

01.

**PROGRAMA
E METAS
CURRICULARES
MATEMÁTICA A
10º ANO**

Articulação
Metas Curriculares vs Manual

Programa de Matemática A

ENSINO SECUNDÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

No âmbito da revisão curricular iniciada em 2011, cujo sentido é o de elevar os padrões de desempenho escolar dos alunos portugueses, e em continuidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado pelo Despacho nº 9888-A/2013, publicado no *Diário da República*, 2.ª série, nº 143, de 26 de julho de 2013, o presente Programa e Metas Curriculares estabelecem o conjunto de conhecimentos e de capacidades essenciais que os alunos devem adquirir e desenvolver no decurso do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A.

Alicerçado na análise de diferentes abordagens que têm sido adotadas para o ensino da Matemática neste nível de escolaridade (programas e avaliações nacionais e internacionais, literatura e investigação científica sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática), este documento pretende definir um padrão coerente que imprima rigor ao que é ensinado nas escolas, garantindo simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho.

Em concreto, o presente Programa foi elaborado tendo em conta a informação proporcionada por mais de dez anos de aplicação do Programa anterior. No entanto, ao optar-se pela elaboração de Metas Curriculares, muitos dos conteúdos transversais inerentes a um Programa de Matemática do Secundário encontram-se agora, em grande medida, explicitados, o que levou, por exemplo, à constituição do domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* no 10.º ano.

As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos.

O Programa e as Metas Curriculares respeitam a estrutura cumulativa que é característica da disciplina de Matemática, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos. De acordo com a investigação recente na área do ensino da Matemática, é desta forma progressiva que se pode ir desenvolvendo a compreensão, ou seja, que se pode ir construindo uma sólida rede de factos, conceitos, relações e procedimentos suscetível de ser mobilizada, de forma flexível, em diversos contextos. O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática.

Nessa conceção, tiveram-se igualmente em conta as avaliações internacionais em que Portugal participa, nomeadamente o PISA e o TIMSS. O *Programme for International Student Assessment* (PISA) tem por objetivo avaliar a literacia de Leitura, Matemática e Ciências nos jovens de 15 anos, independentemente do ano de escolaridade e da modalidade que frequentam. Ainda que a pertinência deste estudo seja indiscutível, serão mais relevantes, no quadro do presente Programa, os pressupostos do *Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* (adiante designado por *TIMSS-Advanced*), programa de avaliação internacional no qual Portugal participará a partir de 2015 e cujo objetivo é precisamente o de estudar os resultados obtidos pelos alunos que se encontram no final do Ensino Secundário nas disciplinas de Física e Matemática, em modalidades destinadas ao prosseguimento de estudos em áreas de ciências e tecnologias. Na definição e estruturação dos domínios cognitivos e de conteúdos a avaliar, o *TIMSS-Advanced* envolve todos os países participantes num processo colaborativo que passa por uma muito completa descrição dos tópicos e conteúdos dos currículos de Matemática e de Física desses países. No que se refere à Matemática, os domínios dos conteúdos (*Álgebra*, *Cálculo* e *Geometria*) e das capacidades cognitivas (*Knowing*, *Appllying* e *Reasoning*) encontram-se devidamente contemplados no presente documento curricular conforme se explica nos tópicos seguintes.

No que diz respeito aos conteúdos programáticos, a análise destes elementos, bem como de currículos de outros países não participantes no *TIMSS-Advanced*, revela que a inclusão no Programa de alguns temas fundamentais, atualmente ausentes do Ensino Secundário em Portugal, contribui decisivamente para o alinhamento das opções curriculares nacionais com o plano internacional. Como exemplo refiram-se os que constam do domínio *Primitivas e Cálculo Integral*. Procedeu-se ainda ao reforço de alguns tópicos, como o da aplicação da trigonometria à resolução de triângulos ou o do estudo de limites de sucessões e de funções, que, quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva, levam com frequência à formação de conceções erradas e difíceis de reverter.

Finalmente, com o objetivo de promover o conhecimento da forma como a Matemática vai sendo construída, procurou-se justificar, em certas situações, a escolha de algumas definições consagradas desta disciplina. É, por exemplo, o caso da extensão das definições das razões trigonométricas, estudadas no Ensino Básico, a ângulos retos e obtusos, intimamente ligada neste Programa à Lei dos senos e ao Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática, atividade essa que constitui o propósito primitivo da Trigonometria.

No respeito pela estrutura intrínseca da Matemática e do método que a caracteriza, procurou-se igualmente desenvolver no aluno o gosto por esta disciplina milenar, nas suas diversas vertentes, como o carácter organizador e agregador de conhecimento na sua expressão mais abstrata ou a eficácia de que se revestem os instrumentos matemáticos quando aplicados ao estudo do mundo real.

O calendário de aplicação deste Programa está definido no Despacho nº 159717/2012, de 14 de dezembro, estando prevista para o ano letivo 2015-16 a sua implementação no 10º ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11º e 12º anos de escolaridade.

2 – FINALIDADES DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Como finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário salientam-se a estruturação do pensamento e a aplicação da Matemática ao mundo real.

A estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato

Tal como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico, a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. Tratando-se de uma capacidade indispensável a um bom percurso escolar ou profissional, em qualquer área do conhecimento, o desenvolvimento do raciocínio abstrato deve ser considerado como uma finalidade em si.

A modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real

Os instrumentos matemáticos são indispensáveis à concretização de modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de sistemas reais cujo estudo se pode inserir nas mais diversas áreas do conhecimento. De um ponto de vista histórico é possível afirmar que alguns conceitos centrais da Matemática foram desenvolvidos com o propósito de serem utilizados na análise de certos fenómenos naturais. O Programa dá especial relevância a diversas aplicações da Matemática, prescrevendo, por exemplo, explicitamente, a aplicação do cálculo diferencial à cinemática do ponto ou das progressões geométricas ao cálculo de juros, o que permite em particular obter uma interpretação concreta do número de Neper.

