

RESOLUÇÕES

Estatística

Estatística

1. ESTATÍSTICA: CARACTERÍSTICAS AMOSTRAIS

1.1 A expressão $2i - 1$, com $i \in \mathbb{N}$, é o termo geral da sequência dos números ímpares. Assim, a soma dos 100 primeiros números ímpares pode ser representada por $\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$.

1.2 $\sum_{n=1}^{100} (-n + 1)$

2. $\sum_{i=1}^4 (\sqrt{2} i^2) = \sqrt{2} \times 1^2 + \sqrt{2} \times 2^2 + \sqrt{2} \times 3^2 + \sqrt{2} \times 4^2 = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

3. Uma expressão analítica para a sequência (6, 9, 12, 15, 18, 21, 24) é $u_n = 3n + 3$, com $1 \leq n \leq 7$, $n \in \mathbb{N}$. A soma dos termos desta sequência pode ser representada por:

$$\sum_{n=1}^7 (3n + 3)$$

4.1 $\sum_{i=1}^{50} 3 = 3 \times 50 = 150$

4.2 $\sum_{i=1}^5 (5 + i) = \sum_{i=1}^5 5 + \sum_{i=1}^5 i = 5 \times 5 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 + 15 = 40$

4.3 $\sum_{i=1}^3 3i = 3 \sum_{i=1}^3 i = 3 \times (1 + 2 + 3) = 3 \times 6 = 18$

4.4 $\sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=4}^6 3i = \sum_{i=1}^3 i + 3 \sum_{i=4}^6 i = 1 + 2 + 3 + 3 \times (4 + 5 + 6) = 6 + 3 \times 15 = 51$

4.5 $\sum_{i=1}^3 (5 + 2i) = \sum_{i=1}^3 5 + \sum_{i=1}^3 (2i) = 5 \times 3 + 2 \sum_{i=1}^3 i = 15 + 2 \times (1 + 2 + 3) = 27$

4.6 $\sum_{i=3}^5 (1 - 2i) = \sum_{i=3}^5 1 + \sum_{i=3}^5 (-2i) = 1 \times (5 - 3 + 1) - 2 \sum_{i=3}^5 i = 3 - 2 \times (3 + 4 + 5) = -21$

4.7 $\sum_{k=1}^4 (k + 2i) = \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 (2i) = (1 + 2 + 3 + 4) + 2i \times 4 = 10 + 8i$

5.1 $\sum_{i=1}^{10} i = \sum_{i=1}^1 i + \sum_{i=2}^{10} i = 1 + \sum_{i=2}^{10} i \neq \sum_{i=2}^{10} i$
 $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + \sum_{i=2}^{10} i$ tem valor lógico falso.

5.2 $\sum_{i=1}^{100} (1 + i) = \sum_{i=1}^{100} 1 + \sum_{i=1}^{100} i = 100 + \sum_{i=1}^{100} i \neq 1 + \sum_{i=1}^{100} i$
 $\sum_{i=1}^{100} (1 + i) = 1 + \sum_{i=1}^{100} i$ tem valor lógico falso.

5.3 $\sum_{i=1}^{100} (4 + i) = \sum_{i=1}^{100} 4 + \sum_{i=1}^{100} i = 4 \times 100 + \sum_{i=1}^{100} i = 400 + \sum_{i=1}^{100} i$
 $\sum_{i=1}^{100} (4 + i) = 400 + \sum_{i=1}^{100} i$ tem valor lógico verdadeiro.

6.1

$$\sum_{i=1}^{20} (2+i) = 10k + \sum_{i=1}^{20} i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} 2 + \sum_{i=1}^{20} i = 10k + \sum_{i=1}^{20} i \Leftrightarrow 2 \times 20 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{40}{10} \Leftrightarrow k = 4$$

6.2

$$\sum_{i=1}^{50} (i+k) = \sum_{i=1}^{50} i + 100 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} i + \sum_{i=1}^{50} k = \sum_{i=1}^{50} i + 100 \Leftrightarrow k \times 50 = 100 \Leftrightarrow k = \frac{100}{50} \Leftrightarrow k = 2$$

7.1 Discreta.

7.2 Contínua.

7.3 Discreta.

8.1 $14,5 - 12,5 = 2$

8.2 $10,4 - 8,2 = 2,2$

8.3 $0,08 - 0,02 = 0,06$

9.1 $x_1 = 1$ e $x_6 = 5$.

9.2 $\{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 8), (6, 5), (7, 13), (8, 21)\}$

10. $[2, 4[; [4, 6[; [6, 8[; [8, 10[; [10, 12[$

11.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	3,5	3,7	6,2	5,1	7,6	6,8	4,1	11,7	5,4	4,6	2,3	5,5

11.2 $x_6 = 6,8$ e $x_{11} = 2,3$.

11.3 $\{(1; 3,5), (2; 3,7), (3; 6,2), (4; 5,1), (5; 7,6), (6; 6,8), (7; 4,1), (8; 11,7), (9; 5,4), (10; 4,6), (11; 2,3), (12; 5,5)\}$

11.4 $\tilde{x} = (3,5; 3,7; 6,2; 5,1; 7,6; 6,8; 4,1; 11,7; 5,4; 4,6; 2,3; 5,5)$

12.1

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	12	12	10	7	5	4

12.2 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^6 \tilde{x}_j n_j}{50} = \frac{0 \times 12 + 1 \times 12 + 2 \times 10 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 4}{50} = 1,86$

13. $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^5 \tilde{x}_j n_j}{100} = \frac{425 \times 10 + 475 \times 20 + 525 \times 38 + 575 \times 25 + 625 \times 7}{100} = \frac{52450}{100} = 524,50 \text{ euros}$

$$14.1 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{4,5 + 4,2 + 4,7 + 4,8 + 4,5 + 4,3 + 4,5 + 4,7 + 4,3}{9} = \frac{40,5}{9} = 4,5$$

$$14.2 \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^9 y_i}{9} = \frac{6,9 + 6,5 + 6,3 + 6,0 + 6,9 + 6,2 + 6,9 + 6,1 + 6,7}{9} = \frac{57,6}{9} = 6,4$$

15.1 Número de golfinhos observados por passeio; variável quantitativa discreta.

$$15.2 \quad n = 15 + 45 + 84 + 52 + 25 + 10 + 3 + 1 = 235$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^9 \tilde{x}_j n_j}{235} = \frac{0 \times 15 + 1 \times 45 + 2 \times 84 + 3 \times 52 + 4 \times 25 + 5 \times 10 + 6 \times 3 + 8 \times 1}{235} = \frac{545}{235} \approx 2,3$$

A média encontra-se entre os valores $\tilde{x}_3$ e $\tilde{x}_4$, aos quais correspondem maiores valores da frequência absoluta, isto é, onde se concentra o maior número de valores.

16.1 Atraso, em minutos, arredondados a dezena, na chegada de voos europeus a um aeroporto. Variável quantitativa contínua.

$$16.2 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^6 \tilde{x}_j n_j}{100} = \frac{10 \times 31 + 20 \times 33 + 30 \times 28 + 40 \times 5 + 50 \times 2 + 60 \times 1}{100} = \frac{2170}{100} = 21,7 \text{ minutos}$$

$$17.1 \quad \sum_{i=1}^6 d_i = 0 \Leftrightarrow 3 + (-2) + 5 + (-1) + 2 + d_6 = 0 \Leftrightarrow d_6 = -7$$

$$17.2 \quad SS_x = \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^6 d_i^2 = 3^2 + (-2)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-7)^2 = 92$$

$$17.3 \quad d_1 = x_1 - \bar{x} \Leftrightarrow 3 = 10 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 7$$

$$x_2 = d_2 + \bar{x} = -2 + 7 = 5$$

$$x_3 = d_3 + \bar{x} = 5 + 7 = 12$$

$$x_4 = d_4 + \bar{x} = -1 + 7 = 6$$

$$x_5 = d_5 + \bar{x} = 2 + 7 = 9$$

$$x_6 = d_6 + \bar{x} = -7 + 7 = 0$$

$$\tilde{x} = (10, 5, 12, 6, 9, 0)$$

18.

