

Álgebra

1. RADICAIS

1.1 Verdadeiro. Sendo $-6 < 6$, podemos concluir, sem quaisquer cálculos, que se tem $-\frac{1}{3} - 6 < -\frac{1}{3} + 6$ (propriedade 1).

1.2 Falso. Sendo $-\pi < -\frac{\pi}{3}$, podemos concluir, sem quaisquer cálculos, que se tem $-\pi + 4 < -\frac{\pi}{3} + 4$ (propriedade 1).

1.3 Verdadeiro. Sendo $-6 < -5$ e $4 > 0$, podemos concluir, sem quaisquer cálculos, que se tem $4 \times (-6) < 4 \times (-5)$ (propriedade 2A).

1.4 Falso. Sendo $-6 < -5$ e $-\frac{1}{3} < 0$, podemos concluir, sem quaisquer cálculos, que se tem $-\frac{1}{3} \times (-6) > -\frac{1}{3} \times (-5)$ (propriedade 2B).

2. De $a > b$, obtemos, pela propriedade 1, $a + c > b + c$ e, com a mesma propriedade, a partir de $c > d$ obtemos $b + c > b + d$. Sendo $a + c > b + c$ e $b + c > b + d$, resulta, por transitividade da relação de ordem, que $a + c > b + d$, como queríamos demonstrar.

3.1 Falso, porque como $-3 > -4$ e o expoente das potências é ímpar tem-se $(-3)^3 > (-4)^3$.

3.2 Verdadeiro, porque como $3 < 5$ e o expoente das potências é ímpar, tem-se $3^7 < 5^7$.

3.3 Verdadeiro, porque sendo $-4 < -3 < 0$ e o expoente das potências par, tem-se $(-4)^4 > (-3)^4$, ou seja, $(-3)^4 < (-4)^4$.

4. De $0 \leq a < b$ resulta que $a < b$ e $a \geq 0$. Estudemos separadamente os casos $a = 0$ e $a > 0$.

No caso de $a > 0$, sendo $a < b$, pela propriedade 2A, obtemos $a \times a^2 < b \times a^2$, isto é, $a^3 < b \times a^2$.

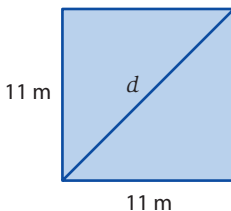
Por outro lado, $a \times b^2 < b \times b^2$, isto é, $a \times b^2 < b^3$. Como $a < b$, $b \times a^2 < a \times b^2$; de $a^3 < b \times a^2$ e de $a \times b^2 < b^3$, resulta, neste caso, $a^3 < b^3$.

No caso de $a = 0$, o problema consiste no seguinte: sendo $0 < b$ devemos provar que também se tem $0 < b^3$. Ora de $0 < b$ obtemos, pela propriedade 2A, que $0 \times b^2 < b \times b^2$, ou seja, $0 < b^3$ e, portanto, também neste caso, resulta $a^3 < b^3$. Logo, em qualquer caso, $a^3 < b^3$, como se queria provar.

5.1 A área do canteiro quadrado é 121 m^2 , logo a medida do lado do quadrado é $\sqrt{121} = 11 \text{ m}$ e o perímetro é 44 m . O comprimento mínimo de rede que o Sr. Avelino terá de comprar para vedar o seu terreno é 44 metros .

5.2 Na figura ao lado, que representa o canteiro, está marcada a diagonal que com dois dos lados do canteiro forma um triângulo retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$d^2 = 11^2 + 11^2 \Leftrightarrow d^2 = 242 \Leftrightarrow d = \pm \sqrt{242}$$



Sendo d um comprimento, terá de ser positivo. Assim,

$$d = \sqrt{242} \approx 15,6 \text{ m}$$

O comprimento da diagonal do canteiro, em metros, arredondado às décimas, é $15,6 \text{ metros}$.

6.1 $a^3 = 216 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow a = 6 \text{ cm}$

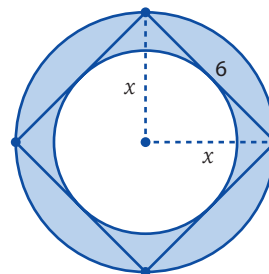
6.2 A área de cada face do cubo é $6^2 = 36 \text{ cm}^2$. A área total da superfície do cubo é $A = 6 \times 36 = 216 \text{ cm}^2$

6.3 Aplicando o teorema de Pitágoras no espaço para a determinação da diagonal do cubo, obtém-se:

$$D^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow D = \pm \sqrt{108}$$

Sendo $D > 0$, tem-se $D = \sqrt{108} \text{ cm}$.

7. Dado que a área do quadrado é 36 cm^2 , sabemos que a medida do seu lado é $\sqrt{36} = 6 \text{ cm}$.



Determinemos o raio da circunferência maior. O diâmetro dessa circunferência é a diagonal do quadrado. Da igualdade $6^2 = x^2 + x^2$, com $x > 0$, resulta $x = \sqrt{18} \text{ cm}$.

O raio da circunferência menor é metade do lado do quadrado, isto é, $\frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$. Logo, a área da coroa circular definida pelas duas circunferências é dada por

$$\pi \times (\sqrt{18})^2 - \pi \times 3^2 = 18\pi - 9\pi = 9\pi \text{ cm}^2$$

8.1 $x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{81} \Leftrightarrow x = -9 \vee x = 9$

8.2 $x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = 4$

8.3 $x^5 = -243 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-243} \Leftrightarrow x = -3$

8.4 $x^8 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

8.5 $x^4 - 625 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 625 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{625} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$

8.6 $x^6 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -8$ equação impossível (qualquer potência de expoente par é positiva ou nula).

9.1 $\sqrt{144} = 12$, porque $12^2 = 144$ e $12 > 0$.

9.2 $\sqrt[3]{-125} = -5$, porque $(-5)^3 = -125$.

9.3 $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$, porque $0,2^4 = 0,0016$ e $0,2 > 0$

9.4 $\sqrt[5]{100\,000} = 10$, porque $10^5 = 100\,000$.

10.1 $\sqrt{27} \approx 5,2$

10.2 $\sqrt[3]{36} \approx 3,3$

10.3 $\sqrt[4]{40} \approx 2,5$

10.4 $\sqrt[5]{-25} \approx -1,9$

$$11. (-b)^n = (-1 \times b)^n = (-1)^n \times b^n \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{porque } n \text{ é par}}}{=} 1 \times b^n = b^n$$

Sendo $b^n = a$ tem-se $(-b)^n = a$, como se queria provar.

12. Seja n um número natural par e a e b números reais positivos, tais que $b^n = a$.

Suponhamos que $-b$ e b não são únicos, isto é, que existe um número real c , tal que $c \neq b$ e $c \neq -b$, e que também verifica $c^n = a$.

Suponhamos que $c > b$. Pela monotonia da potenciação, sendo $c > b > 0$ e n par, teríamos $c^n > b^n$, logo $a > a$, o que é absurdo.

Suponhamos, agora, que $0 < c < b$. Neste caso, teríamos $c^n < b^n$, logo $a < a$, o que também é absurdo.

Suponhamos, agora, que $-b < c < 0$. Neste caso, pela monotonia da potenciação, teríamos $(-b)^n > c^n$. Mas, desta forma, teríamos de ter $a > a$, o que é absurdo.

Suponhamos, agora, que $c < -b < 0$. Neste caso, pela monotonia da potenciação, teríamos $c^n > (-b)^n$. Mas, desta forma, teríamos de ter $a > a$, o que é absurdo.

O caso $c = 0$ implicaria que $a = 0$, o que também não pode acontecer de acordo com as condições desta propriedade.

Resumindo, não se pode ter $c > b$, $0 < c < b$, $-b < c < 0$, $c < -b < 0$, nem $c = 0$, ou seja, não se pode ter $c \neq b$ nem $c \neq -b$.

Logo, tem que se ter obrigatoriamente $c = b$ ou $c = -b$, o que implica, para além de $-b$ e b , não existem outras soluções da equação $x^n = a$.

$$13.1 \sqrt{10} \times \sqrt{3} = \sqrt{10 \times 3} = \sqrt{30}$$

$$13.2 \sqrt{10} : \sqrt{3} = \sqrt{10 : 3} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$13.3 \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5} = \sqrt[3]{10}$$

$$13.4 \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 : 5} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$13.5 \sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \times 2} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$13.6 \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 : 2} = \sqrt[4]{4}$$

$$13.7 \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{14}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 21}{14}} = \sqrt[3]{3}$$

13.8

$$\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3 \times 6 \times 27} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 2 \times 3^3} = \sqrt[5]{3^5 \times 2} = 3\sqrt[5]{2}$$

$$14.1 (\sqrt{3})^3 = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$14.2 (\sqrt[3]{2})^9 = \sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} = 2^3 = 8$$

$$14.3 (\sqrt[3]{2})^{13} = \sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2^{12} \times 2} = \sqrt[3]{(2^4)^3 \times 2} = 2^4 \sqrt[3]{2} = 16\sqrt[3]{2}$$

$$14.4 (\sqrt[5]{3})^{24} = \sqrt[5]{3^{24}} = \sqrt[5]{3^{20} \times 3^4} = \sqrt[5]{(3^4)^5 \times 3^4} = 3^4 \times \sqrt[5]{3^4} = 81\sqrt[5]{3^4}$$

$$15.1 (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

$$15.2 (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$15.3 (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} - (a + b - 2\sqrt{ab}) = a + b + 2\sqrt{ab} - a - b + 2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab}$$

15.4

$$\frac{\sqrt[3]{a \times b^3} \times \sqrt[3]{b \times a^5}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \times b^3 \times b \times a^5}{b}} = \sqrt[3]{a^6 b^3} = \sqrt[3]{(a^2)^3 b^3} = a^2 b$$

16. Sejam a e b números reais não negativos ($b \neq 0$) e n par.

Então $\frac{a}{b} \geq 0$ e $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é o único número real não negativo que elevado a n é igual a $\frac{a}{b}$. Como $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ é um número

real não negativo, basta mostrar que $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$, o que se

$$\text{verifica pois } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Assim, concluímos que para } n \text{ par, } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

A demonstração para n ímpar é análoga, considerando números reais a e b , com $b \neq 0$.

$$17.1 \sqrt[3]{2} = \sqrt[2 \times 3]{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$17.2 \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \times 2]{2} = \sqrt[6]{2^6 \times 2} = 2\sqrt[6]{2}$$

$$17.3 \sqrt[5]{\sqrt{2^{12}}} = \sqrt[5 \times 2]{2^{12}} = \sqrt[10]{2^{10} \times 2^2} = 2\sqrt[10]{4}$$

$$17.4 \sqrt[4]{512} = \sqrt[2 \times 4]{512} = \sqrt[8]{2^8 \times 2} = 2\sqrt[8]{2}$$

$$17.5 \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3 \times 3]{3^{10}} = \sqrt[9]{3^{10}} = \sqrt[9]{3^9 \times 3} = 3\sqrt[9]{3}$$

$$17.6 \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}} = \sqrt[3 \times 2 \times 2]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

18.1

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}-4+\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{2}+\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}=-\frac{4}{2}\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

18.2

$$\frac{5}{2}\sqrt[5]{3}-\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}+3\sqrt[5]{3}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}+3\right)\sqrt[5]{3}=\left(\frac{15}{6}-\frac{2}{6}+\frac{18}{6}\right)\sqrt[5]{3}=\frac{31}{6}\sqrt[5]{3}$$

18.3

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}=\left(\frac{4}{3}-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}$$

18.4 $\sqrt{50}-5\sqrt{2}=\sqrt{2\times 5^2}-5\sqrt{2}=5\sqrt{2}-5\sqrt{2}=0$

18.5 $\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{16}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+5\times\sqrt{3^2\times 3}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2^3\times 2}=$
 $=\sqrt{3}+5\times 3\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=(1+15)\sqrt{3}+(1-2)\sqrt[3]{2}=16\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$

18.6 $5\sqrt{27}-\frac{1}{3}\sqrt{147}+3\sqrt{3}=5\times 3\sqrt{3}-\frac{1}{3}\times 7\sqrt{3}+3\sqrt{3}=$
 $=\left(15-\frac{7}{3}+3\right)\sqrt{3}=\frac{47}{3}\sqrt{3}$

18.7 $5\sqrt{\sqrt{32}}-\sqrt{48}+\sqrt{7}\times\sqrt{21}-\sqrt[4]{2}=$
 $=5\sqrt[4]{32}-\sqrt{4^2\times 3}+\sqrt{7\times 21}-\sqrt[4]{2}=5\sqrt[4]{2^4\times 2}-4\sqrt{3}+\sqrt{7^2\times 3}-\sqrt[4]{2}=$
 $=5\times 2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}-4\sqrt{3}+7\sqrt{3}=(10-1)\sqrt[4]{2}+(7-4)\sqrt{3}=3\sqrt[4]{2}+9\sqrt{3}$

