

RESOLUÇÕES

Funções Reais de Variável Real

Funções Reais de Variável Real

1. FUNÇÕES: GENERALIDADES

1.

- 1.1** A correspondência entre cada quadrado e a sua área é uma função porque a cada quadrado corresponde a sua área, que é única.
- 1.2** A correspondência entre o dia da semana e a temperatura máxima de cada dia é uma função porque cada dia tem apenas uma temperatura máxima.
- 1.3** A correspondência entre o dia do mês e o número de horas de sono de uma pessoa não é necessariamente uma função porque pode haver dias com o mesmo número, em meses diferentes, em que a pessoa tenha dormido números de horas diferentes.
- 1.4** A correspondência entre o número de irmãos de cada aluno de uma turma e os alunos dessa turma não é necessariamente uma função porque um determinado número de irmãos pode corresponder a mais do que um aluno.

2. Os diagramas de setas que representam funções são f e h porque, nestes, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B .

Na correspondência g há um elemento de A que não tem correspondente em B . Na correspondência i há um elemento de A a que correspondem dois elementos de B .

3.1 A imagem de 3 é 6.

3.2 5 é o objeto cuja imagem é 8.

3.3 $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $D'_f = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3.4 $f(x) = x + 3$

4.1

x	2	3	4	5	6
y	30	20	15	12	10

4.2 A correspondência é uma função porque a cada valor de x corresponde um único valor de y .

4.3 $D_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $D'_f = \{10, 12, 15, 20, 30\}$

4.4 $f(x) = \frac{60}{x}$

5.1 $h(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2 + 2 = 0$

5.2 $h(x) = -4 \Leftrightarrow -x^2 + \sqrt{2}x = -4 \Leftrightarrow -x^2 + \sqrt{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \times (-1) \times 4}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2}$$

Tendo em atenção o domínio da função, concluímos que $x = -\sqrt{2}$.

$-\sqrt{2}$ é o objeto cuja imagem por h é -4 .

5.3

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
$h(x)$	-4	$-\sqrt{2}-1$	0	$\sqrt{2}-1$	0

5.4 $D'_h = \{-4, -\sqrt{2}-1, 0, \sqrt{2}-1\}$

6. $\frac{1}{3}x^2 h = 20 \Leftrightarrow h = \frac{60}{x^2}$

6.1 $f(2) = \frac{60}{2^2} = 15$

6.2 $3 = \frac{60}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

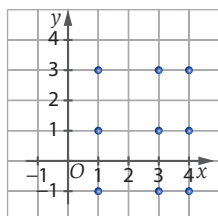
6.3 $f(x) = \frac{60}{x^2}$

6.4 $D_f =]0, +\infty[$

7.1 O produto cartesiano de A por B tem $3 \times 3 = 9$ elementos.

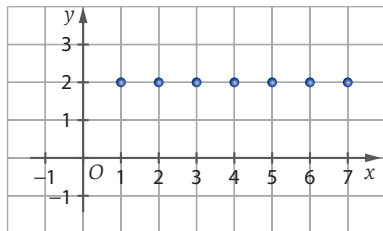
7.2 $A \times B = \{(1, -1); (1, 1); (1, 3); (3, -1); (3, 1); (3, 3); (4, -1); (4, 1); (4, 3)\}$

7.3



8. $C \times D = \{(x, 2) : x \in \mathbb{N}\}$

$C \times D$ corresponde aos pontos da reta de equação $y = 2$ de abscissa natural, como de seguida se representa parcialmente.



9. $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{N}$

10. O conjunto que não representa o gráfico de uma função é G_2 porque há um valor da variável independente (31) a que correspondem dois valores da variável dependente (janeiro e março).

RESOLUÇÕES

11.1 $f(1) = -4$

11.2 O ponto de coordenadas $(4, 2)$ não pertence ao gráfico de f porque $4 \notin D_f$. (No referencial, está marcado com bola aberta.)