Justificação para o 1.º passo:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n (-2x_i\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \text{ (aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição)}$$

Justificações para o 2.º passo:

$$\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x} = 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \text{ (produto das } n \text{ parcelas } x_i \text{ pela constante } 2\bar{x}, \text{ que se colocou em evidência)}$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = n\bar{x}^2 \text{ (soma de } n \text{ parcelas constantes iguais a } \bar{x}^2)$$

Justificação para o 3.º passo:

$$2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i = 2\bar{x} \times n\bar{x} = 2\bar{x}^2, \text{ pois } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \text{ ou seja, } \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}.$$

$$19. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{160 + 172 + 158 + 165 + 166}{5} = \frac{821}{5} = 164,2 \text{ cm}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (160 - 164,2)^2 + (172 - 164,2)^2 + (158 - 164,2)^2 + (165 - 164,2)^2 + (166 - 164,2)^2 =$$

$$= 120,8 \text{ cm}^2$$

$$\tilde{y} = (1,60; 1,72; 1,58; 1,65; 1,66)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{1,60 + 1,72 + 1,58 + 1,65 + 1,66}{5} = \frac{8,21}{5} = 1,642 \text{ m}$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (1,60 - 1,642)^2 + (1,72 - 1,642)^2 + (1,58 - 1,642)^2 + (1,65 - 1,642)^2 + (1,66 - 1,642)^2 =$$

$$= 0,01208 \text{ m}^2$$

Verifica-se que $SS_x = 10000SS_y$ ($SS_x = 100^2 \times SS_y$, pois $\tilde{x} = 100\tilde{y}$).

$$20.1 \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 3 + 4 + 4 + 5}{15} = \frac{36}{15} = 2,4$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = (1 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (2 - 2,4)^2 + (3 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (2 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 +$$

$$+ (3 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (3 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (5 - 2,4)^2 =$$

$$= 27,6$$

20.2

x_i	1	2	3	4	5
n_i	6	2	3	3	1

$$\sum_{j=1}^5 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (1 - 2,4)^2 \times 6 + (2 - 2,4)^2 \times 2 + (3 - 2,4)^2 \times 3 + (4 - 2,4)^2 \times 3 + (5 - 2,4)^2 \times 1 =$$

$$= 27,6 = SS_x$$

21.1

x_i	12	15	16	17
n_i	2	2	4	2

$$21.2 \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^4 \tilde{x}_j n_j}{10} = \frac{12 \times 2 + 15 \times 2 + 16 \times 4 + 17 \times 2}{10} = \frac{152}{10} = 15,2$$

21.3

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 12 - 15,2 = -3,2$$

$$d_2 = d_1$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 15 - 15,2 = -0,2$$

$$d_{10} = d_3 = -0,2$$

$$\sum_{i=1}^{10} d_i = -3,2 \times 2 + (-0,2) \times 2 + 0,8 \times 4 + 1,8 \times 2 = 0$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 16 - 15,2 = 0,8$$

$$d_7 = d_8 = d_9 = d_4 = 0,8$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 17 - 15,2 = 1,8$$

$$d_6 = d_5 = 1,8$$

$$\text{21.4 } SS_x = \sum_{j=1}^4 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (-3,2)^2 \times 2 + (-0,2)^2 \times 2 + 0,8^2 \times 4 + 1,8^2 \times 2 = 29,6$$

$$\text{21.5 } S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{29,6}{9} \approx 3,3; S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{29,6}{9}} \approx 1,8$$

$$\text{22.1 } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{1+3+5+6+7}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$\begin{aligned} \text{22.2 } SS_x &= \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-4,4)^2 + (3-4,4)^2 + (5-4,4)^2 + (6-4,4)^2 + (7-4,4)^2 = \\ &= (-3,4)^2 + (-1,4)^2 + (0,6)^2 + (1,6)^2 + (2,6)^2 = 23,2 \end{aligned}$$

$$\text{22.3 } S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{23,2}{4} = 5,8; S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{5,8} \approx 2,4$$

22.4 Sendo $\tilde{y} = \tilde{x} + 2$, tem-se:

$$\bar{\tilde{y}} = \bar{x} + 2 = 6,4 \text{ e } S_{\tilde{y}} = S_x \approx 2,4$$

Sendo $\tilde{z} = 2\tilde{x}$, tem-se:

$$\bar{\tilde{z}} = 2\bar{x} = 8,8 \text{ e } S_{\tilde{z}} = 2S_x \approx 4,8$$

22.5 Os jogadores X e Y obtiveram o mesmo valor de desvio-padrão, inferior ao obtido pelo jogador Z , pelo que ganha, dos dois primeiros, o que obteve a maior média, ou seja, o jogador Y .

23. Verdadeiro. Como os elementos da amostra são todos iguais, a média da amostra é igual a qualquer um deles, nomeadamente, igual a x_n . O desvio-padrão da amostra é nulo, porque os desvios dos x_i em relação à média são nulos, logo a soma dos quadrados dos desvios também é e, portanto, o desvio-padrão também é nulo.

24. O intervalo $[16, 34]$ pode ser visto, neste contexto, como $[\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x]$. A percentagem de valores da amostra que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Assim, essa percentagem é, no máximo, 11,2%.

25. A amostra ordenada é $(8, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 15)$.

Como $\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 8}{100} = 4$ é um número inteiro, P_{50} é a média dos valores de ordem 4 e de ordem 5 na amostra ordenada,

$$\text{isto é, } P_{50} = \frac{12 + 12}{2} = 12.$$

Observação: Alternativamente, poder-se-ia considerar a definição de mediana, sabendo-se que coincide com a de percentil 50.

26.1 A amostra ordenada é $(110, 150, 150, 180, 200)$.

26.2

Percentil 30:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{30 \times 5}{100} = 1,5$ não é um número inteiro, P_{30} é o valor de ordem $[1,5] + 1 = 2$ na amostra ordenada. Assim, $P_{30} = 150$ gramas.

Percentil 80:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{80 \times 5}{100} = 4$ é um número inteiro, P_{80} é a média dos valores de ordem 4 e de ordem 5 na amostra ordenada.

Assim, $P_{80} = \frac{180 + 200}{2} = 190$ gramas.

27. A área total do histograma é $5 \times 2 + 5 \times 8 + 5 \times 4 + 5 \times 6 = 100$ (ou $nh = 20 \times 5 = 100$). A área correspondente ao percentil 60 é $\frac{knh}{100} = \frac{60 \times 100}{100} = 60$. A soma das áreas das duas primeiras barras do histograma é 50 e acrescentando a área de mais uma barra ultrapassa-se o valor 60. Portanto, o percentil 60 pertence à classe $[15, 20[$.

O percentil P_k é o valor x que satisfaz a condição $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{knh}{100}$.

Neste caso, tem-se $h = 5$, $L = 3$, $a_L = 15$, $n_L = 4$, $k = 60$ e $n = 20$.

$$5 \times \sum_{i=1}^2 n_i + (x - 15) \times 4 = 60 \Leftrightarrow 5 \times (2 + 8) + 4x - 60 = 60 \Leftrightarrow 4x = 70 \Leftrightarrow x = \frac{70}{4} = 17,5$$

Concluindo, $P_{60} = 17,5$.

28. Sendo x a idade do sexto amigo, tem-se:

$$\frac{15 \times 2 + 16 + 17 \times 2 + x}{6} = 16 \Leftrightarrow \frac{80 + x}{6} = 16 \Leftrightarrow 80 + x = 96 \Leftrightarrow x = 16$$

Opção correta: A

29. A primeira opção é a única na qual:

$$y_2 = y_1 + 1, \quad y_3 = y_2 + 1 \quad \text{e} \quad y_4 = y_3 + 10.$$

Opção correta: A

$$30. \sum_{i=1}^5 d_i = 0 \Leftrightarrow 1 + (-3) + 6 + (-1) + d_5 = 0 \Leftrightarrow d_5 = -3$$

Opção correta: C

31. Sendo $\tilde{y} = 2\tilde{x}$, tem-se:

$$\bar{y} = 2\bar{x} = 2 \times 160 = 320 \quad \text{e} \quad S_y = 2S_x = 2 \times 12 = 24$$

Opção correta: B

$$32. \bar{x} = x_1 \quad \text{e} \quad SS_x = 0$$

Opção correta: B

RESOLUÇÕES

33.1 $\tilde{x} = (100, 110, 120, 130, 140)$

Como $\frac{kn}{100} = \frac{30 \times 5}{100} = 1,5$ não é um número inteiro, P_{30} é o valor de ordem $[1,5] + 1 = 2$ na amostra ordenada. Assim, $P_{30} = 110$.

Opção correta: C

33.2 $\tilde{y} = (105, 110, 115, 120, 125)$

Como $\frac{kn}{100} = \frac{80 \times 5}{100} = 4$ é um número inteiro, P_{80} é a média dos valores de ordem 4 e de ordem 5 na amostra ordenada.

Assim, $P_{80} = \frac{120 + 125}{2} = 122,5$.

Opção correta: A

34. $\tilde{z} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$

P_{50} coincide com a mediana, pelo que é a média dos valores de ordem 4 e de ordem 5 na amostra ordenada.