A este propósito, é importante referir que a modelação matemática não consiste em associar de forma arbitrária – e sem qualquer critério ou justificação razoável – uma dada função matemática a uma dada grandeza. Proceder dessa forma é transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real. Por exemplo, a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra, o que se traduz, ao utilizar-se um modelo baseado em funções diferenciáveis, pela proporcionalidade entre a função que representa o fenómeno e a respetiva derivada. Uma tal justificação encontra-se explicitamente prevista no Programa.

De forma análoga prevê-se, no 12º ano, o tratamento de situações em que uma função é proporcional, com constante de proporcionalidade negativa, à respetiva derivada de segunda ordem. É desta forma possível justificar a utilização de funções trigonométricas na modelação de alguns sistemas que exibem comportamento oscilatório. Em particular, é proposto estudar, neste contexto, a forma como a segunda Lei de Newton e a Lei de Hooke permitem deduzir que certos sistemas envolvendo massas atuadas por molas apresentam um comportamento de oscilador harmónico.

3 - OBJETIVOS

Os objetivos que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar ao longo do Ensino Secundário são explicitados por verbos a que se atribuem significados específicos e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares.

Requerem-se assim os seguintes cinco desempenhos, com o sentido que se descreve:

(1) Identificar/Designar/Referir: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

(2) Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

(3) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

(4) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

(5) Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer para a aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.

Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos – O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores. Por outro lado permitem determinar, *a priori*, que outra informação se poderia obter sem esforço a partir dos dados de um problema, o que possibilita elaborar novas estratégias com vista à sua resolução. A memorização de alguns factos tem igualmente um papel fundamental na aprendizagem da Matemática, pelo que é incorreto opô-la à compreensão: memorização e compreensão, sendo complementares, reforçam-se mutuamente. Conhecer factos elementares e enunciados de teoremas de memória permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direcionados para a execução de tarefas mais complexas. No *TIMSS-Advanced*, relativamente ao domínio cognitivo "*Knowing*", considera-se que os factos e propriedades elementares constituem, em conjunto, a linguagem básica da Matemática e a própria fundação do pensamento matemático, devendo o aluno ser capaz de os recordar de forma automática e sistemática. Relativamente aos procedimentos, entende-se que: "Os procedimentos formam uma ponte entre os conhecimentos elementares e a utilização da Matemática para a resolução de problemas rotineiros. Os alunos devem ser eficientes e precisos na utilização de uma variedade de procedimentos de cálculo e outras ferramentas. Devem saber que determinados procedimentos permitem resolver categorias inteiras de problemas e não apenas problemas avulso."

Raciocínio matemático – O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjecturas. Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos. O *TIMSS-Advanced*, no capítulo dedicado à capacidade cognitiva "*Reasoning*", estabelece também que os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas não rotineiros, frisando que estes problemas exigem recursos cognitivos acima dos necessários à resolução de problemas rotineiros, ainda que a respetiva resolução esteja dependente de conhecimentos e capacidades previamente adquiridas. No entanto (e tal como também se encontra cuidadosamente explicitado no *TIMSS-Advanced*), os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjecturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori*.

Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores preveem que os alunos da disciplina de Matemática A consigam, no final do Ensino Secundário, elaborar algumas demonstrações com segurança.

Resolução de problemas – A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. Este ponto é reforçado no *TIMSS-Advanced*, a propósito do domínio cognitivo "*Applying*". Considera-se, a propósito da resolução de problemas, que os alunos devem "aplicar conhecimentos de factos matemáticos, capacidades, procedimentos e conceitos para criar representações e resolver problemas". Faz-se ainda notar que "embora a respetiva dificuldade possa variar, os problemas a resolver no âmbito deste domínio cognitivo envolvem essencialmente a capacidade de selecionar e aplicar procedimentos previamente estudados".

Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente.

Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva e uma ilustração, nem sempre possível, de situações inteiramente inspiradas na vida corrente. Desta maneira, pode ser conveniente, em diversas situações, propor problemas descrevendo situações que não traduzam de modo plenamente realista aspetos da experiência quotidiana dos alunos, mas que sejam particularmente adaptados aos objetivos do ensino de determinadas matérias.

Comunicação matemática – A capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos e de identificar as questões que levantam pode ser desenvolvida através da sua explicitação e explicação, bem como da discussão de estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem, pois, ser incentivados a expor as suas ideias de modo claro, conciso e coerente, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo igualmente a redação escrita parte integrante da atividade matemática, devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas.

História da Matemática – A História da Matemática é um tema que está contemplado explicitamente em alguns descritores das Metas. Os professores deverão, não apenas nesses casos mas também a propósito de outros temas que para o efeito se revelem particularmente adequados, enquadrar de um ponto de vista histórico os conteúdos abordados. Tal atividade, para além de ilustrar a forma como a Matemática foi construída ao longo dos tempos, permite ainda, não só uma maior motivação para a aprendizagem, como, em muitos casos, também proporciona uma melhor compreensão dos próprios conceitos. Por outro lado, a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento como a Astronomia, a Física, a Biologia ou a Economia constituiu um dos motores essenciais à evolução global das ciências, incluindo a própria Matemática, pelo que o conhecimento histórico dessa interação é um fator essencial para uma compreensão mais profunda do pensamento científico.

4 - CONTEÚDOS

Em cada ano de escolaridade, os conteúdos encontram-se organizados por domínios. A articulação entre os domínios de conteúdos e os objetivos acima referidos – que constituem o conjunto de desempenhos que os alunos devem evidenciar – está materializada nas Metas Curriculares.

Nos quadros seguintes apresentam-se os conteúdos a lecionar e sugere-se, a título não prescritivo, o número de tempos letivos que poderá ser dedicado a cada um dos domínios, incluindo-se nesse número as aulas dedicadas à avaliação. Atendendo à autonomia atualmente conferida às escolas no que se refere à duração dos tempos letivos, esclarece-se que, nessas sugestões, se considerou, como unidade, o tempo letivo de 45 minutos.

