativo e com explicação bastante pormenorizada da aplicação deste método. Os alunos poderão, após a resolução deste exemplo, tentar resolver os exemplos seguintes. A atividade da pág. 42 é uma oportunidade para desenvolver a comunicação matemática, pois o Professor pode pedir aos alunos que apresentem a resolução sob a forma de composição, na qual expliquem todo o processo de partilha.	1
3.2 Método das licitações secretas	• O Manual apresenta na pág. 43 um exemplo muito elucidativo e com explicação bastante pormenorizada da aplicação deste método. Os alunos poderão, após a resolução deste exemplo, tentar resolver os exemplos seguintes. A atividade da pág. 48 é uma oportunidade para desenvolver a comunicação matemática, pois o Professor pode pedir aos alunos que apresentem a resolução sob a forma de composição, na qual expliquem todo o processo de partilha. Poderão também enriquecer o trabalho com a utilização de uma folha de cálculo.	2
3.3 Método dos marcadores	• O Manual apresenta na pág. 49 um exemplo muito elucidativo e com explicação bastante pormenorizada da aplicação deste método. Os alunos poderão, após a resolução deste exemplo, tentar resolver os exemplos seguintes. A atividade da pág. 52 é uma oportunidade para desenvolver a comunicação matemática, pois o Professor pode pedir aos alunos que apresentem a resolução sob a forma de composição, na qual expliquem todo o processo de partilha.	1
4. Partilhas no caso discreto – Divisão proporcional Método de Hondt	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a aplicação dos passos do método de Hondt ao exemplo do Manual (pág. 54), passando depois ao exemplo, mais real, proposto na pág. 55 e à resolução, em grupo, da atividade da pág. 58.	2
5. Método de Hamilton	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução dos exemplos/atividades propostos no Manual nas págs. 59 e 60 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	2
6. Método de Jefferson	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução dos exemplos/atividades propostos no Manual nas págs. 60-61.	2

7. Método de Adams	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução dos exemplos/ atividades propostos no Manual nas págs. 62 e 63 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	2
8. Método de Webster	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução dos exemplos/ atividades propostos no Manual na pág. 64 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	2
9. Método de Huntington-Hill	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução dos exemplos/ atividades propostos no Manual nas págs. 65 e 66 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	2
10. Partilhas no caso contínuo – Método do divisor único	• Para confrontar os alunos com a necessidade da existência de métodos de partilha no caso contínuo, pode colocar-se à discussão (em grupo), por exemplo, a divisão de um bolo por dois, três ou quatro pessoas (relembrar a atividade da pág. 34). Sugere-se, em seguida, o acompanhamento na resolução da atividade proposta no Manual na pág. 68 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens.	2
11. Método do selecionador único	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução da atividade proposta no Manual na pág. 69 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens.	1
12. Método do último a diminuir	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução da atividade proposta no Manual na pág. 69 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	1
13. Método livre de inveja	• Acompanhar, utilizando o Powerpoint, a resolução da atividade proposta no Manual na pág. 70 e dos exercícios de aplicação indicados nas margens	2
14. Atividades	• Podem discutir-se atividades propostas pelo Professor ou pelos alunos, ou então consolidar os conceitos do capítulo através da resolução de exercícios, quer os propostos no Manual (exercícios de aplicação e exercícios globais), quer as fichas fotocopiáveis (Fichas 4 a 9), quer os do Caderno de Exercícios	8(*)

(*) Estas aulas poderão ser repartidas ao longo do capítulo, sempre que o Professor considere oportuno uma aula, total ou parcialmente, dedicada à resolução de atividades/exercícios.

Tema 2: Estatística

Capítulo 1 – Estatística (40 aulas)

Objetivos

- Familiarizar os alunos com a leitura e interpretação da informação transmitida através de tabelas e gráficos.
- Apresentar as ideias básicas dos processos conducentes à recolha de dados válidos.
- Fazer sentir a necessidade de tornar aleatórios os processos de recolha de dados.
- Fazer sentir a necessidade de organizar os dados de forma a fazer sobressair a informação neles contida.
- Fazer sentir a necessidade de alguma metodologia na organização dos dados.
- Habilitar os alunos na utilização de ferramentas mais adequadas para o tratamento dos diferentes tipos de dados.
- Ensinar a fazer uma leitura adequada dos gráficos.
- Apresentar medidas que, tal como as representações gráficas, permitem reduzir a informação contida nos dados.
- Apresentar um modo eficaz de visualizar a associação entre duas variáveis.
- Saber interpretar o «tipo» e a «força» com que duas variáveis se associam.

- Ensinar a sumariar a relação linear existente entre duas variáveis através de uma reta.
- Apresentar uma medida que, além de indicar a «força» com que duas variáveis se associam linearmente, também dá indicação da correção do ajustamento linear.
- Apresentar um modo eficaz de organizar informação de tipo qualitativo.
- Chamar a atenção para a utilização incorreta que por vezes se faz da leitura de percentagens a partir de tabelas.

Planificação

Conteúdos	Sugestões	N.º de aulas
1. Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos	• Podem ser resolvidas as atividades das págs. 92-98 do Manual e até solicitar aos alunos a procura de gráficos e tabelas (em jornais, revistas, internet, etc.) para serem analisados na aula, ou como trabalho de casa, e para posterior apresentação/discussão. Poderão ser realizadas as fichas fotocopiáveis 10 e 12.	5
2. Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações	• Os alunos poderão efetuar, logo de início, recolhas de dados, através de inquéritos dentro da sala de aula, e organizá-los de forma a poderem ser utilizados posteriormente. Sugere-se a resolução das atividades da pág. 100 do Manual.	2
3. Fases de um estudo estatístico. Elaboração de pequenos projetos com dados recolhidos na escola, com construção de tabelas e gráficos simples	• Os inquéritos que os alunos aprenderam a elaborar e a aplicar dentro da sala de aula poderão ser agora modificados de forma a serem utilizados fora da aula. A primeira destas três aulas poderá ser dedicada à divisão da turma em grupos de trabalho, à escolha do estudo estatístico que cada grupo vai desenvolver e a delinear cada fase do trabalho (nomeadamente a elaboração do inquérito a aplicar). Nas restantes duas aulas, os alunos procederão ao tratamento dos dados recolhidos através dos inquéritos.	3
4. Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 102-104 do Manual com a posterior resolução das atividades com eles relacionadas e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. A calculadora poderá ser uma ótima ferramenta nestas aulas.	3
5. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos considerados	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 106-117 do Manual, com a posterior resolução das atividades com eles relacionadas e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. A calculadora poderá ser uma ótima ferramenta nestas aulas.	5
6. Cálculo de estatísticas: • Medidas de localização • Medidas de dispersão	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 119-141 do Manual, com a posterior resolução das atividades com eles relacionadas e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. Sugere-se o acompanhamento na resolução de exercícios sobre a distribuição normal. A calculadora poderá ser uma ótima ferramenta nestas aulas. Sugere-se a apresentação dos <i>powerpoint</i> sobre medidas de localização e dispersão bem como de distribuição normal.	8 (4 + 4)
7. Atividades	• Sugere-se uma pausa de três aulas, nas quais se poderão consolidar os conceitos, introduzidos até este ponto, através da resolução de exercícios, quer propostos no Manual (exercícios de aplicação e exercícios globais), quer nas fichas fotocopiáveis (Fichas 13 a 14), quer no Caderno de Exercícios.	3

8. Introdução gráfica à análise de dados bivariados quantitativos	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 142-146 do Manual, com a posterior resolução das atividades com eles relacionados.	2
9. Modelos de regressão linear	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 147-151 do Manual, com a posterior resolução das atividades relacionadas. A calculadora poderá ser uma ótima ferramenta nestas aulas.	4
10. Tabelas de contingência	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 156-157 do Manual, com a posterior resolução das atividades relacionadas. A calculadora poderá ser uma ótima ferramenta nestas aulas.	1
11. Atividades	• Podem discutir-se as atividades propostas pelo Professor ou pelos alunos, ou então consolidar os conceitos do Tema através da resolução de exercícios, quer os propostos no Manual (exercícios de aplicação e exercícios globais), quer no Caderno de Exercícios, quer as fichas fotocopiáveis (ficha 15) do Caderno de Apoio ao Professor.	4(*)

(*) Estas aulas poderão ser repartidas ao longo do capítulo, sempre que o Professor considere oportuno uma aula, total ou parcialmente, dedicada à resolução de atividades/exercícios.

Como já sugerimos na planificação, no início do estudo da Estatística os alunos deveriam elaborar um inquérito que contenha algumas variáveis a serem estudadas como, por exemplo, a idade, o peso, a altura, o género sexual, a cor dos olhos, idade dos pais, número de irmãos, tempo gasto diariamente em transportes, distância de casa à escola, entre outras. Assim, o Professor poderá fornecer aos alunos algumas normas para a elaboração de inquéritos.

Normas para a elaboração de um inquérito
Antes da elaboração dos inquéritos deve haver uma definição exata da informação que é necessário obter. Na construção do inquérito devem ter-se em atenção os seguintes aspetos: • Recolha de toda a informação necessária ao estudo. • Formulação de questões claras e objetivas (cada questão deve possibilitar uma única interpretação). • Questões de resposta fechada. • Poucas alternativas de resposta (cerca de quatro é o ideal), mas que abranjam várias escolhas (para garantir que, qualquer que seja a situação do inquirido, exista uma alternativa em que este se enquadre).

Tema 3: Modelos matemáticos

Capítulo 1 – Modelos financeiros (10 aulas)

Objetivos

- Familiarizar os estudantes com alguns problemas do domínio financeiro.
- Recordar técnicas e conceitos matemáticos já abordados no ensino básico.
- Identificar a matemática utilizada em situações realistas.
- Desenvolver competências sociais de intervenção – tomar conhecimento dos métodos utilizados pelas instituições (públicas e privadas) que influenciam a vida dos cidadãos, ganhar capacidade para construir e criticar opções e utilizar o conhecimento para decidir sobre opções individuais.
- Desenvolver competências de cálculo e de seleção de ferramentas adequadas a cada problema: calculadora, computador e folha de cálculo.

Planificação

Conteúdos	Sugestões	N.º de aulas
1. Impostos	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 182, 185-186 e 187-189 do Manual, com a posterior resolução das atividades propostas e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. A calculadora e a folha de cálculo são ferramentas importantes nesta aula.	1
2. Inflação	• Sugere-se a observação atenta do exemplo da pág. 191 do Manual, com a posterior resolução das atividades e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. A calculadora e a folha de cálculo são ferramentas importantes nesta aula.	1
3. Atividade bancária	• Sugere-se a observação atenta dos exemplos das págs. 193-207 do Manual, com a posterior resolução das atividades e dos exercícios de aplicação indicados nas margens. A calculadora e a folha de cálculo são ferramentas importantes nestas aulas.	3
4. Aluguer ou compra	• Sugere-se a resolução das atividades das págs. 208 e 209 do Manual e de exercícios do Caderno de Exercícios. A calculadora e a folha de cálculo são ferramentas importantes nesta aula.	1
5. Tarifários	• Sugere-se a resolução dos exemplos/atividades das págs. 211-215 do Manual e de exercícios do Caderno de Exercícios.	1
6. Apresentação de trabalhos de investigação de modelos envolvendo juros elaborados pelos alunos	• Os alunos procedem à apresentação dos trabalhos de investigação por eles elaborados (em grupo ou individualmente). Sugere-se que, se for um trabalho de grupo, a apresentação deverá ser feita por todos os elementos do grupo (isto é, cada elemento deverá ter a responsabilidade da apresentação de uma parte do trabalho).	1
7. Atividades	• Podem discutir-se as atividades propostas pelo professor ou pelos alunos e/ou consolidar os conceitos do tema através da resolução dos exercícios propostos no Manual (exercícios de aplicação e exercícios globais), nas fichas fotocopiáveis (fichas 16 e 17) e no Caderno de Exercícios	2(*)

(*) Estas aulas poderão ser repartidas ao longo do capítulo, sempre que o Professor considere oportuno uma aula, total ou parcialmente, dedicada à resolução de atividades/exercícios.

Guia de exploração de recursos multimédia

20 AULA DIGITAL «MACS 10»

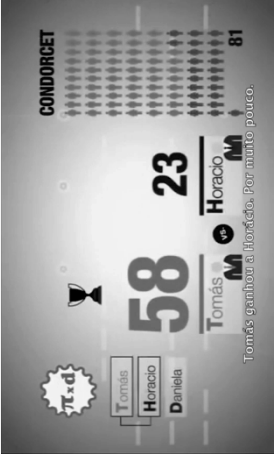
O **20 AULA DIGITAL** é uma ferramenta inovadora que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto «MACS 10» através das novas tecnologias. Permite o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia associados ao manual:

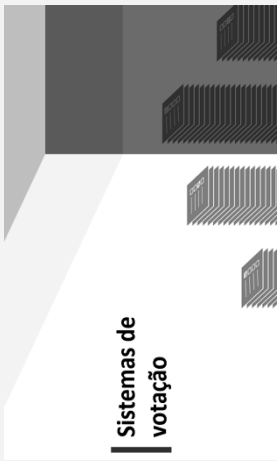
- Animações.
- Vídeos.
- Apresentações em PowerPoint® e respetivas propostas de exploração.
- Fichas de trabalho.

Este documento constitui uma proposta de exploração dos conteúdos multimédia presentes no manual. Apresenta, igualmente, a listagem de todos os recursos, ordenados por páginas, que estarão disponíveis com o projeto no **20 AULA DIGITAL**.

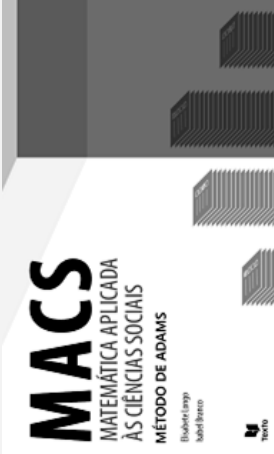
Listagem geral dos recursos multimédia de MACS 10		
Tipologia de recurso	Títulos	
Vídeos	Recursos que explicam os conteúdos programáticos de forma apelativa.	
	Total de vídeos disponíveis no projeto: 2	
Animações	Recursos que abordam os principais conteúdos com recurso a exemplos.	
	Total de animações disponíveis no projeto: 3	

Listagem geral dos recursos multimédia de MACS 10		
Tipologia de recurso	Títulos	
Apresentações PowerPoint® Recurso editável, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática. Total de apresentações PowerPoint® disponíveis no projeto: 15	• Métodos de apoio à decisão (página 8) (demo) • Método do ajuste na partilha (página 37) (demo) • Método das licitações secretas (página 43) (demo) • Método dos marcadores (página 49) (demo) • Método de Hamilton (página 59) (demo) • Método de Jefferson (página 60) (demo) • Método de Adams (página 62) (demo) • Método de Webster (página 63) (demo) • Método de Huntington-Hill (página 65) (demo) • Método do divisor único (página 68) (demo) • Método do último a diminuir (página 69) (demo) • Método livre de inveja (página 70) (demo) • Medidas de localização e dispersão (página 134) • Distribuição normal (página 140) • Atividade bancária (página 192)	
	Resoluções projetáveis Recurso que permite projetar resoluções de atividades do manual, rentabilizando o tempo na sala de aula.	

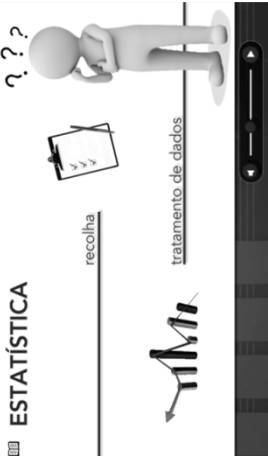
Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
8	Matemática e Sufrágio  Vídeo que apresenta exemplos e a forma como se aplicam os diversos sistemas de votação. Mostra as limitações dos sistemas, estabelecendo comparações entre eles.	Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições. Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes. Estudar algumas situações paradoxais. Analisar algumas condições para ter um sistema adequado. Compreender que há limitações à melhoria dos sistemas.	- Assistir ao vídeo para apresentar os sistemas de votação. - Pausar o vídeo sempre que achar pertinente, nomeadamente para aprofundar informação ou esclarecer dúvidas. - Fomentar um debate com os alunos explorando as limitações dos sistemas.
8	Métodos de apoio à decisão  Apresentação PowerPoint® editável sobre os métodos de apoio à decisão, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições. Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes. Compreender que há limitações à melhoria dos sistemas.	Este powerpoint® poderá ser apresentado aos alunos em duas ocasiões diferentes: - antes de iniciar o Tema 1, para dar a conhecer aos alunos os tópicos a tratar em Métodos de Apoio à Decisão; - no final do Tema 1, para recapitular e dar uma visão geral de todos os métodos abordados.

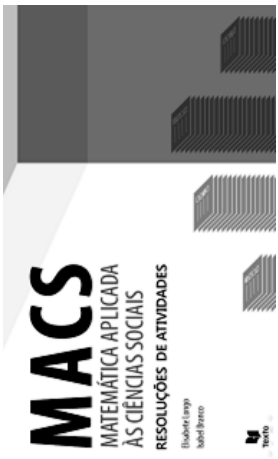
Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
9	Sistemas de votação  Animação que apresenta exemplos e a forma como se aplicam os diversos sistemas de votação.	Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições. Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes.	• Apresentar a animação otimizando o processo de ensino-aprendizagem, com exemplos complementares aos do manual. • Fomentar um debate com os alunos explorando as limitações dos sistemas.
37	Método do ajuste na partilha  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método do ajuste na partilha, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Proceder a uma breve leitura do algoritmo e esclarecer eventuais dificuldades de interpretação dos alunos. • Propor a resolução do exemplo incluído, a qual poderá ser feita pelos alunos, em grupos. • Disponibilizar a solução do problema proposto e poderá fazer-se um pequeno debate, com a exposição das principais dificuldades com que os alunos se depararam.
43	Método das licitações secretas  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método das licitações secretas, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Proceder a uma breve leitura do algoritmo e esclarecer eventuais dificuldades de interpretação dos alunos. • Propor a resolução do exemplo incluído, a qual poderá ser feita pelos alunos, em grupos. • Disponibilizar a solução do problema proposto e poderá fazer-se um pequeno debate, com a exposição das dificuldades com que os alunos se depararam, algumas das quais estão inerentes a este método (a necessidade dos intervenientes terem dinheiro suficiente para compensar os outros, o facto de poderem não ficar ou nenhum dos itens ou até com todos, ...).

Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
49	Método dos marcadores  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método dos marcadores, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Proceder a uma breve leitura do algoritmo e esclarecendo eventuais dificuldades de interpretação dos alunos. • A resolução do exemplo incluído poderá ser feita pelos alunos, em grupos, e, após a confirmação da solução do problema proposto, poderá fazer-se um pequeno debate, com a exposição das principais dificuldades com que os alunos se depararam.
59	Método de Hamilton  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de Hamilton, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Começar por ocultar todos os passos do algoritmo à exceção do primeiro. Os alunos devem aplicar este primeiro passo à situação concreta do powerpoint®. • Passar para o segundo passo do algoritmo, que os alunos aplicam. É importante que os alunos percebam que, neste segundo passo, procedem ao cálculo dos lugares que, proporcionalmente, cabem a cada Estado. A partir do terceiro passo do algoritmo começam a surgir as diferenças entre este e os outros métodos de partilha no caso discreto. • Depois da aplicação de todos os passos do algoritmo, mostrar a resolução presente no powerpoint® para que os alunos confirmem os resultados.
60	Método de Jefferson  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de Jefferson, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Começar por ocultar todos os passos do algoritmo à exceção do primeiro. Os alunos devem aplicar este primeiro passo à situação concreta do powerpoint®. • Passar para o segundo passo do algoritmo, que os alunos aplicam. É importante que os alunos percebam que, neste segundo passo, procedem ao cálculo dos lugares que, proporcionalmente, cabem a cada Estado. A partir do terceiro passo do algoritmo começam a surgir as diferenças entre este e os outros métodos de partilha no caso discreto. • Depois da aplicação de todos os passos do algoritmo, o professor mostra a resolução presente no powerpoint® para que os alunos confirmem os resultados.

Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
62	Método de Adams  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de Adams, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Começar por ocultar todos os passos do algoritmo à exceção do primeiro. Os alunos devem aplicar este primeiro passo à situação concreta do powerpoint®. • Passar para o segundo passo do algoritmo, que os alunos aplicam. É importante que os alunos percebam que, neste segundo passo, procedem ao cálculo dos lugares que, proporcionalmente, cabem a cada Estado. A partir do terceiro passo do algoritmo começam a surgir as diferenças entre este e os outros métodos de partilha no caso discreto. • Depois da aplicação de todos os passos do algoritmo, o professor mostra a resolução presente no powerpoint® para que os alunos confirmem os resultados.
63	Método de Webster  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de Webster, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Começar por ocultar todos os passos do algoritmo à exceção do primeiro. Os alunos devem aplicar este primeiro passo à situação concreta do powerpoint®. • Passar para o segundo passo do algoritmo, que os alunos aplicam. É importante que os alunos percebam que, neste segundo passo, procedem ao cálculo dos lugares que, proporcionalmente, cabem a cada Estado. A partir do terceiro passo do algoritmo começam a surgir as diferenças entre este e os outros métodos de partilha no caso discreto. • Depois da aplicação de todos os passos do algoritmo, o professor mostra a resolução presente no powerpoint® para que os alunos confirmem os resultados.
65	Método de Huntington-Hill  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de Huntington-Hill, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Começar por ocultar todos os passos do algoritmo à exceção do primeiro. Os alunos devem aplicar este primeiro passo à situação concreta do powerpoint®. • Passar para o segundo passo do algoritmo, que os alunos aplicam. É importante que os alunos percebam que, neste segundo passo, procedem ao cálculo dos lugares que, proporcionalmente, cabem a cada Estado. A partir do terceiro passo do algoritmo começam a surgir as diferenças entre este e os outros métodos de partilha no caso discreto. • Depois da aplicação de todos os passos do algoritmo, o professor mostra a resolução presente no powerpoint® para que os alunos confirmem os resultados.

Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
68	Método do divisor único  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método do divisor único, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Apresentar o powerpoint® mostrando apenas a breve definição do método e o enunciado do problema nele proposto. • Os alunos deverão discutir em grupo a forma de aplicar o método à situação apresentada. Deverão explicar, por escrito, os raciocínios que foram seguidos, bem como as conclusões a que chegaram. • Sugere-se que, antes de ver a proposta de resolução, cada grupo de alunos presente, perante a turma, o processo que seguiu e as conclusões que tirou.
68	Método do selecionador único  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método de selecionador único, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Apresentar o powerpoint® mostrando apenas a breve definição do método e o enunciado do problema nele proposto. • Os alunos deverão discutir em grupo a forma de aplicar o método à situação apresentada. Deverão explicar, por escrito, os raciocínios que foram seguidos, bem como as conclusões a que chegaram. • Sugere-se que, antes de ver a proposta de resolução, cada grupo de alunos presente, perante a turma, o processo que seguiu e as conclusões que tirou.
69	Método do último a diminuir  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método do último a diminuir, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Apresentar o powerpoint® mostrando apenas a breve definição do método e o enunciado do problema nele proposto. • Os alunos deverão discutir em grupo a forma de aplicar o método à situação apresentada. Deverão explicar, por escrito, os raciocínios que foram seguidos, bem como as conclusões a que chegaram. • Sugere-se que, antes de ver a proposta de resolução, cada grupo de alunos presente, perante a turma, o processo que seguiu e as conclusões que tirou.

Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
70	Método livre de inveja  Apresentação PowerPoint® editável sobre o método livre de inveja, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Conhecer as dificuldades de uma partilha equilibrada. Aplicar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (atual ou histórica).	• Apresentar o powerpoint® mostrando apenas a breve definição do método e o enunciado do problema nele proposto. • Os alunos deverão discutir em grupo a forma de aplicar o método à situação apresentada. Deverão explicar, por escrito, os raciocínios que foram seguidos, bem como as conclusões a que chegaram. • Sugere-se que, antes de ver a proposta de resolução, cada grupo de alunos apresente, perante a turma, o processo que seguiu e as conclusões que tirou.
90	Estatística  Vídeo que apresenta conceitos introdutórios de estatística.	Ler e interpretar informação transmitida através de tabelas e gráficos.	• Assistir ao vídeo para introduzir conceitos de estatística. • Pausar o vídeo sempre que achar pertinente, nomeadamente para aprofundar informação ou esclarecer dúvidas. • Fomentar um debate com os alunos pedindo-lhe que relacionem estes conceitos com exemplos da vida real.
134	Medidas de localização e dispersão  Apresentação PowerPoint® editável sobre medidas de localização e dispersão, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Reconhecer medidas, que tal como as representações gráficas, permitem reduzir a informação contida nos dados. Analisar as vantagens e as situações em que não se devem calcular.	• Introduzir cada uma das medidas de localização e dispersão através de exemplos relacionados com a vida real. • Fomentar um debate com os alunos explorando as vantagens e desvantagens das medidas de localização e dispersão.

Página	Recurso	Objetivos	Sugestões de exploração
192	Atividade bancária  Apresentação PowerPoint® editável sobre atividade bancária, com os conteúdos abordados de uma forma sintética e esquemática.	Reconhecer alguns problemas do domínio financeiro.	• Introduzir os diferentes tipos de situações bancárias recorrendo a exemplos relacionados com a vida real. • Fomentar um debate com os alunos pedindo-lhe que relacionem estas noções com exemplos da vida real.
	Resoluções de atividades  Resoluções de atividades do manual num formato que permite projetar em sala de aula.		• Apresentar o enunciado e discutir com os alunos a resolução apresentada.

Sugestões de resolução de algumas atividades do Manual

Tal como referido na introdução deste Caderno de Apoio ao Professor, apresentamos em seguida algumas sugestões de resolução de atividades do **Tema 1 – Métodos de apoio à decisão** – e do **Tema 3 – Modelos matemáticos** –, por serem aqueles que envolvem alguns raciocínios matemáticos diferentes daqueles com que alunos e professores estão mais familiarizados.

Tema 1 – Métodos de apoio à decisão

Capítulo 1 — Teoria matemática das eleições

• Atividade 1 (pág. 8)

Os alunos devem trabalhar em grupo e justificar as suas decisões.

As respostas mais prováveis são que se B e C se juntam, ganham por maioria absoluta. Caso contrário, ganhará a lista A por maioria relativa. E há sempre a hipótese de se repetir a eleição.

• Atividade 1 (pág. 10)

1.1 Votaram $150 + 120 = 270$ pessoas .

1.2 A percentagem de votos obtida pelo Jorge foi $\frac{150}{270} \times 100 = 55,56\%$.

A percentagem de votos obtida pelo Carlos foi $\frac{120}{270} \times 100 = 44,44\%$.

1.3 O vencedor é o Jorge, por maioria absoluta.

1.4 Votos do Paulo: $270 - (100 + 95) = 75$.

1.5 A percentagem de votos obtida pelo Jorge foi $\frac{95}{270} \times 100 = 35,19\%$.

A percentagem de votos obtida pelo Carlos foi $\frac{100}{270} \times 100 = 37,04\%$.

A percentagem de votos obtida pelo Paulo foi $\frac{75}{270} \times 100 = 27,78\%$.

1.6 O vencedor é o Carlos.

1.7 Não, porque nenhum dos candidatos obteve, pelo menos, metade de todos os votos, mais um.

• Atividade 2 (pág. 11)

Nesta atividade, é pedido aos alunos que elaborem um relatório.

O Professor deverá dar-lhes indicações sobre o modo como se elabora um relatório.

Poderá ser dada uma ficha como a que se segue:

Guião para a elaboração de um relatório

Na elaboração de um relatório deve ter em conta os seguintes aspetos:

- | | |
|---|----------------------------|
| • Identificação do aluno ou do grupo de trabalho. | • Resultados obtidos. |
| • Título. | • Conclusões. |
| • Formulação do problema. | • Sugestões. |
| • Metodologia utilizada. | • Bibliografia consultada. |

Sugere-se que o relatório seja subdividido em partes que envolvam os seguintes tópicos:

1) Formulação do problema

2) Metodologia utilizada

Nesta parte do relatório deve ser feita uma descrição do procedimento utilizado, ou seja, as técnicas de recolha e dados adoptadas, o modo como foi seleccionada a amostra, qual a extensão da amostra, etc.

3) Resultados

Deve ser feita a descrição dos dados usando tabelas ou gráficos, e a análise e interpretação dos resultados.

4) Conclusões e sugestões

O Professor, na avaliação do relatório, deverá observar os seguintes itens:

- Organização do trabalho
- Clareza de raciocínio
- Descrição e justificação dos procedimentos utilizados
- Correção da linguagem utilizada
- Correção dos conceitos matemáticos envolvidos
- Criatividade

Poderá utilizar uma grelha de avaliação como a que se segue:

Itens	Grupos					Pontuação
	A	B	C	D	E	
Organização						2
Descrição e justificação da metodologia						6
Correção dos conceitos matemáticos						4
Clareza de raciocínio						3
Correção da linguagem						3
Criatividade						2

• Atividade 3 (pág. 13)

3.1 Facilmente se faz a contagem de primeiros lugares de cada candidato:

A: $3 + 8 = 11$ votos

B: 14 votos

C: 13 votos

D: 6 votos

3.2 É o candidato B, pois é aquele que tem maior percentagem de primeiros lugares, como podemos constatar:

A: $\frac{11}{44} \times 100 \approx 25\%$

B: $\frac{14}{44} \times 100 \approx 31,8\%$

C: $\frac{13}{44} \times 100 \approx 29,6\%$

D: $\frac{6}{44} \times 100 \approx 13,6\%$

• **Atividade 4 (pág. 16)**

4.1

4.1.1 Por *run-off* simples, procedemos, logo de início, à eliminação de todos os candidatos, exceto os dois que obtiveram maior número de primeiros lugares; assim, eliminam-se os candidatos A e D. Faz-se nova contagem, agora apenas com os candidatos B e C:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	D	A	C	B
2. ^a	D	B	B	A	C
3. ^a	C	A	C	D	A
4. ^a	B	C	D	B	D

B: $6 + 8 + 14 = 28$ votos

C: $3 + 13 = 16$ votos

Vence o candidato B.

4.1.2 Por *run-off* sequencial, eliminamos primeiro o candidato D, pois é o que tem menor número de primeiros lugares:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	D	A	C	B
2. ^a	D	B	B	A	C
3. ^a	C	A	C	D	A
4. ^a	B	C	D	B	D

Em seguida, reorganiza-se a tabela:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	B	A	C	B
2. ^a	C	A	B	A	C
3. ^a	B	C	C	B	A

e procedemos a nova contagem:

A: $3 + 8 = 11$ votos

B: $6 + 14 = 20$ votos

C: 13 votos

O candidato A é eliminado:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	B	A	C	B
2. ^a	C	A	B	A	C
3. ^a	B	C	C	B	A

Agora, a tabela tem apenas dois candidatos:

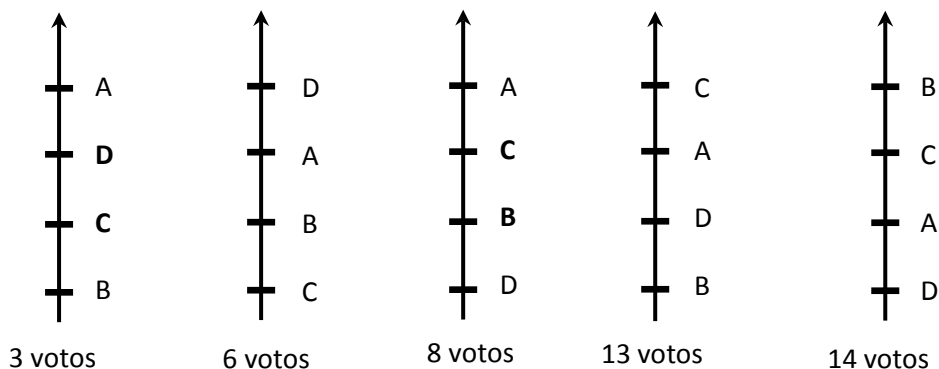
	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	C	B	B	C	B
2. ^a	B	C	C	B	C

sendo agora a contagem:

B: $6 + 8 + 14 = 28$ votos e **C:** $3 + 13 = 16$ votos

Vence o candidato B.

4.2 Com duas pequenas alterações nos esquemas de preferência, podemos obter vencedores diferentes por aplicação dos diferentes métodos:



Verifiquemos:

Método da pluralidade

Façamos a contagem de primeiras preferências de cada candidato:

A: $3 + 8 = 11$ votos **B:** 14 votos **C:** 13 votos **D:** 6 votos

Vence o candidato B.

Método *run-off* simples

Eliminam-se os candidatos A e D:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	D	A	C	B
2. ^a	D	A	B	A	C
3. ^a	C	B	C	D	A
4. ^a	B	C	D	B	D

Reorganiza-se a tabela:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	C	B	C	C	B
2. ^a	B	C	B	B	C

Agora a contagem é:

B: $6 + 14 = 20$ votos e **C:** $3 + 8 + 13 = 24$ votos

Vence o candidato C.

Método *run-off* sequencial

O candidato D é eliminado:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	D	A	C	B
2. ^a	D	A	B	A	C
3. ^a	C	B	C	D	A
4. ^a	B	C	D	B	D

Reorganiza-se a tabela:

	Votos				
Preferências	3	6	8	13	14
1. ^a	A	A	A	C	B
2. ^a	C	B	C	A	C
3. ^a	B	C	B	B	A

e procedemos a nova contagem:

A: $3 + 6 + 8 = 17$ votos **B:** 14 votos **C:** 13 votos

O candidato C é eliminado:

Preferências	Votos				
	3	6	8	13	14
1. ^a	A	A	A	C	B
2. ^a	C	B	C	A	C
3. ^a	B	C	B	B	A

Agora, a tabela tem apenas dois candidatos:

Preferências	Votos				
	3	6	8	13	14
1. ^a	A	A	A	A	B
2. ^a	B	B	B	B	A

A contagem é agora:

A: $3 + 6 + 8 + 13 = 30$ e **B:** 14 votos

Vence o candidato A.

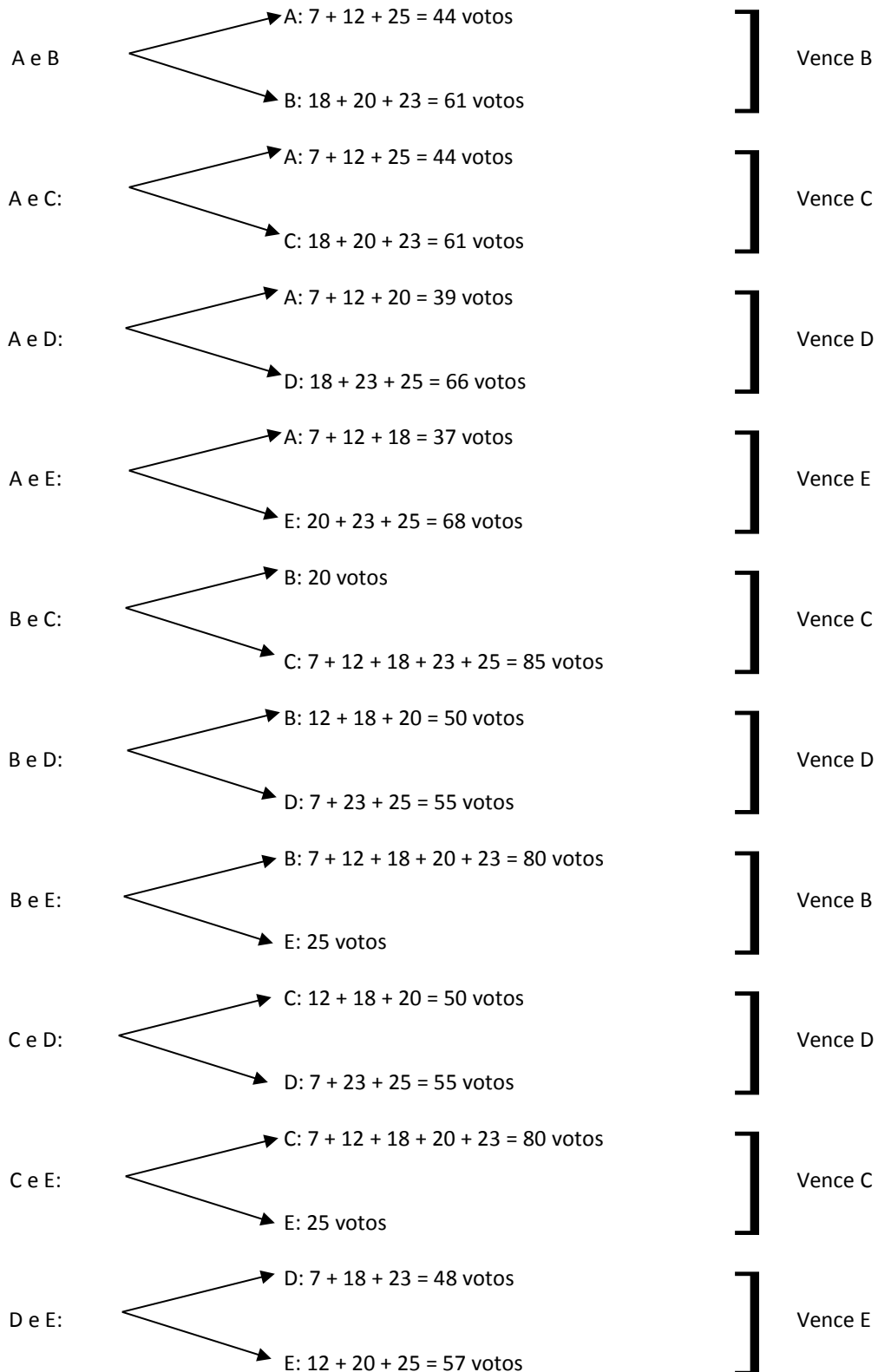
Obtemos, assim, vencedores diferentes (B, C e A) usando os diferentes métodos. Os alunos podem verificar que pequenas alterações nas preferências dos eleitores podem provocar alterações nos vencedores de uma eleição.

• Atividade 5 (pág. 18)

Esta atividade pode ser resolvida individualmente por cada aluno ou pode ser aproveitada para um trabalho de grupo que os alunos preparem e, eventualmente, apresentem aos colegas. Poderão usar uma folha de cálculo para a contagem das pontuações com as diferentes escalas escolhidas.

• **Atividade 6 (pág. 20)**

Vamos fazer a comparação das votações dos candidatos dois a dois:



Não há vencedor de Condorcet, pois, quando confrontados dois a dois, nenhum candidato vence todos os outros.

• **Atividade 7 (pág. 23)**

Apresentamos um exemplo, com seis candidatos e 80 eleitores, em que poderemos obter vencedores diferentes ou, até, nenhum vencedor (como veremos no caso do método de Condorcet).

Preferências	Votos					
	17	16	15	14	10	8
1. ^a	B	C	E	D	F	F
2. ^a	C	D	D	E	D	C
3. ^a	F	E	A	C	E	D
4. ^a	D	B	B	F	B	A
5. ^a	A	A	F	A	C	E
6. ^a	E	F	C	B	A	B

Método da pluralidade

Façamos a contagem do número de primeiros lugares de cada candidato:

A: 0 votos **C:** 16 votos **E:** 15 votos
B: 17 votos **D:** 14 votos **F:** 10 + 8 = 18 votos

Vence o candidato F.

Método *run-off* simples

Eliminam-se todos os candidatos, excepto os dois que têm maior número de primeiros lugares, isto é, A, C, D e E.

Método *run-off* sequencial

Elimina-se o candidato com menor número de primeiros lugares, o candidato A, e reorganiza-se a tabela:

Preferências	Votos					
	17	16	15	14	10	8
1. ^a	B	C	E	D	F	F
2. ^a	C	D	D	E	D	C
3. ^a	F	E	B	C	E	D
4. ^a	D	B	F	F	B	E
5. ^a	E	F	C	B	C	B

Faz-se nova contagem:

B: 17 votos **C:** 16 votos **D:** 14 votos **E:** 15 votos **F:** 10 + 8 = 18 votos

Elimina-se, agora, o candidato D e reorganiza-se a tabela:

Preferências	Votos					
	17	16	15	14	10	8
1. ^a	B	C	E	E	F	F
2. ^a	C	E	B	C	E	C
3. ^a	F	B	F	F	B	E
4. ^a	E	F	C	B	C	B

Mais uma vez, faz-se a contagem:

B: 17 votos

C: 16 votos

E: 15 + 14 = 29 votos

F: 10 + 8 = 18 votos

Sai, agora, o candidato C:

Preferências	Votos					
	17	16	15	14	10	8
1. ^a	B	E	E	E	F	F
2. ^a	F	B	B	F	E	E
3. ^a	E	F	F	B	B	B

A contagem é agora:

B: 17 votos

E: 16 + 15 + 14 = 45 votos

F: 10 + 8 = 18 votos

É a vez de sair o candidato B e de os dois últimos candidatos disputarem o primeiro lugar:

Preferências	Votos					
	17	16	15	14	10	8
1. ^a	F	E	E	E	F	F
2. ^a	E	F	F	F	E	E

A contagem final é:

E: 16 + 15 + 14 = 45 votos

F: 17 + 10 + 8 = 35 votos

O candidato E é o vencedor.