$P_{50} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$

Opção correta: D

35.1 A área total do histograma é $nh = 16 \times 2 = 32$. A área correspondente ao percentil 70 é $\frac{knh}{100} = \frac{70 \times 16 \times 2}{100} = 22,4$. A soma das áreas das três primeiras barras do histograma é $2 \times 10 = 20$ e acrescentando a área de mais uma barra ultrapassa-se o valor 22,4 ($2 \times 14 = 28$). Portanto, P_{70} pertence à classe $[6, 8[$.

Opção correta: D

35.2

$2 \times \sum_{i=1}^3 n_i + (x - 6) \times 4 = 22,4 \iff 2 \times (2 + 6 + 2) + 4x - 24 = 22,4 \iff$

$\iff 4x = 26,4 \iff x = \frac{26,4}{4} = 6,6$

Opção correta: B

36. $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^8 \tilde{x}_j n_j}{150} = \frac{17 \times 3 + 18 \times 22 + 19 \times 44 + 20 \times 42 + 21 \times 22 + 22 \times 10 + 23 \times 6 + 24 \times 1}{100} = \frac{2967}{150} = 19,78$

$\tilde{x}_j$	n_j	$\tilde{x}_j - \bar{x}$	$(\tilde{x}_j - \bar{x})^2$	$n_j (\tilde{x}_j - \bar{x})^2$
17	3	-2,78	7,7284	23,1852
18	22	-1,78	3,1684	69,7048
19	44	-0,78	0,6084	26,7696
20	42	0,22	0,0484	2,0328
21	22	1,22	1,4884	32,7448
22	10	2,22	4,9284	49,284
23	6	3,22	10,3684	62,2104
24	1	4,22	17,8084	17,8084

$SS_x = \sum_{j=1}^8 n_j (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 = 283,74$

$s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{283,74}{149} \approx 1,90$ e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{283,74}{149}} \approx 1,38$

$$37.1 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{7,5 + 8,7 + 9,2 + 9,8 + 10,9 + 11,1 + 11,2 + 12,8 + 13,5}{9} = \frac{94,7}{9} \approx 10,5 \text{ minutos}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{8,7 + 13,2 + 13,8 + 14,7 + 15,5 + 16,2 + 16,2 + 17,8}{8} = \frac{116,1}{8} \approx 14,5 \text{ minutos}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} \times n_x + \bar{y} \times n_y}{n_x + n_y} = \frac{\frac{94,7}{9} \times 9 + \frac{116,1}{8} \times 8}{9 + 8} = \frac{94,7 + 116,1}{17} = \frac{210,8}{17} = 12,4 \text{ minutos}$$

$$37.2 \quad SS_x = \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = \left(7,5 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(8,7 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(9,2 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(9,8 - \frac{94,7}{9}\right)^2 +$$

$$+ \left(10,9 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(11,1 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(11,2 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(12,8 - \frac{94,7}{9}\right)^2 + \left(13,5 - \frac{94,7}{9}\right)^2 \approx 29,7$$

SS_x está expresso em minutos quadrados e tem 8 graus de liberdade.

$$SS_y = \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = \left(8,7 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(13,2 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(13,8 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(14,7 - \frac{116,1}{8}\right)^2 +$$

$$+ \left(15,5 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(16,2 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(16,2 - \frac{116,1}{8}\right)^2 + \left(17,8 - \frac{116,1}{8}\right)^2 \approx 53,529 \approx 53,5$$

SS_y está expresso em minutos quadrados e tem 7 graus de liberdade.

$$SS_z = \sum_{i=1}^{17} (z_i - \bar{z})^2 = (7,5 - 12,4)^2 + (8,7 - 12,4)^2 + (9,2 - 12,4)^2 + (9,8 - 12,4)^2 + (10,9 - 12,4)^2 + (11,1 - 12,4)^2 +$$

$$+ (11,2 - 12,4)^2 + (12,8 - 12,4)^2 + (13,5 - 12,4)^2 + (8,7 - 12,4)^2 + (13,2 - 12,4)^2 + (13,8 - 12,4)^2 +$$

$$+ (14,7 - 12,4)^2 + (15,5 - 12,4)^2 + (16,2 - 12,4)^2 + (16,2 - 12,4)^2 + (17,8 - 12,4)^2 =$$

$$= 150,68 \approx 150,7$$

SS_z está expresso em minutos quadrados e tem 16 graus de liberdade.

Verifiquemos a igualdade que se segue. Nesta verificação, usaremos 3 casas decimais nas aproximações feitas anteriormente.

$$SS_z = SS_x + SS_y + n_x(\bar{x} - \bar{z})^2 + n_y(\bar{y} - \bar{z})^2$$

$$SS_x + SS_y + n_x(\bar{x} - \bar{z})^2 + n_y(\bar{y} - \bar{z})^2 \approx 29,716 + 53,529 + 9\left(\frac{94,7}{9} - 12,4\right)^2 + 8\left(\frac{116,1}{8} - 12,4\right)^2 \approx 150,681 \approx SS_z$$

$$37.3 \quad S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n_x - 1}} = \sqrt{\frac{29,716}{8}} \approx 1,9$$

$$S_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n_y - 1}} = \sqrt{\frac{53,529}{7}} \approx 2,8$$

Foi observada maior variabilidade nos tempos até ao consumo máximo de oxigénio na passeadeira, pois $S_y > S_x$.

38. A percentagem de dias em que a temperatura mínima foi inferior a zero pode ser majorada pela percentagem de dias em que a temperatura mínima não esteve dentro do intervalo $[0, 20]$. Sendo este intervalo da forma $\left[10 - \frac{10}{3} \times 3, 10 + \frac{10}{3} \times 3\right]$, com $\bar{x} = 10$ e

$$S_x = 3, \text{ a percentagem pedida é inferior a } \frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0,09 = 9\%.$$

39. Consideremos, por exemplo, uma turma com 27 alunos, cujas alturas em metros se encontram registadas na tabela que se segue.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,71	1,69	1,56	1,62	1,68	1,61	1,66	1,77	1,58	1,77

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	1,57	1,63	1,58	1,56	1,6	1,57	1,54	1,75	1,71	1,65

i	21	22	23	24	25	26	27
x_i	1,73	1,55	1,64	1,67	1,74	1,73	1,68

A média das alturas dos 27 alunos é $\bar{x} = 1,65$ metros.

39.1 Recorrendo à função `randInt()` da calculadora, podemos obter aleatoriamente listas de 5 números de ordem para 15 números de ordem entre 1 e 27.

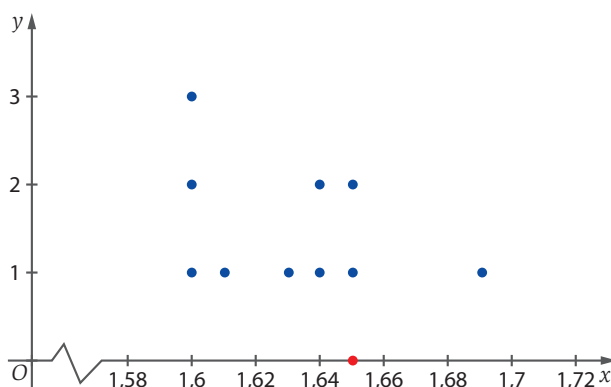
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 9,3,27,6,11 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 4,7,24,11,17 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 17,3,1,1,19 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 19,24,11,4,13 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 27,19,15,18,26 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 19,22,15,10,6 }

<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 27,19,15,18,26 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 19,22,15,10,6 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 17,24,4,13,13 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 8,23,27,14,11 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 7,17,17,22,21 }
<code>randInt(1,27,5)</code>	{ 13,25,17,10,13 }

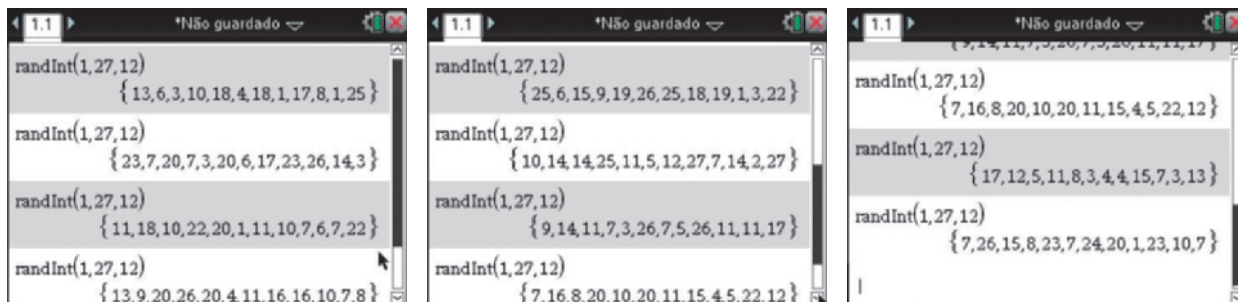
Com base nos resultados obtidos, têm-se então as seguintes amostras e respetivas médias:

(1,58 ; 1,56 ; 1,68 ; 1,61 ; 1,57)	$\bar{x} = 1,60$ m
(1,62 ; 1,66 ; 1,67 ; 1,57 ; 1,54)	$\bar{x} = 1,612 \approx 1,61$ m
(1,54 ; 1,56 ; 1,71 ; 1,71 ; 1,71)	$\bar{x} = 1,646 \approx 1,65$ m
(1,71 ; 1,67 ; 1,57 ; 1,62 ; 1,58)	$\bar{x} = 1,63$ m
(1,68 ; 1,71 ; 1,60 ; 1,75 ; 1,73)	$\bar{x} = 1,694 \approx 1,69$ m
(1,71 ; 1,55 ; 1,60 ; 1,77 ; 1,61)	$\bar{x} = 1,648 \approx 1,65$ m
(1,54 ; 1,67 ; 1,62 ; 1,58 ; 1,58)	$\bar{x} = 1,598 \approx 1,60$ m
(1,77 ; 1,64 ; 1,68 ; 1,56 ; 1,57)	$\bar{x} = 1,644 \approx 1,64$ m
(1,66 ; 1,54 ; 1,54 ; 1,55 ; 1,73)	$\bar{x} = 1,604 \approx 1,60$ m
(1,58 ; 1,74 ; 1,54 ; 1,77 ; 1,58)	$\bar{x} = 1,642 \approx 1,64$ m

Representemos as médias destas amostras e a média de todas as alturas (a vermelho) num diagrama de pontos.



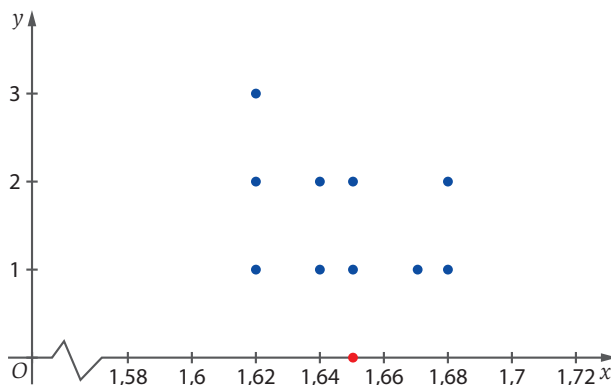
39.2 Repetindo o procedimento agora para amostras de 12 elementos...



Com base nos resultados obtidos, têm-se então as seguintes amostras e respetivas médias:

(1,58 ; 1,61 ; 1,56 ; 1,77 ; 1,75 ; 1,62 ; 1,75 ; 1,71 ; 1,54 ; 1,77 ; 1,71 ; 1,74)	$\bar{x} = 1,68 \text{ m}$
(1,64 ; 1,66 ; 1,65 ; 1,66 ; 1,56 ; 1,65 ; 1,61 ; 1,54 ; 1,64 ; 1,73 ; 1,56 ; 1,56)	$\bar{x} \approx 1,62 \text{ m}$
(1,57 ; 1,75 ; 1,77 ; 1,55 ; 1,65 ; 1,71 ; 1,57 ; 1,77 ; 1,66 ; 1,61 ; 1,66 ; 1,55)	$\bar{x} \approx 1,65 \text{ m}$
(1,58 ; 1,58 ; 1,65 ; 1,73 ; 1,65 ; 1,62 ; 1,57 ; 1,57 ; 1,57 ; 1,77 ; 1,66 ; 1,77)	$\bar{x} \approx 1,64 \text{ m}$
(1,74 ; 1,61 ; 1,60 ; 1,58 ; 1,71 ; 1,73 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,71 ; 1,71 ; 1,56 ; 1,55)	$\bar{x} \approx 1,67 \text{ m}$
(1,77 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,74 ; 1,57 ; 1,68 ; 1,63 ; 1,68 ; 1,66 ; 1,56 ; 1,69 ; 1,68)	$\bar{x} \approx 1,65 \text{ m}$
(1,58 ; 1,56 ; 1,57 ; 1,66 ; 1,56 ; 1,73 ; 1,66 ; 1,68 ; 1,73 ; 1,57 ; 1,57 ; 1,54)	$\bar{x} \approx 1,62 \text{ m}$
(1,66 ; 1,57 ; 1,77 ; 1,65 ; 1,77 ; 1,65 ; 1,57 ; 1,60 ; 1,62 ; 1,68 ; 1,55 ; 1,63)	$\bar{x} \approx 1,64 \text{ m}$
(1,54 ; 1,63 ; 1,68 ; 1,57 ; 1,77 ; 1,56 ; 1,62 ; 1,62 ; 1,60 ; 1,66 ; 1,56 ; 1,58)	$\bar{x} \approx 1,62 \text{ m}$
(1,66 ; 1,73 ; 1,60 ; 1,77 ; 1,64 ; 1,66 ; 1,67 ; 1,65 ; 1,71 ; 1,64 ; 1,77 ; 1,66)	$\bar{x} = 1,68 \text{ m}$

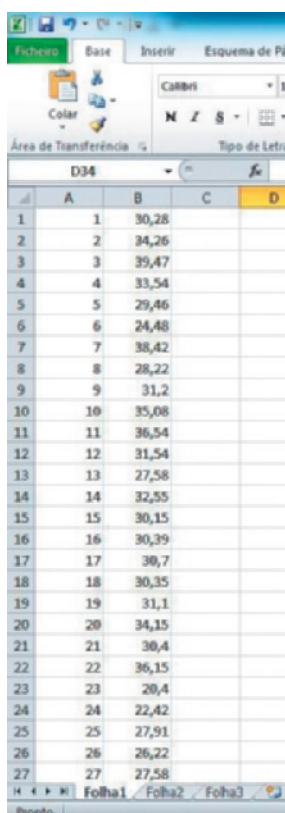
Representemos as médias destas amostras e a média de todas as alturas (a vermelho) num diagrama de pontos.



As médias do grupo de amostras de maior dimensão apresenta-se mais concentrado em torno da média populacional, o que significa que quanto maior a dimensão da amostra mais preciso é o valor da média obtida.

RESOLUÇÕES

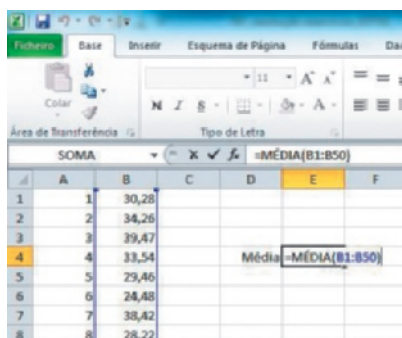
40.1 Colocando os dados em coluna por exemplo, obtém-se:



A screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Ficheiro' (File) menu is open, showing options like 'Base', 'Inserir', 'Esquema de Página', 'Fórmulas', and 'Dados'. The 'Base' (Home) tab is selected. The 'Colar' (Paste) button is highlighted. The 'Área de Transferência' (Transfer Area) is set to 'D34'. The 'Tipo de Letra' (Font Type) is set to 'Calibri'. The spreadsheet shows data in column B, with values ranging from 1 to 27. The formula bar shows '=MÉDIA(B1:B50)'. The status bar at the bottom indicates 'Folha1', 'Folha2', and 'Folha3'.

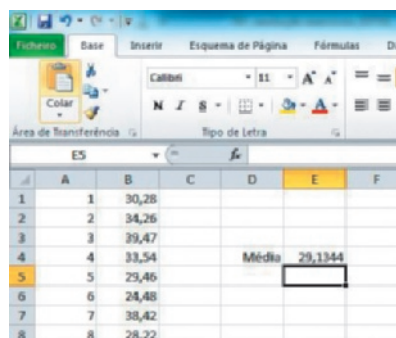
	A	B	C	D
1	1	30,28		
2	2	34,26		
3	3	39,47		
4	4	33,54		
5	5	29,46		
6	6	24,48		
7	7	38,42		
8	8	28,22		
9	9	31,2		
10	10	35,08		
11	11	36,54		
12	12	31,54		
13	13	27,58		
14	14	32,55		
15	15	30,15		
16	16	30,39		
17	17	30,7		
18	18	30,35		
19	19	31,1		
20	20	34,15		
21	21	36,4		
22	22	36,15		
23	23	20,4		
24	24	22,42		
25	25	27,91		
26	26	26,22		
27	27	27,58		

40.2 Para a média tem-se:



A screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Fórmulas' (Formulas) menu is open, showing options like 'SOMA', 'MÉDIA', and 'DESV.PAD'. The 'MÉDIA' button is highlighted. The 'Área de Transferência' (Transfer Area) is set to 'B1:B50'. The 'Tipo de Letra' (Font Type) is set to 'Calibri'. The spreadsheet shows data in column B, with values ranging from 1 to 27. The formula bar shows '=MÉDIA(B1:B50)'. The status bar at the bottom indicates 'Folha1', 'Folha2', and 'Folha3'.