10.º ANO

No 10.º ano, os domínios de conteúdos são cinco:

- Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)
- Álgebra (ALG)
- Geometria Analítica (GA)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

O domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* pode ser considerado central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário. Começa-se por introduzir algumas operações sobre proposições, de forma intuitiva e no contexto de uma Lógica bivalente em que valem os Princípios de não contradição e do terceiro excluído. Em seguida, é estudada a quantificação universal e existencial de condições e a relação entre operações sobre condições e sobre os respetivos conjuntos-solução, assunto que já tinha sido visitado, de forma menos específica, no Ensino Básico. É, ainda, a oportunidade para traduzir numa linguagem própria das teorias aqui desenvolvidas algumas técnicas elementares de demonstração, como a prova da igualdade entre conjuntos por dupla inclusão ou a prova de uma implicação pelo contrarrecíproco. De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, tal como estão enunciados na respetiva introdução, este estudo pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores.

No domínio da *Álgebra*, completa-se, de forma sistemática, o estudo dos radicais, o que permite estender adequadamente a noção de potência a expoentes racionais e mostrar que as respetivas propriedades algébricas se estendem a potências com este conjunto alargado de expoentes. Neste domínio ainda se retoma o estudo iniciado no Básico acerca do anel dos polinómios de coeficientes reais. É definida a divisão euclidiana e apresentado o Teorema do Resto, que permite, em particular, provar que $a \in \mathbb{R}$ é raiz de um polinómio P se e somente se P é divisível por $x - a$. É ainda abordada a noção de multiplicidade algébrica de uma raiz, com aplicações à fatorização de polinómios.

O 10º ano é igualmente a ocasião para se desenvolver o estudo da *Geometria Analítica* iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos planos e o estudo das equações cartesianas das retas. Fixada uma unidade de comprimento e um referencial ortonormado do plano, introduz-se o cálculo da medida da distância entre pontos a partir das respetivas coordenadas, o que constitui um passo essencial no sentido de tratar, de forma eficaz, problemas da Geometria com instrumentos puramente analíticos. Dá-se especial relevo ao estudo das equações cartesianas de circunferências e elipses, cuja definição geométrica a partir da propriedade focal é apresentada neste domínio. No que diz respeito ao cálculo vetorial, para além das operações de adição de vetores e de adição de um ponto com um vetor, que eram já conhecidas, define-se agora a diferença de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar, a noção de norma, fixada uma unidade de comprimento, e, fixado além disso um referencial ortonormado, introduzem-se as coordenadas de um vetor, tratando-se em seguida também de um ponto de vista analítico todas estas noções. Depois de se apresentar o conceito de vetor diretor, introduzem-se as equações vetoriais e os sistemas de equações paramétricas de retas do plano. Finalmente, é feita uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos do espaço, generalizando-se algumas das noções já estudadas no plano.

Inicia-se o domínio *Funções Reais de Variável Real* com alguns conceitos gerais sobre funções, como a injetividade, a sobrejetividade ou a restrição de uma função a um dado conjunto e definem-se as noções de composição de funções e de função inversa de uma função bijetiva. Em seguida, estabelecem-se relações entre propriedades de funções reais de variável real, como a paridade e simetrias dos respetivos gráficos. Estudam-se ainda as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas através da adição ou da multiplicação das variáveis dependente ou independente de uma dada função por uma constante. Termina-se este domínio de conteúdos com alguns aspetos gerais das funções reais de variável real, como a monotonia, o sentido de concavidade do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo e absoluto.

Finalmente, no domínio *Estatística*, começa-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular poderão ser utilizadas neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvios-padrão de amostras, ou de percentis, noções tratadas no 10º ano. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos.

TABELA DE CONTEÚDOS

Domínio	Conteúdos
LTC10 18 aulas	Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos Proposições – Valor lógico de uma proposição; Princípio de não contradição; – Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência; – Prioridades das operações lógicas; – Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedade da dupla negação; Princípio da dupla implicação; – Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção; – Leis de De Morgan; – Implicação contrarrecíproca; – Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. Condições e Conjuntos – Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos; – Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão; – União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar; – Inclusão de conjuntos; – Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem; – Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação; – Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco; – Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.
ALG10 30 aulas	Radicais – Monotonia da potenciação; raízes de índice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; – Propriedades algébricas dos radicais; produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes; – Racionalização de denominadores; – Resolução de problemas envolvendo operações com radicais. Potências de expoente racional – Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional; produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência; – Resolução de problemas envolvendo operações com potências. Polinômios – Divisão euclidiana de polinômios e regra de Ruffini; – Divisibilidade de polinômios; Teorema do Resto; – Multiplicidade da raiz de um polinômio e respectivas propriedades; – Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinômios, o Teorema do Resto e a fatorização de polinômios; – Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinômios.

TABELA DE CONTEÚDOS

Domínio	Conteúdos
GA10 54 aulas	Geometria analítica no plano - Referenciais ortonormados; - Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta; - Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; - Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos; - Equação cartesiana reduzida da circunferência; - Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal; - Inequações cartesianas de semiplanos; - Inequações cartesianas de círculos; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano; - Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. Cálculo vetorial no plano - Norma de um vetor; - Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico; - Diferença entre vetores; - Propriedades algébricas das operações com vetores; - Coordenadas de um vetor; - Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; - Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares; - Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; - Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; - Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta; - Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação vetorial de uma reta; - Sistema de equações paramétricas de uma reta; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano. Geometria analítica no espaço - Referenciais cartesianos ortonormados do espaço; - Equações de planos paralelos aos planos coordenados; - Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; - Distância entre dois pontos no espaço; - Equação do plano mediador de um segmento de reta; - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; - Inequação cartesiana reduzida da esfera; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço; - Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço. Cálculo vetorial no espaço - Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; - Equação vetorial da reta no espaço; - Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

TABELA DE CONTEÚDOS

Domínio	Conteúdos
FRVR10 58 aulas	Generalidades acerca de funções – Produtos cartesianos de conjuntos; – Gráficos de funções; – Restrições de uma função; – Imagem de um conjunto por uma função; – Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; – Composição de funções; – Função inversa de uma função bijetiva. Generalidades acerca de funções reais de variável real – Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas; – Propriedades geométricas dos gráficos de funções; – Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; – Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa; – Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)$ + d, a, b, c, d números reais, a e b não nulos. Monotonia, extremos e concavidade – Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções quadráticas; – Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos; – Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real. Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos – Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas; – Funções definidas por ramos; – Estudo da função $x \rightarrow a \mid x - b \mid + c$, $a \neq 0$; – As funções $x \rightarrow \sqrt{x}$ e $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas; – Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$, $a \neq 0$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b} + c$, $a \neq 0$; – Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais. Resolução de problemas – Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas; – Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real; – Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
EST10 18 aulas	Características amostrais – Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição; – Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística; – Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra; – Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra; – Percentil de ordem k; propriedades do percentil de ordem k; – Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra; – Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