18.8 $\sqrt{125}-\sqrt{3\sqrt{27}}-4\sqrt{5}=\sqrt{5\times 5^2}-\sqrt[4]{3^2\times 27}-4\sqrt{5}=$
 $=5\sqrt{5}-\sqrt[4]{3^4\times 3}-4\sqrt{5}=(5-4)\sqrt{5}-3\sqrt[4]{3}=\sqrt{5}-3\sqrt[4]{3}$

19.1 $A=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

19.2 $B=\frac{3}{\sqrt[3]{3^4}}=\frac{3\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[3]{3}}=\frac{3\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^7}}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{3}=\sqrt[3]{3}$

19.3 $C=\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\times\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\times\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\times\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\times\sqrt[5]{2^2}}{2}=\sqrt[5]{2^2}$

19.4 $D=\frac{7}{\sqrt[6]{7^5}}=\frac{7\times\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^5}\times\sqrt[6]{7}}=\frac{7\times\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^6}}=\frac{7\times\sqrt[6]{7}}{7}=\sqrt[6]{7}$

19.5 $E=\frac{-2}{1+\sqrt{3}}=\frac{-2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{-2(1-\sqrt{3})}{1-(\sqrt{3})^2}=$
 $=\frac{-2(1-\sqrt{3})}{-2}=1-\sqrt{3}$

19.6 $F=\frac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=$
 $=\frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2^2\times 2-5}=\frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{8-5}=\frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

20.1 $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20.2 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

20.3 $\frac{4}{5\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{5(\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3\times 5}=\frac{4\sqrt{3}}{15}$

20.4 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$

20.5 $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}}=\frac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{7^2}}=\frac{\sqrt[3]{3\times 7^2}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{147}}{7}$

20.6 $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4^2}}=\frac{\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{4^2}}{\sqrt[4]{4^2}\times\sqrt[4]{4^2}}=\frac{\sqrt[4]{3\times 4^2}}{\sqrt[4]{4^4}}=\frac{\sqrt[4]{48}}{4}$

21.1 $\frac{2}{1-\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{2(1+\sqrt{2})}{1-2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-1}=-2-2\sqrt{2}$

21.2 $\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=$
 $=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15}}{1-3}=\frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$

21.3 $\frac{1}{3\sqrt{2}+2}=\frac{3\sqrt{2}-2}{(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)}=\frac{3\sqrt{2}-2}{9\times 2-4}=\frac{3\sqrt{2}-2}{14}$

21.4 $\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=$
 $=\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{9\times 2-4\times 3}=\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$

21.5 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})(\sqrt{3}+2\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{3-4\times 5}=$
 $=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{-17}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{6}-2\sqrt{10}}{17}$

$$\begin{aligned}
 21.6 \quad \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{7}+3\sqrt{5})(\sqrt{7}+3\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-3\sqrt{5})(\sqrt{7}+3\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{7})^2 + 2 \times \sqrt{7} \times 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{5})^2} = \\
 &= \frac{7 + 6\sqrt{35} + 9 \times 5}{7 - 9 \times 5} = \frac{52 + 6\sqrt{35}}{-38} = \frac{-26 - 3\sqrt{35}}{19}
 \end{aligned}$$

$$22.1 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

$$\begin{aligned}
 22.2 \quad \frac{\sqrt[3]{1-a}}{\sqrt[3]{a-1}} &= \frac{\sqrt[3]{1-a} \times \sqrt[3]{(a-1)^2}}{\sqrt[3]{a-1} \times \sqrt[3]{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(1-a)(a-1)^2}}{\sqrt[3]{(a-1)^3}} = \\
 &= \frac{\sqrt[3]{-(a-1)(a-1)^2}}{a-1} = \frac{-\sqrt[3]{(a-1)^3}}{a-1} = \frac{-(a-1)}{a-1} = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22.3 \quad \frac{3a}{\sqrt{3a+1}+1} &= \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{(\sqrt{3a+1}+1)(\sqrt{3a+1}-1)} = \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{(\sqrt{3a+1})^2 - 1} = \\
 &= \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{3a+1-1} = \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{3a} = \sqrt{3a+1}-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22.4 \quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a+1})^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{a-(a+1)} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{-1} = -\sqrt{a}-\sqrt{a+1}
 \end{aligned}$$

$$23. \quad x^2 - 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-11)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{3 \times 2^4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{3} \vee x = 1 + 2\sqrt{3}$$

Opção correta: B

$$24. \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \notin \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}+1 = 3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 - 1 = 3-1 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{\pi})^2 = \pi \notin \mathbb{Q}$$

Opção correta: C

$$25. \quad \sqrt{a+a+a} = \sqrt{3a} \neq 3\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^2+b+c} \neq a + \sqrt{b+c}$$

$$\sqrt{a^2 \times b + c} \neq a \times \sqrt{b+c}$$

$$\sqrt{a^2 \times b^3} = \sqrt{a^2 \times b \times b^2} = a \times b \times \sqrt{b}$$

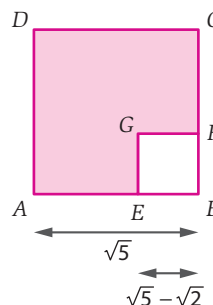
Opção correta: D

$$26. \quad \text{O raio do círculo é } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm.}$$

$$\text{Assim, a área do círculo é } \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} \text{ cm}^2.$$

Opção correta: B

27. A área sombreada da figura é dada pela diferença das áreas dos quadrados $[ABCD]$ e $[EBFG]$:



$$\begin{aligned}
 (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 &= 5 - [(\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] = \\
 &= 5 - (5 - 2\sqrt{10} + 2) = 2\sqrt{10} - 2
 \end{aligned}$$

Opção correta: A

$$28.1 \quad \sqrt{50} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 5^2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 28.2 \quad \sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{7} &= \sqrt{7 \times 2^2} - \sqrt{7 \times 3^2} + 2\sqrt{7} = \\
 &= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

$$28.3 \quad (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$$28.4 \quad (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$$

$$\begin{aligned}
 28.5 \quad (3 - 2\sqrt{7})^2 + 6 \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}} &= 3^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2 + 6\sqrt{\frac{56}{2}} = \\
 &= 9 - 12\sqrt{7} + 4 \times 7 + 6\sqrt{28} = 9 + 28 - 12\sqrt{7} + 6\sqrt{7 \times 2^2} = \\
 &= 37 - 12\sqrt{7} + 2 \times 6\sqrt{7} = 37 - 12\sqrt{7} + 12\sqrt{7} = 37
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29.1 \quad \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} + \sqrt[4]{2} &= \sqrt[4]{2 \times 2^4} + \sqrt[4]{2 \times 2^8} + \sqrt[4]{2} = \\
 &= 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} = 7\sqrt[4]{2}
 \end{aligned}$$

29.2

$$\sqrt[3]{17 + \sqrt{27 + \sqrt{81}}} = \sqrt[3]{17 + \sqrt{27 + 9}} = \sqrt[3]{17 + \sqrt{36}} = \sqrt[3]{17 + 6} = \sqrt[3]{23}$$

$$29.3 \sqrt[3]{\sqrt[6]{5}} \times \sqrt[3]{\sqrt[9]{5^2}} : \sqrt[6]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[18]{5^2} : \sqrt[18]{5} = \sqrt[18]{25}$$

$$29.4 \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 3}}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{15}$$

$$30.1 \frac{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}{\sqrt{5} - 1} = \frac{16 - 15}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$30.2 (5 - \sqrt{7})^2 + \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{3}} = 25 - 10\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 + \sqrt{\frac{84}{3}} = 25 - 10\sqrt{7} + 7 + \sqrt{28} =$$

$$= 32 - 10\sqrt{7} + \sqrt{7 \times 2^2} = 32 - 10\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 32 - 8\sqrt{7}$$

$$31.1 \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$31.2 \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt[4]{27}}{6}$$

$$31.3 \frac{4}{2 + 3\sqrt{7}} = \frac{4(2 - 3\sqrt{7})}{(2 + 3\sqrt{7})(2 - 3\sqrt{7})} = \frac{8 - 12\sqrt{7}}{4 - (3\sqrt{7})^2} =$$

$$= \frac{8 - 12\sqrt{7}}{4 - 9 \times 7} = \frac{8 - 12\sqrt{7}}{-59} = \frac{-8 + 12\sqrt{7}}{59}$$

$$31.4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})}{(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{21} - 2(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{21} - 6}{7 - 4 \times 3} = \frac{\sqrt{21} - 6}{7 - 12} = \frac{\sqrt{21} - 6}{-5} = \frac{6 - \sqrt{21}}{5}$$

$$31.5 \frac{2 - 3a}{\sqrt{a+2} + 2\sqrt{a}} = \frac{(2 - 3a)(\sqrt{a+2} - 2\sqrt{a})}{(\sqrt{a+2} + 2\sqrt{a})(\sqrt{a+2} - 2\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{(2 - 3a)(\sqrt{a+2} - 2\sqrt{a})}{(\sqrt{a+2})^2 - (2\sqrt{a})^2} = \frac{(2 - 3a)(\sqrt{a+2} - 2\sqrt{a})}{a + 2 - 4a} =$$

$$= \frac{(2 - 3a)(\sqrt{a+2} - 2\sqrt{a})}{2 - 3a} = \sqrt{a+2} - 2\sqrt{a}$$

$$31.6 \frac{1}{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b} + c\sqrt{d})(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})} =$$

$$= \frac{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b})^2 - (c\sqrt{d})^2} = \frac{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}}{a^2 b - c^2 d}$$

$$32. \phi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ e}$$

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$33. (1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 2 = 1 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2 + 2\sqrt{3} - 2 =$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

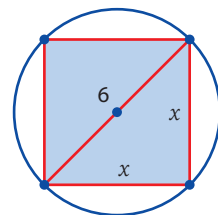
e

$$(1 + \sqrt{3})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 =$$

$$= 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

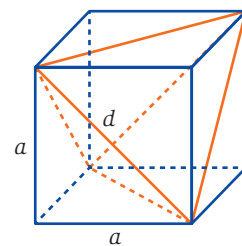
34. A diagonal do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência que mede 6 unidades. Seja x o lado do quadrado.

Da igualdade $6^2 = x^2 + x^2$ resulta que $x = \sqrt{18}$. Logo, a medida do lado do quadrado é $\sqrt{2} \times 3^2 = 3\sqrt{2}$ unidades.



35. Cada face do tetraedro é um triângulo equilátero cuja medida do lado é a diagonal do quadrado que é a face do cubo. Começamos então por determinar essa medida. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $d^2 = a^2 + a^2$, de onde resulta que $d = \sqrt{2}a$.

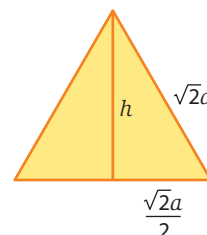
Para determinarmos a área do triângulo equilátero de lado $\sqrt{2}a$ temos que determinar a sua altura.



Da igualdade

$$h^2 = (\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 \text{ resulta}$$

$$\text{que } h = \frac{\sqrt{6}a}{2}.$$



Assim, a área de cada face do tetraedro é:

$$A = \frac{\sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{6}a}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3 \times 2^2}a^2}{4} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

- 36.1** O diâmetro da esfera inscrita no cubo é igual à aresta do cubo.

A aresta a do cubo é dada em função do seu volume V por $a = \sqrt[3]{V}$.

Assim, sendo r o raio da esfera, tem-se:

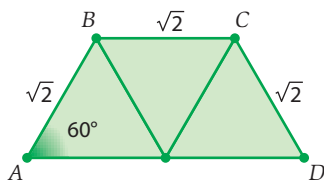
$$2r = \sqrt[3]{V} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$$

- 36.2** O volume da esfera inscrita é dado por

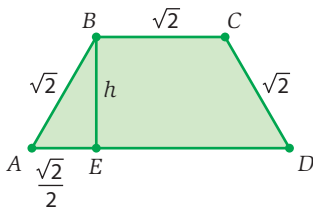
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{V}{8} = \frac{\pi V}{6}$$

- 37.** Dado que a medida da base menor do trapézio é igual à medida dos lados não paralelos e que um desses lados forma com a base maior um ângulo de

60° de amplitude, concluímos que o trapézio $[ABCD]$ pode ser decomposto em três triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm. Desta forma, a medida da base maior do trapézio é $2\sqrt{2}$ cm e o seu perímetro é $5\sqrt{2}$ cm.



Para determinar a área do trapézio, temos que determinar a sua altura. Sendo o ponto E a projeção ortogonal do vértice B na base $[AD]$, temos:



$$\overline{AE} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O triângulo $[ABE]$ é retângulo em E . Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

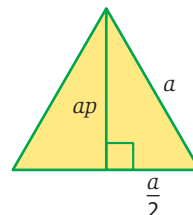
$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2, \text{ donde resulta que } h = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm.}$$

A área do trapézio é dada por

$$\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times h = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ que simplificando dá}$$

$$\frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{12}}{4} = \frac{3\sqrt{3 \times 2^2}}{4} = \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

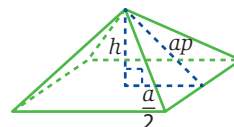
- 38.** Para determinarmos o volume da pirâmide temos que determinar a sua altura e, para isso, vamos começar por determinar o apótema da pirâmide – altura de cada face lateral.