11.3 Três pontos.

11.4 $D_f = [-2, 4[\cup]4, 5[$; $D'_f = [-4, 4[$

12.1 $g(1) = -1$

12.2 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$

12.3 $g(0) = -3$; $(0, -3)$

12.4 Dois pontos. (Basta traçar a reta de equação $y = 1$ e verificar que intersesta o gráfico da função duas vezes.)

12.5 $D_g =]-3, +\infty[$; $D'_g = [-4, +\infty[$

12.6 $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-3, -1] \cup [3, +\infty[$

13. Como se trata de uma função de proporcionalidade inversa, tem-se $k = 8 \times 4 = 32$ e $y = \frac{32}{2} = 16$.

14.1

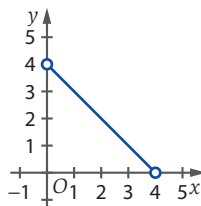
x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\frac{11}{3}$
y	$\frac{7}{2}$	3	2	1	$\frac{1}{3}$

14.2 $D_f =]0, 4[$

14.3 $2(x + y) = 8 \Leftrightarrow y = 4 - x$

$f(x) = 4 - x$

14.4 O gráfico da função f é a parte da reta de equação $y = 4 - x$, considerando $x \in]0, 4[$, ou seja, é o segmento de reta de extremos $(0, 4)$ e $(4, 0)$, excluindo os próprios extremos.



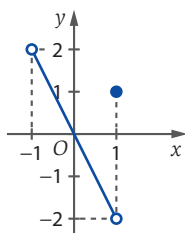
14.5 $D'_f =]0, 4[$

15.1 $D'_f = D'_g = D'_h = \{2, 5, 10, 17\}$

15.2 As funções g e h são iguais, pois têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por g e por h .

16.1 $D_f = [-5, 1]$; $D'_f =]-2, 2]$

16.2



16.3 $D_{f|_B} =]-1, 1]$; $D'_{f|_B} =]-2, 2[$

17.

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	2	5	10

18.1 $D'_g = \{-2\} \cup [-1, 2]$

18.2

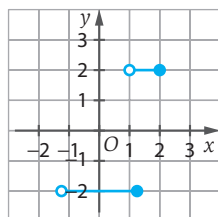
a. $g(C) = \{-2\}$

b. $g(D) = \{-2, 2\}$

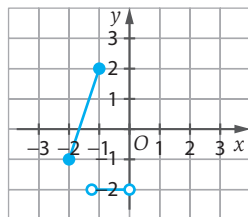
c. $g(E) = [-1, 2]$

d. $g(F) = \{-2, 2\}$

18.3

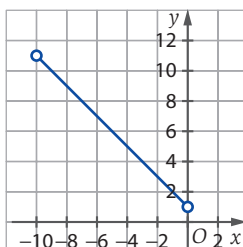


18.4



19.1

x	$y = -x + 1$
-10	11
0	1



19.2 $D'_{f|_C} =]1, 11[$

19.3 $g:]-10, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x + 1$

20. f e i são injetivas, pois objetos diferentes têm imagens diferentes.

g é não injetiva, pois $g(1) = g(3) = 2$.

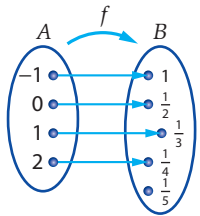
h é não injetiva, pois $h(q) = h(r) = c$.

21. Os gráficos que representam funções injetivas são f e h .

22.1 Por exemplo, $C = [-2, 2]$.

22.2 Por exemplo, $D = [-2, +\infty[$.

23.1



23.2 $D_f = A = \{-1, 0, 1, 2\}$; $D'_f = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

Conjunto de chegada: $B = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

23.3 $f(2) = \frac{1}{4}$

23.4 $f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$

23.5 $f(C) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

23.6 A equação $f(x) = \frac{1}{5}$ é impossível porque não existe nenhum objeto do domínio de f cuja imagem seja $\frac{1}{5}$.

23.7 A função f é injetiva, pois objetos diferentes têm imagens diferentes.

23.8 A função f é não sobrejetiva, pois o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada.

24.1 Sejam x_1 e x_2 números reais quaisquer. Tem-se $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Concluimos, portanto, que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, para todos os $x_1, x_2 \in D_g$, logo g é injetiva em $\mathbb{R}$.

24.2 g é sobrejetiva, pois o contradomínio é $\mathbb{R}$, coincidindo com o conjunto de chegada. Como também é injetiva, é bijetiva.

25.1 $h(-2) = h(2) = 8$, logo h é não injetiva.

