

02.

GUIA DE EXPLORAÇÃO DE RECURSOS MULTIMÉDIA

Versão integral em
20 AULA DIGITAL
em setembro de 2015

**Versão de
Demonstração**

O **20 AULA DIGITAL** é uma ferramenta inovadora que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto *Expoente*¹⁰ através das novas tecnologias.

Permite o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia associados ao Manual:

- Vídeos
- Animações (Resoluções animadas de exercícios)
- Resoluções de exercícios (em PowerPoint®)
- Testes interativos

LISTAGEM GERAL DOS RECURSOS MULTIMÉDIA DO <i>EXPOENTE</i> ¹⁰	
Tipologia de recurso	Título
Vídeos Recursos introdutórios e motivadores, apresentados pelo matemático Rogério Martins, que lançam desafios relacionados com os conteúdos programáticos que compõem cada um dos temas. Total de vídeos disponíveis no projeto: 5	• <i>Mulheres que sabem o que querem</i> (página 10 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • <i>Gente que gosta de curvas</i> (página 74 – vol. 1) • <i>Redondamente errado</i> (página 152 – vol. 1) • <i>O desconto</i> (página 4 – vol. 2) • <i>Tenho um pi no rio</i> (página 152 – vol. 2)
Animações (Resoluções animadas de exercícios) Recursos que apresentam as resoluções, por etapas, de exercícios do Manual. Permitem uma exploração interativa dos exercícios, rentabilizando o tempo em sala de aula. Total de animações (resoluções animadas de exercícios) disponíveis no projeto: 20	• Resolução do exercício 63 (página 49 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Resolução do exercício 22 (página 67 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Resolução do exercício 42 (página 71 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Resolução do exercício 44 (página 71 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Resolução do exercício 11, alínea a (página 85 – vol. 1) • Resolução do exercício 31 (página 112 – vol. 1) • Resolução do exercício 59 (página 137 – vol. 1) • Resolução do exercício 36 (página 150 – vol. 1) • Resolução do exercício 50 (página 220 – vol. 1) • Resolução do exercício 32 (página 237 – vol. 1) • Resolução do exercício 22 (página 274 – vol. 1) • Resolução do exercício 28 (página 275 – vol. 1) • Resolução do exercício 26, alínea b (página 27 – vol. 2) • Resolução do exercício 46, alínea b (página 59 – vol. 2) • Resolução do exercício 24 (página 145 – vol. 2) • Resolução do exercício 32 (página 148 – vol. 2) • Resolução do exercício 16 (página 164 – vol. 2) • Resolução do exercício 14 (página 190 – vol. 2) • Resolução do exercício 30 (página 194 – vol. 2) • Resolução do exercício 35 (página 195 – vol. 2)

LISTAGEM GERAL DOS RECURSOS MULTIMÉDIA DO EXPOENTE¹⁰

Tipologia de recurso	Título
Resoluções de exercícios (em PowerPoint®) Recursos que apresentam as resoluções de todos os exercícios do Manual, agrupadas por capítulo. Total de apresentações em PowerPoint® com resoluções de exercícios disponíveis no projeto: 19	• Exercícios de “Proposições” (disponível na versão de demonstração) • Exercícios de “Condições e conjuntos” (disponível na versão de demonstração) • Exercícios de “Radicais” • Exercícios de “Potências de expoente racional” • Exercícios de “Divisão inteira de polinómios” • Exercícios de “Geometria analítica no plano” • Exercícios de “Cálculo vetorial no plano” • Exercícios de “Geometria analítica no espaço” • Exercícios de “Cálculo vetorial no espaço” • Exercícios de “Revisões” • Exercícios de “Generalidades acerca de funções” • Exercícios de “Generalidades acerca de funções reais de variável real” • Exercícios de “Monotonia, extremos e concavidades” • Exercícios de “Estudo elementar de algumas funções” • Exercícios de “Operações algébricas com funções” • Exercícios de “Somatório” • Exercícios de “Conceitos fundamentais” • Exercícios de “Medidas de localização” • Exercícios de “Medidas de dispersão”
Testes interativos Recursos orientados para a revisão de conteúdos. As perguntas são de resposta fechada. No fim de cada teste é possível ver as soluções de cada pergunta. Existem duas versões: – versão do aluno, um teste por cada unidade; – versão do professor, um teste por cada unidade. Total de testes interativos disponíveis no projeto: 38	• Proposições I (página 29 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Teste exclusivo do professor: Proposições II (página 29 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Condições e conjuntos I (página 61 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Teste exclusivo do professor – Condições e conjuntos II (página 61 – vol. 1) (disponível na versão de demonstração) • Radicais I (página 100 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Radicais II (página 100 – vol. 1) • Potências de expoente racional I (página 105 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Potências de expoente racional II (página 105 – vol. 1) • Divisão inteira de polinómios I (página 141 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Divisão inteira de polinómios II (página 141 – vol. 1) • Geometria analítica no plano I (página 181 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Geometria analítica no plano II (página 181 – vol. 1) • Cálculo vetorial no plano I (página 229 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Cálculo vetorial no plano II (página 229 – vol. 1) • Geometria analítica no espaço I (página 256 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Geometria analítica no espaço II (página 256 – vol. 1) • Cálculo vetorial no espaço II (página 267 – vol. 1) • Teste exclusivo do professor – Cálculo vetorial no espaço II (página 267 – vol. 1) • Revisões I (página 9 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Revisões II (página 9 – vol. 2)

LISTAGEM GERAL DOS RECURSOS MULTIMÉDIA DO *EXPOENTE*¹⁰

Tipologia de recurso	Título
	• Generalidades acerca de funções I (página 29 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Generalidades acerca de funções II (página 29 – vol. 2) • Generalidades acerca de funções reais de variável real II (página 56 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Generalidades acerca de funções reais de variável real II (página 56 – vol. 2) • Monotonia, extremos e concavidades I (página 67 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Monotonia, extremos e concavidades II (página 67 – vol. 2) • Estudo elementar de algumas funções I (página 133 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Estudo elementar de algumas funções II (página 133 – vol. 2) • Operações algébricas com funções I (página 139 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Operações algébricas com funções II (página 139 – vol. 2) • Somatório I (página 156 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Somatório II (página 156 – vol. 2) • Conceitos fundamentais I (página 162 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Conceitos fundamentais II (página 162 – vol. 2) • Medidas de localização I (página 174 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Medidas de localização II (página 174 – vol. 2) • Medidas de dispersão I (página 183 – vol. 2) • Teste exclusivo do professor – Medidas de dispersão II (página 183 – vol. 2)

GUIA DE EXPLORAÇÃO DE RECURSOS MULTIMÉDIA (Versão de demonstração)

Apresentamos nestas páginas uma versão de demonstração do **Guia de Exploração de Conteúdos Multimédia** do projeto *Expoente*¹⁰.

Esta versão do Guia de Exploração de Conteúdos Multimédia contempla propostas de exploração para os recursos multimédia que disponibilizamos *online* e *offline*, a título de demonstração, para apreciação dos professores antes da escolha de manual.

A versão completa do Guia de Exploração de Conteúdos Multimédia estará disponível em setembro de 2015 para os professores que se encontrem a trabalhar com o manual *Expoente*¹⁰ e incluirá propostas de exploração para todos os recursos multimédia do projeto, igualmente disponíveis a partir desse momento.

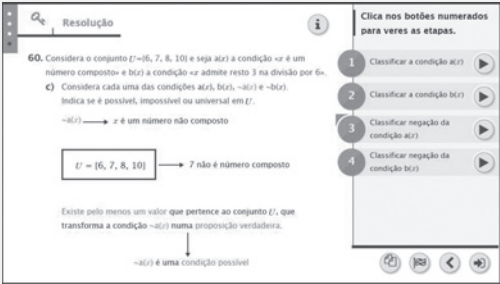
Recurso	Sugestões de exploração
Mulheres que sabem o que querem 	No início do tema • Projetar o vídeo, como elemento motivador. • Explicar aos alunos que, no final do tema – Introdução à Lógica Bivalente e Teoria dos Conjuntos –, serão capazes de resolver matematicamente o desafio apresentado no vídeo. (O desafio será retomado na página 73 – vol. 1 do Manual.) No final do tema (página 73 – vol. 1) Opção 1 • Projetar o vídeo novamente para relembrar o desafio apresentado inicialmente. • Propor aos alunos que resolvam a pares o desafio da página 73 – vol. 1. • Corrigir o desafio proposto, projetando as soluções a partir do Manual multimédia ou registando-as no quadro. Opção 2 • Propor a visualização do vídeo como trabalho para casa. • Propor ao aluno que resolva individualmente o desafio do Manual página 73 – vol. 1. • Corrigir o desafio proposto, em sala de aula, projetando as soluções a partir do Manual multimédia ou registando-as no quadro.

Vídeo

Recurso introdutório de início de tema
1 – Introdução à Lógica Bivalente e Teoria dos Conjuntos.

Converte o desafio proposto no Manual num vídeo.

Aplica a lógica proposicional em situações divertidas e motivadoras. (pág. 10 – vol. 1)

Recurso	Sugestões de exploração
Resoluções de exercícios • Ex. 63 (pág. 49 – vol. 1) • Ex. 22 (pág. 67 – vol. 1) • Ex. 42 (pág. 71 – vol. 1) • Ex. 44 (pág. 71 – vol. 1)  Animações compostas por diversas seções. A primeira apresenta o enunciado do exercício e as restantes as diferentes etapas da resolução. Clicando em  terá acesso a uma versão pdf da resolução que poderá ser descarregada e impressa ou enviada por email aos alunos. Metas Curriculares • Ex. 63: LTC10_2.6: Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \neg p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x: \neg p(x)$, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa. e LTC10_2.9: Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \neg p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \neg p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\neg p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$. • Ex. 22: LTC10_2.9: Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \neg p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \neg p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\neg p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$. • Ex. 42: LTC10_3.1: Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. • Ex. 44: LTC10_3.1: Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.	Na aula: Opção 1 • Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno. • Apresentar a resolução do exercício, explorando cada uma das etapas que compõem a animação. Opção 2 • Apresentar o enunciado. • Apresentar cada uma das etapas, propondo que o aluno vá executando a respetiva tarefa. Passar para a etapa seguinte quando a turma terminar a etapa anterior. Opção 3 • Apresentar o enunciado. • Explorar cada uma das etapas com os alunos. Para assegurar a máxima concentração dos alunos, estes devem focar-se em cada uma das etapas, debatendo-a oralmente. • Apresentar a resolução da etapa. • Entregar ao aluno a resolução total do exercício, previamente, impressa. Em casa: • Propor que os alunos resolvam o exercício como trabalho de casa. • Verificar a resolução do exercício, consultando cada uma das etapas da animação.

Resoluções de exercícios (em PowerPoint®)

15. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, quaisquer que sejam as proposições p e q .

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p \wedge \neg q)$ são iguais. Logo, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, como queríamos demonstrar.

Resoluções de todos os exercícios referentes à unidade "Proposições", de fácil acesso, através de um índice remissivo. (pág. 13 – vol. 1)

35.

a) $\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2$
 $\neg(\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0$
 $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x < 0)$

c) $\exists x \in \mathbb{N}: x^3 = 25$
 $\neg(\exists x \in \mathbb{N}: x^3 = 25) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, x^3 \neq 25)$

Resoluções de todos os exercícios referentes à unidade "Condições e conjuntos", de fácil acesso, através de um índice remissivo. (pág. 30 – vol. 1)

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno, em sala de aula, ou como trabalho de casa.
- Apresentar a resolução do exercício em sala de aula.

03.

PLANIFICAÇÃO ANUAL

Materiais disponíveis em formato editável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

| Apresentação
do projeto

Apresentação do projeto *Expoente*¹⁰

Para o Aluno	Para o Professor
– Manual (2 volumes) – Caderno de Exercícios e Testes – 20 AULA DIGITAL ALUNO – www.expoente10.asa.pt	– Manual (Edição do Professor) – 2 volumes – Dossiê do Professor – 20 AULA DIGITAL PROFESSOR – www.expoente10.asa.pt

Manual (2 volumes)

Ao longo do Manual apresentam-se:

- **exercícios resolvidos** para consolidar a teoria e servir de orientação ao trabalho dos alunos;
- **exercícios de margem** de forma a tornar os alunos capazes de conhecer e utilizar uma variedade de procedimentos de cálculo;
- baterias de exercícios, na rubrica **Aprende Fazendo**, classificados por **grau de dificuldade**, incluindo itens de seleção e de construção;
- **remissões** para o Aprende Fazendo e para o Caderno de Exercícios e Testes;
- pequenas sínteses intercalares, na rubrica **Esquematizando/ Resumindo**;
- a rubrica **Erro Típico**, que constitui um alerta para erros frequentemente cometidos pelos alunos;
- sempre que oportuno, na margem incluem-se as rubricas **Notas**, **Observações**, **Recorda** e **Contextualização histórica**, esta última com informação sobre história de conceitos matemáticos e/ou referências a matemáticos.

O **Manual (Edição do Professor)** disponibiliza soluções de todos os exercícios junto dos respetivos enunciados e remissões para todos os recursos multimédia existentes em **20 AULA DIGITAL**, bem como indicação dos descritores das Metas Curriculares nas páginas em que os conteúdos são abordados.

Caderno de Exercícios e Testes

Este Caderno pretende constituir um apoio efetivo ao trabalho autónomo do aluno. É constituído por:

- Baterias de exercícios, organizados pelos cinco domínios do 10.º ano
- Testes de Avaliação
 - 6 testes de avaliação (dois por período letivo)
 - 2 testes globaisTodos os testes incluem matrizes de conteúdos e propostas de cotações.
- Soluções

Dossiê do Professor

- Programa e Metas Curriculares de Matemática A em articulação com o Manual
- Planificação anual
- Testes de avaliação sumativa
 - teste de diagnóstico*
 - 6 testes de avaliação sumativa* (dois por período)
 - teste global*Matriz de conteúdos, soluções e cotações* para todos os testes.
- Resoluções de todos os exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios e Testes)**

* Materiais disponíveis em formato editável

** Materiais projetáveis

20 AULA DIGITAL

Esta plataforma facilita e enriquece a exploração do projeto *Expoente*¹⁰, através da utilização de novas tecnologias em sala de aula. Trata-se de uma ferramenta que possibilita:

- a projeção e a exploração das páginas do Manual em sala de aula;
- o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia integrados com o Manual.

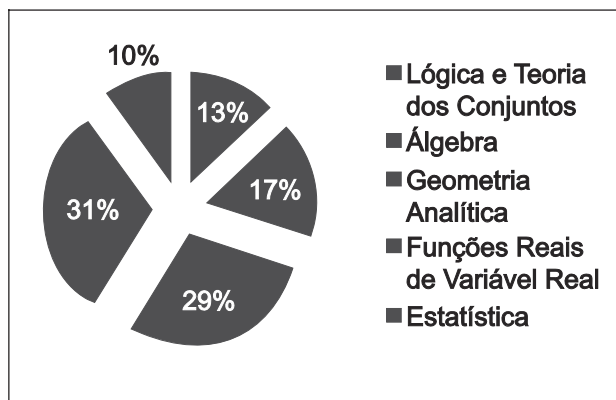
Planificação Anual de Matemática A

De seguida apresenta-se uma proposta de distribuição dos diferentes domínios previstos no Programa a lecionar no 10º ano pelos três períodos letivos, bem como a previsão do número de aulas por domínio. Apresentamos ainda um gráfico que permite avaliar de forma quantitativa a distribuição percentual de aulas ao longo do ano.

DISTRIBUIÇÃO DOS DOMÍNIOS POR PERÍODO

Períodos	Domínios
1.º	Lógica e Teoria dos Conjuntos (26 aulas) Álgebra (34 aulas) Geometria Analítica (28 aulas)
2.º	Geometria Analítica (32 aulas) Funções Reais de Variável Real (34 aulas)
3.º	Funções Reais de Variável Real (30 aulas) Estatística (20 aulas)

PERCENTAGEM DE AULAS POR DOMÍNIO



Domínio	Conteúdos		Metas Curriculares	N.º aulas
Lógica e Teoria dos Conjuntos (26 aulas)	Proposições	- Proposições - Valor lógico de uma proposição - Princípio de não contradição - Princípio do terceiro excluído	1.1; 1.2	2
		- Operações e propriedades sobre proposições: - negação e propriedade da dupla negação - conjunção, disjunção - propriedades e relações da conjunção, disjunção e negação - leis de De Morgan - implicação e suas propriedades - implicação contrarrecíproca - equivalência e suas propriedades - princípio da dupla implicação - Prioridades das operações lógicas	1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.14; 1.12; 1.13; 1.8; 1.10; 1.15; 1.16; 1.11 1.9	4
		Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições	3.1	2
	Condições e conjuntos	- Condições - Classificação de condições	2.1; 2.3; 2.5	2
		- Operações lógicas sobre condições - Propriedades das operações lógicas sobre condições	2.3; 2.7; 2.5; 2.8	2
		Equivalência como dupla implicação	2.17	2
		- Quantificadores - Contraexemplo	2.2; 2.3; 2.4; 2.5 2.9	2
		Segundas leis de De Morgan	2.6	2
		- Conjunto definido por uma condição - Conjuntos definidos em extensão e em compreensão - Igualdade de conjuntos - Inclusão de conjuntos e princípio da dupla inclusão	2.10; 2.12; 2.13; 2.11; 2.15; 2.18	2
		- Interseção, união e diferença de conjuntos e conjunto complementar - Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem	2.14; 2.16	2
		- Demonstração de equivalências por dupla implicação - Negação de uma implicação universal - Demonstração por contrarrecíproco	2.17; 2.19; 2.20	2
		Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos	3.2	2

Domínio	Conteúdos		Metas Curriculares	N.º aulas
Álgebra (34 aulas)	Radicais	Monotonia da potenciação	1.1; 1.2	1
		- Raízes de índice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ - Propriedades algébricas dos radicais	1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9; 2.1	2
		Racionalização de denominadores	1.10; 1.11	2
		Resolução de problemas envolvendo operações com radicais	3.1	2
	Potências de expoente racional	- Definição de potência da base positiva e expoente racional - Propriedades algébricas das potências da base positiva e expoente racional - Resolução de problemas envolvendo operações com potências	2.2; 2.3; 2.4; 2.5	6
			3.1	
	Polinómios	Polinómios; revisões	4.1; 4.2	1
		Divisão inteira de polinómios	4.3; 4.4; 4.8	4
		Regra de Ruffini	4.5	4
		- Divisibilidade de polinómios - Teorema do Resto	4.6; 4.7; 4.9	2
		Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades	4.10; 4.12	2
		Decomposição de um polinómio em fatores	4.11	5
		Determinação dos zeros de um polinómio		1
		Resolução de problemas	5.1; 5.2; 5.3	2
Geometria Analítica (60 aulas)	Geometria analítica no plano	- Referenciais ortonormados - Distância entre dois pontos do plano	1.1; 1.2	2
		Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta	1.3; 1.4	1
		- Equação/inequação cartesiana de um conjunto de pontos - Inequações cartesianas de semiplanos	1.5; 1.12; 1.11	2
		Mediatriz de um segmento de reta	1.6	2
		Circunferência e círculo	1.7; 1.13	2
		Elipse	1.8; 1.9; 1.10	2
		Resolução de problemas	2.1	2

Domínio	Conteúdos		Metas Curriculares	N.º aulas
Geometria Analítica (60 aulas)	Cálculo vetorial no plano	Revisões		2
		Operações com vetores	3.1; 3.4; 3.2; 3.3; 3.5; 3.6	4
		Operações com coordenadas de vetores	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5; 4.6	4
		Retas no plano	5.1; 5.2; 5.4; 5.5; 5.6; 5.3	4
		Resolução de problemas	6.1; 6.2; 6.3	2
	Geometria analítica no espaço	- Referencial ortonormado do espaço - Equações de planos paralelos aos planos coordenados	7.1; 7.2; 7.4; 7.3; 7.5; 7.6; 8.1	2
		Equações de retas paralelas aos eixos coordenados	8.2	2
		Distância entre dois pontos no espaço	8.3	2
		Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta		1
		Plano mediador de um segmento de reta	8.4	2
		Superfície esférica e esfera	8.5; 8.6	2
		Resolução de problemas	11.1	4
	Cálculo vetorial no espaço	- Vetores do espaço - Operações com vetores do espaço	9.1; 9.2; 9.3	2
		- Coordenadas de um vetor no espaço - Vetor posição de um ponto e respetivas coordenadas	10.1; 10.2	2
		Operações com vetores do espaço a partir das suas coordenadas	10.2	4
		Equações de retas no espaço	10.3	4
		Resolução de problemas	11.2	4

Domínio	Conteúdos	Metas Curriculares	N.º aulas
Funções Reais de Variável Real (64 aulas)	Generalidades acerca de funções	• Revisões	2
		• Produtos cartesianos de conjuntos	2
		• Gráficos de funções	2
		• Restrições de uma função • Imagem de um conjunto por uma função	2
		• Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas	2
		• Composição de funções	2
		• Função inversa de uma função bijetiva • Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa	2
	Generalidades acerca de funções reais de variável real	• Funções reais de variável real • Funções definidas por expressões analíticas	2
		• Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares	2
		• Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c, d \in \mathbb{R}$	6
	Monotonia, extremos e concavidades	• Intervalos de monotonia de uma função real de variável real	2
		• Vizinhança de um ponto da reta numérica • Extremos relativos e absolutos	2
		• Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real	2

Domínio	Conteúdos		Metas Curriculares	N.º aulas
Funções Reais de Variável Real (64 aulas)	Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo, e de funções definidas por ramos	Função afim	3.8	2
		- Função quadrática: extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica - Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais	3.9; 5.1; 6.1	8
		Funções definidas por ramos	5.2	2
		- Estudo da função $x \mapsto a x - b + c, a \neq 0$ - Equações e inequações envolvendo a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas	5.3; 6.1	6
		- As funções $x \mapsto \sqrt{x}$ e $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ - Equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica - Funções irracionais $x \mapsto a\sqrt{x - b} + c, a \neq 0$ e $x \mapsto a\sqrt[3]{x - b} + c, a \neq 0$: domínio e representação gráfica - Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais	5.4; 5.5; 5.6; 5.7; 6.2	6
		Operações com funções	5.9	6
		Resolução de problemas	5.8; 6.3; 6.4; 6.5	4
Estatística (20 aulas)	Características amostrais	Sinal de somatório	1.1; 1.2; 1.3; 1.4	3
		Revisões		1
		Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística	2.1; 2.2	2
		Medidas de localização: média, variância e desvio-padrão; propriedades	2.3, 2.4; 2.5; 2.6; 2.7; 3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5; 3.6; 3.7; 3.8; 3.9; 3.10; 3.11; 3.12	6
		Percentil de ordem k; propriedades	4.1; 4.2; 4.3; 4.4	6
		Resolução de problemas	5.1; 5.2	2

Observações:

- Uma aula corresponde a 45 minutos.
- Considerou-se na elaboração desta planificação, que a carga letiva semanal corresponde a 6 aulas de 45 minutos.