Da aplicação do teorema de Pitágoras

$$\text{goras, tem-se } ap^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ de que resulta que } ap = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

A altura da pirâmide obtém-se aplicando novamente o teorema de Pitágoras, considerando o triângulo representado na figura ao lado:



$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2, \text{ donde resulta que } h = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

$$\text{O volume da pirâmide é } V = \frac{1}{3}A_b \times h = \frac{1}{3}a^2 \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3.$$

- 39.** Sabendo que as arestas da base medem a unidades e que a altura mede o dobro da medida das arestas da base, o volume do prisma quadrangular regular é dado por

$$V = a^2 \times 2a \Leftrightarrow V = 2a^3.$$

Resolvendo esta equação em ordem a a , obtemos $a = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. Dado que se pretende chegar a uma expressão com denominador racional, escrevamos o radical como quociente de radicais e racionalizemos o denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2}} = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{V} \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{V} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4V}}{2}$$

$$\text{Assim, } a = \frac{\sqrt[3]{4V}}{2}.$$

2. POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

40.1 m.m.c. (2, 3, 4) = 12

$$\sqrt{3} = \sqrt[6 \times 2]{3^6} = \sqrt[12]{3^6}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[4 \times 3]{7^{2 \times 4}} = \sqrt[12]{7^8}$$

$$\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[3 \times 4]{5^{3 \times 3}} = \sqrt[12]{5^9}$$

40.2 m.m.c. (3, 6, 9) = 18

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[3 \times 6]{2^3} = \sqrt[18]{2^3}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6 \times 3]{2^6} = \sqrt[18]{2^6}$$

$$\sqrt[9]{6^3} = \sqrt[2 \times 9]{6^{2 \times 3}} = \sqrt[18]{6^6}$$

40.3 m.m.c. (3, 6, 7) = 42

$$\sqrt[7]{4}; \sqrt[6 \times 7]{4^6} = \sqrt[42]{4^6}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[14 \times 3]{2^{14}} = \sqrt[42]{2^{14}}$$

$$\sqrt[7]{5^2} = \sqrt[6 \times 7]{5^{2 \times 7}} = \sqrt[42]{5^{14}}$$

41.1 $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4 \times 2]{2^{2 \times 2}} = \sqrt{2}$

41.2 $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6 \times 2]{3^2} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

41.3 $\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6 \times 3]{3^{3 \times 3}} = \sqrt[18]{3^9} = \sqrt[3]{3}$

41.4 $\sqrt[9]{125} = \sqrt[9 \times 3]{5^3} = \sqrt[27]{5^3} = \sqrt[3]{5}$

42. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \times 3]{a^{2 \times 3}} = \sqrt[9]{a^6}$

43. $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt[6]{9} = 9^{\frac{1}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[9]{125} = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{3}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

Ou usando a simplificação já feita no exercício 41:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}; \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

44.1 $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

44.2 $9^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

44.3 $5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3} \sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{5}$

44.4 $9^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{9^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9^3 \times 9}} = \frac{1}{9 \sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{9^2}}{9 \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9^2}} = \frac{\sqrt[3]{9^2}}{9 \sqrt[3]{9^3}} = \frac{\sqrt[3]{(3^2)^2}}{81} = \frac{\sqrt[3]{3^4}}{81} = \frac{\sqrt[3]{3^3 \times 3}}{81} = \frac{3 \sqrt[3]{3}}{81} = \frac{\sqrt[3]{3}}{27}$

45. $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$

46.1 $\sqrt{48} - 12^{\frac{1}{2}} = \sqrt{48} - \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 2^4} - \sqrt{3 \times 2^2} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

46.2 $5^{\frac{4}{3}} + 25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^4} + \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{5^2 \times 5} + \sqrt[3]{(5^2)^2} = 5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^4} = 5\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5} = 10\sqrt[3]{5}$

46.3 $5^{\frac{4}{3}} \times 25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^4} \times \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{5^4 \times 5^4} = \sqrt[3]{5^6 \times 5^2} = 5^2 \times \sqrt[3]{5^2} = 25\sqrt[3]{25}$

46.4 $\sqrt{48} : 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3 \times 2^4} : \sqrt[4]{16} = 4\sqrt{3} : 2 = 2\sqrt{3}$

46.5 $\sqrt{2 \times 32^{\frac{1}{3}}} \times (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2 \times \sqrt[3]{32}} \times (4 - (\sqrt{2})^2) = \sqrt{\sqrt[3]{2^3} \times 2^5} (4 - 2) = 2\sqrt[3]{2^8} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2 \times 2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

46.6 $\frac{\sqrt[3]{5} \times 5^{\frac{5}{6}} \times \sqrt{5} \sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{5} \times \sqrt[3]{\frac{1}{25}}} = \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{5^5} \times \sqrt[6]{5^3} \times 5}{\sqrt[6]{5} \times \sqrt[3]{\frac{1}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{\frac{1}{25}}} \times \sqrt[6]{\frac{5^5 \times 5^4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 25}{1}} = \sqrt[3]{125} = 5$

47.1 $a^{\frac{4}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^4} \times \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^4 \times a^3} = \sqrt[5]{a^7} = a^{\frac{7}{5}} = a^{\frac{7}{5}}$

47.2 $\frac{2^{1,3}}{5^{1,3}} = \frac{2^{\frac{13}{10}}}{5^{\frac{13}{10}}} = \frac{\sqrt[10]{2^{13}}}{\sqrt[10]{5^{13}}} = \sqrt[10]{\frac{2^{13}}{5^{13}}} = \sqrt[10]{\left(\frac{2}{5}\right)^{13}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{13}{10}} = 0,4^{1,3}$

47.3 $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^4}{a}} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

47.4 $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{k}{p}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[p]{a^k} = \sqrt[np]{a^{mp}} \times \sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[np]{a^{mp+nk}} = a^{\frac{mp+nk}{np}}$

48.1 $\frac{5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

48.2 $\frac{\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{3}{4}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}} = 3^{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

48.3 $(a^{\frac{1}{4}})^2 : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{4}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{4} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

48.4 $\frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{6}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 + a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{5}}(1 + a^{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}})} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 + a)}{a^{\frac{1}{5}}(1 + a)} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$

49.1 $3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{48} = 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3 \times 2^4} = 3\sqrt[4]{3} - 4\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3}$

$$49.2 \quad \sqrt[6]{567} \times \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \sqrt[6]{7 \times 3^4} \times \sqrt[6]{3^2} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \\ = \sqrt[6]{7 \times 3^4} \times \sqrt[6]{3^2} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \sqrt[6]{7 \times 3^6} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = 3\sqrt[6]{7} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{7}$$

$$49.3 \quad (1 - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3} - 5)^2 = 1 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - ((2\sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3} + 25) = \\ = 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 12 + 20\sqrt{3} - 25 = 18\sqrt{3} - 33$$

$$49.4 \quad 5\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2 \times 3^3} - \sqrt[3]{2 \times 5^3} + \sqrt[3]{2 \times 2^3} = \\ = 15\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2}$$

$$49.5 \quad \sqrt{\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{80}} = \sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{5 \times 2^4} = \sqrt[4]{5} + 4\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$$

$$49.6 \quad \sqrt[6]{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \sqrt[6]{6} \times \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{2^2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \\ \sqrt[6]{3 \times 2} \times \sqrt[6]{2^5} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \sqrt[6]{3 \times 2^6} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = 2\sqrt[6]{3} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{3}$$

$$49.7 \quad \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} - (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} - (4 - (\sqrt{5})^2) = \\ = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} - (-1) = 2 + 1 = 3$$

$$49.8 \quad \frac{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^4}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-2}} = a^{1 - \frac{5}{6}} + a^{\frac{2}{3} - (-2)} = a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{2}{3} + 2} = a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{8}{3}} = \\ = \sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a^2 \times a^6} = \sqrt[6]{a} + a^2 \sqrt[3]{a^2}$$

$$49.9 \quad \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - (\sqrt[3]{2} - 1)^2 = \\ = \sqrt[3]{2^2 \times 3} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - ((\sqrt[3]{2})^2 - 2\sqrt[3]{2} + 1) = \\ = \sqrt[6]{2^2 \times 3} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{3^2} - (\sqrt[3]{2^2} - 2\sqrt[3]{2} + 1) = \\ = \sqrt[6]{3^6} \times \sqrt[6]{2^2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1 = \\ = 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 = 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1$$

$$50.1 \quad \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 1 - 2 \times 1 \times \sqrt{5}} = \\ = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$$

$\uparrow$
 $\sqrt{5} - 1 > 0$

ou $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5};$

portanto $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$ é uma proposição verdadeira.

$$50.2 \quad \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 25 + 2 \times 5 \times \sqrt{2}} = \\ = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2} = \sqrt{2} + 5$$

$\uparrow$
 $\sqrt{2} + 5 > 0$

ou $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 5 \Leftrightarrow 27 + 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 5)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 27 + 10\sqrt{2} = 2 + 10\sqrt{2} + 25 \Leftrightarrow 27 + 10\sqrt{2} = 27 + 10\sqrt{2};$
 portanto a proposição $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 5$ é verdadeira.

51.

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}} + \sqrt{4 + 3 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \\ = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}} + \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \\ = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$52. \quad \frac{(a^n)^{12} \times a^{\frac{5}{2}}}{a^{11n}} = \sqrt{a} \Leftrightarrow a^{12n^2 - 11n + \frac{5}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12n^2 - 11n + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 12n^2 - 11n + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 12 \times 2}}{2 \times 12} \Leftrightarrow n = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{11 \pm 5}{24} \Leftrightarrow n = \frac{2}{3} \vee n = \frac{1}{4}$$

$$53. \quad \sqrt{2\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 a}} = \sqrt{\sqrt[3]{(2^3)^2 a}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6 a}} = \\ = \sqrt[2 \times 3 \times 2]{2^6 a} = \sqrt[12]{2^6 a} = (2^6 a)^{\frac{1}{12}}$$

Opção correta: B

$$54. \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{2-n}{2n}} = \sqrt[n]{x^{2-n}}$$

Opção correta: D

$$55. \quad (a^4 \times b^2 \times c)^{\frac{1}{2}} = (a^4)^{\frac{1}{2}} \times (b^2)^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{2}} = a^2 \times b \times c^{\frac{1}{2}}$$

Qualquer uma das restantes opções corresponde a uma igualdade falsa.

Opção correta: C

$$56. \quad x^2 = (\sqrt[3]{16})^2 - (\sqrt[3]{2})^2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{16^2} - \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{2^8} - \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x^2 = 4\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = 3\sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$x = \sqrt{3\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{3} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt{3}\sqrt[3]{2}$$

Opção correta: C

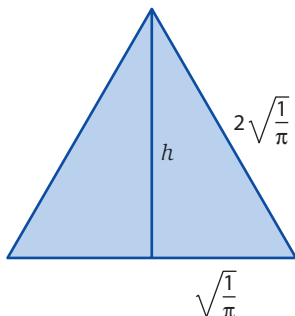
- 57.** A área de cada círculo é igual a 1 unidade quadrada. Assim, o raio r de cada círculo é dado por:

$$\pi r^2 = 1 \iff r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

O lado do triângulo é igual ao diâmetro de um círculo:

$$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

Para determinar a área do triângulo, temos de determinar a sua altura.



$$h^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 = \left(2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 \iff h^2 + \frac{1}{\pi} = \frac{4}{\pi} \iff h^2 = \frac{3}{\pi} \iff h = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

Concluindo, a área do triângulo é dada por:

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \times \sqrt{\frac{3}{\pi}}}{2} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \times \frac{3}{\pi}} = \sqrt{\frac{3}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

Opção correta: A

58. $2(\sqrt[6]{5})^6 - \sqrt{5}(\sqrt[6]{5})^3 - 5 = 2 \times 5 - \sqrt{5} \sqrt[6]{5^3} - 5 =$
 $= 10 - \sqrt{5} \sqrt[6]{5^3} - 5 = 10 - 5 - 5 = 0$

e

$$2\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right)^6 - \sqrt{5}\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right)^3 - 5 = 2 \times \frac{5}{4} - \sqrt{5}\left(-\sqrt[6]{\left(\frac{5}{4}\right)^3}\right) - 5 =$$

$$= \frac{5}{2} - \sqrt{5}\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right) - 5 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5} \times \sqrt[6]{5}}{2} - 5 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5 = 0$$

59.1 $V = a^3 \iff a = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$

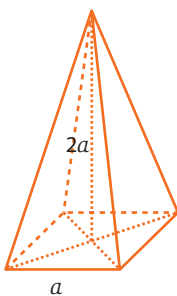
59.2 $A = 6a^2 \iff A = 6\left(V^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 6V^{\frac{2}{3}}$

60.1 $V = \frac{1}{3} \times a^2 \times 2a \iff V = \frac{2a^3}{3} \iff$

$$\iff a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}V}$$

60.2 A área da base é igual a a^2 .

$$a^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}V}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}V\right)^{\frac{2}{3}}$$



- 61.1** Como a área da base é igual a b , a aresta da base mede $\sqrt{b}$ e a altura é $4\sqrt{b}$.