5 - NÍVEIS DE DESEMPENHO

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo "+". Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
10º ano	LTC10 1.16, 2.19, 3.1, 3.2. ALG10 1.1, 1.2, 1.11, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 4.2, 4.5, 4.11, 5.1, 5.2, 5.3. GA10 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2. FRVR10 1.11, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 4.8, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. EST10 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo "+". Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios LTC10 e ALG10 encontram-se assinalados com o símbolo "#" alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

6 - INDICAÇÕES METODOLÓGICAS

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjecturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

7 – AVALIAÇÃO

O Decreto-Lei nº 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei nº 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação científico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas Metas Curriculares.

Metas Curriculares

Matemática A

ENSINO SECUNDÁRIO

O presente documento descreve o conjunto das Metas Curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o 10º ano. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

DOMÍNIO

Subdomínio

1. *Objetivo geral*

1. Descritor

2. Descritor

.....

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores ("identificar", "designar", "referir", "representar", "reconhecer", "saber", "provar", "demonstrar", "justificar") encontra-se definido no parágrafo intitulado "Leitura das Metas Curriculares".

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

É também disponibilizado aos professores um Caderno de Apoio às presentes Metas Curriculares contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

LEITURA DAS METAS CURRICULARES

"Identificar"/"Designar"/"Referir"/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

"Reconhecer": O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

"Saber": O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

"Provar"/"Demonstrar": O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

"Justificar": O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo "+".

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificou-se no Caderno de Apoio diferentes níveis de desempenho.
- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo "#", ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos**1. Operar com proposições**

- | | |
|--|----------|
| 1. Designar por "proposição" toda a expressão p suscetível de ser "verdadeira" ou "falsa" e designar estes atributos por "valores lógicos". | 13 |
| 2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por "Princípio de não contradição". | 14
20 |
| 3. Saber, dadas proposições p e q , que " p é equivalente a q " é uma proposição, designada por "equivalência entre p e q ", que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por " $p \Leftrightarrow q$ ". | 26 |
| 4. Saber, dada uma proposição p , que "não p " é uma proposição, designada por "negação de p ", que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por " $\sim p$ ". | 14 |
| 5. Justificar, dada uma proposição p , que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por "lei da dupla negação". | 15 |
| 6. Saber, dadas proposições p e q , que " p e q " é uma proposição, designada por "conjunção de p e q ", que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por " $p \wedge q$ ". | 16 |
| 7. Saber, dadas proposições p e q , que " p ou q " é uma proposição, designada por "disjunção de p e q ", que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por " $p \vee q$ " e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por "Princípio do terceiro excluído". | 17
20 |
| 8. Saber, dadas proposições p e q , que " p implica q " é uma proposição, designada por "implicação entre p e q ", que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por " $p \Rightarrow q$ ", designar p por "antecedente" e q por "consequente" da implicação e reconhecer, dada uma proposição r , que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$. | 22
24 |
| 9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência. | 29 |
| 10. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$. | 24 |
| 11. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por "princípio da dupla implicação". | 27 |
| 12. #Provar, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$. | 19
20 |
| 13. #Provar, dadas proposições p e q , que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por "Primeiras Leis de De Morgan". | 21 |

19

14. #Provar, dadas proposições p, q e r , que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos " $\wedge$ " e " $\vee$ ", e designá-las respetivamente por "associatividade", "comutatividade" e "distributividade".

24

15. #Provar, dadas duas proposições p e q , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por "implicação contrarrecíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ".

24

16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

2. Relacionar condições e conjuntos

31

1. Designar por "expressão proposicional" ou por "condição" uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a , se obtém uma proposição $p(a)$.

42

2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que "qualquer que seja x , $p(x)$ " é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por " $\forall x, p(x)$ ", e designar o símbolo " $\forall$ " por "quantificador universal".

33

37

3. Identificar uma condição $p(x)$ como "universal" se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.

45

4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que "existe x tal que $p(x)$ " é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por " $\exists x: p(x)$ " e designar o símbolo " $\exists$ " por "quantificador existencial".

33

34

36

37

5. Identificar uma condição $p(x)$ como "possível" se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como "impossível" se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.

39

47

48

6. Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por "Segundas Leis de De Morgan", reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.

43

7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por " $\forall x \in U, p(x)$ ", e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por "condição universal em U ".

46

8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por " $\exists x \in U: p(x)$ ", no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por "condição possível em U " e, no caso contrário, por "condição impossível em U ".

- 9.** +Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um "contraexemplo" para a proposição $\forall x \in U, p(x)$. 43
- 10.** Representar, dada uma condição $p(x)$, por " $\{x: p(x)\}$ " um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x: p(x)\}$ por "definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$ ". 51
- 11.** Saber, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$. 50
- 12.** Designar, dado um objeto a e um conjunto A , a por "elemento de A " quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por " $\{a_1, \dots, a_k\}$ " o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por "definição em extensão do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$ ". 51
- 13.** Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , o conjunto $\{x: x \in U \wedge p(x)\}$ como "conjunto definido por $p(x)$ em U " (ou "conjunto-solução de $p(x)$ em U ") e representá-lo também por " $\{x \in U: p(x)\}$ ". 52
- 14.** Identificar, dados conjuntos A e B , o "conjunto união (ou reunião) de A e B " e o "conjunto interseção de A e B " respectivamente como $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$. 57
58
- 15.** Identificar, dados conjuntos A e B , A como estando "contido em B " (" $A \subset B$ ") quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por "subconjunto de B " ou por "uma parte de B ". 55
- 16.** Designar, dados conjuntos A e B , por "diferença entre A e B " o conjunto $\{x \in A: x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por "complementar de B em A ". 58
59
- 17.** Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por "demonstração por dupla implicação" da primeira. 56
- 18.** Reconhecer, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por "princípio da dupla inclusão". 56
- 19.** +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição " $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ " é equivalente à proposição " $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ ", isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa. 44
- 20.** Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por "contrarrecíproco" da primeira e uma demonstração da segunda proposição por "demonstração por contrarrecíproco" da primeira. 45