04.

TESTES

Materiais disponíveis em formato editável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Índice de conteúdos

Teste de Diagnóstico ----- 20**Teste 1 ----- 27**

Tema 1 – Introdução à lógica bivalente e à teoria dos conjuntos

- Proposições
- Condições e conjuntos

Tema 2 – Álgebra

- Radicais
- Potências de expoente racional

Teste 2 ----- 33

Tema 1 – Introdução à lógica bivalente e à teoria dos conjuntos

- Proposições
- Condições e conjuntos

Tema 2 – Álgebra

- Radicais
- Potências de expoente racional
- Polinómios

Tema 3 – Geometria analítica

- Geometria analítica no plano

Teste 3 ----- 41

Tema 2 – Álgebra

- Polinómios

Tema 3 – Geometria analítica

- Geometria analítica no plano
- Cálculo vetorial no plano
- Geometria analítica no espaço
- Cálculo vetorial no espaço

Teste 4 ----- 49

Tema 3 – Geometria analítica

- Geometria analítica no plano
- Cálculo vetorial no plano
- Geometria analítica no espaço
- Cálculo vetorial no espaço

Tema 4 – Funções reais de variável real

- Generalidades acerca de funções
- Generalidades acerca de funções reais de variável real
- Monotonia, extremos e concavidade

Teste 5 ----- 57

Tema 4 – Funções reais de variável real

- Generalidades acerca de funções
- Generalidades acerca de funções reais de variável real
- Monotonia, extremos e concavidade
- Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos
- Resolução de problemas

Teste 6 ----- 64

Tema 4 – Funções reais de variável real

- Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo, e de funções definidas por ramos
- Resolução de problemas

Tema 5 – Estatística

- Características amostrais

Teste Global ----- 71

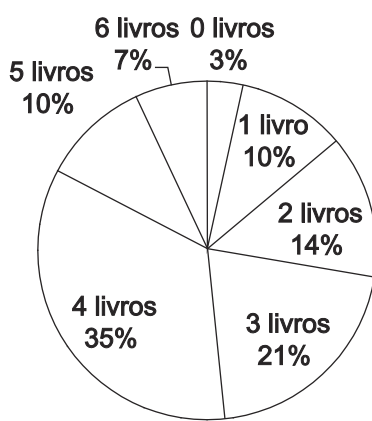
Matriz Teste de Diagnóstico

Itens	Domínios	Conteúdos / Metas Curriculares
1.	OTD5 OTD6 OTD7	Tratar conjuntos de dados. Organizar e representar dados. Medidas de localização.
2.	ALG9 NO9	Resolver inequações do 1.º grau. Definir intervalos de números reais.
3.	ALG9	Proporcionalidade inversa.
4.1.	GM7 FSS7 FSS9	Calcular medidas de quadriláteros. Definir funções. Interpretar graficamente soluções de equações do 2.º grau.
4.2.	GM9	Identificar lugares geométricos.
5.1.	GM6 GM8	Relacionar circunferências com ângulos, retas e polígonos. Teorema de Pitágoras.
5.2.	GM8	Vetores, translações e isometrias.
6.	ALG7	Operar com raízes quadradas e raízes cúbicas racionais.
7.	ALG8 ALG9	Reconhecer e operar com polinómios. Equações do 2.º grau.
8.	ALG7 ALG8	Expressões algébricas. Potências de expoente inteiro.
9.1.	GM9	Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos.
9.2.	GM9	Definir distâncias entre pontos e planos, retas e planos e entre planos paralelos.
9.3.	GM9 NO9	Comparar e calcular áreas e volumes. Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos. Operar com valores aproximados de números reais.
10.	ALG8	Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas.
11.	NO9	Definir intervalos de números reais.
12.	GM9	Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos.
13.1.	GM9	Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.
13.2.	GM7	Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes.
13.3.	OTD9	Probabilidade.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. O número de livros lidos nas férias de verão pelos alunos de uma turma de 10.º ano distribui-se de acordo com o gráfico circular seguinte.

Número de livros lidos nas férias de verão



Sabe-se que o número de alunos dessa turma é um número ímpar. Quais são, respetivamente, a média e a mediana do número de livros lidos nas férias de verão pelos alunos dessa turma?

- (A) 3,33 e 3 (B) 3,33 e 4 (C) 3 e 3 (D) 3 e 4

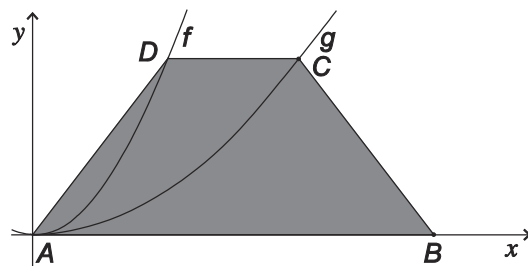
2. Resolve em $\mathbb{R}$ a inequação seguinte. Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$$2x - 3\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{5}\right) \leq 2$$

3. A mãe da Helena resolveu fazer queques para o aniversário da sua filha. Para confeccionar todos os queques que precisava, colocando 12 de cada vez no forno, demorou 7 horas. Quantos queques teria de meter no forno, de cada vez, se quisesse demorar apenas 3 horas?

- (A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 36

4. No referencial cartesiano da figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções, f e g , e um trapézio isósceles $[ABCD]$.



Sabe-se que:

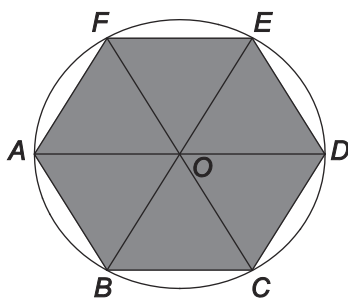
- a função f é definida por $f(x) = 4x^2$;
- a função g é definida por $g(x) = x^2$;
- os pontos A e B pertencem ao eixo das abscissas;
- o ponto A coincide com a origem do referencial;
- os pontos A e D pertencem ao gráfico da função f ;
- os pontos A e C pertencem ao gráfico da função g ;
- o ponto D tem abscissa 1.

4.1. Determina a medida da área do trapézio $[ABCD]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

4.2. Qual é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de A e de D ?

- (A) Mediatriz do segmento de reta $[AD]$. (B) Circunferência de centro A e raio $\overline{AD}$.
 (C) Círculo de centro A e raio $\overline{AD}$. (D) Bissetriz do ângulo ABD .

5. Na figura está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio $\overline{AO}$. Sabe-se que a medida do lado do hexágono é 8 cm.



5.1. Determina o comprimento do apótema do hexágono.

5.2. Completa de forma a obteres uma afirmação verdadeira.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. Sejam a e b números reais maiores do que 1. Qual das expressões seguintes é equivalente à expressão $\sqrt{a} \times \sqrt{ab}$?

- (A) $\sqrt[4]{a^2b}$ (B) $a + \sqrt{b}$
 (C) $a\sqrt{b}$ (D) $a^2\sqrt{b}$

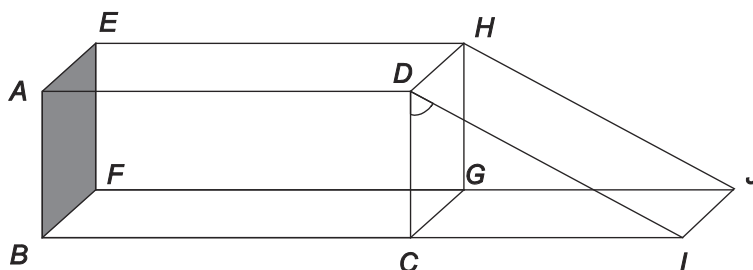
7. Resolva a equação seguinte. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$$(x - 2)^2 = 3 - 2(x - 2)(x + 2)$$

8. Recorrendo sempre que possível às regras operatórias das potências, simplifica a seguinte expressão.

$$\left[\left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right]^{-1} \times \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} + (2^{-2} - 3^0)$$

9. Na figura está representado um sólido que pode ser decomposto em dois prismas retos: um prisma cujas bases são os quadrados $[ABFE]$ e $[DCGH]$ e um prisma cujas bases são os triângulos retângulos $[CID]$ e $[GJH]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BF} = 3$ cm
- $\overline{BC} = 7$ cm
- $\widehat{C}DI = 30^\circ$

9.1. Identifica, usando as letras da figura, uma reta não coplanar com a reta AB .

9.2. Qual é a distância entre o plano ABF e a reta DH ?

9.3. Determina o volume total do sólido. Apresenta o resultado em centímetros cúbicos, aproximados às décimas. Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

10. Resolve o sistema seguinte. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$$\begin{cases} 3x - 4 = -2y \\ x - \frac{1-y}{2} = 5 \end{cases}$$

11. Considera os conjuntos $A =]-\infty, 2\pi[$ e $B = [\sqrt{5}, 8[$. Qual é o maior número inteiro pertencente ao conjunto $A \cap B$?

(A) 3

(B) 4

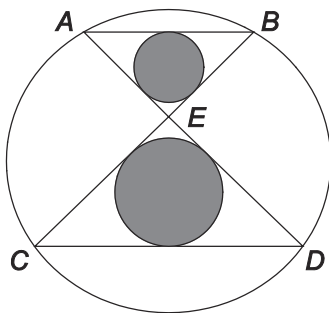
(C) 5

(D) 6

12. Sabe-se que $\tan \alpha = \frac{5}{2}$, sendo α a amplitude de um ângulo agudo. Mostra que:

$$\sin \alpha \times \cos \alpha = \frac{10}{29}$$

13. Na figura estão representados uma circunferência, os triângulos $[ABE]$ e $[EDC]$ e dois círculos inscritos nestes triângulos.



Sabe-se que:

- $[AB]$ e $[CD]$ são cordas paralelas de uma mesma circunferência, de raio 14 cm;
- AD e BC interseccionam-se no ponto E ;
- os círculos sombreados estão inscritos nos triângulos $[ABE]$ e $[EDC]$, sendo que os seus diâmetros medem, respetivamente, 4 cm e 12 cm.

13.1. Justifica que a amplitude do arco de circunferência AC é igual à amplitude do arco de circunferência BD .

13.2. Justifica que os triângulos $[ABE]$ e $[EDC]$ são semelhantes.

13.3. Escolhendo ao acaso um ponto da figura, determina a probabilidade de o ponto escolhido pertencer à zona sombreada da figura. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

- FIM -

Cotações

1.		5 pontos
2.		15 pontos
3.		5 pontos
4.		20 pontos
4.1.		15 pontos
4.2.		5 pontos
5.		20 pontos
5.1.		15 pontos
5.2.		5 pontos
6.		5 pontos
7.		15 pontos
8.		15 pontos
9.		30 pontos
9.1.		5 pontos
9.2.		10 pontos
9.3.		15 pontos
10.		15 pontos
11.		5 pontos
12.		15 pontos
13.		35 pontos
13.1.		10 pontos
13.2.		10 pontos
13.3.		15 pontos

TOTAL **200 pontos**

Soluções

1. Opção (B)

2. C.S. = $\left[-\infty, \frac{2}{5}\right]$

3. Opção (C)

4.

4.1. 8 u.a.

4.2. Opção (A)

5.

5.1. $4\sqrt{3}$ cm

5.2. Por exemplo, $\overrightarrow{AC}$.

6. Opção (C)

7. C.S. = $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$

8. $-\frac{49}{108}$

9.

9.1. Por exemplo, EH .

9.2. 7 cm

9.3. $70,8 \text{ cm}^3$

10. $(18, -25)$

11. Opção (D)

12. Ao cuidado do aluno.

13.

13.1. Ao cuidado do aluno.

13.2. Ao cuidado do aluno.

13.3. $\frac{10}{49}$

Domínios	Conteúdos
LTC10	Proposições Valor lógico de uma proposição. Princípio de não contradição. Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência. Prioridades das operações lógicas. Relações lógicas entre as diferentes operações. Propriedade da dupla negação. Princípio do terceiro excluído. Princípio da dupla implicação. Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção, e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção. Leis de De Morgan. Implicação contrarrecíproca. Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. Condições e conjuntos Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos. Conjunto definido por uma condição. Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão. União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar. Inclusão de conjuntos. Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem. Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação. Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco. Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

ALG10	Radicais Monotonia da potenciação; raízes de índice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes. Racionalização de denominadores. Resolução de problemas envolvendo operações com radicais. Potências de expoente racional Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência. Resolução de problemas envolvendo operações com potências.
--------------	--

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Sabendo que $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira, qual das seguintes proposições é necessariamente verdadeira?

(A) $p \vee (\sim q)$ (B) $(\sim p) \wedge q$ (C) $(\sim p) \wedge (\sim q)$ (D) $(\sim p) \vee (\sim q)$

2. Considera a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$. Qual das seguintes proposições é equivalente à negação desta proposição?

(A) $\exists x: p(x) \wedge [\sim q(x)]$ (B) $\exists x: [\sim p(x)] \Rightarrow [\sim q(x)]$

(C) $\forall x, [\sim p(x)] \Rightarrow [\sim q(x)]$ (D) $\forall x, p(x) \wedge [\sim q(x)]$

3. Considera a condição:

Se um triângulo é isósceles, então não tem ângulos internos retos.

Indica qual das seguintes proposições é equivalente à contrarrecíproca da proposição anterior.

(A) Se um triângulo não tem ângulos internos retos, então não é isósceles.

(B) Se um triângulo tem ângulos internos retos, então não é isósceles.

(C) Se um triângulo tem ângulos internos retos, então é isósceles.

(D) Se um triângulo não tem ângulos internos retos, então é isósceles.

4. Sejam a e b números reais positivos. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ (B) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ (C) $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ (D) $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$

5. Considera a expressão $\frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}}$. Uma expressão equivalente à dada é:

(A) $2^{-\frac{5}{4}}x^1y^{-\frac{3}{4}}$ (B) $2^{-\frac{7}{4}}x^1y^{-\frac{3}{4}}$ (C) $2^{\frac{5}{4}}x^{-1}y^{\frac{5}{4}}$ (D) $2^{\frac{1}{2}}x^1y^{\frac{3}{2}}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Considera as proposições p , q e r :

p : a Margarida leu o "Memorial do Convento";

q : a Margarida leu a "Mensagem";

r : a Margarida leu "Os Lusíadas".

- 1.1. Traduz, em linguagem simbólica, as seguintes proposições.

1.1.1. A Margarida não leu o "Memorial do Convento" ou leu a "Mensagem".

1.1.2. Se a Margarida leu a "Mensagem", então leu "Os Lusíadas" ou o "Memorial do Convento".

- 1.2. Traduz em linguagem corrente a negação de $p \vee q$.

- 1.3. Determina quais são os livros que a Margarida leu, sabendo que é verdadeira a proposição $(\sim(p \Rightarrow q)) \wedge (\sim(\sim r))$.

2. Considera o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sejam $p(x)$ e $q(x)$ as seguintes condições:

$$p(x): x - 2 \geq 0$$

$$q(x): 3 < x \leq 4$$

- 2.1. Determina o valor lógico das seguintes proposições.

2.1.1. $\forall x \in A, p(x)$

2.1.2. $\exists x \in A: q(x)$

- 2.2. Prova que $p \vee (\sim q)$ é uma condição universal em A .

- 2.3. Sejam P e Q os conjuntos-solução das condições p e q , respetivamente, em $\mathbb{R}$.
Determina:

2.3.1. $P \cap Q$

2.3.2. $\bar{P} \cup \bar{Q}$

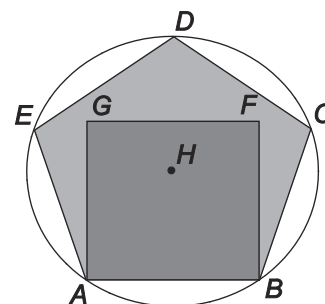
2.3.3. $P \setminus Q$

3. Averigua se $\sqrt{20}$ é solução da equação $x(3\sqrt{5} - x) = 10$.

4. Simplifica a expressão $\frac{5\sqrt{6} - 2\sqrt{54}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

5. Representa a expressão $2^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}$ na forma $k\sqrt{2}$, sendo $k \in \mathbb{R}$.

6. Na figura estão representados um pentágono regular $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência de centro H e de raio $\sqrt{2}$ cm, e um quadrado $[ABFG]$. Sabe-se que a medida do comprimento da diagonal do quadrado $[ABFG]$ é $\sqrt{6}$ cm. Determina a medida da área do pentágono.



- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		40 pontos
1.1.		10 pontos
1.1.1.		5 pontos
1.1.2.		5 pontos
1.2.		15 pontos
1.3.		15 pontos
2.		50 pontos
2.1.		10 pontos
2.1.1.		5 pontos
2.1.2.		5 pontos
2.2.		10 pontos
2.3.		30 pontos
2.3.1.		10 pontos
2.3.2.		10 pontos
2.3.3.		10 pontos
3.		10 pontos
4.		15 pontos
5.		15 pontos
6.		20 pontos

TOTAL 200 pontos

GRUPO I

1. Opção (A)
2. Opção (A)
3. Opção (B)
4. Opção (D)
5. Opção (C)

GRUPO II

1.

1.1.

1.1.1. $\sim p \vee q$

1.1.2. $q \Rightarrow (r \vee p)$

1.2. A Margarida não leu o "Memorial do Convento" nem a "Mensagem".

1.3. A Margarida leu o "Memorial do Convento" e "Os Lusíadas".

2.

2.1.

2.1.1. Proposição falsa.

2.1.2. Proposição verdadeira.

2.2. Ao cuidado do aluno.

2.3.

2.3.1. $P \cap Q =]3, 4]$

2.3.2. $\overline{P} \cup \overline{Q} =]-\infty, 3] \cup]4, +\infty[$

2.3.3. $P \setminus Q = [2, 3] \cup]4, +\infty[$

3. É solução.

4. $-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

5. $\frac{15}{4}\sqrt{2}$

6. $\frac{5}{4}\sqrt{15} \text{ cm}^2$

Domínios	Conteúdos
LTC10	Proposições Valor lógico de uma proposição. Princípio de não contradição. Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência. Prioridades das operações lógicas. Relações lógicas entre as diferentes operações. Propriedade da dupla negação. Princípio do terceiro excluído. Princípio da dupla implicação. Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção, e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção. Leis de De Morgan. Implicação contrarrecíproca. Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. Condições e conjuntos Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos. Conjunto definido por uma condição. Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão. União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar. Inclusão de conjuntos. Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem. Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação. Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco. Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

ALG10	Radicais Monotonia da potenciação; raízes de índice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes. Racionalização de denominadores. Resolução de problemas envolvendo operações com radicais. Potências de expoente racional Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência. Resolução de problemas envolvendo operações com potências. Polinômios Divisão euclidiana de polinômios e regra de Ruffini. Divisibilidade de polinômios. Teorema do Resto. Multiplicidade da raiz de um polinômio e respectivas propriedades. Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinômios, o Teorema do Resto e a fatorização de polinômios. Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinômios.
GA10	Geometria analítica no plano Referenciais ortonormados. Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respectivas coordenadas. Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta. Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta. Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos. Equação cartesiana reduzida da circunferência. Definição de elipse e respectiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal. Inequações cartesianas de semiplanos. Inequações cartesianas de círculos. Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano. Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considera que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C . Considera também que $1 \notin A$, $2 \notin B$, $3 \notin C$, $4 \in A$, $5 \in B$ e $6 \in C$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $1 \notin B$ (B) $2 \in A$ (C) $3 \notin B$ (D) $4 \in C$

2. De um triângulo $[ABC]$ sabe-se que:

- é retângulo em B ;
- $\overline{AB} = (6 - 2\sqrt{2})$ cm;
- $\overline{BC} = (6 + 2\sqrt{2})$ cm.