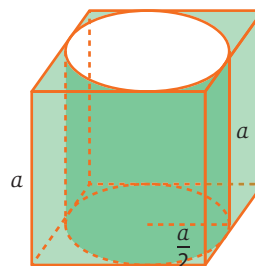
Sendo $V = A_b \times h$, $A_b = b$ e $h = 4\sqrt{b}$, tem-se:

$$V = b \times 4\sqrt{b} = 4b \times b^{\frac{1}{2}} = 4b^{\frac{3}{2}}$$

61.2 $V = 32 \iff 4b^{\frac{3}{2}} = 32 \iff b^{\frac{3}{2}} = 8 \iff b = 8^{\frac{2}{3}} \iff$

$$\iff b = \sqrt[3]{8^2} \iff b = 2^2 \iff b = 4 \text{ cm}$$

- 62.1** A relação entre a aresta, a , e o volume do cubo, V , é $V = a^3$.

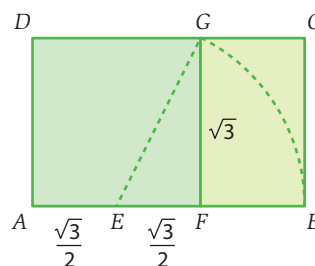


Como o diâmetro da base do cilindro é a , o raio é $\frac{a}{2}$. O volume do cilindro é dado por $V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{a^3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}V$.

62.2 A aresta do cubo é dada por $V = a^3 \iff a = \sqrt[3]{V}$

$$A = P_{\text{círculo}} \times h = 2\pi \times \frac{a}{2} \times a = \pi a^2 = \pi\left(\sqrt[3]{V}\right)^2 = \pi\sqrt[3]{V^2}$$

- 63.1** Tem-se $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \frac{\overline{AF}}{2} + \overline{EG}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $\overline{EG}^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$\iff \overline{EG}^2 = 3 + \frac{3}{4}, \text{ de que resulta } \overline{EG} = \frac{\sqrt{15}}{2}. \text{ Logo,}$$

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}.$$

63.2 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{15})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} =$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{15} \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{45}}{2 \times 3} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2 \times 3} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

63.3 $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}$

e

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{FB}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{(\sqrt{15} - \sqrt{3})(\sqrt{15} + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 15 + 2(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{5} \times 3^2 + 2 \times 3}{15 - 3} = \frac{6\sqrt{5} + 6}{12} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

63.4 Os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores são iguais e os retângulos $[ABCD]$ e $[BCGF]$ são semelhantes (têm ângulos iguais e lados correspondentes diretamente proporcionais).

64.1 O raio da base do cilindro é igual ao raio da esfera. Sendo a área da superfície esférica dada por $A = 4\pi r^2$, onde r é o respetivo raio, tem-se:

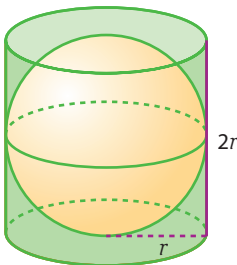
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

64.2 O volume da esfera é dado por

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{A}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \sqrt{\left(\frac{A}{4\pi}\right)^3} = \frac{4}{3}\pi \sqrt{\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{A}{4\pi}\right)} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \frac{A}{4\pi} \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{A}{3} \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{A}{\pi}} = \frac{A}{3} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{A}{6} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

64.3 A altura do cilindro é igual ao dobro do raio da esfera.



Assim, o volume do cilindro é dado por:

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \left(\sqrt{\frac{A}{4\pi}}\right)^3 = 2\pi \sqrt{\left(\frac{A}{4\pi}\right)^3} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{A}{4\pi}\right)} = 2\pi \frac{A}{4\pi} \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{A}{\pi}} = \frac{A}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{A}{4} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

65.

$$A = \frac{2\sqrt{x^3y}}{\sqrt[3]{xy^2}} = \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}}{(xy^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{2}{3}}} = 2x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = 2x^{\frac{n-2}{2n}} y^{\frac{n-6}{3n}}$$

e $A = 2\sqrt[3]{x} = 2x^{\frac{1}{3}}$.

Assim, $2x^{\frac{n-2}{2n}} y^{\frac{n-6}{3n}} = 2x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{3} \wedge \frac{n-6}{3n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n - 6 = 2n \wedge n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6 \wedge n = 6 \Leftrightarrow n = 6$

66. A aresta do cubo maior é igual ao diâmetro da superfície esférica, que por sua vez, é igual à diagonal espacial do cubo menor.

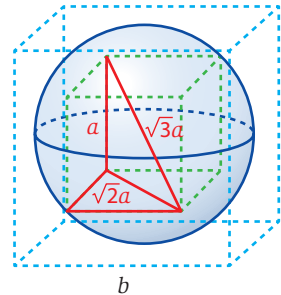
Seja a a aresta do cubo menor e b a aresta do cubo maior.

A diagonal do cubo menor é igual a $\sqrt{3}a$.

Assim, tem-se $b = \sqrt{3}a$.

A razão entre o volume do cubo maior, b^3 , e o volume do cubo menor, a^3 , é:

$$\frac{b^3}{a^3} = \frac{(\sqrt{3}a)^3}{a^3} = \frac{\sqrt{3}^3 a^3}{a^3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$



67. A diagonal espacial do cubo é igual ao diâmetro da superfície esférica.

O volume da respetiva esfera, V , é dado em função do raio, r , por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Assim, tem-se $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

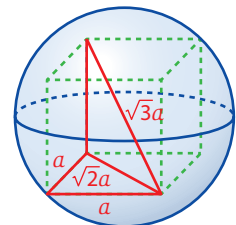
Seja d a diagonal espacial e a a aresta do cubo. Aplicando duas vezes o teorema de Pitágoras (ou apenas uma vez o teorema de Pitágoras no espaço) verifica-se que $d = \sqrt{3}a$.

Como $d = 2r$, tem-se $\sqrt{3}a = 2 \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Resolvendo esta equação em ordem a a e simplificando a expressão obtida, tem-se:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt{\frac{2^2}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt{\frac{2^6}{3^3}} \times \sqrt[6]{\frac{3^2 V^2}{4^2 \pi^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{2^6 \times 3^2 V^2}{3^3 \times 2^4 \pi^2}} = \sqrt[6]{\frac{4V^2}{3\pi^2}}$$



3. POLINÓMIOS

$$\begin{aligned} 68.1 \quad P(x) + Q(x) &= \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + (x^2 + 2x - 3) = \\ &= \frac{2}{3}x - 1 + x^2 + 2x - 3 = x^2 + \frac{8}{3}x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68.2 \quad P(x) - Q(x) &= \left(\frac{2}{3}x - 1\right) - (x^2 + 2x - 3) = \\ &= \frac{2}{3}x - 1 - x^2 - 2x + 3 = -x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68.3 \quad P(x) + Q(x) + R(x) &= \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + (x^2 + 2x - 3) + \left(-2x^2 - \frac{1}{3}\right) = \\ &= \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right) + \left(-2x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{8}{3}x - 4 - 2x^2 - \frac{1}{3} = \\ &= -x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68.4 \quad P(x) \times Q(x) &= \left(\frac{2}{3}x - 1\right) \times (x^2 + 2x - 3) = \\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x - x^2 - 2x + 3 = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68.5 \quad Q(x) \times R(x) - P(x) &= (x^2 + 2x - 3) \times \left(-2x^2 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}x - 1\right) = \\ &= -2x^4 - \frac{1}{3}x^2 - 4x^3 - \frac{2}{3}x + 6x^2 + 1 - \frac{2}{3}x + 1 = \\ &= -2x^4 - 4x^3 + \frac{17}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68.6 \quad Q(x) \times [R(x) - P(x)] &= Q(x) \times R(x) - Q(x) \times P(x) = \\ &= \left(-2x^4 - 4x^3 + \frac{17}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) - \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x + 3\right) = \\ &= -2x^4 - 4x^3 + \frac{17}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x - 3 = \\ &= -2x^4 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 69.1 \quad \text{Para } n=3 \text{ e } m=2, \quad A(x) \times B(x) &= (x^3 + x)(-2x^3 + 3x^2 - 1) = \\ &= -2x^6 + 3x^5 - x^3 - 2x^4 + 3x^3 - x = -2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x \\ &\text{e este polinómio tem grau 6.} \end{aligned}$$

69.2 O grau do polinómio $A(x) \times B(x)$ é igual à soma dos graus dos polinómios $A(x)$ e $B(x)$, isto é, $n+3$.

69.3 Se $n \geq 3$, o polinómio $A(x) + B(x)$ tem como termo de maior grau o termo x^n , pelo que tem grau n .
Se $n=2$, o polinómio $A(x) + B(x)$ tem como termo de maior grau o termo $-2x^3$, pelo que tem grau 3.

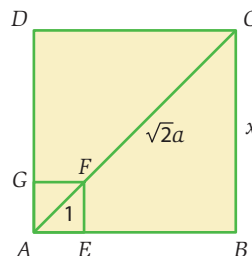
70. Seja x a medida do lado do quadrado $[ABCD]$. Considerando o triângulo $[ABC]$, o teorema de Pitágoras estabelece que $x^2 + x^2 = (1 + \sqrt{2}a)^2$.

$$x^2 + x^2 = (1 + \sqrt{2}a)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 1 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2}a)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 + 2\sqrt{2}a + 2a^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$$

Logo, a área do quadrado $[ABCD]$ é $a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$.



71. Ao efetuar a multiplicação dos polinómios $A(x) \times B(x)$ irão aparecer $n \times m$ parcelas da forma $a_i x^i \times b_j x^j$, após a primeira aplicação da propriedade distributiva.

O termo de maior grau é $a_n b_m x^{n+m}$.

O grau de $A(x) \times B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$, pois o grau de um polinómio é o maior dos graus dos seus monómios, que neste caso é $n+m$ e corresponde à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.

72.1

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x - 1 \\ -x^2 + x & x + 3 \\ \hline 3x - 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = x + 3 \\ R(x) = 0 \end{array}$$

72.2

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 5x + 1 & 2x^2 + 3 \\ -4x^3 + 0x^2 - 6x & 2x \\ \hline -11x + 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = 2x \\ R(x) = -11x + 1 \end{array}$$

72.3

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 + x^2 - x - 3 & 3x^2 - 3x + 2 \\ -4x^4 + 4x^3 - \frac{8}{3}x^2 & \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ \hline -x^3 - \frac{5}{3}x^2 - x & \\ -x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x & \\ \hline -\frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 3 & \\ -\frac{8}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} & \\ \hline -3x - \frac{11}{9} & \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ R(x) = -3x - \frac{11}{9} \end{array}$$

72.4

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 0 \\ -x^2 + x \\ \hline 3x + 0 \\ -3x + 3 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x+3 \\ Q(x)=x+3 \\ R(x)=3 \end{array}$$

73.1

$$P(x) = (2x+3) \times (x^2-2x) + 1 = 2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + 1 = 2x^3 - x^2 - 6x + 1$$

$$\begin{aligned} 73.2 \quad P(x) &= (2x+3) \times \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= -\frac{2}{3}x^4 - 4x^2 + \frac{4}{3}x - x^3 - 6x + 2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}x^4 - x^3 - 4x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 73.3 \quad P(x) &= (2x+3) \times \left(-\frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{7}x\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) = \\ &= -\frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{7}x^2 - 5x^2 + \frac{6}{7}x - \frac{1}{5} = -\frac{10}{3}x^3 - \frac{31}{7}x^2 + \frac{6}{7}x - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

74.1

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x+1 \\ Q(x)=x+1 \\ R(x)=0 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + 0x - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x^2+x+1 \\ Q(x)=x^2+x+1 \\ R(x)=0 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 1 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + 0x - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x^3+x^2+x+1 \\ Q(x)=x^3+x^2+x+1 \\ R(x)=0 \end{array}$$

74.2 a. $C(x) = (x-1)(x+1)$

b. $C(x) = (x-1)(x^2+x+1)$

c. $C(x) = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$

74.3 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

75.1 Na divisão euclidiana de $A(x)$ por $B(x)$, o termo de maior grau do polinômio quociente é $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$, que corresponde a dividir $a_n x^n$ por $b_m x^m$.

75.2 O grau do polinômio quociente é $n-m$.

75.3 O maior grau que o polinômio resto pode ter é $m-1$ (sendo superior ou igual a m , o algoritmo da divisão não parava aí).