3. Resolver problemas

- 1.** +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. 62 a 72
- 2.** +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos. 62 a 72

ÁLGEBRA ALG10

Radicais

1. Definir e efetuar operações com radicais

- 77 **1.** +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que se $a < b$ então $a^n < b^n$.
- 77 **2.** +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que se $0 \leq a < b$ então $0 \leq a^n < b^n$ e se $a < b \leq 0$ então $a^n > b^n \geq 0$.
- 79 **3.** Saber, dado um número real a e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que existe um número real b
80 tal que $b^n = a$, provar que é único, designá-lo por "raiz índice n de a " e representá-lo
81 por " $\sqrt[n]{a}$ ".
- 79 **4.** +Saber, dado um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que existe um nú-
80 mero real positivo b tal que $b^n = a$, provar que $(-b)^n = a$ e que não existe, para além
de b e de $-b$, qualquer outra solução da equação $x^n = a$, designar b por "raiz índice n
de a " e representá-lo por " $\sqrt[n]{a}$ ".
- 79 **5.** Justificar, dado um número natural n , que 0 é o único número real cuja potência
de expoente n é igual a 0 e, por esta razão, representá-lo também por " $\sqrt[n]{0}$ " ("raiz
índice n de 0").
- 84 **6.** #Provar, dados números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que
 $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
- 84 **7.** #Provar, dados números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
- 85 **8.** #Provar, dados números reais a e b (respetivamente números reais a e b não nega-
86 tivos), $b \neq 0$, e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar (respetivamente um número $n \in \mathbb{N}$ par), que
 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e justificar que para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{b})^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$.
- 87 **9.** #Provar, dados números naturais n e m (respetivamente números naturais ímpares
 n e m) e um número real não negativo a (respetivamente um número real a), que
 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
- 95 **10.** Designar também por "fração" a representação " $\frac{a}{b}$ " do quociente entre números
reais a e b (com $b \neq 0$), a e b , neste contexto, respetivamente por "numerador" e
"denominador" e identificar duas frações como "equivalentes" quando represen-
tam o mesmo número.
- 95 **11.** +Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$, ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (a e c números inteiros,
 b, d, n números naturais, $n > 1$).

Potências de expoente racional

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional

1. +Reconhecer, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (sendo m, n, m' e n' números inteiros, $m, m' \geq 0$ e $n, n' \geq 2$), que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$. 90
2. +Identificar, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo $q = \frac{m}{n}$ (m e n números inteiros, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), $q \neq 0$ se $a = 0$, a "potência de base a e de expoente q ", a^q , como $\sqrt[n]{a^m}$, reconhecendo que este número não depende da fração escolhida para representar q , e que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $(a^b)^c = a^{bc}$ a expoentes racionais positivos. 102
3. Identificar, dado um número real positivo a e um número racional positivo q , a "potência de base a e de expoente $-q$ ", a^{-q} , como $\frac{1}{a^q}$, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $a^b \times a^c = a^{b+c}$ a expoentes racionais. 103
4. +Reconhecer que as propriedades algébricas previamente estudadas das potências de expoente inteiro (relativas ao produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência) podem ser estendidas às potências de expoente racional. 103
5. +Simplificar expressões envolvendo radicais e potências. 103

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações com radicais e com potências. 106 a 113

Divisão inteira de polinómios

4. Efetuar operações com polinómios

1. Designar um polinómio P com apenas uma variável x por " $P(x)$ ". 116
2. +Reconhecer, dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, que o grau do polinómio $A(x)B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$. 118
3. Saber, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, que existem dois únicos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$ e $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, e designar, neste contexto, $A(x)$ por "polinómio dividendo", $B(x)$ por "polinómio divisor", $Q(x)$ por "polinómio quociente" e $R(x)$ por "polinómio resto" da "divisão inteira" (ou "divisão euclidiana") de $A(x)$ por $B(x)$. 119
4. Determinar, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, as formas reduzidas dos polinómios quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$. 120
5. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que aplicando a "regra de Ruffini" se obtém o quociente e o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$. 122
6. Provar, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ e designar esta propriedade por "Teorema do Resto". 128
7. Designar, dado um polinómio $P(x)$, por "raiz do polinómio" (ou "zero do polinómio") qualquer número real a tal que $P(a) = 0$. 128

121

8. Identificar um polinómio $P(x)$ como "divisível" por um polinómio $Q(x)$ não nulo se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é nulo.

128

9. Provar, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ e um número real a , que a é uma raiz de $P(x)$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $x - a$ e que, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

132

10. Identificar, dado um polinómio $P(x)$ e uma raiz a de $P(x)$, a "multiplicidade de a " como o maior número natural n tal que existe um polinómio $Q(x)$ com $P(x) = (x - a)^n Q(x)$, justificar que nesta situação $Q(a) \neq 0$ e designar a por "raiz simples" quando a respetiva multiplicidade é igual a 1.

134

11. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, que $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, tendo-se $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero.

133

12. Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

5. Resolver problemas

142 a 150

1. +Resolver problemas envolvendo a divisão inteira de polinómios e o Teorema do Resto.

142 a 150

2. +Resolver problemas envolvendo a fatorização de polinómios de que se conhecem algumas raízes.

142 a 150

3. +Resolver problemas envolvendo a determinação dos zeros e do sinal de funções polinomiais de grau superior a dois.