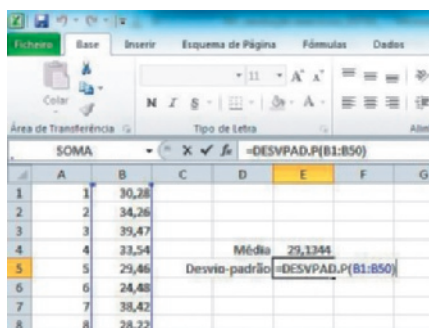
	A	B	C	D	E	F
1	1	30,28				
2	2	34,26				
3	3	39,47				
4	4	33,54				
5	5	29,46				
6	6	24,48				
7	7	38,42				
8	8	28,22				



A screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Fórmulas' (Formulas) menu is open, showing options like 'SOMA', 'MÉDIA', and 'DESV.PAD'. The 'MÉDIA' button is highlighted. The 'Área de Transferência' (Transfer Area) is set to 'B1:B50'. The 'Tipo de Letra' (Font Type) is set to 'Calibri'. The spreadsheet shows data in column B, with values ranging from 1 to 27. The formula bar shows '=MÉDIA(B1:B50)'. The status bar at the bottom indicates 'Folha1', 'Folha2', and 'Folha3'.

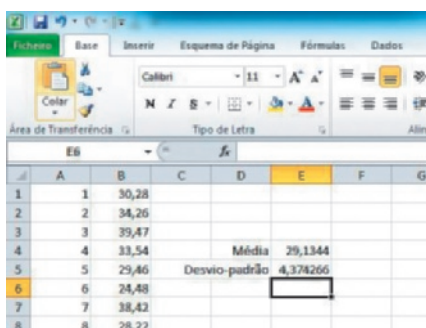
	A	B	C	D	E	F
1	1	30,28				
2	2	34,26				
3	3	39,47				
4	4	33,54				
5	5	29,46				
6	6	24,48				
7	7	38,42				
8	8	28,22				

Para o desvio-padrão tem-se:



A screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Fórmulas' (Formulas) menu is open, showing options like 'SOMA', 'MÉDIA', and 'DESV.PAD'. The 'DESV.PAD' button is highlighted. The 'Área de Transferência' (Transfer Area) is set to 'B1:B50'. The 'Tipo de Letra' (Font Type) is set to 'Calibri'. The spreadsheet shows data in column B, with values ranging from 1 to 27. The formula bar shows '=DESV.PAD.P(B1:B50)'. The status bar at the bottom indicates 'Folha1', 'Folha2', and 'Folha3'.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	30,28					
2	2	34,26					
3	3	39,47					
4	4	33,54					
5	5	29,46					
6	6	24,48					
7	7	38,42					
8	8	28,22					



A screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Fórmulas' (Formulas) menu is open, showing options like 'SOMA', 'MÉDIA', and 'DESV.PAD'. The 'DESV.PAD' button is highlighted. The 'Área de Transferência' (Transfer Area) is set to 'B1:B50'. The 'Tipo de Letra' (Font Type) is set to 'Calibri'. The spreadsheet shows data in column B, with values ranging from 1 to 27. The formula bar shows '=DESV.PAD.P(B1:B50)'. The status bar at the bottom indicates 'Folha1', 'Folha2', and 'Folha3'.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	30,28					
2	2	34,26					
3	3	39,47					
4	4	33,54					
5	5	29,46					
6	6	24,48					
7	7	38,42					
8	8	28,22					

40.3 Recorrendo à função ALEATÓRIOENTRE(inferior;superior) podemos obter de forma aleatória cada um dos 15 números de ordem para formar a amostra pedida.

Por exemplo:

49, 2, 42, 31, 11, 50, 37, 16, 13, 48, 47, 3, 6, 35, 5

A amostra correspondente é:

(30,83; 34,26; 29,33; 21,78; 36,54; 23,85; 31,84; 30,39; 27,58; 25,85; 26,86; 39,47; 24,48; 23,3; 29,46)

Recorrendo à folha de cálculo, obtém-se:

$\bar{x} \approx 29,05$ kg e $s_x \approx 5,04$ kg.

	A	B	C	D	E	F
1	30,83					
2	34,26					
3	29,33					
4	21,78					
5	36,54					
6	23,85			Média 29,05467		
7	31,84			Desvio-padrão 5,041628		
8	30,39					
9	27,58					
10	25,85					
11	26,86					
12	39,47					
13	24,48					
14	23,3					
15	29,46					

	A	B	C	D	E
1	30,83				
2	34,26				
3	29,33				
4	21,78				
5	36,54				
6	23,85			Média 29,05467	
7	31,84			Desvio-padrão 5,041628	
8	30,39				
9	27,58				
10	25,85				
11	26,86				
12	39,47				
13	24,48				
14	23,3				
15	29,46				

A média da amostra está muito próxima da média da população. O desvio-padrão da amostra afasta-se um pouco, em termos relativos, do desvio-padrão da população.

40.4 Temos, por exemplo, os seguintes números de ordem:

23, 17, 14, 5, 45, 50, 4, 43, 15, 2, 29, 40, 13, 16, 9, 47, 15, 43, 33, 22, 30, 37, 6, 29, 46, 46, 43, 11, 22, 16

A amostra correspondente é:

(20,4; 30,7; 32,55; 29,46; 28,82; 23,85; 33,54; 25,59; 30,15; 34,26; 22,58; 29,7; 27,58; 30,39; 31,2; 26,86; 30,15; 25,59; 29,6; 36,15; 30,14; 31,84; 24,48; 22,58; 28,4; 28,4; 25,59; 36,54; 36,15; 30,39)

Recorrendo à folha de cálculo, obtém-se:

$\bar{x} \approx 29,12$ kg e $s_x \approx 4,11$ kg.

	A	B	C	D	E
1	20,4				
2	30,7				
3	32,55				
4	29,46				
5	28,82			Média 29,123	
6	23,85			Desvio-padrão 4,10963	
7	33,54				
8	25,59				
9	30,15				
10	34,26				
11	22,58				
12	29,7				
13	27,58				
14	30,39				
15	31,2				
16	26,86				
17	30,15				
18	25,59				
19	29,6				
20	36,15				
21	30,14				
22	31,84				
23	24,48				
24	22,58				
25	28,4				
26	28,4				
27	25,59				
28	36,54				
29	36,15				
30	30,39				

A média desta amostra está muito próxima da média da população e da média da amostra da alínea anterior. O desvio-padrão desta amostra aproxima-se mais do desvio-padrão da população, o que teoricamente é de esperar com o aumento da dimensão da amostra.

41.1 A amostra ordenada é:

(5, 6, 7, 7, 8, 9, 11, 12, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 29, 32, 35, 36, 37, 41, 44, 44, 45, 49, 62, 65)

Percentil 25:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{25 \times 32}{100} = 8$ é um número inteiro, P_{25} é a média dos valores de ordem 8 e de ordem 9 na amostra ordenada, isto é,

$$P_{25} = \frac{12 + 12}{2} = 12 \text{ minutos.}$$

Percentil 50:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 32}{100} = 16$ é um número inteiro, P_{50} é a média dos valores de ordem 16 e de ordem 17 na amostra ordenada, isto é,

$$P_{50} = \frac{19 + 20}{2} = 19,5 \text{ minutos.}$$

Percentil 75:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{75 \times 32}{100} = 24$ é um número inteiro, P_{75} é a média dos valores de ordem 24 e de ordem 25 na amostra ordenada, isto é,

$$P_{75} = \frac{36 + 37}{2} = 36,5 \text{ minutos.}$$

41.2 Trata-se do percentil 70. Como $\frac{kn}{100} = \frac{70 \times 32}{100} = 22,4$ não é um número inteiro, P_{70} é o valor de ordem $[22,4] + 1 = 23$ na amostra ordenada.

$P_{70} = 35$ minutos.

41.3 Sendo $x_{24} = 36$, os percentis correspondentes são os valores de k tais que $\frac{kn}{100} \in]23, 24[$.

$$23 < \frac{32k}{100} < 24 \Leftrightarrow \frac{23 \times 100}{32} < k < \frac{24 \times 100}{32} \Leftrightarrow 71,875 < k < 75$$

O percurso de 36 minutos pode corresponder aos seguintes percentis: P_{72} , P_{73} e P_{74} .