76.1

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 2 \\ 2 \quad \quad 2 \quad -4 \\ \hline 1 \quad -2 \quad -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x)=x-2 \\ R(x)=-2 \end{array}$$

76.2

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\ 1 \quad \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x)=x^2+x+1 \\ R(x)=0 \end{array}$$

76.3

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 0 \quad -2 \\ -\frac{3}{4} \quad \quad -3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x)=4x^2 \\ R(x)=-2 \end{array}$$

76.4

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \quad 0 \quad -3 \quad -1 \\ \frac{5}{3} \quad \quad \frac{5}{2} \quad \frac{25}{6} \quad \frac{35}{18} \\ \hline \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{17}{18} \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{7}{6} \\ R(x)=\frac{17}{18} \end{array}$$

76.5 Cálculos auxiliares: $2x-4=2(x-2)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -1 \quad 2 \\ 2 \quad \quad 4 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x)=\frac{1}{2}(2x+3)=x+\frac{3}{2} \\ R(x)=8 \end{array}$$

76.6 Cálculos auxiliares: $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & & -3 & 6 & -9 \\ \hline & 2 & -4 & 6 & -7 \end{array} \quad \begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2}(2x^2 - 4x + 6) = x^2 - 2x + 3 \\ R(x) &= -7 \end{aligned}$$

77.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & t & & 1 & -2 \\ 3 & & 6 & 3t+18 & 9t+54 & 27t+165 \\ \hline & 2 & t+6 & 3t+18 & 9t+55 & 27t+163 \end{array}$$

$$R(x) = 1 \Leftrightarrow 27t + 163 = 1 \Leftrightarrow 27t = -162 \Leftrightarrow t = -6$$

78.

$$\begin{array}{r|rr} & 2 & -5 & 2 \\ a & & 2a & 2a^2 - 5a \\ \hline & 2 & 2a-5 & 2a^2 - 5a + 2 \end{array}$$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow a = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

79.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & -1 \\ a & & a & a^2 - 3a & a^3 - 3a^2 \\ \hline & 1 & a-3 & a^2 - 3a & a^3 - 3a^2 - 1 \end{array} \quad Q(x) = x^2 + (a-3)x + (a^2 - 3a)$$

$$a^2 - 3a = -2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$$

80.1 Da aplicação da regra de Ruffini, concluímos que:

$$\begin{cases} -1 \times a = c \\ b + c = 3 \\ 3a = d \\ 4 + d = e \\ e \times a = g \\ f + g = 4 \\ 4a = -8 \\ h - 8 = -2 \end{cases}$$

De que resulta:

$$h - 8 = -2 \Leftrightarrow h = 6$$

$$4a = -8 \Leftrightarrow a = -2$$

$$-1 \times a = c \Leftrightarrow c = -1 \times (-2) \Leftrightarrow c = 2$$

$$b + c = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 2 \Leftrightarrow b = 1$$

$$3a = d \Leftrightarrow d = 3 \times (-2) \Leftrightarrow d = -6$$

$$4 + d = e \Leftrightarrow e = 4 - 6 \Leftrightarrow e = -2$$

$$e \times a = g \Leftrightarrow g = -2 \times (-2) \Leftrightarrow g = 4$$

$$f + g = 4 \Leftrightarrow f = 4 - 4 \Leftrightarrow f = 0$$

80.2 $D(x) = -x^4 + x^3 + 4x^2 + 6$; $d(x) = x + 2$;

$$Q(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$
; $R(x) = -2$

81.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & c & d \\ 1 & & a & a+b & a+b+c \\ \hline & a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{array} \quad \begin{aligned} Q(x) &= ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) \\ R(x) &= a+b+c+d \end{aligned}$$

Verifiquemos agora que os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ obtidos são de facto o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) =$$

$$= (x-1)[ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)] + (a+b+c+d) =$$

$$= ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x - ax^2 - (a+b)x - (a+b+c) +$$

$$+ (a+b+c+d) = ax^3 + ax^2 + bx^2 + ax + bx + cx - ax^2 - ax -$$

$$-bx - a - b - c + a + b + c + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

82.1 $R(x) = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 - 6 = 6$

82.2 $R(x) = (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1) - 1 = 5$

82.3 $R(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{80}{27}$

82.4 Cálculo auxiliar: $2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$R(x) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{7}{4}$$

83.1 Sendo $P(x)$ divisível por $x - 1$, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ tem de ser 0. Aplicando o teorema do resto, obtém-se:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow -2 \times 1^3 - 10 \times 1^2 + k \times 1 + 16 = 0 \Leftrightarrow k = -4$$

83.2 Sendo -2 raiz de $P(x)$, tem-se:

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow -2 \times (-2)^3 - 10 \times (-2)^2 + k \times (-2) + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

83.3 Sendo $P(x)$ divisível por $x + \frac{1}{2}$, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ tem de ser 0. Aplicando o teorema do resto, obtém-se:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + k \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = \frac{55}{2}$$

84.1 V (O teorema do resto garante este resultado.)

84.2 F. Se $b \neq 0$ é raiz do polinômio $P(x)$, então $P(b) = 0$.

84.3 V (O teorema do resto garante este resultado.)

84.4 F. Se o polinômio $P(x)$ é divisível por $ax - b$, então $\frac{b}{a}$ é raiz de $P(x)$.

85.1 Aplicando o teorema do resto, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é $P(a) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{85.2} \quad P(-6) = 0 &\Leftrightarrow (-6 - a)((-6)^2 + k(-6) + 6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6 - a = 0 \vee 36 - 6k + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6 \vee k = 7 \\ &\text{Como } a \neq -6, \text{ conclui-se que } k = 7. \end{aligned}$$

86. Pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 2^3 + a \times 2^2 + b \times 2 + 12 = 0 \\ 2 \times 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 + 12 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 28 = 0 \\ a + b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 14 = 0 \\ a + b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-b - 6) + b + 14 = 0 \\ a = -b - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + 2 = 0 \\ a = -b - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{87.1} \quad P(a) = a^3 - a \times a^2 - b \times a + ab = 0$$

Como $P(a) = 0$, pelo teorema do resto, sabemos que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é zero, ou seja, $P(x)$ é divisível por $x - a$.

87.2 Começamos por determinar o quociente, $Q(x)$, da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$, com o objetivo de escrever $P(x) = (x - a)Q(x)$, uma vez que já sabemos que o resto é 0.

1	-a	-b	ab	$Q(x) = x^2 - b$
a	a	0	-ab	$R(x) = 0$
1	0	-b	0	

Concluindo: $P(x) = (x - a)(x^2 - b)$

88.1 Começamos por determinar o quociente da divisão inteira de $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ por $x - 3$:

1	-5	3	9	$Q(x) = x^2 - 2x - 3$
3	3	-6	-9	
1	-2	-3	0	

Como $R(x) = 0$ sabemos que 3 tem pelo menos multiplicidade 1. Determinemos as raízes de $Q(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Como 3 é raiz simples de $Q(x)$, 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

88.2 Começamos por determinar o quociente da divisão inteira de $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$ por $x + \frac{1}{2}$:

$-\frac{1}{2}$	4	12	9	2	$Q(x) = 4x^2 + 10x + 4$
$-\frac{1}{2}$	-2	-5	-2		
4	10	4	0		

Como $R(x) = 0$ sabemos que $-\frac{1}{2}$ tem pelo menos multiplicidade 1. Determinemos as raízes de $Q(x)$:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 10x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 6}{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -2 \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}$ é raiz simples de $Q(x)$, $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$.

88.3 Começamos por determinar o quociente da divisão inteira de $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ por $x + 1$:

1	1	-3	-5	-2	$Q_1(x) = x^3 - 3x - 2$
-1	-1	0	3	2	
1	0	-3	-2	0	
-1	-1	1	2		$Q_2(x) = x^2 - x - 2$
1	-1	-2	0		

Aplicou-se sucessivamente a regra de Ruffini, pois o quociente da primeira divisão inteira também tinha -1 como raiz.

Já sabemos que -1 tem pelo menos multiplicidade 2. Determinemos as raízes de $Q_2(x)$:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Como -1 é raiz simples de $Q_2(x)$, -1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinômio $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

88.4 Começemos por determinar o quociente da divisão inteira de $3x^3 + 10x^2 + 4x - 8$ por $x - \frac{2}{3}$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 10 & 4 & -8 \\ \frac{2}{3} & & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 3 & 12 & 12 & 0 \end{array} \quad Q(x) = 3x^2 + 12x + 12$$

Como $R(x) = 0$ sabemos que $\frac{2}{3}$ tem pelo menos multiplicidade 1.

Determinemos as raízes de $Q(x)$:

$$3x^2 + 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -2$$

Como $\frac{2}{3}$ não é raiz de $Q(x)$, concluímos que $\frac{2}{3}$ é uma raiz de multiplicidade 1 do polinômio $3x^3 + 10x^2 + 4x - 8$.

89.1 Começemos por determinar o quociente da divisão inteira de $x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 20 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 - x - 20$$

Determinemos as raízes de $Q(x)$.

$$x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 9}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 5$$

Concluindo, as raízes de $x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ são -4 , 1 e 5 . Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinômio igual a 1, o teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais) garante que:

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x+4)(x-1)(x-5)$$

89.2 Começemos por determinar o quociente da divisão inteira de $2x^3 - 7x^2 - 33x + 18$ por $x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -33 & 18 \\ -3 & & -6 & 39 & -18 \\ \hline & 2 & -13 & 6 & 0 \end{array} \quad Q(x) = 2x^2 - 13x + 6$$

Determinemos as raízes de $Q(x)$:

$$2x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm 11}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 6$$

Concluindo, as raízes de $2x^3 - 7x^2 - 33x + 18$ são -3 , $\frac{1}{2}$ e 6 .

Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinômio igual a 2, o teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais) garante que:

$$2x^3 - 7x^2 - 33x + 18 = 2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-6)$$

89.3 Vamos começar por determinar o quociente da divisão inteira de $x^4 - 17x^2 + 16$ por $x + 4$. De seguida, faremos a divisão do quociente obtido por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -17 & 0 & 16 \\ -4 & & -4 & 16 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & & 1 & -3 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$

Alternativamente, poder-se-iam determinar as raízes de $x^4 - 17x^2 + 16$, encarando a equação $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$, como uma equação biquadrada, como se faz no exercício 97.

Determinemos as raízes de $Q(x) = x^2 - 3x - 4$:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$

Concluindo, as raízes de $x^4 - 17x^2 + 16$ são -4 , -1 , 1 e 6 . Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinômio igual a 1, o teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais) garante que:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = (x+4)(x+1)(x-1)(x-4)$$

89.4 Vamos começar por determinar o quociente da divisão inteira de $-2x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{50}{3}x^2 + 30x + 12$ por $x + \frac{2}{3}$. De seguida, faremos a divisão do quociente obtido por $x - 3$.

	-2	$-\frac{10}{3}$	$\frac{50}{3}$	30	12
$-\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	-12	-12
	-2	-2	18	18	0
3		-6	-24	-18	
	-2	-8	-6	0	

Determinemos as raízes de $Q(x) = -2x^2 - 8x - 6$:

$$-2x^2 - 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4}{-4} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

Concluindo, as raízes de $-2x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{50}{3}x^2 + 30x + 12$ são -3 , $-\frac{2}{3}$, -1 e 3 . Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinómio igual a -2 , o teorema fundamental da Álgebra (para polinómios de coeficientes reais) garante que:

$$-2x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{50}{3}x^2 + 30x + 12 = -2(x-3)\left(x + \frac{2}{3}\right)(x+1)(x+3)$$

90.1 V.

90.2 F.

A falsidade da afirmação fica confirmada por um contraexemplo: $x^2 + 1$ não tem raízes reais.

90.3 F.

A falsidade da afirmação fica confirmada por um contraexemplo: $x^3 + 1$ tem apenas uma raiz real.

91.1 Sendo $C(1) = C(2) = 0$; 1 e 2 são raízes de $C(x)$. Sendo o grau de $C(x)$ ímpar, tendo 2 raízes reais conhecidas, sabemos que $C(x)$ tem 3 raízes.

Portanto, sendo o coeficiente do termo em x^3 igual a 1 e $a \in \mathbb{R}$ a outra raiz, temos $C(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$.

$$\text{De } C(3) = 30 \text{ obtém-se } (3-1)(3-2)(3-a) = 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(3-a) = 30 \Leftrightarrow a = -12.$$

As raízes de $C(x)$ são 1 , 2 e -12 .

$$\textbf{91.2} \quad C(x) = (x-1)(x-2)(x+12) = (x^2 - 3x + 2)(x+12) = \\ = x^3 + 9x^2 - 34x + 24$$

91.3 Pelo teorema do resto, temos

$$C(-1) = (-1)^3 + 9(-1)^2 - 34(-1) + 24 = 66$$

92. Sendo a o coeficiente do termo de maior grau do polinómio $P(x)$, de quarto grau com as raízes -3 , -1 , $\frac{1}{2}$ e 2 , o teorema fundamental da Álgebra (para polinómios de coeficientes reais) garante que:

$$P(x) = a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

Pelo teorema do resto, tem-se $P(-2) = -20$.

$$P(-2) = -20 \Leftrightarrow a(-2+3)(-2+1)\left(-2 - \frac{1}{2}\right)(-2-2) = -20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10a = -20 \Leftrightarrow a = 2$$

Assim, tem-se:

$$P(x) = 2(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = 2(x^2 + 4x + 3)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = \\ = 2(x^2 + 4x + 3)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right) = \\ = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$$

Concluindo: $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$.