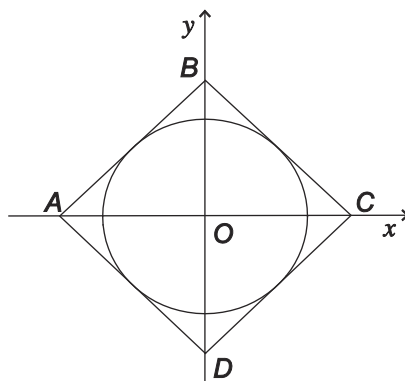
Qual é a medida do comprimento do segmento de reta $[AC]$?

(A) $2\sqrt{22}$ cm
(B) $88 + 48\sqrt{2}$ cm
(C) 88 cm
(D) 72 cm

3. Na divisão de um polinómio $P(x)$ pelo binómio $x - 3$ obtém-se o quociente $8x^4 - 2ax^3 + 2x^2 + 4x + 6$ e o resto 1. Então, na divisão de $P(x)$ pelo binómio $2x - 6$, obtém-se:

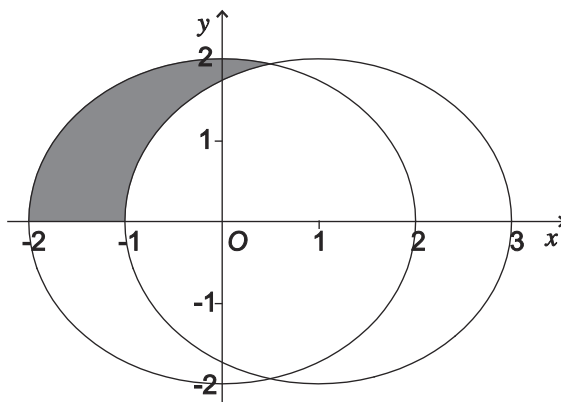
(A) quociente $8x^4 - 2ax^3 + 2x^2 + 4x + 6$ e resto $\frac{1}{2}$.
(B) quociente $4x^4 - ax^3 + x^2 + 2x + 3$ e resto $\frac{1}{2}$.
(C) quociente $16x^4 - 4ax^3 + 4x^2 + 8x + 12$ e resto 1.
(D) quociente $4x^4 - ax^3 + x^2 + 2x + 3$ e resto 1.

4. Considera, num referencial o.m. xOy , a circunferência de centro $(0,0)$ e área 9π , inscrita num quadrado $[ABCD]$, cujos vértices se situam nos eixos coordenados, como está representado na figura.



Quais são as coordenadas dos vértices do quadrado?

- (A) $A(-3\sqrt{2}, 0), B(0, 3\sqrt{2}), C(3\sqrt{2}, 0)$ e $D(0, -3\sqrt{2})$
 (B) $A(-6, 0), B(0, 6), C(6, 0)$ e $D(0, -6)$
 (C) $A(-3, 0), B(0, 3), C(3, 0)$ e $D(0, -3)$
 (D) $A(-3\sqrt{3}, 0), B(0, 3\sqrt{3}), C(3\sqrt{3}, 0)$ e $D(0, -3\sqrt{3})$
5. Considera a região a sombreado na figura.



A condição que define esse conjunto de pontos é:

- (A) $x^2 + y^2 \geq 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
 (B) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \wedge x \geq 0$
 (C) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \wedge y \geq 0$
 (D) $x^2 + y^2 \geq 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \wedge x \geq 0$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

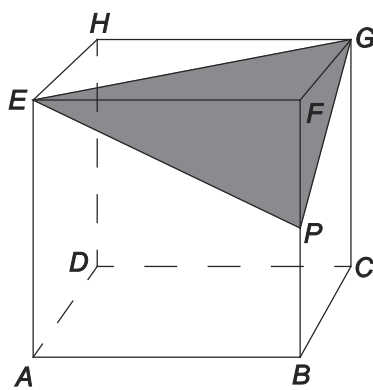
1. Considera a proposição:

$$p: \sim a \vee (b \Rightarrow \sim a)$$

1.1. Sabendo que a proposição p é falsa, determina os valores lógicos de a e de b .

1.2. Escreve $\sim p$ na forma mais simplificada possível.

2. Na figura está representado um cubo $[ABCDEFGH]$, com 1000 cm^3 de volume.



Sabe-se que P é o ponto médio da aresta a que pertence.

2.1. Mostra que $\overline{EG} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ e que $\overline{EP} = 5\sqrt{5} \text{ cm}$.

2.2. Calcula a medida da área do triângulo $[EGP]$. Apresenta o resultado na forma ab^p , onde a e b são números naturais e p é um número racional.

3. Considera o polinómio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

3.1. Determina os valores de a e de b de modo que o polinómio $P(x)$ seja divisível por $x - 1$ e quando dividido por $x + 1$ dê resto -3 .

3.2. Supõe que $a = -5$ e $b = 1$.

3.2.1. Sabendo que $P(1) = 0$, decompõe o polinómio $P(x)$ num produto de fatores de grau não superior ao primeiro.

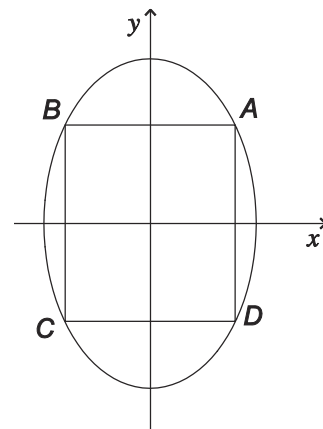
3.2.2. Resolve a inequação $P(x) \leq 0$. Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

4. Determina o polinómio $A(x)$, de quarto grau, que admita os zeros simples $-2, -\frac{1}{2}, 1$ e 3 e cujo resto da divisão por $x + 1$ é igual a 8 .

5. Na figura está representada, num referencial o.m. xOy , a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Sabe-se que:

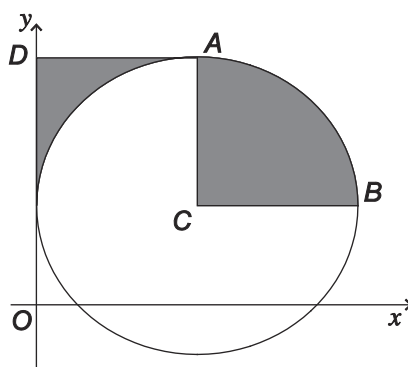
- os vértices do retângulo $[ABCD]$ pertencem à elipse;
- a reta AB tem equação $y = 3$.



5.1. Determina as coordenadas dos focos da elipse.

5.2. Determina as coordenadas de todos os vértices do rectângulo $[ABCD]$.

6. Na figura está representada, num referencial o.m. xOy , a circunferência de centro $C(3,2)$ e raio 3 .



Os segmentos de reta $[AD]$ e $[BC]$ são paralelos ao eixo Ox e o segmento de reta $[AC]$ é paralelo ao eixo Oy . Escreve uma condição que defina a região representada a sombreado, incluindo a fronteira.

7. Considera, num plano munido de um referencial o.m. xOy , os pontos de coordenadas $A(-1,2)$, $B(-3,6)$ e $C(2,-3)$.

7.1. Determina uma equação da mediatriz de $[AC]$. Apresenta a resposta na forma $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

7.2. Escreve uma equação da circunferência de centro no ponto médio de $[AB]$ e que passa pelo ponto C .

- FIM -

Cotações

GRUPO I		50 pontos
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		150 pontos
1.		20 pontos
1.1.		10 pontos
1.2.		10 pontos
2.		25 pontos
2.1.		10 pontos
2.2.		15 pontos
3.		30 pontos
3.1.		10 pontos
3.2.		20 pontos
3.2.1.		10 pontos
3.2.2.		10 pontos
4.		15 pontos
5.		25 pontos
5.1.		10 pontos
5.2.		15 pontos
6.		15 pontos
7.		20 pontos
7.1.		10 pontos
7.2.		10 pontos
TOTAL		200 pontos

Soluções

GRUPO I

1. Opção (D)
2. Opção (A)
3. Opção (D)
4. Opção (A)
5. Opção (C)

GRUPO II

1.

1.1. a e b são verdadeiras.

1.2. $a \wedge b$

2.

2.1. Ao cuidado do aluno.

2.2. $25 \times 6^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^2$

3.

3.1. $a = -\frac{7}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$

3.2.

3.2.1. $P(x) = (2x + 1)(x - 1)(x - 2)$

3.2.2. $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [1, 2]$

4. $A(x) = -2x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 7x - 6$

5.

5.1. $(0, 4)$ e $(0, -4)$

5.2. $A\left(\frac{12}{5}, 3\right)$, $B\left(-\frac{12}{5}, 3\right)$, $C\left(-\frac{12}{5}, -3\right)$ e $D\left(\frac{12}{5}, -3\right)$

6. $[(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \wedge x \geq 3 \wedge y \geq 2] \vee [(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \geq 9 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 5]$

7.

7.1. $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

7.2. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 65$

Matriz Teste 3

Domínios	Conteúdos
ALG10	Polinómios Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini. Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto. Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades. Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do Resto e a fatorização de polinómios. Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.
GA10	Geometria analítica no plano Referenciais ortonormados. Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas. Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta. Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta. Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos. Equação cartesiana reduzida da circunferência. Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal. Inequações cartesianas de semiplanos. Inequações cartesianas de círculos. Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano. Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. Cálculo vetorial no plano Norma de um vetor. Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico. Diferença entre vetores. Propriedades algébricas das operações com vetores. Coordenadas de um vetor.

	Vetor posição de um ponto e respectivas coordenadas. Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares. Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respectivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor. Cálculo da norma de um vetor em função das respectivas coordenadas. Vetor diretor de uma reta; relação entre as respectivas coordenadas e o declive da reta. Paralelismo de retas e igualdade do declive. Equação vetorial de um reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta. Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano. Geometria analítica no espaço Referenciais cartesianos ortonormados do espaço. Equações de planos paralelos aos planos coordenados. Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos. Distância entre dois pontos no espaço. Equação do plano mediador de um segmento de reta. Equação cartesiana reduzida da superfície esférica. Inequação cartesiana reduzida da esfera. Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço. Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço. Cálculo vetorial no espaço Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial. Equação vetorial da reta no espaço. Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.
--	---

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Sejam $D(x)$ um polinómio de grau 3 e $P(x)$ um polinómio do grau 5. Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ dois polinómios tais que $P(x) = Q(x) \times D(x) + R(x)$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $Q(x)$ e $R(x)$ são ambos polinómios de grau 1.
 (B) $Q(x)$ é um polinómio de grau 2 e $R(x)$ é um polinómio de grau 1.
 (C) $Q(x)$ é um polinómio de grau 2 e $R(x)$ é um polinómio de grau inferior a 3.
 (D) $Q(x)$ é um polinómio de grau 1 e $R(x)$ é o polinómio nulo.

2. Considera, num referencial o.m. xOy , o ponto $P(k, k - 1)$, $k \in \mathbb{R}$. Sejam $A(1, 2)$ e $B(-2, -2)$. Qual é o valor de k de modo que a distância entre A e P seja igual à distância entre B e P ?

- (A) $\frac{5}{14}$ (B) $-\frac{5}{14}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

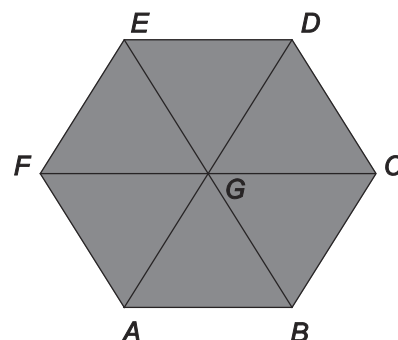
3. Na figura está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$.

Considera as seguintes afirmações:

- I. $A + \overrightarrow{FE} = E$
 II. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$
 III. $F - 2\overrightarrow{DE} = C$

Acerca destas afirmações, pode dizer-se que:

- (A) são todas verdadeiras.
 (B) apenas II e III são verdadeiras.
 (C) apenas I e II são verdadeiras.
 (D) apenas I e III são verdadeiras.



4. Considera as retas r e s definidas no plano por:

$$r: (x, y) = (1, 2) + k(2, 4), k \in \mathbb{R}$$

$$s: 2x - y = 3$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) As retas r e s são concorrentes.
 - (B) O ponto $(3, 2)$ pertence à reta r .
 - (C) As retas r e s são paralelas.
 - (D) O ponto $(3, 2)$ pertence à reta s .
5. Considera, num referencial o.n. xOy , os pontos $A(1, 2, -1)$ e $B(2, 1, 1)$ e o vetor $\vec{u}(a, b, 1)$.
Quais deverão ser os valores de a e de b de forma que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares?
- (A) $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
 - (B) $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$
 - (C) $a = 2$ e $b = -2$
 - (D) $a = -2$ e $b = 2$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Considera os polinómios:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ e } Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

1.1. Determina, usando o Teorema do Resto, o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$.

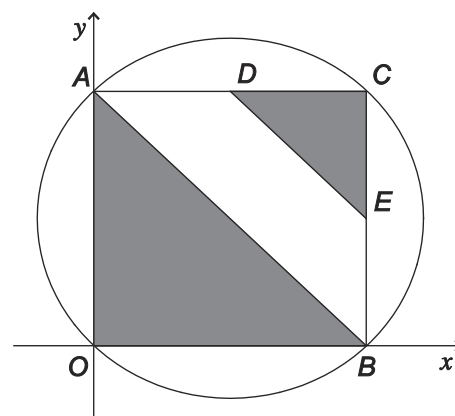
1.2. Determina as raízes de $P(x)$ e fatoriza este polinómio.

1.3. Fatoriza o polinómio $Q(x)$ e resolve a inequação $Q(x) > 0$. Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$, circunscrita ao quadrado $[AOBC]$.

Sabe-se que:

- os vértices A e B do quadrado pertencem aos eixos coordenados;
- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa pelo centro da circunferência;
- $[ADEB]$ é um trapézio isósceles;
- D é o ponto médio de $[AC]$.



2.1. Determina as coordenadas de todos os vértices do quadrado.

2.2. Determina uma equação vetorial da reta AB .

2.3. Escreve uma condição que defina a região do plano a sombreado, incluindo a fronteira.

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$, cuja base é um retângulo.

Sabe-se ainda que:

- os pontos $A(3, 0, 0)$ e $B(0, 2, 0)$ são dois dos vértices da base;
- o centro da base é a origem do referencial;
- a altura do prisma é 8.

3.1. Define por uma condição:

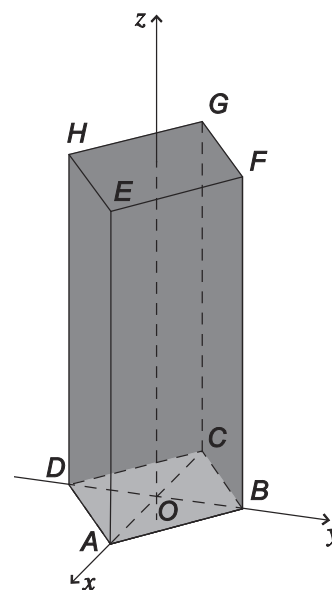
3.1.1. o plano ACE ;

3.1.2. a aresta $[FB]$.

3.2. Identifica e indica as coordenadas de:

3.2.1. $B + \overrightarrow{CH}$

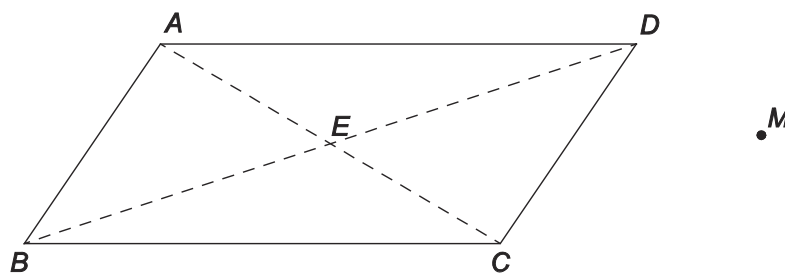
3.2.2. $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}$



3.3. Determina uma equação do plano medidor do segmento de reta $[AF]$. Apresenta a resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3.4. Define analiticamente o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto E é igual a $\|\overrightarrow{AJ}\|$, sendo $J = A + (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{HG})$.

4. Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$. O ponto E é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo. O ponto M é um ponto qualquer do plano.



Prova que:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{ME}$$

- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		40 pontos
1.1.		10 pontos
1.2.		15 pontos
1.3.		15 pontos
2.		35 pontos
2.1.		10 pontos
2.2.		10 pontos
2.3.		15 pontos
3.		55 pontos
3.1.		15 pontos
3.1.1.		5 pontos
3.1.2.		10 pontos
3.2.		10 pontos
3.2.1.		5 pontos
3.2.2.		5 pontos
3.3.		15 pontos
3.4.		15 pontos
4.		20 pontos

TOTAL 200 pontos

GRUPO I

1. Opção (C)
2. Opção (A)
3. Opção (B)
4. Opção (C)
5. Opção (B)

GRUPO II

1.

1.1. Resto = 0

1.2. $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

1.3. $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2.

2.1. $A(0, 4)$, $O(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(4, 4)$

2.2. $(x, y) = (0, 4) + k(4, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

2.3. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 4) \vee (x \leq 4 \wedge y \leq 4 \wedge y \geq -x + 6)$

3.

3.1.

3.1.1. $y = 0$

3.1.2. $x = 0 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 8$

3.2.

3.2.1. $E(3, 0, 8)$

3.2.2. $\overrightarrow{HD}(0, 0, -8)$

3.3. $-6x + 4y + 16z - 59 = 0$

3.4. $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 65$

4. Ao cuidado do aluno.

Matriz Teste 4

Domínios	Conteúdos
GA10	Geometria analítica no plano Referenciais ortonormados. Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respectivas coordenadas. Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta. Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta. Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos. Equação cartesiana reduzida da circunferência. Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal. Inequações cartesianas de semiplanos. Inequações cartesianas de círculos. Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano. Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. Cálculo vetorial no plano Norma de um vetor. Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico. Diferença entre vetores. Propriedades algébricas das operações com vetores. Coordenadas de um vetor. Vetor posição de um ponto e respetivas coordenadas. Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares. Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor. Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas. Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta. Paralelismo de retas e igualdade do declive. Equação vetorial de uma reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta. Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano.

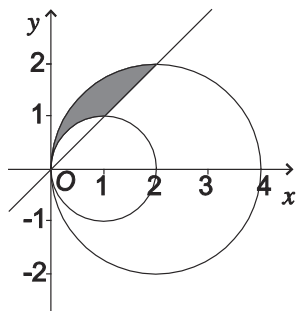
	Geometria analítica no espaço Referenciais cartesianos ortonormados do espaço. Equações de planos paralelos aos planos coordenados. Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos. Distância entre dois pontos no espaço. Equação do plano mediador de um segmento de reta. Equação cartesiana reduzida da superfície esférica. Inequação cartesiana reduzida da esfera. Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço. Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço. Cálculo vetorial no espaço Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial. Equação vetorial da reta no espaço. Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.
FRVR10	Generalidades acerca de funções Produtos cartesianos de conjuntos. Gráficos de funções. Restrições de uma função. Imagem de um conjunto por uma função. Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Composição de funções. Função inversa de uma função bijetiva. Generalidades acerca de funções reais de variável real Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas. Propriedades geométricas dos gráficos de funções. Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares. Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respectiva inversa. Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x + c)$ e $f(x) + d$, com a, b, c, d números reais, a e b não nulos. Monotonia, extremos e concavidade Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas. Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos. Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real.

GRUPO I

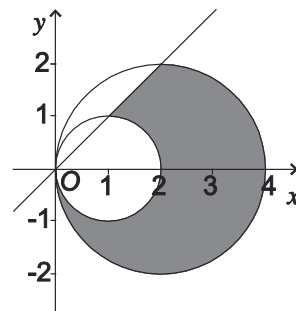
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Qual dos seguintes conjuntos de pontos do plano (indicados a sombreado) pode ser definido pela condição $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x - 1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge y \leq x$?