42.1 A amostra ordenada é:

(6, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 12, 13, 13, 14, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 23, 23, 25, 31, 33, 34, 34, 37, 37, 37, 38, 41, 43, 46, 47)

Percentil 20:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{20 \times 32}{100} = 6,4$ não é um número inteiro, P_{20} é o valor de ordem $[6,4] + 1 = 7$ na amostra ordenada. $P_{20} = 12$ metros.

Percentil 60:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{60 \times 32}{100} = 19,2$ não é um número inteiro, P_{60} é o valor de ordem $[19,2] + 1 = 20$ na amostra ordenada. $P_{60} = 25$ metros.

Percentil 90:

Como $\frac{kn}{100} = \frac{90 \times 32}{100} = 28,8$ não é um número inteiro, P_{90} é o valor de ordem $[28,8] + 1 = 29$ na amostra ordenada. $P_{90} = 41$ metros.

42.2 A altura da árvore com menor altura de entre as 20% com maior altura corresponde ao percentil 80 desta amostra.

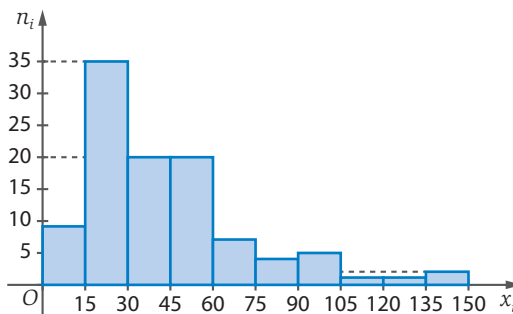
Como $\frac{kn}{100} = \frac{80 \times 32}{100} = 25,6$ não é um número inteiro, P_{80} é o valor de ordem $[25,6] + 1 = 26$ na amostra ordenada. $P_{80} = 37$ metros.

42.3 Sendo $x_{11} = 14$, os percentis correspondentes são os valores de k tais que $\frac{kn}{100} \in]10, 11[$.

$$10 < \frac{32k}{100} < 11 \Leftrightarrow \frac{10 \times 100}{32} < k < \frac{11 \times 100}{32} \Leftrightarrow 31,25 < k < 34,375$$

A árvore com 14 metros de altura pode corresponder aos seguintes percentis: P_{32} , P_{33} e P_{34} .

43.



A área total do histograma é $nh = 104 \times 15 = 1560$. A área correspondente ao percentil 25 é $\frac{knh}{100} = \frac{25 \times 1560}{100} = 390$. Este valor é atingido com a soma da área da primeira barra do histograma e parte da área da segunda. Portanto, o percentil 25 pertence à classe $[15, 30[$.

O percentil P_k é o número real x que satisfaz a condição $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{knh}{100}$.

Neste caso, tem-se $h = 15$, $L = 2$, $a_L = 15$, $n_L = 35$, $k = 25$ e $n = 104$.

$$15 \times \sum_{i=1}^1 n_i + (x - 15) \times 35 = 390 \Leftrightarrow 15 \times 9 + 35x - 525 = 390 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 35x = 780 \Leftrightarrow x = \frac{780}{35} \approx 22,3$$

$P_{25} \approx 22,3$ meses.

A área correspondente à mediana (percentil 50) é $\frac{knh}{100} = \frac{50 \times 1560}{100} = 780$ e obtém-se para um valor da classe $[30, 45[$ ($L = 3$). Tem-se, neste caso:

$h = 15$, $L = 3$, $a_L = 30$, $n_L = 20$, $k = 50$ e $n = 104$.

$$15 \times \sum_{i=1}^2 n_i + (x - 30) \times 20 = 780 \Leftrightarrow 15(9 + 35) + 20x - 600 = 780 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x = 720 \Leftrightarrow x = \frac{720}{20} = 36$$

$P_{50} = 36$ meses.

A área correspondente ao percentil 75 é $\frac{knh}{100} = \frac{75 \times 1560}{100} = 1170$ e obtém-se para um valor da classe $[45, 60[$ ($L = 4$). Tem-se, neste caso:

$h = 15$, $L = 4$, $a_L = 45$, $n_L = 20$, $k = 75$ e $n = 104$.

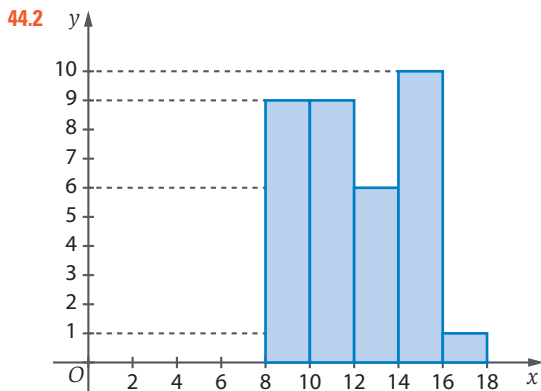
$$15 \times \sum_{i=1}^3 n_i + (x - 45) \times 20 = 1170 \Leftrightarrow 15(9 + 35 + 20) + 20x - 900 = 1170 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x = 1110 \Leftrightarrow x = \frac{1110}{20} = 55,5$$

$P_{75} = 55,5$ meses.

44.1

classes	n_i
$[8, 10[$	9
$[10, 12[$	9
$[12, 14[$	6
$[14, 16[$	10
$[16, 18[$	1



44.3 A área total do histograma é $nh = 35 \times 2 = 70$.

A área correspondente ao **percentil 10** é $\frac{knh}{100} = \frac{10 \times 70}{100} = 7$ e obtém-se para um valor da classe $[8, 10[$ ($L = 1$).

Tem-se, neste caso: $h = 2$, $L = 1$, $a_L = 8$, $n_L = 9$, $k = 10$ e $n = 35$.

$$(x - 8) \times 9 = 7 \Leftrightarrow 9x = 79 \Leftrightarrow x = \frac{79}{9} = 8,8$$

$$P_{10} = 8,8 \text{ kg}$$

A área correspondente ao **percentil 15** é $\frac{knh}{100} = \frac{15 \times 70}{100} = 10,5$ e obtém-se para um valor da classe $[8, 10[$ ($L = 1$).

Tem-se, neste caso: $h = 2$, $L = 1$, $a_L = 8$, $n_L = 9$, $k = 15$ e $n = 35$.

$$(x - 8) \times 9 = 10,5 \Leftrightarrow 9x - 72 = 10,5 \Leftrightarrow x = \frac{82,5}{9} \approx 9,2$$

$$P_{15} \approx 9,2 \text{ kg}$$

A área correspondente ao **percentil 50** é $\frac{knh}{100} = \frac{50 \times 70}{100} = 35$ e obtém-se para um valor da classe $[10, 12[$ ($L = 2$).

Tem-se, neste caso: $h = 2$, $L = 2$, $a_L = 10$, $n_L = 9$, $k = 50$ e $n = 35$.

$$2 \times \sum_{i=1}^1 n_i + (x - 10) \times 9 = 35 \Leftrightarrow 2 \times 9 + 9x - 90 = 35 \Leftrightarrow x = \frac{107}{9} \approx 11,9$$

$$P_{50} \approx 11,9 \text{ kg}$$

A área correspondente ao **percentil 75** é $\frac{knh}{100} = \frac{75 \times 70}{100} = 52,5$ e obtém-se para um valor da classe $[14, 16[$ ($L = 4$).

Tem-se, neste caso: $h = 2$, $L = 4$, $a_L = 14$, $n_L = 10$, $k = 75$ e $n = 35$.

$$2 \times \sum_{i=1}^3 n_i + (x - 14) \times 10 = 52,5 \Leftrightarrow 2 \times (9 + 9 + 6) + 10x - 140 = 52,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48 + 10x - 140 = 52,5 \Leftrightarrow x = \frac{144,5}{10} = 14,45$$

$$P_{75} \approx 14,5 \text{ kg}$$

A área correspondente ao **percentil 85** é $\frac{knh}{100} = \frac{85 \times 70}{100} = 59,5$ e obtém-se para um valor da classe $[14, 16[$ ($L = 4$).