25.2 Por observação do gráfico da função, representado num referencial o.n., $C = [0, +\infty[$, por exemplo.

25.3 Por exemplo, $D = [-1, +\infty[$

25.4 $[0, +\infty[$

26.1

a. $D_f = \{2, 4, 6\}$; $D'_f = \{3, 5, 7\}$

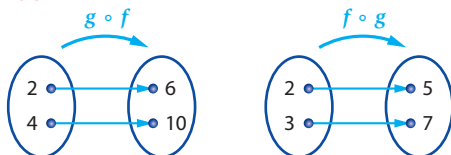
b. $D_g = \{2, 3, 4, 5\}$; $D'_g = \{4, 6, 8, 10\}$

26.2 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 6$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(6) = 7$

Não é possível determinar $(g \circ f)(6)$ porque $f(6) = 7 \notin D_g$.

26.3



26.4 $D_{f \circ g} = \{2, 3\}$; $D_{g \circ f} = \{2, 4\}$

27.1 $(g \circ h)(x) = g(h(x))$

$(g \circ h)(1) = g(h(1)) = g(2) = 4$

$(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(3) = 5$

$(g \circ h)(3) = g(h(3)) = g(4) = 1$

$(g \circ h)(4) = g(h(4)) = g(5) = 2$

$(g \circ h)(5) = g(h(5)) = g(1) = 3$

x	1	2	3	4	5
$(g \circ h)(x)$	4	5	1	2	3

27.2 $(h \circ g)(x) = h(g(x))$

$(h \circ g)(1) = h(g(1)) = h(3) = 4$

$(h \circ g)(2) = h(g(2)) = h(4) = 5$

$(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(5) = 1$

$(h \circ g)(4) = h(g(4)) = h(1) = 2$

$(h \circ g)(5) = h(g(5)) = h(2) = 3$

x	1	2	3	4	5
$(h \circ g)(x)$	4	5	1	2	3

27.3 As funções g e h são permutáveis, pois $g \circ h = h \circ g$.

28. $(f \circ g)(1) = -1 \iff f(g(1)) = -1 \xRightarrow{f(1)=-1} g(1) = 1$

29.1 $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) = -2$

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = -2$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 0$

Não é possível determinar $(f \circ g)(3)$ porque $g(3) = 2 \notin D_f$.

29.2 $g(C) = \{-2\}$; $g(D) = [-2, 0]$; $g(E) = \{2\}$

29.3 $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g : -3 \leq g(x) < 2\} = [-2, 2]$

29.4

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f : -2 \leq f(x) \leq 4\} = \{x \in D_f : -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2] \cap [-1, 2] = [-1, 2]$

Cálculos auxiliares: $-2 \leq f(x) \leq 4 \iff -2 \leq 2x \leq 4 \iff -1 \leq x \leq 2$

30.1 Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$.

30.2 Por exemplo, $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.

30.3 Por exemplo, $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$.

31.1 $(g \circ f)\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{13}{4} - 2 = \frac{5}{4}$

$(f \circ g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

31.2 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

31.3 As funções f e g não são permutáveis, pois $f \circ g \neq g \circ f$.

32.1 f admite função inversa, pois é bijetiva;

g , h e i não admitem função inversa, pois são não injetivas ($g(2) = g(4) = 6$; $h(-1) = h(1) = 2$; $i(1) = i(3) = 1$).

32.2

x	0	1	4	9	16
$f^{-1}(x)$	-1	0	1	2	3

33.1 A função f é bijetiva porque é uma função afim definida por uma expressão do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

33.2 $y = 2 - 5x \iff x = \frac{2-y}{5}$; $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{5}$

34.1 A função g não admite inversa porque é não injetiva (por exemplo, $g(1) = g(3) = 2$).

34.2 $C = [-2, 1]$

34.3 $D_{g^{-1}} = [-1, 2]$; $D'_{g^{-1}} = [-2, 1]$

35.1 $D_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Como f é sobrejetiva, tem-se $D'_g = C$. Sendo $f(x) = x + 1$, tem-se $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

35.2 $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$; $f^{-1}(x) = x - 1$

35.3 $D_{f^{-1}} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $D'_{f^{-1}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

36.1 $D_f = [-1, 1] \cup [2, 3]$; $D'_f = [-1, 0] \cup [1, 3]$

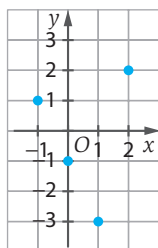
36.2 f é injetiva (qualquer reta horizontal intersesta o gráfico uma única vez) e sobrejetiva (o contradomínio coincide com o conjunto de chegada). Logo, é bijetiva.