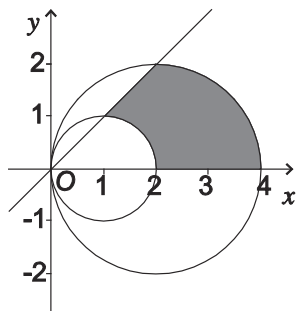
(A)



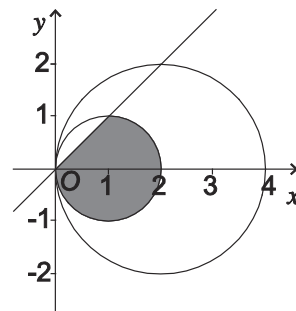
(B)



(C)



(D)

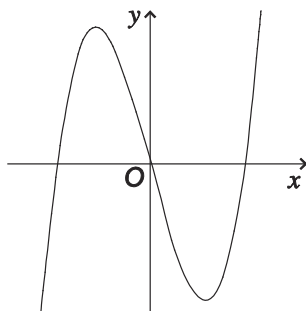


2. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera de diâmetro $[AB]$, em que $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, 3, 5)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

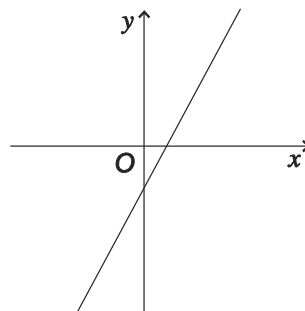
- (A) O centro da esfera é o ponto $(-1, 2, 4)$ e o seu raio $\frac{\sqrt{14}}{2}$.
- (B) O centro da esfera é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4)$ e o seu raio $\frac{\sqrt{14}}{2}$.
- (C) O centro da esfera é o ponto $(-1, 2, 4)$ e o seu raio $3\sqrt{10}$.
- (D) O centro da esfera é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4)$ e o seu raio $3\sqrt{10}$.

3. Indica qual dos seguintes gráficos pode ser o de uma função ímpar e bijetiva.

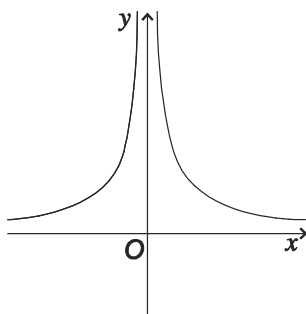
(A)



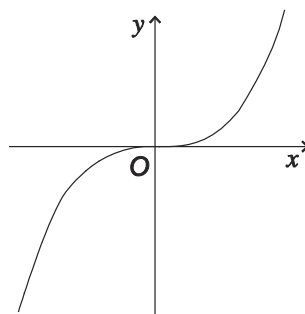
(B)



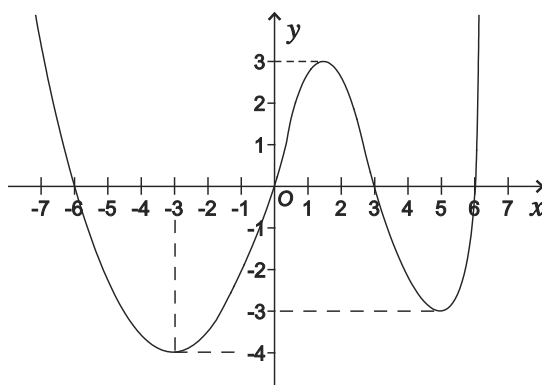
(C)



(D)



4. Considera a função f representada abaixo.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função f tem um máximo absoluto igual a 3 e um mínimo absoluto igual a -3 .
- (B) A função f tem um máximo absoluto igual a 3 e um mínimo absoluto igual a -4 .
- (C) A função f não tem máximo absoluto e tem um mínimo absoluto igual a -4 .
- (D) A função f não tem máximo absoluto e tem um mínimo absoluto igual a -3 .

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x$. Qual deverá ser a expressão analítica da função g de modo que $(g \circ f)(1) = 5$?

- (A) $g(x) = -3x + 3$
- (B) $g(x) = 3x - 1$
- (C) $g(x) = 2x + 3$
- (D) $g(x) = -2x + 1$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Num referencial o.n. xOy , considera os pontos $A(1, 3)$ e $B(2, -1)$ e o vetor $\vec{u}(-2, 6)$.
 - 1.1. Escreve as equações paramétricas da reta r que passa em A e é paralela a $\vec{u}$.
 - 1.2. Determina k de modo que o vetor $\vec{v}(-2k, 4k - 2)$ seja colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$.
 - 1.3. Identifica e define analiticamente o conjunto dos pontos do plano cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ é igual a $\|\overrightarrow{AB}\|^2 - 7$.

2. Na figura está representado, em referencial o.n.

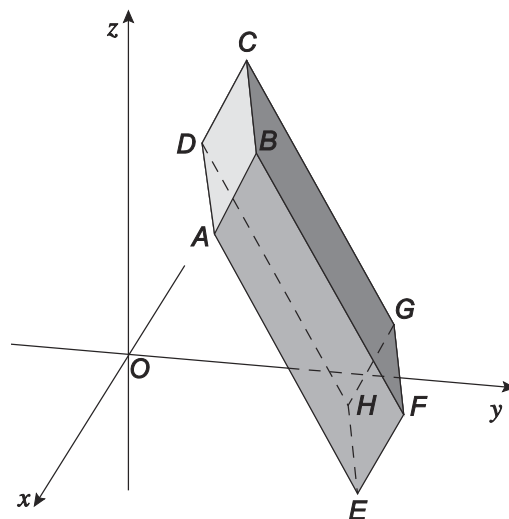
$Oxyz$, um prisma quadrangular não regular

$[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 5, 8)$;
- o ponto B tem coordenadas $(3, 8, 14)$;
- o ponto D tem coordenadas $(-5, 3, 11)$;
- o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(-1, -4, -8)$.

- 2.1. Define analiticamente o plano que contém o ponto A e é paralelo ao plano xOz .
- 2.2. Escreve uma equação vetorial da reta FB .
- 2.3. Determina as coordenadas dos pontos E e C .



3. Considera a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$ e a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 4$.
 - 3.1. Justifica que f é bijetiva e determina uma expressão para $f^{-1}(x)$.
 - 3.2. Mostra que g é uma função par.
 - 3.3. Define a função $g \circ f$.
 - 3.4. Sabe-se que o ponto $A(1, -3)$ pertence ao gráfico da função g . Determina as coordenadas de A' , imagem de A pela translação segundo o vetor $\vec{u}(-1, 2)$.
 - 3.5. Indica uma expressão analítica da função h , cujo gráfico é simétrico do gráfico de f relativamente à origem do referencial.

4. De uma função real de variável real f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f(0) = 0$;
- f é par;
- f é estritamente decrescente em $[0, 10]$;
- f é estritamente crescente em $[10, +\infty[$.

Das seguintes afirmações apenas uma é necessariamente verdadeira. Indica qual e apresenta uma razão para rejeitar cada uma das outras afirmações.

- f tem um máximo absoluto em $x = 0$.
- f não tem zeros.
- f é estritamente decrescente em $[-10, 0]$;
- f é estritamente decrescente em $] -\infty, -10]$.

- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		35 pontos
1.1.		10 pontos
1.2.		10 pontos
1.3.		15 pontos
2.		35 pontos
2.1.		10 pontos
2.2.		10 pontos
2.3.		15 pontos
3.		60 pontos
3.1.		15 pontos
3.2.		10 pontos
3.3.		15 pontos
3.4.		10 pontos
3.5.		10 pontos
4.		20 pontos

TOTAL 200 pontos

Soluções

GRUPO I

1. Opção (B)
2. Opção (B)
3. Opção (D)
4. Opção (C)
5. Opção (D)

GRUPO II

1.

1.1. $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

1.2. $k = -\frac{1}{2}$

1.3. Elipse, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2.

2.1. $y = 5$

2.2. $(x, y, z) = (3, 8, 14) + k(1, 4, 8), k \in \mathbb{R}$

2.3. $E(0, 1, 0), C(-3, 6, 17)$

3.

3.1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

3.2. Ao cuidado do aluno.

3.3. $D = \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 5$

3.4. $A'(0, -1)$

3.5. $h(x) = 2x + 3$

4. Afirmação IV.

Domínios	Conteúdos
FRVR10	Generalidades acerca de funções Produtos cartesianos de conjuntos. Gráficos de funções. Restrições de uma função. Imagem de um conjunto por uma função. Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Composição de funções. Função inversa de uma função bijetiva. Generalidades acerca de funções reais de variável real Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas. Propriedades geométricas dos gráficos de funções. Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares. Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa. Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x + c)$ e $f(x) + d$, com a, b, c, d números reais, a e b não nulos. Monotonia, extremos e concavidade Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas. Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos. Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real. Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo de funções definidas por ramos Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas. Funções definidas por ramos. Estudo da função $x \rightarrow a x - b + c$, $a \neq 0$. As funções $x \rightarrow \sqrt{x}$ e $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas. Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x - b} + c$, $a \neq 0$ e $a\sqrt[3]{x - b} + c$, $a \neq 0$.

	Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais. Resolução de problemas Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas. Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real. Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
--	---

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considera, em $\mathbb{R}$, as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x - 2$. Quais poderão ser os valores de a , b e c de modo que $(f \circ g)(a) = 25$, $f^{-1}(b) = 9$ e $g^{-1}(c) = 10$?

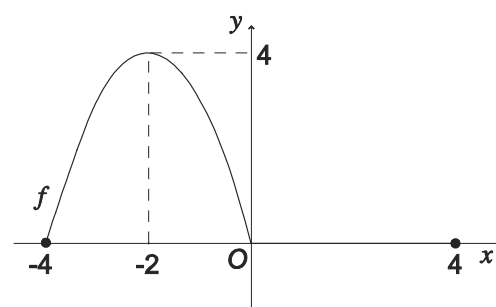
(A) $a = -1, b = 81$ e $c = 28$

(B) $a = -5, b = 3$ e $c = 4$

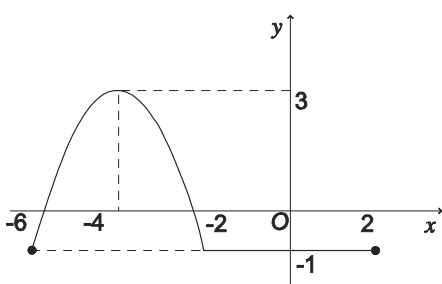
(C) $a = -5, b = 81$ e $c = 28$

(D) $a = -1, b = 8$ e $c = 4$

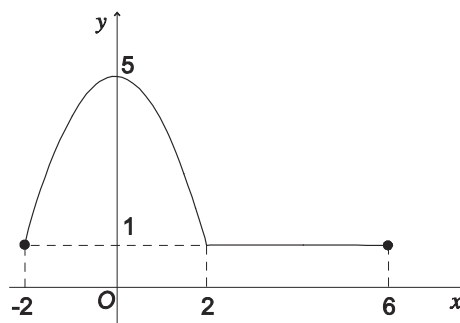
2. Considera a função f , de domínio $[-4, 4]$ e contradomínio $[0, 4]$, representada graficamente na figura. Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função g definida por $g(x) = f(x - 2) + 1$?



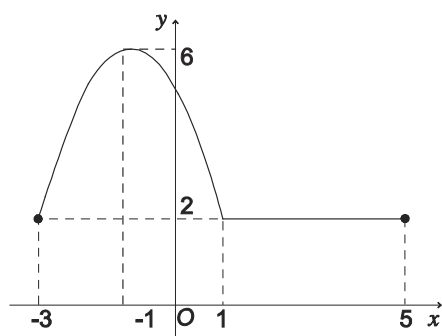
(A)



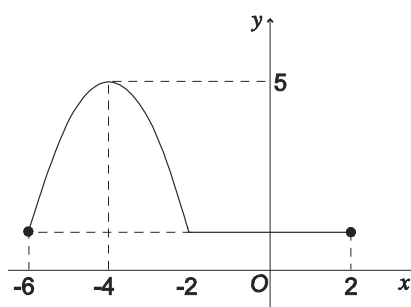
(B)



(C)

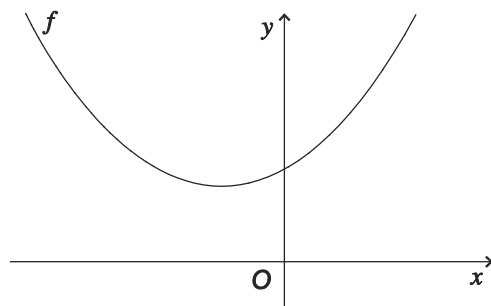


(D)



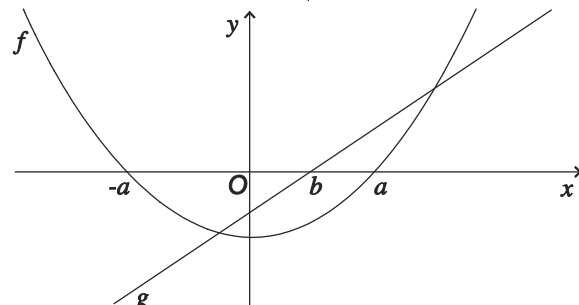
3. Na figura está representado o gráfico de uma função quadrática f , de domínio $\mathbb{R}$. Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ (B) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$
 (C) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ (D) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$



4. Considera as funções f e g representadas graficamente por uma parábola e por uma reta, respetivamente. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) $\forall x \in]-a, b[, (f \times g)(x) > 0$
 (B) $\exists x \in]-a, a[: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$
 (C) $\exists x \in]a, +\infty[: (f - g)(x) = 0$
 (D) $\forall x \in]-a, a[, g(x) \geq f(x)$



5. Sendo x um número real, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

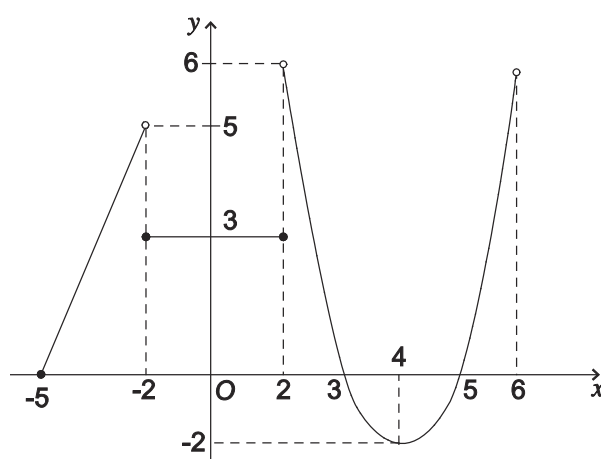
- (A) Se $x > 0$, então $\sqrt{x^2} = -|x|$. (B) Se $x > 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$.
 (C) Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = x$. (D) Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Considera uma função f , de domínio $[-5, 6]$, cujo gráfico é o representado na figura.



- 1.1. Indica um intervalo onde a função seja crescente e negativa.
 1.2. Comenta a afirmação: "A função f é injetiva no intervalo $[2, 4]$ ".
 1.3. Indica os valores de k de modo que $f(x) = k$ tenha exatamente três soluções.
 1.4. Sabendo que f é uma função definida por ramos, escreve uma sua expressão analítica.

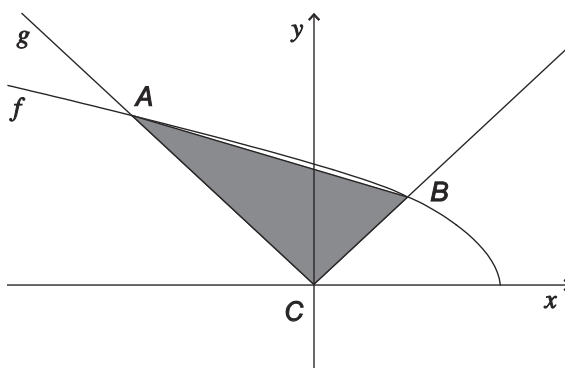
2. Um modelo de um foguetão é lançado verticalmente do cimo de um prédio e a sua altura h , em metros acima do solo, é dada, em função de t , tempo em segundos após o lançamento, por:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25$$

- 2.1. Qual é a altura do modelo no instante em que foi lançado?
- 2.2. Escreve a expressão dada na forma $h(t) = a(t - b)^2 + c$ e indica a altura máxima atingida pelo modelo.
- 2.3. Quanto tempo esteve o modelo a uma altura superior a 25 metros?
- 2.4. Ao fim de quanto tempo o modelo atingiu o solo?

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy :

- parte do gráfico da função f , de domínio $]-\infty, 2]$, definida por $f(x) = \sqrt{2 - x}$;
- parte do gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x|$;
- os pontos A e B são os pontos de interseção das duas funções e o ponto C é o vértice da função g .



- 3.1. Determina a área do triângulo $[ABC]$.
- 3.2. Resolve analiticamente a inequação $f(x) > 3$ e apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.
- 3.3. Considera a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x + 1) - 2$.
- 3.3.1. Indica o domínio e o contradomínio de h .
- 3.3.2. Determina os zeros de h .
- 3.3.3. Define h sem usar o símbolo de módulo.
4. Mostra que se uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, é par, então não tem inversa.

- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		45 pontos
1.1.		5 pontos
1.2.		10 pontos
1.3.		10 pontos
1.4.		20 pontos
2.		40 pontos
2.1.		5 pontos
2.2.		15 pontos
2.3.		10 pontos
2.4.		10 pontos
3.		55 pontos
3.1.		15 pontos
3.2.		10 pontos
3.3.		30 pontos
3.3.1.		10 pontos
3.3.2.		10 pontos
3.3.3.		10 pontos
4.		10 pontos

TOTAL 200 pontos

GRUPO I

1. Opção (A)
2. Opção (B)
3. Opção (C)
4. Opção (D)
5. Opção (D)

GRUPO II

1.

1.1. $[4, 5[$, por exemplo.

1.2. Afirmação falsa.

1.3. $[0, 3[\cup]3, 5[$

$$1.4. f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x + \frac{25}{3} & \text{se } x \in [-5, -2[\\ 3 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 2x^2 - 16x + 30 & \text{se } x \in]2, 6[\end{cases}$$

2.

2.1. 25 metros

2.2. $h(t) = -5(t - 2)^2 + 45$; 45 metros

2.3. 4 segundos

2.4. 5 segundos

3.

3.1. 2 u.a.

3.2. $] -\infty, -7[$

3.3.

3.3.1. $D = \mathbb{R}$ e $D' = [-2, +\infty[$

3.3.2. $\{-3, 1\}$

$$3.3.3. h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 3 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

4. Ao cuidado do aluno.

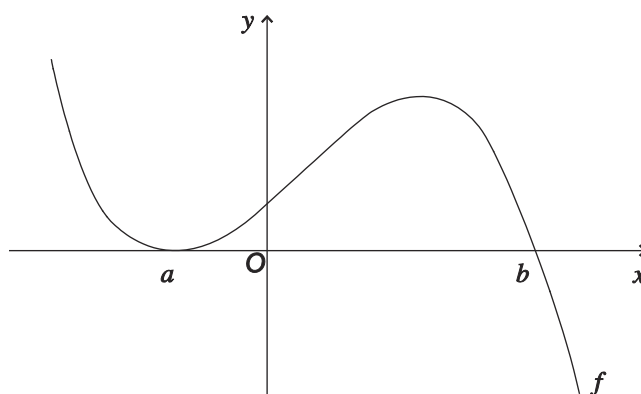
Matriz Teste 6

Domínios	Conteúdos
FRVR10	Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo de funções definidas por ramos Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas. Funções definidas por ramos. Estudo da função $x \rightarrow a x - b + c, a \neq 0$. As funções $x \rightarrow \sqrt{x}$ e $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas. Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x - b} + c, a \neq 0$ e $a\sqrt[3]{x - b} + c, a \neq 0$. Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais. Resolução de problemas Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica e composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas. Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real. Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
EST10	Características amostrais Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição. Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística. Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra. Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra. Percentil de ordem k; propriedades do percentil de ordem k. Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra. Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f de domínio $\mathbb{R}$.
A função f tem apenas dois zeros: a e b .



Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g ?

- (A) $]-\infty, b]$ (B) $]-\infty, a]$
(C) $[a, b]$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$

2. Sabe-se que o ponto $P(-7, -1)$ pertence ao gráfico da função f definida por:

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x+a} + 3, \text{ onde } a \in \mathbb{R}$$

Qual é o valor de a ?

- (A) -2 (B) 2 (C) -1 (D) 1

3. Sabendo que $\sum_{i=1}^{50} (5 + i) = 10k + \sum_{i=5}^{50} i$, qual é o valor de k ?
- (A) 3 (B) 6
(C) 25 (D) 26
4. Numa turma de 30 alunos há 12 rapazes. As médias das classificações obtidas no último teste de Matemática foram 16,2 e 15,3, para as raparigas e para os rapazes, respetivamente. O valor da média das classificações da turma é:
- (A) 15,84
(B) 15,75
(C) 15,66
(D) 15,50
5. A média e o desvio-padrão dos salários dos trabalhadores de uma empresa são, em euros, $\bar{x} = 900,5$ e $s = 52$. O dono da empresa resolveu aumentar todos os salários em 6%. Após o aumento, quais são os valores da média e do desvio-padrão?
- (A) $\bar{x} = 906,5$ e $s = 53,06$
(B) $\bar{x} = 906,5$ e $s = 58$
(C) $\bar{x} = 954,53$ e $s = 83,2$
(D) $\bar{x} = 954,53$ e $s = 55,12$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} - 2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

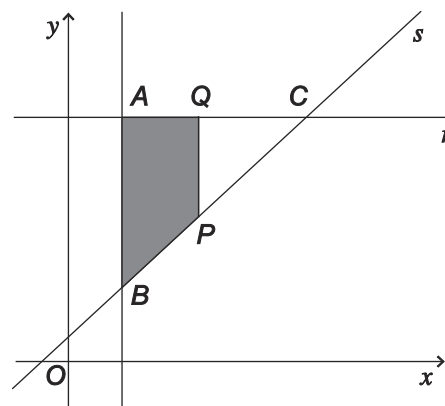
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolve as duas alíneas seguintes.