Tem-se, neste caso: $h = 2$, $L = 4$, $a_L = 14$, $n_L = 10$, $k = 85$ e $n = 35$.

$$2 \times \sum_{i=1}^3 n_i + (x - 14) \times 10 = 59,5 \Leftrightarrow 2 \times (9 + 9 + 6) + 10x - 140 = 59,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48 + 10x - 140 = 59,5 \Leftrightarrow x = \frac{151,5}{10} = 15,15$$

$$P_{85} \approx 15,2 \text{ kg}$$

44.4 (Considerando o histograma)

11,4 pertence à classe $[10, 12[$, a que corresponde $L = 2$. Tem-se ainda $h = 2$, $a_L = 10$, $n_L = 10$ e $n = 35$. O percentil k a que pertence o dado 11,4 é a solução da seguinte equação:

$$2 \times \sum_{i=1}^1 n_i + (11,4 - 10) \times 9 = \frac{70k}{100} \Leftrightarrow 2 \times 9 + 1,4 \times 9 = 0,7k \Leftrightarrow k = \frac{30,6}{0,7} = \frac{306}{7} \approx 44$$

11,4 pertence ao percentil 44.

44.5 25 crianças.**44.6** Trata-se do percentil 20.

A área correspondente ao percentil 20 é $\frac{knh}{100} = \frac{20 \times 70}{100} = 14$ e obtém-se para um valor da classe $[8, 10[$ ($L = 1$).

Tem-se, neste caso:

$h = 2$, $L = 1$, $a_L = 8$, $n_L = 9$, $k = 20$ e $n = 35$.

$$(x - 8) \times 9 = 14 \Leftrightarrow 9x - 72 = 14 \Leftrightarrow x = \frac{86}{9} \approx 9,6$$

A criança com massa mais elevada do conjunto das que têm as massas 20% mais baixas é que tem 9,6 kg de massa.

44.7 Os percentis 10 e 15 da amostra têm valores inferiores aos valores estabelecidos pela OMS, no entanto os percentis 50 e 85 da amostra apresentam valores superiores.

TESTE DA PÁGINA 213

$$1. \sum_{i=1}^n (2x_i + 3) = 2 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 3 = 2A + 3n$$

Opção correta: A

$$2. \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^6 \tilde{x}_j n_j}{25} = \frac{1 \times 4 + 3 \times 3 + 5 \times 7 + 7 \times 5 + 9 \times 2 + 11 \times 4}{25} = \frac{145}{25} = 5,8$$

Opção correta: B

3. Como $\tilde{y} = 3\tilde{x}$, tem-se:

$$SS_y = 3^2 \times SS_x = 9 \times \frac{296}{5} = \frac{2664}{5}$$

Opção correta: D

4. Como o valor do dado acrescentado coincide com o valor da média, o desvio-padrão da nova amostra terá de ser necessariamente inferior. Assim, dos valores apresentados, apenas podemos considerar 2,8.

Opção correta: A

5. A amostra ordenada é $\tilde{z} = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11)$.

Como $\frac{kn}{100} = \frac{30 \times 10}{100} = 3$ é um número inteiro, P_{30} é a média dos valores de ordem 3 e de ordem 4 na amostra ordenada.

$$\text{Assim, } P_{30} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5.$$

Opção correta: D

$$6.1 \sum_{i=1}^{25} x_i$$

$$6.2 \sum_{n=1}^{20} n^n$$

$$6.3 \sum_{i=3}^n (a_i - b_i)$$

$$7.1 \sum_{i=1}^5 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$$

$$7.2 \sum_{i=1}^3 5i^2 = 5 \times \sum_{i=1}^3 i^2 = 5 \times (1^2 + 2^2 + 3^2) = 5 \times 15 = 70$$

$$7.3 \sum_{i=3}^6 (2^{i-2} - 1) = \sum_{i=3}^6 2^{i-2} - \sum_{i=3}^6 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 1 \times 4 = 26$$

$$7.4 \sum_{i=1}^{10} (5 + 4i) = \sum_{i=1}^{10} 5 + 4 \times \sum_{i=1}^{10} i = 5 \times 10 + 4 \times (1 + 2 + \dots + 9 + 10) = 50 + 4 \times 55 = 270$$

8.1

$$\text{a. } \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^7 \tilde{x}_j n_j}{50} = \frac{0 \times 13 + 1 \times 15 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 2 + 6 \times 1}{50} = \frac{85}{50} = 1,7$$

b.

$\tilde{x}_j$	n_j	$\tilde{x}_j - \bar{x}$	$(\tilde{x}_j - \bar{x})^2$	$n_j (\tilde{x}_j - \bar{x})^2$
0	13	-1,7	2,89	37,57
1	15	-0,7	0,49	7,35
2	8	0,3	0,09	0,72
3	6	1,3	1,69	10,14
4	5	2,3	5,29	26,45
5	2	3,3	10,89	21,78
6	1	4,3	18,49	18,49

$$SS_x = \sum_{j=1}^7 n_j (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 = 122,5$$

$$\text{c. } s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{122,5}{49} = 2,5$$

$$\text{d. } s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{2,5} \approx 1,6$$

8.2 Como $\tilde{x}' = \tilde{x} + 1$, tem-se $SS_{x'} = SS_x = 122,5$.

$$\text{9. } \bar{z} = \frac{\bar{x} \times n_x + \bar{y} \times n_y}{n_x + n_y} = \frac{235 \times 15 + 245 \times 20}{35} = \frac{8425}{35} \approx 240,7 \text{ g}$$

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{n_x - 1} \Leftrightarrow SS_x = (n_x - 1) s_x^2 \Leftrightarrow SS_x = 254 \times 14 = 3556$$

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{n_y - 1} \Leftrightarrow SS_y = (n_y - 1) s_y^2 \Leftrightarrow SS_y = 267 \times 19 = 5073$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n_x \bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = SS_x + n_x \bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 3556 + 15 \times 235^2 = 831931$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n_y \bar{y}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = SS_y + n_y \bar{y}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = 5073 + 20 \times 245^2 = 1205573$$

$$SS_z = \sum_{i=1}^n z_i^2 - n_z \bar{z}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - n_z \bar{z}^2 = 831931 + 1205573 - 35 \times \left(\frac{8425}{35}\right)^2 \approx 9486,143$$

$$s_z^2 = \frac{SS_z}{n_z - 1} \approx \frac{9486,143}{34} \approx 279,0 \text{ g}^2$$

Observação: A determinação de SS_z poderia ter sido feita recorrendo à fórmula que se apresentou no problema 37 da página 207:

$$SS_z = SS_x + SS_y + n_x (\bar{x} - \bar{z})^2 + n_y (\bar{y} - \bar{z})^2.$$

10. A área total do histograma é $nh = 20 \times 100 = 2000$.

A área correspondente ao percentil 25 é $\frac{knh}{100} = \frac{25 \times 2000}{100} = 500$, pelo que o percentil 25 pertence à classe $[100, 120[$, a que corresponde um valor de área de 600.

O percentil P_k é o valor x que satisfaz a condição $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{knh}{100}$.

Neste caso, tem-se $h = 20$, $L = 1$, $a_L = 100$, $n_L = 30$, $k = 25$ e $n = 100$.

$$(x - 100) \times 30 = 500 \iff 30x - 3000 = 500 \iff 30x = 3500 \iff x = \frac{3500}{30} = 116,6$$

$$P_{25} = 116,6$$

A área correspondente ao percentil 50 é $\frac{knh}{100} = \frac{50 \times 2000}{100} = 1000$, que corresponde à soma das áreas das duas primeiras barras do histograma, pelo que P_{50} fica no extremo superior da classe $[120, 140[$, isto é, $P_{50} = 140$.

11. A área total do histograma é $30 + 50 + 40 + 10 + 60 + 10 = 200$.

A área correspondente ao percentil 70 é $\frac{knh}{100} = \frac{70 \times 200}{100} = 140$.

A soma das áreas das quatro primeiras barras do histograma é 130, inferior a 140. Acrescentando a área de mais uma barra ultrapassa-se o valor 140. Portanto, o percentil 70 pertence à classe $[40, 50[$.

O percentil P_k é o valor x que satisfaz a condição $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{knh}{100}$.

Neste caso, tem-se $h = 10$, $L = 5$, $a_L = 40$, $n_L = 6$, $k = 70$ e $n = 20$.

$$10 \times \sum_{i=1}^4 n_i + (x - 40) \times 6 = 140 \iff 10 \times (3 + 5 + 4 + 1) + 6x - 240 = 140 \iff 6x = 250 \iff x = \frac{250}{6} \approx 41,7$$

$$P_{70} \approx 41,6$$

TESTE GLOBAL (Pág. 216)

1. A condição $x^2 + 2 > 0$ é universal. A disjunção de uma condição universal com quaisquer outras é uma condição universal, pelo que esta disjunção é equivalente à condição $x^2 + 2 > 0$.

Opção correta: D

2. $\overline{A} = \overline{[-1, 3]} =]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$

$$\overline{A} \cap B = (]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[) \cap]-\infty, 2] =]-\infty, -1[$$

Opção correta: A

3. $\begin{cases} x = \lambda \\ 2y = 1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \lambda \left(1, \frac{3}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$

As coordenadas dos vetores diretores da reta r são da forma $k \left(1, \frac{3}{2}\right)$, com $k \neq 0$. Portanto, o vetor $\vec{r}$ pode ter coordenadas $(2, 3)$.