93.1 Pelo teorema do resto, tem-se $A\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 1 + \frac{m}{2} + 4 = 3 \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Concluindo: $m = -\frac{1}{2}$.

93.2 Determinemos o quociente da divisão inteira de

$$A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \text{ por } x - 2:$$

	2	-4	-2	4
				$Q(x) = 2x^2 - 2$
2		4	0	-4
	2	0	-2	0

Determinemos as raízes de $Q(x) = -2x^2 - 8x - 6$:

$$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

As raízes de $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ são -1 , 1 e 2 .

Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinómio igual a 2, o teorema fundamental da Álgebra (para polinómios de coeficientes reais) garante que:

$$A(x) = 2(x-2)(x-1)(x+1)$$

94. Determinemos o quociente da divisão inteira de

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14 \text{ por } 2x - 7:$$

$$\text{Cálculos auxiliares: } 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Apliquemos a regra de Ruffini à divisão inteira de $P(x)$ por $x - \frac{7}{2}$:

	2	-13	25	-14
$\frac{7}{2}$		7	-21	14
	2	-6	4	0

O quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $2x - 7$ é:

$$Q(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6x + 4) = x^2 - 3x + 2$$

Determinemos, agora, as raízes de $Q(x)$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

As raízes de $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ são 1, 2 e $\frac{7}{2}$.

Sendo o coeficiente do termo de maior grau deste polinômio igual a 2, o teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais) garante que:

$$P(x) = 2(x-1)(x-2)\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$\mathbf{95.1} \quad A(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = 0$$

Como $A(1) = 0$, conclui-se que 1 é uma das raízes de $A(x)$.

95.2 Começemos por aplicar a regra de Ruffini à divisão inteira de $A(x)$ por $x - 1$:

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0 = R(x)

$$A(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

Determinemos agora as raízes de $x^2 + 4x + 4$:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

As raízes de $A(x)$ são 1 e -2 (dupla), sendo

$$A(x) = (x-1)(x+2)(x+2).$$

95.3

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	-	0	+

$(x+2)^2$ é nulo para $x = -2$ e positivo para $x \neq -2$.

O conjunto-solução de $A(x) < 0$ é $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[$.

95.4 Começemos por pôr em evidência o fator x^2 :

$$B(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6)$$

Determinemos as raízes de $x^2 - 5x + 6$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Conclui-se, por aplicação do teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais), que:

$$B(x) = x^2(x-2)(x-3).$$

Podemos fazer, agora, um quadro de sinal do polinômio.

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$B(x)$	+	0	+	0	-	0	+

x^2 é nulo para $x = 0$ e positivo para $x \neq 0$.

O conjunto-solução de $B(x) > 0$ é $]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$.

96.1 Por observação do quadro de sinal, concluímos que as raízes do polinômio $A(x)$ são 3 e 7.

$$\mathbf{96.2} \quad A(x) = a(x-3)(x-7)$$

96.3 Como $A(x) < 0$ em $]3, 7[$, tem de se ter, por exemplo, $A(4) < 0$. $A(4) = a(4-3)(4-7) = -7a$, pelo que $-7a < 0$ ou seja, $a > 0$. Concluindo, o sinal de a é positivo.

96.4 Começemos por determinar as raízes de $B(x)$.

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

Concluimos que $B(x) = (x+2)(x-3)$.

Passemos agora à construção de um quadro de sinal de $A(x) \times B(x)$:

x	$-\infty$	-2		3		7	$+\infty$
$A(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+	+	+
$A(x) \times B(x)$	+	0	-	0	-	0	+

O conjunto-solução de $A(x) \times B(x) \geq 0$ é

$$]-\infty, -2] \cup [7, +\infty[\cup \{3\}.$$

97.1 Consideremos a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Tendo em conta que $x^4 = (x^2)^2$, substituindo na equação x^2 por y , obtemos a equação $y^2 - 13y + 36 = 0$.

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = 9$$

97.2

$$y = 4 \vee y = 9 \iff_{y=x^2} x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \iff x = \pm \sqrt{4} \vee x = \pm \sqrt{9} \iff$$

$$\iff x = -3 \vee x = -2 \vee x = 2 \vee x = 3$$

98. Consideremos a equação $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$. Tendo em conta que $x^4 = (x^2)^2$, substituindo na equação x^2 por y e obtemos a equação $y^2 - 26y + 25 = 0$.

$$y^2 - 26y + 25 = 0 \iff y = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \times 1 \times 25}}{2 \times 1} \iff$$

$$\iff y = \frac{26 \pm 24}{2} \iff y = 1 \vee y = 25 \iff_{y=x^2} x^2 = 1 \vee x^2 = 25 \iff$$

$$\iff x = \pm \sqrt{1} \vee x = \pm \sqrt{25} \iff x = -5 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 5$$

99. Começemos por resolver a equação $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Considerando a mudança de variável $y = x^2$, obtemos:

$$y^2 - 7y + 12 = 0 \iff y = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \iff$$

$$\iff y = \frac{7 \pm 1}{2} \iff y = 3 \vee y = 4 \iff_{y=x^2} x^2 = 3 \vee x^2 = 4 \iff$$

$$\iff x = \pm \sqrt{3} \vee x = \pm \sqrt{4} \iff x = -2 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee x = 2$$

O polinómio $x^4 - 7x^2 + 12$ admite a seguinte fatorização:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = (x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$$

que permite construir o quadro de sinal que se segue.

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+\sqrt{3}$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-\sqrt{3}$	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x^4 - 7x^2 + 12$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

O conjunto-solução de $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$ é $[-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$.

100.1 Sendo $P(x)$ divisível por $x-2$, tem-se $P(2) = 0$.

$$P(2) = 0 \iff -3 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + k \times 2 + 18 = 0 \iff$$

$$\iff -30 + 2k = 0 \iff k = 15$$

100.2 Começemos por decompor $P(x)$ em fatores. Para isso, usemos o facto de 2 ser uma raiz de $P(x)$.

-3	-6	15	18
2	-6	-24	-18
-3	-12	-9	0

$$P(x) = (x-2)(-3x^2 - 12x - 9) =$$

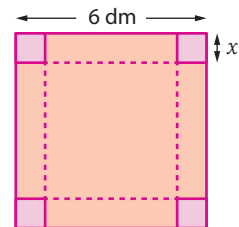
$$= -3x^2 - 12x - 9 = 0 \iff x = -3 \vee x = -1$$

Tem-se, portanto, $P(x) = -3(x+3)(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
-3	-	-	-	-	-	-	-
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

O conjunto-solução de $P(x) \leq 0$ é $[-3, -1] \cup [2, +\infty[$.

101. A caixa tem a forma de um prisma, pelo que o seu volume é dado por $V = A_b \times h$. Medindo o lado do quadrado da base $6-2x$ e a altura do prisma x , tem-se:



$$V(x) = (6-2x)^2 \times x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

Opção correta: A

102. $P(x) = (x^2 - 3)(2x^2 + x) + (3x + 1) =$

$$= 2x^4 + x^3 - 6x^2 - 3x + 3x + 1 = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + 1$$

Opção correta: B

103. Pelo teorema do resto, tem-se:

$$R(x) = 2(-1)^3 - (-1)^2 - a(-1) - 1 = -2 - 1 + a - 1 = a - 4$$

Opção correta: D

104. Sendo $A(x)$ divisível por $x-2$, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x-2$ tem de ser 0.

Aplicando o teorema do resto, obtém-se:

$$A(2) = 0 \iff 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 13 \times 2 + k = 0 \iff$$

$$\iff 16 - 36 + 26 + k = 0 \iff k = -6$$

Opção correta: C

105. Sendo $A(x)$ divisível por $x-a$, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x-a$ tem de ser 0.

Aplicando o teorema do resto, obtém-se:

$$A(a) = 0 \iff a^3 - 2a \times a^2 + b = 0 \iff -a^3 + b = 0 \iff$$

$$\iff b = a^3 \iff b = a^3 \iff a = \sqrt[3]{b}$$

Opção correta: B

106.1 O polinómio $P(x)$ é do 3.º grau se $m^2 - 1 \neq 0$, ou seja, se $m \neq -1 \wedge m \neq 1$.

106.2 O polinómio $P(x)$ é do 2.º grau se $m^2 - 1 = 0 \wedge m + 1 \neq 0$, que é equivalente a $(m = -1 \vee m = 1) \wedge m \neq -1$, ou seja, $m = 1$.

106.3 O polinômio $P(x)$ é do 1.º grau se $m^2 - 1 = 0 \wedge m + 1 = 0$, que é equivalente a $(m = -1 \vee m = 1) \wedge m = -1$, ou seja, $m = -1$.

107.

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 0x - 3 & x^2 + 2 \\ -x^5 & \\ \hline 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 0x - 3 & \\ -3x^4 & \\ \hline -4x^3 - 10x^2 + 0x - 3 & \\ 4x^3 & \\ \hline -10x^2 + 8x - 3 & \\ 10x^2 & \\ \hline 8x - 3 & \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 10 \\ R(x) = 8x - 3 \end{array}$$

108.1

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & & -4 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = 2x^2 \\ R(x) = -3 \end{array}$$

108.2

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = 2x^2 + 4x \\ R(x) = -3 \end{array}$$

108.3 Cálculo auxiliar: $3x - 6 = 3(x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & & 4 & 16 & 32 \\ \hline 2 & 8 & 16 & 29 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = \frac{1}{3}(2x^2 + 8x + 16) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{3} \\ R(x) = 29 \end{array}$$

108.4 Cálculo auxiliar: $2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \hline 2 & 8 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = \frac{1}{2}\left(2x^2 + 3x - \frac{3}{2}\right) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \\ R(x) = -\frac{9}{4} \end{array}$$

109. Utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de

$$A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 3 \text{ por } B(x) = x + 1 \text{ é}$$

$$A(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 2(-1) - 3 = -1.$$

110. Como -3 é raiz de $P(x)$, tem-se $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = 0 \Leftrightarrow (-3)^3 + 4(-3)^2 - a(-3) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -27 + 36 + 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3}$$

111. Sendo $P(x)$ divisível por $x - 1$, tem-se $P(1) = 0$, e sendo o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ igual a 10, tem-se $P(-1) = -10$. Os valores de a e b obtêm-se com a resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 - 1 = 0 \\ 2 \times (-1)^3 + a \times (-1)^2 + b \times (-1) - 1 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ a = b - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = b - 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases}$$

112. $P(3) = 2 \times 3^4 - 2 \times 3^3 - 11 \times 3^2 - 3 - 6 = 0$ e

$$P(-2) = 2 \times (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - 11 \times (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & -2 & -11 & -1 & -6 \\ 3 & & 6 & 12 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & & -4 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

O polinômio não tem outros zeros porque ao dividirmos $P(x)$ por $(x - 3)(x + 2)$ obtemos o polinômio $2x^2 + 1$ e este polinômio não tem zeros.

113.1 $A(2) = 2^4 - 7 \times 2^3 + 18 \times 2^2 - 20 \times 2 + 8 = 0$

113.2 Apliquemos a regra de Ruffini à divisão inteira de $A(x)$ por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -7 & 18 & -20 & 8 \\ 2 & & 2 & -10 & 16 & -8 \\ \hline 1 & -5 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Como $R(x) = 0$, continuamos a dividir por $x - 2$.

$$Q(x) = x^2 - 3x + 2$$

Determinemos os zeros de $Q(x)$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Concluindo, 2 é uma raiz de multiplicidade 3.

113.3 $A(x) = (x-1)(x-2)^3$

114.

	1	-1	-6	12	-13	13	-6
1		1	0	-6	6	-7	6
	1	0	-6	6	-7	6	0
2		2	4	-4	4	-6	
	1	2	-2	2	-3	0	
-3		-3	3	-3	3		
	1	-1	1	-1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

Como $x^3 - x^2 + x - 1$ tem como raiz 1, podemos continuar a dividir por $x - 1$.

O quociente obtido, $x^2 + 1$, não tem raízes, pelo que passamos já para a fatorização de $A(x)$:

$$A(x) = (x-1)^2(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

Concluindo, $B(x) = x^2 + 1$, $m=2$ e $n=p=1$.

115.1 A soma das multiplicidades das raízes x_1 , x_2 e x_3 , respetivamente, n_1 , n_2 e n_3 , é inferior ou igual ao grau do polinómio, 7. Assim, temos:

$$n_1 + n_2 + n_3 \leq 7 \Leftrightarrow 2 + 3 + n_3 \leq 7 \Leftrightarrow n_3 \leq 2$$

115.2 O teorema fundamental da Álgebra (para polinómios de coeficientes reais) garante que o polinómio dado se pode escrever da seguinte forma:

$$a(x-x_1)^2(x-x_2)^3(x-x_3)^{n_3}, \text{ com } a \neq 0$$

Tem de se ter $n_3 = 2$, pois se x_3 tivesse multiplicidade 0, não seria raiz. Por outro lado, se x_3 tivesse multiplicidade 1, teria de haver uma quarta raiz, caso contrário, o polinómio não teria grau 7.