Método de Borda

Atribuindo 6 pontos à primeira preferência, 5 à segunda, ... e 1 ponto à última preferência, vamos fazer a contagem dos pontos de cada um dos candidatos:

A: $47 \times 2 + 15 \times 4 + 10 + 8 \times 3 = 188$

B: $17 \times 6 + 41 \times 3 + 22 = 247$

C: $25 \times 5 + 16 \times 6 + 15 + 14 \times 4 + 10 \times 2 = 312$

D: $17 \times 3 + 41 \times 5 + 14 \times 6 + 8 \times 4 = 372$

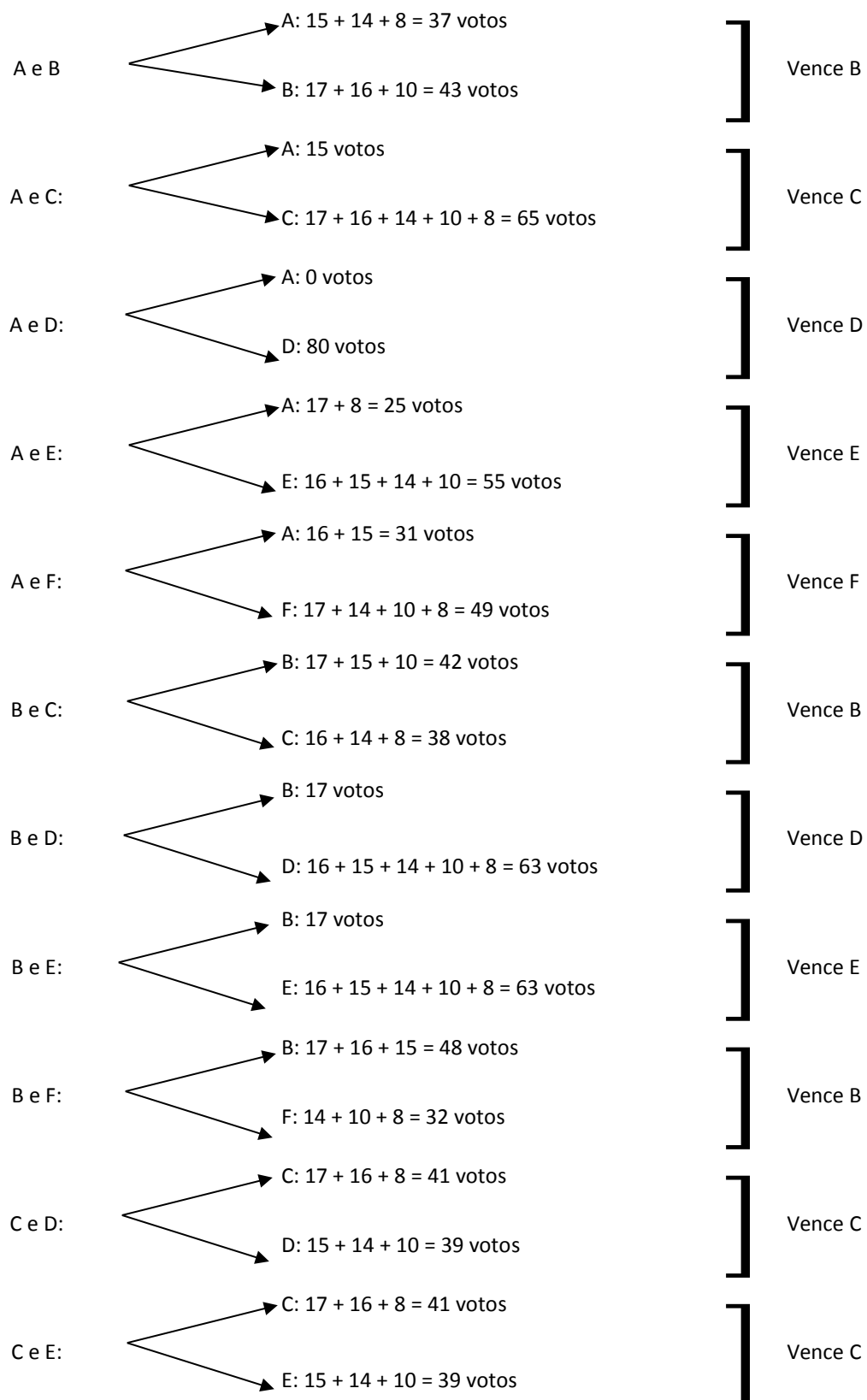
E: $17 + 26 \times 4 + 15 \times 6 + 14 \times 5 + 8 \times 2 = 297$

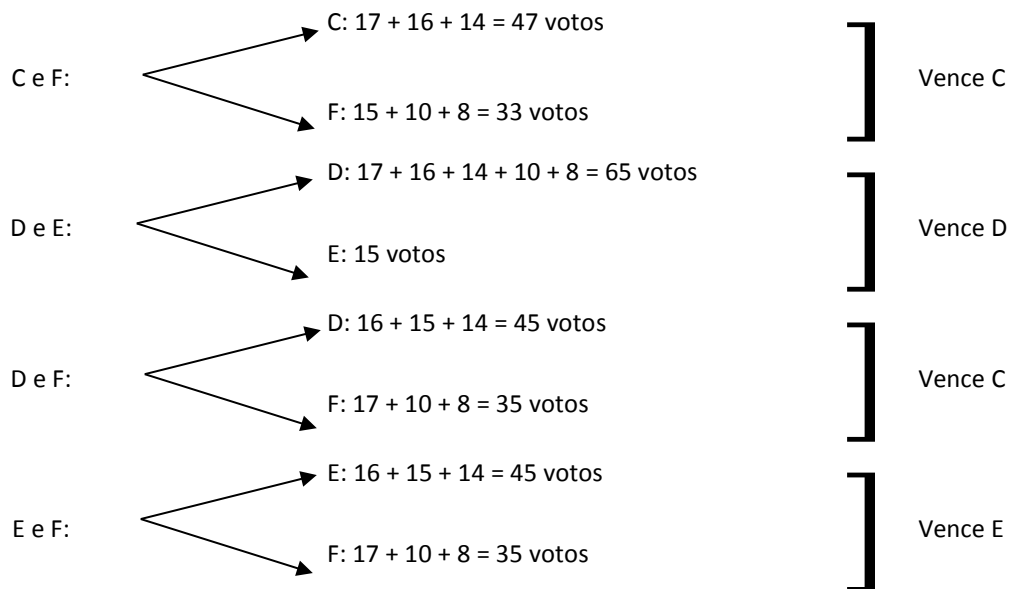
F: $17 \times 4 + 16 + 15 \times 2 + 14 \times 3 + 18 \times 6 = 264$

O vencedor é o candidato D.

Método de Condorcet

Vamos confrontar os candidatos dois a dois, verificando o número de votos obtido por cada um, em cada caso:





Não existe vencedor de Condorcet porque nenhuma alternativa vence todas as outras em confronto direto (no entanto, para C vencer esta eleição, por este método, bastava que vencesse B).

Capítulo 2 — Teoria da partilha equilibrada

• Atividade 1 (pág. 34)

Um processo de resolução poderá ser:

1.1 A melhor solução para a divisão do bolo entre dois amigos, sem discussões, é a seguinte: um divide, o outro escolhe! Se assim for, nenhum se pode queixar: o que divide o bolo vai fazê-lo da melhor maneira possível, pois sabe que não será ele o primeiro a escolher; o outro também não, pois é ele quem escolhe.

1.2 No caso dos três amigos, a solução é semelhante, mas mais elaborada.

Consideremos três amigos **A**, **B** e **C**:

A divide o bolo em três partes que ele considera iguais (**I**, **II** e **III**).

B escolhe uma das partes. Suponhamos que é **I**.

A não pode protestar pois, para ele, as partes eram iguais.

- Se **C** não protestar, **B** tira a parte **I** e **C** escolhe entre **II** e **III**. **A** fica com a parte que sobra.
- Se **C** protestar (por lhe parecer que **I** é maior), escolhe entre **II** e **III** a parte com que **A** deve ficar. Depois **B** e **C** dividem novamente o conjunto das duas partes restantes com o método anteriormente utilizado para dois amigos.

1.3 Vamos ver o caso de cinco amigos.

Consideremos cinco amigos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**:

- A parte uma fatia do bolo que lhe pareça ser a quinta parte.
- Se **B** achar o bocado grande, tira-lhe um bocado para juntar ao resto do bolo. Senão passa a vez a **C**.
- **C** pode passar a vez ou diminuir ainda mais a parte cortada por **A**.
- **D** e **E** procedem da mesma forma.
- No fim desta 1.ª volta, o último que retirou alguma coisa da parte inicialmente cortada por **A**. Se ninguém reduzir o bocado cortado por **A**, **A** fica com ele.

- Os quatro restantes tornam a proceder como no início, começando agora um deles por partir uma parte que lhe pareça $\frac{1}{4}$ do bolo.
- No fim da 2.a volta restam três amigos e o resto do bolo. Podem continuar seguindo o caso dos três amigos que vimos em 1.2 ou seguir até atingir o caso de dois amigos e utilizar o processo descrito em 1.1.

• Atividade 2 (pág. 35)

Os alunos poderão fazer a composição da comissão de vários modos. Talvez o mais natural é utilizarem uma proporção:

3.º Ciclo	10.º Ano	11.º Ano	12.º Ano
307 _____ 1000	284 _____ 1000	227 _____ 1000	182 _____ 1000
x _____ 20	x _____ 20	x _____ 20	x _____ 20
$x = 6,14$	$x = 5,68$	$x = 4,54$	$x = 3,64$

Este exemplo é importante porque o número de alunos de cada nível considerado a integrar a comissão não é um número natural, servindo para os alunos sentirem a necessidade da existência de métodos que lhes permitam ultrapassar esse problema.

• Atividade 3 (pág. 35)

O viajante que tinha contribuído com maior número de pães justificou-se dizendo que, durante a viagem, quando tinham fome, ele tirava um pão que partia em três pedaços, dando um a cada um.

Assim:

- o viajante 1, que contribuiu com 5 pães, deu 15 pedaços;
- o viajante 2, que contribuiu com 3 pães, deu 9 pedaços, num total de 24 pedaços de pão, que a dividir pelos 3 viajantes dá 8 pedaços a cada um.

Então:

- o viajante 1 comeu 8 pedaços e deu 7 (pois a este pertenciam 15 dos 24 pedaços) – deve receber 7 moedas;
- o viajante 2 comeu 8 pedaços e deu 1 (pois a este pertenciam 9 dos 24 pedaços) – deve receber 1 moeda;
- o viajante 3, que se juntou aos dois anteriores na viagem, comeu 7 (dados pelo viajante 1) mais 1 (dado pelo viajante 2) o que dá também 8 pedaços de pão.

• Atividade 4 (pág. 35)

Justificação do dono da pousada para receber 28 dinares:

Valor da Venda	Valor da Hospedagem
100 dinares	20 dinares
10 dinares	2 dinares
$14 \times 10 = 140$ dinares	$14 \times 2 = 28$ dinares

ou seja, $\frac{100}{20} \times \frac{140}{x} \Leftrightarrow x = 28$ dinares .

Justificação do vendedor de joias para pagar 24,5 dinares:

Valor da Venda	Valor da Hospedagem
200 dinares	35 dinares
20 dinares	3,5 dinares
$7 \times 20 = 140$ dinares	$7 \times 3,5 = 24,5$ dinares

ou seja, $\frac{200}{35} \times \frac{140}{x} \Leftrightarrow x = 24,5$ dinares .

Justificação do calculista para o pagamento de 26 dinares:

	Valor da Hospedagem	Valor da Hospedagem
	200 dinares	35 dinares
	100 dinares	20 dinares
Diferença	100 dinares	15 dinares

Ou seja, a um acréscimo de 100 dinares na venda das joias corresponde um acréscimo de 15 dinares na hospedagem. E se o acréscimo na venda for de 40 dinares?

Para um acréscimo na venda de 20 dinares $\left(\frac{100}{5}\right)$ o acréscimo na hospedagem seria de 3 dinares $\left(\frac{15}{5}\right)$.

Então, se o acréscimo na venda das joias for de 40 dinares, o acréscimo na hospedagem deverá ser de 6 dinares (2×3), isto é $\frac{100}{15} = \frac{40}{x} \Leftrightarrow x = 6$ dinares (acrécimo). Portanto, o vendedor de joias deveria pagar $20 + 6 = 26$ dinares .

Claro que todos estes diferentes valores (24,5; 26 e 28 dinares) se devem à falta de proporcionalidade entre os elementos do problema, isto é:

Valor da Venda	Valor da Hospedagem
100 dinares	20 dinares
200 dinares	35 dinares (deveria ser 40 para haver proporcionalidade)

• Atividade 5 (pág. 36)

São 35 camelos a dividir por três irmãos da seguinte forma:

- o irmão mais velho deveria receber $\frac{1}{2} \times 35 = 17,5$ camelos
- o irmão do meio deveria receber $\frac{1}{3} \times 35 = 11,6(6)$ camelos
- o irmão mais novo deveria receber $\frac{1}{9} \times 35 = 3,8$ camelos

No entanto, $\frac{1}{2} \times 35 + \frac{1}{3} \times 35 + \frac{1}{9} \times 35 = \frac{595}{18} = 33 + \frac{1}{18} \neq 35$ camelos ou seja, sobram $1 + \frac{17}{18}$ camelos!

Assim, cada irmão poderá receber mais do que estava inicialmente previsto.

O que o calculista fez foi juntar o seu camelo aos 35 dos três irmãos fazendo a partilha dos 36 camelos assim obtidos. Então:

- o irmão mais velho recebeu $\frac{1}{2} \times 36 = 18$ camelos
- o irmão do meio recebeu $\frac{1}{3} \times 36 = 12$ camelos
- o irmão mais novo recebeu $\frac{1}{9} \times 36 = 4$ camelos

Os três irmãos ficaram satisfeitos por receberem mais do que o inicialmente previsto e como $18 + 12 + 4 = 34$, sobram dois camelos: o do calculista e um outro que os irmãos lhe oferecem em sinal de agradecimento.

Existe um problema idêntico, mas em que o número de camelos é 17. A divisão é feita do mesmo modo, acrescentando um camelo aos 17 e no final sobrará apenas o camelo que foi acrescentado. Se o número de camelos aumentar para 53, o processo de divisão é idêntico, utilizando o mesmo artifício, mas sobram 3 camelos.

Partilhas no caso discreto – Divisão Justa

• Atividade 1 (pág. 42)

Começemos por atribuir (provisoriamente), a cada uma das partes, os itens que cada um mais valorizou:

- H – pensão e casa: 75 pontos
- M – custódia: 65 pontos

Como H tem mais pontos, temos de fazer transferência de pontos de H para M. Vamos calcular as razões entre os pontos distribuídos por H e M, relativamente aos itens que H detém, visto ser este quem tem maior número de pontos:

$$\text{Pensão: } r_1 = \frac{60}{25} = 2,4$$

$$\text{Casa: } r_2 = \frac{15}{10} = 1,5$$

Uma vez que $1,5 < 2,4$, vamos transferir pontos relativamente à casa. Se transferíssemos a totalidade dos pontos relativos a este item, a situação invertia-se; então, temos de calcular a percentagem de pontos a transferir. Seja p a proporção de pontos de H relativamente à casa; para M será $1 - p$.

Assim:

$$160 + 15p = 65 + 10(1 - p)$$

$$\Leftrightarrow 15p + 10p = 75 - 60$$

$$\Leftrightarrow 25p = 15$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{15}{25}$$

$$\Leftrightarrow p = 0,6$$

Então, no final:

M: custódia e 40% da casa

H: Pensão e 60% da casa

e quanto ao número de pontos, este é igual, como se pretendia:

M: $65 + 10 \times 0,4 = 69$ pontos

H: $60 + 15 \times 0,6 = 69$ pontos

• Atividade 2 (pág. 48)

Podemos organizar os dados numa tabela, calculando sucessivamente:

- o valor total dos bens para cada interveniente;
- o valor que cada um considera ser justo (J);
- quais (ou qual) os bens atribuídos a cada amigo;
- o valor dos bens atribuídos a cada um (B);

- a diferença entre o valor justo e o valor dos bens atribuídos ($J - B$) vai ditar o que cada um dos amigos recebe ou paga (em dinheiro);
- calcula-se o montante disponível (M_d) e divide-se igualmente pelos quatro;
- acertam-se os valores em dinheiro a receber ou a pagar no final de todo o processo de partilha.

Vejamos:

Preferências	Os «Médicos»			
	Abel	Ivo	José	Raul
Televisor	170	210	200	180
Máquina de lavar louça	120	140	150	135
Máquina de lavar roupa	140	125	100	155
Frigorífico	250	200	150	220
Total	680	675	600	690
J	170	168,75	150	172,5
Bens atribuídos	Frigorífico	Televisor	Máquina de lavar louça	Máquina de lavar roupa
B	250	210	150	155
$J - B$	-80 (paga)	-41,25 (paga)	0 (não paga nem recebe)	17,5 (recebe)
M_d	$80 + 41,25 - 17,5 = 103,75$ euros			
$d/4$	25,94	25,94	25,94	25,94
Final	Paga 54,06 euros	Paga 15,31 euros	Recebe 25,94 euros	Recebe 43,44 euros

Com toda a informação agora disponível podemos concluir que:

Abel: Fica com o frigorífico e paga 54,06 euros;

José: Fica com a máquina de lavar louça e recebe 25,94 euros;

Ivo: Fica com o televisor e paga 15,31 euros;

Raul: Fica com a máquina de lavar roupa e recebe 43,44 euros.

Também podemos sugerir aos alunos a utilização de uma folha de cálculo na resolução desta atividade; pode ser um trabalho de grupo, com apresentação posterior em sala de aula para desenvolver também a capacidade de comunicação matemática. Fica aqui uma sugestão de parâmetros a avaliar no caso do trabalho de grupo:

P_1 – Envolvimento e participação dos elementos do grupo na apresentação.

P_2 – Apresentação estética do trabalho.

P_3 – Clareza nos conteúdos abordados.

P_4 – Utilização de uma linguagem matemática correta e adequada.

P_4 – Resolução correta do problema.

P_5 – Nível de desenvolvimento do trabalho.

Segue-se uma possível grelha de registo:

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	Média	Observações
Grupo I (1)								
(2)								
(2)								
(2)								

Na linha (1), o Professor poderá avaliar cada um dos parâmetros do Grupo I, do qual fazem parte os alunos cujos nomes podem ser registados em (2). No final das apresentações, o Professor poderá pedir a cada aluno a sua auto-avaliação e registá-la na linha onde registou o nome do aluno.

• Atividade 3 (pág. 52)

3.1 Vamos organizar numa tabela os segmentos definidos por cada uma das sobrinhas da tia Gui:

	1.º Segmento	2.º Segmento	3.º Segmento	4.º Segmento	5.º Segmento
Sofia	1 – 5	6 – 9	10 – 12	13 – 16	17 – 29
Tânia	1 – 4	5 – 11	12 – 14	15 – 17	18 – 20
Vanda	1 – 2	3 – 5	6 – 10	11 – 14	15 – 20
Xana	1	2 – 7	8 – 9	10 – 19	20
Zita	1 – 3	4 – 8	9 – 13	14 – 18	19 – 20

3.2 Observando a fila das casinhas, o primeiro marcador é **X1**; então, a prima Xana fica com o segmento 1 e retiram-se os seus outros marcadores.

Procuramos em seguida os segundos marcadores das restantes raparigas; o primeiro a surgir é **V2**. A prima Vanda fica com o segmento entre **V1** e **V2** (3 – 5) e retiram-se os seus outros marcadores.

Iniciamos a procura dos terceiros marcadores, sendo **S3** o primeiro a aparecer. A prima Sofia fica com as casinhas entre **S2** e **S3**, a que corresponde o segmento 10 – 12 e retiram-se os seus outros marcadores.

Dos quartos marcadores, **T4** é o primeiro a surgir. A prima Tânia retira-se com o segmento entre **T3** e **T4** (15 – 17).

Por fim, a prima Zita fica com o segmento 19 – 20.

A distribuição das casinhas pelas quatro primas é a seguinte:

- Sofia: casinhas números 10, 11 e 12;
- Tânia: casinhas números 15, 16 e 17;
- Vanda: casinhas números 3, 4 e 5;
- Xana: casinha número 1;
- Zita: casinhas números 19 e 20.

3.3 Sobram as casinhas números 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14 e 18. Como são mais casinhas do que primas, pode aplicar-se novamente o método dos marcadores. Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida em grupo (ou individualmente, como trabalho de casa) e as várias soluções obtidas podem ser discutidas em sala de aula.

Caso Discreto – Divisão Proporcional

• Atividade 4 (pág. 57)

4.1 Número de votantes: 30 400

O número de votos obtidos por cada partido foram:

Os Reis: $0,12 \times 30\,400 = 3648$ votos

As Damas: $0,34 \times 30\,400 = 10\,336$ votos

Os Valetes: $0,08 \times 30\,400 = 2432$ votos

As Manilhas: $0,26 \times 30\,400 = 7904$ votos

Os Ases: $0,20 \times 30\,400 = 6080$ votos

4.2 Número de mandatos a atribuir: 12

Divisores	Os Reis	As Damas	Os Valetes	As Manilhas	Os Ases
1	3648	10 336	2342	7904	6080
2	1824	5168	1216	3952	3040
3	1216	345,3	810,7	2634,7	2026,7
4	912	2584	608	1976	1520
5	729,6	2067,2	486,2	1580,8	1216

Colocando 12 quocientes por ordem decrescente da sua grandeza obtemos:

10 336	7904	6080	5168	3952	3648
3445,3	3040	2634,67	2584	2432	2067,2

Assim, a distribuição dos mandatos é a seguinte:

As Damas: 5 mandatos – 1.º, 4.º, 7.º, 10.º e 12.º

As Manilhas: 3 mandatos – 2.º, 5.º e 9.º

Os Ases: 2 mandatos – 3.º e 8.º

Os Reis: 1 mandato – 6.º

Os Valetes: 1 mandato – 11.º

4.3 Com o auxílio da calculadora (ou de uma folha de cálculo) podemos verificar que se os Ases tiverem mais 76 votos ($6080 + 76 = 6156$) e as Damas tiverem menos 76 votos ($10\,336 - 76 = 10\,260$), a atribuição do último mandato irá beneficiar os Ases e não as Damas.

4.4 O número de mandatos mantém-se, o procedimento é idêntico mas os divisores agora são 1, 3, 5, 7 e 9.

Divisores	As Damas	As Manilhas	Os Ases	Os Reis	Os Valetes
1	10 336	7904	6080	3648	2432
3	4445,33	2634,67	2026,67	1216	810,67
5	2067,20	1580,80	1216	729,60	486,40
7	1476,57	1129,14	868,57	521,14	347,43
9	1148,44	878,22	675,56	405,33	270,22

Colocando 12 quocientes por ordem decrescente da sua grandeza obtemos:

10 336; 7 904; 6 080; 4 445,33; 3 648; 2 634,67
2 432; 2 067,20; 2 067,20; 1 580,80; 1 476,57; 1 216

Assim, a distribuição dos mandatos, por aplicação do método de Sainte-Laguë, é a seguinte:

As Damas: 4 mandatos – 1.º, 5.º, 9.º e 11.º.

As Manilhas: 3 mandatos – 2.º, 6.º e 10.º.

Os Ases: 2 mandatos – 3.º e 8.º.

Os Reis: 2 mandatos – 4.º e 12.º.

Os Valetes: 1 mandatos – 7.º.

Comparando os resultados obtidos pelos dois métodos verificamos que por aplicação do método de Sainte-Laguë, o partido com maior número de votos (As Damas) teria menos um mandato, enquanto que um dos partidos com menor representatividade (Os Reis) ficaria com mais um mandato.

• Atividade 5 (pág. 59)

$$\text{Divisor padrão} = \frac{1000}{25} = 40$$

A partir do divisor padrão, e com mais alguns cálculos, podemos construir a seguinte tabela:

Grupos	Quota padrão	Quota inferior	Ordem	Lugares a acrescentar	Distribuição
A	7,675	7	1.º	1	8
B	7,1	7	4.º	0	7
C	5,675	5	1.º	1	6
D	4,55	4	3.º	0	4

23 lugares (sobram 2).

A nova comissão será formada por:

- 8 alunos do 3.º Ciclo;
- 7 alunos do 10.º Ano;
- 6 alunos do 11.º Ano;
- 4 alunos do 12.º Ano.

• Atividade 6 (pág. 60)

6.1 Número de alunos = 600

$$\text{Divisor padrão} = \frac{600}{15} = 40$$

Obtém-se a tabela seguinte:

Colégio	Quota Padrão	Quota Inferior	Ordem	Lugares a Acrescentar	Distribuição
Nortinho	5,2	5	3.º	0	5
Central	9,325	9	2.º	0	9
Algarvio	0,475	0	1.º	1	1

14 lugares (sobra 1).

A distribuição é a seguinte:

- 5 professores para o Nortinho; • 9 professores para o Central; • 1 professor para o Algarvio.

6.2 Divisor Padrão = $\frac{600}{16} = 37,5$

A partir do cálculo do novo Divisor Padrão podemos construir a seguinte tabela:

Colégio	Quota Padrão	Quota Inferior	Ordem	Lugares a acrescentar	Distribuição
Nortinho	5,547	5	2.º	1	6
Central	9,947	9	1.º	1	10
Algarvio	0,507	0	3.º	0	0

14 lugares (sobram 2).

A nova distribuição é a seguinte:

- 6 alunos para o Nortinho; • 10 alunos para o Central; • 0 alunos para o Algarvio.

Com o aumento de um professor a colocar, o Colégio Algarvio perde o lugar que lhe havia sido atribuído.

• Atividade 7 (pág. 61)

Total de candidatos = 23 750

Divisor padrão = $\frac{23\,750}{50} = 475$

Com alguns cálculos podemos obter a tabela seguinte:

Zona	Quota padrão	Quota inferior
Norte	16,842	16
Centro	23,158	23
Sul	10,0	10

Como o número de lugares distribuídos é inferior a 50, temos que encontrar um divisor modificado (D.M.).

Consideremos o (D.M.) = 465 .

Zona	Quota padrão	Quota inferior
Norte	17,204	17
Centro	23,656	23
Sul	10,215	10

A comissão deverá ter a seguinte distribuição:

- 17 representantes da zona Norte;
- 23 representantes da zona Centro;
- 10 representantes da zona Sul.

• Atividade 8 (pág. 63)

8.1 Total de candidatos = 23 750

$$\text{Divisor padrão} = \frac{23\,750}{50} = 475$$

Com alguns cálculos, podemos obter a tabela seguinte:

Zona	Quota Padrão	Quota Inferior
Norte	16,842	17
Centro	23,158	24
Sul	10,0	10

Como o número de lugares distribuídos é inferior a 50, temos de encontrar um Divisor Modificado (maior do que o divisor padrão).

Consideremos o D.M. = 485

Zona	Quota Padrão	Quota Inferior
Norte	16,495	17
Centro	22,680	23
Sul	9,794	10

A comissão deverá ter a seguinte distribuição:

- 17 representantes da zona Norte;
- 23 representantes da zona Centro;
- 10 representantes da zona Sul.

8.2 Embora se tenham utilizado métodos diferentes, os resultados obtidos foram os mesmos.

• Atividade 9 (pág. 64)

Número de habitantes = 1 166 000

$$\text{Divisor padrão} = \frac{1\,166\,000}{130} = 8969,23$$

Com alguns cálculos, podemos obter a tabela seguinte:

Estado	População	Quota padrão	Quota arredondada
M	7000	0,780	1
N	59 000	6,578	7
P	90 000	10,034	10
Q	960 000	107,033	107
R	50 000	5,575	6

131 > 130

Como o número de lugares distribuídos é superior a 130, temos de encontrar um divisor modificado.

Consideremos o D.M. = 9050.

Estado	Quota Modificada	Quota Modificada Arredondada
M	0,773	1
N	6,519	7
P	9,945	10
Q	106,077	106
R	5,525	6

A comissão deverá integrar:

- 1 representante de M;
- 7 representantes de N;
- 10 representantes de P;
- 106 representantes de Q;
- 6 representantes de R.

• Atividade 10 (pág. 66)

Total da população = 5 890 000 000

Divisor padrão = $\frac{5\,890\,000\,000}{200} = 29\,450\,000$

Com alguns cálculos, podemos obter a tabela seguinte:

Planeta	Quota Padrão	Média Geométrica	Quota Arredondada
Terra	93,039	93,499	93
Marte	63,497	63,498	63
Saturno	29,202	29,496	29
Úrano	11,205	11,489	11
Neptuno	3,056	3,464	3

199 < 200

Como o número de lugares distribuídos é inferior a 200, é necessário um divisor modificado.

Consideremos o D.M. = 29 400 000.

Planeta	Quota Modificada	Quota Modificada Arredondada
Terra	93,197	93
Marte	63,605	64
Saturno	29,252	29
Úrano	11,224	11
Neptuno	3,061	3

A comissão deverá integrar:

- 93 representantes da Terra;
- 64 representantes de Marte;
- 29 representantes de Saturno;
- 11 representantes de Úrano;
- 3 representantes de Neptuno.

Partilhas no Caso Contínuo

• Atividade 1 (pág. 68)

Alex e Tó Zé selecionam ambos os mesmos quartos Q1 e Q2. Assim, podem juntar novamente essas duas partes, Alex (ou Tó Zé) divide em dois e Tó Zé (respetivamente Alex) escolhe uma delas, ficando Alex (respetivamente Tó Zé) com a outra. Jorge escolhe um dos quartos Q3 e Q4 que selecionou inicialmente, ficando o Divisor, Pedro, com o quarto que Jorge não escolher.

• Atividade 2 (pág. 69)

Aleatoriamente, os três irmãos devem decidir qual deles fica com o papel de selecionador. Suponhamos que a Joana é o selecionador e Marco e Filipe são os divisores. Estes decidem entre si quem vai dividir o pudim em dois e quem vai escolher. Se for Marco a dividir, então, Filipe escolhe uma das metades e o irmão fica com a outra. Se for Filipe, Marco escolhe uma das metades e o irmão fica com a outra.

Em seguida, Marco e Filipe dividem cada um a sua parte em três pedaços que julguem serem iguais. Joana entra em jogo e escolhe um dos pedaços dividido por Marco e outro por Filipe.

Deste modo, cada um dos três irmãos fica com $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ do pudim, como seria de esperar.

O professor poderá aqui sugerir, como atividade, que os alunos reflitam e descrevam como aplicar este método ao caso de quatro jogadores. Por exemplo:

Atividade: Antes de terem acabado a partilha do pudim, tocam à campainha. É a prima Susana.

É preciso voltar ao início e efetuar a divisão do pudim, desta vez por quatro pessoas. Aplicando o método do selecionador único, descreva a sua aplicação nesta situação.

É necessário começar pela escolha do selecionador, que é feita aleatoriamente. Vamos continuar com a Joana a ocupar essa posição. Os outros três jogadores têm agora de proceder à divisão do pudim em três partes, o que podem fazer recorrendo ao mesmo método para três jogadores (que os alunos já utilizaram na atividade do Manual).

Agora que Susana, Marco e Filipe têm cada um a sua parte de pudim (todas supostamente iguais) vão, cada um deles, dividir a sua parte em quatro pedaços que julguem serem iguais.

A Joana, que foi apenas espetadora até este ponto, começa a jogar escolhendo uma das quatro partes de cada irmão e da prima, ficando com $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ do pudim. Os outros três

jogadores ficam, cada um, com os seus três pedaços, isto é, cada um fica com $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ do pudim. Cada um dos quatro jogadores fica com $\frac{1}{4}$ do pudim, o que é justo (desde que todos os pedaços sejam considerados «iguais»).

Bom apetite!

• Atividade 3 (pág. 69)

Para a aplicação deste método é de toda a conveniência fazer um esquema do que se passa em cada volta – vai auxiliar nas conclusões a tirar. No caso concreto desta atividade, temos 6 estudantes que jogam pela seguinte ordem: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 .

Como na 1.^a volta ninguém diminui, a fatia cortada por E_1 não sofre alteração, pois todos os jogadores passam (P), isto é:

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P	P	P	P	P	P

Assim, E_1 fica com a primeira fatia, sai do jogo e na 2.^a volta é E_2 quem parte a fatia, pois está a seguir a E_1 . Nesta segunda volta, E_4 e E_5 diminuem (D), isto é:

E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P	D	D	P	

ficando a segunda fatia para E_5 porque foi o último a diminuir a fatia de piza na 2.^a volta, saindo do jogo.

Ficamos agora com quatro jogadores E_2, E_3, E_4 , e E_6 .

Na 3.^a volta, E_2 corta uma fatia e sairá um jogador, ficando ainda três em jogo.

Na 4.^a volta, sairá outro jogador, ficando dois em jogo. Estes últimos pegam no pedaço de piza que sobra, um divide em dois e o outro escolhe.

Assim, são necessárias quatro voltas para que cada um dos estudantes obtenha a sua fatia de piza.

O professor poderá propor, ainda dentro desta atividade, mais duas condições que permitam determinar qual a ordem de saída de cada jogador do jogo. Por exemplo:

- na 3.^a volta, apenas E_3 diminui;
- na 4.^a volta, ninguém diminui.

Para estas duas novas condições, e supondo ser para a continuação da atividade do Manual, temos:

E_2	E_3	E_4	E_6
D	P	P	

ficando E_3 com a terceira fatia de piza e abandonando o jogo. Na 4.^a volta, E_2 parte a fatia e:

E_2	E_4	E_6
P	P	

e acaba por ficar com ela, saindo do jogo. E_4 e E_6 são, neste caso, os jogadores que vão dividir entre si o último pedaço de piza (um parte e o outro escolhe).

• Atividade 4 (pág. 70)

A descrição seguinte é apenas uma das várias hipóteses de aplicação.

Primeiro, os quatro intervenientes decidem, aleatoriamente, quem será o divisor e qual a ordem de jogada. Será:

- Isa, o divisor.
- Beta, Nando e Tó jogam, por esta ordem.

Isa começa por dividir a página em cinco partes, que julga serem iguais, J_1, J_2, J_3, J_4 e J_5 . Beta retifica (ou apara) J_2 e J_3 e, em seguida, Nando retifica J_4 . É a vez de Tó, que escolhe J_4 . Nando joga depois e, como a parte de página que ele retificou foi escolhida por Tó, ele pode escolher qualquer uma das restantes e decide-se por J_1 . Beta terá obrigatoriamente de escolher J_2 ou J_3 , porque foram por ela retificadas, e opta por J_3 . Finalmente o divisor, Isa, tem ao seu dispor J_2 e J_5 e escolhe J_2 . O pedaço de página que sobrou pode ser novamente dividido, pelo mesmo método ou por outro, pelos quatro jogadores.

Esta é apenas uma das hipóteses de aplicação do método a esta situação porque as opções dos jogadores podem ser várias. A(s) parte(s) extra com que se inicia este método serve(m) para garantir que no final o último a escolher, o divisor, tenha ao seu dispor, pelo menos, uma parte que não foi retificada e que se mantém exatamente como ele próprio a dividiu.

Como atividade extra, o professor poderá propor a divisão de, por exemplo, um bolo por cinco jogadores.

O número inicial de partes terá de ser $2^{5-2} + 1 = 9$.

Os raciocínios que envolve são muito interessantes, as soluções variadas e os alunos aprendem que há decisões que, para serem tomadas, têm de ser asseguradas algumas condições iniciais, às quais têm de estar atentos.

É fascinante. Divirtam-se!

Tema 3 – Modelos matemáticos

Problemas matemáticos da área financeira

• Atividade 1 (pág. 183)

Seja t a taxa do IVA;

$$t \times 821,34 = 188,91 \Leftrightarrow t = 23\%$$

• Atividade 3 (pág. 183)

3.1 Sumos: $x_1 \times 1,06 = 5,36 \Leftrightarrow x_1 \simeq 5,06 \text{ €}$

Amaciador de roupa: $x_2 \times 1,23 = 4,59 \Leftrightarrow x_2 = 3,73 \text{ €}$

Água: $x_3 \times 1,13 = 3,30 \Leftrightarrow x_3 \simeq 2,92 \text{ €}$

logurtes: $x_4 \times 1,06 = 2,89 \Leftrightarrow x_4 \simeq 2,73 \text{ €}$

Lenços: $x_5 \times 1,23 = 1,78 \Leftrightarrow x_5 \simeq 1,45 \text{ €}$

3.2 Total sem IVA: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15,89 \text{ €}$

IVA pago: $17,92 - 15,89 = 2,03 \text{ €}$

3.3 Sumos: $5,06 \times 1,05 \simeq 5,31 \text{ €}$

Amaciador: $3,73 \times 1,18 \simeq 4,40 \text{ €}$

Água: $2,92 \times 1,10 \simeq 3,21 \text{ €}$

logurtes: $2,73 \times 1,05 \simeq 2,87 \text{ €}$

Lenços: $1,45 \times 1,18 \simeq 1,71 \text{ €}$

Valor total da fatura: $17,50 \text{ €}$

- **Atividade 4 (p. 186)**

$$98\,740 \times 0,02 - 1848,14 = 126,66 \text{ €}$$

- **Atividade 6 (p. 186)**

6.1 A taxa é de 6,5%

6.2 $72\,000 \times 0,065 = 4680 \text{ €}$

O valor de IMT a pagar é de 4680 €

- **Atividade 7 (p. 186)**

$$170\,000 \times 0,10 = 17\,000 \text{ €}$$

O valor de IMT a pagar é de 17 000 €

- **Atividade 12 (pág. 191)**

Espanha: $T = \frac{121,35 - 119,40}{119,40} \times 100 \simeq 1,63\%$

Preço dos sapatos: $62 \times 1,0163 \simeq 63,01 \text{ €}$

Itália: $T = \frac{120,30 - 117,60}{117,60} \times 100 \simeq 2,30\%$

Preço dos sapatos: $62 \times 1,0230 \simeq 63,43 \text{ €}$

Malta: $T = \frac{122,00 - 116,94}{116,94} \times 100 \simeq 4,33 \%$

Preço dos sapatos: $62 \times 1,0433 \simeq 64,68 \text{ €}$

Suécia: $T = \frac{114,46 - 113,46}{113,46} \times 100 \simeq 1,28 \%$

Preço dos sapatos: $62 \times 1,0128 \simeq 62,79 \text{ €}$

Atividade bancária

- **Atividade 1 (pág. 195)**

I: $200\,000 + 3 \times 0,12 \times 200\,000 = 272\,000 \text{ €}$

II: $200\,000 \times 1,10^3 = 266\,200 \text{ €}$

Dever-se-á optar pela proposta I.

- **Atividade 2 (pág. 198)**

Banco A: $10\,000 \times 1,04^2 = 10\,816 \text{ €}$

Banco B: $10\,000 \times (0,06 \times 2 + 1) = 11\,200 \text{ €}$

Banco C: $100\,000 \times \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{18} \simeq 10\,459,66 \text{ €}$

Dever-se-á optar pelo banco B.

- **Atividade 3 (pág. 198)**

3.1 $C_6 = 2500 \times 1,05^6 \simeq 3350,24 \text{ €}$

3.2 $C_{3+3} = 2500 \times 1,05^3 \times 1,07^3 \simeq 3545,35 \text{ €}$

3.3 $3350,24 - 2500 = 850,24 \text{ €}$ (situação de 3.1)

$3545,35 - 2500 = 1045 \text{ €}$ (situação de 3.2)

• **Atividade 6 (pág. 208)**

6.1.1 $2500 \div 6,8355 \simeq 365,74$

Pode subscrever 365 U.P.

6.1.2 Comissão = $365 \times 6,8355 \times \frac{0,125}{100} \simeq 3,12\text{€}$

6.2.1 Total: $365 \times 6,9341 = 2530,9465$

Comissão de resgate = $2530,9465 \times 0,005 \simeq 12,6547$

Resgate = $2530,9465 - 12,6547 = 2518,2918$

O valor do resgate é de, aproximadamente, 2518,29€

6.2.2 Lucro: $2518,29 - 365 \times 6,8355 = 23,3325$

O lucro foi de aproximadamente, 23,33€

• **Atividade 7 (p. 209)**

7.1 É de 15962€

7.2 É de 12 meses (1ano)

7.3 Terá de pagar o valor residual de 1308,39€

7.4.1 Juros: 664,31€

7.4.2 $15962 + 664,31 = 16\,626,31\text{€}$

• **Atividade 8 (p. 210)**

Amortização: $\frac{15962}{12} \simeq 1330,17$

Juros: $\frac{15962}{12} \times 0,135 \simeq 179,57$

Prestação mensal = 1509,74€

Custo do carro = $12 \times 1509,74 = 18\,116,88\text{€}$

Tarifários

• **Atividade 2 (p. 214)**

Tarifa simples

Potência: $0,8362 \times 30 = 25,086\text{€}$

Consumo: $0,1528 \times 200 = 30,56\text{€}$

Assim, teria de pagar $25,086 + 30,56 = 55,646\text{€}$

A este valor acresce 6% de IVA pelo que a Joana terá de pagar $55,646 \times 1,06 = 58,98\text{€}$

Tarefa bi-horária

Os encargos com a potência são os mesmos.

O consumo será $60 \times 0,0946 + 140 \times 0,1785 = 30,666\text{€}$

O montante que a Joana terá que pagar com IVA será de $(25,086 + 30,666) \times 1,06 = 59,097\text{€}$

Assim será mais económica a tarifa simples.

1. Estratégias eleitorais

Introdução

Como se sabe existem vários métodos eleitorais, sendo que cada um deles traduz de forma diferente as opiniões expressas pelos eleitores, podendo, no entanto, terem, no final, o mesmo resultado eleitoral. Conhecer, à partida, qual o método eleitoral, quais os candidatos e quem são os eleitores é o que se deseja num sistema eleitoral justo, sério e não fraudulento.

Será natural e legítimo que, cumprindo as regras definidas pelos métodos eleitorais, qualquer eleitor e/ou candidato use o seu *poder* no processo eleitoral para fazer vencer a sua opinião ou contribuir para que a opinião vencedora seja a que mais vantagens lhe traga. Concordaremos todos com isso?! Talvez sim.

Designamos por **estratégia eleitoral**, o modo como se poderá usar esse poder, sendo que, em função do interveniente (organizador/definidor do processo eleitoral, candidato, eleitor) que tenta influenciar o resultado das eleições, podemos dividir as estratégias em três tipos: escolha do método/agenda eleitoral; desistência/coligação; voto estratégico.

Analisaremos a seguir alguns exemplos destas estratégias, sendo que num mesmo exemplo poderão usar-se mais do que um tipo de estratégia eleitoral.

A adenda fantasma

Considere-se uma votação num órgão decisório e colegial da Associação de Estudantes de um dado agrupamento de escolas, por exemplo, na Direção da Associação de Estudantes.

O Presidente da Direção, também Presidente da Associação de Estudantes, eleito por sufrágio universal dos alunos do agrupamento é, por inerência do seu cargo, quem organiza e orienta todas as eleições realizadas nas reuniões de Direção. O Presidente é também um eleitor nessas eleições, com o mesmo direito e poder de voto que os restantes elementos da Direção, e, com certeza, tem as suas preferências/opiniões sobre o que a Direção decidir aprovar.

A Associação de Estudantes prepara-se para aprovar um texto com recomendações a enviar ao Ministro da Educação sobre os apoios concedidos no âmbito da Ação Social Escolar. Após discussão e debate do assunto em reunião de Direção, surgiram dois textos de recomendação apresentados por grupos distintos de elementos da direção da Associação de Estudantes: Recomendação A e Recomendação B.

Perante estas duas propostas, o Presidente da direção colocou-as à votação. O resultado desta votação foi a aprovação da Recomendação B com 2/3 dos votos dos elementos da Direção.

Este resultado não era o pretendido pelo Presidente da Associação de Estudantes, por isso o Presidente votou derrotado. Que estratégia poderá ele usar, como organizador das votações, para tentar influenciar o resultado da votação de forma a o favorecer?

Veja-se a seguinte possibilidade de estratégia, que só poderá resultar se bem conduzida pelo organizador das votações.