Opção correta: A

4. $(2x - \sqrt{5})(4x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{5} \vee 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$
 $4x^2 + 1 = 0$
impossível

Opção correta: A

5. O plano de equação $z = 3$ é paralelo ao plano coordenado xOy . O plano de equação $y = 2$ é paralelo ao plano coordenado xOz . Assim, a reta de equação $z = 3 \wedge y = 2$ é paralela ao eixo coordenado Ox e a cada um dos planos coordenados atrás mencionados.

Opção correta: B

6. $-3(x-1)^2 + c = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 + c = 0$

O binómio discriminante desta equação é igual a $6^2 - 4 \times (-3) \times (-3 + c)$ que, simplificando, fica:

$$36 - 36 + 12c = 12c$$

Assim, a função tem apenas um zero se, e só se, $12c = 0$, ou seja, $c = 0$.

Opção correta: A

7. $f(-1) + f^{-1}(4) = 2 + 2 = 4$

Opção correta: D

8. $\sum_{i=1}^5 (3 + i) = 5k + \sum_{i=1}^5 i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 3 + \sum_{i=1}^5 i = 5k + \sum_{i=1}^5 i \Leftrightarrow 5 \times 3 = 5k \Leftrightarrow 3 = k$

Opção correta: C

9. $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}) = 0$

Opção correta: C

- 10.1 $(p \vee q) \wedge \sim r$

- 10.2 $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$

11. Recorrendo a uma tabela de verdade tem-se:

p	q	r	$\sim p \wedge r$	$q \vee \sim r$	$\sim p \wedge r \Rightarrow q \vee \sim r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

Como a única linha em que a proposição $\sim p \wedge r \Rightarrow q \vee \sim r$ tem valor lógico falso é a penúltima, conclui-se que a proposição r tem valor lógico verdadeiro.

12.1 $V = \frac{1}{3} A_b \times h$

$$24 = \frac{1}{3} \times 4 \times 6 \times h \Leftrightarrow h = 2$$

A cota de V corresponde à altura da pirâmide, logo é 2.

12.2

a. $E(2, 0, 0); F(0, 3, 0)$

$$\overline{VF} = d(V, F) = \sqrt{(0-2)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{VE} = d(V, E) = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

b. $A_{\text{total}} = A_{[ABCD]} + 2A_{[ABV]} + 2A_{[BCV]} = 4 \times 6 + 2 \times \frac{6 \times 2\sqrt{5}}{2} + 2 \times \frac{4 \times 5}{2} = 44 + 12\sqrt{5}$

c. $M_{[VD]} \left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{0+(-3)}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = M_{[VD]} \left(-1, -\frac{3}{2}, 2 \right)$

d. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8z + 16$$

$$\Leftrightarrow -8z + 16 = -4x + 4 - 6y + 9 \Leftrightarrow -4x - 6y + 8z - 3 = 0$$

e. Centro: $M_{[VB]} \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = M_{[VB]} \left(1, \frac{3}{2}, 2 \right)$

$$\text{Raio: } \frac{d(V, B)}{2} = \frac{\sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2 + (4-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Inequação da esfera: } (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 \leq \frac{29}{4}$$

13.1 Sendo $P(x)$ divisível por $x - \frac{1}{2}$ e por $x + 1$, tem-se $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e $P(-1) = 0$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m \times \frac{1}{2} + n = -\frac{7}{2} + \frac{m}{2} + n$$

$$P(-1) = 4 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)^2 + m \times (-1) + n = -20 - m + n$$

$$\begin{cases} -\frac{7}{2} + \frac{m}{2} + n = 0 \\ -20 - m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n = 7 \\ n = 20 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2(20 + m) = 7 \\ m + 40 + 2m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m = -33 \\ m = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ n = 20 + (-11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ n = 9 \end{cases}$$

13.2

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -16 & -11 & 9 \\ -1 & & -4 & 20 & -9 \\ \hline & 4 & -20 & 9 & 0 \end{array}$$

Determinemos as raízes de $Q(x) = 4x^2 - 20x - 9$.

$$4x^2 - 20x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 4 \times (-9)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{135}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{20 \pm 16}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{9}{2}$$

O teorema fundamental da Álgebra garante que:

$$P(x) = 4 \left(x - \frac{9}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 1)$$

14.1 As semirretas que definem o gráfico de f têm declives -2 e 2 e origem comum no ponto de coordenadas $(1, -1)$. O gráfico de f pode-se obter do gráfico da função definida por $g(x) = |x|$ através de uma translação de vetor de coordenadas $(1, -1)$ seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2 . Assim, tem-se $f(x) = 2g(x - 1) - 1 = 2|x - 1| - 1$.

14.2 $2|x - 1| - 1 < 5 \Leftrightarrow |x - 1| < 3 \Leftrightarrow x - 1 < 3 \wedge x - 1 > -3 \Leftrightarrow x < 4 \wedge x > -2$

Conjunto-solução: $] -2, 4[$

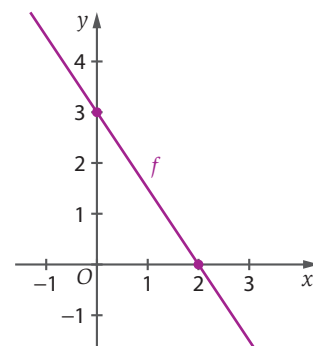
15.1

a. O declive reta é $m = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$. A ordenada na origem é 3 .

A expressão analítica de função f é: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$

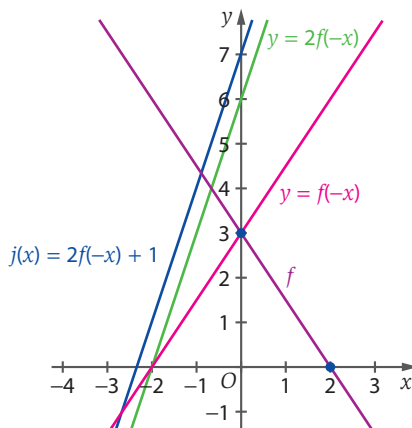
b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x + 1) = 0 \Leftrightarrow -\left(-\frac{3}{2}(x + 1) + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x + 1) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 3 \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$$



- c. O contradomínio da função definida por $y = |f(x)|$ é $[0, +\infty[$; o contradomínio da função definida por $y = -|f(x)|$ é $]-\infty, 0]$; o contradomínio da função definida por $h(x) = -|f(x)| + 2$ é $]-\infty, 2]$.

15.2 Vamos obter e representar sucessivamente os gráficos das funções a seguir definidas: $y = f(-x)$; $y = 2f(-x)$; $j(x) = 2f(-x) + 1$.



16.1

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 3r = \pi r^3$$

Da última igualdade obtém-se $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

16.2 $A_b = 2\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow_{r>0} r = \sqrt{2}$

$$V = \pi (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

17.1 O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OQ} + \overline{QP} + \overline{PO}$.

$$\overline{OQ} = z$$

$$\overline{PO}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow_{\overline{PO}>0} \overline{PO} = 5$$

$$\overline{QP}^2 = (z-3)^2 + 4^2 \Leftrightarrow_{\overline{QP}>0} \overline{QP} = \sqrt{(z-3)^2 + 4^2} \Leftrightarrow \overline{QP} = \sqrt{z^2 - 6z + 25}$$

Assim, $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$.

17.2

$$f(z) = 16 \Leftrightarrow z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 11 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{z^2 - 6z + 25})^2 = (11 - z)^2 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 25 = 121 - 22z + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16z = 96 \Leftrightarrow z = 6$$

Verificação:

$$f(6) = 6 + 5 + \sqrt{6^2 - 6 \times 6 + 25} = 11 + \sqrt{25} = 11 + 5 = 16$$

A cota do ponto Q é 6.

18.1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\begin{aligned} SS_x &= \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2} \end{aligned}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{6-1}} = \sqrt{\frac{\frac{35}{2}}{5}} = \sqrt{\frac{35}{10}} = \sqrt{3,5}$$

18.2 Sendo $\tilde{y} = \tilde{x} + 3$, tem-se:

- $\bar{\tilde{y}} = \bar{\tilde{x}} + 3 = 6,5$
- $s_{\tilde{y}} = s_{\tilde{x}} = \sqrt{3,5}$

Sendo $\tilde{z} = 2\tilde{y}$, tem-se:

- $\bar{\tilde{z}} = 2\bar{\tilde{y}} = 13$
- $s_{\tilde{z}} = 2s_{\tilde{y}} = 2\sqrt{3,5}$