GEOMETRIA ANALÍTICA GA10

Geometria Analítica no plano

1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

1. Designar por "referencial ortonormado" um referencial ortogonal e monométrico de um dado plano, tal que a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento pré-fixada e, dados números reais a_1 e a_2 , designar por " $A(a_1, a_2)$ ", o ponto A de abscissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial. 154
2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por " $d(A, B)$ ". 156
3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abscissas a e b respectivamente, que a abscissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$. 158
4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$. 160
5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por "equação cartesiana" (respectivamente por "inequação cartesiana") de um conjunto C uma equação (respectivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C . 161
6. Determinar, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ na forma $y = mx + b$ (equação reduzida da reta) ou na forma $x = c$. 168
7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a esse plano e um número $r > 0$, que a equação $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro A e de raio r , e designá-la por "equação (cartesiana) reduzida da circunferência". 170
8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por "elipse" o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, por "focos da elipse" os pontos A e B , por "centro da elipse" o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por "eixo maior da elipse" o número $2a$ (e a por "semieixo maior da elipse"), interpretando-o geometricamente. 176
9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseca a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por "eixo menor da elipse" (e b por "semieixo menor da elipse"). 178

179

- 10.** +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por "equação (cartesiana) reduzida da elipse".

164

- 11.** +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação reduzida $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $y > ax + b$ e $y < ax + b$ (respetivamente $y \geq ax + b$ e $y \leq ax + b$) e designá-los respetivamente por "semiplano superior" e "semiplano inferior" em relação à reta r .

163

- 12.** Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação cartesiana $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $x > c$ e $x < c$ (respetivamente $x \geq c$ e $x \leq c$) e designá-los respetivamente por "semiplano à direita" e "semiplano à esquerda" da reta r .

173

- 13.** Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que a inequação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ($a, b \in \mathbb{R}, r > 0$) é uma inequação do círculo de centro $C(a, b)$ e de raio r .

2. Resolver problemas

182 a 189

- 1.** +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano, e equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

Cálculo vetorial no plano

3. Operar com vetores

195

- 1.** Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a "norma do vetor $\vec{v}$ " como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por $\|\vec{v}\|$.

197

- 2.** Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por "escalar") λ , o "produto de $\vec{v}$ por λ " (" $\lambda\vec{v}$ ") como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda > 0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda < 0$, justificar que $\lambda\vec{v}$ não depende da unidade de comprimento fixada e que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.

199

- 3.** Justificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.

196

- 4.** Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, provando que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por "diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ " e representá-lo por " $\vec{u} - \vec{v}$ ".

200

- 5.** +Reconhecer, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ , que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

202

203

- 6.** +Reconhecer, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

4. Operar com coordenadas de vetores

1. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1, 0)$, $Y(0, 1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma "base do espaço vetorial dos vetores do plano", (v_1, v_2) por "coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)" e representar por " $\vec{v}(v_1, v_2)$ " o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2) . 207
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A , o "vetor-posição do ponto A " como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto. 208
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ , que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são colineares se e somente se as respetivas coordenadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas. 212
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a "diferença entre os pontos B e A " como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por " $B - A$ " e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$. 213
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. 214
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. 214

5. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano

1. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo e uma reta r , $\vec{v}$ como "tendo a direção de r " quando r tiver a direção das retas suporte dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$. 216
2. Designar por "vetor diretor" de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção do que r . 216
3. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r não vertical de declive m , que o vetor $\vec{v}(a, b)$ é vetor diretor de r se e somente se $a \neq 0$ e $m = \frac{b}{a}$, e que, em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r . 225
226
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que os vetores diretores das retas verticais são os vetores $\vec{v}(0, b)$, $b \neq 0$. 217
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r , e designar esta equação por "equação vetorial da reta r ". 219

- 6.** Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1$ e $y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por "sistema das equações paramétricas da reta r ".

6. Resolver problemas

230 a 237

- 1.** +Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.

230 a 237

- 2.** +Resolver problemas envolvendo a colinearidade de vetores do plano.

230 a 237

- 3.** +Resolver problemas envolvendo equações vetoriais, paramétricas e cartesianas de retas do plano.

Geometria Analítica no espaço

7. Definir referenciais cartesianos do espaço

1. Identificar um "referencial (cartesiano) ortonormado do espaço" (ou simplesmente "referencial cartesiano") como um terno ordenado de retas numéricas que se intersectam nas respectivas origens, duas a duas perpendiculares e com unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada, designar a origem comum das três retas por "origem do referencial", a primeira reta por "eixo das abscissas", a segunda por "eixo das ordenadas", a terceira por "eixo das cotas", genericamente cada uma delas por "eixo coordenado" e, se for representada por " O " a origem do referencial, representar estes três eixos respetivamente por " Ox ", " Oy " e " Oz " e o referencial por " $Oxyz$ ". 238
2. Designar, dado um ponto P e uma reta r , por "projeção ortogonal de P sobre r " como o próprio ponto P quando P pertencer a r e como o pé da perpendicular traçada de P para r no caso contrário, reconhecendo que é a interseção com r do plano normal a r passando por P . 239
3. Designar, dado um referencial ortonormado e um ponto P de projeções ortogonais P_x , no eixo das abscissas, P_y , no eixo das ordenadas e P_z , no eixo das cotas, por "abscissa de P ", "ordenada de P " e "cota de P " respetivamente a abscissa de P_x , de P_y e de P_z nas respectivas retas numéricas, e o terno ordenado destes três valores por "coordenadas de P ". 240
4. Designar por "planos coordenados" os três planos determinados por dois dos eixos coordenados, representá-los por " xOy ", " xOz " e " yOz " consoante os eixos coordenados que contêm, e reconhecer que são perpendiculares dois a dois. 239
5. +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um terno ordenado de números reais (x, y, z) , que existe um e apenas um ponto P com essas coordenadas e representá-lo por " $P(x, y, z)$ ". 242
6. +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$ de projeção ortogonal P' no plano xOy que, nesse plano, munido do referencial constituído pelos eixos Ox e Oy , P' tem coordenadas (a, b) e enunciar resultados análogos para os planos xOz e yOz . 243

8. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que intersecta o eixo das abscissas no ponto $A(a, 0, 0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados xOz e xOy . 244
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o "sistema de equações cartesianas" $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que intersecta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas. 245
3. +Provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ e representá-la por " $d(A, B)$ ". 247

249

4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

252

5. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro A e de raio r , e designá-la por "equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica".

254

6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$ é uma inequação cartesiana da esfera de centro A e de raio r , e designá-la por "inequação (cartesiana) reduzida da esfera".