116.1 Por exemplo: $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$

116.2 Por exemplo: $x(x-2)(x-5) = x^3 - 7x^2 + 10x$

116.3 Por exemplo: $(x+1)(x-4)(x-6) = x^3 - 9x^2 + 14x + 24$

116.4 Por exemplo: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

116.5 Por exemplo: $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

116.6 Por exemplo: $x^2(x+2) = x^3 + 2x^2$

117.1 $B(1) = -2 \times 1^3 - 4 \times 1^2 + 2 \times 1 + 4 = 0$

Pelo teorema do resto sabemos que o resto da divisão de $B(x)$ por $x-1$ é 0, pelo que de $B(x)$ é divisível por $x-1$.

117.2 Procedamos à divisão inteira de $B(x)$ por $x-1$:

	-2	-4	2	4
1		-2	-6	-4
	-2	-6	-4	0

$Q(x) = -2x^2 - 6x - 4$

Determinemos as raízes de $Q(x)$.

$$-2x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Os zeros de $B(x)$ são -2 , -1 e 1 .

117.3 Considerando as raízes de $B(x)$ e o coeficiente do termo de maior grau, tem-se:

$$B(x) = -2(x-1)(x+1)(x+2)$$

117.4 Como $B(x)$ é divisível por $x+2$, já que -2 é raiz de $B(x)$, o resto da divisão inteira de $B(x)$ por $x+2$ é 0, ou seja, $R(x) = 0$.

Considerando a fatorização da alínea anterior, concluímos que o quociente da divisão inteira de $B(x)$ por $x+2$ é $Q(x) = -2(x-1)(x+1) = -2x^2 + 2$.

118. Como 4 é raiz de $P(x)$, $P(x)$ é divisível por $x-4$. Determinemos o quociente desta divisão.

	2	-5	-11	-4
4		8	12	4
	2	3	1	0

$Q(x) = -2x^2 + 3x + 1$

Determinemos, agora, as raízes de $Q(x)$:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Concluindo:

$$P(x) = 2(x-4)(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

119. Admitindo $P(x)$ os zeros simples -4 , -1 , $\frac{1}{2}$ e 3 e considerando $a \neq 0$ para coeficiente do termo de maior grau, temos:

$$P(x) = a(x+4)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é igual a 1, temos:

$$P(-2)=1 \Leftrightarrow a(-2+4)(-2+1)\left(-2-\frac{1}{2}\right)(-2-3)=1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(-2)\left(-\frac{5}{2}\right)(-5)=1 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{25}$$

Concluindo:

$$P(x)=-\frac{1}{25}(x+4)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$$

120. Sendo $P(x)$ divisível por $3x+5$, é também divisível por $3\left(x+\frac{5}{3}\right)$. Recorrendo à regra de Ruffini, para obter o quociente da divisão de $P(x)$ por $3x+5$, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -9 & 10 \\ -\frac{5}{3} & & -5 & 15 & -10 \\ \hline & 3 & -9 & 6 & 0 \end{array}$$

O quociente da divisão de $P(x)$ por $3x+5$ é

$$Q(x)=\frac{1}{3}(3x^2-9x+6)=x^2-3x+2.$$

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

As raízes de $P(x)$ são $-\frac{5}{3}$, 1 e 2.

$$\text{Logo, } P(x)=3(x-2)(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right).$$

121.1 Sendo $P(x)$ divisível por $x-1$, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x-1$ tem de ser 0. Aplicando o teorema do resto, obtém-se:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow -2 \times 1^4 - 2 \times 1^3 + 10 \times 1^2 + k \times 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 - 2 + 10 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

121.2 Seja $k=6$. Determinemos todas as raízes de $P(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & -2 & 10 & 6 & -12 \\ 1 & & -2 & -4 & 6 & 12 \\ \hline & -2 & -4 & 6 & 12 & 0 \\ -2 & & 4 & 0 & -12 \\ \hline & -2 & 0 & 6 & 0 \end{array}$$

Verificou-se que -2 é raiz de $P(x)$, experimentando entre os divisores inteiros de -12 , (termo independente de $P(x)$).

$$Q(x)=-2x^2+6$$

$$-2x^2+6=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Sendo -2 , $-\sqrt{3}$, 1 e $\sqrt{3}$ raízes de $P(x)$ e -2 o coeficiente de maior grau de $P(x)$, pelo teorema fundamental da Álgebra (para polinômios de coeficientes reais) temos:

$$P(x)=-2(x-\sqrt{3})(x-1)(x+2)(x+\sqrt{3})$$

121.3 Considerando a fatorização apresentada na alínea anterior, construímos o quadro de sinal que se segue.

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-2(x-1)$	+	+	+	+	+	0	-	-	-
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+\sqrt{3}$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-\sqrt{3}$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

O conjunto-solução de $P(x) \geq 0$ é $[-2, -\sqrt{3}] \cup [1, \sqrt{3}]$.

122.1 Como -2 é raiz de $A(x)$, $A(x)$ é divisível por $x+2$. Determinemos o quociente desta divisão.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \quad Q(x)=x^2-4x+3$$

Determinemos, agora, os zeros de $Q(x)$.

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm 2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

A decomposição de $A(x)$ em fatores do 1.º grau é:

$$A(x)=(x-3)(x-1)(x+2)$$

122.2 Considerando a fatorização apresentada na alínea anterior, construímos o quadro de sinal que se segue.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$A(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\textbf{123.1} \quad C(1)=2 \times 1^3 + 6 \times 1^2 - 8 = 0$$

123.2 Da alínea anterior conclui-se que $C(x)$ é divisível por $x-1$. Determinemos o quociente da divisão inteira de $C(x)$ por $x-1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & 0 & -8 \\ 1 & & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 8 & 8 & 0 \end{array} \quad Q(x)=2x^2+8x+8$$

Determinemos, agora, os zeros de $Q(x)$:

$$2x^2+8x+8=0 \Leftrightarrow 2(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow 2(x+2)^2=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=-2$$

RESOLUÇÕES

$C(x)$ tem 1 como raiz simples e -2 como raiz dupla. Como o coeficiente do termo de maior grau é 2, tem-se:

$$C(x) = 2(x-1)(x+2)^2$$

123.3 Pretende-se resolver a condição $C(x) > 0$. Para isso vamos construir um quadro de sinal de $C(x)$, considerando a fatorização determinada na alínea anterior.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2(x-1)$	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
$C(x)$	-	0	-	0	+

$(x+2)^2$ é nulo para $x = -2$ e positivo para $x \neq -2$.

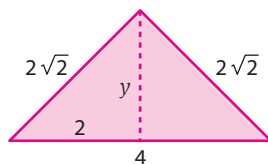
O conjunto de valores de x para os quais $C(x)$ é positivo é $]1, +\infty[$.

124.1 Para determinar a altura do prisma, recorremos à fórmula do respetivo volume: $V = A_b \times h$. Sabemos que $V(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$ e sabemos que as bases do prisma são triângulos isósceles de lados $2x+2$ (lado diferente) e $\sqrt{2}x + \sqrt{2}$ (lados iguais).

Para $x = 1$, temos:

$$V(1) = 2 \times 1^3 + 9 \times 1^2 + 12 \times 1 + 5 = 28$$

Na figura ao lado, temos o triângulo das bases com as medidas correspondentes ao caso $x = 1$. Para determinar a sua área temos de determinar a sua altura, usando o teorema de Pitágoras.



$$(2\sqrt{2})^2 = y^2 + 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{4} = 2$$

Assim, a área da base vem:

$$A_b = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

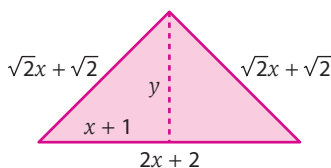
A altura do prisma é, então, $h = \frac{V}{A_b} = \frac{28}{4} = 7$.

124.2 Para determinar o polinómio que representa a altura relativa ao lado diferente do triângulo das bases do prisma, consideremos a figura ao lado.

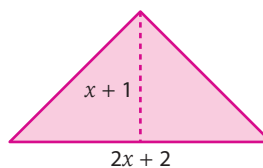
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 &= (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2(x+1)^2 - (x+1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 &= 2(x+1)^2 - (x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow y = x+1 \end{aligned}$$

A altura do triângulo é dada pelo polinómio $x+1$.



124.3 O polinómio que representa a altura do prisma é o quociente $\frac{V(x)}{A_b(x)}$, sendo $A_b(x) = \frac{(2x+2)(x+1)}{2} = (x+1)^2$.



$$\frac{V(x)}{A_b(x)} = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 5}{(x+1)^2}$$

Determinemos o quociente aplicando a regra de Ruffini.

	2	9	12	5
-1		-2	-7	-5
	2	7	5	0
-1		-2	-5	
	2	5	0	

Polinómio que representa a altura do prisma: $2x+5$

124.4 O volume do prisma ser inferior a 81 unidades de volume traduz-se pela condição:

$$2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 < 81$$

Escrevamos uma inequação equivalente na forma canónica:

$$2x^3 + 9x^2 + 12x - 76 < 0$$

Fatorizemos o polinómio $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 76$.

Sabemos que se este polinómio tiver raízes inteiras, -76 será um múltiplo inteiro das mesmas. Vamos verificar que 2 é uma raiz de $P(x)$:

$$P(2) = 2 \times 2^3 + 9 \times 2^2 + 12 \times 2 - 76 = 16 + 36 + 24 - 76 = 0.$$

	2	9	12	-76
2		4	26	76
	2	13	38	0

$$Q(x) = 2x^2 + 13x + 38$$

Determinemos as raízes de $Q(x) = 2x^2 + 13x + 38$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 13x + 38 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times 38}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-13 \pm \sqrt{-135}}{4} \end{aligned}$$

Esta equação é impossível, pelo que $Q(x)$ não tem raízes.

A fatorização de $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 76$ é então $(x-2)(2x^2 + 13x + 38)$

$$2x^3 + 9x^2 + 12x - 76 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 13x + 38) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 13x + 38}{2x^2 + 13x + 38} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$2x^2 + 13x + 38 = 2\left(x + \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{135}{8}$$

Tendo em conta que $x \in]-1, +\infty[$, o volume do prisma é inferior a 81 para $x \in]-1, 2[$.

125.1 Para resolver a condição $(3x-7)B(x) \leq 0$, vamos construir um quadro de sinal para o polinómio $(3x-7)B(x)$.

$$3x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$$

x	$-\infty$	2		$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$B(x)$	-	0	+	+	+
$3x-7$	-	-	-	0	+
$(3x-7)B(x)$	+	0	-	0	+

O conjunto-solução de $(3x-7)B(x) \leq 0$ é $\left[2, \frac{7}{3}\right]$.

125.2 Para resolver a condição $(-x^2-1)B(x) > 0$, basta observar que $-x^2-1 < 0$, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Assim, $(-x^2-1)B(x) > 0$ para os valores de x tais que $B(x) < 0$. O conjunto-solução de $(-x^2-1)B(x) > 0$ é $]-\infty, 2[$.

125.3 Para resolver a condição $(x^2-5x+6)B(x) < 0$, vamos construir um quadro de sinal para o polinómio $(x^2-5x+6)B(x)$.

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=3$$

Temos, portanto, $(x^2-5x+6)B(x) = (x-2)(x-3)B(x)$.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$B(x)$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$(x^2-5x+6)B(x)$	-	0	-	0	+

O conjunto-solução de $(x^2-5x+6)B(x) < 0$ é $]-\infty, 2[\cup]2, 3[$.

126. Seja $P(x) = x^n + a^n$. Para que $P(x)$ seja divisível por $x+a$, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x+a$ tem de ser 0. Pelo teorema do resto, o resto desta divisão é dado por $P(-a) = (-a)^n + a^n$.

Se n ímpar, $(-a)^n = -a^n$. O que leva a

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0.$$

Fica assim demonstrado que se n ímpar, então $P(x)$ é divisível por $x+a$.

127.1

$$P(a) + P(-a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 + (-a)^{2n+1} - (-a)^{2n} - (-a) + 1$$

Como $2n$ é par, $(-a)^{2n} = a^{2n}$, e como $2n+1$ é ímpar, $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$. Assim, tem-se:

$$P(a) + P(-a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 - a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1 = 2 - 2a^{2n}$$

127.2

$$(x-1)(x^n-1)(x^n+1) = (x-1)(x^{2n}-1) = x^{2n+1} - x^{2n} - x + 1 = P(x) - 1 \text{ e } 1 \text{ são raízes de } P(x) \text{ porque } P(-1) = P(1) = 0.$$

1 é raiz de $x-1$ e de x^n-1 . Para determinar a multiplicidade da raiz 1, enquanto raiz de $P(x)$, basta determinar a sua multiplicidade enquanto raiz de x^n-1 e adicionar-lhe 1 unidade.