- 1.1. Determina o conjunto dos números reais que são solução da condição $f(x) = 1$.
- 1.2. Resolve, em $]2, +\infty[$, a condição $f(x) \geq 2$. Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

2. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy , as retas r , s e t . Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de interseção das retas r e s com a reta t e o ponto C é o ponto de interseção das retas r e s .

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $y = 10$;
- a reta s é definida pela equação $y = x + 1$;
- a reta t é definida pela equação $x = 2$.



Considera que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P , de forma que a abcissa do ponto Q seja sempre igual à abcissa do ponto P . Seja x a abcissa do ponto P .

2.1. Mostra que a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 \quad (x \in]2, 9])$$

2.2. Sem recorrer à calculadora, determina os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 12. Apresenta a tua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

2.3. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$$

A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, onde a , h e k são números reais. Determina os valores de a , h e k .

3. Para uma certa amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$, sabe-se que $d_1 = 1$, $d_2 = -3$, $d_4 = -5$, $d_6 = -4$, $d_8 = -5$, $d_{10} = 0$, $d_5 = d_9 = 2d_3$ e $d_7 = 3d_3$, onde $d_i = x_i - \bar{x}$.

3.1. Determina os valores de d_3 , d_5 , d_7 e d_9 .

3.2. Admite que $d_3 = 3$, $d_5 = 3$, $d_7 = 4$ e $d_9 = 6$.

3.2.1. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos, calcula o desvio-padrão da amostra. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

3.2.2. Sabendo que $x_1 = 20$, identifica os três primeiros elementos da amostra $\tilde{x}$ e calcula o valor da respetiva média.

4. Um pediatra registou numa tabela a idade, em meses, em que surgiu o primeiro dente a 30 dos seus pacientes.

Idade (meses)	Número de crianças
3	3
4	4
5	2
6	4
7	1
8	7
9	1
10	4
11	1
12	3

- 4.1. Para este conjunto de dados, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos, determina:
- 4.1.1. a média (apresenta o resultado aproximado às décimas);
 - 4.1.2. o desvio-padrão (apresenta o resultado aproximado às décimas);
 - 4.1.3. o percentil 30.
- 4.2. Determina a que percentil pertence uma criança cujo primeiro dente tenha surgido aos 11 meses.

- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		35 pontos
1.1.		20 pontos
1.2.		15 pontos
2.		45 pontos
2.1.		15 pontos
2.2.		15 pontos
2.3.		15 pontos
3.		30 pontos
3.1.		10 pontos
3.2.		20 pontos
3.2.1.		10 pontos
3.2.2.		10 pontos
4.		40 pontos
4.1.		30 pontos
4.1.1.		10 pontos
4.1.2.		15 pontos
4.1.3.		5 pontos
4.2.		10 pontos

TOTAL 200 pontos

Soluções

GRUPO I

1. Opção (A)
2. Opção (C)
3. Opção (D)
4. Opção (A)
5. Opção (D)

GRUPO II

1.

1.1. $\{-6, \sqrt{2}, 4\}$

1.2. $]2, 3] \cup [5, +\infty[$

2.

2.1. Ao cuidado do aluno.

2.2. $]4, 9[$

2.3. $a = -\frac{1}{2}, h = 9, k = \frac{49}{2}$

3.

3.1. $d_3 = 2, d_5 = 4, d_7 = 6, d_9 = 4$

3.2.

3.2.1. $s_x \approx 4$

3.2.2. $x_1 = 20, x_2 = 16, x_3 = 22, \bar{x} = 19$

4.

4.1.

4.1.1. $\bar{x} \approx 7,3$

4.1.2. $s_x \approx 2,8$

4.1.3. $P_{30} = 5,5$

4.2. P_{87}, P_{88} e P_{89}

Matriz Teste Global

Itens	Domínios	Objetivos
I. 1	LTC10_10.1	Operar com proposições.
I. 2	ALG10_10.2	Definir e efetuar operações com potências de expoente racional.
I. 3	ALG10_10.4 ALG10_10.5	Efetuar operações com polinômios. Resolver problemas.
I. 4	FRVR10_10.1	Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva.
I. 5	EST10_10.2 EST10_10.3 EST10_10.4	Utilizar as propriedades da média de uma amostra. Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra. Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k .
II. 1	LTC10_10.1	Operar com proposições.
II. 2	ALG10_10.1 ALG10_10.3 GA10_10.1 GA10_10.2 GA10_10.3 GA10_10.5 GA10_10.6	Definir e efetuar operações com radicais. Resolver problemas. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano. Resolver problemas. Operar com vetores. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano. Resolver problemas.
II. 3	ALG10_10.1 ALG10_10.3 GA10_10.7 GA10_10.8 GA10_10.9 GA10_10.10 GA10_10.11	Definir e efetuar operações com radicais. Resolver problemas. Definir referenciais cartesianos no espaço. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço. Definir vetores do espaço. Operar com coordenadas de vetores no espaço. Resolver problemas.

II. 4	LTC10_10.2	Relacionar condições e conjuntos.
	LTC10_10.3	Resolver problemas.
	FRVR10_10.2	Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respectivas funções.
	FRVR10_10.5	Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções.
	FRVR10_10.6	Resolver problemas.
II. 5	EST10_10.2	Utilizar as propriedades da média de uma amostra.
	EST10_10.3	Definir e conhecer as propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra.
	EST10_10.4	Definir e conhecer as propriedades do percentil de ordem k .
	EST10_10.5	Resolver problemas.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considera a proposição:

$$p: \sim(\sim(a \wedge \sim b) \vee (a \Rightarrow b))$$

Quais os valores lógicos de a e de b de modo que a proposição p seja verdadeira?

- (A) a é verdadeira e b é verdadeira.
- (B) a é verdadeira e b é falsa.
- (C) a é falsa e b é verdadeira.
- (D) a é falsa e b é falsa.

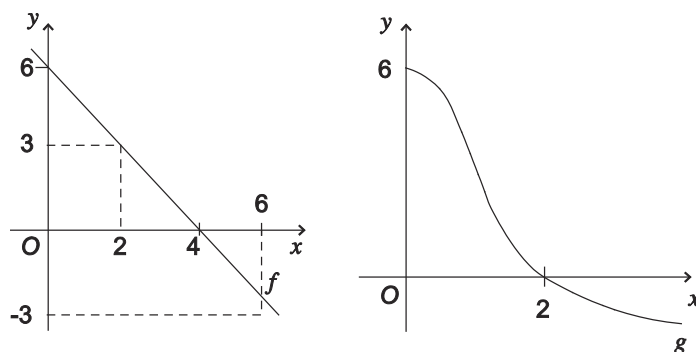
2. Sejam x, y e z números reais positivos. Qual das seguintes expressões é equivalente a $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{5}{6}}$?

- (A) $\sqrt[3]{xy^2z^3}$
- (B) $\sqrt[6]{xy^2z^5}$
- (C) $\sqrt[6]{x^3y^2z^5}$
- (D) $\sqrt[6]{x^3y^4z^5}$

3. O polinómio $P(x) = 6x^2 + x + 7$ tem o mesmo resto quando dividido por $x - a$ e por $x - 2a$, onde $a \neq 0$. Qual é o valor de a ?

- (A) $a = -\frac{1}{6}$
- (B) $a = -\frac{1}{18}$
- (C) $a = -\frac{7}{6}$
- (D) $a = -\frac{7}{12}$

4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , parte dos gráficos de duas funções reais de variável real f e g , de domínio $\mathbb{R}$.



Qual é o valor de $f^{-1}(6) + (f \circ g)(2)$?

- (A) 0 (B) -1 (C) 3 (D) 6
5. Considera as seguintes afirmações.
- I. É sempre possível determinar a média dos valores de uma amostra qualquer.
 - II. O desvio-padrão é uma medida de dispersão que se exprime na mesma unidade dos valores da amostra.
 - III. Os percentis de uma amostra são sempre valores observados.

O que se pode dizer quanto ao seu valor lógico?

- (A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas II é verdadeira.
(C) Apenas III é verdadeira.
(D) São todas falsas.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

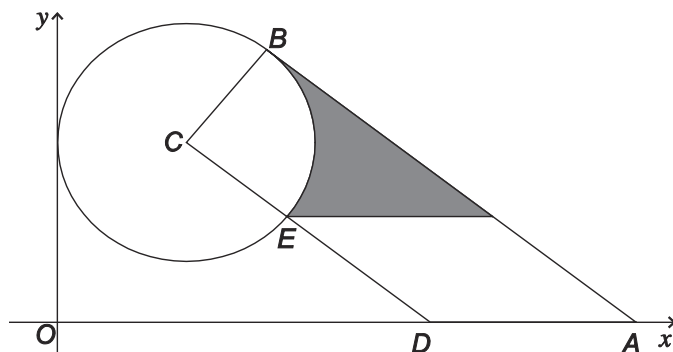
1. Mostra que, para quaisquer proposições p e q , se tem:

$$(p \Rightarrow q \wedge p) \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$$

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy , a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e o trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- C é o centro da circunferência;
- a reta AB tem equação $(x, y) = (2\sqrt{2}, 5) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$.



2.1. Determina a equação reduzida da reta CD .

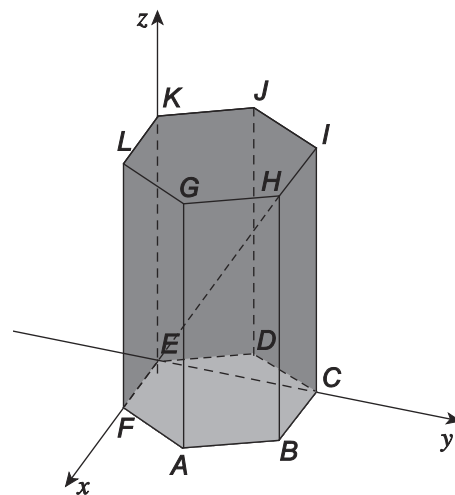
2.2. Escreve uma condição que defina a região a sombreado, incluindo a fronteira.

2.3. Mostra que os pontos médios dos lados de qualquer trapézio são os vértices de um paralelogramo.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal regular $[ABCDEFGH IJKL]$, cuja base está contida no plano xOy .

Sabe-se que:

- a medida da aresta da base do prisma é 4 cm;
- a medida da sua altura é igual à medida do perímetro da sua base;
- o vértice E coincide com a origem do referencial, o vértice F pertence ao eixo Ox , o vértice C pertence ao eixo Oy e o vértice K pertence ao eixo Oz .



3.1. Escreve uma condição que defina o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto F é igual a $\|\overrightarrow{AF}\|$.

3.2. Identifica e indica as coordenadas do ponto P da figura tal que $\overrightarrow{EP}$ é colinear com $\overrightarrow{AH}$.

3.3. Determina $\|\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EJ}\|$.

4. Considera as funções f, g e h definidas por $f(x) = x^2 + x - 6$, $g(x) = \sqrt{x+3}$ e $h(x) = |x-2|$ e seja $A = \mathbb{R}^+$.

Usando métodos exclusivamente analíticos, resolve os quatro itens seguintes.

4.1. Indica o domínio e o contradomínio da função $g(x-1) + 1$.

4.2. Determina o valor lógico de $\exists x \in A: 2g(x) = h(-2)$.

4.3. Determina os valores de $x \in A$ tais que $f(x) \leq 6$.

4.4. Mostra que $\forall x \in A, f(x) \leq 0 \vee g(x) \geq 2$ é uma condição universal.

5. As classificações dos 30 alunos de uma turma num determinado teste foram, em valores arredondados às unidades, as seguintes:

7	7	8	10	11	11
12	12	12	13	13	13
13	14	15	15	15	15
16	16	16	16	17	17
18	18	18	19	19	20

5.1. Determina os percentis de ordem 20 e 75.

5.2. Se a todas as classificações se subtrair um valor, qual é a relação entre os valores da média e do desvio-padrão dos novos dados e dos dados apresentados acima?

- FIM -

Cotações

GRUPO I 50 pontos

Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos

GRUPO II 150 pontos

1.		10 pontos
2.		40 pontos
2.1.		10 pontos
2.2.		15 pontos
2.3.		15 pontos
3.		30 pontos
3.1.		10 pontos
3.2.		10 pontos
3.3.		10 pontos
4.		50 pontos
4.1.		10 pontos
4.2.		10 pontos
4.3.		15 pontos
4.4.		15 pontos
5.		20 pontos
5.1.		10 pontos
5.2.		10 pontos

TOTAL 200 pontos

Soluções

GRUPO I

1. Opção (B)
2. Opção (D)
3. Opção (B)
4. Opção (D)
5. Opção (B)

GRUPO II

1. Ao cuidado do aluno.

2.

2.1. $y = -x + 5$

2.2. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 4 \wedge y \leq -x + 5 + 2\sqrt{2} \wedge y \geq 3 - \sqrt{2}$

2.3. Ao cuidado do aluno.

3.

3.1. $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$

3.2. $J(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 12)$

3.3. $4\sqrt{13}$ cm

4.

4.1. $D = [-2, +\infty[, D' = [1, +\infty[$

4.2. Afirmação verdadeira.

4.3. $]0, 3]$

4.4. Ao cuidado do aluno.

5.

5.1. $P_{20} = 11,5, P_{75} = 17$

5.2. A média será a anterior menos um valor e o desvio-padrão será igual.

05.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO MANUAL

Materiais disponíveis em formato editável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

**Versão integral
disponível
para utilizadores
do *Expoente*¹⁰
em setembro
de 2015**

**Versão de
Demonstração**

Tema I - Introdução à lógica bivalente e à teoria de conjuntos

Unidade 1 - Proposições

Páginas 13 a 29

1.

- a) " 3^2 " é uma designação.
- b) " $3^2 = 6$ " é uma proposição.
- c) "2 é o único número primo par" é uma proposição.
- d) "A reta r que passa pelo ponto A é perpendicular à reta s " é uma designação.
- e) " $\sqrt{2} > \pi$ " é uma proposição.

2.

- b) " $3^2 = 6$ " é uma proposição falsa.
- c) "2 é o único número primo par" é uma proposição verdadeira.
- e) " $\sqrt{2} > \pi$ " é uma proposição falsa.

3. Por exemplo:

- a) p : "Paris é a capital de Espanha".
 $\neg p$: "Paris não é a capital de Espanha".
- b) p : "Saramago escreveu o *Memorial do Convento*".
 $\neg p$: "Não é verdade que Saramago tenha escrito o *Memorial do Convento*".
- c) p : "Todas as crianças gostam de brincar com legos".
 $\neg p$: "Nem todas as crianças gostam de brincar com legos".

4.

- a) p : "12 é um número natural" – proposição verdadeira
 $\neg p$: "12 não é um número natural" – proposição falsa
- b) p : " $1 + 2 \times 3 = 9$ " – proposição falsa
 $\neg p$: " $1 + 2 \times 3 \neq 9$ " – proposição verdadeira
- c) p : " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " – proposição falsa
 $\neg p$: " $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ " – proposição verdadeira
- d) p : "3 não é um divisor comum de 6 e de 9" – proposição falsa
 $\neg p$: "3 é um divisor comum de 6 e de 9" – proposição verdadeira
- e) p : "Nem todos os números múltiplos de 5 terminam em 5" – proposição verdadeira
 $\neg p$: "Todos os números múltiplos de 5 terminam em 5" – proposição falsa

5. p : "As rosas são vermelhas".

q : "As margaridas são brancas".

- a) $p \wedge q$: "As rosas são vermelhas e as margaridas são brancas".
- b) $(\neg p) \wedge q$: "As rosas não são vermelhas e as margaridas são brancas".

6.

- a) "As rosas são vermelhas e as margaridas não são brancas": $p \wedge (\neg q)$
- b) "Nem as rosas são vermelhas, nem as margaridas são brancas": $(\neg p) \wedge (\neg q)$

7. p : "7 é um número racional".

q : " $\frac{1}{3}$ é um número inteiro".

- a) $p \vee q$: "7 é um número racional ou $\frac{1}{3}$ é um número inteiro".
- b) $(\neg p) \vee q$: "7 não é um número racional ou $\frac{1}{3}$ é um número inteiro".
- c) $(\neg p) \vee (\neg q)$: "7 não é um número racional ou $\frac{1}{3}$ não é um número inteiro".

8. p : "7 é um número racional" – proposição verdadeira

q : " $\frac{1}{3}$ é um número inteiro" – proposição falsa

Assim:

$\neg p$ é uma proposição falsa, pois $\neg V \Leftrightarrow F$.

$\neg q$ é uma proposição verdadeira, pois $\neg F \Leftrightarrow V$.

$p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee F) \Leftrightarrow V$.

$\neg p \vee q$ é uma proposição falsa, pois $(F \vee F) \Leftrightarrow F$.

$\neg p \vee \neg q$ é uma proposição verdadeira, pois $(F \vee V) \Leftrightarrow V$.

9. A conjunção de duas proposições ($p \wedge q$) é verdadeira apenas no caso de ambas as proposições serem verdadeiras; assim, tem-se que p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição verdadeira. Logo:

- a) p é uma proposição verdadeira.
- b) $\neg q$ é uma proposição falsa, pois é a negação de uma proposição verdadeira ($\neg V \Leftrightarrow F$).
- c) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de duas proposições verdadeiras ($(V \vee V) \Leftrightarrow V$).
- d) $\neg(p \vee q)$ é uma proposição falsa, pois é a negação de uma proposição verdadeira ($\neg(V \vee V) \Leftrightarrow (\neg V) \Leftrightarrow F$).
- e) $p \wedge \neg q$ é uma proposição falsa, pois é a conjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \wedge F) \Leftrightarrow F$).
- f) $p \wedge F$ é uma proposição falsa, pois é a conjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \wedge F) \Leftrightarrow F$).
- g) $p \vee F$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \vee F) \Leftrightarrow V$).

10.

a) "15 é um número primo" é uma proposição falsa.

"15 é um número ímpar" é uma proposição verdadeira.

Assim, a conjunção das duas "15 é um número primo e ímpar" é uma proposição falsa.

- b) "2 é um divisor de 100" e "5 é um divisor de 100" são ambas proposições verdadeiras; assim, a conjunção das duas "tanto 2 como 5 são divisores de 100" é uma proposição verdadeira.
- c) "16 é múltiplo de 5" e "16 é múltiplo de 6" são ambas proposições falsas; assim, a disjunção das duas "16 é múltiplo de 5 ou de 6" é uma proposição falsa.
- d) " $\pi > 3,14$ " é uma proposição verdadeira e " $-1 < -2$ " é uma proposição falsa; assim, a disjunção das duas " $\pi > 3,14 \vee -1 < -2$ " é uma proposição verdadeira.

11.

a) $\neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b) $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

c) $p \wedge \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

12. $p \vee (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \vee (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$p \vee (\neg p \vee q)$ é uma tautologia, pois verifica-se que é verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições p e q .

13. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, quaisquer que sejam as proposições p , q e r .

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são iguais. Logo, $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, como queríamos demonstrar.

14.

a) $p \wedge (\neg p \wedge q)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \wedge q \\ &\Leftrightarrow F \wedge q \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

b) $p \vee (\neg p \vee q)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow V \vee q \\ &\Leftrightarrow V \end{aligned}$$

c) $p \wedge (\neg p \vee q)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow F \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge q \end{aligned}$$

15. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, quaisquer que sejam as proposições p e q .

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p \wedge \neg q)$ são iguais. Logo, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, como queríamos demonstrar.

16.

a) $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

b) $\neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$

c) $\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$
 $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r))$
 $\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee r))$

17. p : "A Ana é escritora".

q : "A Ana é famosa".

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

"A Ana não é escritora ou não é famosa".

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

"A Ana não é escritora nem é famosa".

c) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

"A Ana é escritora e não é famosa".

d) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

"A Ana é escritora ou é famosa".

18. p : "O João gosta de Matemática".

q : "O João faz muitos exercícios".

r : "O João não tem bons resultados".

a) i. "Se o João faz muitos exercícios, então gosta de Matemática": $q \Rightarrow p$

ii. "Se o João tem bons resultados, então faz muitos exercícios": $\neg r \Rightarrow q$

iii. "Se o João gosta de Matemática e faz muitos exercícios, então tem bons resultados": $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$

b) i. $(\neg p \vee r) \Rightarrow \neg q$

"Se o João não gosta de Matemática ou não tem bons resultados, então o João não faz muitos exercícios".

ii. $p \Rightarrow (q \wedge \neg r)$

"Se o João gosta de Matemática, então faz muitos exercícios e tem bons resultados".