36.3 $f^{-1}(-1) = 2$; $f^{-1}(0) = 3$; $f^{-1}(1) = -1$; $f^{-1}(3) = 1$

37. $f^{-1}: B \rightarrow A$ é uma função para a qual existe uma função $g: A \rightarrow B$ tal que $f^{-1} \circ g = id_A$ e $g \circ f^{-1} = id_B$ ($g = f$). Logo, f^{-1} é bijetiva.

38.1 h é bijetiva porque é injetiva e sobrejetiva.

38.2



38.3 $(h^{-1} \circ h)(-3) = h^{-1}(h(-3)) = h^{-1}(1) = -3$

$(h^{-1} \circ h)(-1) = h^{-1}(h(-1)) = h^{-1}(0) = -1$

$(h^{-1} \circ h)(1) = h^{-1}(h(1)) = h^{-1}(-1) = 1$

$(h^{-1} \circ h)(2) = h^{-1}(h(2)) = h^{-1}(2) = 2$

$(h^{-1} \circ h)(x) = x, \forall x \in A$, logo $h^{-1} \circ h = id_A$.

38.4 $(h \circ h^{-1})(-1) = h(h^{-1}(-1)) = h(1) = -1$

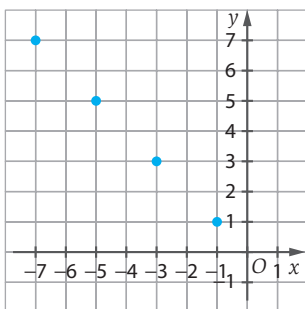
$(h \circ h^{-1})(0) = h(h^{-1}(0)) = h(-1) = 0$

$(h \circ h^{-1})(1) = h(h^{-1}(1)) = h(-3) = 1$

$(h \circ h^{-1})(2) = h(h^{-1}(2)) = h(2) = 2$

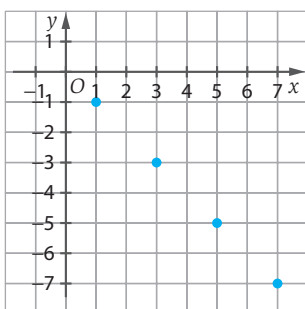
$(h \circ h^{-1})(x) = x, \forall x \in B$, logo $h \circ h^{-1} = id_B$.

39.1



39.2 g é bijetiva porque é injetiva e sobrejetiva. É injetiva porque objetos diferentes têm imagens diferentes. É sobrejetiva porque o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

39.3



39.4

$$(g^{-1} \circ g)(-7) = g^{-1}(g(-7)) = g^{-1}(7) = -7$$

$$(g^{-1} \circ g)(-5) = g^{-1}(g(-5)) = g^{-1}(5) = -5$$

$$(g^{-1} \circ g)(-3) = g^{-1}(g(-3)) = g^{-1}(3) = -3$$

$$(g^{-1} \circ g)(-1) = g^{-1}(g(-1)) = g^{-1}(1) = -1$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = x, \forall x \in A$$

$$(g \circ g^{-1})(1) = g(g^{-1}(1)) = g(-1) = 1$$

$$(g \circ g^{-1})(3) = g(g^{-1}(3)) = g(-3) = 3$$

$$(g \circ g^{-1})(5) = g(g^{-1}(5)) = g(-5) = 5$$

$$(g \circ g^{-1})(7) = g(g^{-1}(7)) = g(-7) = 7$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = x, \forall x \in B$$

40.1 f é bijetiva porque é uma função afim.

$$y = 5x + 2 \iff x = \frac{y-2}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

$$40.2 (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x+2) = \frac{5x+2-2}{5} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 2 = x$$

$$41.1 (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-1) = \frac{5x-1+1}{5} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{5}\right) = 5\left(\frac{x+1}{5}\right) - 1 = x$$

41.2 f e g são bijetivas.

41.3 $y = 5x - 1 \iff x = \frac{y+1}{5}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}$$

42. $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a, \forall a \in A$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b, \forall b \in B$$

$$f^{-1} \circ f = id_A \text{ e } f \circ f^{-1} = id_B$$

43. Opção correta: C

44. No gráfico da opção A não está representada uma viagem.

No gráfico da opção B não se dá o regresso a casa.

No gráfico da opção D não está se dá a permanência em casa do amigo.

Opção correta: C

45. O gráfico da opção B é o único em que há dois pontos com a mesma abcissa e ordenadas diferentes.

Opção correta: B

46. O conjunto da opção A é uma circunferência, o conjunto da opção B é uma elipse e o conjunto da opção C é um semiplano. Em todos os casos, há retas verticais que interseitam o conjunto em mais do que um ponto, pelo que não podem ser o gráfico de uma função. O conjunto da opção D é uma reta oblíqua, pelo que pode ser o gráfico de uma função.