Suponhamos que no debate sobre o conteúdo a inserir no texto de recomendação, o Presidente apercebeu-se que existiam pontos em ambas as propostas que não eram totalmente aceites por quem as votou favoravelmente e que, por isso, a proposta vencedora era passível de incluir uma adenda (um acréscimo de conteúdos) de tal forma que dividiria as preferências de quem a votou favoravelmente.

Mais concretamente, consideremos, agora, três propostas de recomendação: Recomendação A (a derrotada na primeira votação); Recomendação B; Recomendação B com Adenda.

Antes de colocar as propostas a votação, em reunião de Direção, o Presidente fez um estudo sobre as preferências de todos os elementos da Direção, isto é, todos os votantes, sobre as três propostas.

Essas preferências são as que na tabela abaixo, sendo que os grupos A, B e C são constituídos pelo mesmo número de votantes.

	Votantes		
	A	B	C
1. ^a preferência	<u>RecA</u>	<u>RecB</u>	<u>RecB+Ad</u>
2. ^a preferência	<u>RecB+Ad</u>	<u>RecA</u>	<u>RecB</u>
3. ^a preferência	<u>RecB</u>	<u>RecB+Ad</u>	<u>RecA</u>

RecA – Recomendação A;

RecB – Recomendação B;

RecB+Ad – Recomendação B com adenda

Como deve, agora, o Presidente proceder à votação destas propostas para ver a sua preferência sair vencedora?

Se forem colocadas, em simultâneo, as três propostas a votação não haverá proposta vencedora, já que todas terão 1/3 dos votos. Portanto essa não deverá ser uma estratégia a seguir.

Também a votação por comparação das propostas duas a duas não resultará em vitória por parte de alguma das propostas, pois teremos os seguintes resultados:

- Recomendação A vence Recomendação B com Adenda
- Recomendação B vence Recomendação A
- Recomendação B com Adenda vence Recomendação B

A votação terá que ser, então, realizada em duas voltas, numa primeira com apenas duas propostas, sendo depois, numa segunda volta, votadas a proposta vencedora com a restante. Considerando P1, P2 e P3 as três propostas a votação, podemos representar esta agenda eleitoral da seguinte forma:

- 1.^a Volta: P1 *versus* P2
- 2.^a Volta: Vencedor da 1.^a Volta *versus* P3

Será que existe alguma estratégia, isto é, sequência de votações, a utilizar pelo Presidente da Direção da Associação de Estudantes para que a sua preferência seja vencedora?

Tendo em atenção a informação que se possui sobre as preferências dos votantes, vejamos o resultado final da votação para cada uma das três possíveis sequências distintas:

- 1.^a volta: Recomendação A *versus* Recomendação B
- 2.^a volta: Vencedor da 1.^a volta *versus* **Recomendação B com adenda**

ou

- 1.^a volta: Recomendação A *versus* Recomendação B com adenda
- 2.^a volta: Vencedor da 1.^a volta *versus* **Recomendação B**

ou

- 1.^a Volta: Recomendação B *versus* Recomendação B com adenda
- 2.^a Volta: Vencedor da 1.^a volta *versus* **Recomendação A**

Através da análise dos resultados anteriores, conclui-se que existe uma agenda eleitoral em que o Presidente, estrategicamente, consegue que a sua preferência seja a vencedora.

É claro que este tipo de estratégia sobre o método de voto a utilizar é, na sua maioria das vezes, impossível de se verificar pois o método de votação é decidido antecipadamente. No entanto, em pequenos grupos verifica-se (voluntária ou involuntariamente) a possibilidade de se ter uma ideia antecipada do sentido de voto dos eleitores, fruto da discussão que habitualmente precede uma votação, e isso permite colocar à votação propostas que apenas têm como objetivo dividir os votos da proposta vencedora. Essa proposta fictícia pode ser criada, acrescentando-se, à proposta vencedora, conteúdos que dividem os seus votantes, designando-se, assim, por «adenda fantasma».

O voto estratégico no dilema de Plínio

O dilema de Plínio, do historiador romano Gaius Plinius Caecilius, constitui um dos primeiros relatos históricos sobre a teoria das eleições e permite-nos analisar o quanto o resultado final de uma eleição pode ser mais próximo da preferência de um votante se este votar estrategicamente e não sinceramente.

Veja-se então o dilema:

«Uma moção foi colocada perante o Senado sobre os escravos libertos do consul Afranius Dexter que foi encontrado morto, ou pelas suas próprias mãos, ou pela mão dos seus escravos, morto num ato criminoso, ou em obediência aos seus desejos.»

Dessa moção resultou que:

«Uma pessoa [...] pensou que, depois do inquérito, deviam ser perdoados. Uma segunda pessoa pensou que deviam ser desterrados para uma ilha, uma terceira pessoa que deviam ser executados. A diversidade das propostas significa que tinham de ser votadas individualmente.»

No debate realizado pelo Senado constituíram-se três grupos de senadores romanos cujas opiniões divergiam sobre o que fazer aos escravos libertos, caso se viesse a comprovar que a morte do consul não se tratou de suicídio:

- **Grupo Perdão:** senadores que acreditam na inocência dos escravos e são favoráveis ao perdão, este grupo representa 40% dos senadores;
- **Grupo Desterro:** senadores que consideram os escravos libertos culpados, no entanto, como acreditam que eles se limitaram a obedecer a uma ordem do consul, propõem o desterro para uma ilha, representando este grupo 35% dos senadores;
- **Grupo Execução:** senadores que acreditam que os escravos libertos são culpados e como tal devem ser executados, representando este grupo uma minoria de 25% dos senadores.

Considerando que as percentagens de intenção de voto são conhecidas por todos, que votações estratégicas poderão ocorrer:

- **Numa votação por maioria relativa?**

Sem votação estratégica o resultado da votação seria exatamente igual à percentagem de intenção de votos, e portanto seria vencedora a proposta de Perdão dos escravos com 40% dos votos.

Quem neste caso poderia votar estrategicamente de forma a que o resultado da votação fosse mais próximo da sua vontade?

Os senadores favoráveis à Execução dos escravos poderiam, estrategicamente, votar favorável à proposta de Desterro de forma que esta saísse vencedora, sendo que esta será mais próxima das suas vontades do que a proposta de Perdão. Assim, com votação estratégica por parte dos senadores do Grupo de Execução, teríamos o seguinte resultado da votação: Perdão 40%; Desterro 60%; Execução 0%, saindo vencedora a proposta Desterro. Esta votação estratégica pode também ser considerada como uma desistência, a favor da proposta Desterro, por parte da proposta Execução, ou ainda como uma coligação destas duas propostas.

– Numa votação por maioria absoluta?

Numa votação sem estratégia e com as intenções de voto conhecidas teríamos o seguinte resultado para a eleição por maioria absoluta:

1.ª Volta: Perdão – 40%; Desterro – 35%; Execução – 25%

2.ª Volta: Perdão – 40%; Desterro – 60%.

Neste caso, a proposta vencedora seria a do Desterro.

Quem poderia agora votar estrategicamente de forma a que o resultado da votação fosse mais próximo da sua vontade?

O Grupo da Execução dificilmente conseguirá vencer esta votação, já que mesmo que fosse a uma segunda volta com o Grupo do Perdão, teria que ter mais de 3/7 dos senadores do Grupo de Desterro a votar numa pena bem mais pesada, a Execução. Além disso, sendo a opção com menor intenção de votos, não podem os senadores deste grupo votarem estrategicamente pois continuarão a ser a opção que não passa à segunda volta.

Quanto ao Grupo Perdão, que perde a votação na segunda volta, poderão os senadores deste grupo votarem estrategicamente de forma à sua proposta sair vencedora?

Para que o Perdão saísse vencedor teria que a votação da segunda volta se realizar entre o Perdão e a Execução. No entanto, dadas as percentagens de intenção de voto, não é possível existir um número suficiente de votos estratégicos na proposta Execução, por parte dos senadores do Grupo Perdão, de forma a passarem à segunda volta as propostas Perdão e Execução. Isso seria possível com que percentagens de intenção de votos?

– Numa votação com agenda?

Considera-se, para três propostas, uma votação com agenda, composta pela seguinte sequência de votações:

1.ª Votação: Proposta 1 *versus* Proposta 2

2.ª Votação: Vencedor da 1.ª Votação *versus* Proposta 3

A escolha das propostas a serem votadas em primeiro lugar pode influenciar o resultado e a possibilidade de existência de voto estratégico. Para o nosso dilema dos escravos, veremos apenas um caso e em que será possível utilizar-se o voto estratégico.

1.ª Votação: Desterro *versus* Execução

Sem voto estratégico, o Desterro venceria a 1.ª votação à Execução e venceria a 2.ª votação ao Perdão. Quem poderá votar estrategicamente nesta votação?

Os senadores do Grupo Perdão, que apesar de entre o Desterro e a Execução preferirem o Desterro, irão votar estrategicamente na Execução para que esta proposta vença a 1.ª votação e depois, numa segunda votação entre a Execução e o Perdão, o Perdão possa ser a proposta vencedora.

Numa agenda em que a 1.ª votação seja entre a proposta de Perdão e a de Execução não existe qualquer tipo de voto estratégico possível para os senadores dos grupos de Perdão e de Execução, que perderão a votação para o grupo do Desterro.

O voto estratégico na eleição do Presidente da República Portuguesa

Uma eleição com voto maioritário a duas voltas permite que, numa primeira volta, os eleitores decidam quais os dois candidatos a disputarem a eleição numa segunda volta, sendo que, na segunda volta os eleitores dos candidatos eliminados terão que optar pelo candidato mais próximo da sua preferência.

As eleições Presidenciais de 1986 foram as mais disputadas no nosso país e foram as únicas em que foi necessária uma segunda volta. Na primeira volta dessas eleições o candidato Freitas do Amaral esteve muito perto de obter a maioria absoluta e, desta forma, evitar uma segunda volta. Na segunda volta, Freitas do Amaral perdeu, com 48,82% dos votos, na segunda volta para o candidato Mário Soares que obteve 51,18% dos votos.

Os resultados da primeira volta encontram-se na tabela abaixo.

Candidato	N.º de Votos	% de Votos
Freitas do Amaral	2 629 597	46,31
Mário Soares	1 443 683	25,43
Salgado Zenha	1 185 867	20,88
Lurdes Pintasilgo	418 961	7,38

Conhecendo-se o espectro do sistema político português e os setores desse espectro, de onde surgem as bases de apoio e eleitores de cada candidato, poder-se-á afirmar que um voto estratégico poderia ter resultado na eleição de Freitas do Amaral como Presidente?

Na verdade, se os eleitores do candidato Freitas do Amaral soubessem antecipadamente os resultados da 1.ª volta poderiam, de forma concertada (o que é difícil com mais de 2,5 milhões de eleitores), votar estrategicamente no candidato Salgado Zenha para que fosse este a disputar a 2.ª volta com Freitas do Amaral. Poderia essa votação estratégica fazer com que a segunda volta fosse entre Freitas do Amaral e Salgado Zenha?

Para que Salgado Zenha fosse à 2.ª volta bastaria que cerca de 5% dos eleitores de Freitas do Amaral votassem estrategicamente nele. Desta forma, e dado ser expectável existir uma maior percentagem de eleitores de Mário Soares a preferirem votar, numa segunda volta, em Freitas do Amaral do que em Salgado Zenha, o vencedor na segunda volta seria Freitas do Amaral.

Claro está que num colégio eleitoral da dimensão do de uma eleição presidencial é difícil – quase impossível – existir uma conjugação de fatores, como, por exemplo, conhecimento de intenção de voto e coordenação entre eleitores, que permita a utilização do voto estratégico. A possibilidade de se utilizar o voto estratégico não deixa, contudo, de ser real e significativa para colégios eleitorais de dimensões reduzidas.

2. Ordem do dia e votação estratégica

Resumo

Esta é uma atividade prática baseada numa proposta de Charles A. Holt e Lisa R. Anderson¹. Neste texto descreve-se uma experiência de sala de aula, na qual os alunos decidem sobre que projetos aprovar com base numa votação por maioria. São usadas várias ordens do dia para gerar um ciclo de votações o que conduz a um nível elevado de despesas públicas.

O debate a promover em sala de aula permitirá que os alunos descubram por eles próprios como manipular resultados através de esquemas de ordem do dia e por votações estratégicas. O exercício conduz naturalmente a uma discussão acerca de instituições políticas, assim como contribui para a aprendizagem de conceitos de votação e de ineficientes opções públicas.

Materiais

Uma cópia das instruções, em anexo, para cada aluno participante e um baralho de cartas por cada grupo de sete eleitores.

Introdução

Numa democracia as decisões são frequentemente tomadas coletivamente, e por vezes, do processo político resulta um conjunto de tomadas de decisão com custos que excedem, em muito, os seus benefícios.

Reciprocamente, projetos com benefícios muito altos para uma minoria de eleitores podem não ser aprovados na ausência de maioria. Com a regra de maioria, por exemplo, os eleitores podem manipular, estrategicamente, a ordem do dia para favorecer certos resultados.

Nesta atividade organiza-se uma experiência de sala de aula na qual várias propostas são consideradas em sequência, e coligações podem aprovar um jogo de políticas com uma perda líquida para sociedade. Votações «sábias» entre duas alternativas podem resultar numa dinâmica pela qual a ordem das votações determina o resultado final. Como os eleitores se dão conta disto, tentam controlar a ordem do dia mudando o sentido de voto.

Com esta atividade pretende-se promover a discussão sobre instituições políticas, a participação ativa nas mesmas, e sobre votação estratégica.

Procedimentos

A atividade pode ser realizada por um número mínimo de 7 alunos, ou múltiplos deste número e demorará cerca de 30 a 45 minutos. Será necessário um baralho de cartas por cada 14 pessoas, e dois baralhos para 35 pessoas. As cartas serão distribuídas aos eleitores-alunos conforme descrito abaixo, e a «mão» do eleitor determina as suas preferências.

Um eleitor que recebe uma carta de Copas tem uma preferência para o projeto de construção de uma «Rodovia», e um eleitor que recebe uma carta de Espadas tem uma preferência para o projeto de construção de uma «Escola». Um eleitor com uma carta de Ouros não tem qualquer preferência.

Cada eleitor recebe duas cartas, e, assim, alguns podem preferir que ambos os projetos sejam aprovados, no entanto, ninguém beneficia duas vezes de um mesmo projeto. Para cada grupo de sete eleitores designados de E1 a E7, as cartas devem ser distribuídas conforme a Tabela 1.

¹ Holt: Department of Economics, Rouss Hall, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903 USA; E-mail: holt@virginia.edu. Anderson: Department of Economics, College of William and Mary, PO Box 8795, Charlottesville, VA 22903 Williamsburg, VA 23187-8795 USA; E-mail: lrande@malthus.morton.wm.edu.

Note-se que as cartas de Ouros são neutras. Podem ser adicionados eleitores em múltiplos de sete reproduzindo as anteriores distribuições. Quando o número de alunos numa turma não é um múltiplo de sete, alguns alunos podem sentar-se aos pares e consideram-se como um único eleitor. O número de «pintas» e a figura das cartas não interessam, podendo, por isso, combinar-se dois baralhos para se adquirir um conjunto de 26 Espadas que permitirão cinco replicações da situação dos sete eleitores.

Tabela 1. Distribuição das cartas pelos eleitores.

Eleitor 1	Eleitor 2	Eleitor 3	Eleitor 4	Eleitor 5	Eleitor 6	Eleitor 7
<i>Copas</i>	<i>Copas</i>	<i>Copas</i>	<i>Copas</i>	Ouros	Ouros	Ouros
Espadas	Espadas	Ouros	Ouros	Espadas	Espadas	Espadas

Projetos correspondentes:

<i>Rodovia</i>	<i>Rodovia</i>	<i>Rodovia</i>	<i>Rodovia</i>	Escola	Escola	Escola
Escola	Escola					

As instruções do anexo, a entregar a cada aluno, explicam como os pagamentos/benefícios são determinados.

Cada eleitor paga um imposto de 200€ por cada projeto que é aprovado. O benefício de uma escola é de 300€ para um eleitor com uma Espada e o benefício de uma Rodovia são 300€ para um eleitor com uma Copa.

Por exemplo, se ambos os projetos são aprovados, os eleitores E1 e E2 ganham 600€ em benefícios e perdem 400€ em impostos, todos os outros eleitores ganham 300€ em benefícios e perdem 400€ em impostos.

Note-se que cinco eleitores são a favor da escola, portanto o seu benefício agregado é $5 \times 300 = 1500\text{€}$, o que excede o custo de $7 \times 200 = 1400\text{€}$.

O projeto Rodovia, por outro lado, tem um benefício agregado de $4 \times 300 = 1200\text{€}$ – valor inferior ao do custo agregado, que é 1400€.

Finalmente, os benefícios agregados dos projetos Rodovia/Escola são de 2700€, o que é inferior aos custos agregados do pacote: $1400\text{€} \times 2 = 2800\text{€}$.

Estes pagamentos/benefícios tornam possível observar um ciclo de votação no qual a 1.^a opção vence a 2.^a opção, que por sua vez vence a 3.^a opção, mas a 3.^a opção vence a 1.^a opção.

Numa votação entre nenhum dos projetos e apenas o projeto da Rodovia, o projeto da Rodovia vence com o apoio de eleitores E1 a E4.

Numa votação entre o projeto da Rodovia e ambos os projetos, o conjunto dos dois projetos vence. Isto porque os eleitores E1 e E2 beneficiam de ambos os projetos, e eleitores E5, E6 e E7 preferem perder 100€ da aprovação dos dois projetos a perderem 200€ resultante da aprovação apenas do projeto da Rodovia.

Para completar o ciclo, note-se que a aprovação de ambos os projetos não recebe mais votos do que a aprovação de nenhum projeto. Os únicos eleitores que preferem a aprovação de ambos os projetos são os que recebem uma carta de Copas e uma de Espadas.

- **Ordem do dia 1** – no anexo de instruções está planeada uma votação para conduzir os estudantes a um ciclo. Esta ordem do dia também mostra que cada projeto pode ser aprovado quando cada um é considerado isoladamente, de forma sequencial, mesmo sabendo que a maioria prefira não aprovar algum a aprovar os dois.

Os resultados da Ordem do dia 1 podem ser registados escrevendo a soma dos votos no espaço à frente da designação do projeto:

Rodovia _____ *versus* Não Rodovia _____;

Escola _____ *versus* Não Escola _____;

Ambos projetos Aprovados _____ *versus* Nenhum projeto aprovado _____

- **Ordem do dia 2** – permite-se aos alunos que observem o ciclo anterior de votações efetuando comparações entre pares de possíveis opções.
- **Ordem do dia 3** – é geralmente usada para que os eleitores escolham entre dois desafios/propostas numa primeira fase (primárias) e depois escolham entre o vencedor das primárias e uma terceira opção, vulgarmente conhecido pelo «vota fora». Esta ordem do dia também ilustra a diferença entre votação ingénua/sincera e estratégica.

Se não houver nenhuma votação estratégica na Ordem do dia 3, pode-se permitir que os estudantes discutam estratégias antes de repetir, uma segunda vez, a sucessão de votos na Ordem do dia 3.

Dependendo do número de alunos a participar na atividade, organizam-se as cartas de forma a dar a partir do topo duas cartas para o eleitor que corresponde a E1, as próximas duas cartas para o eleitor que corresponde a E2, e assim sucessivamente.

No início da atividade, distribuem-se as instruções e as cartas a cada aluno, são lidas as instruções em voz alta, e esclarecem-se quaisquer dúvidas que surjam.

Procede-se às votações para cada ordem do dia anteriormente definidas, garantindo-se que os alunos vão registando os seus votos e benefícios/prejuízos. No sentido de facilitar o debate, os resultados das várias votações devem ser mantidos visíveis para toda a turma. Não deverão ser permitidas abstenções, essencialmente quando o número de alunos participantes é reduzido.

Discussão/debate

A explicação da distribuição das cartas dos sete eleitores, constante na Tabela 1, deve ser dada a conhecer aos alunos, após as várias votações e antes de se promover a discussão dos resultados obtidos nas várias ordens do dia.

Como exemplo de resultados passíveis de serem discutidos, apresentam-se, abaixo, os resultados obtidos numa atividade realizada por 21 alunos.

Agenda 1	1. ^a Votação	Rodovia?	Sim (13)	Não (8)
	2. ^a Votação	Escola?	Sim (16)	Não (5)
	3. ^a Votação	Vencedores da 1. ^a e 2. ^a votação (9)		Nenhum (12)
Agenda 2	1. ^a Votação	Nenhum (8) ou Só Rodovia (13)		
	2. ^a Votação	Vencedor da 1. ^a votação (7) ou Só Escola (14)		
	3. ^a Votação	Vencedor da 2. ^a votação (7) ou Ambos (14)		
Agenda 3	1. ^a Votação	Nenhum (6) ou Só Escola (15)		
	2. ^a Votação	Vencedor da 1. ^a votação (9) ou Ambos (12)		
Agenda 3 (após discussão)	1. ^a Votação	Nenhum (12) ou Só Escola (9)		
	2. ^a Votação	Vencedor da 1. ^a votação (14) ou Ambos (7)		

Instruções para a «Ordem do dia e votação estratégica»

Vamos efetuar um simples exercício que ilustra a tomada de uma decisão política por um conjunto de leitores de uma dada cidade.

Será entregue a cada um de vós, eleitores, duas cartas de jogar. Estas cartas determinarão o que cada um beneficiará com as várias propostas que irão ser votadas.

Vamos votar um conjunto de propostas em que em cada etapa das votações será usado o sistema de votação por maioria.

Existem dois potenciais projetos para a cidade, a construção de uma «Rodovia» e a construção de uma «Escola». Cada projeto, se for aprovado, acarreta um custo de 200€ de imposto a cada eleitor. Os benefícios dependem das cartas que se tiver na mão. Se uma das tuas cartas é uma «Espada», o eleitor é favorável à construção da «Escola» e receberá um benefício de 300€ se a escola for construída, isto é, o benefício menos o imposto é 100€ (300€ - 200€).

Se uma das cartas for uma «Copa», o eleitor é favorável à construção da «Rodovia» e receberá um benefício de 300€ se a rodovia for construída, isto é, o benefício menos o imposto é de 100€ (300€ - 200€).

Se o eleitor tiver na mão uma «Copa» e uma «Espada», então o teu benefício global com a aprovação dos dois projetos é de 200€ (300€ - 200€ + 300€ - 200€).

Se o eleitor não tiver uma «Espada» e os restantes eleitores aprovarem somente a construção da «Escola», então terá um benefício global de -200€, correspondente ao imposto, o mesmo sucedendo para a situação de não ter uma «Copa» e somente ser aprovado a construção da «Rodovia».

Por fim, uma carta de «Ouros» não tem efeitos diretos nos ganhos. Por exemplo se o eleitor tiver um «Ouro» e uma «Espada», receberás no total um benefício de 100€ (300€ - 200€) se só a «Escola» for construída; se tiver um «Ouro» e uma «Copa» pagará 200€ (0€ - 200€) se só a «Rodovia» for construída.

Agora, para facilitar as opções a tomar por cada eleitor, cada um deve verificar as cartas que possui e registar na tabela abaixo os ganhos e os prejuízos globais para cada uma das quatro possibilidades:

Projetos Aprovados	Ganhos		Impostos		Benefícios Globais
Somente Rodovia	_____ €	–	200 €	=	_____ €
Somente Escola	_____ €	–	200 €	=	_____ €
Ambos os projetos	_____ €	–	400 €	=	_____ €
Nenhum dos projetos	_____ €	–	0 €	=	_____ €

É possível que alguns eleitores tenham benefícios globais negativos (prejuízos). Neste caso, as perdas serão subtraídas e os ganhos serão adicionados para se poder determinar os Ganhos Totais.

Estes ganhos são hipotéticos e usados como propostas apenas para promover a discussão.

3. Estudo eleitoral na minha freguesia

Introdução

A junta de freguesia é a menor divisão administrativa do nosso país, tratando-se de uma subdivisão obrigatória dos concelhos, no sentido em que todos os concelhos tenham pelo menos uma freguesia (cujo território, nesse caso, coincide com o do concelho).

Os órgãos representativos da freguesia são a Assembleia de Freguesia e a Junta de Freguesia, sendo a assembleia de freguesia um órgão deliberativo da freguesia e a junta de freguesia um órgão executivo colegial da freguesia. A junta de freguesia é constituída por um presidente e por vogais. As funções de secretário e de tesoureiro são exercidas por dois vogais.

Nas eleições autárquicas, que se realizam com uma periodicidade de 4 anos, todos os cidadãos com direito a voto e com residência oficial numa dada junta de freguesia são chamados a exercer o seu direito de voto e dessa forma intervir ativamente na eleição dos seus mais próximos representantes políticos.

Neste trabalho, que deverás realizar com um grupo de colegas, propõe-se que realizes um estudo eleitoral na tua freguesia. Neste estudo deves, usando os teus conhecimentos sobre a teoria das eleições e a tua capacidade de intervir socialmente, abordar vários atores políticos da tua freguesia no sentido de colheres as suas opiniões, ideias e propostas. A análise de resultados de eleições autárquicas anteriores, ao nível da tua junta de freguesia, e o estudo sobre vantagens de possíveis coligações deverá constar também do teu estudo.

Normas orientadoras

Grupo de Trabalho

O trabalho de grupo «Estudo Eleitoral na Minha Freguesia» deverá ser realizado em grupo, de 3 a 4 alunos, sendo que todos os elementos do grupo **deverão ter um papel de intervenção claramente definido** de forma a concretizar as tarefas propostas.

Organização e Estrutura do Trabalho

Na realização do trabalho os grupos devem ter em atenção os seguintes aspetos:

- Selecionar uma das freguesias do conjunto de freguesias onde residem os elementos do grupo;
- Caracterizar a freguesia selecionada (população, área, localização geográfica, principal atividade produtiva, escolas, instituições sociais e privadas, ...);
- Elaborar um histórico sobre a distribuição de mandatos pelos vários partidos ao longo das várias eleições autárquicas;
- Determinar a distribuição dos mandatos para a Assembleia de Freguesia a partir dos resultados eleitorais das últimas eleições legislativas, aplicando:
 - o Método de D'Hondt.
 - o Método de Sainte-Laguë.
- Comparar, para cada partido, a percentagem de votos com a percentagem de mandatos eleitos por cada um dos métodos. Comentar os resultados obtidos nesta alínea e na anterior.
- Simular a coligação entre dois ou mais partidos e comentar os resultados.

- Realizar uma pequena entrevista/questionário a um dos elementos da junta de freguesia (Presidente da Junta, Presidente da Assembleia, Tesoureiro, etc...) onde se inclua o conhecimento do método eleitoral aplicado nas eleições autárquicas, a realização de estudos de coligação e a realização de sondagens.
- Organizar e apresentar os dados:
 - Pesquisar no site www.cne.pt ou www.stape.pt os resultados eleitorais.
 - Pesquisar em motores de busca, por exemplo o Google, sites com informações sobre a freguesia selecionada e o respetivo concelho. (Existem freguesias que possuem o seu próprio site.)
 - Utilizar o *software Excel* e/ou as listas da calculadora gráfica para obter os quocientes dos métodos eleitorais.
 - Elaborar o trabalho/relatório no processador de texto *Microsoft Word* (Arial; 12; 1,5).
 - Elaborar uma apresentação do trabalho em Microsoft PowerPoint.
- O trabalho deve ter uma conclusão onde se refira: as dificuldades sentidas, a importância do estudo, os meios que utilizaram, uma descrição das tarefas realizadas por cada elemento do grupo e ainda uma autoavaliação (0 a 20) do grupo para cada elemento do grupo.

Avaliação do trabalho

A avaliação do trabalho será dividida segundo os parâmetros seguintes e respetivas ponderações:

- Correção e clareza dos raciocínios matemáticos – **50%**;
- Criatividade, materiais, desenhos/esquemas, extrapolações – **15%**;
- Apresentação e organização do trabalho escrito – **10%**;
- Correção e clareza da escrita – **10%**;
- Apresentação oral do trabalho à turma – **15%**;
- Prazo de entrega (não aceitação ou penalização de 1% na classificação por cada dia de atraso).

Sugestões/dicas

Para que o trabalho fique o mais completo possível e traduza, o máximo possível, o trabalho de campo e as possíveis discussões sobre a aplicação dos métodos eleitorais realizadas pelo grupo apresentam abaixo algumas dicas a ter em conta:

- tirar muitos apontamentos durante a realização das atividades/tarefas;
- mostrar o que sabem e o que descobriram com este trabalho;
- escrever o relatório logo que seja possível, para que não se esqueçam da experiência vivida e para que o relatório traduza mais fielmente o empenho e envolvimento do grupo;
- usar vários livros escolares, enciclopédias, internet, ...;
- não ter receio de perguntar e tirar dúvidas, por muito simples que pareçam, junto dos professores da turma (MACS, Português, Geografia, ...);
- escrever sem erros ortográficos e com frases curtas e explícitas;
- dar a ler a alguém com mais competências que os elementos do grupo o relatório antes de o entregar. Desta forma terão uma primeira opinião sobre, pelo menos, a legibilidade do vosso relatório.

Estrutura do trabalho escrito/relatório

O trabalho escrito/relatório deve contemplar uma estrutura semelhante à seguinte:

- **Capa** – com identificação dos alunos, da disciplina, da escola e ano letivo, e título do trabalho.
- **Introdução** – com referência ao âmbito do trabalho, em que consiste e como está estruturado.
- **Desenvolvimento** – nesta parte poderão existir vários subcapítulos, podendo no primeiro ser apresentado o enunciado/problema a ser tratado, assim como os objetivos que se pretendem atingir. Os restantes subcapítulos deverão contemplar os vários pontos apresentados acima na Organização e Estrutura do Trabalho.
- **Conclusão e Bibliografia.**

Apresentação oral do trabalho

A apresentação oral do trabalho, a ser realizada em sala de aula e perante a turma, deve conter de forma sucinta e objetiva as partes essenciais do trabalho, podendo ser construído um a dois diapositivos para cada uma dessas parte, nomeadamente:

- identificação do trabalho e grupo;
- identificação e caracterização da freguesia selecionada;
- apresentação da evolução histórica dos resultados eleitorais;
- simulação da aplicação dos métodos eleitorais e de coligações com os últimos resultados eleitorais autárquicos;
- identificação do político entrevistado e apresentação dos aspetos mais relevantes da entrevista;
- relato sobre a experiência de aprendizagem vivida pelo grupo de trabalho;
- conclusão.

Todos os elementos do grupo devem participar na apresentação oral do trabalho, devendo cada um ter bem preparada a sua parte e ser conhecedor de toda apresentação. Para auxiliar a apresentação do trabalho, o grupo pode construir um guião que poderá ser subdividido em cartões de tamanho A5 a serem consultados durante a apresentação.

PRAZO E DATAS DE APRESENTAÇÃO

O trabalho de grupo «Estudo Eleitoral na Minha Freguesia» terá de ser entregue, **em papel e em formato digital**, numa aula de MACS, até ao dia ____ de _____ e será apresentado nas aulas de MACS dos dias ____, ____ e ____ de _____ do corrente ano letivo.

4. Código de César: a estatística na criptologia

Introdução

A ameaça de intercepção de mensagens importantes levou ao desenvolvimento de códigos e de cifras, ou seja, à criação de princípios e técnicas pelas quais a informação constante na mensagem pode ser transformada da sua forma original para outra ilegível, de forma a que possa apenas ser conhecida pelo seu destinatário (detentor da «chave secreta»), e que a torna difícil de ser lida por alguém não autorizado. Assim, só o recetor da mensagem pode ler a informação com facilidade. Associado ao estudo destes princípios e técnicas surgiu um novo ramo da Matemática, designado por Criptografia (do Grego *kryptós*, «escondido», e *gráphein*, «escrita»). A Criptologia é a área científica que reúne e estuda os conhecimentos (matemáticos, computacionais, psicológicos, etc.) e técnicas necessárias à criptoanálise – solução de criptogramas – e à criptografia – escrita codificada.

A História dá-nos diversos exemplos de códigos que condicionaram o desfecho de batalhas ou provocaram a morte de reis e rainhas. Estes também eram utilizados na espionagem e no envio de mensagens sigilosas de assuntos de estado.

Na atualidade, em que a revolução das comunicações transforma a sociedade e a informação circula por todo o lado, o processo de codificar mensagens tornou-se crucial para garantir a segurança e a privacidade das comunicações. É o caso dos canais de televisão codificados, dos sistemas de segurança bancários, dos cartões de crédito e de débito, ou do comércio na internet.

O mais interessante é que a tecnologia da criptografia não mudou muito até meados do século XX. Depois da Segunda Guerra Mundial, com o surgimento do computador, a área realmente floresceu incorporando complexos algoritmos matemáticos. Durante a guerra, os ingleses ficaram conhecidos pelos seus esforços para descodificação de códigos. Na verdade, esse trabalho criptográfico formou a base para a ciência da computação moderna.

Para mantermos uma mensagem secreta podemos recorrer a um código em que uma palavra (ou uma frase) é substituída por uma outra palavra, por um número ou por um símbolo. Outra alternativa é a utilização de uma cifra, em que são substituídas as letras e não as palavras inteiras.

Código de César

Um dos mais antigos exemplos de encriptação de uma mensagem é o denominado **Código de César**, ou cifra de César, ou cifra de troca. Foi utilizado pelo Imperador Romano Júlio César, (101 – 44 a.C.), para escrever documentos para fins militares.

A técnica utilizada consistia em substituir cada letra da mensagem pela letra **três lugares adiante** no alfabeto, num processo denominado por cifra de substituição monoalfabética e que foi utilizado durante o primeiro milénio da era cristã.

Embora o sistema utilizado por César seja relativamente fácil de ser violado, pois existem apenas 25 chaves de codificação possíveis, se procedermos à reordenação do alfabeto corrente de todas as formas possíveis, já existirão mais de ... **400 000 000 000 000 000 000 000 000** de codificações.



(101–44 a.C.)

Se pensarmos que demoraria 10 segundos a verificar cada uma das possíveis chaves, levaria bilhões de anos para as verificar todas e conseguir, dessa forma, decifrar a mensagem. Esta suposta inviolabilidade ruiu no século IX, quando o sábio e cientista árabe, Al-Kindi, descobriu um método para quebrar este tipo de encriptação recorrendo à Análise Estatística.

Para aplicar este método torna-se necessário, em primeiro lugar, conhecer a frequência média com que ocorre cada uma das letras do alfabeto na língua em que se encontra a mensagem, no nosso caso, o português.

Letra	Freq. %	Letra	Freq. %	Letra	Freq. %	Letra	Freq. %	Letra	Freq. %
A	14,63	G	1,30	M	4,74	S	7,81	Y	0,01
B	1,04	H	1,28	N	5,05	T	4,34	Z	0,47
C	3,88	I	6,18	O	10,73	U	4,63		
D	4,99	J	0,40	P	2,52	V	1,67		
E	12,57	K	0,02	Q	1,20	W	0,01		
F	1,02	L	2,78	R	6,53	X	0,21		

Tabela das frequências relativas da ocorrência das letras do alfabeto na língua portuguesa.

A análise prossegue com a determinação da frequência com que cada letra aparece no texto cifrado e, finalmente, tentamos estabelecer uma correspondência entre cada letra do alfabeto e a respetiva letra cifrada.

No caso do Código de César, consiste em determinar a chave do código, ou seja, identificar um número, entre 1 e 25, correspondente ao número de caracteres deslocados entre os alfabetos do texto original e do texto cifrado.

No caso de ser utilizado um alfabeto reordenado como alfabeto de cifra, a análise de frequência dos caracteres utilizados teria de ser complementada com uma análise mais refinada, observando quais são os pares e os ternos de letras que se associam mais habitualmente e as letras que nunca se associam, exigindo, para além de um raciocínio lógico, astúcia, intuição e imaginação.

Mensagem secreta

Foi intercetada uma mensagem (com 37 caracteres), cujo conteúdo é da maior importância, mas sobre o qual apenas se sabe que foi codificado utilizando o método «Código de César».

Com base nos conhecimentos agora adquiridos sobre o método e aplicando a técnica de análise de frequência utilizada pelos árabes, vamos decifrar a mensagem...

Mensagem cifrada: **qdrkdpdfkdgrtxhfruwhdudlcrshqvdpqhwr**

Começa-se por determinar a frequência relativa de cada uma das três letras da mensagem cifrada que ocorrem maior número de vezes, obtendo-se os valores constantes na tabela abaixo.

qdrkdpdfkdgrtxhfruwhdudlcrshqvdpqhwr

Letra	n_i	Frequência relativa
d	8	21,62
r	5	13,51
h	4	10,81

Tabela das frequências das letras que ocorrem maior número de vezes na mensagem cifrada.

Estabelece-se agora uma correspondência entre o alfabeto simples e o alfabeto cifrado, identificando o número (entre 1 e 25) de letras deslocadas de um para o outro alfabeto – a denominada chave do código.

A correspondência da letra do alfabeto cifrado com a do alfabeto simples pode não ser integral, isto é, não existir correspondência direta entre as letras com a mesma ordem de frequência relativa. No nosso exemplo, e após o estudo de algumas das possibilidades, verifica-se que a letra com a segunda maior frequência relativa da Mensagem Cifrada terá que responder à letra com a terceira maior frequência relativa da Língua Portuguesa. Esta situação poderá acontecer em qualquer mensagem cifrada, já que o número de letras da própria mensagem poderá ser insuficiente para se obter valores de frequência relativa completamente correspondentes aos esperados.

Letra	Frequência relativa		Letra	Frequência relativa
d	21,62	→	a	14,63
r	13,51	→	e	12,57
h	10,81	→	o	10,73

Mensagem Cifrada

Língua Portuguesa

Percebe-se então que a chave do nosso código é 3, isto é, no alfabeto cifrado foram deslocadas três letras. Agora que se sabe a chave de descodificação, está na altura de desvendar a mensagem secreta, que se trata de um pensamento filosófico.

Mensagem cifrada: qdrkdpdfkdgrtxhfruwhdudlcdrshqvdpqhwr

Mensagem decifrada: Não há machado que corte a raiz ao pensamento

À descoberta do código¹

Aplicando o método do «Código de César» e a técnica de análise estatística utilizada pelos árabes, decifre a mensagem abaixo, descobrindo primeiro qual a chave do código (1 a 25). Considere o alfabeto português contendo 26 letras (inclui k, w, y).

Mensagem cifrada:

u n y i j u c t k q i c q n y c q i x y i j e h y s q i q i e s y q s q i q z k b y e s u i q h i q e u b q i q s
u i q h e g k u u s u s u i q h u q c k b u u h s u s u i q h d q e r q i j q i u h u e d u i j s u l u f q h
u s u h u e d u i j q

Copie e complete a tabela de frequências, absolutas e relativas, das letras mais frequentes na Mensagem Cifrada:

Letra da Mensagem Cifrada	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Possível Letra correspondente na Mensagem Decifrada

Pela análise da tabela acima e pela observação do significado, ou não, de palavras da mensagem após a substituição das letras da Mensagem Cifrada pelas correspondentes da Mensagem Decifrada, conclua qual a chave do código. De seguida preencha a tabela abaixo, estabelecendo a correspondência entre as letras da mensagem cifrada e as letras da mensagem decifrada.

Mensagem Cifrada	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Mensagem Decifrada																										

Usando as linhas abaixo e substituindo as letras da mensagem cifrada pelas correspondentes letras da mensagem decifrada, escreva, agora, a mensagem decifrada.

un y i j u c t k q i c q n y c q i x y i j e h y s q i q i e s y q s q i q z k b y e s u i q h i

q e u b q i q s u i q h e g k u u s u s u i q h u q c k b u u h s u s u i q h d q e r q i j

q i u h u e d u i j q s u l u f q h u s u h u e d u i j q

Desafio da encriptação

Considere o método do «Código de César», para uma chave à sua escolha (de 1 a 25), e uma mensagem que queira encriptar e enviar à sua turma. Escreva a mensagem cifrada e lance o desafio!

5. Simuladores nos modelos financeiros

Introdução

A existência de modelos matemáticos que traduzem situações da vida real, como por exemplo, o cálculo do vencimento mensal ou até da simples conta mensal da água, permite, dado o rigor e objetividade científica da Matemática, criar mecanismos que reproduzam fenômenos e cálculos sujeitos a várias variáveis/características.

A esses mecanismos chamamos, habitualmente, **simuladores**, sendo que no nosso caso nos interessa essencialmente aqueles que são construídos com recurso às tecnologias, em particular *softwares* de cálculo e programação, e que são capazes de reproduzir e simular o comportamento de um modelo matemático, por muito complexo que seja. Os simuladores tornam possível analisar e comparar resultados, fazendo com que o centro do debate seja o resultado final e as implicações que têm as possíveis variações dos parâmetros do modelo matemático.

Com uma pequena pesquisa na internet poder-se-á verificar que existe um número significativo de simuladores na área das finanças e economia, desde logo, os vários simuladores criados por instituições de crédito que nos bombardeiam com tentadoras propostas de endividamento, aparentemente fácil.

Claro está que o importante será saber usar, da melhor forma, um bom simulador para analisar um modelo financeiro e daí extrair corretas interpretações e ilações. Mas será, também, importante ter algumas noções de como construir um simples simulador e, principalmente, perceber o rigor de linguagem que é utilizado nestas ferramentas tecnológicas.

Construir um simples simulador

Considere uma simples tabela de cálculo da taxa de um hipotético imposto sobre veículos que varia em função de dois parâmetros: valor comercial dos veículos; número veículos automóveis.

Numa folha de cálculo, por exemplo do *Microsoft Office*, produza a tabela em baixo e construa a estrutura para o cálculo automático da taxa e do valor do imposto.

		Número de Veículos		
		1	2	3 ou mais
Valor Comercial	Até 2000	2%	5%	11%
	Até 4000	4%	9%	15%
	Superior a 4000	7%	12%	21%

Tabela de Imposto sobre Veículos

A folha de cálculo poderá ser semelhante à da imagem abaixo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	CÁLCULO DO IMPOSTO SOBRE VEÍCULOS									Número de Veículos		
2										1	2	3
3	Valor Comercial:	1000		Taxa de Imposto	Valor do Imposto	Valor Comercial	Até 2000	2%	5%	11%		
4							Até 4000	4%	9%	15%		
5	Nº Veículos:	4					Superior a 4000	7%	12%	21%		

As células B3 e B5 serão preenchidas pelos utilizadores e representam as variáveis, valor comercial e número de veículos, das quais depende a taxa e o valor do imposto.

As células D4 e E4 serão preenchidas automaticamente com os valores da taxa e do imposto, respetivamente. Para tal é necessário inserir uma função/expressão que permita, em função dos valores de B3 e B5, obter automaticamente a taxa e o valor do imposto.

A taxa de imposto terá que ser obtida tendo em atenção a tabela de cálculo do imposto, constante também na mesma folha de cálculo. Para se compreender mais facilmente, considere-se o seguinte caso concreto.