19. A implicação $p \Rightarrow q$ entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente (p) é verdadeiro e o consequente (q) é falso. Assim:

a) p é uma proposição verdadeira.

b) $\neg q$ é uma proposição verdadeira, pois é a negação de uma proposição falsa.

- c) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).
- d) $\neg p \vee q$ é uma proposição falsa, pois é a disjunção de duas proposições falsas ($\neg p$ e q).
- e) $p \wedge \neg q$ é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras (p e $\neg q$).
- f) $q \Rightarrow p$ é uma proposição verdadeira, pois é a implicação entre duas proposições cujo antecedente (q) é uma proposição falsa e o consequente (p) é uma proposição verdadeira.
- g) $\neg q \Rightarrow \neg p$ é uma proposição falsa, pois é a implicação entre duas proposições cujo antecedente ($\neg q$) é uma proposição verdadeira e o consequente ($\neg p$) é uma proposição falsa.

20. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é uma tautologia.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

21. Sabe-se que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
Logo, $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.
Assim, a disjunção $p \vee q$ pode ser escrita utilizando a implicação e a negação como $\neg p \Rightarrow q$.

22. $(p \Rightarrow q)$: se 10 é um número par, então é divisível por 2.
 $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$: 10 é um número par e não é divisível por 2.

23.

- a) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$
 $\Leftrightarrow (p \wedge \neg(\neg q))$
 $\Leftrightarrow (p \wedge q)$
- b) $\neg(\neg p \Rightarrow q)$
 $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- c) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
 $\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r)$
- d) $p \Rightarrow (p \wedge r)$
 $\Leftrightarrow (p \wedge \neg(q \wedge r))$
 $\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee \neg r))$

24.

- a) $p \Rightarrow (p \vee q)$
 $\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \vee q))$
 $\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q$
 $\Leftrightarrow V \vee q$
 $\Leftrightarrow V$

- b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$
 $\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$
 $\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q))$
 $\Leftrightarrow (V \wedge (\neg p \vee q))$
 $\Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
 $\Leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q))$
 $\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q))$
 $\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q))$
 $\Leftrightarrow (V \vee V)$
 $\Leftrightarrow V$

25. p : "A Ana vai à festa".

q : "A Berta vai à festa".

r : "O Carlos vai à festa".

a) i. "A Ana vai à festa se e só se o Carlos vai à festa":
 $p \Leftrightarrow r$

ii. "A Berta vai à festa se e só se o Carlos não vai à festa": $q \Leftrightarrow \neg r$

b) i. $r \Leftrightarrow (p \wedge q)$: "O Carlos vai à festa se e só se a Ana e a Berta vão à festa".

ii. $(p \vee \neg r) \Leftrightarrow q$: "A Ana vai à festa ou o Carlos não vai se e só se a Berta vai à festa".

26.

- a) Para a proposição $p \Leftrightarrow q$ ser falsa os valores lógicos das proposições p e q têm de ser diferentes, como é referido no enunciado que p é verdadeira, então a proposição q tem de ser falsa.
- b) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da disjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).
- c) $p \wedge q$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da conjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).
- d) $p \Rightarrow q$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da implicação entre duas proposições cujo antecedente é uma proposição verdadeira (p) e o consequente é uma proposição falsa (q).
- e) $\neg(p \wedge \neg q)$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da negação de uma proposição verdadeira ($p \wedge \neg q$ é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras p e $\neg q$).
- f) $\neg p \Rightarrow q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da implicação entre duas proposições falsas ($\neg p$ e q).
- g) $p \Leftrightarrow \neg q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da equivalência entre duas proposições verdadeiras (p e $\neg q$).

27.

- $p \Leftrightarrow q$
 $\Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$
 $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
 $\Leftrightarrow ((p \vee \neg q) \wedge q) \vee ((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$
 $\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p))$
 $\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee F) \vee (F \vee (\neg q \wedge \neg p))$
 $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
 $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, como queríamos demonstrar.

28. $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F	F

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $\neg(p \Leftrightarrow q)$ e $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ são iguais. Logo, $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$, como queríamos demonstrar.

29. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$
 $\Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q) \vee p$
 $\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee p$ (ex. 28, negação da equivalência)
 $\Leftrightarrow (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee p$
 $\Leftrightarrow (((q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)) \wedge ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q))) \vee p$
 $\Leftrightarrow (((q \vee p) \wedge V) \wedge (V \wedge (\neg p \vee \neg q))) \vee p$
 $\Leftrightarrow [(q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee p$
 $\Leftrightarrow [p \vee (q \vee p)] \wedge [p \vee (\neg p \vee \neg q)]$
 $\Leftrightarrow [(p \vee p) \vee q] \wedge [(p \vee \neg p) \vee \neg q]$
 $\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (V \wedge \neg q)$
 $\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V$
 $\Leftrightarrow p \vee q$

30.

- a) $a \Rightarrow b \vee c$
b) $(a \Rightarrow b) \vee c$
c) $a \Leftrightarrow b \Rightarrow \neg c$
d) $a \vee (b \wedge \neg c) \Leftrightarrow a$
e) $(\neg a \Rightarrow b) \wedge c$

Unidade 2 - Condições e conjuntos

Páginas 30 a 61

31.

- a) $A = 4 \pi r^2$
Constantes: 4 e π
Variáveis: A e r
b) $A = \pi r g$
Constante: π
Variáveis: A , r e g

32. $-2x + 1 > 9$, $3x + y = z$, o simétrico de x é y e $x \in]-\infty, 2]$ são expressões proposicionais, pois são expressões com variáveis que se transformam numa proposição quando se substituem as variáveis por objetos convenientes.

33.

- a) $p(x)$: " $x^2 + 1$ é um número par".
Por exemplo:
• Se $x = 3$, $p(x)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($3^2 + 1$ é um número par).
• Se $x = 4$, $p(x)$ transforma-se numa proposição falsa ($4^2 + 1$ é um número par).

b) $p(x)$: " $x^2 - x - 6 = 0$ "

Por exemplo:

- Se $x = -2$, $p(x)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$).
- Se $x = 0$, $p(x)$ transforma-se numa proposição falsa ($0^2 - 0 - 6 = 0$).

c) $p(x, y)$: " $x + y > x$ "

Por exemplo:

- Se $x = 1$ e $y = 2$, $p(x, y)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($1 + 2 > 1$).
- Se $x = 1$ e $y = -3$, $p(x, y)$ transforma-se numa proposição falsa ($1 + (-3) > 1$).

d) $p(x)$: " $x^2 + 1$ é um número positivo".

Qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional numa proposição verdadeira.

e) $p(x)$: " $x - 2 = x + 3$ "

Qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional numa proposição falsa.

34.

- a) " $3x = 10$ " é uma expressão proposicional.
b) "O triplo de x é superior a 10" é uma expressão proposicional.
c) "O triplo de x " é uma expressão designatória.
d) " $x + \pi$ " é uma expressão designatória.
e) " $x < -5 \vee x \geq \frac{1}{4}$ " é uma expressão proposicional.
f) " $x \notin \{1, 3, 5, 15\}$ " é uma expressão proposicional.

35.

- a) Em $\mathbb{N}$, $10x > 1$ é uma condição universal, pois qualquer concretização de x por um número natural transforma a expressão proposicional $10x > 1$ numa proposição verdadeira.

$$10x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{10}$$

- b) Em $\mathbb{Z}$, $x^2 \neq 13$ é uma condição universal, pois qualquer concretização de x por um número inteiro transforma a expressão proposicional $x^2 \neq 13$ numa proposição verdadeira.

$$x^2 \neq 13 \Leftrightarrow x^2 \neq \sqrt{13} \wedge x \neq -\sqrt{13}$$

- c) Em $\mathbb{R}$, $x^2 = 13$ é uma condição possível, mas não universal, pois existe pelo menos um número real negativo que transforma a expressão proposicional $x^2 = 13$ numa proposição verdadeira.

$$x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \sqrt{13} \vee x = -\sqrt{13}$$

36.

a) $x^2 + 2x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Em $\mathbb{N}$, $x^2 + 2x = 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número natural transforma a expressão proposicional $x^2 + 2x = 0$ numa proposição falsa.

b) $x^2 + 2 < 0$
 $\Leftrightarrow x^2 < -2$

Em $\mathbb{R}$, $x^2 + 2 < 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional $x^2 + 2 < 0$ numa proposição falsa.

c) $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

Em $[4, +\infty[$, $(x - 3)(x + 1) = 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número real pertencente ao intervalo $[4, +\infty[$ transforma a expressão proposicional $(x - 3)(x + 1) = 0$ numa proposição falsa.

37. $2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$

a) Em $\mathbb{R}$, por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição possível mas não universal.

b) Em $]-\infty, 5[$, por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição universal.

c) Em $\{5, 7, 10\}$, por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição impossível.

38.

a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ (caso notável)
 $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$.

b) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $x^2 = 0$ é uma condição impossível em $\mathbb{N}$ e é uma condição possível em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$.

c) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
 $x^2 + 1 = 0$ é uma condição impossível em $\mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$.

d) $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
 $-x < 0$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$ e é uma condição possível em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$.

39.

a) Por exemplo:

- Se $x = 6$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição verdadeira: (6 é múltiplo de 2 $\wedge$ 6 é múltiplo de 3) $((V \vee V) \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 4$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição falsa: (4 é múltiplo de 2 $\wedge$ 4 é múltiplo de 3) $((V \wedge F) \Leftrightarrow F)$

b) Por exemplo:

- Se $(x, y) = (-1, 2)$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição verdadeira: $(2 \times (-1) + 2 = 0 \wedge -(-1) + 2 \times 2 = 5) ((V \wedge V) \Leftrightarrow V)$
- Se $(x, y) = (0, 1)$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição falsa: $(2 \times 0 + 1 = 0 \wedge -0 + 2 \times 1 = 5) ((F \wedge F) \Leftrightarrow F)$

40.

a) Por exemplo:

- Se $x = 2$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição verdadeira: (2 é múltiplo de 2 $\vee$ 2 é múltiplo de 3) $((V \vee F) \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 5$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição falsa: (5 é múltiplo de 2 $\vee$ 5 é múltiplo de 3) $((F \vee F) \Leftrightarrow F)$

b) Por exemplo:

- Se $(x, y) = (0, 0)$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição verdadeira: $(0 + 0 = 0 \vee 0 + 0 = 5) ((V \vee F) \Leftrightarrow V)$
- Se $(x, y) = (1, 0)$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição falsa: $(2 \times 1 + 0 = 0 \vee -1 + 2 \times 0 = 5) ((F \vee F) \Leftrightarrow F)$

c) Por exemplo:

- Se $x = 2$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição verdadeira: $(\sim(2 > 2)) (\sim F \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 5$, a expressão proposicional transforma-se numa proposição falsa: $\sim(5 > 2) (\sim V \Leftrightarrow F)$

41.

a) " $x = x$ " é uma condição universal.

" $x \neq x$ " é uma condição impossível.

" $x \in \mathbb{Z}$ " é uma condição possível, mas não universal.

" $x \in \mathbb{Q}$ " é uma condição possível, mas não universal.

" $x \in \emptyset$ " é uma condição impossível.

" $x \notin \emptyset$ " é uma condição universal.

b) i. " $x = x \wedge x \in \emptyset$ " é uma condição impossível, pois é a conjunção de uma condição (neste caso, universal, $x = x$) com uma condição impossível ($x \in \emptyset$).

ii. " $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{Q}$ " é uma condição universal, pois é a disjunção de uma condição universal ($x \notin \emptyset$) com outra condição (neste caso, possível, $x \in \mathbb{Q}$).

iii. " $x \neq x \wedge x \in \mathbb{Z}$ " é uma condição impossível, pois é a conjunção de uma condição impossível ($x \neq x$) com outra condição (neste caso, possível, $x \in \mathbb{Z}$).

iv. " $x \in \mathbb{Q} \vee x \notin \emptyset$ " é uma condição possível, mas não universal, pois é a disjunção de uma condição possível ($x \in \mathbb{Q}$) com outra condição (neste caso, impossível, $x \in \emptyset$).

v. " $x \neq x \vee x \notin \emptyset$ " é uma condição universal, pois é a disjunção de uma condição, neste caso, impossível ($x \neq x$) com uma condição universal ($x \notin \emptyset$).

42.

a) " $x^2 = 0 \vee -x < 0$ " é uma condição possível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção de duas condições possíveis em $\mathbb{R}$.

b) " $x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 = 0$ " é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da conjunção de uma condição impossível em $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 = 0$) com outra condição, neste caso, possível em $\mathbb{R}$ ($x^2 = 0$).

c) " $x^2 + 1 = 0 \wedge (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ " é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da conjunção de uma condição impossível em $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 = 0$) com outra condição, neste caso, universal em $\mathbb{R}$ $((x - 1)(x + 1) = x^2 - 1)$.

d) " $x^2 + 1 = 0 \vee -x < 0$ " é uma condição possível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção de uma condição, neste caso impossível em $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 = 0$) com uma condição possível em $\mathbb{R}$ ($-x < 0$).

e) " $x^2 + 1 = 0 \vee (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ " é uma condição universal em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção de uma condição, neste caso impossível em $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 = 0$) com uma condição universal em $\mathbb{R}$ $((x - 1)(x + 1) = x^2 - 1)$.

43.

a) Para $x = 2$, obtêm-se as proposições $2^2 = 4$ e $2 = 2$, ambas verdadeiras.

Para qualquer concretização da variável x por um valor diferente de 2, obtêm-se proposições falsas.

Assim, a condição $x^2 = 4 \iff x = 2$, é universal em $\mathbb{N}$.

b) Se substituirmos x por 1 (respetivamente 2 ou 3) as condições $2x \leq 6$ e $x \in \{1, 2, 3\}$ transformam-se em proposições verdadeiras.

Para qualquer concretização da variável x por um valor diferente de 1, 2 ou 3, obtêm-se proposições falsas.

Assim, a condição $2x \leq 6$ e $x \in \{1, 2, 3\}$, é universal em $\mathbb{N}$.

44.

a) A condição $x^2 = 4 \iff x = 2$ não é universal em $\mathbb{R}$.

Por exemplo, para $x = -2$, a condição $x^2 = 4$ transforma-se numa proposição verdadeira, enquanto que, para a mesma concretização da variável, a condição $x = 2$ transforma-se numa proposição falsa.

b) A condição $x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2$ é universal em $\mathbb{R}$, pois $x^2 = 4$ e $x = 2 \vee x = -2$ tomam o mesmo valor lógico em toda a concretização das variáveis.

c) A condição $2x \leq 6 \iff x \in \{1, 2, 3\}$ não é universal em $\mathbb{R}$. Por exemplo, para $x = 0$, a condição $2x \leq 6$ transforma-se numa proposição verdadeira, enquanto que, para a mesma concretização da variável, a condição $x \in \{1, 2, 3\}$ transforma-se numa proposição falsa.

d) A condição $2x \leq 6 \iff x \in]-\infty, 3]$ é universal em $\mathbb{R}$, pois $2x \leq 6$ e $x \in]-\infty, 3]$ tomam o mesmo valor lógico em toda a concretização das variáveis.

45.

a) A condição $x < 2 \implies x < 4$ é universal em $\mathbb{R}$, pois qualquer concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x < 2$, verifica igualmente a condição $x < 4$.

b) A condição $x < 4 \implies x < 2$ não é universal em $\mathbb{R}$, pois nem toda a concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x < 4$ verifica a condição $x < 2$. Por exemplo, se $x = 3$, $x < 4$ transforma-se numa proposição verdadeira, mas $x < 2$ transforma-se numa proposição falsa.

c) A condição $x = 1 \implies x^2 = 1$ é universal em $\mathbb{R}$, pois qualquer concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x = 1$, verifica igualmente a condição $x^2 = 1$.

d) A condição $x^2 = 1 \implies x = 1$ não é universal em $\mathbb{R}$, pois nem toda a concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x^2 = 1$ verifica a condição $x = 1$. Por exemplo, se $x = -1$, $x^2 = 1$ transforma-se numa proposição verdadeira, mas $x = 1$ transforma-se numa proposição falsa.

46.

a) $x = 3 \implies x^2 = 9$

b) $x^2 = 9 \iff x = 3$

c) $x^2 = 9 \iff x = 3 \vee x = -3$

d) $x > 3 \implies x^2 > 9$

e) $x = 3 \iff x^3 = 27$

47.

a) " $x^2 = 1 \iff x = 1$ " é uma proposição falsa, pois $-1 \in \mathbb{R}$ e $(-1)^2 = 1 \iff -1 = 1$ é uma proposição falsa.

b) " $x^4 = 16 \iff x = 2$ " é uma proposição falsa, pois $-2 \in \mathbb{R}$ e $(-2)^4 = 16 \iff -2 = 2$ é uma proposição falsa.

c) " $x^2 > 9 \iff x > 3$ " é uma proposição falsa, pois $-4 \in \mathbb{R}$ e $(-4)^2 > 9 \iff -4 > 3$ é uma proposição falsa.

d) " $|x - 1| = 2 \iff x - 1 = 2$ " é uma proposição falsa, pois $-1 \in \mathbb{R}$ e $|-1 - 1| = 2 \iff -1 - 1 = 2$ é uma proposição falsa.

48.

a) Ser peixe é condição suficiente para ter guelras.

" x é peixe $\implies x$ tem guelras"

b) Ser retângulo é condição necessária para ser quadrado.

" x é quadrado $\implies x$ é retângulo"

c) É condição necessária para que dois lados de um triângulo sejam iguais que os ângulos opostos sejam iguais.

"(Dois lados de um triângulo são iguais) $\implies$ (os ângulos opostos são iguais)"

49.

a) $x > 3 \implies x^2 > 9$

" $x > 3$ " é condição suficiente para " $x^2 > 9$ ".

b) $x(x - 1) = 0 \iff x = 1$

" $x(x - 1)$ " é condição necessária para " $x = 1$ ".

c) $x^2 = y^2 \iff x = y \vee x = -y$

" $x^2 = y^2$ " é condição necessária e suficiente para

" $x = y \vee x = -y$ ".

50.

a) $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 \geq 2$

"Qualquer que seja o número natural x , tem-se $x + 1 \geq 2$ " – proposição verdadeira

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 2$

"Para todo o número real x , tem-se $x + 1 \geq 2$ " – proposição falsa

c) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

"O valor absoluto de um número x é superior ou igual a zero, qualquer que seja o número real x " – proposição verdadeira

51.

a) $\forall x \in \mathbb{N}, 2x \geq x + 1$

$\forall x, x \in \mathbb{N} \implies 2x \geq x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$

$\forall x, x \in \mathbb{R} \implies |x| \geq x$

52. Para provar que é falsa a proposição "qualquer número natural que seja múltiplo de 2 é múltiplo de 10", basta encontrar um número natural que seja múltiplo de 2 e que não seja múltiplo de 10.

4 é um número natural múltiplo de 2 (pois $4 = 2 \times 2$) e que não é múltiplo de 10 (pois não existe nenhum número natural k tal que $4 = 10 \times k$).

Assim, provamos que a proposição é falsa.

- 53.** Suponhamos que $x > 8$. Como $8 > 0$, tem-se também $x > 0$. Logo, $x \times x > 8 \times x$ e $x^2 + x > 8x + x$ ou seja, $x^2 + x > 9x$.

Uma vez que, a partir da hipótese $x > 8$ chegamos à conclusão que $x^2 + x > 9x$, fica provado que se $x > 8$ então $x^2 + x > 9x$.

54.

- a)** "O quadrado de qualquer número natural é um número par" é uma proposição falsa, pois, por exemplo, 3 é um número natural e o seu quadrado, 9, não é um número par.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \vee x < 0$ é uma proposição falsa, pois, por exemplo, $0 \in \mathbb{R}$ e não é verdade que $0 > 0 \vee 0 < 0$.
c) "Todos os divisores de 12 são divisores de 6" é uma proposição falsa, pois, por exemplo, 4 é divisor de 12 e não é divisor de 6.

55.

- a)** $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 9 = 0$
 "Existe pelo menos um número natural x , tal que $x^2 - 9 = 0$ " – proposição verdadeira
b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 = 0$
 "Existe pelo menos um número real x , tal que $x^2 - 9 = 0$ " – proposição verdadeira

- 56.** Para provar a implicação, se $x^2 \geq x$, então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$, vamos provar a implicação contrarrecíproca, se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$.
 Suponhamos que $0 < x < 1$. Como $x > 0$, então $x \times x < 1 \times x$ ou seja, $x^2 < x$.
 Ficou provado que se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$, logo, ficou provado que se $x^2 \geq x$ então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

57.

- a)** $\exists x \in \mathbb{N}: 2x = x + 1$
 $\exists x: x \in \mathbb{N} \wedge 2x = x + 1$
b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^5 = 12$
 $\exists x: x \in \mathbb{R} \wedge x^5 = 12$

58.