Cálculo vetorial no espaço

9. Definir vetores do espaço

257

1. Designar um par de segmentos orientados do espaço por "equipolentes" quando são coplanares e equipolentes num plano que os contenha.

257

2. Saber que um "vetor do espaço" fica determinado por um segmento orientado do espaço de tal modo que segmentos de reta equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos de reta não equipolentes determinam vetores distintos.

257

3. Estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor, de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respetivas propriedades geométricas e algébricas.

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

260

1. +Reconhecer, fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O e um vetor $\vec{v}$ que, sendo $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$, existe um e somente um terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais tais que $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$, designar o terno ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por uma "base do espaço vetorial dos vetores do espaço", (v_1, v_2, v_3) por "coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)" e representar por " $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ " o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3) .

262

263

2. Estender do plano ao espaço a definição do vetor posição de um ponto e a identificação das respetivas coordenadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas da soma e da diferença de vetores, do produto de um vetor por um escalar, do simétrico de um vetor, da diferença de dois pontos, da soma de um ponto com um vetor e da norma de um vetor, e o critério de colinearidade de vetores através das respetivas coordenadas.

265

266

3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

11. Resolver problemas

268 a 276

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço, equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.

268 a 276

2. +Resolver problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL FRVR10

Generalidades acerca de funções

1. Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva

1. Identificar, dados conjuntos A e B , o "produto cartesiano de A por B " como o conjunto $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a, b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por " $A \times B$ ". 10
2. Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$. 11
3. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ um conjunto C , a "restrição de f a C " como a função $f|_C: C \cap A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$. 13
4. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ e $C \subset A$, o "conjunto imagem de C por f " como o conjunto $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C : y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C , representá-lo também por " $\{f(x) : x \in C\}$ ". 14
5. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ como "injetiva" se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por "injeção de A em B ". 15
6. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ como "sobrejetiva" se para todo o y pertencente a B , existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por "sobrejeção de A em B " ou por "função de A sobre B ". 16
17
7. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ como "bijetiva" se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por "bijeção de A em B ". 18
8. Identificar, dadas funções $f: D_f \rightarrow A$ e $g: D_g \rightarrow B$, a "função composta de g com f " como a função $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$, tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g(f(x))$ e designá-la também por "g composta com f", "g após f" ou "f seguida de g". 21
9. Designar, dado um conjunto A , por "função identidade em A " a função $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ tal que $\forall x \in A, \text{Id}_A(x) = x$ e justificar que se trata de uma função bijetiva. 22
10. Justificar, dados conjuntos A e B e uma função $f: A \rightarrow B$ bijetiva, que para todo o y pertencente a B existe um e apenas um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$ e, representando-o por x_y , designar por "função inversa de f " a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$. 23
11. +Reconhecer, dada uma função $f: A \rightarrow B$ bijetiva, que f^{-1} é bijetiva e que $(f^{-1})^{-1} = f$ e designar também f^{-1} por "bijeção recíproca de f ". 27
12. Reconhecer, dada uma função $f: A \rightarrow B$, que f é bijetiva se e somente se existir uma função $g: B \rightarrow A$, tal que $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. 29
13. Justificar que uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetiva se e somente se existir uma função $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{Id}_A$ e $f \circ g = \text{Id}_B$ e que, nesse caso, $g = f^{-1}$. 29

Generalidades acerca de funções reais de variável real

2. Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respectivas funções

- 30 1. Designar por "função real de variável real" uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
- 30 2. Saber, dada uma expressão $f(x)$, que se convencionou, quando nada for indicado em contrário, que essa expressão representa a função f com conjunto de chegada igual a $\mathbb{R}$ e domínio constituído por todos os números reais a para os quais fica representado um número real pela expressão que se obtém substituindo todas as ocorrências de x em $f(x)$ por um símbolo representando o número a , designar, nesse caso, a expressão $f(x)$ por "expressão analítica de f " e este processo de caracterizar f por "definição (analítica) de f pela expressão $f(x)$ ".
- 33 3. Identificar uma função real de variável real f como "par" se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
- 34 4. Identificar uma função real de variável real f como "ímpar" se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
- 35 5. Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f , que, se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
- 34 6. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.
- 35 7. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for "simétrico relativamente à origem O do referencial", isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
- 25 8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.
- 44 9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.
- 46 10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c: x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
- 48 11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por "contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a " a transformação $\mathcal{O}$ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\mathcal{O}(P)$ de coordenadas (x, ay) .
- 49 12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a .

- 13.** Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por "contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a " a transformação $\mathcal{O}$ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\mathcal{O}(P)$ de coordenadas (ax, y) . 51
- 14.** Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$. 52
- 15.** Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox . 54
- 16.** Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy . 55

3. Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real

- 1.** Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) crescente em A " (ou simplesmente "(estritamente) crescente" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. 57
- 2.** Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) decrescente em A " (ou simplesmente "(estritamente) decrescente" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. 57
- 3.** Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "crescente, em sentido lato, em A " (ou simplesmente "crescente, em sentido lato" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$. 57
- 4.** Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "decrescente, em sentido lato, em A " (ou simplesmente "decrescente, em sentido lato" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$. 57
- 5.** Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) monótona em A " (ou simplesmente "(estritamente) monótona" se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como "monótona, em sentido lato, em A " (ou simplesmente "monótona, em sentido lato" se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A . 58
- 6.** Identificar, dada uma função real de variável real f , um "intervalo de (estrita) monotonia de f " como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f|_I$ é (estritamente) monótona. 58
- 7.** Identificar, dada uma função real de variável real e $A \subset D_f$, f como "constante em A " se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A , $f(x_1) = f(x_2)$. 57
- 8.** Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$). 80
81

9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

4. Identificar extremos de funções reais de variável real

1. Designar, dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, um número real M como "majorante de f " (respetivamente "minorante de f ") quando $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(x) \geq M$), referindo a função f como "majorada" (respetivamente "minorada") quando admitir um majorante (respetivamente um minorante).

2. Designar por "limitada" uma função simultaneamente majorada e minorada.

3. Designar por "mínimo absoluto" (respetivamente por "máximo absoluto") de uma função real de variável real um valor $f(a)$ do contradomínio de f tal que $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$) e designar por "extremos absolutos de f " os máximos absolutos e os mínimos absolutos de f .