Seja o valor comercial igual a 2600€ e o número de veículos igual a 1. Através da leitura da Tabela de Imposto sobre Veículos, verificamos que a taxa será de 4% (valor da célula J4) e, portanto, o valor do imposto será de 104€. Que função usar na folha de cálculo para obtermos automaticamente a taxa de imposto correta?

As funções condicionais e as funções lógicas são as habitualmente utilizadas neste tipo de cálculo automático, nomeadamente as funções:

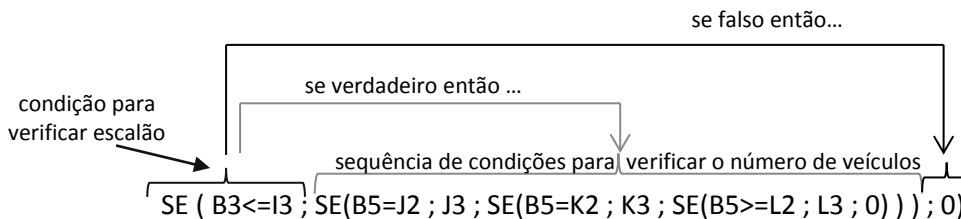
SE(condição ; resultado se condição verdadeira ; resultado se condição falsa)

e

E(condição1; condição2; ...; condiçãoN).

No caso da tabela da página anterior e por cada escalão do valor comercial teremos que ter uma condição que verifique se o valor da célula B3 é menor ou igual ao limite desse escalão e maior que o limite do escalão anterior e, se for verdade, verificar qual o número de veículos e atribuir como resultado a taxa respetiva.

Para o primeiro escalão, valor comercial (B3) inferior ou igual a 2000€ (I3) teremos:



Para o segundo e terceiro escalões teremos, respetivamente, as expressões seguintes:

SE (E(I3<B3; B3<=I4) ; SE(B5=J2 ; J4 ; SE(B5=K2 ; K4 ; SE(B5>=L2 ; L4 ; 0))) ; 0)

SE (B3>I5; SE(B5=J2 ; J5 ; SE(B5=K2 ; K5 ; SE(B5>=L2 ; L5 ; 0))) ; 0)

O nosso simples simulador poderá ficar como o da figura abaixo:

=SE(B3<=I3;SE(B5=J2;J3;SE(B5=K2;K3;SE(B5>=L2;L3;0)));0) + SE(E(I3<B3;B3<=I4);SE(B5=J2;J4;SE(B5=K2;K4;SE(B5>=L2;L4;0)));0) + SE(B3>I5;SE(B5=J2;J5;SE(B5=K2;K5;SE(B5>=L2;L5;0)));0)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	CÁLCULO DO IMPOSTO SOBRE VEÍCULOS									Número de Veículos		
2										1	2	3
3	Valor Comercial:	4500		Taxa de Imposto	Valor do Imposto							
4				0,07	315							
5	Nº Veículos:	1										

Construir um simulador para a retenção de IRS

O que aqui propomos que faça é que, com recurso a uma folha de cálculo, por exemplo o *Microsoft Excel* ou a calculadora, construa um simples simulador para o cálculo da retenção do IRS de 2014 e 2015 e respetiva comparação.

As tabelas de retenção mensal de IRS para 2014 e 2015 não são de difícil leitura mas são várias e extensas, por isso vamos nos debruçar apenas sobre alguns dados dessas tabelas, a saber: Tabela III – Trabalho Dependente, Casado com Dois Titulares. Parte destas tabelas encontra-se no final desta atividade. Contemplaremos apenas alguns escalões dessas tabelas.

Começemos por abrir uma folha de cálculo e inserir nas duas primeiras páginas as tabelas de retenção de IRS que pretendemos ver reproduzidas por um simulador. As tabelas em *Excel* podem ser obtidas na internet, bastará, para isso, pesquisar com os termos «Tabelas Retenção IRS xls» e descarregar os ficheiros.

No sentido de procedermos a uma primeira análise comparativa, resultante de uma leitura direta e simples das tabelas, vamos colocar lado a lado estas duas tabelas.

	A	B	C	D	E	F	G	H
97	TABELAS DE RETENÇÃO NA FONTE PARA O CONTINENTE - 2015							
99	T A B E L A III - TRABALHO DEPENDENTE							
101	CASADO DOIS TITULARES							
102								
103	Remuneração Mensal Euros		Número de dependentes					
104			0	1	2	3	4	5 ou mais
105	Até	607,00	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
106	Até	615,00	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
107	Até	633,00	5,0%	3,1%	1,2%	0,0%	0,0%	0,0%
108	Até	675,00	6,0%	4,1%	2,2%	0,0%	0,0%	0,0%
109	Até	726,00	7,5%	5,6%	3,7%	0,8%	0,0%	0,0%
110	Até	801,00	8,5%	6,6%	4,7%	2,8%	0,9%	0,0%
111	Até	907,00	11,0%	9,1%	6,2%	5,3%	3,4%	1,5%
112	Até	988,00	12,5%	10,6%	9,7%	6,8%	4,9%	4,0%
113	Até	1.048,00	13,5%	11,6%	10,7%	7,8%	5,9%	5,0%
114	Até	1.124,00	14,5%	12,6%	11,7%	8,8%	7,9%	6,0%
115	Até	1.205,00	15,5%	13,6%	12,7%	9,8%	8,9%	7,0%
116	Até	1.300,00	16,5%	15,6%	13,7%	11,8%	9,9%	9,0%
117	Até	1.401,00	17,5%	16,6%	14,7%	12,8%	10,9%	10,0%
118	Até	1.537,00	18,5%	17,6%	15,7%	13,8%	11,9%	11,0%
119	Até	1.683,00	20,0%	19,1%	17,2%	15,3%	14,4%	12,5%

	A	B	C	D	E	F	G	H
98	TABELAS DE RETENÇÃO NA FONTE PARA O CONTINENTE - 2014							
99								
100	T A B E L A III - TRABALHO DEPENDENTE							
101								
102	CASADO DOIS TITULARES							
103								
104	Remuneração Mensal Euros		Número de dependentes					
105			0	1	2	3	4	5 ou mais
106	Até	585,00	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
107	Até	590,00	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
108	Até	595,00	2,0%	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
109	Até	633,00	5,0%	4,0%	3,0%	1,5%	1,5%	1,0%
110	Até	675,00	6,0%	5,0%	4,0%	2,0%	2,0%	1,5%
111	Até	726,00	7,5%	6,5%	5,5%	3,5%	3,0%	2,0%
112	Até	801,00	8,5%	7,5%	6,5%	5,5%	4,5%	3,0%
113	Até	907,00	11,0%	10,0%	10,0%	8,0%	7,0%	6,0%
114	Até	988,00	12,5%	11,5%	11,5%	9,5%	8,5%	8,5%
115	Até	1.048,00	13,5%	12,5%	12,5%	10,5%	9,5%	9,5%
116	Até	1.124,00	14,5%	13,5%	13,5%	11,5%	11,5%	10,5%
117	Até	1.205,00	15,5%	14,5%	14,5%	12,5%	12,5%	11,5%
118	Até	1.300,00	16,5%	16,5%	15,5%	14,5%	13,5%	13,5%
119	Até	1.401,00	17,5%	17,5%	16,5%	15,5%	14,5%	14,5%
120	Até	1.537,00	18,5%	18,5%	17,5%	16,5%	15,5%	15,5%

Que diferença(s) destaca na tabela de retenção de 2015 relativamente à tabela de 2014?

Talvez o facto dos escalões iniciais de «Remuneração Mensal» serem diferentes! Os três primeiros escalões da tabela de 2014 então inseridos nos dois primeiros escalões da tabela de 2015, sendo que a partir daí os escalões são os mesmos!

Essas diferenças permitem concluir que a retenção mensal do IRS será menor em 2015?

Nos escalões que se mantêm nas duas tabelas, por exemplo no escalão entre 633€ e 675€ (5.º escalão na tabela de 2014 e 4.º escalão na tabela de 2015), é relativamente fácil afirmar qual o ano em que a retenção é maior, sendo suficiente verificar qual a percentagem de retenção! No entanto, é sempre necessário verificar os escalões inferiores, dada a aplicação parcelar deste imposto.

A comparação entre o valor dos descontos e remuneração líquida, para qualquer vencimento, é possível fazer-se?

Para obtermos estes valores teremos que aplicar a tabela a valores concretos/reais de remuneração mensal bruta, para isso sem dúvida que um simulador nos poupa imenso trabalho.

Vamos então construir um simulador que nos permita obter a retenção mensal do IRS, com base nas duas tabelas, permitindo-nos, assim, compará-las com mais rigor. Deste modo, vamos poder analisar rapidamente inúmeras situações.

Não é nosso intuito, agora, sermos especialista em folha de cálculo e muito menos na construção de simuladores, no entanto vamos tentar perceber como poderemos usar funções lógicas e condicionais para que a nossa folha de cálculo faça a leitura correta dos dados e, consequentemente, os cálculos adequados.

Perante os dados de uma situação concreta, neste caso, a remuneração mensal bruta e o número de descendentes de um agregado familiar com dois titulares, olhamos para uma tabela e situamos o correspondente escalão remuneratório (linha da folha de cálculo) e o correspondente número de descendentes (coluna da folha de cálculo), sendo que na célula resultante do cruzamento da linha e coluna identificadas se encontra a taxa a aplicar.

Como poderemos fazer essa leitura através das funções de uma folha de cálculo?

A função condicional **SE**(condição; resultado se condição verdadeira; resultado se condição falsa) é muito utilizada nas folhas de cálculo, e também na programação, para comparar valores e atribuir um resultado em função do valor lógico (verdadeiro=1 ou falso=0) da comparação, por exemplo, **SE**(5=3+3; «Correto»; «Errado») terá como resultado a expressão «Errado» pois a condição 5 = 3 + 3 é falsa. Atente-se nas figuras abaixo.

fx =SE(5=3+3;"Correto";"Errado")		
D	E	F
	Errado	Correto

fx =SE(5<3+3;"Correto";"Errado")		
D	E	F
	Errado	Correto

Outra função, neste caso uma função lógica, muito utilizada é a função **E**(condição1; condição2; ...) cujo o resultado é o valor lógico (verdadeiro=1 ou falso=0) resultante da conjunção de todas as condições. Recorde-se que a conjunção de condições (em linguagem corrente «e» e em linguagem matemática «^») apenas é verdadeira quando todas as condições são verdadeiras.

fx =E(3>1; 2^3=8;5-6=-1)		
D	E	
	VERDADEIRO	

Passemos agora para a construção da «leitura» automática da nossa tabela de retenção de IRS!

Numa nova folha, que podemos designar por «Simulador», comecemos por colocar algumas células com as etiquetas identificativas dos parâmetros/valores a considerar, nomeadamente o vencimento bruto (sem qualquer retenção), o número de dependentes, a taxa de retenção, o valor da retenção e o vencimento após a retenção.

Com mais ou menos formatação, o nosso simulador poderá ter o aspeto da figura ao lado.

D4 fx					
A	B	C	D	E	F
1			Taxa Retenção	Valor retenção	Vencimento após a Retenção
2					
3	Vencimento Bruto			IRS 2014	
4		620,00			
5	Nº de dependentes			IRS 2015	
6		3			
7					

Valores a serem introduzidos pelo utilizador

Valores automaticamente preenchidos através da «leitura» das tabelas de retenção de IRS

Na folha «Simulador», na célula D6 deveremos colocar a função que permite obter a taxa de retenção em função da tabela existente na folha «Tabela Retenção IRS2015» e dos valores das células C4 (vencimento bruto) e C6 (número de dependentes).

D6					
					=SE(E('Tabela Retenção IRS2015'!B105<\$B\$4; \$B\$4<='Tabela Retenção IRS2015'!B106; \$B\$6='Tabela Retenção IRS2015'!C104); 'Tabela Retenção IRS2015'!C106;0)
	B	C	D	E	F
1					
2			Taxa Retenção	Valor retenção	Vencimento após a Retenção
3		Vencimento Bruto		IRS 2014	
4		615,00			
5		Nº de dependentes		IRS 2015	
6		0	0,0200		

Analisemos a função/expressão colocada na célula D6 da imagem anterior:

Estas duas condições verificam se o valor do vencimento bruto (B4) está compreendido entre 607€ (B105) e 615€ (B106)

Esta condição verifica se o n.º de dependentes (B6) é igual a zero (C104)

=SE(E(TabelaRetenção IRS2015'!B105<\$B\$4;
\$B\$4<='Tabela Retenção IRS2015'!B106;
\$B\$6='Tabela Retenção IRS2015'!C104);
'Tabela Retenção IRS2015'!C106; 0)

103	Remuneração Mensal				Número de depende
104	Euros			1	2
105	At é	607,00	0,0%	0,0%	0,0%
106	At é	615,00	2,0%	0,0%	0,0%
107	At é	633,00	5,0%	3,1%	1,2%
	Tabela Retenção IRS2014				

Valor/Resultado da função SE quando as três condições anteriores forem verdadeiras, neste caso o resultado será 2,0% (C106)

Valor/Resultado da função SE quando uma das condições for falsa, neste caso o resultado será 0

Folha do documento Excel onde se encontra a Tabela de Retenção IRS2015

A fórmula acima permite obter a taxa de retenção para o escalão entre 607€ e 615€, já que até 607€ as taxas de retenção, independentemente do número de dependentes, são de 0%. De notar ainda que, no escalão considerado, 607€ a 615€, apenas é necessário identificar se o número de dependentes é zero ou diferente de zero, pois a taxa de retenção é igual para 1, 2, 3, 4, 5 ou mais dependentes. O mesmo não acontecerá nos restantes escalões. Assim, para que o simulador fique completo, necessitamos de adicionar à fórmula expressões semelhantes que permitam situar cada um dos escalões seguintes, identificar o número de dependentes e em função desses dados obter a percentagem de retenção de IRS. Vejamos, por exemplo, a expressão que é necessário adicionar para contemplar o segundo escalão da Tabela de Retenção de 2015:

Estas duas condições verificam se o valor do vencimento bruto (B4) está compreendido entre 615€ (B106) e 633€ (B107), isto é, se pertence ao intervalo] 615€; 633€].

... + SE (E('Tabela Retenção IRS2015'!B106<\$B\$4; \$B\$4<='Tabela Retenção IRS2015'!B107);

Se as duas condições anteriores forem verdadeiras, então teremos uma sucessão de funções SE com o objetivo de se identificar o número de dependentes e obter a taxa correspondente.

Senão, se uma das condições for falsa, o resultado desta expressão é zero.

SE(\$B\$6='Tabela Retenção IRS2015'!C104; 'Tabela Retenção IRS2015'!C107;
Se n.º de dependentes (B6) = 0 (C104) então taxa retenção é 5% (C107) senão ...
SE(\$B\$6='Tabela Retenção IRS2015'! D104; 'Tabela Retenção IRS2015'!D107;
Se n.º de dependentes (B6) = 1 (D104) então taxa retenção é 3,1% (D107) senão ...
SE(\$B\$6='Tabela Retenção IRS2015'!E104;'Tabela Retenção IRS2015'!E107;0));0)
Se n.º de dependentes (B6) = 2 (E104) então taxa retenção é 1,2% (E107) senão é zero

Para contemplarmos todos os escalões de remuneração mensal bruta deveremos adicionar, por cada escalão e retificando o número das linhas que definem os limites inferior e superior do escalão, a seguinte expressão:

```
SE(E('Tabela Retenção IRS2015'!B111<$B$4; $B$4<='Tabela Retenção IRS2015'!B112);
SE($B$6='Tabela Retenção IRS2015'!C104; 'Tabela Retenção IRS2015'!C112;
SE($B$6='Tabela Retenção IRS2015'!D104; 'Tabela Retenção IRS2015'!D112;
SE($B$6='Tabela Retenção IRS2015'!E104; 'Tabela Retenção IRS2015'!E112;
SE($B$6='Tabela Retenção IRS2015'!F104; 'Tabela Retenção IRS2015'!F112;
SE($B$6='Tabela Retenção IRS2015'!G104; 'Tabela Retenção IRS2015'!G112;
'Tabela Retenção IRS2015'!H112)))));0)
```

Para obter a taxa de IRS através da leitura da Tabela de IRS de 2014, copie a fórmula (editando-a e copiando-a, que não é o mesmo que copiar a célula) da célula D6 para a célula D4 e de seguida, usando a ferramenta substituir (CTRL + U), substitua na fórmula da célula D4 o ano «2015» para ano «2014». Deve garantir que, na folha «Tabela Retenção de IRS2014», as linhas e colunas correspondentes aos escalões e número de dependentes sejam as mesmas que na folha «Tabela de Retenção de IRS2015», assim como garantir que essas células estejam configuradas como números.

Após os ajustes necessários à fórmula de obtenção automática da taxa de retenção de IRS, para 2014 e 2015, basta agora completar o simulador com o valor absoluto da retenção ($E4=D4 \times C4$ e $E6=D6 \times C4$, respetivamente para 2014 e 2015) e vencimento líquido mensal ($F4=E4-C4$ e $F6=E6-C4$, respetivamente para 2014 e 2015), conforme figura abaixo.

	A	B	C	D	E	F
1						
2				Taxa Retenção	Valor retenção	Vencimento após a Retenção
3		Vencimento Bruto		IRS 2014		
4		860,00		0,0800	68,80	791,20
5		Nº de dependentes		IRS 2015		
6		3		0,0530	45,58	814,42
7						

Com este simulador podemos facilmente, para os escalões contemplados, comparar os valores retidos mensalmente para IRS, conforme as Escalas de Retenção de 2014 e 2015. Isto é, concluímos quem afinal beneficia com as novas taxas de IRS para 2015. Faça esse estudo e elabore um relatório apresentando exemplos que fundamentem as suas conclusões. Inclua nesse relatório um estudo relativamente ao valor do vencimento após a retenção, isto é, valor do vencimento líquido, para os vencimentos brutos que se situam próximos dos limites dos escalões, como os exemplos abaixo para 675€ e 676€.

	Taxa de Retenção	Valor da retenção	Vencimento após a retenção
Vencimento Bruto	IRS 2014		
675,00	0,0500	33,75	641,25
N.º de dependentes	IRS 2015		
1	0,0410	27,68	647,33

Taxa e Valor de Retenção e Vencimento após Retenção para o Vencimento Bruto 675€

	Taxa de Retenção	Valor da Retenção	Vencimento após a Retenção
Vencimento Bruto	IRS 2014		
676,00	0,0650	43,94	632,06
N.º de dependentes	IRS 2015		
1	0,0560	37,86	638,14

Taxa e Valor de Retenção e Vencimento após Retenção para o Vencimento Bruto 676

Extratos das tabelas de retenção mensal de IRS 2014 e 2015

As tabelas de retenção mensal de IRS são publicadas em Diário da República, 2.ª série, através de despacho por parte de um membro do governo. Abaixo colocam-se imagens do título dos despachos de 2014 e 2015 e uma parte das tabelas referentes ao Trabalhadores Dependentes na situação de Casados com dois titulares.


PARTE C

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS
Gabinete da Ministra
Despacho n.º 706-A/2014
Em execução do disposto no Decreto-Lei n.º 42/91, de 22 de janeiro, diploma quadro do regime de retenção na fonte em sede de imposto sobre o rendimento das pessoas singulares (IRS), são aprovadas as tabelas

Tabela III — Trabalho dependente

Casado dois titulares

Remuneração Mensal Euros		Número de dependentes					
		0	1	2	3	4	5 ou mais
Até	585,00	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	590,00	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	595,00	2,0%	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	633,00	5,0%	4,0%	3,0%	1,5%	1,5%	1,0%
Até	675,00	6,0%	5,0%	4,0%	2,0%	2,0%	1,5%
Até	726,00	7,5%	6,5%	5,5%	3,5%	3,0%	2,0%
Até	801,00	8,5%	7,5%	6,5%	5,5%	4,5%	3,0%
Até	907,00	11,0%	10,0%	10,0%	8,0%	7,0%	6,0%
Até	988,00	12,5%	11,5%	11,5%	9,5%	8,5%	8,5%
Até	1.048,00	13,5%	12,5%	12,5%	10,5%	9,5%	9,5%
Até	1.124,00	14,5%	13,5%	13,5%	11,5%	11,5%	10,5%


PARTE C

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS
Gabinete do Secretário de Estado dos Assuntos Fiscais
Despacho n.º 309-A/2015
Em execução do disposto no Código do Imposto sobre o Rendimento das Pessoas Singulares (IRS) são aprovadas as tabelas de retenção a que se referem os artigos 99.º-C e 99.º-D daquele diploma legal.

Tabela III — Trabalho Dependente

Casado Dois Titulares

Remuneração Mensal Euros		Número de dependentes					
		0	1	2	3	4	5 ou mais
Até	607,00	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	615,00	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	633,00	5,0%	3,1%	1,2%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	675,00	6,0%	4,1%	2,2%	0,0%	0,0%	0,0%
Até	726,00	7,5%	5,6%	3,7%	0,8%	0,0%	0,0%
Até	801,00	8,5%	6,6%	4,7%	2,8%	0,9%	0,0%
Até	907,00	11,0%	9,1%	8,2%	5,3%	3,4%	1,5%
Até	988,00	12,5%	10,6%	9,7%	6,8%	4,9%	4,0%
Até	1.048,00	13,5%	11,6%	10,7%	7,8%	5,9%	5,0%
Até	1.124,00	14,5%	12,6%	11,7%	8,8%	7,9%	6,0%

Desconstruir e reconstruir um simulador

Desconstruir? Talvez o termo pareça estranho, mas o que se pretende fazer é, partindo de um simulador já construído, em que não nos é possível aceder às fórmulas/expressões matemática que o suportam, obter informações que nos permitam a (re)construção de um simulador equivalente.

Considere-se então o simulador constante no sítio web www.ecocasa.org e que nos permite simular o valor monetário poupado e a emissão de CO₂ evitadas na substituição de lâmpadas incandescentes clássicas por lâmpadas económicas (LFC – Lâmpadas Fluorescente Compactas). Observe-se a imagem abaixo e identifique-se as variáveis envolvidas.

Substituição das lâmpadas incandescentes clássicas por lâmpadas LED ou LFC

Neste simulador poderá avaliar a substituição das lâmpadas incandescentes clássicas por lâmpadas LED ou Lâmpadas Fluorescente Compactas (mais conhecidas como lâmpadas económicas).

Nº de lâmpadas	Potência da lâmpada incandescente (W)	Tempo de utilização (horas)	Tempo por	Substituir por

Preço da eletricidade 0.1528 €/kWh (sem IVA)
 Fator de emissões da eletricidade 0.23827 kg CO₂/kWh

Consultado em 2015, em <http://www.ecocasa.org/simuladores/iluminacao/>

As variáveis/parâmetros a inserir pelo utilizador, e das quais dependerão o cálculo do valor monetário poupado e a emissão de CO₂ evitadas, são: o número de lâmpadas; a potência da lâmpada; tempo de utilização e o período considerado. Considere-se neste simulador a substituição de lâmpadas incandescentes apenas por LFC e os valores do preço e fator de emissão constantes.

Que estratégia usar para desconstruir este simulador?

Para facilitar a obtenção das fórmulas de cálculo subjacentes a este simulador considere-se valores hipotéticos do preço e do fator de emissões da eletricidade que facilitem a análise do cálculo, por exemplo, para o preço 0,10 € / kWh e para o fator de emissões 0,20 kg CO₂ / kWh.

De seguida façam-se simulações adequadas no sentido de se verificar se existe proporcionalidade entre o número de lâmpadas e os valores obtidos, entre a potência da lâmpada e os valores obtidos, entre o tempo e período de utilização e os valores obtidos. Para cada simulação devem ser extraídas conjecturas, que podem até ser refutadas na simulação seguinte, que nos permitam construir um simulador equivalente numa folha de cálculo.

Veja-se, como exemplo, a simulação constante na imagem seguinte e as conjecturas passíveis de se formularem:

Nº de lâmpadas	Potência da lâmpada incandescente (W)	Tempo de utilização (horas)	Tempo por	Substituir por

Preço da eletricidade 0.10 €/kWh (sem IVA)
 Fator de emissões da eletricidade 0.20 kg CO₂/kWh

Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)	Potência média da lâmpada equivalente (W)	Eletricidade poupada (kWh/ano)	Valor monetário poupado (€/ano)	Emissões evitadas (kg CO ₂ /ano)
229	5	7.20	0.89	1.44
229	5	14.40	1.77	2.88
229	5	21.60	2.66	4.32
970	18	20.52	2.52	4.10
Total		63.72	7.84	12.74

Conjeturas possíveis de extrair desta simulação, mas que devem ser reforçadas com várias simulações:

- o número de lâmpadas de uma dada potência é proporcional ao valor da eletricidade poupada (1 lâmpada = 7,20 ; 2 lâmpadas = 14,40 ; 3 lâmpadas = 21,60) e às emissões evitadas (1 lâmpada = 1,44 ; 2 lâmpadas = 2,88 ; 3 lâmpadas = 4,32);
- no valor monetário poupado é considerado o valor do IVA a 23% e é aproximado aos cêntimos, por exemplo, os valores das duas primeiras linhas são obtidos da seguinte forma:

$$7,20 \times 0,10 \times 1,23 = 0,8856 \approx 0,89 \quad \text{e} \quad 14,40 \times 0,10 \times 1,23 = 1,7712 \approx 1,77$$

- o valor poupado em 3 lâmpadas de 25 W não é igual ao valor poupado numa lâmpada de 75 W, poupa-se menos em substituir uma lâmpada de 75W (2,52€) do que 3 de 25W (2,66€);
- o valor das emissões de CO₂ evitadas é igual ao produto entre o fator de emissões da eletricidade (0,20) e o valor da eletricidade poupada, por exemplo:

$$7,20 \times 0,20 = 1,44 \quad \text{e} \quad 20,52 \times 0,20 = 4,102 \approx 4,10$$

Na simulação constante na página anterior apenas se fez variar o número de lâmpadas e num dos casos considerados fez-se variar a potência da lâmpada incandescente a substituir. Manteve-se constante o tempo de utilização e o período considerado, que foi 1 hora por dia.

Para se poder formular uma conjectura para a função/expressão que permita obter o valor da eletricidade poupada por ano, assim como perceber se existe uma função matemática que permite obter o «Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)» e a «Potência média da lâmpada equivalente (W)» em função da «Potência da lâmpada incandescente (W)» é necessário proceder a novas simulações fazendo variar os seguintes parâmetros iniciais: potência da lâmpada incandescente (W); tempo por (período de utilização).

Observe-se então a simulação constante na imagem abaixo:

Nº de lâmpadas	Potência da lâmpada incandescente (W)	Tempo de utilização (horas)	Tempo por	Substituir por
1	40	1	dia	LFC
1	60	1	dia	LFC
1	75	1	dia	LFC
1	100	1	dia	LFC

Preço da eletricidade 0.1528 €/kWh (sem IVA)
Fator de emissões da eletricidade 0.23827 kg CO2/kWh

Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)	Potência média da lâmpada equivalente (W)	Eletricidade poupada (kWh/ano)	Valor monetário poupado (€/ano)	Emissões evitadas (kg CO2/ano)
432	8	11.52	2.17	2.74
741	14	16.56	3.11	3.95
970	18	20.52	3.86	4.89
1398	22	28.08	5.28	6.69
Total		76.68	14.41	18.27

Com esta nova simulação obtêm-se valores para as variáveis «Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)» (designemos por Fluxo), «Potência média da lâmpada equivalente (W)» (Pot_LFC), «Eletricidade poupada (kWh/ano)» (Elet_Poup) em função da «Potência da lâmpada incandescente (W)» (Pot_Inc) considerando 1 hora de utilização diária, isto é, 365 horas de utilização num ano.

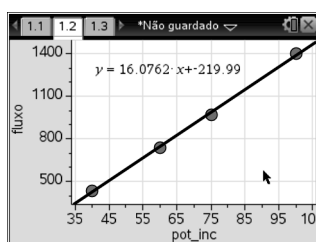
Para se determinar, caso exista, o modelo matemático que traduz as variáveis dependentes «Fluxo», «Pot_LFC» e «Elet_Poup» em função da variável independente «Pot_Inc» usemos as ferramentas de estatística de uma calculadora gráfica.

Introduzam-se os valores das variáveis acima referidas nas listas de uma calculadora. Usaremos, por ser a calculadora que possui uma folha de cálculo semelhante ao *Microsoft Excel* e com maior potencialidade e facilidade de uso, a calculadora TI-Nspire CX para efetuar a análise pretendida.

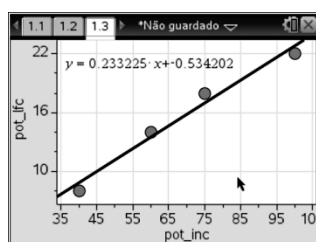
	A	B	C	D	E
	pot_inc	fluxo	pot_lfc	elet_poup	
1	40	432	8	11.52	
2	60	741	14	16.56	
3	75	970	18	20.52	
4	100	1398	22	28.08	
5					

De seguida constroem-se os diagramas de dispersão entre a variável independente «Pot_Inc» e cada uma das variáveis dependentes, «Fluxo», «Pot_LFC» e «Elet_Poup».

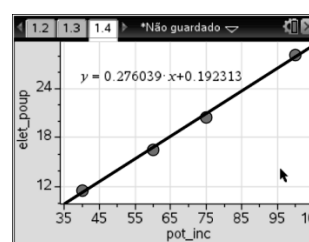
Observe-se nas imagens abaixo os diagramas de dispersão e as respetivas regressões lineares.



Pot_Inc vs Fluxo
($r \approx 0.9995$)



Pot_Inc vs Pot_LFC
($r \approx 0.9876$)



Pot_Inc vs Ele_Poup
($r \approx 0.9988$)

Por análise dos diagramas de dispersão e cálculo da regressão linear, verifica-se que não existe nenhuma relação linear perfeita entre as variáveis dependentes e a variável independente.

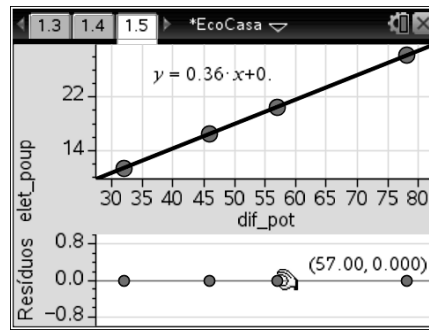
Portanto, os valores do Fluxo e da Pot_LFC terão de ser tabelados em função do valor da variável Pot_Inc da seguinte forma:

Potência da lâmpada incandescente (W)	Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)	Potência média da lâmpada equivalente (W)
25	229	5
40	432	8
60	741	14
75	970	18
100	1398	22
150	2253	33

Tabela de valores para Fluxo e Potência da LFC em função da Potência da Lâmpada Incandescente

Quanto à variável «Eletricidade poupada (kWh/ano)» (Elet_Poup) analise-se a sua relação com a diferença de potência entre a lâmpada incandescente e a lâmpada equivalente.

Observe-se, na figura abaixo, o diagrama de dispersão, a respetiva regressão linear e o gráfico dos resíduos.



Elet_Poup vs Dif_Pot
(r=1)

Tendo em atenção que os resíduos são todos nulos, pode-se concluir que a regressão linear é perfeita.

Portanto,

$$\text{Elet_Poup} = 0,36 \times (\text{Pot_Inc} - \text{Pot_LFC})$$

Que interpretação dar ao fator 0,36?

Recordando que os valores foram obtidos numa simulação em que o parâmetro «tempo de utilização» é 1 hora e o período é «por dia», constatamos que o número de horas de utilização no ano foi de 365 horas. Assim, e como a unidade de medida da potência das lâmpadas é o watt (W) e a eletricidade poupada é medida em quilowatt por hora (kWh), temos a seguinte interpretação para o fator 0,36:

$$\text{Eletr. Poupada} = \frac{365 \text{ h} \times (\text{Potência Lâmp Incandescente} - \text{Potência Lâmp Equivalente}) \text{ w}}{1000 \text{ w}} \times 1000 \text{ w}$$

$$= \frac{365 \text{ h w}}{1000 \text{ w}} \times (\text{Potência Lâmp Incandescente} - \text{Potência Lâmp Equivalente}) \times 1 \text{ kW}$$

$$= 0,365 \times (\text{Potência Lâmp Incandescente} - \text{Potência Lâmp Equivalente}) \times \text{kWh}$$

$$= 0,365 (\text{Potência Lâmp Incandescente} - \text{Potência Lâmp Equivalente}) \text{ kWh}$$

Procedendo-se a novas simulações, mas desta feita considerando o período de utilização «a semana» e «o mês», verifica-se, após análise análoga à realizada para o período de utilização «o dia», que os fatores considerados são, aproximadamente e respetivamente, 0,22 e 0,012, conforme se pode observar nas imagens abaixo.

	lamp_inc	lamp_lfc	ele_p...	
=				=(ele_poup)/(
1	40	8	7.16	0.22375
2	60	14	10.29	0.223696
3	75	18	12.75	0.223684
4	100	22	17.44	0.22359
ele_poup				
lamp_inc-lamp_lfc				

Dados de uma simulação
para 1 hora por semana

	lamp_inc	lamp_lfc	ele_po...	
=				=(ele_pou
1	40	8	0.38	0.011875
2	60	14	0.55	0.011957
3	75	18	0.68	0.01193
4	100	22	0.94	0.012051
ele_poup				
lamp_inc-lamp_lfc				

Dados de uma simulação
para 1 hora por mês

Note-se que, para a substituição de uma lâmpada incandescente por uma lâmpada equivalente LFC, os fatores deveriam ser o resultado da divisão do número de horas anual de utilização por 1000 (resultante da mudança da unidade W para kW), isto é, 52 horas e 12 horas. O fator utilizado pelo simulador, para o período de utilização «por semana», deverá portanto estar errado.

No simulador *online* poderão estar a ser usados valores aproximados, por exemplo, considerar apenas 360 dias num ano, ou 52,14 semanas num ano (365/7), ou ainda 12,16 meses num ano (365/30). Dada a grandeza dos valores será pouco significativo no resultado final a aproximação que se considere.

Agora que se *desconstruiu* o simulador, construa-se um simulador equivalente numa folha de cálculo do Microsoft Excel!

O nosso simulador poderá ser semelhante ao da figura abaixo, sendo que as células/campos das linhas 5 a 8 e 10 a 12 serão de preenchimento por parte do utilizador (são as variáveis independentes do modelo) e a células das linhas 15 a 20 são preenchidas automaticamente através de fórmulas/expressões apropriadas e que foram «descobertas» anteriormente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		SIMULADOR								
2		Substituição das Lâmpadas Incandescentes clássicas por Lâmpadas Fluorescentes Compactas (mais conhecidas como lâmpadas económicas)								
3										
4		Número Lâmpadas	Potência Lâmpada Incandescente	Tempo de utilização	Período de Utilização					
5		1	25	1	mês					
6		3	40	3	dia					
7		10	60	4	dia					
8		2	100	5	mês					
9										
10		Preço da eletricidade:			0,1528					
11										
12		Fator de emissões da eletricidade:			0,23827					
13										
14		Fluxo Luminoso	Potência Lâmpada Equivalente	Eletricidade Poupada	Valor Monetário	Emissões Evitadas				
15	1	229	2	5	3	0,24	4	0,05 €	5	0,06
16		432		8		103,68		19,49 €		24,70
17		741		14		662,40		124,49 €		157,83
18		1398		22		9,36		1,76 €		2,23
19										
20				TOTAL =		775,68		145,78 €		184,82

Simulador construído no Microsoft Excel

Para que o simulador agora construído dê exatamente os mesmos valores que o simulador disponível online em www.ecocasa.org, iremos considerar os fatores usados nesse simulador.

As fórmulas definidas nas células de preenchimento automático são:

1 =SE(D5=25;229;SE(D5=40;432;SE(D5=60;741;SE(D5=75;970;SE(D5=100;1398;SE(D5=150;2253;0))))))

2 =SE(D5=25;5;SE(D5=40;8;SE(D5=60;14;SE(D5=75;18;SE(D5=100;22;SE(D5=150;33;0))))))

3 =B5*F5*SE(H5="dia";360;SE(H5="semana";52;SE(H5="mês";12;0)))*(D5-D15)/1000

4 =F15*\$E\$10*1,23 e 5 =F15*\$E\$12*F15

Note-se que as duas primeiras fórmulas são a tradução dos valores tabelados anteriormente para o Fluxo Luminoso e Potência da Lâmpada Equivalente (LFC). Para o cálculo da Eletricidade Poupada coloca-se na terceira fórmula o produto entre o número de lâmpadas (B5), o número de horas de utilização (F5), o período de utilização (H5: 360=dia; 52=semana; 12=mês) e a diferença entre a potência das lâmpadas (D5-D15).

Finalmente nas fórmulas 4 e 5 obtêm-se, respetivamente, o Valor Monetário Poupado e as Emissões Evitadas através do produto do valor da Eletricidade Poupada pelo Preço da Eletricidade (E10) e pelo Fator de Emissões (E12).

Que poupança poderá obter uma família?

Considere-se uma família portuguesa a residir num apartamento T2 e cuja estimativa de utilização de lâmpadas incandescentes, por dia, é a seguinte:

Divisão da casa	Número lâmpadas	Potência	N.º de horas de utilização (média diária)
Cozinha	2	100	4
Quartos	4	75	1,5
Casa de banho	2	60	3
Sala de jantar	4	75	2,5
Sala de estar	4	60	3
Hall	1	100	1

Quanto poderá poupar esta família, por ano, se substituir todas as lâmpadas incandescente por lâmpadas equivalente LFC?

Calcule-se este valor usando-se o simulador agora construído e o simulador online e compare-se os valores.

No simulador *online* obtém-se:

Nº de lâmpadas	Potência da lâmpada incandescente (W)	Tempo de utilização (horas)	Tempo por	Substituir por
2	100	4	dia	LFC
8	75	2	dia	LFC
6	60	3	dia	LFC
1	100	1	dia	LFC

Preço da eletricidade €/kWh (sem IVA)

Fator de emissões da eletricidade kg CO2/kWh

Fluxo luminoso mínimo da lâmpada equivalente (lm)	Potência média da lâmpada equivalente (W)	Eletricidade poupada (kWh/ano)	Valor monetário poupado (€/ano)	Emissões evitadas (kg CO2/ano)
1398	22	224.64	42.22	53.52
970	18	328.32	61.71	78.23
741	14	298.08	56.02	71.02
1398	22	28.08	5.28	6.69
Total		879.12	165.23	209.47

No simulador construído no Microsoft Excel obtém-se os valores da imagem abaixo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		SIMULADOR								
2		Substituição das Lâmpadas Incandescentes clássicas por Lâmpadas Fluorescentes Compactas (mais conhecidas como lâmpadas econômicas)								
3										
4		Número Lâmpadas	Potência Lâmpada Incandescente	Tempo de utilização	Período de Utilização					
5		2	100	4	dia					
6		8	75	2	dia					
7		6	60	3	dia					
8		1	100	1	dia					
9										
10		Preço da eletricidade:			0,1528					
11										
12		Fator de emissões da eletricidade:			0,23827					
13										
14		Fluxo Luminoso	Potência Lâmpada Equivalente	Eletricidade Poupada	Valor Monetário	Emissões Evitadas				
15		1398	22	224,64	42,22 €	53,52				
16		970	18	328,32	61,71 €	78,23				
17		741	14	298,08	56,02 €	71,02				
18		1398	22	28,08	5,28 €	6,69				
19										
20			TOTAL =	879,12	165,23 €	209,47				

Desafio!

Aplique o simulador agora criado para efetuar um estudo sobre que valor monetário poderá poupar a sua família se substituir as lâmpadas incandescentes por lâmpadas equivalentes LFC.

Ficha de trabalho N.º 1

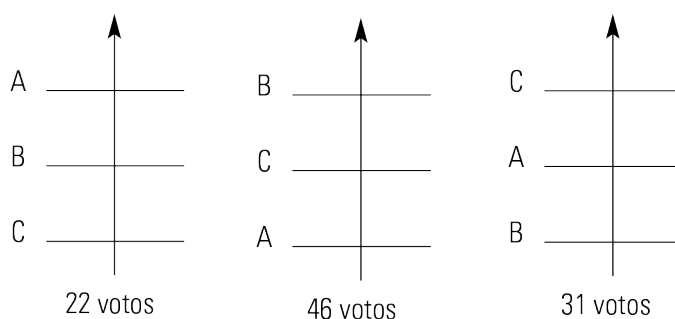
Nome _____ Turma _____ N.º _____

Sistemas maioritário, preferencial e de aprovação

1. Numa eleição com 4 candidatos, A, B, C e D, obtiveram-se os seguintes resultados, segundo as preferências dos votantes:

Preferências	Número de votos				
	2	8	17	20	27
1.ª escolha	A	D	C	A	B
2.ª escolha	B	C	A	D	D
3.ª escolha	C	A	D	C	A
4.ª escolha	D	B	B	B	C

- 1.1 Quantas pessoas expressaram a sua preferência nesta votação?
- 1.2 Qual foi o candidato com maior número de primeiras preferências? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.3 Qual foi o candidato com maior número de últimas preferências? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.4 Qual foi o vencedor pelo sistema de maioria simples?
- 1.5 Algum candidato venceu por maioria absoluta? Justifique.
2. Numa eleição com 3 candidatos, A, B e C, obtiveram-se os seguintes resultados, resumidos nos esquemas preferenciais seguintes:



- 2.1 Usando o sistema maioritário, quem vence a eleição? Com que tipo de maioria? Justifique.
- 2.2 Considere os candidatos dois a dois. Haverá algum vencedor? Justifique.
- 2.3 Como se chama o fenómeno patente na alínea anterior?

3. André (A), Bernardo (B), Cândido (C) e Damião (D) concorrem aos lugares de presidente e vice-presidente da Associação de Comerciantes de Bombim. Cada um dos votantes expressou a sua preferência relativamente a cada um dos candidatos:

Preferências	Número de votos				
	5	10	20	25	30
1. ^a escolha	A	A	A	C	B
2. ^a escolha	D	B	C	D	D
3. ^a escolha	C	D	B	B	C
4. ^a escolha	B	C	D	A	A

O vencedor fica com o lugar de presidente e quem ficar em segundo lugar será o vice-presidente.

3.1 Quantas pessoas votaram?

3.2 Pelo sistema maioritário, quem seria o presidente? E o vice-presidente? Com que percentagem de votos? (2 c.d.)

3.3 Usando o sistema preferencial, atribua os cargos de presidente e de vice-presidente (atribua 4 pontos à primeira escolha, 3 pontos à segunda, 2 pontos à terceira e 1 ponto à quarta escolha).

3.4 Considere agora apenas as duas primeiras preferências de cada votante. Usando o sistema de aprovação quem será o presidente? E o vice-presidente?