- a)** "Existe pelo menos um número inteiro inferior a 10."
 $\exists x \in \mathbb{Z}: x < 10$
b) "Todo o número natural é positivo."
 $\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$
c) "Existe pelo menos um número real tal que o dobro é igual à sua metade."
 $\exists x \in \mathbb{R}: 2x = \frac{x}{2}$

- 59.** $\forall x \in \{1, 2, 3\}, 3x$ é ímpar
 "3 é ímpar $\wedge$ 6 é ímpar $\wedge$ 9 é ímpar" – proposição falsa

- 60.** $\exists x \in \{1, 2, 3\}: 3x$ é ímpar
 "3 é ímpar $\vee$ 6 é ímpar $\vee$ 9 é ímpar" – proposição verdadeira

61.

- a)** $\neg(\forall x \in \{1, 2, 3\}, 3x \text{ é ímpar})$
 $\Leftrightarrow (\exists x \in \{1, 2, 3\}: 3x \text{ não é ímpar})$ – proposição verdadeira
b) $\neg\left(\exists x \in \mathbb{R}: x + 3 = \frac{x}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq \frac{x}{2}\right)$ – proposição falsa
c) $\neg(\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > 0)$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}: x + 1 \leq 0$ – proposição falsa

62.

- a)** p : "Todos os americanos gostam de comida de plástico".
 $\neg p$: "Existe pelo menos um americano que não gosta de comida de plástico".
b) p : "Existe pelo menos um italiano que não gosta de massa".
 $\neg p$: "Todos os italianos gostam de massa".
c) p : "Há números naturais cujo triplo é um número primo".
 $\neg p$: "O triplo de qualquer número natural não é um número primo".
d) p : "Existe um número real que é inferior à sua raiz".
 $\neg p$: "Todos os números reais são superiores ou iguais à sua raiz".

63. $U = \{6, 7, 8, 10\}$

- $a(x)$: " x é um número composto."
 $b(x)$: " x admite resto 3 na divisão por 6."
a) $\forall x \in U, a(x)$ – proposição falsa
 $\forall x \in U, b(x)$ – proposição falsa
 $\exists x \in U: a(x)$ – proposição verdadeira
 $\exists x \in U: b(x)$ – proposição falsa
b) $\neg(\forall x \in U, a(x))$
 $\Leftrightarrow \exists x \in U: \neg a(x)$ – "Existe pelo menos um elemento de U que não é um número composto".
 $\neg(\forall x \in U, b(x))$
 $\Leftrightarrow \exists x \in U: \neg b(x)$ – "Existe pelo menos um elemento de U que não admite resto 3 na divisão por 6".
 $\neg(\exists x \in U: a(x))$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U: \neg a(x)$ – "Todo o elemento de U é um número não composto".
 $\neg(\exists x \in U: b(x))$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U, \neg b(x)$ – "Todo o elemento de U admite resto diferente de 3 na divisão por 6".
c) $a(x)$ é possível em U
 $b(x)$ é impossível em U
 $\neg a(x)$ é possível em U
 $\neg b(x)$ é universal em U

64.

- a)** $\forall x \in \{\pi, \sqrt{2}, 3\}, x$ é natural
 " π é natural $\wedge \sqrt{2}$ é natural $\wedge 3$ é natural"

- b) $\neg(\pi \text{ é natural} \wedge \sqrt{2} \text{ é natural} \wedge 3 \text{ é natural})$
 $\Leftrightarrow \pi \text{ não é natural} \vee \sqrt{2} \text{ não é natural} \vee 3 \text{ não é natural}$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \{\pi, \sqrt{2}, 3\}, x \text{ não é natural}$

65. $A = \{0, 2, \{\}, \{1\}\}$

- a) $0 \in A$ é uma afirmação verdadeira, pois 0 é um objeto do conjunto A.
b) $1 \in A$ é uma afirmação falsa, pois 1 não é um objeto do conjunto A.
c) $2 \notin A$ é uma afirmação falsa, pois 2 é um objeto do conjunto A.
d) $\{\} \notin A$ é uma afirmação falsa, pois $\{\}$ é um objeto do conjunto A.
e) $\{1\} \notin A$ é uma afirmação falsa, pois $\{1\}$ é um objeto do conjunto A.

66.

- a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$
b) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

67.

- a) $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
b) $\{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$
c) $\{25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

68.

- a) $\{x \in \mathbb{N}: 2x^2 + x - 1 = 0\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $2x^2 + x - 1 = 0$. Uma vez que:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

e $-1 \notin \mathbb{N}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, concluímos que não existe nenhum número natural que satisfaça a condição, logo, o conjunto definido em $\mathbb{N}$ por $2x^2 + x - 1$ é o conjunto vazio, $\{\}$.

- b) $\{x \in \mathbb{N}: x^2 + x + 1 = 0\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $x^2 + x + 1 = 0$. Uma vez que:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

e $\sqrt{-3}$ é uma expressão sem sentido em $\mathbb{R}$, significa que não existe nenhum número natural que satisfaça a condição $x^2 + x + 1 = 0$, logo, o conjunto definido em $\mathbb{N}$ por esta condição é o conjunto vazio, $\{\}$.

- c) $\{x \in \mathbb{N}: 2x - 4 < 6\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $2x - 4 < 6$.

$$\text{Como } 2x - 4 < 6 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \text{ e } 1 \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < 5$$

$$2 \in \mathbb{N} \text{ e } 2 < 5$$

$$3 \in \mathbb{N} \text{ e } 3 < 5$$

$$4 \in \mathbb{N} \text{ e } 4 < 5$$

concluímos que o conjunto definido em $\mathbb{N}$ por esta condição é $\{1, 2, 3, 4\}$.

- d) $\{x \in \mathbb{N}: |1 - 2x| < 4\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $|1 - 2x| < 4$. Como

$$|1 - 2x| < 4 \Leftrightarrow 1 - 2x < 4 \wedge 1 - 2x > -4$$

$$\Leftrightarrow -2x < 3 \wedge -2x > -5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \wedge x < \frac{5}{2}$$

$$\text{e } 1 > -\frac{3}{2} \wedge 1 < \frac{5}{2} \text{ e } 2 > -\frac{3}{2} \wedge 2 < \frac{5}{2}$$

concluímos que o conjunto definido em $\mathbb{N}$ por esta condição é $\{1, 2\}$.

69.

- a) Averiguemos se as condições $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$ e $x^2 - x - 2 = 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \vee x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução é $\{2, -1\}$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução é $\{2, -1\}$.

Uma vez que todas as soluções da primeira são solução da segunda e vice-versa, concluímos que as duas condições são equivalentes.

- b) Averiguemos se as condições $x^2 - 10 = 0$ e $x - \sqrt{10} = 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$$

O conjunto-solução é $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$.

$$x - \sqrt{10} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$$

O conjunto-solução é $\{\sqrt{10}\}$.

Repara que existe uma solução $(-\sqrt{10})$ da primeira condição que não é solução da segunda condição, logo, as duas condições não são equivalentes.

70.

- a) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\}$

$$x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

Assim, o conjunto-solução da condição $x^2 + 3 = 4x$ é $\{1, 3\}$.

Logo, $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\} = \{1, 3\}$.

$\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\}$ é o conjunto dos números naturais que são ímpares e inferiores a 5. Como 1 e 3 são os únicos números naturais que obedecem a esta condição, $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\} = \{1, 3\}$.

Daqui se conclui que:

$$\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\} = \{1, 3\} = \{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\}.$$

- b) $\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 1, 3, 4\} = \{4, 2, 3, 1, 2, 3\}$ pois têm os mesmos elementos.

71. $U = \{-5, -\sqrt{5}, -1, 0, 1, \sqrt{5}, 5, 25\}$

a) $A = \{-5, -1\}$

b) $\{-\sqrt{5}, -1, 0, 1, \sqrt{5}\}$

c) $C = \{0, 1, 5, 25\}$

d) $D = \{25, 5, 1, 0, 625\}$

72. Por exemplo:

a) $\{3n: n \in \mathbb{N}\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é múltiplo de } 3\}$

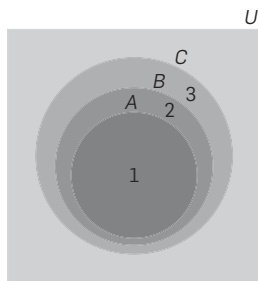
b) $\{x \in \mathbb{R}: |x| = 5\}$

c) $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é divisor de } 10\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: |x| < 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 0\}$

73. $A \subset B$ e $B \subset C$



a) $1 \in B$ é necessariamente verdadeira, pois $A \subset B$ e $1 \in A$.

b) $2 \in A$ não é necessariamente verdadeira.

c) $3 \notin A$ não é necessariamente verdadeira.

d) $4 \in B$ não é necessariamente verdadeira.

e) $5 \notin A$ é necessariamente verdadeira, pois $5 \notin B$ e $A \subset B$, logo, se $5 \in A$ então $5 \in B$, o que não acontece.

f) $5 \in C$ não é necessariamente verdadeira.

g) $6 \notin B$ é necessariamente verdadeira, pois $6 \notin C$ e $B \subset C$, logo, se $6 \in B$ então $6 \in C$, o que não acontece.

74. Sejam A, B, C e D os conjuntos definidos pelas condições $a(n), b(n), c(n)$ e $d(n)$, respetivamente.

$$P = A \cap D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$Q = B \cap C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{3, 6, 9, 18\}$$

$$R = C \cup D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 4, 5, 7, 8\}$$

$$S = C \cap D = \{4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{4, 5, 7, 8\}$$

75. $A =]-\infty, 5]$

$B =]-\infty, \pi]$

$C = \left] -\frac{7}{2}, +\infty \right[$

a) $A \cup B =]-\infty, 5]$

b) $B \cup C =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

c) $A \cap B =]-\infty, -\pi]$

d) $A \cap C = \left] -\frac{7}{2}, 5 \right]$

e) $A \cap (B \cap C) = \left] -\infty, 5 \right] \cap \left] -\frac{7}{2}, -\pi \right] = \left] -\frac{7}{2}, -\pi \right]$

f) $\overline{A} = \overline{]-\infty, 5]} =]5, +\infty[$

g) $\overline{C} = \overline{\left] -\frac{7}{2}, +\infty \right[} = \left] -\infty, -\frac{7}{2} \right]$

h) $A \setminus B =]-\infty, 5] \setminus]-\infty, -\pi] =]-\pi, 5]$

i) $A \setminus (B \cup C) =]-\pi, 5] \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

76.

a) $A = \{x \in \mathbb{N}: 1 - x > 0 \vee 3x - 6 < 12\}$

$$1 - x > 0 \iff 1 > x$$

O conjunto-solução da condição $1 - x > 0$, em $\mathbb{N}$, é $\emptyset$.

$$3x - 6 < 12 \iff 3x < 18 \iff x < 6$$

O conjunto-solução da condição $3x - 6 < 12$, em $\mathbb{N}$, é $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$A = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 2 = 0\}$

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$$

$$\iff x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\iff x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução da condição $x^2 - x - 2 = 0$, em $\mathbb{R}$, é $\{2, -1\}$. Logo, $B = \{2, -1\}$.

c) $A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus (]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[)$
 $= \{1, 2, 3\}$

d) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, -1\} = \{2\}$

e) $B \cap C = \{2, -1\} \cap (]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[) = \{-1\}$

f) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, -1\}$
 $= \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Aprende fazendo

Páginas 62 a 72

1.

a) p : "O Afonso usa óculos".

q : "O Afonso usa chapéu".

$p \vee q$: "O Afonso usa óculos ou chapéu".

Opção (B)

b) $\sim p$: "O Afonso não usa óculos".

$\sim q$: "O Afonso não usa chapéu".

$\sim p \wedge \sim q$: "O Afonso não usa óculos e não usa chapéu".

Opção (D)

2. Sabe-se que, dadas duas proposições a e b , o valor lógico da equivalência pode ser obtido a partir dos valores lógicos de a e b , como se encontra resumido na seguinte tabela de verdade:

a	b	$a \iff b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Assim, $a \iff b$ é falsa quando e apenas quando a e b têm valores lógicos diferentes.

Opção (C)

3. Das expressões com variáveis apresentadas, a única que não se transforma numa proposição, quando se substitui a variável x por valores reais, é a expressão da opção (B).

Opção (B)

4. $A = \{1, 2\}$
 $B = \{2, 1\}$
 $C = \{n \in \mathbb{N}: n^2 \leq 9\} = \{1, 2, 3\}$
 Assim, $A = B$ e $A \subset C$.

Opção (D)

5. Vamos construir tabelas de verdade de cada uma das proposições presentes nas quatro opções apresentadas:

(A) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F

(B) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F

(C) $p \Rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

(D) $(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$	$(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F

Das proposições apresentadas, observa-se que apenas $p \Rightarrow (p \vee q)$ é verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos de p e q , sendo, então, a única opção onde está presente uma tautologia.

Opção (C)

6. Sabemos que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$ (implicação contrarrecíproca).

Opção (D)

7. Negar a proposição "Todas as crianças acreditam no Pai Natal" equivale a afirmar que "Não é verdade que todas as crianças acreditam no Pai Natal", ou seja, "Existe pelo menos uma criança que não acredita no Pai Natal".

Opção (C)

8. A implicação contrarrecíproca da condição "Se um triângulo é retângulo, então não é equilátero" é aquela cujo antecedente é a negação do consequente "não é equilátero" e cujo consequente é a negação do antecedente "é retângulo". Assim, a implicação contrarrecíproca da implicação apresentada é: "Se um triângulo é equilátero, então não é retângulo".

Opção (A)

9. Sabe-se que $a \Leftrightarrow b$ é uma proposição falsa, portanto, a e b têm valores lógicos diferentes (a é verdadeira e b é falsa ou vice-versa). Assim:

(A) $a \wedge b$ é uma proposição falsa.

(B) $a \vee b$ é uma proposição verdadeira.

(C) $\neg a \wedge \neg b$ é uma proposição falsa.

(D) $a \Rightarrow b$ é uma proposição falsa, no caso de a ser verdadeira e b ser falsa. No entanto, $a \Rightarrow b$ é verdadeira no caso de a ser falsa e b ser verdadeira.

Opção (B)

10. Sabe-se que a implicação entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Assim, como $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é uma proposição falsa, tem-se que o antecedente (p) é verdadeiro e o consequente ($q \Rightarrow r$) é falso.

Pela mesma ordem de ideias, como a proposição $q \Rightarrow r$ é falsa, tem-se que o antecedente (q) é verdadeiro e o consequente (r) é falso.

Opção (D)

11. Pelas segundas leis de De Morgan, tem-se que a proposição $\neg(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x))$ é equivalente à proposição $\exists x: \neg(p(x) \Rightarrow q(x))$, o que pela negação da implicação é equivalente à proposição $\exists x: p(x) \wedge \neg q(x)$.

Opção (A)

12. (i) é verdadeira.

Seja $p(x)$ uma condição universal em U (isto é, uma proposição que se transforma numa proposição verdadeira em U , para qualquer concretização das suas variáveis) e seja $q(x)$ uma qualquer condição em U .

A disjunção de $p(x)$ e $q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, é uma nova condição que é universal em U , pois, para qualquer concretização das suas variáveis vem que $p(x)$ se transforma numa proposição verdadeira e $q(x)$ numa proposição verdadeira ou falsa, e a disjunção é verdadeira em qualquer um destes casos ($(V \vee V) \Leftrightarrow V$; $(V \vee F) \Leftrightarrow V$).

(ii) é verdadeira.

Seja $p(x)$ uma condição impossível em U (isto é, uma proposição que se transforma em proposição falsa em U , para qualquer concretização das suas variáveis) e seja $q(x)$ uma qualquer condição em U .

A conjunção de $p(x)$ e $q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, é uma nova condição que é impossível em U , pois para qualquer concretização das suas variáveis vem que $p(x)$ se transforma numa proposição falsa em U e $q(x)$ numa proposição verdadeira ou falsa, e a conjunção

é falsa em qualquer um destes casos $((F \wedge V) \Leftrightarrow F;$
 $(F \wedge F) \Leftrightarrow F)$.

Opção (B)

- 13.** Das afirmações apresentadas, apenas a opção (B) é necessariamente verdadeira, pois:
 como $A \subset B$ e $a \in A$ então $a \in B$
 e como $B \subset C$ e $a \in B$ então $a \in C$.

Opção (B)

14.

- a) " $5^2 \times (\pi - 3)$ " é uma designação.
 b) " $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ " é uma proposição.
 c) "17 é um número primo" é uma proposição.
 d) "O triângulo de vértices A, B e C" é uma designação.
 e) "Há triângulos com dois ângulos retos" é uma proposição.
 f) " $\sqrt{3} > \pi + 1$ " é uma proposição.
 g) " $-5 \in \mathbb{N}$ " é uma proposição.
 h) " $\{1, 2, 3\}$ " é uma designação.
 i) " $\{1, 2, 3, 6\}$ é o conjunto dos divisores de 6" é uma proposição.
 j) "Existe um número primo que é par" é uma proposição.

- 15.** As proposições presentes nas alíneas b), e), f) e g) são falsas.
 As proposições presentes nas alíneas c), i) e j) são verdadeiras.

16. p : "Eu gosto do verão".

$\sim p$: "Eu não gosto do verão".

q : "Eu não gosto do inverno".

$\sim q$: "Eu gosto do inverno".

r : "Eu gosto da primavera".

$\sim r$: "Eu não gosto da primavera".

- a) $p \wedge q$: "Eu gosto do verão e não gosto do inverno".
 b) $q \vee r$: "Eu não gosto do inverno ou gosto da primavera".
 c) $\sim p \wedge \sim q$: "Eu não gosto do verão e gosto do inverno".
 d) $\sim q \vee r$: "Eu gosto do inverno ou da primavera".
 e) $\sim(p \vee r)$: "Não é verdade que eu goste do verão ou da primavera".
 f) $\sim p \wedge \sim r$: "Eu não gosto do verão nem da primavera".

17.

- a) A proposição $p \wedge q$ é verdadeira apenas no caso em que p é verdadeira e q é verdadeira.
 b) A proposição $p \vee q$ é falsa apenas no caso em que p é falsa e q é falsa.
 c) A proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira apenas no caso em que $\sim p$ é verdadeira e q é verdadeira, isto é, p é falsa e q é verdadeira.

18.

a) $\sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

b) $\sim(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

c) $p \vee (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

19.

a) p : " π é um número irracional e é superior a 2".

$\sim p$: " π não é um número irracional ou não é superior a 2".

b) p : "15 não é um número par nem é um número primo".

$\sim p$: "15 é um número par ou é um número primo".

c) p : "O Joaquim é um bebé ou não sabe falar".

$\sim p$: "O Joaquim não é um bebé e sabe falar".

d) p : "A Margarida é um bebé e não sabe nadar".

$\sim p$: "A Margarida não é um bebé ou sabe nadar".

20.

a) $p(x): 5x + 1 \geq 0$

$p(x)$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$ e possível em $\mathbb{R}$.

$q(x): |x| < 0$

$q(x)$ é uma condição impossível em $\mathbb{N}$ e impossível em $\mathbb{R}$.

$r(x): x(x - 2) = 0$

$r(x)$ é uma condição possível em $\mathbb{N}$ e possível em $\mathbb{R}$.

$s(x): x(x + 2) = 0$

$s(x)$ é uma condição impossível em $\mathbb{N}$ e possível em $\mathbb{R}$.

$t(x): 2x^2 \geq 0$

$t(x)$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$ e universal em $\mathbb{R}$.

b) $\sim p(x): 5x + 1 < 0$

$\sim q(x): |x| \geq 0$

$\sim r(x): x(x - 2) \neq 0$

$\sim s(x): x(x + 2) \neq 0$

$\sim t(x): 2x^2 < 0$

c) (i) $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da conjunção entre uma condição possível, $p(x)$, e uma condição impossível, $q(x)$, em $\mathbb{R}$.

(ii) $q(x) \vee r(x)$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção entre uma condição impossível, $q(x)$, e uma condição possível, $r(x)$, em $\mathbb{R}$.

(iii) $r(x) \vee s(x)$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção entre condições possíveis em $\mathbb{R}$.

(iv) $s(x) \vee t(x)$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção entre uma condição universal, $t(x)$, e uma condição possível, $s(x)$, em $\mathbb{R}$.

21.

a) (i) $\exists x: p(x)$

"Existe pelo menos um gato malhado".

(ii) $\forall x, q(x)$

"Todos os gatos gostam de leite".

(iii) $\forall x, p(x) \vee r(x)$

"Todos os gatos são malhados ou são pretos".

(iv) $\exists x: r(x) \wedge \neg q(x)$

"Existe pelo menos um gato preto que não gosta de leite".

b) (i) "Existe pelo menos um gato que não é malhado nem preto".

$\exists x: \neg p(x) \wedge \neg r(x)$

(ii) "Existe pelo menos um gato que gosta de leite ou é preto".

$\exists x: q(x) \vee r(x)$

(iii) "Todos os gatos que gostam de leite são malhados".