	1	0	...	0	-1
1		1	...	1	1
	1	1	...	1	0

$$x^n-1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Como $Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ não é divisível por $x-1$ ($Q(1) \neq 0$), a multiplicidade da raiz 1 relativamente a $P(x)$ é 2.

128.1 As raízes inteiras de $P(x)$, a existirem, são divisores inteiros de -1 . Como $P(1) = 0$, usemos 1 para começar o processo de fatorização.

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0

$$Q(x) = x^2 + 1$$

Como $Q(x) = x^2 + 1$ não tem raízes, tem-se: $P(x) = (x-1)(x^2+1)$

128.2 As raízes inteiras de $P(x)$, a existirem, são divisores inteiros de -4 . Como $P(-1) = P(2) = 0$, usemos -1 e 2 para começar o processo de fatorização.

	1	-1	0	-2	-4
-1		-1	2	-2	4
	1	-2	2	-4	0
2		2	0	4	
	1	0	2	0	

$$Q(x) = x^2 + 2$$

Como $Q(x) = x^2 + 2$ não tem raízes, conclui-se que:

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x^2+2)$$

128.3 Como $P(1)=0$, usemos 1 para começar o processo de fatorização.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & a & -a \\ \hline 1 & & 1 & 0 & a \\ \hline & 1 & 0 & a & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + a$$

Como $Q(x) = x^2 + a$ ($a > 0$) não tem raízes, conclui-se que:

$$P(x) = (x-1)(x^2+a)$$

128.4 As raízes inteiras de $P(x)$, a existirem, são divisores inteiros de 2. Como $P(-2)=0$, usemos -2 para começar o processo de fatorização.

$$\begin{array}{c|cccc} & a & 2a & 1 & 2 \\ \hline -2 & & -2a & 0 & -2 \\ \hline & a & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = ax^2 + 1$$

O polinômio $Q(x) = ax^2 + 1$ não tem raízes (reais) para $a > 0$.

Por outro lado, se $a < 0$, $Q(x) = ax^2 + 1$ tem raízes. Determinemo-las:

$$ax^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\frac{1}{a}} \vee x = \sqrt{-\frac{1}{a}}$$

Conclui-se então que:

se $a > 0$, tem-se $P(x) = (x+2)(ax^2+1)$;

se $a < 0$, tem-se $P(x) = a(x+2)\left(x - \sqrt{-\frac{1}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{1}{a}}\right)$.

TESTE

$$1. \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt[4]{18} : \sqrt{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} : \sqrt[4]{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Opção correta: A

$$2. \frac{1}{1+2\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}}{(1+2\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})} = \frac{1-2\sqrt{5}}{1-(2\sqrt{5})^2} = \frac{1-2\sqrt{5}}{1-20} = \frac{1-2\sqrt{5}}{-19} = \frac{-1+2\sqrt{5}}{19}$$

Opção correta: C

$$3. \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2 \times 2 \times 3]{2^2} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12 \div 2]{2^{2 \div 2}} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$$

Opção correta: D

$$4. \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = a^2 = \frac{1}{a^{-2}} \text{ e } \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{16}} \neq a^{\frac{3}{8}}$$

Opção correta: D

$$5. x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 10x = x(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

2 é raiz de $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$, pelo que este polinômio é divisível por $x-2$.

Aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 17 & -10 \\ \hline 2 & & 2 & -12 & 10 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - 6x + 5$$

As raízes de $Q(x) = x^2 - 6x + 5$ são:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

As outras raízes de $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 10x$ são: 0, 1 e 5.

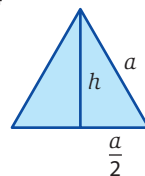
Opção correta: A

6. Começemos por determinar a altura do triângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{de que resulta } h = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$



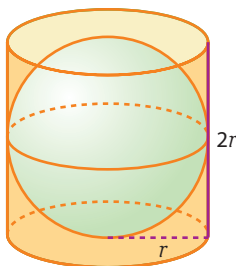
$$\text{A área do triângulo é, portanto, } \frac{a \times \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$7. \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+3-2 \times 2\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

8. O raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro.

Sendo o volume do cilindro dado por $V = A_b \times h = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$, onde r é o respetivo raio, tem-se:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$



$$9.1 \quad \frac{1}{\sqrt{x-5}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5} \sqrt{x-5}} = \frac{\sqrt{x-5}}{(\sqrt{x-5})^2} = \frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$$

$$9.2 \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2}{-3} = -\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2}{3}$$

$$10.1 \text{ Sim. } \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{x^3} = x\sqrt[3]{2}$$

$$10.2 \text{ Não. } \sqrt[6]{4x^2} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{|x|} \neq \sqrt[3]{2x}$$

$$11. 7 \times 0^2 - \sqrt{3} \times 0 = 0$$

$$7 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^2 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{7} = 7 \times \frac{3}{7^2} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = 0$$

12. Sendo o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x-1$ igual 0, tem-se $P(1)=0$, e sendo o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x+1$ igual a -8 , tem-se $P(-1)=-8$. Os valores de a e b obtêm-se com a resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A(1)=0 \\ A(-1)=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 + 1^2 + a \times 1 + b = 0 \\ (-1)^3 + (-1)^2 + a \times (-1) + b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a=b+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+8+b=-2 \\ a=b+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ a=b+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ a=-5+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$$

$$13.1 \quad A(-3) = 2 \times (-3)^3 + 13 \times (-3)^2 + 24 \times (-3) + 9 = -54 + 117 - 72 + 9 = 0$$

- 13.2 Determinemos as raízes de $A(x)$. Como $A(-3)=0$, sabemos que -3 é uma das suas raízes, pelo que $A(x)$ é divisível por $x+3$. Apliquemos a regra de Ruffini à determinação do quociente da divisão de $A(x)$ por $x+3$:

	2	13	24	9
-3		-6	-21	-9
	2	7	3	0

$$Q(x) = 2x^2 + 7x + 3$$

Determinemos agora as raízes de $Q(x) = 2x^2 + 7x + 3$:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$A(x)$ fica decomposto no seguinte produto de fatores:

$$A(x) = 2(x+3)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

- 13.3 Considerando a fatorização de $A(x)$ obtida na alínea anterior, construíamos um quadro de sinal de $A(x)$.

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$	-	-	-	0	+
$(x+3)^2$	+	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	-	0	+

$(x+3)^2$ é nulo para $x = -3$ e positivo para $x \neq -3$.

O conjunto-solução de $A(x) > 0$ é $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

1. A tradução da proposição em linguagem simbólica deverá contemplar o quantificador existencial, o que exclui as opções A e D. Por outro lado a condição constante na proposição da opção B também não traduz «*números reais cujo quadrado é igual ao próprio número*». Sendo a proposição verdadeira, a opção correta é a C.

Opção correta: C

2. Sendo $\sim a \wedge b$ verdadeira, $\sim a$ é verdadeira e b é verdadeira. Sendo $\sim a$ verdadeira, a é falsa.

Opção correta: D

3. A proposição $\sim p \wedge \sim q$ é a conjunção da negação de cada uma das proposições p e q , ou seja é a conjunção de «nem todos os números reais têm inverso» e de «todos os números naturais têm como quadrado um número par».

Opção correta: D

4. O quadrado de qualquer número inteiro adicionado de uma unidade é positivo, pelo que a opção C está correta. Qualquer uma das outras é incorreta.

Opção correta: C

5. $x^4 - 12x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 12y + 32 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \vee y^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 2 \vee y = \pm 2\sqrt{2}$$

$$C = \{-2\sqrt{2}, -2, 2, 2\sqrt{2}\}$$

$$C \setminus \mathbb{N} = \{-2\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}\}$$

Opção correta: A

6.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 0x + 1 & 2x^2 - 1 \\ -3x^2 + \frac{3}{2}x & \frac{3}{2}x + 1 \\ \hline \frac{1}{2}x + 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} Q(x) = \frac{3}{2}x \\ R(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}$$

Opção correta: D

7. $P(-1) = (-1)^n + 1 = -1 + 1 = 0$, se n é ímpar

$P(-1) = (-1)^n + 1 = 1 + 1 = 2$, se n é par

$P(1) = 1^n + 1 = 1 + 1 = 2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Conclui-se que $P(x) = x^n + 1$ é divisível por $x + 1$, para qualquer n ímpar.

Opção correta: C

8. Sendo $P(x)$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) < 0$, a condição $(x+3)P(x) > 0$ é equivalente a $x+3 < 0$, ou seja, a $x < -3$, cujo conjunto-solução é $]-\infty, -3[$.

Opção correta: A

9.1 $\sim(\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2)$ ou $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$

9.2 $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0)$ ou $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \leq 0$

9.3 $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 < 0 \vee x^2 < x$

10.

a	b	$\sim a$	$b \vee \sim a$	$a \wedge (b \vee \sim a)$	$a \wedge b$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Sendo os valores lógicos de cada linha das duas últimas colunas da tabela iguais, conclui-se que, quaisquer que sejam as proposições a e b , $a \wedge (b \vee \sim a) \Leftrightarrow a \wedge b$.

11.1 Falso; para $x = 1$ não se verifica $x^2 > x$, pois $1^2 = 1$.

11.2 Verdadeiro. (Tanto $\sqrt{x^2}$ como $-x$ representam o valor absoluto de $x \in \mathbb{R}^-$.)

12. Se $x = 1$, então $1^5 - 1^4 + 2 \times 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 - 1 = 0$, pelo que se verifica a primeira implicação.

A segunda implicação também é verdadeira, pois

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^4 + 2x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Assim, fica demonstrada a equivalência.

13.1 Por exemplo, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

13.2 Por exemplo, $\mathbb{N}$.

13.3 Por exemplo, $\mathbb{R}^-$.

14. $E =]-\infty, 4[$, $F =]-\infty, -\sqrt{2}]$ e $G = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

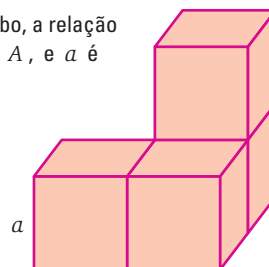
14.1 $E \cap (F \cap G) =]-\infty, 4[\cap \left(]-\infty, -\sqrt{2}] \cap \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) =]-\infty, 4[\cap \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]$

14.2 $E \setminus (F \cap G) =]-\infty, 4[\setminus \left(]-\infty, -\sqrt{2}] \cap \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) =]-\infty, 4[\setminus \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right[\cup]-\infty, -\frac{3}{2}]$

15.1 $\frac{a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}} + (a^2)^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{a}$

15.2 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{18}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3 \times 2^2} - \sqrt{2 \times 3^2}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

16. Sendo a a aresta de cada cubo, a relação entre a área total do poliedro, A , e a é $A = 18a^2$.



Resolvendo esta equação em ordem a a , obtém-se:

$$A = 18a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{A}{18}} = \sqrt{\frac{A}{3^2 \times 2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{2A}}{6}$$

O volume do poliedro é igual $4V_{\text{cubo}}$.

$$4V_{\text{cubo}} = 4a^3 = 4\left(\frac{\sqrt{2A}}{6}\right)^3 = \frac{4}{6^3}(\sqrt{2A})^3 =$$

$$= \frac{2}{108}(\sqrt{2A})^2 \sqrt{2A} = \frac{2A}{54} \sqrt{2A} = \frac{A}{27} \sqrt{2A}$$

(como queríamos mostrar.)

17.1 Vejamos que $A(x)$ é divisível por $(x+2)^3$, mas não por $(x+2)^4$.

	2	4	-18	-44	8	48
-2		-4	0	36	16	-48
	2	0	-18	-8	24	0
-2		-4	8	20	-24	
	2	-4	-10	12	0	
-2		-4	16	-12		
	2	-8	6	0		
-2		-4	-24	-12		
	2	-12	30			

Como o último resto obtido não é nulo, verifica-se que $A(x)$ é divisível por $(x+2)^3$, mas não por $(x+2)^4$, isto é, que -2 é uma raiz de $A(x)$ com multiplicidade 3.

17.2 Da alínea anterior, podemos escrever:

$$A(x) = (x+2)^3(2x^2 - 8x + 6)$$

Determinemos as raízes de $2x^2 - 8x + 6$:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Sendo -2 uma raiz tripla de $A(x)$, 1 e 3 raízes simples e 2 o coeficiente do termo de maior grau, $A(x)$ pode ser escrito como o seguinte produto de fatores:

$$A(x) = 2(x-3)(x-1)(x+2)^3$$

17.3 Considerando a fatorização de $A(x)$ obtida na alínea anterior, construíamos um quadro de sinal de $A(x)$.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$(x+2)^3$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$A(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$(x+2)^3$ é negativo para $x < -2$ e é positivo para $x > -2$.

O conjunto-solução de $A(x) \leq 0$ é $]-\infty, -2] \cup [1, 3]$.