4. O que diz o teorema de Arrow relativamente a sistemas de votação?

5. Quatro encarregados de educação, Álvaro, Belmira, Carlota e Dinis candidatam-se à presidência da Associação de Pais da Escola Arco-Íris. Um júri constituído por oito pessoas (E, F, G, H, I, J, L e M) usou o sistema de aprovação para decidir esta questão. O quadro seguinte resume a votação (✓ significa que aprova o candidato).

Candidatos	Júri							
	E	F	G	H	I	J	L	M
Álvaro	✓	✓				✓	✓	
Belmira					✓		✓	✓
Carlota		✓	✓			✓	✓	
Dinis	✓		✓		✓	✓	✓	

5.1 Quem foi eleito presidente?

5.2 As votações de dois dos elementos do júri não tem influência no resultado final. Indique quais e porquê.

Ficha de trabalho N.º 2

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Sistemas maioritário, preferencial e de aprovação

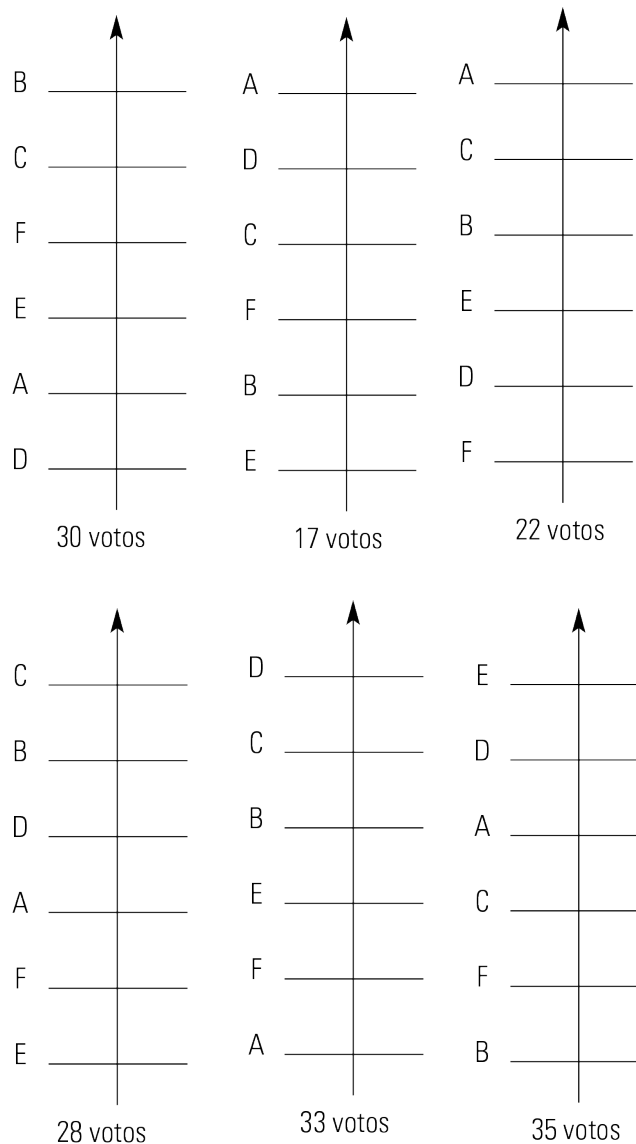
1. Os 78 alunos finalistas do curso de Sociologia pretendem fazer uma viagem. Têm cinco opções: Cancún (C), Orlando (O), Havana (H), Nova Iorque (N) e Rio de Janeiro (R). Os resultados da votação que efetuaram estão resumidos na tabela seguinte:

Preferências	Número de votos								
	1	2	3	3	3	6	8	20	32
1.ª escolha	C	C	N	R	C	R	N	O	H
2.ª escolha	O	H	H	H	H	O	O	N	C
3.ª escolha	H	R	R	C	N	N	R	R	R
4.ª escolha	N	N	O	O	R	C	C	C	N
5.ª escolha	R	O	C	N	O	H	H	H	O

Responda às seguintes perguntas com base na tabela dos resultados da votação.

- 1.1 Alguma das cidades obteve maioria de primeiras escolhas? Se sim, qual?
- 1.2 Alguma das cidades obteve maioria de últimas escolhas? Se sim, qual?
- 1.3 Qual foi a cidade com maior número de primeiras escolhas? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.4 Qual foi a cidade com menor número de primeiras escolhas? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.5 Qual foi a cidade com maior número de últimas escolhas? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.6 Qual foi a cidade com menor número de últimas escolhas? Com que percentagem? (2 c.d.)
- 1.7 Que cidade teve maior número de primeiras e segundas escolhas conjuntamente? A quantos votos corresponde?
- 1.8 Que cidade teve, em conjunto, menor número de primeiras e segundas escolhas? A quantos votos corresponde?
- 1.9 Que cidade teve, em conjunto, maior número de quartas e quintas escolhas? A quantos votos corresponde?
- 1.10 Qual seria a cidade escolhida se fosse usado o sistema maioritário? Com que tipo de maioria? A que percentagem corresponde? (2 c.d.)
- 1.11 Qual seria a cidade escolhida se fosse usado o método de Borda?
- 1.12 Suponha que cada votante aprovava apenas as duas primeiras escolhas. Nesta situação, usando o sistema de aprovação, qual seria a cidade eleita para a viagem de finalistas?

2. Os esquemas preferenciais seguintes traduzem os resultados de uma eleição com 6 candidatos: A, B, C, D, E e F.



- 2.1 Quantos esquemas preferenciais diferentes é possível obter com seis candidatos?
- 2.2 Qual é a percentagem de 1.as preferências de cada candidato?
- 2.3 Qual é o candidato eleito se usarmos o método da pluralidade?
- 2.4 Determine o vencedor desta eleição usando:
- 2.4.1 o método *run-off* simples;
 - 2.4.2 o método *run-off* sequencial;
 - 2.4.3 o método de Borda;
 - 2.4.4 o método de Condorcet.
- 2.5 Suponha que cada votante aprova os três primeiros candidatos do seu esquema preferencial. Determine o vencedor pelo sistema de aprovação

Ficha de trabalho N.º 3

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Método preferencial

1. Realizou-se uma Assembleia Geral de uma associação cultural, com o objetivo de eleger uma pessoa para representar a associação em sessões oficiais. Apresentaram-se três candidatos, o Rui, o Luís e o João. A Mesa da Assembleia propôs que cada associado votasse nos três candidatos, por ordem de preferência. O método escolhido para apurar o vencedor foi o preferencial, de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- por cada voto em primeira preferência, o candidato votado recebe três pontos, em segunda preferência, dois pontos e, em terceira preferência, um ponto;
- feito o apuramento da pontuação obtida por cada candidato, será vencedor o que obtiver uma pontuação total mais elevada.

A contagem dos votos vem descrita na tabela seguinte.

Preferências	Votos		
1. ^a	Rui	João	Luís
2. ^a	Luís	Luís	Rui
3. ^a	João	Rui	João
Total	40	45	38

1.1 Complete a tabela abaixo apresentada, utilizando o método preferencial.

Qual foi o candidato vencedor, segundo este método?

Método preferencial

Contagem dos pontos		Pontuação total
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	
Rui		
Luís		

1.2 Se fosse adotado o sistema maioritário, só a primeira preferência seria tida em conta, ganhando o candidato cujas primeiras preferências tivessem uma maioria relativa. Utilizando este método, o candidato vencedor seria o João.

No entanto, este candidato perderia quando comparado com os outros candidatos, dois a dois. Uma forma de comparar os candidatos dois a dois é utilizar o método maioritário, sem contar com os votos no terceiro candidato. Por exemplo, não contando com os votos no Luís, as votações no João e no Rui passam a ser as seguintes:

Comparação da votação no João com a votação no Rui

Preferências	Votos		
1. ^a	Rui	João	Rui
2. ^a	João	Rui	João
Total	40	45	38

Utilizando o método maioritário relativamente à primeira preferência, o Rui seria o candidato vencedor, uma vez que tinha 78 votos, enquanto o João teria apenas 45.

1.2.1 Construa duas tabelas semelhantes à anterior, não contando, primeiro, com a votação no João e, depois, com a votação no Rui. Em cada uma das comparações, quem é o vencedor?

1.2.2 Terminadas as comparações possíveis, dois a dois, o Luís afirmou que ele próprio deveria ser considerado o vencedor global.

Numa pequena composição, justifique que este candidato está em condições de se considerar vencedor global, tendo em conta os resultados obtidos.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta a soma dos resultados referentes às contagens dos votos na comparação dos candidatos dois a dois, com a consequente ordenação dos candidatos.

1.3 Considere agora o método em que são eliminados todos os candidatos exceto os dois que reúnem maior número de primeiras preferências – método *run-off* simples.

1.3.1 Qual seria o candidato eliminado? Justifique.

1.3.2 Qual seria o candidato vencedor? Com que percentagem? Apresente o resultado arredondado com uma casa decimal.

Adaptado de Exame Nacional de MACS (2007, 2.ª Fase)

Ficha de trabalho N.º 4

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Método de Hondt

1. As tabelas que se seguem têm os resultados das eleições autárquicas de 2013, para as câmaras municipais, dos concelhos de Borba, Vagos e Cascais, respetivamente. Sabendo que o método utilizado para a contabilização dos mandatos foi o método de Hondt, complete-as:

1.1

Listas	Votos	%	Mandatos
Ind.	1642		
PS	1043		
PPD/PSD	831		
PCP - PEV	791		
Em Branco	101		
Nulos	71		
Votantes	4479		
Inscritos	6349		
Total de Mandatos			5

1.2

Listas	Votos	%	Mandatos
PPD/PSD.CDS/PP	28 004		
PS	14 140		
PCP - PEV	7 366		
I	4 985		
B.E.	2 997		
PTP	901		
PPM/PPV/PND	629		
PCTP/MRPP	576		
Em Branco	3592		
Nulos	2359		
Votantes	65 549		
Inscritos	172 537		
Total de Mandatos			11

1.3

Listas	Votos	%	Mandatos
PPD/PSD	5760		
CDS/PP	3903		
PS	1331		
PCP - PEV	238		
Em Branco	367		
Nulos	273		
Votantes	11 872		
Inscritos	22 651		
Total de Mandatos			7

2. No dia 9 de Outubro de 2005, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Os dados apresentados no quadro seguinte dizem respeito às eleições para a Câmara Municipal de um certo concelho.

Total de eleitores inscritos: 141 360
Número de mandatos: 11
Partidos concorrentes: A, B, C, D, E, e F

Os resultados provisórios das eleições para a Câmara Municipal desse concelho, divulgados pelo Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral (STAPE), pouco tempo depois do encerramento das urnas, foram os seguintes:

Número de votos brancos: 2225 **Número de votos nulos:** 1550

Partidos	A	B	C	D	E	F
Número de votos	28 799	17 437	11959	4785	948	340

2.1 Calcule a percentagem da abstenção, nestas eleições, para a referida Câmara Municipal. Apresente o resultado arredondado às unidades.

2.2 No dia 25 de Outubro, um jornal diário, referindo-se às eleições para a mesma Câmara Municipal, publicou uma notícia, na qual se podia ler:

O partido D vai exigir a recontagem dos votos, por considerar que persistem dúvidas quanto ao resultado oficial divulgado na noite de domingo. Por apenas 15 votos (...), o partido D não elegeu o seu cabeça-de-lista como vereador. (...) A eleição de um vereador do partido D alteraria a relação de forças no executivo dessa Câmara. (...) «Era fundamental que o partido D estivesse representado, não só pela força que já tem, mas também porque obrigaria o presidente a dialogar com a oposição e a aprofundar a democracia e a pluralidade de ideias», frisou o cabeça-de-lista do partido D.

Tendo em conta os resultados eleitorais, elabore uma composição na qual comente esta notícia. Na sua composição, deve:

- determinar o número de mandatos obtidos por cada força política, aplicando o método de Hondt (apresente os quocientes arredondados às décimas);
- explicar por que razão foi por 15 votos que o partido D não elegeu nenhum vereador e qual o partido que perderia um mandato se o partido D tivesse tido mais 15 votos (admitindo que os restantes partidos mantinham a sua votação);
- explicar o sentido da frase (acima sublinhada) do cabeça-de-lista do partido D, relacionando-a com o tipo de maioria (simples ou absoluta) obtida pela força vencedora e com o que teria acontecido, caso ele tivesse sido eleito.

Adaptado de Exame Nacional de MACS (2006, 1.ª Fase)

Ficha de trabalho N.º 5

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Métodos de Hamilton, Hondt e Sainte Laguë

1. Numa assembleia geral de uma federação desportiva, na qual estavam representantes de várias regiões do país, foi decidida a forma de representação regional em futuras assembleias gerais, de acordo com os seguintes princípios:

- o número de representante de cada região na assembleia geral deveria estar de acordo com o número de praticantes federados existentes nessa região;
- o número total de representantes na assembleia seria 50;
- seria utilizado o Método de Hamilton para distribuir os representantes pelas várias regiões.

Na tabela ao lado estão indicados os números de praticantes das várias regiões representadas na assembleia geral.

Regiões	N.º de praticantes
Minho	561
Beiras	345
Alentejo	120
Ribatejo	870
Algarve	310
Total	2206

1.1 Complete a tabela seguinte.

Regiões	N.º de praticantes (P)	Quota padrão (P:DP)	Quota inferior (QI)	Parte decimal
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			
	2206	Número total de praticantes (TP)		
	50	Representantes a distribuir (R)		
		Divisor Padrão (DP = TP : R)		

Calcule o divisor padrão e utilize-o para calcular as quotas padrão (3 c.d.).

- 1.2 Determine o número de representantes de cada região nas assembleias gerais, de acordo com a aplicação do método de Hamilton.

2. Dirigentes desportivos da região autónoma dos Madeira pretendem que a sua região, com 130 praticantes federados, tenha também representantes na assembleia geral. Face à situação, foi decidido alterar para 53 o número total de representantes, tendo em conta o aumento do número de regiões representadas.

2.1 A tabela seguinte representa a situação da federação com as suas seis regiões:

Regiões	N.º de praticantes (P)	Quota padrão (P:DP)	Quota inferior (QI)	Parte decimal
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			
Madeira	130			
	2336	Número total de praticantes (TP)		
	53	Representantes a distribuir (R)		
		Divisor Padrão (DP = TP : R)		

1.1.1 Complete a tabela. Calcule o divisor padrão e utilize-o para calcular as quotas padrão. (3 c.d.).

1.1.2 Depois de completar a tabela anterior, elabore um texto sobre a distribuição dos representantes das seis regiões na assembleia geral.

O texto deve incluir:

- uma alusão à opção de o número de delegados passar de 50 para 53, relacionando-o com o novo divisor padrão;
- uma comparação, região a região, do número de representantes nos dois cenários (antes e após a entrada da Madeira) e um comentário sobre se alguma região terá razões para se sentir prejudicada pela entrada da região da Madeira na federação.

Adaptado do Exame Nacional de MACS, 2007, 1.ª fase.

2. Na tabela seguinte, encontram-se os resultados das eleições autárquicas de 2013 num dos concelhos do distrito de Portalegre: a distribuição dos mandatos foi feita pelo método de Hondt.

Partidos	N.º de votos	%	Mandatos atribuídos
A	5514		
B	3104		
C	2275		
D	1377		
E	111		
Em Branco	352		
Nulos	258		
Votantes	12 991		
Inscritos	21 668		
Total de Mandatos			7

3.1 Complete a tabela.

3.2 Qual foi a percentagem de abstenção?

3.3 Faça a distribuição dos mandatos utilizando o método de Sainte Laguë.

3.4 Tire conclusões relativamente às distribuições obtidas por cada um dos métodos.

Ficha de trabalho N.º 6

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Métodos de Hamilton, Jefferson e Adams

1. Um país dividido em cinco estados, A, B, C, D e E, tem uma população dividida de acordo com a tabela seguinte:

Estados	A	B	C	D	E
População	1174	2539	5380	3512	2995

Sabendo que no parlamento deste país existem 25 lugares, faça a distribuição usando o método de Hamilton (3 c.d. nos cálculos intermédios).

2. A população de um país encontra-se distribuída pelos seus cinco Estados de acordo com a tabela:

Estados	A	B	C	D	E
População	7179	5259	9061	1182	3319

- 2.1 Usando o método de Hamilton, determine a distribuição dos lugares do parlamento desse país sabendo que são:

2.1.1 25 lugares;

2.1.2 26 lugares;

2.1.3 27 lugares.

- 2.2 Tire as suas conclusões sobre os resultados obtidos nas alíneas anteriores.

3. Considere a tabela que se segue:

Estado	35 lugares	36 lugares
	Quota padrão	Quota padrão
Alabama	7,646	7,671
Texas	9,640	9,672
Ilinoís	18,640	18,702

- 3.1 Usando o método de Hamilton, determine qual é a distribuição de lugares na câmara dos representantes para estes três estados no caso de serem, no total:

3.1.1 35 lugares;

3.1.2 36 lugares.

- 3.2 Que conclusão podemos tirar dos resultados obtidos anteriormente?

4. A tabela seguinte contém dados relativos à população de um país com quatro estados (3 c.d. nos cálculos intermédios):

Estados	A	B	C	D
População	45	13	27	2

- 4.1 Faça a distribuição dos 20 lugares disponíveis do parlamento deste país pelos quatro estados, usando o método de Hamilton.
- 4.2 Faça nova distribuição, usando o mesmo método para o caso de serem 21 lugares.
- 4.3 Numa pequena composição, tire conclusões relativamente às duas alíneas anteriores.
5. No parlamento de um país dividido em quatro estados há 30 lugares para ocupar. Determine quantos lugares cabe a cada estado, tendo em conta os dados da tabela seguinte (3 c.d. nos cálculos intermédios):

Estados	A	B	C	D
População	2450	3250	3550	6350

- 5.1 Usando o método de Hamilton.
- 5.2 Usando o método de Jefferson.
6. A tabela seguinte apresenta a distribuição da população de um país pelos seus quatro estados.

Estados	A	B	C	D
População	500	1000	1500	2000

O parlamento deste país é constituído por 51 lugares.

- 6.1 Determine o divisor padrão (3 c.d.).
- 6.2 Calcule a quota padrão de cada estado (3 c.d.).
- 6.3 Faça a distribuição dos lugares usando o método de Jefferson.
- 6.4 Experimente fazer a distribuição dos lugares usando o método de Adams com D.M. = 100 .
- 6.5 O que acontece se D.M. > 100 ?
- 6.6 O que acontece se D.M. < 100 ?
- 6.7 Tire conclusões com base nas últimas três alíneas.

Ficha de trabalho N.º 7

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Métodos de Hamilton, Jefferson, Adams e Webster. Licitações secretas.

1. São 200 os lugares disponíveis no parlamento de um país com 300 000 habitantes, distribuídos por quatro estados.

1.1 Complete a tabela:

Estados	A	B	C	D
População		8850		97 200
Quota padrão	39,6		89,7	

Nas alíneas seguintes utilize os dados da tabela anterior.

- 1.2 Faça a distribuição dos lugares usando o (3 c.d.):

1.2.1 método de Adams;

1.2.2 método de Webster.

2. Um país dividido em seis estados tem uma assembleia com 36 deputados. A distribuição da população pelos estados encontra-se na tabela seguinte:

Estados	A	B	C	D	E	F
População	27 775	9226	19 947	3292	25 177	14 613

Faça a distribuição pelos estados utilizando o (3 c.d.):

2.1 método de Jefferson;

2.2 método de Adams;

2.3 método de Webster.

3. Num país com 12 500 000 habitantes existem 250 lugares no parlamento a distribuir pelos seis Estados que integram esse país.

3.1 Complete a tabela:

Estados	U	V	X	Y	Z	W
População (em milhares)	6733	557		988	2081	685

Nas alíneas que se seguem considere os dados da tabela anterior.

- 3.2 Qual é o divisor padrão? (2 c.d.)

- 3.3 Determine a distribuição dos lugares disponíveis pelos seis estados usando o (3 c.d.):

3.3.1 método de Jefferson;

3.3.2 método de Adams;

3.3.3 método de Webster.

4. Um país dividido em cinco estados tem uma população de 23 800 habitantes. Na tabela seguinte estão as quotas padrão de cada estado, para a atribuição dos lugares na assembleia.

Estados	A	B	C	D	E
Quota padrão	7,179	5,259	9,061	1,182	3,319

- 4.1 Qual é o número de lugares disponíveis?
- 4.2 Calcule o divisor padrão (2 c.d.).
- 4.3 Calcule o número de habitantes de cada estado.
- 4.4 Faça a distribuição dos lugares usando o (3 c.d.):
- 4.4.1 método de Hamilton;
- 4.4.2 método de Jefferson;
- 4.4.3 método de Adams.

5. O senhor Silvino deixou uma herança, a ser distribuída, equitativamente, pelos seus únicos herdeiros: os filhos Pedro, Rita e Sofia. A herança é constituída por um apartamento e um terreno. Pelo valor sentimental que nutrem pelos bens, os irmãos não os querem colocar à venda. Assim, decidem distribuir os bens, utilizando o seguinte método:

- cada herdeiro atribui, secretamente, um valor a cada um dos bens;
- em seguida, são divulgados os valores atribuídos (apresentados na tabela seguinte).

Bens \ Herdeiros	Pedro	Rita	Sofia
Apartamento	200 000€	210 000€	190 000€
Terreno	100 000€	90 000€	80 000€

Aplicando o método das licitações secretas:

- 5.1 Indique quanto vale a herança para cada um dos herdeiros, bem como o valor que cada um deles considera justo receber.
- 5.2 Num pequeno texto, indique, justificando, se algum dos herdeiros pode ter razão para reclamar do resultado final da divisão, face ao que considerava justo receber.

O texto deve, obrigatoriamente, contemplar os pontos que a seguir se indicam:

- o valor da herança que cada herdeiro efetivamente recebeu;
- a comparação entre o valor da herança que cada um dos herdeiros considerava justo receber e o que efetivamente recebeu;
- a conclusão quanto à razão para algum herdeiro reclamar, ou não, do resultado final da divisão.

Comece por calcular como ficou distribuída a herança pelos três irmãos, determinando:

- a quem foi atribuído cada um dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros recebeu ou pagou, após a atribuição dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros efetivamente recebeu ou pagou, no final de todo o processo.

Na resposta a este item, quando for necessário proceder a arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Adaptado de Exame Nacional MACS (2008, 1.ª Fase)

Ficha de trabalho N.º 8

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Métodos de Hamilton e de Hondt. Método preferencial. Método do ajuste na partilha.

1. Nos processos eleitorais, a conversão do número de votos em mandatos pode ser feita utilizando métodos diferentes.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição dos mandatos pelas listas concorrentes faz-se da seguinte forma:

- calcula-se o divisor padrão (DP), dividindo o número total de votos pelo número de mandatos da assembleia de Freguesia;
- calcula-se a Quota Padrão (QP) para cada um dos concorrentes, dividindo o número de votos de cada concorrente pelo Divisor Padrão;
- atribui-se a cada concorrente um número de mandatos igual à parte inteira da quota padrão;
- caso ainda restem mandatos para distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os mandatos que restam (um para cada concorrente) aos concorrentes cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores;
- na atribuição do último mandato, se houver dois concorrentes com quotas padrão que apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último mandato ao concorrente com menor número de mandatos.

A 25 de novembro de 2007, ocorreram as eleições para a assembleia de Freguesia de Monte da Azinha. Para o preenchimento dos nove lugares da referida assembleia, concorreram cinco partidos, em listas separadas.

Cada lugar corresponde a um mandato. Após o apuramento geral, os resultados foram os seguintes.

Partido	Número de votos
A	454
B	438
C	49
D	463
E	29

O António é um habitante dessa freguesia. Ele afirma que, no apuramento dos lugares a atribuir a cada partido, o resultado da distribuição dos nove lugares pelas listas concorrentes é o mesmo, quer se aplique o método de Hondt, quer se aplique o método de Hamilton. Mostre que o António tem razão.

Na sua resposta deve:

- apresentar a distribuição dos nove lugares aplicando o método de Hondt;
- apresentar a distribuição dos nove lugares aplicando o método de Hamilton;
- apresentar a conclusão.

2. A associação de estudantes da Escola Secundária de Monte da Azinha decidiu aplicar o método da contagem de Borda, para escolher o representante dos alunos da escola num fórum internacional sobre Ciência. Concorreram quatro candidatos: a Ana, a Inês, o Nuno e o Pedro.

Segundo o Método da Contagem de Borda, o apuramento do vencedor faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto possa ser considerado válido, cada eleitor vota em todos os candidatos, ordenando-os de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final dos concorrentes, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os candidatos em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- o vencedor é o concorrente com maior número de pontos.

Foram apurados noventa e cinco votos válidos. Os resultados obtidos são os seguintes.

Preferências	N.º de votos				
	25 votos	40 votos	15 votos	10 votos	5 votos
1.ª preferência	Nuno	Pedro	Nuno	Pedro	Pedro
2.ª preferência	Ana	Inês	Inês	Nuno	Nuno
3.ª preferência	Inês	Nuno	Ana	Ana	Inês
4.ª preferência	Pedro	Ana	Pedro	Inês	Ana

Determine a pontuação final de cada candidato e indique o vencedor.

3. Considere agora o método *run-off* simples e os resultados da votação anterior. Faça nova contagem e verifique se o vencedor se mantém o mesmo ou se há alteração.

Adaptado de Exame Nacional de MACS (2009, 1.ª Fase)

4. Aos irmãos Raquel e Tiago cabe a tarefa de dividir, entre si, quatro bens deixados pela mãe e que, por razões sentimentais, não querem vender. Decidem efetuar essa partilha pelo método do ajuste na partilha. Na tabela seguinte encontra-se a distribuição dos 100 pontos de cada irmão:

	Raquel	Tiago
Cão	35	15
Gato	20	15
Aquário	25	40
Papagaio	20	30

4.1 Efetue a partilha dos bens, usando o método de ajuste de partilha.

4.2 Com quantos pontos ficou cada um dos irmãos no final da partilha?

Ficha de trabalho N.º 9

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Métodos de Partilha – Caso Contínuo

1. Qual é a diferença entre partilha no caso discreto e partilha no caso contínuo?
Dê exemplos de cada um destes dois tipos de partilha.
2. Considere o método do divisor único com três jogadores para dividir um bolo.
 - 2.1 Será que o divisor pode ficar descontente com a sua parte? Justifique.
 - 2.2 Suponha que o divisor parte três fatias F1, F2 e F3. O jogador A acha que F1 é grande, F2 é razoável e F3 é pequena, de onde seleciona F1 e F2. O jogador B seleciona F1.
 - 2.2.1 Com que fatia fica o divisor?
 - 2.2.2 Como ficam distribuídas as duas fatias restantes por A e B?
 - 2.2.3 Será que algum dos jogadores poderá ficar insatisfeito? Justifique.
3. Considere o método do selecionador único para dividir um bolo por três pessoas.
 - 3.1 Qual é o primeiro procedimento a efetuar?
 - 3.2 O que devem fazer, em primeiro lugar, os divisores? E de seguida?
 - 3.3 Por que razão não há divisores insatisfeitos após a primeira escolha?
 - 3.4 Por que razão não há divisores insatisfeitos após a escolha do selecionador?
4. Três amigos pretendem dividir uma parcela de terreno, de uma forma justa, usando o método do divisor único. O João é escolhido para ser o divisor e divide o terreno em três partes T1, T2 e T3 que ele julga serem iguais. Pedro e Miguel escolhem. Faça a distribuição das parcelas pelos três amigos em cada uma das situações seguintes:
 - 4.1 Pedro seleciona {T1} e Miguel seleciona {T3}.
 - 4.2 Pedro seleciona {T1, T3} e Miguel {T2, T3}.
 - 4.3 Pedro e Miguel selecionam ambos {T2, T3}.
5. Três jogadores pretendem dividir um bolo usando o método do selecionador único. O divisor parte o bolo em três fatias F1, F2 e F3.

Se:

 - o jogador 1 preferir F2 ou F3;
 - o jogador 2 preferir F1 ou F2;

indique:

 - 5.1 uma divisão justa do bolo;
 - 5.2 uma divisão injusta.

6. Seis investidores compram um lote de terreno e decidem dividi-lo de uma forma justa usando o método do último a diminuir. Os investidores são A, B, C, D, E e F e jogam por esta ordem.

- Na primeira volta B e C diminuem.
- Na segunda volta apenas B diminui.
- Na terceira volta ninguém diminui.

6.1 Quem fica com a primeira parcela de terreno?

6.2 Quem divide no princípio da segunda volta?

6.3 Quem fica com a segunda parcela de terreno?

6.4 Quem divide no princípio da terceira volta?

6.5 Com os resultados fornecidos é possível saber quem fica com as terceira, quarta e quinta parcelas de terreno?

Numa pequena composição, forneça os dados que faltam e termine a divisão do terreno.

7. Um grupo de cinco amigas vão dividir entre si uma piza vegetariana utilizando o método do último a diminuir.

Jogam pela ordem seguinte: Ana, Berta, Cátia, Dina e Eva. Na primeira e terceira volta ninguém diminui, na segunda volta Cátia e Dina diminuem.

7.1 O que faz a primeira amiga que joga?

7.2 Quem fica com a primeira fatia de piza?

7.3 Quem inicia a segunda volta?

7.4 Quem fica com a segunda fatia?

7.5 Quem corta a fatia do início da terceira volta?

7.6 Quem fica com a terceira fatia?

7.7 Quais são as duas últimas amigas a escolher? Como procedem?

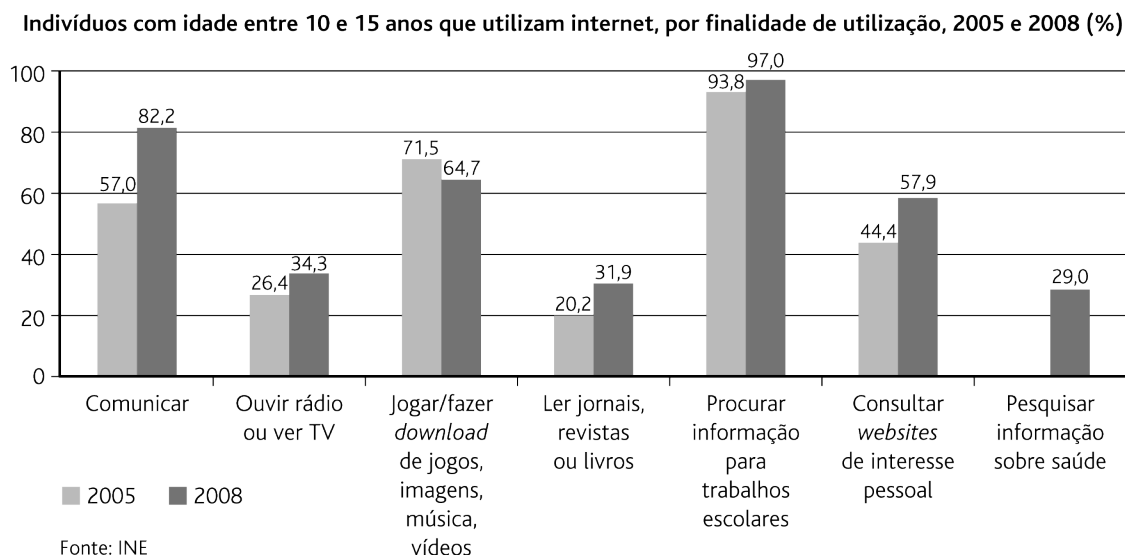
8. Quatro amigas decidem fazer um bolo de chocolate e dividi-lo entre elas usando o método livre de inveja. Numa composição descreva a aplicação do método a esta situação, no dois casos seguintes:

- 1.º caso: A amiga que primeiro apara as fatias fá-lo a duas delas.
- 2.º caso: A amiga que primeiro apara as fatias fá-lo apenas a uma delas.

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística – análise de gráficos e tabelas

1. O gráfico seguinte representa a comparação entre a percentagem de indivíduos com idade entre 10 e 15 anos que utilizaram a Internet, por finalidade de utilização, nos anos 2005 e 2008.

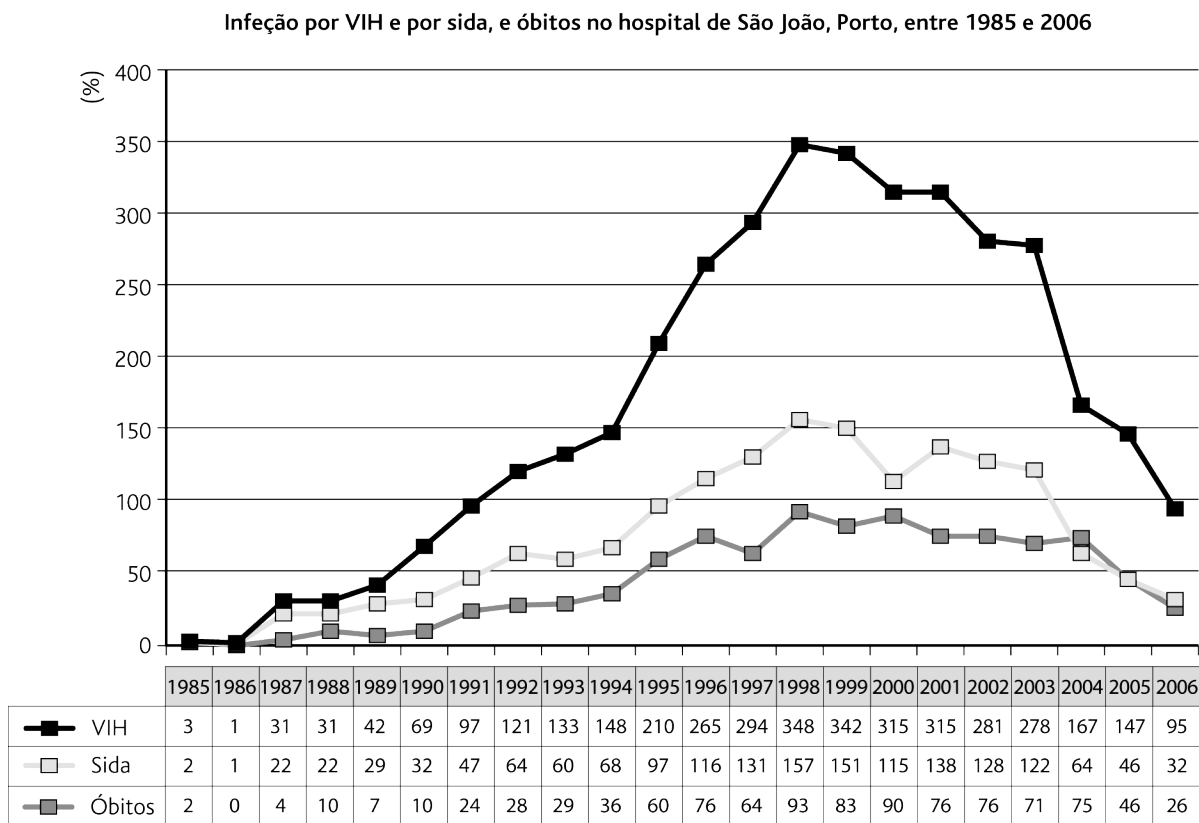


- 1.1 Para que finalidade é a internet mais utilizada pelos jovens entre os 10 e os 15 anos?
 1.2 Qual a finalidade para a qual foi menos utilizada a internet em cada ano?
 1.3 Quais as finalidades que registaram um decréscimo na utilização entre 2005 e 2008?
 1.4 Qual a finalidade que registou um maior aumento da percentagem de utilização entre 2005 e 2008?
 1.5 Supondo que estes dados se referiam a uma amostra de 2000 jovens, quantos deles utilizaram a internet para ler jornais, revistas ou livros em 2008?
2. Uma empresa de informática tem 64 funcionários no seu departamento técnico, repartidos por função de acordo com a tabela seguinte:

Pessoal técnico	Analistas	Formadores	Programadores	Técnicos de software	Técnicos de hardware	Outro pessoal técnico
Número de funcionários	7	4	14		10	18

- 2.1 Complete a tabela.
 2.2 Determine as percentagens de funcionários deste departamento correspondentes a cada função (2 c.d.).
 2.3 Represente os dados da tabela através de um gráfico circular.

3. Observe o gráfico seguinte:



Fonte: Coordenação Nacional para a Infecção VIH/Sida – Ministério da Saúde, Portugal

3.1 O que representa o gráfico?

3.2 Descreva a evolução do número de indivíduos infetados por VIH.

3.3 Em que ano o número de pessoas infetadas por sida foi maior?

3.4 A partir de que ano se começou a verificar um decréscimo no número de óbitos?

3.5 Em que ano o número de óbitos ultrapassou os 50?

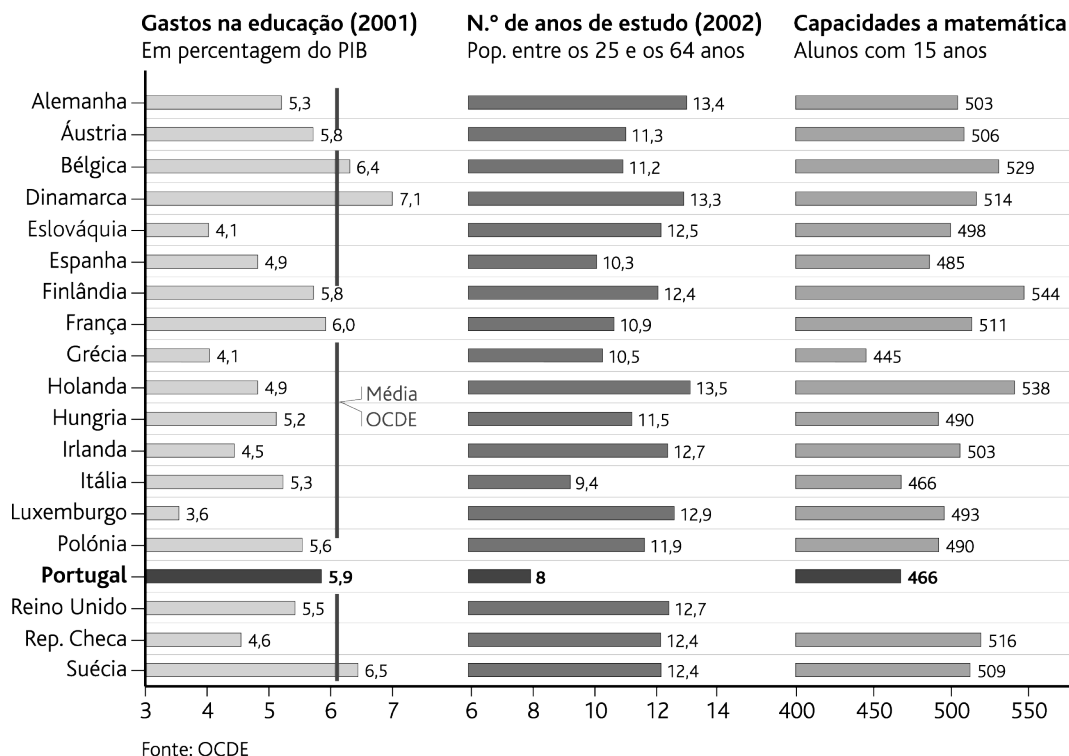
3.6 Em que ano o número de pessoas infetadas por sida foi inferior ao número de óbitos?

3.7 Qual foi o número máximo de pessoas infetadas por VIH verificado, no período a que se reporta o gráfico, no hospital de São João? Em que ano ocorreu?

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística – análise de gráficos

- O gráfico que se segue foi retirado da revista Única, do jornal Expresso, de 18 de fevereiro de 2005, e contém gráficos onde estão registados alguns dados sobre a educação em 19 países europeus.



- A primeira coluna diz respeito aos gastos na educação, em percentagem do Produto Interno Bruto (PIB).
- A segunda coluna informa qual é o número médio de anos de estudo da população adulta (com idade entre os 25 e os 64 anos).
- Finalmente, a terceira coluna mostra os resultados de um estudo internacional que avaliou as capacidades a matemática. Em cada país foi aplicado um teste a uma amostra aleatória de alunos com 15 anos de idade.

Para cada país, o valor exibido é a pontuação média obtida no teste pelos alunos desse país.

- Na análise dos gráficos, foi comentado que eles transmitem uma falsa imagem das diferenças existentes entre os países. Exemplificando: na coluna relativa às Capacidades a matemática, a barra relativa à Finlândia tem cerca do triplo do comprimento da barra relativa à Grécia e, no entanto, a pontuação obtida pela Finlândia não chega a 1,25 vezes a pontuação obtida pela Grécia.

- Considerando a coluna relativa ao Número de anos de estudo, dê outro exemplo da falsa imagem das diferenças reais entre os países transmitida por estes gráficos.

1.1.2 Analise a escala que está colocada no final de cada coluna e explique a razão pela qual os gráficos transmitem a referida falsa imagem.

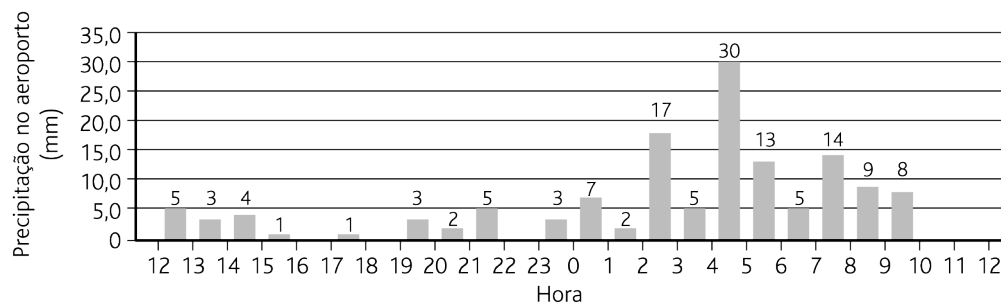
1.1.3 Considere que se pretendia restringir a análise aos países seguintes: Alemanha, Bélgica, Eslováquia, Itália e Portugal. Tendo apenas em conta estes cinco países, construa um gráfico de barras, relativo à «Número de anos de estudo», tal que:

- o comprimento de cada barra seja proporcional ao valor da variável;
- a barra relativa a Portugal tenha 10 cm de comprimento.

1.2 Imagine que faz parte da equipa de redação de um jornal. Escreva um artigo com uma análise dos gráficos apresentados.

2. Para medir a quantidade de precipitação durante um certo intervalo de tempo utiliza-se um pluviómetro. Um pluviómetro exprime, habitualmente, o resultado da medição em milímetros de altura (mm).