$\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$

(iv) "Todos os gatos são malhados se e só se não são pretos".

$\forall x, p(x) \Leftrightarrow \neg r(x)$

22.

a) p : "Todos os homens são ambiciosos".

$\neg p$: "Existe pelo menos um homem que não é ambicioso".

b) p : "Existe um ator famoso que não tem formação em teatro".

$\neg p$: "Todos os atores famosos têm formação em teatro".

23.

a) $\{x \in U: x \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 25\}$

b) $\{x \in U: x \in \mathbb{Z}^-\} = \{-1\}$

c) $\{x \in U: x^2 > 10\} = \{5, 25\}$

d) $\{x \in U: 2x \leq 0\} = \{-1, 0\}$

e) $\{x \in U: x \text{ é um número irracional}\} = \emptyset$

24.

a) $\{3, -3\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 9\} = \{x \in \mathbb{R}: x = 3 \vee x = -3\}$ (por exemplo)

b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\} = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é ímpar}\}$

c) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x^2: x \in \mathbb{N}\}$

25.

a) (i) " $\pi \neq 3,14$ e 27 é múltiplo de 9": $\neg q \wedge r$

(ii) "9 não é primo ou $\pi = 3,14$ ": $\neg p \vee q$

(iii) "Se $\pi = 3,14$, então 27 não é múltiplo de 9": $q \Rightarrow \neg r$

b) (iv) $p \vee \neg r$: "9 é um número primo ou 27 não é múltiplo de 9".

(v) $\neg(p \wedge q)$: "Não é verdade que 9 seja um número primo e que $\pi = 3,14$ ".

(vi) $\neg r \Rightarrow (\neg q \vee p)$: "Se 27 não é múltiplo de 9, então $\pi \neq 3,14$ ou 9 é um número primo".

c) Das proposições p , q e r do enunciado, tem-se que p e q são falsas e r é verdadeira.

• A proposição da alínea (i), $\neg q \wedge r$, é verdadeira, pois $V \wedge V \Leftrightarrow V$.

• A proposição da alínea (ii), $\neg p \vee q$, é verdadeira, pois $V \vee F \Leftrightarrow V$.

• A proposição da alínea (iii), $q \Rightarrow \neg r$, é verdadeira, pois $(F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$.

• A proposição da alínea (iv), $p \vee \neg r$, é falsa, pois $F \vee F \Leftrightarrow F$.

• A proposição da alínea (v), $\neg(p \wedge q)$, é verdadeira, pois $\neg(F \wedge F) \Leftrightarrow V$.

• A proposição da alínea (vi), $\neg r \Rightarrow (\neg q \vee p)$, é verdadeira, pois $(F \Rightarrow (V \vee F)) \Leftrightarrow (F \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$.

26.

a) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ não é uma tautologia.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

b) $p \Leftrightarrow (p \vee q)$ não é uma tautologia.

p	q	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

27.

a) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Observa-se que são iguais as colunas que dizem respeito a p e a $p \vee (p \wedge q)$.

b) $p \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge V) \vee (p \wedge q)$, pois $p \wedge V \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow p \wedge (V \vee q)$

$\Leftrightarrow p \wedge V$

$\Leftrightarrow p$

28.

a) $q \vee (p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow p \vee (q \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow p \vee V$

$\Leftrightarrow V$

b) $q \wedge (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \wedge F$

$\Leftrightarrow F$

c) $q \wedge (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow F \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow q \wedge p$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \neg p \wedge (p \vee q) \wedge \neg q \\ & \Leftrightarrow ((\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg q \\ & \Leftrightarrow (F \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg q \\ & \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge \neg q \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge (q \wedge \neg q) \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge F \\ & \Leftrightarrow F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & p \vee (\neg p \wedge q) \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow (V \wedge (p \vee q)) \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow (p \vee q) \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow p \vee (q \vee \neg q) \\ & \Leftrightarrow p \vee V \\ & \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \neg(p \wedge \neg q) \\ & \Leftrightarrow \neg p \vee q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \neg(\neg p \vee \neg q) \\ & \Leftrightarrow p \wedge q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \\ & \Leftrightarrow \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \\ & \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \neg(\neg p \Rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \neg(p \Rightarrow (q \vee r)) \\ & \Leftrightarrow p \wedge \neg(q \vee r) \\ & \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & \neg((q \vee r) \Rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow (q \vee r) \wedge \neg p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & \neg((p \Rightarrow q) \vee r) \\ & \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q) \wedge \neg r \\ & \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & \neg(p \Leftrightarrow \neg q) \\ & \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q \wedge \neg q \Rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(\neg q \Rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \end{aligned}$$

30.

a) Se o consequente, q , é uma proposição falsa, a implicação $p \Rightarrow q$ só será verdadeira no caso de o antecedente ser também falso; assim, p é uma proposição falsa.

b) $p \vee q$ é uma proposição falsa, pois $(F \vee F) \Leftrightarrow F$.

c) $\neg(p \vee q)$ é uma proposição verdadeira, pois $\neg(F \vee F) \Leftrightarrow \neg F \Leftrightarrow V$.

d) $\neg p \wedge \neg q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee V) \Leftrightarrow V$.

e) $\neg p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee F) \Leftrightarrow V$.

f) $\neg q \Rightarrow p$ é uma proposição falsa, pois $(V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$.

g) $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira, pois $(F \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow V$.

h) $\neg p \Leftrightarrow q$ é uma proposição falsa, pois $(V \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow F$.

31.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (p \vee q) \\ & \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (p \Rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \\ & \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (p \Leftrightarrow q) \\ & \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \\ & \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \\ & \Leftrightarrow (\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

32.

a) $\neg(p \wedge q) \vee r$ é falsa.

A disjunção de duas proposições é falsa apenas no caso em que ambas são falsas, logo $\neg(p \wedge q)$ é falsa e r é falsa.

Como $\neg(p \wedge q)$ é falsa, então $p \wedge q$ é verdadeira, e como a conjunção de duas proposições é verdadeira apenas no caso em que ambas as proposições são verdadeiras, tem-se que p é verdadeira e q é verdadeira.

b) $r \wedge \neg(p \Rightarrow q)$ é verdadeira.

A conjunção de duas proposições é verdadeira apenas no caso em que ambas as proposições são verdadeiras, logo r é verdadeira e $\neg(p \Rightarrow q)$ é verdadeira. Como $\neg(p \Rightarrow q)$ é verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é falsa. Uma implicação entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Assim, p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa.

33.

a) p : "Um aluno está distraído".

q : "A professora repreende o aluno".

"Se um aluno está distraído, então a professora repreende-o": $(p \Rightarrow q)$

Negação da implicação: "Um aluno está distraído e a professora não o repreende": $(p \wedge \neg q)$

Implicação contrarrecíproca: "Se a professora não repreende um aluno, então o aluno não está distraído": $(\neg q \Rightarrow \neg p)$

b) p : " $x = 3$ "

q : " $x^2 = 9$ "

$p \Rightarrow q$: " $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ "

Negação da implicação: " $x = 3 \wedge x^2 \neq 9$ " $(p \wedge \neg q)$

Implicação contrarrecíproca:

" $x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$ " $(\neg q \Rightarrow \neg p)$

c) p : " n é um múltiplo de 10".

q : " n é um múltiplo de 5".

$p \Rightarrow q$: "Se n é um múltiplo de 10, então é um múltiplo de 5".

Negação da implicação: " n é um múltiplo de 10 e não é um múltiplo de 5": $(p \wedge \neg q)$

Implicação contrarrecíproca: "Se n não é um múltiplo de 5, então não é um múltiplo de 10": $(\neg q \Rightarrow \neg p)$

34.

a) p : "Existe um número real x que é maior que o seu quadrado".

$\neg p$: "Todos os números reais são inferiores ou iguais ao seu quadrado".

b) p : " $x^2 - 2x \geq 0$ verifica-se para todo o número real x ".

$\neg p$: "Existe pelo menos um número real x que não verifica $x^2 - 2x \geq 0$ ".

- c) p : "Existe um número natural x que é solução da equação $x^3 = 25$ ".
 $\neg p$: "Qualquer número natural x não é solução da equação $x^3 = 25$ ".

35.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2$
 $\neg(\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2)$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0$
 $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0) \iff (\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x < 0)$
c) $\exists x \in \mathbb{N}: x^3 = 25$
 $\neg(\exists x \in \mathbb{N}: x^3 = 25) \iff (\forall x \in \mathbb{N}, x^3 \neq 25)$

36.

- a) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 3 e 5 são números primos e a sua soma, 8, não é um número primo.
b) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 11 é um número primo formado por dois algarismos e estes não são distintos.
c) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 1 é um número natural e não se verifica que $1^2 - 2 \times 1 \geq 0$.

37.

- a) $P = \{n: p(n) \wedge r(n)\} = \{n: n \text{ é um número primo inferior a } 9\} = \{2, 3, 5, 7\}$
b) $Q = \{n: q(n) \vee r(n)\} = \{n: n \text{ é um divisor de } 12 \text{ ou } n \text{ é inferior a } 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12\}$
c) $R = \{n: q(n) \wedge \neg p(n)\} = \{n: n \text{ é um divisor de } 12 \text{ e não é um número primo}\} = \{1, 4, 6, 12\}$

38.

- a) $\{x \in \mathbb{N}: x - 4 < 0 \vee x^2 - 36 = 0\} = \{1, 2, 3\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 6\}$

Cálculos auxiliares:

$$x - 4 < 0 \iff x < 4$$

$$x^2 - 36 = 0 \iff x^2 = 36 \iff x = -6 \vee x = 6$$

- b) $\{x \in \mathbb{N}: x - 4 < 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} = \{1, 2, 3\} \cap \{6\} = \emptyset$
c) $\{x \in \mathbb{R}: x - 4 > 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} =]4, +\infty[\cap \{-6, 6\} = \{6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R}: x - 4 < 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} =]-\infty, 4[\cap \{-6, 6\} = \{-6\}$

39. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B =]2, +\infty[$, $C =]1, 6]$

- a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \cup]2, +\infty[= [2, +\infty[\cup \{0, 1\}$
b) $B \cup C =]2, +\infty[\cup]1, 6] =]1, +\infty[$
c) $A \cap C = \{0, 1, 2, 3\} \cap]1, 6] = \{2, 3\}$
d) $B \cap C =]2, +\infty[\cap]1, 6] =]2, 6]$
e) $(A \cap C) \cap B = \underbrace{\{2, 3\} \cap]2, +\infty[}_{\text{alínea c)}} = \{3\}$
f) $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$
g) $\bar{B} = \mathbb{R} \setminus]2, +\infty[=]-\infty, 2]$
h) $\bar{C} = \mathbb{R} \setminus]1, 6] =]-\infty, 1] \cup]6, +\infty[$
i) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3\} \setminus]2, +\infty[= \{0, 1, 2\}$
j) $B \setminus A =]2, +\infty[\setminus \{0, 1, 2, 3\} =]2, +\infty[\setminus \{3\} =]2, 3[\cup]3, +\infty[$
k) $C \setminus (A \cap B) =]1, 6] \setminus (\{0, 1, 2, 3\} \cap]2, +\infty[) =]1, 6] \setminus \{3\} =]1, 3[\cup]3, 6]$

40.

p	q	r	$\neg r$	$p \iff \neg r$	$q \wedge r$	$(p \iff \neg r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	F

41. Como $(p \implies \neg q) \wedge (\neg r \implies q) \wedge p$ é uma proposição verdadeira, e a conjunção de três proposições é verdadeira apenas no caso das três proposições o serem, pode concluir-se que $p \implies \neg q$, $\neg r \implies q$ e p são proposições verdadeiras.

Assim, sabendo que p e $p \implies \neg q$ são proposições verdadeiras, vem que $\neg q$ é uma proposição verdadeira, já que se trata de uma implicação verdadeira cujo antecedente é verdadeiro, logo o consequente terá de ser também verdadeiro. Assim, como $\neg q$ é uma proposição verdadeira, então q é uma proposição falsa.

Temos ainda que, se $\neg r \implies q$ é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa, então $\neg r$ é uma proposição falsa, já que se trata de uma implicação verdadeira cujo consequente é falso, logo o antecedente terá de ser também falso. Assim, como $\neg r$ é uma proposição falsa, r é uma proposição verdadeira.

42.

- a) $(p \implies \neg q \wedge \neg r) \implies q$
 $\iff p \implies (\neg q \wedge \neg r) \implies q$
 $\iff (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \implies q$
 $\iff \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \vee q$
 $\iff (\neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r)) \vee q$
 $\iff (p \wedge (q \vee r)) \vee q$
 $\iff (q \vee p) \wedge (q \vee q \vee r)$
 $\iff (q \vee p) \wedge (q \vee r)$
 $\iff q \vee (p \wedge r)$
b) $(p \implies \neg q) \wedge (\neg r \implies q)$
 $\iff (\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee q)$

43.

- a) p : "O FCP ganha o campeonato deste ano".
 q : "O SLB ganha o jogo de hoje".
Afirmar que:
"O FCP ganha o campeonato deste ano, exceto se o SLB ganhar o jogo de hoje"
equivale a afirmar que:
"Se o SLB não ganhar o jogo de hoje, então o FCP ganha o campeonato deste ano"
o que pode ser traduzido em linguagem simbólica por $\neg q \implies p$.
b) a : "A Carolina vai ao cinema".
 b : "A Carolina come pipocas".
 c : "O filme é de terror".

Afirmar que:

"A Carolina não come pipocas quando vai ao cinema, a menos que o filme seja de terror"

equivale a afirmar que:

"Se o filme não é de terror, então a Carolina não come pipocas quando vai ao cinema"

ou seja:

"Se o filme não é de terror, então a Carolina ir ao cinema implica que não coma pipocas"

o que em linguagem simbólica pode ser traduzido por $\neg c \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$.

44.

a)

p	p	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b) Como $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando, e apenas quando, p e q têm valores lógicos distintos, então a proposição $p \dot{\vee} q$ é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

c) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $\neg(p \dot{\vee} q)$:

p	p	$p \dot{\vee} q$	$\neg(p \dot{\vee} q)$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

(i) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \wedge q)$:

p	q	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Comparando a tabela de verdade da proposição $\neg(p \dot{\vee} q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \wedge q)$, verifica-se que as proposições $\neg(p \dot{\vee} q)$ e $(p \wedge q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\neg(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ não é verdadeira.

(ii) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \vee q)$:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comparando a tabela de verdade da proposição $\neg(p \dot{\vee} q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \vee q)$, verifica-se que as proposições $\neg(p \dot{\vee} q)$ e $(p \vee q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\neg(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ não é verdadeira.

(iii) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \Rightarrow q)$:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Comparando a tabela de verdade da proposição $\neg(p \dot{\vee} q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \Rightarrow q)$, verifica-se que as proposições $\neg(p \dot{\vee} q)$ e $(p \Rightarrow q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\neg(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ não é verdadeira.

(iv) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \Leftrightarrow q)$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Comparando a tabela de verdade da proposição $\neg(p \dot{\vee} q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \Leftrightarrow q)$, verifica-se que as proposições $\neg(p \dot{\vee} q)$ e $(p \Leftrightarrow q)$ são equivalentes, ou seja, a proposição $\neg(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ é verdadeira.

45.

a) Consideremos as proposições:

$p(x)$: "Ser mamífero".

$q(x)$: "Ser felino".

A expressão "ser mamífero é condição necessária para ser felino" pode ser traduzida simbolicamente por $q(x) \Rightarrow p(x)$.

b) Consideremos as proposições:

$p(x)$: "Ser múltiplo de 6".

$q(x)$: "Ser múltiplo de 3".

A expressão "ser múltiplo de 6 é condição suficiente para que um número seja múltiplo de 3" pode ser traduzida simbolicamente por $p(x) \Rightarrow q(x)$.

c) Consideremos as proposições:

$p(x, y)$: " $x \times y = 0$ "

$q(x, y)$: " $x = 0 \vee y = 0$, com x e y números reais"

A expressão "é condição necessária e suficiente para que o produto de dois números reais seja nulo que pelo menos um deles seja zero" pode ser traduzida simbolicamente por $p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$.

46.

a) Se $p(x)$ é uma condição universal em U , então $\forall x \in U$, $p(x)$ é uma proposição verdadeira, isto é, a concretização da variável x por um qualquer termo de U transforma a condição numa proposição verdadeira. Daqui se conclui que a proposição $\exists x \in U: \neg p(x)$ é uma proposição falsa, já que não existe nenhum termo de U que satisfaça $\neg p(x)$, ou seja, $\neg p(x)$ é uma condição impossível em U .

Conclui-se assim que, se $p(x)$ for uma condição universal em U , então $\neg p(x)$ é uma condição impossível em U .

- b)** Se $p(x)$ é uma condição impossível em U , então $\exists x \in U: p(x)$ é uma proposição falsa, isto é, a concretização da variável x por um qualquer termo de U transforma a condição numa proposição falsa. Daqui se conclui que a proposição $\forall x \in U, \neg p(x)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, $\neg p(x)$ é uma condição universal em U .

Conclui-se assim que, se $p(x)$ for uma condição impossível em U , então $\neg p(x)$ é uma condição universal em U .

47.

- a)** A proposição é falsa, pois, por exemplo, um retângulo é um quadrilátero que tem os ângulos iguais e, no entanto, não tem os lados iguais.
- b)** A proposição é falsa, pois, por exemplo, -2 e -3 são valores reais tais que $-2 > -3$ e, no entanto, não se tem que $(-2)^2 > (-3)^2$.

- 48.** Provar que "se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 12" é equivalente a provar a implicação contrarrecíproca, isto é, "se um número natural n é divisível por 12, então é divisível por 3".

Assim, considerando n um número natural divisível por 12, tem-se que:

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 12k$$

O que é equivalente a afirmar que:

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 3 \times \underbrace{4k}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}, 4k \in \mathbb{N}}$$

Ou seja:

$$\exists k' \in \mathbb{N}: n = 3 \times k' \quad (k' = 4k)$$

Isto significa que n é divisível por 3, como pretendíamos.

- 49.** Queremos provar que para todo o número natural n , n^2 é par se e só se n é par.

Simbolicamente: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ é par} \iff n \text{ é par}$.

(1) $n \text{ é par} \implies n^2 \text{ é par}$

Seja n um número natural par, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Logo:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ \implies n^2 &= 4k^2 \\ \implies n^2 &= 2 \times \underbrace{2k^2}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}, 2k^2 \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Podemos então concluir que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 2 \times k'$ ($k' = 2k^2$), isto é, n^2 é par.

(2) $n^2 \text{ é par} \implies n \text{ é par}$

Provemos esta implicação em $\mathbb{N}$, demonstrando a sua implicação contrarrecíproca, isto é, $n \text{ é ímpar} \implies n^2 \text{ é ímpar}$.

Seja n um número natural ímpar, então existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Logo:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ \implies n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ \implies n^2 &= 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}_0, \text{ então } 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0} + 1 \end{aligned}$$

Podemos então concluir que existe $k' \in \mathbb{N}_0$ tal que $n^2 = 2k' + 1$ ($k' = 2k^2 + 2k$), isto é, n^2 é ímpar.

De (1) e (2) vem que n^2 é par $\iff n$ é par, para todo o número natural n , o que prova o pretendido.

Desafios

Página 73

1.

- a)** $\forall x \in R, x \in B \implies x \notin A$
- b)** As duas proposições depois do quantificador são contrarrecíproca uma da outra, logo são equivalentes.
- c)** "Qualquer que seja o restaurante, não é verdade que seja simultaneamente barato e bom" ou então, "não há restaurantes bons e baratos."
- d)** São equivalentes, de facto, $\neg(x \in A \wedge x \in B) \iff x \notin A \vee x \notin B \iff (x \in A \implies x \notin B)$.

2.

- a)** $s \implies \neg v, s \iff \neg r, v \vee r$.

b)

s	v	r	$\neg v$	$\neg r$	$s \implies \neg v$	$s \iff \neg r$	$s \vee r$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

c)

s	v	r	$\neg v$	$\neg r$	$s \implies \neg v$	$s \iff \neg r$	$s \vee r$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

- d)** Só pode ser a Vanessa. É a única que pode levar calças ou saia; a Sara só pode usar calças e a Rebeca só pode usar saia.

Estas resoluções constituem uma **amostra da publicação** que será disponibilizada, na sua versão integral, em setembro, aos professores adotantes do projeto *Expoente*¹⁰, e referem-se apenas ao **domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos** do Manual.

A versão integral contempla as **resoluções de todos os exercícios constantes dos dois volumes do Manual bem como do Caderno de Exercícios e Testes**.

A versão editável e projetável destes materiais está disponível em



Título
*Expoente*¹⁰
Dossiê do Professor
Matemática A

Autoras
Daniela Raposo
Luzia Gomes

Com a colaboração de
Alexandra Queirós

Execução Gráfica
CEM, Artes Gráficas, SA

Depósito Legal
Nº 387 166/15

ISBN
978-888-89-0445-0

Ano/Edição/Tiragem
2015/1ª Edição/1ª Tiragem