Opção correta: D

47. f é injetiva pois a cada elemento do conjunto A corresponde um e só um elemento do conjunto B ; f é não sobrejetiva pois o contradomínio de f não coincide com o conjunto de chegada.

Opção correta: B

48.1 $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = 2$

Opção correta: A

48.2 $f^{-1}(2) = 0$, pois $f(0) = 2$.

Opção correta: B

49. A afirmação I é falsa, pois uma função pode ser sobrejetiva e não ter inversa, por não ser injetiva.

A afirmação II é verdadeira.

A afirmação III é falsa, pois os domínios das funções $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ podem não ser iguais.

Opção correta: A

50.1 Não, pois pode haver mães com mais do que um filho.

50.2 Sim, porque esse número é único para cada pessoa.

50.3 Sim, pois a cada número corresponde um e um só aluno.

50.4 Sim, pois o perímetro de um quadrado é único para cada medida dos seus lados.

50.5 Sim, pois, numa viagem, a cada instante corresponde apenas uma distância percorrida.

50.6 Não, pois um aluno pode entrar à mesma hora em diversos dias da semana.

51. Proposta de resolução do IAVE:

No percurso de R até S , a distância do ponto P ao ponto O não é constante, enquanto que, no percurso de S até T , a distância do ponto P ao ponto O é constante. Portanto, a opção A está incorreta.

A distância do ponto P ao ponto O nunca é igual a zero, pelo que a opção B também está incorreta.

O ponto P inicia o percurso em R e termina-o em T . Como os pontos R e T estão igualmente distanciados do ponto O , o valor de d correspondente ao instante inicial tem de ser igual ao valor de d correspondente ao instante final. Assim, a opção D também está incorreta. Portanto, a opção correta é a opção C.

$$\mathbf{52.1} \quad a(5) = \frac{\overline{PC} \times \overline{DQ}}{2} = \frac{(8-5) \times (6-5)}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\mathbf{52.2} \quad D_a = [0, 6[\quad ; \quad D'_a =]0, 24]$$

$$\mathbf{52.3} \quad a(x) = \frac{\overline{PC} \times \overline{DQ}}{2} = \frac{(8-x)(6-x)}{2} = \frac{x^2 - 14x + 48}{2}$$

$$\mathbf{53.1} \quad D_f = [-5, -1[\cup]-1, 2[\quad ; \quad D'_f =]-2, 1] \cup \{2\}$$

$$\mathbf{53.2} \quad f(-2) = 1 \quad ; \quad f(0) = 2$$

53.3

a. $f([0, 2]) = \{2\}$

b. $f([-4, 0]) =]-2, 0[\cup]0, 1]$

53.4 A equação $f(x) = -\frac{1}{3}$ admite duas soluções (corresponde ao número de pontos de interseção da reta de equação $y = -\frac{1}{3}$ e o gráfico da função).

$$\mathbf{53.5} \quad f(x) = -1 \iff x \in \left\{-5, -\frac{1}{2}\right\}$$

53.6 f não é injetiva porque, por exemplo, $f(-3) = f(-2) = 1$.

53.7

a. Por exemplo, $C = [-5, -3]$.

b. Por exemplo, $D = [-5, -2]$.

$$\mathbf{54.1} \quad D_f = [-4, -1[\cup [0, 1[\quad ; \quad D'_f = [0, 2] \quad ; \quad D_g = [-2, 4] \quad ; \quad D'_g = [-3, 3]$$

$$\mathbf{54.2} \quad (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0 \quad ; \quad (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = 0$$

$$\mathbf{54.3} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f : f(x) \in [-2, 4]\}$$

$$D_{g \circ f} = [-4, -1[\cup [0, 1[$$

$$D'_{g \circ f} = g(f([-4, -1[\cup [0, 1[))) = g([0, 2]) = [-1, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g : g(x) \in [-4, -1[\cup [0, 1[\}$$

$$D_{f \circ g} = [-2, 0] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

$$D'_{f \circ g} = f \left(g \left([-2, 0] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \right) \right) = f([-3, -1] \cup [0, 1]) = [0, 2]$$

54.4 g é injetiva, pois qualquer reta horizontal intersesta o gráfico uma única vez.