Entre as 12 horas do dia 17 e as 12 horas do dia 18 de Fevereiro de 2008, ocorreu um grande temporal na área metropolitana de Lisboa. Na estação metrológica junto ao aeroporto registaram-se os seguintes dados



Fonte: Público, 19 de fevereiro de 2008 (adaptado)

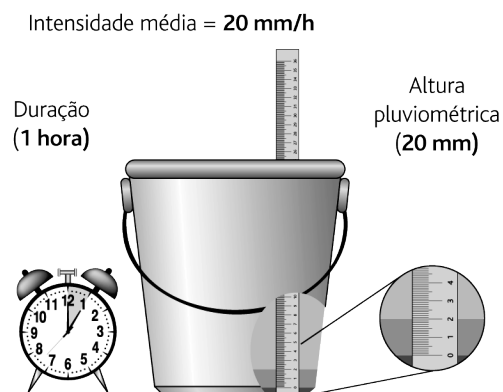
2.1 Nas 24 horas consideradas, qual foi o valor total de precipitação registado no aeroporto?

2.2 A intensidade média de precipitação é a razão entre a altura da água no pluviómetro e o intervalo de tempo em que a precipitação ocorre (figura ao lado).

2.2.1 Entre as 12 e as 24 horas do dia 17 de fevereiro, a intensidade média de precipitação foi abaixo dos 5 mm/h. Sem fazeres cálculos, explique porque é verdadeira a afirmação.

2.2.2 Nas doze primeiras horas do dia 18 de Fevereiro, qual foi, aproximadamente, a intensidade média de precipitação, em mm/h? (1 c.d.)

Adaptado de Exemplos de Itens (GAVE)

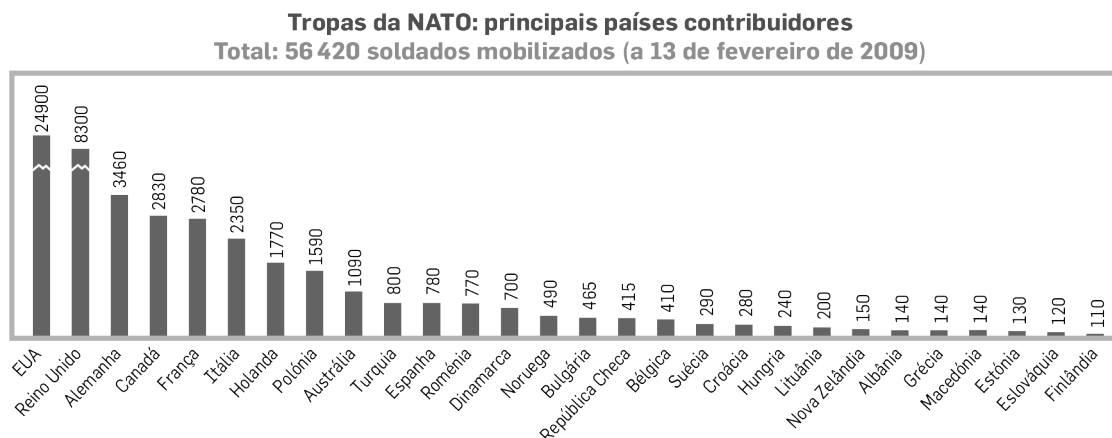


Ficha de trabalho N.º 12

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística – análise de gráficos e tabelas

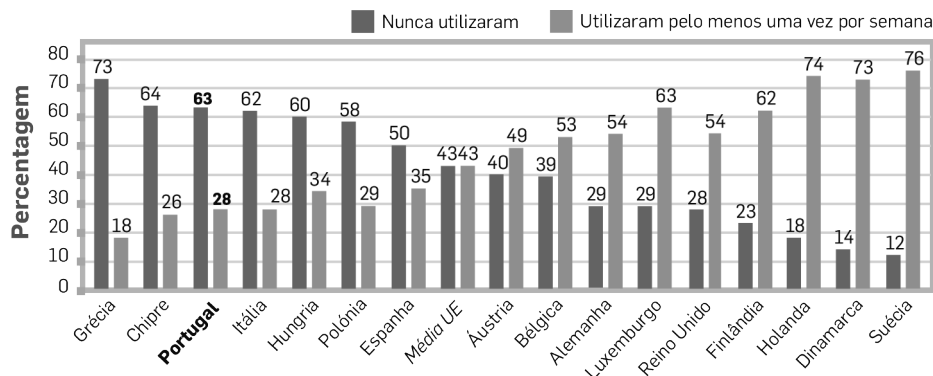
1. O gráfico seguinte refere-se ao número de soldados no Afeganistão:



Nota: As barras relativas aos EUA e ao Reino Unido estão quebradas uma vez que há dificuldades na representação de um gráfico de barras com valores muito afastados.

- 1.1 Qual é a população, a sua dimensão e a variável em estudo?
- 1.2 Como se denomina este tipo de gráfico?
- 1.3 Quantos soldados representaram a Itália?
- 1.4 Quantos soldados europeus foram mobilizados?
- 1.5 De que país foram mobilizados mais soldados?
- 1.6 Qual a percentagem de países em que houve uma mobilização superior a 2000 soldados? A que percentagem corresponde? (2 c.d.)

2. O gráfico representa a utilização da internet em diferentes países europeus.



2.1 Com base no gráfico, indique:

2.1.1 O país em que se verifica um maior número de utilizadores da internet.

2.1.2 O país que se aproxima mais da média da EU. Justifique.

2.1.3 A percentagem de portugueses que nunca utilizaram a internet.

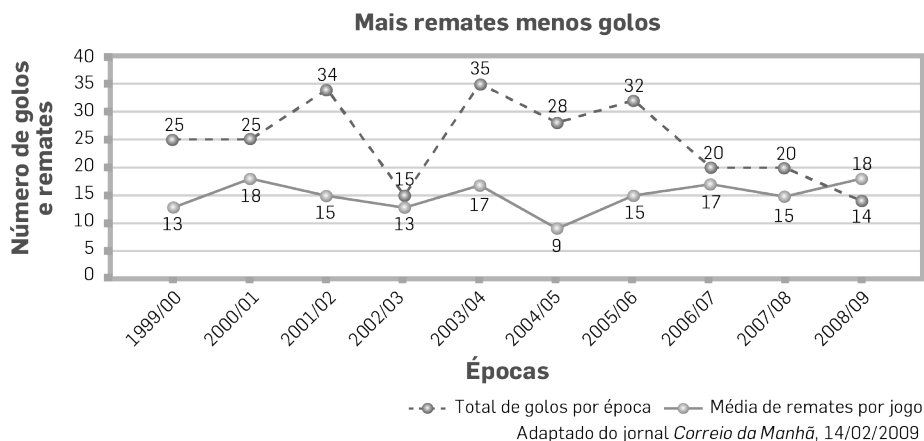
2.1.4 O país em que a percentagem de utilizadores da internet é igual à percentagem de utilizadores que nunca a utilizaram em Portugal.

2.2 Usando os resultados dos Censos 2001, que apontavam para uma população de 10 356 117 portugueses, determina quantos portugueses:

2.2.1 Nunca utilizaram a internet.

2.2.2 Utilizaram a internet pelo menos uma vez por semana.

3. O seguinte gráfico ilustra a evolução do número de golos marcados por época e da média de remates por jogo da seleção portuguesa de futebol:



3.1 Em que época houve maior número de golos marcados?

3.2 A partir de que época se registou uma tendência da descida do número de golos marcados? E uma subida da média de remates por jogo?

3.3 Em que época é que o número de golos marcados foi inferior à média de remates por jogo?

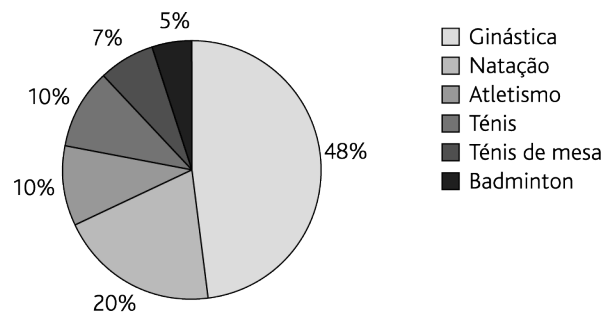
3.4 Considera que com os dados disponíveis no gráfico se pode estabelecer alguma relação entre estas duas variáveis? Justifique.

Ficha de trabalho N.º 13

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística e teoria da partilha. Variáveis qualitativas e quantitativas

1. Um clube desportivo tem 2000 alunos, que estão distribuídos por várias modalidades, da seguinte forma:



- 1.1 Qual é a população em estudo?
- 1.2 Qual é a variável estatística? Classifique-a.
- 1.3 Qual é a unidade estatística?
- 1.4 Qual é o efetivo da população?
- 1.5 Quantos alunos existem em cada modalidade? Construa uma tabela de frequências absolutas.
- 1.6 Construa um gráfico de barras e o respetivo gráfico de linhas para as frequências relativas simples, em percentagem.
- 1.7 Calcule a amplitude a que corresponde cada uma das modalidades no setor circular.
- 1.8 Construa um pictograma para esta distribuição.
- 1.9 Indique a moda das modalidades neste clube desportivo.
- 1.10 Vai ocorrer um festival desportivo em que só podem participar 160 alunos deste clube. Para cada modalidade, determine o número de alunos que vão participar, usando o (3 c.d. nos cálculos intermédios):
 - 1.10.1 Método de Hamilton;
 - 1.10.2 Método de Jefferson;
 - 1.10.3 Método de Adams;
 - 1.10.4 Método de Webster;
 - 1.10.5 Método de Huntington-Hill

2. O número de filhos das mulheres residentes num determinado concelho é dado pela seguinte tabela:

Número de filhos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de mulheres	298	171	229	117	59	24	13	7	2

- 2.1** Qual é a população em estudo?
- 2.2** Qual é o efetivo da população?
- 2.3** Construa uma tabela de frequências relativas acumuladas em percentagem (2 c.d.).
- 2.4** Qual é a percentagem de mulheres com pelo menos três filhos?
- 2.5** Quantas mulheres têm menos de seis filhos?
- 2.6** Qual é o número médio de filhos das mulheres residentes no concelho de Barrancos? (2 c.d.)
- 2.7** Determine a mediana e os quartis.
- 2.8** Construa um diagrama de extremos e quartis e comente a concentração dos dados.
- 2.9** Construa um gráfico de barras das frequências relativas em percentagem para esta distribuição. O que pode concluir acerca da simetria?
- 2.10** Calcule o desvio padrão e determine a percentagem de mulheres com um número de filhos pertencente ao intervalo $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$.
- 2.11** Determine a amplitude e a amplitude interquartil.
- 3.** Com o objetivo de estudar o grau de informação dos cidadãos da União Europeia (UE) sobre as políticas e instituições da UE, uma empresa de sondagens realizou um inquérito no outono de 1999. A dimensão da amostra foi de 15 800 pessoas, escolhidas aleatoriamente entre os cidadãos da UE com 15 ou mais anos.
- Perguntava-se aos inquiridos em que medida se sentiam informados sobre a UE, sendo a resposta dada mediante a seleção de um número, de 1 (não sabe nada) a 10 (sabe muito).
- No quadro ao lado apresentam-se os resultados desse inquérito. Para cada nível, indica-se a percentagem de inquiridos que se auto-avaliaram nesse nível.
- 3.1** Admita que os níveis 8, 9 e 10 correspondem a um elevado conhecimento sobre questões da UE. Determine o número de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento sobre questões da UE.
- 3.2** Tendo em conta a tabela e com base nas respetivas definições, justifique que o primeiro quartil desta distribuição é 3 e que a mediana é 4.

Escala	Percentagem
1	10
2	12
3	16
4	17
5	19
6	12
7	8
8	4
9	1
10	1

Adaptado de Exame Nacional de MACS (2006, 1.a Fase)

Ficha de trabalho N.º 14

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística. Variáveis quantitativas contínuas e variáveis qualitativas.

Método de Hondt

1. A tabela seguinte contém os registos dos pesos dos bebés à nascença, durante um dia, numa maternidade.

Pesos (em gramas)	Número de bebés
[2600, 2800[	2
[2800, 3000[	3
[3000, 3200[	5
[3200, 3400[	10
[3400, 3600[	7
[3600, 3800[	3

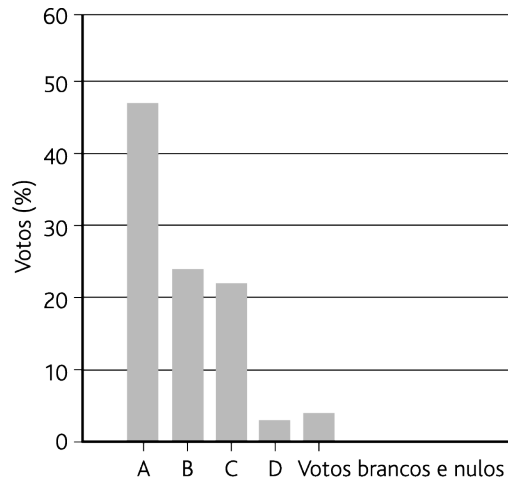
- 1.1 Quantos bebés pesavam pelo menos 3 kg?
- 1.2 Qual a percentagem de bebés que pesavam menos de 3400 gramas? (1 c.d.)
- 1.3 Construa um histograma de frequências relativas acumuladas e o respetivo polígono de frequências.
- 1.4 Determine a classe mediana, a classe modal e localize geometricamente a mediana e a moda.
- 1.5 Indique a classe a que pertence o 10.º percentil.
- 1.6 Calcule o peso médio dos bebés nascidos naquele dia na maternidade (2 c.d.).
- 1.7 Calcule o desvio padrão (2 c.d.).
- 1.8 Qual é a percentagem de bebés cujo peso pertence ao intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$? (2 c.d.)
- 1.9 Podemos considerar que a distribuição destes pesos é uma distribuição normal? Justifique.
2. Os tempos (em minutos) que os 20 alunos de uma turma do 10.º ano demoraram na resolução de uma ficha de trabalho foram os seguintes:
- 90 85 80 83 87 88 75 70 78 81
80 85 79 77 90 86 89 77 81 90
- 2.1 Agrupe os dados em classes de amplitude constante.
- 2.2 Elabore uma tabela de frequências absolutas e relativas (em percentagem).
- 2.3 Determine o tempo médio gasto pelos alunos na resolução da ficha de trabalho.
3. Considere que as classificações obtidas num teste de Matemática seguem uma distribuição normal. Sabendo que 68% das classificações pertencem ao intervalo $]13,6; 16,4[$, determine a média e o desvio padrão dessas classificações.
4. No dia 14 de dezembro de 1997, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal. Num certo concelho concorreram quatro partidos às eleições para a Câmara Municipal. Estavam em disputa sete mandatos. Esses quatro partidos são aqui designados pelas letras A, B, C e D.

A distribuição dos votos pelos quatro partidos, nessas eleições de 1997, foi a seguinte:

Partidos	A	B	C	D
Número de votos	13 442	8723	6033	1120

Houve 1258 votos em branco e votos nulos.

Em 2001, realizaram-se novamente eleições para a mesma Câmara Municipal. Os partidos concorrentes foram os mesmos. Os resultados estão representados no seguinte gráfico de barras:



- 4.1** Elabore um gráfico de barras semelhante ao apresentado, mas relativo às eleições de 1997 para a mesma Câmara Municipal.
- 4.2** Nas eleições para uma Câmara Municipal, é eleito presidente da Câmara o cabeça-de-lista da força política mais votada. Sabendo que o Presidente da Câmara, eleito em 1997, se recandidatou ao cargo em 2001 pelo mesmo partido, verifique justificando se ele foi ou não reeleito.
- 4.3** Na página da internet do STAPE (Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral), pode ler-se o seguinte: «Entre as características do método de Hondt, importa assinalar o encorajamento à formação de coligações, uma vez que o agrupamento de partidos leva a conseguir maior número de mandatos do que se concorressem isoladamente.»

Numa composição, comente esta frase, tendo por base os resultados das eleições de 1997, para a referida Câmara Municipal (tenha em atenção que, tal como já foi referido, estavam em disputa sete mandatos). A sua composição deve contemplar os três pontos que a seguir se referem:

- cálculo do número de mandatos obtidos por cada partido (de acordo com o método de Hondt);
- simulação do que aconteceria se os partidos B e C tivessem concorrido em coligação (admitindo que o número de votos da coligação B + C seria a soma do número de votos do partido B com o número de votos do partido C e que os outros partidos mantinham a votação). Esta simulação deve incluir:
 - o cálculo do número de mandatos que seriam obtidos, nesse caso, por cada força política;
 - uma referência a uma eventual alteração na presidência da Câmara;
- conclusão da vantagem, ou não, para os partidos B e C, da formação de uma coligação.

Adaptado de Exame Nacional de MACS (2006, 2.ª Fase)

Ficha de trabalho N.º 15

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estatística. Variáveis bidimensionais. Tabela de contingência

1. Na tabela que se segue estão registados os valores da altitude (em metros) e da pressão (em mmHg) de alguns locais:

Altitude (em m)	800	1010	1100	1300	1350	1500	1800	1990
Pressão (em mm Hg)	700	680	650	660	620	600	610	550

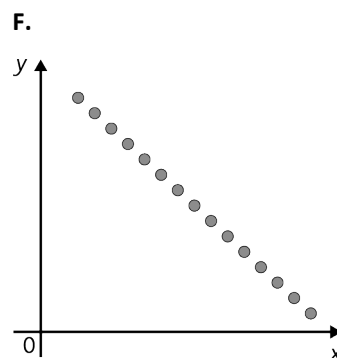
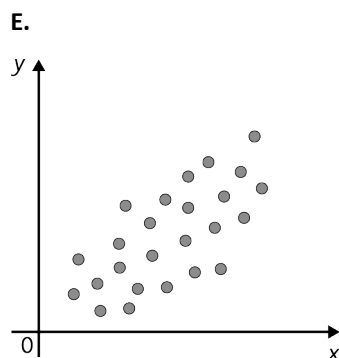
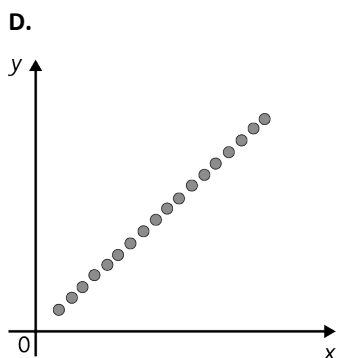
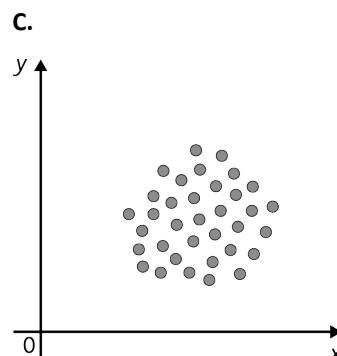
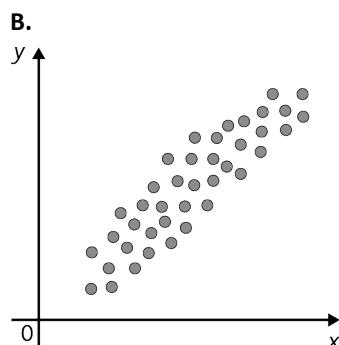
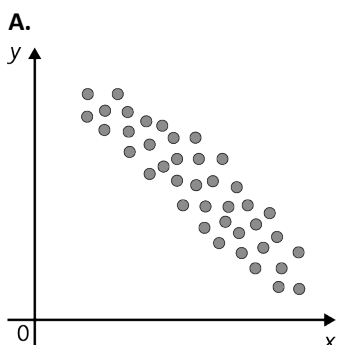
- 1.1 Construa o diagrama de dispersão desta distribuição.
 - 1.2 Classifique o tipo de correlação existente entre as variáveis.
 - 1.3 Determine o centro de gravidade e trace a reta de regressão.
 - 1.4 Faça uma estimativa para a pressão de um local em que a altitude seja 1200 m.
2. Num encontro de estudantes estavam alunos de diversas zonas do país, como se verifica na tabela seguinte:

Zona	Sexo	
	Feminino	Masculino
Norte	30	27
Centro	60	43
Sul	25	25

- 2.1 Quantos alunos estavam presentes no encontro?
- 2.2 Quantos alunos eram do sexo feminino?
- 2.3 Determine a percentagem de alunos do sexo masculino (2 c.d.).
- 2.4 Quantos alunos eram da zona Norte? A que percentagem corresponde? (2 c.d.)
- 2.5 Quantos alunos do sexo masculino eram da zona Centro?
- 2.6 Calcule a percentagem de alunos do sexo feminino que não são da zona Sul. (2 c.d.)

3. Estabeleça a correspondência entre os gráficos de dispersão seguintes e o valor do coeficiente de correlação respectivo, sabendo que estes valores são:

$$r^1 = 0,91 \quad r^2 = 0 \quad r^3 = -1 \quad r^4 = 0,43 \quad r^5 = 1 \quad r^6 = -0,85$$



Fichas de trabalho N.º 16

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Impostos. Inflação.

1. A D. Marília comprou material escolar para os seus filhos no valor de € 97,43. A taxa de IVA que incide sobre esse material é de 6% (2 c.d.).

1.1 Quanto pagaria a D. Marília pelo mesmo material se este não estivesse sujeito ao IVA?

1.2 Quanto pagou só de imposto?

2. Por um jantar de negócios, o Sr. Jardim pagou € 54,91, só de IVA. A taxa deste imposto a aplicar nesta situação é de 23%.

2.1 Quanto custou o jantar sem imposto?

2.2 Quanto pagou, efetivamente, o Sr. Jardim?

3. Numa farmácia de Viseu, a Dora adquiriu vários artigos, discriminados na tabela abaixo, bem como o preço e a taxa de IVA que incide sobre cada um deles:

Artigo	Preço (com IVA)	Taxa de IVA
Protetor solar	€ 34,38	23%
Creme hidratante	€ 22,77	23%
Vitamina C	€ 4,11	6%
Xarope	€ 7,11	6%

3.1 Quanto pagou a Dora pela totalidade dos artigos?

3.2 Do valor calculado na alínea anterior, quanto corresponde a IVA? (2 c.d.)

Suponhamos agora que esta compra foi efetuada numa farmácia em Angra do Heroísmo e admitimos que os preços (com IVA) de todos os artigos se mantêm.

3.3 Qual é o valor de IVA pago neste caso? (2 c.d.)

3.4 Tire conclusões relativamente à diferença de valores do imposto pago em Viseu e em Angra do Heroísmo.

4. A Rute comprou um apartamento, em Pinhel, tendo pago € 1624,77 de IMT. A parcela a abater foi € 5640,23.

4.1 Qual foi a taxa de imposto aplicada? Consulte a tabela 1 da pág. 184 do Manual.

4.2 Quanto custou o apartamento da Rute?

5. O Jaime e o Tiago, amigos de longa data, decidiram comprar cada um, uma casa de férias em locais diferentes para, posteriormente, partilharem. O Jaime decidiu-se pelo Funchal e comprou aí um apartamento por € 186 550. O Tiago optou por um apartamento em Silves, tendo pago de IMT € 4800,66 com uma taxa marginal aplicada de 7%. Consulte as tabelas 3 e 4 da pág. 184 do Manual.

5.1 Quanto custou o apartamento do Tiago?

5.2 Quanto pagou o Jaime de IMT?

5.3 Após o pagamento do IMT, qual foi o apartamento mais dispendioso?

Para a resolução dos exercícios 6, 7 e 8, consulte a tabela da pág. 181 do Manual.

6. A Catarina, moradora na ilha do Faial, terá de pagar às finanças, relativamente ao ano de 2014, IRS no valor de € 11 020,27. Sabendo que a taxa aplicada foi de 36%:

6.1 Qual foi a parcela a abater?

6.2 Qual foi o rendimento coletável declarado pela Catarina às finanças? (2 c.d.)

7. Relativamente ao ano de 2014, o Sr. Almeida, de Vila Nova de Gaia, declarou às finanças um rendimento coletável de € 63 427,83. Supondo que não há deduções a fazer, calcule o valor de IRS a pagar nas duas situações seguintes (2 c.d.):

- Situação A: O rendimento declarado é só do Sr. Almeida.

- Situação B: O rendimento declarado é relativo ao Sr. Almeida e à sua esposa.

8. O casal Garção dirige uma pequena empresa de publicidade e verificou, em dezembro de 2008, que o seu rendimento coletável (desse ano) era de € 32 000. Antes ainda de terminar o ano, receberam duas propostas de prestação de serviços. Como o ano está a acabar e só têm tempo para realizar um dos trabalhos, vão ter de optar:

- proposta A: recebem € 2500;

- proposta B: recebem € 3000.

O marido diz que é preferível a proposta A porque recebem menos, mas não sobem no escalão do IRS; a esposa diz que dinheiro é dinheiro e que a proposta B é mais lucrativa. Quem tem razão?

Num pequeno texto ajude o casal Garção a fazer a sua escolha. Apoie as suas razões nos cálculos do IRS do casal para cada uma das propostas. Suponha que em 2014 o casal não estava sujeito a deduções à coleta (2 c.d.).

9. Se um quilo de arroz custar, em maio de 2014, € 1,17, quanto se terá de pagar pelo mesmo quilo de arroz em maio de 2015 se a taxa de inflação for de 3,4% naquele período? (2 c.d.)

10. A tabela seguinte contém os IHPC de Itália e Irlanda relativos a Julho e Dezembro de 2014:

Países	IHPC	
	Julho 2014	Dezembro 2014
Itália	117,7	120,00
Irlanda	109,9	108,9

10.1 Qual o país que apresentou uma maior taxa de inflação no período em questão? Indique os valores obtidos por cada um dos países. (2 c.d.)

10.2 Se em julho de 2014, em Itália, um cabaz de compras custou € 92,78, quanto se pagou em dezembro de 2014 pelo mesmo cabaz? (2 c.d.)

10.3 Se em dezembro de 2014, se pagou, em Espanha, € 117,42 por um cabaz de compras, quanto teria pago em julho de 2014 pelo cabaz? (2 c.d.)

Ficha de trabalho N.º 17

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Atividade bancária. Cartão de crédito. Fundos de investimento.

1. A Maria fez um depósito a prazo de € 14 750 durante sete anos, por períodos de um ano, renovável, tendo sido renovado por seis vezes. A taxa de juro acordada com o seu banco foi de 8,5% ao ano. Calcule o valor total de juros recebido pela Maria ao fim dos sete anos se ela optar por um regime de:
 - 1.1 juro simples;
 - 1.2 juro composto. (2 c.d.)
2. Calcule o juro produzido por um depósito a prazo de € 2110, durante 54 meses, a uma taxa de juro anual de 6,5%, em regime de juro composto. (2 c.d.)
3. Uma empresa de construção civil pediu um empréstimo ao seu banco no valor de € 287 500, por um prazo de 18 meses. Acordou-se numa taxa de juro anual de 15% e que os juros e o capital seriam pagos apenas no final do prazo do empréstimo. (2 c.d.)
 - 3.1 Calcule o montante de juros vencidos.
 - 3.2 Quanto terá de pagar, na totalidade, a empresa ao banco no fim dos 18 meses?
4. A Magda solicitou um crédito individual ao seu banco para comprar algumas peças de mobiliário. O montante pedido foi de € 4590 a pagar em quatro anos a uma taxa de juro anual de 13,5%. (2 c.d.)
 - 4.1 Quanto terá a Magda de pagar mensalmente ao banco?
 - 4.2 No final dos quatro anos quanto terá pago só de juros?
 - 4.3 Sabendo que a Magda cumpriu os quatro anos no pagamento das mensalidades, por quanto lhe ficaram as peças de mobiliário?
5. A Filipa e o Henrique dirigiram-se a um banco com o intuito de contrair um empréstimo para a compra de um apartamento. O capital pretendido era de € 125 200 por um período de 25 anos, a uma taxa de juro de 5,3% ao ano. (2 c.d.)
 - 5.1 Quanto terão de pagar por mês só de juros?
 - 5.2 Qual é o valor da prestação mensal?

Suponha agora que a Filipa e o Henrique acordaram com o banco que, nos primeiros três anos do empréstimo, pagariam apenas juros.
 - 5.3 Qual será a prestação a pagar durante esses três anos?
 - 5.4 Qual será o valor da prestação mensal após estes três anos de carência?
 - 5.5 Calcule o valor total pago ao banco no final do período acordado para o empréstimo (com e sem carência). Existe alguma diferença?

6. Para o seu cartão de crédito o Paulo optou pela modalidade de 50%, sendo os pagamentos efetuados no dia 1 de cada mês. A taxa de juro a aplicar ao valor em dívida é de 23% ao ano. Na tabela seguinte encontram-se alguns pagamentos que o Paulo efetuou usando o cartão:

Meses	Pagamento
Março	279,33
Abril	110,73
Maio	92,88

Supomos que os pagamentos foram efetuados sempre no dia 1 do mês a que se referem. (2 c.d.)

6.1 Quanto terá de pagar o Paulo (ao banco) no dia 1 de abril?

6.2 No dia 1 de maio:

6.2.1 quanto terá de pagar só de juros?

6.2.2 quanto terá de pagar, excluindo os juros?

6.3 No dia 1 de junho:

6.3.1 quanto terá de pagar só de juros?

6.3.2 quanto terá de pagar, excluindo os juros?

7. Após alguma ponderação, o Luís decidiu aplicar € 27 932,68 em determinado fundo de investimento. O número de unidades de participação desse fundo é 253 000, sendo o seu valor total de € 3 125 056 no fim do dia 20 de abril de 2015.

7.1 Qual é a cotação de cada unidade de participação para o dia 21 de abril de 2015? (4 c.d.)

7.2 Quantas unidades de participação poderá o Luís subscrever?

7.3 Terá investido a totalidade do dinheiro previsto? Se não, com quanto ficou? (2 c.d.)

Em julho de 2015 o Luís decidiu vender as suas unidades de participação. Suponha que este tipo de investimento não tem comissões e que no dia do resgate as unidades de participação valem € 16,2281.

7.4 Qual é o valor do resgate? (2 c.d.)

7.5 Determine o lucro do Luís neste investimento. (2 c.d.)

Matriz do teste de diagnóstico

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	6
	Resposta extensa	14

Conteúdos

- Cálculo de percentagens
- Resolução de problemas que envolvem percentagens
- Análise de gráficos e tabelas

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.	4.	5.	6.
Cotação	5	5	5	5	5	5	16	12	12	12

Item	7.	8.	9.	10.	11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	11.6
Cotação	12	12	12	12	10	20	10	10	10	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de diagnóstico N.º 1

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Determine:

1.1 10% de 50;

1.2 20% de 30;

1.3 15% de 200.

2. Escreva sob a forma de percentagem:

2.1 $\frac{1}{4}$

2.2 $\frac{7}{10}$

2.3 $\frac{3}{5}$

3. Uma livraria apresenta duas promoções sobre os preços de venda dos seus artigos.

Promoção A:

- 25% de desconto na compra de um livro e
- 10% de desconto nos restantes artigos

Promoção B:

- 10 euros de desconto na compra de um artigo à escolha e
- 20% de desconto nos restantes artigos

A Umbelina vai comprar um manual de apoio ao estudo de MACS no valor de 30 euros e um Atlas no valor de 80 euros. Qual das promoções deverá escolher de modo a gastar menos dinheiro? De que modo deve usar os descontos nas suas compras? Justifique a resposta, apresentando todos os cálculos que efetuar.

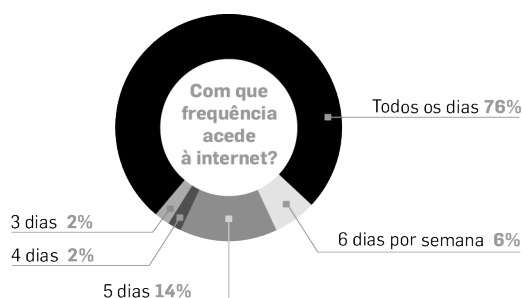
4. A D. Dosolinda foi ao supermercado e verificou que o litro do azeite subiu de 2,50 euros para 3 euros. Qual foi a percentagem de aumento que o azeite teve?
5. Num hipermercado os chocolates estão em promoção «Pague 2, leve 3!». Se cada chocolate custar 1 euro, qual é, em euros, o desconto? Exprima o desconto em percentagem (2c.d.).
6. O Rui Penalva comprou uma bicicleta por 140 euros e conseguiu vendê-la por 200 euros. Qual foi o seu lucro (em percentagem com 2c.d.)?
7. Numa campanha de lançamento de um novo computador, a loja faz um desconto de 20%. Quanto terá o Policarpo de pagar por um computador que custa 597,98 euros?
8. A Ricardina comprou um casaco por 45 euros, já com 10% de desconto. Qual era o preço do casaco sem o desconto?
9. O Bonifácio comprou um automóvel por 15437 euros. Passados dois anos vendeu-o por 10 805,90 €. Qual foi a percentagem de desvalorização?
10. Numa escola, foi realizado um inquérito a um grupo de 40 alunos do 10.º ano sobre a idade do seu encarregado de educação. Os dados recolhidos foram organizados na seguinte tabela:

Idade (em anos)	36	38	39	40	42	43	45	50
N.º de alunos	8	10	8	5	3	3	2	1

Relativamente aos dados recolhidos, qual das seguintes afirmações é verdadeira? Justifique.

- (A) 25% dos encarregados de educação têm 39 anos;
- (B) 50% dos encarregados de educação têm idade inferior a 39 anos;
- (C) 35% dos encarregados de educação têm idade superior a 39 anos;
- (D) 50% dos encarregados de educação têm idade entre 39 e 43 anos.

11. O gráfico que se segue representa os resultados obtidos num mini-inquérito efetuado a 50 alunos da Licenciatura de Cinema, Vídeo e Comunicação Multimédia, acerca da utilização da internet.



11.1 Indique a população e a variável em estudo, classificando-a.

11.2 Complete a seguinte tabela:

Dias por semana	Percentagem	N.º de alunos
3		
4		
5		
6		
Todos		
Total	100	50

11.3 Qual o número de dias por semana em que mais alunos acedem à internet?

11.4 Quantos alunos acedem à internet três ou quatro dias por semana?

11.5 Qual a percentagem de alunos que acede à internet pelo menos quatro dias por semana?

11.6 Quantos alunos acedem à internet no máximo cinco dias por semana?

Matriz do Teste de Avaliação 1

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	8
	Resposta extensa	7

Conteúdos

Tema 1 – Métodos de Apoio à Decisão

- Teoria Matemática das Eleições
 - Sistema Maioritário
 - Sistema Preferencial
- Teoria da Partilha Equilibrada
 - Partilhas no caso discreto

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3.1	1.3.2	1.4	2.1	2.2.1	2.2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	4.4
Cotação	10	12	12	20	16	15	15	10	10	20	10	5	5	30	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação N.º 1

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Numa vila do interior do país, foram realizados alguns arraiais com o objetivo de angariar fundos para o clube desportivo local, tendo-se apurado a quantia de 14 732€. Este valor vai ser utilizado para pequenas reparações e para a compra de materiais. A direção do clube decidiu que 25% da verba apurada seria destinada às reparações e o restante ficaria para a compra de material necessário às diferentes modalidades desportivas praticadas no clube. Ficou também decidido que o valor a atribuir à compra de material para cada uma das modalidades desportiva seria diretamente proporcional ao número de praticantes inscritos na mesma.

Modalidade Desportiva	Ténis de mesa	Natação	Basquetebol	Voleibol	Futebol
% de inscritos	A	16	B	12	24

- 1.1 Determine a quantia que será aplicada em obras de reparação.
1.2 Calcule a verba que será investida na compra de material para a modalidade Futebol.
1.3 Sabe-se que a verba atribuída à modalidade Ténis de mesa foi de 1 546,86 €.
1.3.1 Determine a percentagem de praticantes inscritos nessa modalidade.
1.3.2 Complete a tabela:

Modalidade Desportiva	Ténis de mesa	Natação	Basquetebol	Voleibol	Futebol
Percentagem de inscritos		16		12	24
Verba atribuída					

- 1.4 Sabe-se também que o clube desportivo tem um total de 1250 praticantes inscritos. Determine o número de praticantes inscritos em cada uma das modalidades.
2. A diretora de turma da Inês, que também é a professora de Matemática, decidiu aplicar o método de contagem de Borda para escolher o delegado de turma. Há três candidatos: o Luís, o Miguel e a Sónia. Numa primeira fase, cada aluno deverá ordenar, uma única vez, os nomes dos três alunos candidatos de acordo com as suas preferências. A ordenação feita por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados vinte e oito votos válidos.

Na tabela seguinte encontram-se organizados os resultados obtidos:

	10	7	5	4	2
1.ª Preferência	Sónia	Luís	Miguel	Miguel	Luís
2.ª Preferência	Luís	Miguel	Luís	Sónia	Sónia
3.ª Preferência	Miguel	Sónia	Sónia	Luís	Miguel

Segundo o método de contagem de Borda, a escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto seja considerado válido, cada aluno ordena, uma única vez, os nomes dos três alunos candidatos ao cargo de delegado de turma de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final dos alunos, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os alunos em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- é escolhido o aluno com maior número de pontos.

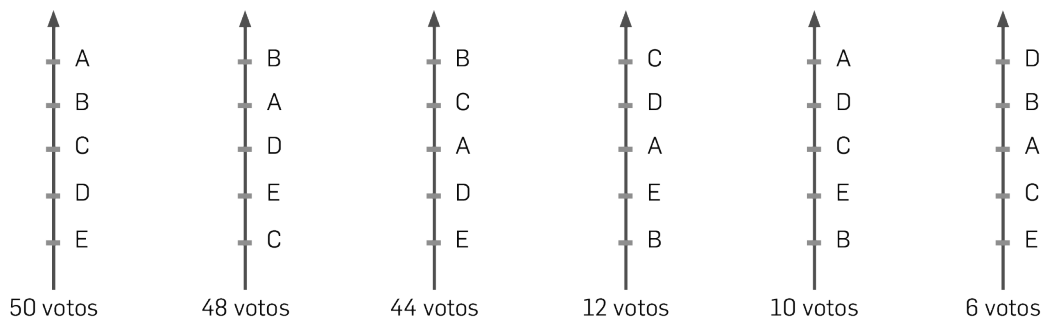
2.1 Determine qual o aluno que será eleito para o cargo de delegado de turma aplicando o método referido.

2.2 Considere agora apenas as primeiras preferências.

2.2.1 Qual a percentagem de votos de cada candidato? Apresente os resultados finais arredondados a uma casa decimal.

2.2.2 Qual seria o aluno vencedor pelo sistema maioritário? Com que tipo de maioria? Justifique a resposta.

3. Os resultados de uma eleição fictícia com cinco candidatos encontram-se sintetizados nos esquemas preferenciais seguintes:



O método da pluralidade, inclui-se nos sistemas de votação por ordem de preferência e elege o candidato com maior número de primeiras preferências.

3.1 Qual foi o número de votos válidos nesta votação?

3.2 Determine a percentagem de primeiras preferências de cada candidato. Apresente os resultados finais arredondados a uma casa decimal.

3.3 Aplicando o método da pluralidade, indique, justificando, qual é o candidato vencedor desta eleição. E com que tipo de maioria?

4. Em 2015, o famoso casal de atores de Hollywood, Ângela e Bernardo Bull, separam-se. Dos bens do casal fazem parte 2 milhões de euros em joias e peças de arte, uma mansão em Bel Air, um luxuoso apartamento em Nova Iorque, um rancho em Dallas e um triplex na torre Trump. Há que fazer a partilha dos bens comuns e decidem fazê-lo usando o método do ajuste na partilha.

Segundo o método do ajuste na partilha, a escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- Definir claramente os itens a dividir.
- Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir pelos itens.
- Cada item é atribuído (temporariamente) ao interveniente que mais o valorizou (em caso de empate é atribuído ao que tiver menos pontos).
- Faz-se um balanço:
 - se ambos tiverem o mesmo número de pontos a partilha está feita;
 - se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais, transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos.
- A transferência: calculam-se os quocientes

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial}}{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial}}$$

e colocam-se por ordem decrescente.

- Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.
- Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Definidos os itens a dividir (joias e peças de arte, mansão, apartamento, rancho e triplex) sabe-se que a distribuição dos 100 pontos, de cada um dos atores, pelos itens foi a seguinte:

	Ângela	Bernardo
Rancho	36	10
Mansão	20	40
Apartamento	30	10
Triplex	10	38
Joias e peças de arte	4	2

- 4.1 Qual é a atribuição inicial (temporária) dos bens do casal?
- 4.2 Tendo em atenção a atribuição inicial, quantos pontos tem cada um dos atores?
- 4.3 Determine as transferências que são necessárias efetuar para que a Ângela e o Bernardo fiquem com igual número de pontos. Como será feita a partilha dos bens?
- 4.4 Com quantos pontos fica cada um dos atores no final da partilha?

Matriz do teste de avaliação 2

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	2
	Resposta extensa	6

Conteúdos

Tema 1 – Métodos de Apoio à Decisão

- Teoria da Partilha Equilibrada
 - Partilhas no caso discreto.
 - Partilhas no caso contínuo.

Cotações

Item	1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2
Cotação	60	25	25	20	20	20	15	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação N.º 2

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Os quatro sobrinhos-netos do Sr. Malaquias, Artur, Benilde, Carlos e Dinis, são os seus únicos herdeiros e terão de fazer entre si a partilha dos bens deixados pelo tio: uma moradia, uma cabana junto a um lago e um barco. O Sr. Malaquias determinou que todos deveriam ter partes iguais na divisão da sua herança.

Os quatro herdeiros decidem utilizar o método seguinte, para a partilha da herança:

- Primeira etapa: cada herdeiro atribui um valor monetário a cada um dos bens da herança, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todos os herdeiros.
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada herdeiro, à herança e o valor que cada um considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada herdeiro, através da soma das licitações por ele atribuídas.
- Terceira etapa: cada bem é atribuído ao herdeiro que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um herdeiro não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por ele é zero.
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por um dos herdeiros for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então esse herdeiro terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo ao total do valor a pagar o total do valor que os herdeiros têm a receber. Este excesso é distribuído igualmente por todos uma vez que todos têm partes iguais na herança.

Na tabela que se segue, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada herdeiro a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa (os valores encontram-se em euros):

	Artur	Benilde	Carlos	Dinis
Moradia	240 000	400 000	280 000	360 000
Cabana	120 000	80 000	180 000	100 000
Barco	60 000	48 000	40 000	40 000

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma a que nenhum dos sobrinhos-netos do Sr. Malaquias tenha razão para ficar insatisfeito.

Na sua resposta, deve:

- calcular o valor global atribuído à herança por cada herdeiro;
- determinar a porção justa para cada herdeiro;
- atribuir os bens aos herdeiros;
- apurar o valor a pagar ou a receber por cada herdeiro;
- apurar o excesso, caso exista;
- dividir o excesso, caso exista, pelos herdeiros;
- indicar o bem e o valor final a receber, ou a pagar, por cada um dos quatro herdeiros.