4. Designar, dados um número real x_0 e um número real positivo r , por "vizinhança r de x_0 " o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representá-la por " $V_r(x_0)$ ".

5. Referir que uma função real de variável real "atinge um mínimo relativo (ou local)" (respetivamente "atinge um máximo relativo (ou local)") em $a \in D_f$ quando existe $r > 0$ tal que $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$ (respetivamente, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$) e designar $f(a)$ por "mínimo relativo (ou local)" (respetivamente "máximo relativo (ou local)") de f e a por um "minimizante" (respetivamente por um "maximizante") de f .

6. Identificar, dada uma função real de variável real f , o gráfico de f como "tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima" (respetivamente como "tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo") num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR .

7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I , a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$.

8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a , que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

5. Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções

1. Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x - b)^2 + c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos.

2. Identificar uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual são dados um número natural $n > 1$, uma partição $A_1, A_2, \dots, A_n$ de D_f e n expressões $f_j(x)$ ($1 \leq j \leq n$) tais que para todo o j e para todo o $x \in A_j, f(x) = f_j(x)$ como "estando definida por ramos pelas expressões $f_j(x)$, respetivamente nos conjuntos A_j ($1 \leq j \leq n$)".

3. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) interpretando geometricamente os valores a, b e c .

4. Justificar que a função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. 115
5. Justificar que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. 117
6. Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a \sqrt[n]{x - b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$, $a \neq 0$). 116
118
7. Identificar "função polinomial" como uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável. 124
8. Esboçar o gráfico de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3.º grau, módulos e radicais quadrados e cúbicos. 132
9. Identificar, dadas funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, um número real α e um número racional r , as funções $f + g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ("soma de f com g "), $fg: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, ("produto de f por g "), $\frac{f}{g}: D_{\frac{f}{g}} \rightarrow \mathbb{R}$ ("quociente de f por g ", onde $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$), $\alpha f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ("produto de f pelo escalar α ") e $f^r: D_{f^r} \rightarrow \mathbb{R}$ ("potência de expoente r de f ", onde D_{f^r} é o conjunto dos números reais x para os quais está definido $f(x)^r$), como as funções com os domínios e conjunto de chegada indicados, definidas, para cada elemento x do respetivo domínio, respetivamente por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $f^r(x) = f(x)^r$, podendo utilizar-se, para representar as potências de expoente racional, as notações envolvendo raízes. 134
135
136

6. Resolver problemas

1. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais e a composição da função módulo com funções polinomiais. 68 a 79
140 a 150
2. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica. 68 a 79
140 a 150
3. +Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real. 68 a 79
140 a 150
4. +Resolver problemas envolvendo as funções afim, quadrática, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais. 68 a 79
140 a 150
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas. 68 a 79
140 a 150

ESTATÍSTICA EST10

Características amostrais

1. Manipular o sinal de somatório

- 155 **1.** Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ por "somatório de 1 a p dos x_i " (ou por "soma dos p termos da sequência", quando esta designação não for ambígua), representá-la por " $\sum_{i=1}^p x_i$ ", designar o símbolo " Σ " por "sinal de somatório" e, para $1 < m \leq p$, representar também por " $\sum_{i=m}^p x_i$ " a soma $x_m + x_{m+1} + \dots + x_p$ ("somatório de m a p dos x_i ").
- 155 **2.** Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p x_i (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
- 156 **3.** Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
- 156 **4.** Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p$.

2. Utilizar as propriedades da média de uma amostra

- 157 **1.** Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.
- 159 **2.** Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , por " x_i " o valor da variável x no elemento de A com o número i , por " $\underline{x}$ " a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, designá-la por "amostra da variável estatística x " ou simplesmente por "amostra" e por "valores da amostra" os valores x_i , $1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.
- 163 **3.** Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de uma variável estatística, por " $\bar{x}$ " a média $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, designando-a igualmente por "média da amostra $\underline{x}$ " sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.

4. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com m valores ($1 \leq m \leq n$), por " $\tilde{x}$ " o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ os elementos de $\tilde{x}$, por " n_j " ($1 \leq j \leq m$) o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por "frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$ ", e justificar que $\sum_{j=1}^m n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j n_j}{n}$, designando esta última igualdade por "fórmula da média para dados agrupados".
5. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e a , por " $ax \pm h$ " a amostra $\underline{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
6. Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a média de $\underline{x}$ como a abcissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\tilde{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abcissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j .
7. Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral "com pouca resistência".

3. Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por "desvio de x_i em relação à média" a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por " d_i " e provar que $\sum_{i=1}^n d_i = 0$.
2. +Representar dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por " SS_x " a soma $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que é possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios, e referir, por esta razão, que " SS_x tem $n - 1$ graus de liberdade".
4. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
5. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente $\underline{y} = \alpha \underline{x}$) então $SS_y = SS_x$ (respetivamente $SS_y = \alpha^2 SS_x$).
6. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = \sum_{j=1}^m (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\underline{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
7. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por "variância da amostra $\underline{x}$ " e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por "desvio-padrão da amostra $\underline{x}$ ".
8. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $s_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
9. Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente $\underline{y} = \alpha \underline{x}$) então $s_y = s_x$ (respetivamente $s_y = |\alpha| s_x$).

10. Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra correspondente da variável estatística x , que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par $(\bar{x}, s_x)$ reflete a distribuição dos valores da amostra $\underline{x}$ em termos de "localização" e de "dispersão".

11. Reconhecer que para comparar a "dispersão" dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.

12. Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são consideradas boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.

4. Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por "amostra $\underline{x}$ ordenada" a sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\underline{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\underline{x}$.

2. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0, 100]$, por "percentil de ordem k " o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, " $[x]$ " designa a "parte inteira de x ", ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por " P_k ".

3. Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\underline{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75} .

4. Designar, dados números naturais n e $k, k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por "percentil de ordem k ", o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1} (a_{i+1} - a_i) n_i + (x - a_L) n_L = \frac{kn}{100} \sum_{i=1}^m (a_{i+1} - a_i) n_i$, ou seja, tal que $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{kh n}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.

2. +Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.