2. No dia 29 de Setembro de 2013 realizaram-se, em Portugal, eleições autárquicas.

Na tabela seguinte estão indicados os números de votos validamente expressos e o número de mandatos distribuídos pelo método de Hondt, obtidos num certo círculo eleitoral por cada um dos quatro partidos mais votados nas referidas eleições. Os votos brancos ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Partido	A	B	C	D
Número de votos	10 771	3 938	2013	1001
Número de mandatos	5	1	1	0

2.1 Em eleições semelhantes, alguns países aplicam o método de Sainte Laguë, em vez do método de Hondt.

Segundo o método de Sainte Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte:

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos a atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

Um candidato de uma das quatro listas que concorreu a esta eleição, afirmou que se a distribuição dos mandatos tivesse sido feita pelo método de Sainte Laguë, o seu partido teria obtido um (ou mais um) mandato.

Determine a que lista pertence o candidato que fez a afirmação.

Na sua resposta deve:

- aplicar o método de Sainte Laguë para determinar a distribuição dos 7 mandatos;
- concluir a que lista pertence o candidato a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os quocientes do método de Sainte Laguë arredondados com uma casa decimal.

2.2 O presidente do partido D considera que o resultado da distribuição dos 7 mandatos seria diferente, e a seu favor, caso o seu partido estivesse coligado com o partido C. Admitindo que o número de votos obtido pela coligação era igual à soma dos números de votos validamente expressos nos partidos que formam a coligação, e que os restantes partidos mantêm o mesmo número de votos, averigue se o presidente do partido D tem razão. Apresente os quocientes do método de Hondt arredondados com uma casa decimal.

3. A reitoria de uma universidade deverá escolher uma comissão de 9 elementos para representação num congresso. Os elementos a incluir na comissão serão escolhidos de entre todos os professores de três departamentos da universidade:

Departamento	Número de professores
Física	16
Matemática	37
Informática	47

O regulamento interno da universidade diz que, para este tipo de atividade, a distribuição deve ser feita de acordo com o método de Hamilton.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição faz-se da forma seguinte:

- calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de professores pelo número total lugares na comissão;
- calcula-se a quota padrão para cada departamento, dividindo o número de professores de cada departamento pelo divisor padrão;
- atribui-se a cada departamento um número de lugares na comissão igual à parte inteira da quota padrão;
- caso ainda restem lugares para atribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os lugares que restam aos departamentos cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um para cada departamento);
- na atribuição do último lugar, se houver dois departamentos com quotas padrão que apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último lugar ao departamento com menor número de lugares.

3.1 Determine a composição da comissão aplicando o método de Hamilton. Apresente as quotas padrão arredondadas com 3 casas decimais

3.2 A organização do congresso enviou um email à reitoria da universidade informando que, por alteração da sala destinada ao congresso, a comissão poderia integrar mais um elemento, passando a um total de 10 elementos.

O departamento de Física manifestou, quase de imediato o seu desagrado.

Será que o departamento de Física tem razão para ficar insatisfeito com a alteração do número de elementos a integrar a comissão? Fundamente a sua resposta.

Na sua resposta deve:

- aplicar o método de Hamilton para determinar a composição da comissão com 10 elementos;
- identificar as implicações, no número de professores de cada departamento a serem incluídos na comissão se esta passar de 9 para 10 elementos.

3.3 O departamento de Física apresentou uma nova proposta: a comissão integraria 10 elementos mas a sua composição seria determinada utilizando o método seguinte:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de professores dos três departamentos pelo número total de lugares na comissão.

- Calcula-se a quota padrão para cada um dos departamentos, dividindo-se o número de professores de cada departamento pelo divisor padrão.
- Se a parte decimal da quota padrão de um departamento for menor do que 0,5, atribui-se a esse departamento uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a parte decimal da quota padrão de um departamento for maior do que ou igual a 0,5, atribui-se a esse departamento uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma dos lugares a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número de lugares para cada departamento é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de lugares a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada departamento.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de lugares a distribuir.

Na primeira aplicação deste método, a soma das quotas arredondadas foi diferente do número de lugares a distribuir. Determine a distribuição dos 10 lugares, depois de encontrar um divisor modificado.

Apresente o divisor modificado com uma casa decimal e as quotas padrão modificadas arredondadas com três casas decimais.

4. Seis amigas, Rita, Sofia, Tânia, Úrsula, Viviana e Xênia foram comprar um bolo de ananás para acompanhar o «chá das cinco». Decidem fazer a divisão do bolo usando o método do último a diminuir e estabelecem a ordem de jogada: optam pela ordem alfabética dos seus primeiros nomes. Na primeira volta apenas a Úrsula diminui, na segunda e na quarta volta ninguém diminui e na terceira volta a Sofia e a Viviana diminuem.

4.1 Determina que amigas ficam com cada uma das quatro primeiras fatias. Justifica todo o teu raciocínio.

4.2 Como poderão proceder as duas últimas amigas para dividir entre si a parte do bolo que resta?

Matriz do teste de avaliação 3

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	9
	Resposta extensa	1

Conteúdos

Tema 1 – Métodos de Apoio à Decisão

- Teoria da Partilha Equilibrada
 - Partilhas no caso discreto.
 - Partilhas no caso contínuo.

Tema 2 – Estatística

- Interpretação de tabelas e gráficos;
- Tabelas de frequência;
- Medidas de localização;
- Medidas de dispersão.

Cotações

Item	1.	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
Cotação	50	20	5	20	10	10	10	40	20	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação N.º 3

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Os sócios de uma certa associação de artesanato, foram a votos para eleger os seus representantes num evento a realizar na capital.

Na tabela seguinte, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das 3 listas candidatas. Os votos brancos ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Listas	Alfa	Beta	Gama
Número de votos	148	249	603

A escolha dos 10 representantes será feita utilizando um dos seguintes métodos:

Método M1:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total votos pelo número total de representantes.
- Calcula-se a quota padrão para cada lista, dividindo-se o número de votos de cada lista pelo divisor padrão.
- Se a parte decimal da quota padrão de uma lista for menor do que 0,5, atribui-se a essa lista uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a parte decimal da quota padrão de uma lista for maior do que ou igual a 0,5, atribui-se a essa lista uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma dos lugares a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número representantes para cada lista é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de lugares a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada lista.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de lugares a distribuir.

Método M2:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total votos pelo número total de representantes.
- Calcula-se a quota padrão para cada lista, dividindo-se o número de votos de cada lista pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada lista uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma dos lugares a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número de representantes para cada lista é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de lugares a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada lista.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de lugares a distribuir.

Método M3:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total votos pelo número total de representantes.
- Calcula-se a quota padrão para cada lista, dividindo-se o número de votos de cada lista pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada lista uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma dos lugares a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número representantes para cada lista é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de lugares a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada lista.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de lugares a distribuir.

Três candidatos não eleitos, que concorreram a esta eleição, um em cada lista, fizeram as seguintes afirmações à imprensa:

Afirmação I: «Se tivesse sido utilizado o método M3, eu teria sido eleito».

Afirmação II: O método M2 teria sido o mais favorável para mim».

Afirmação III: Se não tivesse sido utilizado o método M2, eu teria sido eleito».

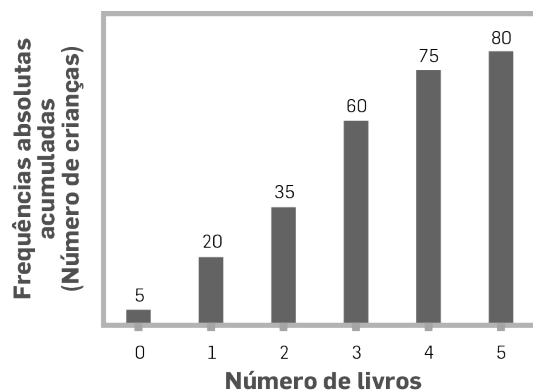
Determine a que lista a pertence cada um dos candidatos que fizeram cada uma das afirmações.

Na sua resposta deve:

- aplicar o método M1 para determinar a distribuição dos 10 representantes;
- aplicar o método M2 para determinar a distribuição dos 10 representantes;
- aplicar o método M3 para determinar a distribuição dos 10 representantes;
- concluir a que lista pertencem os candidatos que fizeram cada uma das afirmações, a partir da comparação entre os três resultados.

Apresente os valores dos quocientes arredondados com duas casas decimais.

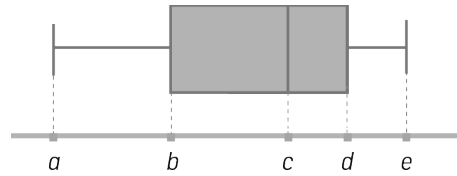
2. No dia da festa de final de ano de uma escola, os alunos do 10.º ano resolveram levar livros para doar à Biblioteca da escola. A figura 1 representa o gráfico de barras das frequências absolutas acumuladas referentes ao número de livros que cada aluno levou no dia da festa.



2.1 Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas para este conjunto de dados.

2.2 Qual foi o número total de alunos que levaram livros para a Biblioteca?

2.3 A partir deste gráfico foi construído o diagrama de extremos e quartis, representado na Figura 2, referente ao número de livros que cada aluno levou no dia da festa.



Como a figura 2 sugere, a, b, c, d e e representam os extremos e os quartis referentes ao número de livros que cada aluno levou no dia da festa.

Determine os valores de a, b, c, d e e .

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B 2012 (1ª fase)

3. A empresa FUTUROLIMPO quis saber o tempo necessário para a recolha seletiva de resíduos numa zona residencial. Para tal, selecionou, aleatoriamente, uma amostra de 22 registos dos tempos necessários a essa recolha.

O diagrama de caule-e-folhas seguinte apresenta os 22 registos dos tempos, em minutos, que foram necessários para a recolha seletiva dos resíduos. No caule, consta o valor das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades de cada registo.

8	6	6	7	7	7	9	9	
9	0	0	4	4	5	5	5	5
10	3	3	6	6	8			
11	1	6						

Tendo em conta os dados apresentados no diagrama de caule-e-folhas, relativos à amostra selecionada responda aos itens seguintes:

3.1 Indique a variável em estudo.

3.2 Em quantos registos, o tempo necessário para a recolha é superior a 10 minutos?

3.3 Indique o valor da moda para este conjunto de dados.

3.4 Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas, com os dados agrupados em classes de amplitude 10, sendo o extremo inferior da primeira classe igual a 80.

3.5 Recorrendo à calculadora, determine o valor da média ($\bar{x}$) e o valor do desvio padrão (s) do tempo necessário para a recolha seletiva dos resíduos.

Apresente o valor do desvio padrão arredondado às centésimas.

Apresente a(s) lista(s) que introduzir na calculadora, para obter as estatísticas solicitadas.

3.6 Determine a percentagem dos tempos necessários à recolha seletiva dos resíduos que pertencem ao intervalo $]\bar{x}-s; \bar{x}+s[$.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso não tenha respondido à questão 2.4, considere que $\bar{x} \approx 96,2$ minutos e $s \approx 8,99$ minutos.

Adaptado de Exame Nacional de MACS 2008 (1.ª fase)

Matriz do teste de avaliação 4

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	6
	Resposta extensa	8

Conteúdos

Tema 1 – Métodos de Apoio à Decisão

- Teoria da Partilha Equilibrada
 - Partilhas no caso discreto.

Tema 2 – Estatística

- Interpretação de gráficos e tabelas;
- Medidas de localização;
- Tabelas de convergência;
- Reta de regressão.
- Coeficiente de correlação;

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4.1	2.4.2	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2
Cotação	20	20	10	15	15	15	10	10	20	15	15	10	10	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos

Teste de avaliação N.º 4

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Em Portugal, o método utilizado para a contabilização de mandatos em eleições autárquicas, por exemplo é o método de Hondt. Em eleições semelhantes, alguns países aplicam o método de Hagenbach-Bischof e outros o método de Sainte Laguë.

Na tabela seguinte estão indicados os números de votos validamente expressos obtidos numa eleição. Os votos brancos ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos. São sete os mandatos a distribuir pelos cinco partidos que se apresentação nesta eleição.

Partido	A	B	C	D	E
N.º de votos	5921	3735	3284	2419	2385

Segundo o método de Hagenbach-Bischof, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte:

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista pela quota eleitoral a qual se obtém dividindo o número total de votos pelo número de mandatos a distribuir mais 1.
- Atribuem-se a cada lista um número de mandatos igual à parte inteira do quociente obtido no passo anterior.
- O próximo mandato é atribuído da seguinte forma:
 - Divide-se o número de votos obtidos por cada lista pelo número de mandatos a ela já atribuída mais 1.
 - A lista que obtiver o maior quociente, fica com mais um mandato.
- Recalculam-se os mandatos atribuídos e repete-se o passo anterior as vezes necessárias para atribuir a totalidade dos mandatos.

Segundo o método de Sainte Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte:

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos a atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

1.1 Utilize o método de Hagenbach-Bischof para fazer a distribuição dos mandatos.

1.2 Utilize agora o método de Sainte Laguë para fazer a distribuição dos mandatos.

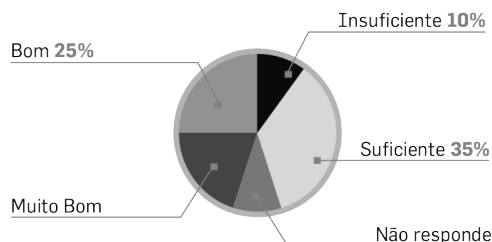
1.3 Compare os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores.

2. No âmbito da disciplina de MACS, os alunos de uma turma da Escola Secundária APRENDERMAIS desenvolveram um trabalho de projeto que incluía um estudo sobre a intenção dos jovens da sua região, que frequentavam o ensino secundário, de prosseguirem os estudos, após terminarem esse nível de ensino.

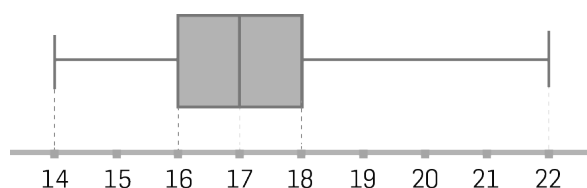
Para recolha de dados, elaboraram um inquérito e selecionaram uma amostra aleatória, constituída por 300 jovens, representativa da população em estudo.

No trabalho, incluíram gráficos e tabelas, alguns dos quais se apresentam em seguida:

- O gráfico circular, que representa os dados recolhidos quanto à autoavaliação do desempenho escolar dos alunos inquiridos



- O diagrama de extremos e quartis, que traduz os dados relativos à idade, em anos, dos alunos inquiridos



- A tabela, que apresenta alguns dados recolhidos quanto ao objetivo do estudo (conhecer a intenção dos jovens da região, que frequentavam o ensino secundário, de prosseguirem os estudos, após terminarem este nível de ensino).

Intenção de prosseguimento de estudos		Deseja	Não deseja	Total
Sexo	Feminino	130		
	Masculino		46	136
	Total			300

2.1 No gráfico circular, não constam as percentagens referentes a «Muito Bom» e «Não responde», mas, no trabalho, refere-se que a percentagem de alunos que se autoavaliaram com «Muito Bom» é o dobro da percentagem de alunos que responderam «Insuficiente».

Determine a percentagem de alunos inquiridos que não responderam à questão relativa à autoavaliação do desempenho escolar.

2.2 Com base nos dados representados no diagrama de extremos e quartis, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: «50% dos alunos inquiridos têm 18 ou mais anos de idade».

2.3 Complete a tabela.

2.4 Indique:

2.4.1 a percentagem de jovens do sexo feminino que fizeram parte deste estudo.(2c.d.)

2.4.2 a percentagem de jovens do sexo feminino que desejam prosseguir os estudos.

Adaptado de Exame Nacional de MACS 2008 (1.ª fase)

3. O gestor de um *site* em que se joga xadrez *online* decidiu estudar a evolução do número de jogadores de xadrez, desde o lançamento do site até à sexagésima semana, para o que foi registado o número de jogadores, de cinco em cinco semanas, tendo obtido a tabela seguinte:

Tempo (em semanas) (x)	Número de jogadores (em milhares) (y)
5	20
10	46
15	58
20	82
25	110
30	128
35	136
40	163
45	170
50	194
55	210
60	245

3.1 Represente o diagrama de dispersão para os dados da tabela.

3.2 Recorrendo à calculadora, determine a equação da reta de regressão linear $y = ax + b$, indicando os valores de a e de b com aproximação às centésimas.

3.3 Se o gestor do site pretendesse continuar o seu estudo, qual seria o número de jogadores na centésima semana?

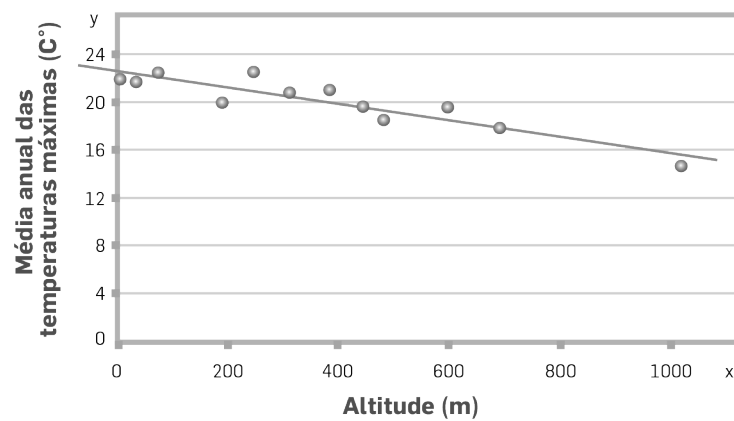
3.4 Indique o coeficiente de correlação linear(3c.d.).

Adaptado de Banco de Itens – Iave

4. As temperaturas máximas e mínimas diárias variam ao longo do ano e consoante o local onde são registadas. Os valores da temperatura dependem de características como a latitude e a altitude dos locais. Também se verificam diferenças quando se comparam conjuntos de anos distintos.

Designe por x a variável «altitude», e por y a variável «média anual das temperaturas máximas», referente aos mesmos locais, registadas num determinado período.

Na figura, apresentam-se o diagrama de dispersão que relaciona as variáveis x e y e a reta de regressão linear de y sobre x .



O valor do coeficiente de correlação linear, r , é aproximadamente igual a -0,912.

4.1 Justifique que a correlação linear existente entre as variáveis x e y é forte e negativa.

4.2 Considere a afirmação seguinte:

«O valor de r indica que, quando diminui a média anual das temperaturas máximas, a altitude diminui.»

Indique o valor lógico da afirmação anterior e interprete o valor de r no contexto da situação descrita.

Matriz do teste de avaliação 5

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	4
	Resposta extensa	7

Conteúdos

Tema 1 – Métodos de apoio à decisão

- Teoria das eleições
 - Sistema Preferencial
- Teoria da partilha equilibrada
 - Partilhas no caso discreto

Tema 3 – Modelos Matemáticos

- Modelos financeiros

Cotações

Item	1	2.1	2.2	2.3	2.4	3	4.1	4.2	4.3.1	4.3.2	4.4
Cotação	30	15	5	20	20	40	15	15	15	10	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos

Teste de avaliação N.º 5

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Num concurso de culinária, quatro concorrentes, A, B, C e D, disputam o primeiro lugar o que, para além de lhes trazer prestígio, também poderão fazer um estágio de um ano num dos melhores restaurantes do país com um dos Chefes portugueses mais conceituados. Depois de muitas «provas» de entradas, sopas, pratos principais e sobremesas, um conjunto de 50 júris apresentou os seguintes resultados:

	18 votos	15 votos	11 votos	6 votos
1.ª Preferência	A	B	C	D
2.ª Preferência	B	D	A	C
3.ª Preferência	C	C	B	A
4.ª Preferência	D	A	D	B

O método a utilizar para a escolha do vencedor será feito por sorteio e poderá ser um dos seguintes:

Método I – São eliminados todos os candidatos à exceção dos dois que reúnem maior número de primeiras preferências.

Método II – A escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- faz-se a contagem dos primeiros lugares de cada candidato e elimina-se aquele que tiver o menor número;
- reorganiza-se o esquema de preferências sem o candidato eliminado;
- faz-se novamente a contagem dos primeiros lugares de cada candidato e elimina-se o que tiver menor número;
- repete-se o processo até obter o candidato vencedor.

Método III - A escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- Seleciona-se um par de candidatos e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela apenas com os dois candidatos que constituem esse par.
- Comparam-se esses candidatos, contabilizando-se apenas a primeira linha; o candidato com o maior número de votos na primeira linha é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até terem sido comparados todos os pares de candidatos.
- Indica-se, caso exista, o candidato que ganha quando comparado com os restantes candidatos.

O concorrente B afirma: «Seja qual for o método utilizado, nunca serei o vencedor!»

Será que este concorrente tem razão?

Na sua resposta deve:

- Aplicar o Método I para determinar o candidato vencedor;
- Aplicar o Método II para determinar o candidato vencedor;

- Aplicar o Método III para determinar o candidato vencedor;
- Concluir acerca da veracidade, ou não, da afirmação do concorrente B.

2. Na tabela seguinte encontra-se os resultados das eleições autárquicas de 2013 num determinado concelho do distrito de Bragança.

Concorrentes	Número de votos	Percentagens	Mandatos atribuídos
A	2615		
B	789		
C	621		
D	60		
Em Branco	116		
Nulos	167		
Votantes	4368		
Inscritos	7124		
Total de Mandatos			5

2.1 Completa a coluna da tabela relativa às percentagens. Apresenta os resultados arredondado às centésimas.

2.2 Determina a percentagem de abstenção. Apresenta o resultado final arredondado às décimas.

2.3 Em Portugal a conversão de votos em mandatos faz-se utilizando o **método de representação proporcional de Hondt** cujo procedimento é o seguinte: divide-se o número de votos apurados por cada lista, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Faça a distribuição dos 5 mandatos, atribuídos a este concelho, pelos diferentes partidos.

2.4 Em eleições semelhantes, alguns países aplicam o método de Sainte Laguë, em vez do método de Hondt. Pelo método de Sainte Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se de forma idêntica à do método de Hondt mas os divisores utilizados são 1, 3, 5, 7, 9, etc.

Utilize o método de Sainte Laguë para fazer a distribuição dos 5 mandatos e compare estes resultados com os obtidos pelo método de Hondt.

3. O ginásio *Em Forma* contratou mais um professor de educação física e vai aumentar em 9 as aulas já existentes e decidiu questionar os seus sócios quanto às modalidades que deveriam ter mais aulas disponíveis. Foi feita uma votação estando os resultados obtidos na tabela seguinte:

Modalidade	Pilates	Ioga	BodyBalance	Power	Sh'Bam
N.º de votos	4544	3276	2767	399	238

Para fazer a distribuição das 9 aulas disponíveis, a direção do ginásio vai considerar um dos métodos seguintes:

Método I:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total votos pelo número total de aulas.
- Calcula-se a quota padrão para cada modalidade, dividindo-se o número de votos de cada modalidade pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada modalidade uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma das aulas a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número de aulas para cada modalidade é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de aulas a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada modalidade.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de aulas a distribuir.

Método II:

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total votos pelo número total de aulas.
- Calcula-se a quota padrão para cada modalidade, dividindo-se o número de votos de cada modalidade pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada modalidade uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma das aulas a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número representantes para cada modalidade é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de aulas a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota padrão modificada de cada modalidade.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de aulas a distribuir.

Qual dos métodos proporciona uma distribuição mais equilibrada do número de lugares disponíveis?

Na sua resposta deve:

- aplicar o Método I para determinar a distribuição das 9 aulas;
- aplicar o Método II para determinar a distribuição das 9 aulas;
- concluir, a partir da comparação dos resultados obtidos, qual será a distribuição mais equilibrada.

Apresente os valores dos quocientes em duas casas decimais.

4. A Margarida vai comprar um carro e já decidiu a marca e o modelo, dentro do qual há uma versão a gasolina e outra a gasóleo. Para fazer a sua opção vai ter de entrar com outras condicionantes nomeadamente, com o custo associado a uma e à outra versão. A Margarida sabe que para determinar o Imposto Sobre Veículos (ISV) terá de calcular uma componente cilindrada e uma componente ambiental.

As tabelas seguintes referem-se às duas componentes a calcular e aplica-se a todos os automóveis matriculados a partir de 1 de Janeiro de 2015. O valor do imposto corresponde à soma do resultado obtido em cada tabela.

Tabela I – Componente Cilindrada

Escalão Cilindrada (cm ³)	Taxa por cm ³	Parcela a abater
Até 1250 cm ³	1,00 €	740,5 €
Mais de 1250 cm ³	4,70 €	5 362,67 €

Tabela II – Componente Ambiental

Escalão CO ₂ (g/km)	Taxa por g/km	Parcela a abater
Gasolina		
Até 115	4,15 €	390,35 €
De 116 a 145	37,91 €	4 281,66 €
De 146 a 175	44,00 €	5 161, 20 €
De 176 a 195	111,85 €	17 047, 04 €
Mais de 195	147,69 €	24 021,60 €
Gasóleo		
Até 95	19,97 €	1 586,51 €
De 96 a 120	57,15 €	5 173,80 €
De 121 a 140	126,75 €	13 642, 70 €
De 141 a 160	140,96 €	15 684,40 €
Mais de 160	193,61 €	24 137,71 €

- 4.1** Sabendo que o carro a gasolina tem uma cilindrada 1259 cm³ e uma emissão de CO₂ de 119g/km, determine o valor do Imposto sobre veículos (ISV). Apresente o resultado arredondado às centésimas.
- 4.2** Sabendo que o carro a gasóleo tem uma cilindrada 1248 cm³ e uma emissão de CO₂ de 88g/km, calcule o valor do ISV. Apresente o resultado arredondado às centésimas.
- 4.3** A Margarida ainda terá de pagar uma taxa de IVA de 23% sobre o preço do automóvel adicionado do ISV.
- 4.3.1** Determine o valor de IVA a pagar por cada um dos automóveis, sabendo que a versão a gasolina tem um preço base de 14 850 € e a versão a gasóleo 17 600 €. Apresente o resultado arredondado às centésimas.
- 4.3.2** Qual o preço de venda ao público de cada um dos automóveis considerados? Apresente o resultado arredondado às centésimas.
- 4.4** A Margarida continua a fazer contas e fez uma previsão do gasto anual com combustível, atendendo ao número de quilómetros que faz diariamente. Assim, se o combustível for gasolina, prevê um gasto de, aproximadamente, 2100 € por ano, enquanto que, se o combustível for gasóleo, o gasto anual seria cerca de 1350 €.
- Determine ao fim de quanto tempo, a Margarida poderá começar a ver compensada a sua opção pelo carro a gasóleo, caso seja esta a sua decisão? Apresente o resultado arredondado às décimas.

Matriz do teste de avaliação 6

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	
	Resposta extensa	12

Conteúdos

Tema 2 – Estatística

- Interpretação de gráficos e tabelas;
- Representações gráficas;
- Medidas de localização;
- Reta de regressão.
- Coeficiente de correlação;

Tema 3 – Modelos matemáticos

- Impostos;

Cotações

Item	1.1	1.2.1	1.2.2	1.3	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.1	6.2
Cotação	15	10	10	20	20	10	15	20	20	20	20	20

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação N.º 6

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. As despesas de um agregado familiar com a alimentação dependem de muitos fatores. Do ponto de vista sociológico pode ser estudada a relação entre as despesas mensais com a alimentação e o rendimento mensal. Para conhecer esta relação, recolheram-se, aleatoriamente, os dados relativos a doze agregados familiares. Obtiveram-se os dados representados no diagrama de dispersão e constantes na tabela da Figura 1.

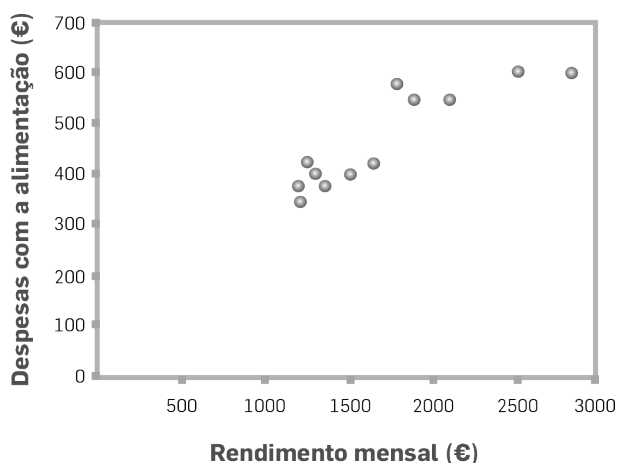


Figura 1

Agregado familiar	Rendimento mensal (€) x	Despesas com a alimentação(€) y
A	1250	425
B	2800	600
C	1900	550
D	1650	425
E	1300	400
F	1800	575
G	1200	375
H	2500	600
I	1350	375
J	2100	550
K	1200	350
L	1500	400

- 1.1 Admita que a associação entre as variáveis x e y é linear.

Classifique o tipo e o grau de associação entre as variáveis x e y , a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação.

Na sua resposta deve:

- Apresentar o valor do coeficiente de correlação, com arredondamento às décimas;
 - Classificar o tipo e o grau de associação linear entre as variáveis;
 - Justificar a forma como classificou o tipo e o grau de associação linear entre as variáveis x e y .
- 1.2 Para responder aos itens seguintes, considere a equação $y = ax + b$, da reta de regressão linear das variáveis em estudo, e também os dados da tabela.
- 1.2.1 Determine os valores de a e b , recorrendo à calculadora.
Apresente os resultados com quatro casas decimais.
- 1.2.2 Faça a estimativa do valor das despesas mensais com a alimentação de um agregado familiar cujo rendimento mensal é de €1750.
Apresente os resultados em euros, com arredondamento às unidades.
Caso não tenha respondido ao item 1.1., considere $a = 0,17505$ e $b = 177,0151$.

1.3 Considere, agora, apenas os dados relativos ao rendimento mensal dos doze agregados familiares analisados no estudo.

O António pertence ao agregado familiar indicado na tabela pela **letra B**.

Suponha que o rendimento mensal do agregado familiar do António se alterou, passando a ser de €8000. Suponha ainda que os rendimentos mensais dos outros agregados familiares indicados na tabela não se alteraram.

Num pequeno texto, comente a afirmação seguinte, tomando como exemplo os dados relativos ao rendimento mensal do agregado familiar do António:

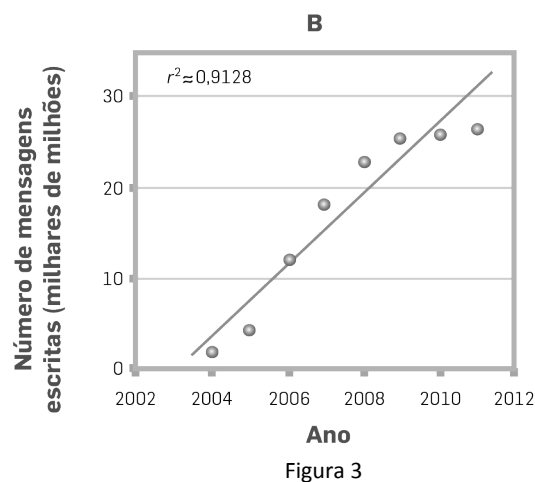
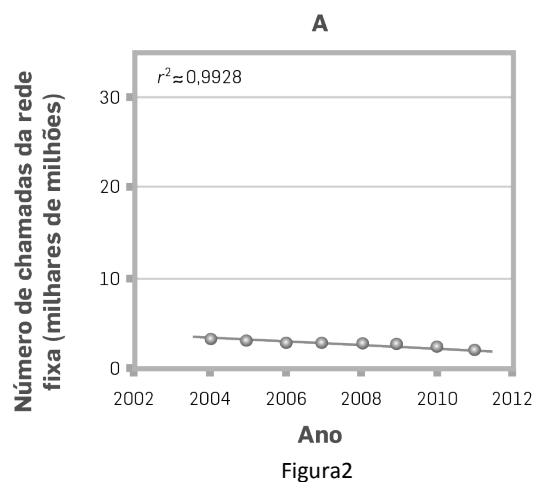
«Ao reduzir-se a informação relativa ao conjunto de dados, sob a forma de algumas medidas de localização, está a proceder-se a uma redução drástica dos dados, pelo que as medidas consideradas devem ser convenientemente escolhidas, de modo a representarem o melhor possível os dados que pretendem resumir.»

No seu texto deve incluir:

- Os valores da média e da mediana do rendimento mensal dos doze agregados familiares, antes da alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António;
- Os valores da média e da mediana do rendimento mensal dos doze agregados familiares após a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António;
- A indicação das medidas de localização que melhor representam os dados, antes e após a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António.

Exame nacional de MACS, 2009 (1.ª fase)

2. Os diagramas de dispersão das Figuras 2 e 3 apresentados foram construídos com base em dados estatísticos, divulgados pela Autoridade Nacional de Comunicações, relativos ao número de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa e ao número de mensagens escritas enviadas, no período compreendido entre 2004 e 2011.



O diagrama de dispersão da Figura 2 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

O diagrama de dispersão da Figura 3 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de mensagens escritas enviadas durante esse ano.

Em cada diagrama de dispersão, está representada a reta de regressão e indicado um valor aproximado do quadrado do coeficiente de correlação linear.

Admita que a reta de regressão representada no diagrama de dispersão da Figura 2 é definida pela equação $y = -0,1502x + 304,22$, em que x representa o ano e y representa o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

Considere as seguintes afirmações:

- A correlação linear entre variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 2 é negativa.
- A correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 2 é mais forte do que a correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 3.
- De acordo com o modelo de regressão linear apresentado, o número estimado de chamadas que se efetuariam a partir de telefones da rede fixa durante o ano de 2012 seria superior a dois milhares de milhões.

Elabore uma composição, na qual justifique a veracidade das afirmações A), B) e C).

3. Todos os alunos de uma turma do 10.º ano do Curso de Línguas e Humanidades frequentam MACS e Geografia.

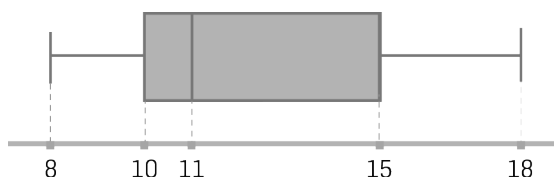
Na tabela seguinte, estão registadas as classificações, numa escala de 0 a 20 valores, obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de MACS, no final do 1.º período.

Classificação (0 a 20 valores)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N.º de alunos	4	1	1	6	2	1	1	1	2	1

3.1 Determine a média e a mediana das classificações dos alunos da turma na disciplina de MACS.

3.2 Construa um gráfico de barras para as frequências relativas acumuladas.

3.3 A figura que se segue apresenta o diagrama de extremos e quartis relativo às classificações, numa escala de 0 a 20 valores, obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Geografia, no final do 1.º período.



Designando por x as classificações obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de MACS, no final do 1.º período, e por y as classificações obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Geografia, no final do 1.º período, construiu-se o seguinte modelo de regressão linear:

$$y = 1,030504x + 1,184350, \text{ com } 9 \leq x \leq 18$$

Elabore uma pequena composição na qual compare as classificações obtidas pelos alunos, no final do 1.º período, nas disciplinas de MACS e de Geografia, justificando os factos de:

- a correlação entre as classificações obtidas pelos alunos de MACS e de Geografia ser positiva;
- a mediana das classificações obtidas pelos alunos nas disciplinas de MACS ser superior à mediana das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Geografia;

- a média das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de MACS ser superior à média, estimada a partir do modelo de regressão linear, das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Geografia.

Adaptado de *Exame Nacional de Matemática B*, 2011(época especial)

4. Os valores dos comprimentos e pesos de 12 robalos constam da seguinte tabela:

Comprimento a (em mm)	157	165	168	159	172	165	166	163	159	169	171	168
Peso p (em g)	52	61	67	60	70	65	66	62	58	72	72	68

Recorrendo à calculadora, determine o coeficiente de correlação linear entre as variáveis comprimento e peso, arredondado às centésimas.

Interprete o valor obtido, tendo em conta a nuvem de pontos que pode visualizar na calculadora.

Adaptado de *Exame Nacional de Matemática B*, 2008 (2.ª fase)

5. Os registos referentes à esperança média de vida à nascença, para homens e mulheres de países da União Europeia encontra-se na Tabela seguinte.

Esperança média de vida à nascença para homens e mulheres

PAÍSES	MULHERES (x)	HOMENS (y)
Portugal	81,7	75,5
Espanha	85,0	78,9
França	84,3	77,5
Irlanda	81,6	76,8
Reino Unido	81,7	77,6
Bélgica	83,5	77,5
Holanda	82,3	78,3
Alemanha	82,4	77,2
Itália	84,1	78,8
Grécia	82,5	77,5

Os valores relativos à Áustria não se encontram nesta tabela.

Considere que os valores da esperança média de vida à nascença para homens e mulheres referentes à Áustria seguem o modelo de regressão linear obtido a partir dos dados da tabela. Estime o valor da esperança média de vida de um homem austríaco sabendo que a da mulher é 83 anos.

Apresente os valores dos parâmetros da reta de regressão linear com, pelo menos seis casas decimais. Apresente o resultado final arredondado às décimas.

- 5.1** Em 2014, o rendimento global de dois contribuintes casados da Madeira, o Marcelino e a Francisca, foi de €52 450, dado que os rendimentos do Marcelino foram de €25 700 e os da Francisca €26 750.

Determine o correspondente valor de IRS que este casal pagou, relativo ao ano de 2014, admitindo que não houve quaisquer deduções a fazer à coleta.

- 5.2** Em Dezembro de 2014, o Francisco e a Maria verificaram que o rendimento global do casal, nesse ano, era de €39 200. Foi-lhes proposto prestarem um serviço no Natal desse ano, pelo que receberiam a quantia de €750 cada um. O Francisco, após consultar as tabelas de IRS, resolveu não aceitar o serviço, dizendo à Maria que não queria perder dinheiro.

Escreva um pequeno texto mostrando que o Francisco não tem razão. Apoie os seus argumentos em cálculos do IRS, com e sem prestação do referido serviço. Suponha que o casal não estava sujeito, naquele ano, a quaisquer deduções à coleta.

Nome _____ Turma _____ N.º _____

1. Os alunos da escola de Penha Alta estudam a aplicação dos métodos eleitorais e de partilha a várias situações.

1.1 Os métodos eleitorais procuram garantir a representação proporcional. No entanto, a atribuição de mandatos segundo o método de Hondt pode ter um resultado diferente da atribuição de mandatos segundo o método de Saint-Laguë.

Na tabela abaixo, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas de cada um dos cinco partidos mais votados na eleição dos representantes para a assembleia municipal de Penha Alta.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Partido	A	B	C	D	E
N.º de votos	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451

Na eleição dos representantes para a assembleia municipal, são atribuídos 15 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral de Penha Alta.

A conversão de votos em mandatos, utilizando o **método de representação proporcional de Hondt** faz-se dividindo o número de votos apurados por cada lista, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Segundo o **método de Saint-Laguë**, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte:

- divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Determine as diferenças entre os números de mandatos atribuídos às listas dos cinco partidos mais votados no círculo eleitoral de Penha Alta resultantes da aplicação do método de Hondt e da aplicação do método de Saint-Laguë.

Caso proceda a arredondamentos, conserve uma casa decimal.

1.2 A direção da associação de estudantes da escola de Penha Alta decidiu inquirir os alunos da escola sobre a cor da bandeira da associação. Os alunos podem escolher de entre as cores seguintes: amarelo (A), vermelho (V) e castanho (C).

Cada aluno deve ordenar, uma única vez, as três cores, de acordo com as suas preferências.

A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados 430 votos válidos.

Na tabela seguinte, encontram-se organizados os resultados obtidos:

	150 votos	180 votos	100 votos
1. ^a preferência	Castanho	Amarelo	Castanho
2. ^a preferência	Amarelo	Vermelho	Vermelho
3. ^a preferência	Vermelho	Castanho	Amarelo

O Manuel afirma que a falta de indicação do método a usar no apuramento da cor vencedora pode inviabilizar o processo de escolha da cor, pois, aplicando o método A ou o método B, a cor vencedora não será a mesma.

Método A:

- Seleciona-se um par de cores e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela, semelhante à dada, apenas com os votos nas duas cores que constituem esse par.
- Comparam-se essas cores, contabilizando-se apenas a primeira linha; a cor com o maior número de votos na primeira linha é a vencedora do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até uma das cores ter vencido as comparações com as restantes cores.
- Indica-se a cor vencedora.

Método B:

- Na ordenação das cores, cada primeira preferência recebe, em cada voto, tantos pontos quantas as cores em votação.
- Cada segunda preferência recebe, em cada voto, menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência, em cada voto, um ponto.
- É escolhida a cor com maior número de pontos.

Mostre, aplicando ambos os métodos, que o Manuel tem razão

2. Dois sócios Lígia e Mário, decidem resolver o contrato empresarial que detêm para seguir rumos diferentes. Para isso têm de fazer a divisão dos bens da empresa: um escritório, mobiliário e material informático. Decidem fazê-lo usando o método do ajuste na partilha.

Segundo o método do ajuste na partilha, a escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- Definir claramente os itens a dividir.
- Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir pelos itens.
- Cada item é atribuído (temporariamente) ao interveniente que mais o valorizou (em caso de empate é atribuído ao que tiver menos pontos).
- Faz-se um balanço:
 - se ambos tiverem o mesmo número de pontos a partilha está feita;
 - se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais, transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos.

- A transferência: calculam-se os quocientes

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial}}{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial}}$$

e colocam-se por ordem decrescente.

- Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.
- Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Definidos os itens a dividir (escritório, mobiliário e material informático) sabe-se que a distribuição dos 100 pontos de cada um dos sócios pelos itens foi a seguinte:

	Lígia	Mário
Escritório	40	30
Mobiliário	30	20
Material Informático	30	50

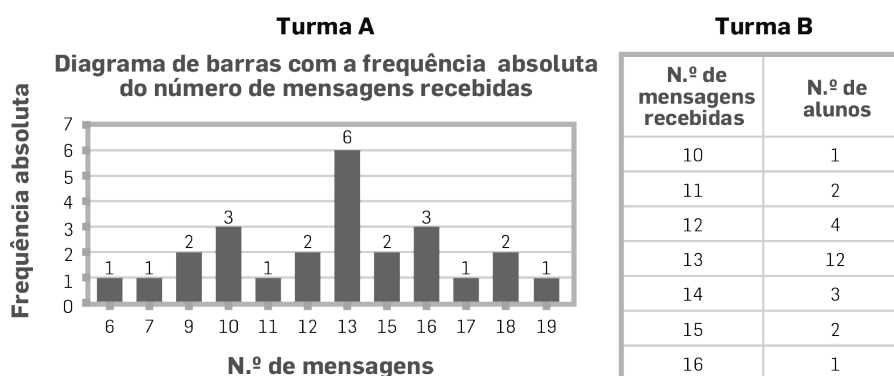
2.1 Qual é a atribuição inicial (temporária) dos bens da empresa?

2.2 Tendo em atenção a atribuição inicial, quantos pontos tem cada sócio?

2.3 Determine as transferências que são necessárias efetuar para que os sócios fiquem com igual número de pontos. Como será feita a partilha dos bens?

2.4 Com quantos pontos fica cada sócio no final da partilha?

- 3.** Na escola da Marta, o professor de MACS resolveu questionar os alunos de duas turmas distintas sobre o número de mensagens que cada aluno recebeu, num sábado, no telemóvel. Os resultados obtidos encontram-se representados num diagrama de barras, os da Turma A, e numa tabela, os da Turma B.



3.1 Considere os dados referentes à Turma B para responder aos itens seguintes.

3.1.1 Determine as frequências relativas simples e as frequências relativas acumuladas do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, nesse sábado.

Apresente as frequências com duas casas decimais.

3.1.2 Represente, num diagrama de barras, os dados relativos às frequências absolutas.

3.2 Num trabalho para a disciplina de MACS, depois de ter calculado a média e o desvio padrão do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, para cada uma das turmas, a Marta comentou:

«A média do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A e a média do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma B são iguais, mas o mesmo não acontece com o desvio padrão.»

O António, aluno da turma da Marta, com quem ela estava a tratar os dados, comentou:

«Quando me disseste que as médias eram iguais, eu, observando as representações gráficas, concluí logo que os desvios padrão eram diferentes.»

Num pequeno texto, apresente as médias e os desvios obtidos e justifique o raciocínio do António.

No seu texto deve:

- Indicar o valor da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas, do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A;
- Indicar o valor da média e o do desvio padrão do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma B
- Incluir a justificação do raciocínio do António.

4. O senhor Jerónimo e o senhor Manuel depositaram, cada um, a quantia de €25 000,00 em contas em duas instituições financeiras diferentes, A e B, respetivamente.

Os depósitos evoluíram como se apresenta nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1	
Evolução do depósito do senhor Jerónimo (Instituição A)	A_n
A_0 : Capital depositado no final de 2010	€25 000,00
A_1 : Capital acumulado no final de 2011	€25 625,00
A_2 : Capital acumulado no final de 2012	€26 265,63
A_3 : Capital acumulado no final de 2013	€26 922,27
A_4 : Capital acumulado no final de 2014	€27 595,32

Tabela 2	
Evolução do depósito do senhor Manuel (Instituição B)	B_n
B_0 : Capital depositado no final de 2010	€25 000
B_1 : Capital depositado no final de 2011	€25 700
B_2 : Capital depositado no final de 2012	€26 400
B_3 : Capital depositado no final de 2013	€27 100
B_4 : Capital depositado no final de 2014	€27 800

4.1 O senhor Jerónimo decidiu prolongar a permanência do capital depositado na sua conta na instituição A, nas mesmas condições, por mais três anos.

Determine o capital acumulado no final de 2017.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

4.2 Em conversa com o senhor Manuel, o senhor Jerónimo afirmou que:

«Comparando as duas instituições financeiras, nas mesmas condições de evolução dos depósitos apresentadas nas tabelas 1 e 2, se nos primeiros anos a instituição B é a melhor escolha para obter o máximo capital acumulado, a partir de certa altura, a instituição A torna-se mais vantajosa.»

Justifique a veracidade da afirmação anterior para um novo depósito de €25 000, numa nova conta, no final de 2016, a partir da representação gráfica dos modelos de evolução dos depósitos nas duas instituições financeiras A e B.

5. Consultando um site de emprego, o Francisco reparou no seguinte anúncio:

Somos uma empresa multinacional que atua na área de controlo de vapor e outros fluidos industriais. Pretendemos admitir colaborador para o setor industrial, ficando responsável pela promoção dos serviços e produtos da empresa, bem como pela elaboração e acompanhamento de propostas, selecionando e dimensionando as soluções técnicas mais ajustadas.

Perfil do candidato:

- Formação superior na área de engenharia;
- Bons conhecimentos de Informática;
- Bons conhecimentos de Inglês e de Castelhana.

Oferecemos possibilidade de escolha entre dois contratos:

Contrato 1:

- Remuneração no 1.º ano: 1800€/mês;
- Aumento anual de 150€.

Contrato 2:

- Remuneração no 1.º ano: 1600€/mês;
- Aumento semestral de 5%.

Enviar *curriculum vitae* para o email m@cs.

Qual dos dois contratos é mais favorável para o Francisco?

Complete a tabela (quando necessário, arredonde os valores às centésimas):

	Remunerações mensais	
	Contrato 1	Contrato 2
1.º ano		
2.º ano		1.º semestre
		2.º semestre
3.º ano		1.º semestre
		2.º semestre
4.º ano		1.º semestre
		2.º semestre
5.º ano		1.º semestre
		2.º semestre
6.º ano		1.º semestre
		2.º semestre

Na sua resposta deve:

- Calcular o valor total das remunerações a receber pelo Francisco, se optar pelo Contrato 1, durante os três primeiros anos;
- Calcular o valor total das remunerações a receber pelo Francisco, se optar pelo Contrato 2, durante os três primeiros anos;
- Concluir qual a melhor opção ao fim de seis anos.

Teste Global – Critérios de correção

Teste Global – critérios de correção	
1.	40 pontos
1.1	20 pontos
Apresentar a distribuição dos 15 mandatos pelos partidos A, B, C, D, E, utilizando o método de Hondt	11 pontos
Dividir o número de votos do Partido A por 2, por 3, por 4 e por 5	4 pontos
Dividir o número de votos do Partido B por 2 e por 3	2 pontos
Dividir o número de votos do Partido D por 2	1 ponto
Dividir o número de votos do partido E por 2	1 ponto
Indicar os mandatos	1 ponto
Apresentar a distribuição dos 15 mandatos pelos partidos A, B, C, D, E, utilizando o método de Sainte-Laguë	7 pontos
Dividir o número de votos do partido A por 7	1 ponto
Dividir o número de votos do partido B por 5	1 ponto
Dividir o número de votos do partido C por 5	1 ponto
Dividir o número de votos do partido D por 3 e por 5	2 pontos
Dividir o número de votos do partido E por 3	1 ponto
Indicar os mandatos	1 ponto
Concluir	2 pontos
1.2	20 pontos
Aplicar o método A	7 pontos
Comparar amarelo com castanho	3 pontos
Apresentar o número de votos em amarelo na 1. ^a linha (180)	1 ponto
Apresentar o número de votos na 1. ^a linha (250)	1 ponto
Indicar que o castanho é o vencedor	1 ponto
Comparar vermelho com castanho	3 pontos
Apresentar o número de votos em vermelho na 1. ^a linha (180)	1 ponto
Apresentar o número de votos em castanho na 1. ^a linha (250)	1 ponto
Indicar que o castanho é o vencedor	1 ponto
Indicar a cor vencedora (castanho)	1 ponto
Aplicar o método B	13 pontos
Determinar o número de pontos de amarelo (940)	3 pontos
Determinar o número de pontos de castanho (930)	3 pontos
Determinar o número de pontos de vermelho (710)	3 pontos
Indicar a cor vencedora (amarelo)	1 ponto
Concluir	3 pontos
2.	45 pontos

2.1			8 pontos					
Indicar os bens (temporários) da Lígia			5 pontos					
Indicar os bens (temporários) do Mário			3 pontos					
2.2			6 pontos					
Indicar o número de pontos (inicial) da Lígia			3 pontos					
Indicar o número de pontos inicial do Mário			3 pontos					
2.3			25 pontos					
Calcular os quocientes para a transferência			6 pontos					
Justificar qual o item para fazer a transferência			3 pontos					
2.4			6 pontos					
Indicar o número de pontos (final) da Lígia			3 pontos					
Indicar o número de pontos (final) do Mário			3 pontos					
3.			45 pontos					
3.1			20 pontos					
3.1.1			10 pontos					
Determinar as frequências relativas simples			5 pontos					
Determinar as frequências relativas acumuladas			5 pontos					
3.1.2			10 pontos					
Identificar corretamente os eixos coordenados			2 pontos					
Manter a largura das barras			4 pontos					
Desenhar corretamente a altura das barras			4 pontos					
3.2			25 pontos					
Para que a resposta possa ser considerada correta e complete, deve estar de acordo com os seguintes pontos:								
1. indicar o valor da média e do desvio padrão do número de mensagens recebidas pelo conjunto de alunos da turma A;								
2. indicar o valor da média e o do desvio padrão de número de mensagens recebidas pelo conjunto de alunos da turma B;								
3. justificar o facto de, na turma B, o número de mensagens recebidas estar mais concentrado em torno da média do que na turma A								
A classificação faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.								
Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina.			Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis		
			1	2	3			
Níveis	3	Apresentar corretamente três pontos.				22	23	25
	2	Apresentar corretamente dois pontos.				14	15	17
	1	Apresentar corretamente um ponto.				6	7	9

4.	35 pontos
4.1	10 pontos
Calcular o capital acumulado no final de 2015	3 pontos
Calcular o capital acumulado no final de 2016	3 pontos
Calcular o capital acumulado no final de 2017	3 pontos
Resposta	1 ponto
4.2	25 pontos
Escrever uma expressão que modela o depósito na instituição A	5 pontos
Escrever uma expressão que modela o depósito na instituição B	5 pontos
Reproduzir os gráficos da calculadora	5 pontos
Indicar a janela de visualização utilizada	5 pontos
Indicar o ano a partir do qual a instituição A se torna mais vantajosa	5 pontos
5.	35 pontos
Completar, na tabela, as remunerações do contrato 1	5 pontos
Completar, na tabela, as remunerações do contrato 2	10 pontos
Determinar o total das remunerações, ao fim de 3 anos, pelo contrato 1	5 pontos
Determinar o total das remunerações, ao fim de 3 anos, pelo contrato 2	10 pontos
Concluir qual a melhor opção ao fim de 6 anos	5 pontos

Fichas de trabalho

Ficha 1

1.1 74

1.2 B (36,49 %)

1.3 B (60,81 %)

1.4 B

1.5 Não.

2.1 B (Maioria simples).

2.2 Não. Entre A e B vence A, entre A e C vence C e entre B e C vence B.

2.3 Paradoxo de Condorcet.

3.1 90

3.2 Presidente – A (38,89%). Vice-presidente – B (33,33%).

3.3 Presidente – B. Vice-presidente – C.

3.4 Presidente – D. Vice-presidente – C.

5.1 Dinis.

5.2 H e L. H não votou em ninguém e L votou em todos os candidatos.

Ficha 2

1.1 Sim. Havana.

1.2 Sim. Orlando.

1.3 Havana. 41,03%

1.4 Cancún. 7,69%

1.5 Orlando. 47,44%

1.6 Rio de Janeiro. 1,28%

1.7 Havana. 43 votos.

1.8 Rio de Janeiro. 9 votos.

1.9 Orlando. 43 votos.

1.10 Havana. Maioria simples. 41,03%

1.11 Rio de Janeiro (247 pontos).

1.12 Havana.

2.1 720

2.2 A: 23,64% B: 18,18% C: 16,97% D: 20% E: 21,21% F: 0%

2.3 A

2.4.1 E 2.4.2 B 2.4.3 C 2.4.4 Não há.

2.5 C

Ficha 3

1.1

Contagem dos pontos		Pontuação total
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	213
Rui	$40 \times 3 + 45 \times 1 + 38 \times 2$	241
Luís	$40 \times 2 + 45 \times 2 + 38 \times 3$	284

O vencedor é o Luís.

1.2.1 Comparação da votação do Rui com a votação do Luís:

Preferências	Votos		
1. ^a	Rui	Luís	Luís
2. ^a	Luís	Rui	Rui
Total	40	45	38

Vence o Luís.

Comparação da votação do João com a votação do Luís:

Preferências	Votos		
1. ^a	Luís	João	Luís
2. ^a	João	João	João
Total	40	45	38

Vence o Luís.

1.2.2 O Luís vence qualquer um dos outros dois candidatos em confronto direto: vence o Rui com 83 votos contra 40 e vence o João com 78 votos contra 45.

1.3.1 O Luís.

1.3.2 O Rui. 63,4%

Ficha 4

1.1

Partidos	Número de votos	Percentagem	Mandatos atribuídos
I	1642	36,66	2
PS	1043	23,29	1
PPD/PSD	831	18,55	1
PCP - PEV	791	17,66	1
Em Branco	101	2,25	
Nulos	71	1,59	
Votantes	4479	70,75	
Inscritos	6349		
Total de Mandatos			5

1.2

Partidos	Número de votos	Percentagem	Mandatos atribuídos
PPD/PSD.CDS/PP	28 004	42,72	6
PS	14 140	21,57	3
PCP - PEV	7 366	11,24	1
I	4 985	7,60	1
B.E.	2 997	4,57	0
PTP	901	1,37	0
PPM/PPV/PND	629	0,96	0
PCTP/MRPP	576	0,88	0
Em Branco	3592	5,48	
Nulos	2359	3,60	
Votantes	65 549	37,99	
Inscritos	172 537		
Total de Mandatos			11

1.3

Partidos	Número e votos	Percentagem	Mandatos atribuídos
PPD/PSD	5760	48,52	4
CDS/PP	3903	32,88	2
PS	1331	11,21	1
PCP - PEV	238	2,00	0
Em Branco	367	3,09	
Nulos	273	2,30	
Votantes	11 872	52,41	
Inscritos	22 651		
Total de Mandatos			7

Ficha 5

1.1

Regiões	N.º de praticantes (P)	Quota padrão (P:DP)	Quota inferior (QI)	Parte decimal
Minho	561	12,75	12	0,715
Beiras	345	7,820	7	0,820
Alentejo	120	2,720	2	0,720
Ribatejo	870	19,720	19	0,720
Algarve	310	7,026	7	0,026
	2206	Número total de praticantes (TP)		
	50	Representantes a distribuir (R)		
		Divisor Padrão (DP = TP : R)		

1.2

Regiões	N.º de representantes
Minho	12
Beiras	8
Alentejo	3
Ribatejo	20
Algarve	7

2.1.1

Regiões	N.º de praticantes (P)	Quota padrão (P:DP)	Quota inferior (QI)	Parte decimal
Minho	561	12,728	12	0,728
Beiras	345	7,828	7	0,828
Alentejo	120	2,723	2	0,723
Ribatejo	870	19,739	19	0,739
Algarve	310	7,033	7	0,033
Madeira	130	2,950	2	0,950
	2336	Número total de praticantes (TP)		
	53	Representantes a distribuir (R)		
	44,075	Divisor Padrão (DP = TP : R)		

2.1.2 Exemplo de resposta: a inclusão da região autónoma da Madeira fez com que o número total de representantes na assembleia geral subisse de 50 para 53. Uma vez que divisor padrão não sofre uma grande alteração (passa de 44,120 para 44,075), podemos afirmar que 53 é um número de representantes aceitável.

A distribuição de representantes passa a ser:

Regiões	N.º de representantes
Minho	13
Beiras	8
Alentejo	2
Ribatejo	20
Algarve	7
Madeira	3
Total	53

Se compararmos com a distribuição anterior:

Regiões	N.º de representantes	
	Antes	Após
Minho	12	13
Beiras	8	8
Alentejo	3	2
Ribatejo	20	20
Algarve	7	7
Madeira	–	3
Total	50	53

Podemos observar que, com a entrada da Madeira, a região do Minho ganha mais um representante enquanto a região do Alentejo perde 1, apesar de ter uma quota padrão quase igual à anterior (antes 2,720, agora 2,723). Assim, a região do Alentejo fica prejudicada com a entrada da Madeira

3.1

Partidos	N.º de votos	%	Mandatos atribuídos
A	5514	42,44	4
B	3104	23,89	2
C	2275	17,51	1
D	1377	10,60	0
E	111	0,85	0
Em Branco	352	2,71	
Nulos	258	1,99	
Votantes	12 991	59,95	
Inscritos	21 668		
Total de Mandatos			7

3.2 40,05 %

3.3 A: 3 mandatos; B: 2 mandatos; C: 1 mandato; D: 1 mandato

3.4 Com o método de Sainte-Laguë o partido D conseguiria um mandato e o partido mais votado, A, perderia um mandato. Podemos dizer que este método beneficia os pequenos partidos.

Ficha 6

1. A – 2, B – 4, C – 8, D – 6, E – 5

2.1.1 A – 7, B – 5, C – 9, D – 1, E – 3

2.1.2 A – 7, B – 5, C – 9, D – 1, E – 4

2.1.3 A – 8, B – 6, C – 9, D – 1, E – 3

2.2 O aumento de lugares de 26 para 27 fez com que o Estado E perdesse um lugar.

3.1.1 Alabama – 8, Texas – 9, Ilínois – 18.

3.1.2 Alabama – 7, Texas – 10, Ilínois – 19.

3.2 Com o aumento de um lugar na Câmara dos Representantes, o Estado de Alabama perdeu um representante.

4.1 A – 10, B – 3, C – 6, D – 1

4.2 A – 11, B – 3, C – 7, D – 0

5.1 A – 5, B – 6, C – 7, D – 12

5.2 A – 5, B – 6, C – 7, D – 12

6.1 D.P. = 98,039

6.2 Q.P.(A) = 5,1; Q.P.(B) = 10,2; Q.P.(C) = 15,3; Q.P.(D) = 20,4

6.3 A – 5, B – 10, C – 15, D – 21

6.4 Não é possível, porque havia lugares a mais.

6.5 O número de lugares distribuídos diminui.

6.6 O número de lugares distribuídos aumenta.

6.7 Não podemos utilizar o Método de Adams para fazer esta distribuição.

Ficha 7

1.1

Estado	A	B	C	D
População	59 400	8850	134 550	97 200
Quota	39,6	5,9	89,7	64,8

1.2.1 A – 40, B – 6, C – 89, D – 65

1.2.2 A – 40, B – 6, C – 89, D – 65

2.1 A – 11, B – 3, C – 7, D – 1, E – 9, F – 5

2.2 A – 10, B – 3, C – 7, D – 2, E – 9, F – 5

2.3 A – 10, B – 3, C – 8, D – 1, E – 9, F – 5

3.1

Estado	U	V	X	Y	Z	W
População	6733	557	1446	988	2081	685

3.2 D.P. = 50 000

3.3.1 U – 136, V – 11, X – 29, Y – 19, Z – 42, W – 13

3.3.2 U – 133, V – 12, X – 29, Y – 20, Z – 42, W – 14

3.3.3 U – 134, V – 11, X – 29, Y – 20, Z – 42, W – 14

4.1 26 lugares.

4.2 D.P. = 915,38

4.3 A – 6572, B – 4814, C – 8294, D – 1082, E – 3038

4.4.1 A – 7, B – 5, C – 9, D – 1, E – 4

4.4.2 A – 7, B – 5, C – 10, D – 1, E – 3

4.4.3 A – 7, B – 5, C – 9, D – 2, E – 3

5.1 Pedro: vale € 300 000; justo a receber: € 100 000. Rita: vale € 300 000; justo a receber: € 100 000. Sofia: vale € 270 000; justo a receber: € 90 000.

5.2 Pedro: terreno e recebe € 6666,67. Rita: apartamento e paga € 103 333,33. Sofia: recebe € 96 666,67.

Ficha 8

1. Partidos A, B e D: 3 mandatos cada; partidos C e E: 0 mandatos cada.

2. Nuno: 285 pontos; Pedro: 260 pontos; Inês: 235 pontos; Ana: 170 pontos. Vence o Nuno.

3. Nuno: 40 votos; Pedro: 55 votos. Vence o Pedro.

4.1 Raquel: cão, gato e 30% do papagaio. Tiago: aquário e 70% do papagaio.

4.2 Raquel e Tiago: 61 pontos (cada).

Ficha 9

2.1 Não. Porque ele parte o bolo em partes que considera iguais.

2.2.1 F3

2.2.2 Podem juntar as fatias e um divide e o outro escolhe.

2.2.3 Não. Porque cada um dos jogadores escolheu a fatia que achou maior.

3.1 Escolher aleatoriamente quem é o selecionador.

3.2 Dividir o bolo em duas partes que considerem iguais e cada um escolhe uma. Em seguida, cada um divide a sua parte em três fatias que considere iguais. O selecionador escolhe uma das partes de cada um dos divisores.

3.3 Porque um deles parte em duas partes que considera iguais, o outro escolhe a que considera melhor.

3.4 Porque ficam com as partes que eles cortaram.

4.1 Pedro fica com T1, Miguel fica com T3 e João fica com T2.

4.2 Pedro fica com T1, Miguel fica com T2 e João fica com T3.

4.3 João fica com T1; juntam-se novamente T2 e T3 e um divide e o outro escolhe.

5.1 O jogador 1 fica com F3, o jogador 2 fica com F1 e o jogador 3 fica com F2.

5.2 O jogador 1 fica com F1, o jogador 2 fica com F3 e o jogador 3 fica com F2.

6.1 C 6.2 A 6.3 B 6.5 Não. 6.4 A

7.1 Parte uma fatia que ela considera ser 1/5 da piza.

7.2 Ana.

7.3 Berta.

7.4 Dina.

7.5 Berta.

7.6 Berta.

7.7 Cátia e Eva. Uma divide e a outra escolhe.

Ficha 10

1.1 Procurar informação para trabalhos escolares.

1.2 Em 2005 – ler jornais, revistas ou livros. Em 2008 – pesquisar informação sobre saúde.

1.3 Jogar/fazer download de jogos, imagens, música, vídeo.

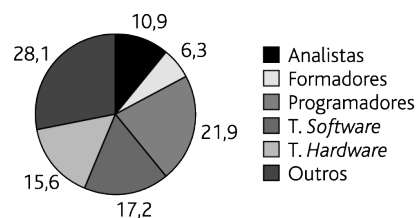
1.4 Pesquisar informação sobre saúde.

1.5 638 jovens.

2.1 Técnicos de software – 11

2.2 Analistas – 10,94%; Formadores – 6,25%; Programadores – 21,88%; Técnicos de software – 17,19%; Técnicos de hardware – 15,63%; Outro pessoal técnico – 28,13%

2.3



3.1 Representa o número de pessoas infetadas por VIH e Sida, e número de óbitos ocorridos no Hospital de S. João, no Porto, entre 1985 e 2006.

3.2 Aumentou até 1998 e a partir daí tem vindo a diminuir.

3.3 Em 1998.

3.4 Em 2000.

3.5 Em 1995.

3.6 Em 2004.

3.7 Em 1998. Aproximadamente, 350.

Ficha 11

1.1.1 A barra da Polónia tem cerca de 3 vezes o comprimento de barra correspondente a Portugal e a pontuação obtida pela Polónia não chega a 1,5 vezes a pontuação obtida por Portugal.

1.1.2 As escalas não começam em zero.

1.1.3 Comprimento das barras: Portugal (10 cm), Alemanha (16,75 cm), Bélgica (14 cm), Eslováquia (15,625 cm), Itália (11,75 cm).

2.1 137 mm (aprox.)

2.2.2 9,2 mm/h (aprox.)

Ficha 12

1.1 População – todos os soldados no Afeganistão; Dimensão – 56420; Variável – nacionalidade dos soldados.

1.2 Gráfico de barras;

1.3 2350 soldados;

1.4 27450 soldados europeus;

1.5 EUA

1.6 21,43%; 79,09%.

2.1.1 Suécia;

2.1.2 Áustria;

2.1.3 63%

2.1.4 Luxemburgo

2.2.1 Aprox. 6524354

2.2.2 Aprox. 2899713

3.1 Época 2003/2004

3.2 2001/2002 e 2005/2006; 2004/2005

3.3 2008/2009

3.4 Não

FICHA 13

1.1 Os 2000 alunos de um clube desportivo.

1.2 As modalidades. Qualitativa.

1.3 Um aluno do clube.

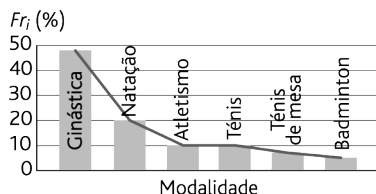
1.4 2000

1.5 Badminton – 100, Ténis de Mesa – 140, Ténis – 200

Atletismo – 200, Natação – 400, Ginástica – 960.

Modalidade	f_i
Badminton	100
Ténis de mesa	140
Ténis	200
Atletismo	200
Natação	400
Ginástica	960

1.6



1.7 Badminton – 180; Ténis de mesa – 25,20; Ténis – 360

Atletismo – 360; Natação – 720; Ginástica – 172,80

1.9 Ginástica.

1.10.1 Badminton – 8, Ténis de Mesa – 11, Ténis – 16, Atletismo – 16, Natação – 32, Ginástica – 77.

1.10.2 Badminton – 8, Ténis de Mesa – 11, Ténis – 16, Atletismo – 16, Natação – 32, Ginástica – 77.

1.10.3 Badminton – 8, Ténis de Mesa – 12, Ténis – 16, Atletismo – 16, Natação – 32, Ginástica – 76.

1.10.4 Badminton – 8, Ténis de Mesa – 11, Ténis – 16, Atletismo – 16, Natação – 32, Ginástica – 77.

1.10.5 Badminton – 8, Ténis de Mesa – 11, Ténis – 16, Atletismo – 16, Natação – 32, Ginástica – 77.

2.1 Mulheres residentes no concelho.

2.2 920

2.3

N.º de filhos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i (%)	32,39	18,59	24,89	12,72	6,41	2,61	1,41	0,76	0,22
F_i (%)	32,39	50,98	75,87	88,59	95	97,61	99,02	99,78	100

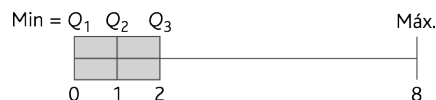
2.4 24,13%

2.5 898

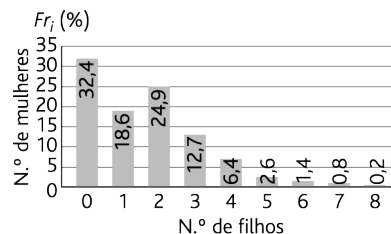
2.6 1,61

2.7 $Q_1 = 0$, $x \sim 1$, $Q_3 = 2$

2.8 Maior concentração de dados entre 0 e 2.



2.9 Assimétrica positiva.



2.10 $s \approx 1,56$. 56,2%

2.11 $A_q = 2$. $h = 8$

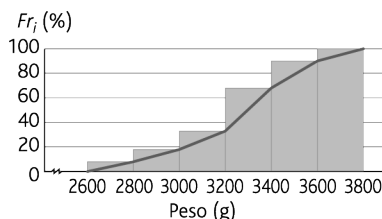
3.1 948

Ficha 14

1.1 25

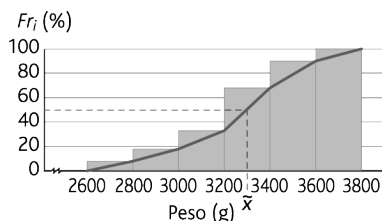
1.2 66,7%

1.3

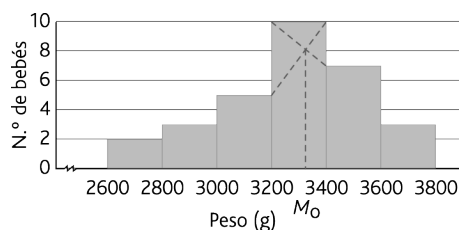


1.4 Classe mediana: [3200, 3400[; Classe modal:[3200, 3400[

Localização geométrica da mediana



Localização geométrica da moda



1.5 [2800, 3000[

1.6 3273,3 g

1.7 $s = 271,56$

1.8 65,84%

1.9 É aproximadamente normal. A percentagem de bebés cujo peso pertence a $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$ é, aproximadamente, 68%.

2.1 5 classes de amplitude 4,5.

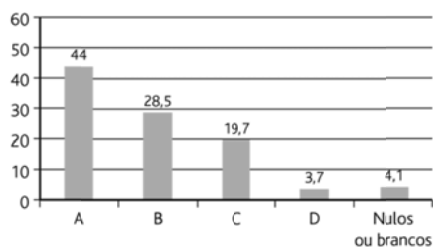
2.2

Classes	f_i	$Fr_i(\%)$
[70; 74,5[	1	5
[74,5; 79[	4	20
[79; 83,5[	6	30
[83,5; 88[	4	20
[88; 92,5[	5	25

2.3 83,05 min

3. $\bar{x} = 15$, $s = 1,4$

4.1



4.2 Reeleito

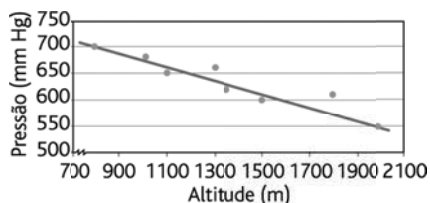
4.3 Sem coligações: A – 4 mandatos, B – 2 mandatos e C – 1 mandato.

Com B e C formando coligação: A – 3 mandatos; e coligação

B + C – 4 mandatos.

Ficha 15

1.1



1.2 Correlação negativa.

1.3 G (1356,25 ; 633,75).

1.4 650 mm Hg

2.1 210

2.2 115

2.3 45,24%

2.4 57. 27,14%

2.5 43

2.6 42,86%

3. $r_1 - C$, $r_2 - E$, $r_3 - F$, $r_4 - D$, $r_5 - B$, $r_6 - A$

Ficha 16

1.1 91,92 €

1.2 5,51 €

2.1 238,75 €

2.2 293,66 €

3.1 68,37 €

3.2 11,32 €

3.3 8,25 €

3.4 Diferença: 3,07 €

4.1 5%

4.2 145 300 €

5.1 185 200 €

5.2 3432,3 €

5.3 O do Tiago.

6.1 4704 €

6.2 43 678,53 €

7. Situação A – 22 662,52 €

Situação B – 18 108,30 €

8. Proposta A: 9440 €; Proposta B: 9625 €.

É melhor aceitar a proposta B, pois o que se paga a mais de IRS compensa a diferença entre as propostas.

9. 1,21 €

10.1 Itália: 1,95% ; Irlanda: -0,91%.

10.2 94,59 €

10.3 118,49 €

Ficha 17

1.1 8776,25 €

1.2 11 359,6 €

2. 691,27 €

3.1 67 055,81 €

3.2 354 555,81 €

4.1 147,26 €

4.2 2478,6 €

4.3 7068,48 €

5.1 552,97 €

5.2 970,3 €

5.3 552,97 €

5.4 1027,21 €

5.5 291 090 €. Diferença de 36 centímetros, devido aos arredondamentos.

6.1 € 139,67

6.2.1 € 2,64

6.2.2 € 125,2

6.3.1 € 2,45

6.3.2 € 109,04

7.1 € 12,352

7.2 2261

7.3 Não. Ficou com € 4,81.

7.4 € 36 691,73

7.5 € 8763,86

Teste de diagnóstico

1.1 5

1.2 6

1.3 30

2.1 25%

2.2 70%

2.3 60%

3. Promoção B. Gasta 84 euros. Desconto de 10 euros no manual e 25% no Atlas.

4. Aumento de 20%.

5. 33,33%

6. 42,85%

7. 478,38€

8. 50€

9. 30%

10. (C)

11.1 50 alunos da licenciatura de Cinema, Vídeo e Comunicação Multimédia.

A variável é a frequência com que acede à internet. Quantitativa discreta.

11.2

Dias por semana	Percentagem	Número de alunos
3	2	1
4	2	1
5	14	7
6	6	3
Todos	76	38
Total	100	50

11.3 Todos os dias.

11.4 4 alunos.

11.5 98%

11.6 18 alunos.

Testes de avaliação

Teste 1

1.1 3683€

1.2 2651,76€

1.3.1 14%

1.3.2

Modalidade desportiva	Ténis de mesa	Natação	Basquetebol	Voleibol	Futebol
Percentagem de inscritos	14	16	34	12	24
Verba atribuída	1546,86€	1767,84€	3756,66€	1325,88€	2651,76€

1.4 Ténis: 175; Natação: 200; Basquetebol: 425; Voleibol: 150; Futebol: 300.

2.1 Luís.

2.2.1 Sónia: 35,7%; Luís: 32,4%; Miguel: 32,4%;

2.2.2 Sónia. Maioria simples.

3.1 170

3.2 A: 35,3%; B: 54,1%; C: 7,1%; D: 3,5%; E: 0%; 3.3 B. Maioria absoluta.

4.1 Ângela: rancho, apartamento, joias e peças de arte; Bernardo: mansão e triplex.

4.2 Ângela: 70 pontos; Bernardo: 78 pontos

4.3 Ângela: rancho, apartamento, joias e peças de arte e cerca de 13,3% da mansão; Bernardo: triplex e cerca de 86,7% da mansão.

4.4 Ambos com cerca de 72,68 pontos

Teste 2

1. Artur: barco e recebe 83 250€; Benilde: moradia e paga 229 750€; Carlos: cabana e paga 16 750€; Dinis: recebe 163 250€

2.1 A: 4 mandatos; B: 2 mandatos; C: 1 mandato; D: 0 mandatos; O candidato é da lista B.

2.2 A: 5 mandatos; B: 2 mandatos; C+D: 1 mandato; Não tem razão, o resultado seria idêntico.

3.1 Física: 2 professores; Matemática: 3 professores; Informática: 4 professores.

3.2 Física: 1 professores; Matemática: 4 professores; Informática: 5 professores; O departamento de Física tem razão pois perde um lugar.

3.3 Física: 2 professores; Matemática: 4 professores; Informática: 4 professores.

4.1 1.^a fatia: Úrsula; 2.^a fatia: Rita; 3.^a fatia: Viviana; 4.^a fatia: Sofia.

4.1 Se nenhuma diminuir, ou se apenas a Tânia o fizer, fica a Tânia com a 5.^a fatia e a Xénia com a 6.^a. Caso contrário, a Xénia fica com a 5.^a fatia e a Tânia com a 6.^a.

Teste 3

1. M1 – Alfa: 1; Beta: 3; Gama: 6; M2 – Alfa: 1; Beta: 2; Gama: 7; M3 – Alfa: 2; Beta: 3; Gama: 5; O candidato da lista Alfa proferiu a afirmação I, o da lista Gama proferiu a afirmação II e o da lista Beta proferiu a afirmação III.

2.1

N.º de livros	Frequências absolutas	Frequências Relativas (%)
0	5	6,25
1	15	18,75
2	15	18,75
3	25	31,25
4	15	18,75
5	5	6,25

2.2 $a = 0$; $b = 1,5$; $c = 3$; $d = 3,5$; $e = 5$

3.1 Tempo, em minutos, que foi necessário para a recolha seletiva dos resíduos.

3.2 7

3.3 95

3.4

Classes	Frequência absoluta	Freq. Abs. acumulada	Freq. relativa (%)	Freq. relativa acumulada
[80,90[	7	7	31,82	31,82
[90,100[	8	15	36,36	68,18
[100,110[	5	20	22,73	90,91
[110,120[	2	22	9,09	100

3.5 $\bar{x} \approx 96$, $s \approx 9,71$

3.6 55%

Teste 4

1.1 A: 3; B: 1; C: 1; D: 1; E: 1.

1.2 A: 2; B: 2; C: 1; D: 1; E: 1.

1.3 Usando o método de Sainte Laguë o partido mais votado perde um mandato a favor do segundo partido mais votado.

2.1 10%

2.2 Falsa

2.3

Sexo	Intenção de prosseguimento dos estudos		
	Deseja	Não deseja	Total
feminino	130	34	164
masculino	90	46	136
Total	220	80	300

2.4.1 45,3%

2.4.2 65%

3.1



3.2 $y = 3,85x + 4,94$

3.3 Aproximadamente 390.

3.4 $r = 0,996$

4.1 $|r| < 0$; $|r| > 0,9$

4.2 Falsa. A interpretação correta é: O valor de r indica que, quando aumenta a altitude, a média anual das temperaturas, tende a diminuir.

Teste 5

1. Método I – Vence A; Método II – Vence C; Método III – Não há vencedor; O candidato B tem razão.

2.1

Concorrentes	N.º de votos	%
A	2615	59,87
B	789	18,06
C	621	14,22
D	60	1,37
Em Branco	116	2,66
Nulos	167	3,82
Votantes	4368	61,31
Inscritos	7124	
Total de Mandatos		

2.2 38,7%

2.3 A: 4 mandatos; B: 1 mandato; C e D: nenhum mandato.

2.4 A: 3 mandatos; B: 1 mandato; C: 1 mandato; D: nenhum mandato.

3. Método I: Pilates: 3 aulas; loga: 3 aulas; *BodyBalance*: 2 aulas; *Power*: 1 aula; *Sh'Bam*: 1 aula. Método II: Pilates: 4 aulas; loga: 2 aulas; *BodyBalance*: 2 aulas; *Power* e *Sh'Bam*: 0 aulas.

O Método II proporciona uma distribuição mais equilibrada.

4.1 784,26€ 4.2 678,35€

4.3.1 Versão gasolina: 3595,88€; Versão gasóleo: 4204,02€

4.3.2 Versão gasolina: 19 230, 14€; Versão gasóleo: 22 482, 37€

4.4 Cerca de 4,3 anos.

Teste 6

1.1 $r = 0,9$. Associação linear positiva muito forte.

1.2.1 $a = 0,1656$; $b = 185,1833$

1.2.2 €475

1.3 Antes da alteração $\bar{x} = 1712,5$; $\tilde{x} = 1575$; Depois da alteração $\bar{x} \cong 2145,83$; $\tilde{x} = 1575$

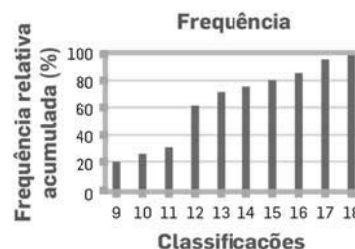
2. a) o declive da reta de regressão da Figura 2 é negativo.

b) O valor do quadrado do coeficiente de correlação entre as variáveis ano e número de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa está mais próximo de 1.

c) O número de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante o ano de 2012 é 2,0176, logo é superior a dois milhares de milhares.

3.1 $\bar{x} = 12,6$; $\tilde{x} = 12$;

3.2



3.3 Correlação positiva. A mediana de Geografia é 11 valores. Média aproximada das classificações de Geografia 11,8. A média das classificações de MACS é superior à média das classificações de Geografia.

4. $r = 0,94$

5. $y = ax + b$; $a = 0,544378$; $b = 32,425635$. A esperança média de vida de um homem austríaco é 77,6 anos

6.1 €14 046,5

6.2 O Francisco não tem razão. Sem a prestação de serviço pagarão €9212 e com a prestação de serviço pagarão €9699.

Teste Global

1.1 Pelo método de Hondt – A: 5 mandatos; B: 3 mandatos; C: 3 mandatos; D: 2 mandatos; E: 2 mandatos.

Pelo método de Sainte-Laguë – A: 4 mandatos; B: 3 mandatos; C: 3 mandatos; D: 3 mandatos; E: 2 mandatos.

Usando o método de Sainte-Laguë, o partido mais votado (A) perderia um mandato e um dos partidos menos votado (D) ganharia um mandato.

1.2 Pelo método A: vence o Castanho; Pelo método B: vence o Amarelo. O Manuel tem razão.

2.1 Lígia: Escritório e mobiliário; Mário: Material Informático.

2.2 Lígia: 70 pontos; Mário: 50 pontos

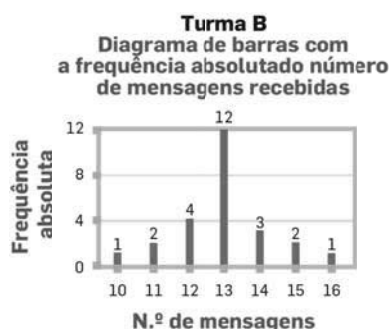
2.3 Lígia: Mobiliário e 71,4% do Escritório; Mário: Material Informático e 28,6% do Escritório.

2.4 $\frac{410}{7} \approx 58,6$ pontos

3.1.1

X_i	fri	Fri
10	0,04	0,04
11	0,08	0,12
12	0,16	0,28
13	0,48	0,76
14	0,12	0,88
15	0,08	0,96
16	0,04	1

3.1.2



3.2 Turma A: $\bar{x} = 12,96$; $e s \approx 3,46$

Turma B: $\bar{x} = 12,96$; $e s \approx 1,31$

4.1 29717€

4.2 A situação é mais vantajosa a partir do 10.º ano.

5. Contrato 1: ao fim de 3 anos: 70 200€; Contrato 2: ao fim de 3 anos: 62 646,06€

O Contrato 2 começa a compensar no 2.º semestre do 6.º ano de trabalho.

	Remunerações mensais	
	Contrato 1	Contrato 2
1.º ano	1800€	1600€
2.º ano	1950€	1680€
		1764€
3.º ano	2100€	1852,2€
		1944,81€
4.º ano	2250€	2042,05€
		2144,15€
5.º ano	2400€	2251,36€
		2363,93€
6.º ano	2550€	2482,13€
		2606,23€

Proposta de resolução da atividade complementar «À descoberta do código!»

Na tabela abaixo encontram-se a frequência absoluta e relativa das principais letras da mensagem cifrada e, em função da frequência relativa das letras num texto em língua portuguesa, a possível letra correspondente na mensagem decifrada.

Letra da Mensagem Cifrada	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Possível Letra correspondente na Mensagem Decifrada	Frequência Relativa num texto em língua portuguesa
u	23	18,40%	a	14,63%
q	22	17,60%	e	12,57%
i	18	14,40%	o	10,73%
s	11	8,80%	s	7,81%
h	9	7,20%	r	6,53%

Perante os resultados acima, e tendo em atenção que os valores obtidos são muito próximos, testemos a primeira hipótese, que é o «u» corresponde ao «a», através da análise da tabela abaixo.

Mensagem Cifrada

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Mensagem Decifrada

g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Se a letra «u» for o «a», então teremos que a letra «q», a segunda mais frequente, corresponderá à letra «w» o que não é aceitável, pois a letra «w» é muito pouco frequente num texto em português.

Portanto, teremos que testar uma segunda hipótese. Veja-se agora a correspondência das letras se considerarmos que a letra «q», na mensagem cifrada, corresponda à letra «a» na mensagem decifrada. Observe-se a tabela abaixo.

Mensagem Cifrada

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Mensagem Decifrada

k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Analisando a tabela acima constatamos que a letra «u» corresponderá à letra «e», que é a segunda mais frequente nos textos em língua portuguesa, a mesma coerência acontece quando analisamos as seguintes letras com maior frequência. Está então encontrado o nosso código! É o código 16. Agora decifra a mensagem!

AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-3813-4  9 781111 138134
--	---	---



	 www.leyaeducacao.com
---	---