$$\mathbf{54.5} \quad g^{-1}(-3) = -2 ; \quad g^{-1}(0) = 1 ; \quad g^{-1}(2) = 2 ; \quad g^{-1}(3) = 4$$

$$\mathbf{54.6} \quad g \circ g^{-1} = id_{[-3, 3]}$$

$$D_{g \circ g^{-1}} = D'_{g \circ g^{-1}} = [-3, 3]$$

$$g^{-1} \circ g = id_{[-2, 4]}$$

$$D_{g^{-1} \circ g} = D'_{g^{-1} \circ g} = [-2, 4]$$

55.1 f é bijetiva porque é uma função afim.

$$y = \frac{3}{2}x + 1 \iff x = \frac{2(x-1)}{3} ; \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{3}$$

$$\mathbf{55.2} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3}{2}x + 1\right) = \frac{2\left(\frac{3}{2}x + 1\right) - 2}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x-2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2x-2}{3}\right) + 1 = x$$

$$\mathbf{56.1} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

56.2 f e g são funções bijetivas.

$$\mathbf{56.3} \quad \text{Tendo em conta a alínea 56.1, } f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

$$\mathbf{56.4} \quad \text{Tendo em conta a alínea 56.1, } g^{-1}(x) = x^2.$$

$$\mathbf{57.1} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+2) = 2(-x+2) - 1 = -2x+3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = -(2x-1) + 2 = -2x+3$$

57.2 Por exemplo, os gráficos das funções $h(x) = 2x - 2$ e $i(x) = -x + 4$ interseitam-se no ponto $(2, 2)$.

$$(h \circ i)(x) = h(i(x)) = h(-x+4) = 2(-x+4) - 2 = -2x+6$$

$$(i \circ h)(x) = i(h(x)) = i(2x-2) = -(2x-2) + 4 = -2x+6$$

$$D_{h \circ i} = D_{i \circ h} = \mathbb{R}$$

$$h \circ i = i \circ h$$

$$\mathbf{58.1} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f : f(x) \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}\} = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g : g(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{0, 1, 4, 5\}$$

Gráfico A: $f \circ g$

Gráfico B: $g \circ f$

58.2 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -1$; $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 0$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(2) = -1$; $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(1) = 0$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 2$; $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 3$

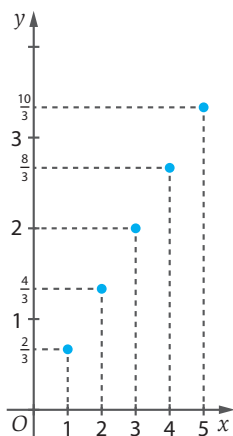
$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 2$; $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(0) = 3$

59.1 A cada altura da pirâmide corresponde um, e apenas um, volume.

59.2 $V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{2h}{3}$

Altura	1	2	3	4	5
Volume	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$

59.3



59.4 $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $D' = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3} \right\}$

59.5 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times h = \frac{2}{3} h$; $V(x) = \frac{2}{3} x$

2. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL: GENERALIDADES

60.1 $D_f = \mathbb{R}$

60.2 $D_g = \mathbb{R}$

60.3 $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x + 7 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$

60.4 $D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \vee x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

60.5 $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x + 4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

60.6 $D_k = \mathbb{R}$

60.7 $D_l = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+5} \neq 0 \wedge x+5 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x+5 > 0\} =]-5, +\infty[$

60.8 $D_m = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \vee x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$

61.1 É o gráfico de uma função, pois cada reta vertical do plano intersesta o conjunto de pontos, no máximo, uma vez.

61.2 Não é o gráfico de uma função, pois existe uma reta vertical do plano que intersesta o conjunto de pontos mais de uma vez.

61.3 Não é o gráfico de uma função, pois existe uma reta vertical do plano que intersesta o conjunto de pontos mais de uma vez.

61.4 É o gráfico de uma função, pois cada reta vertical do plano intersesta o conjunto de pontos, no máximo, uma vez.

62.1 $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$.

Cálculos auxiliares:

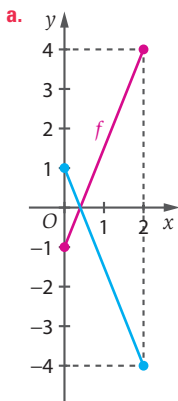
Equação da reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(2, 4)$:

$$m = \frac{4 - (-1)}{2 - 0} = \frac{5}{2}; \text{ a reta fica definida por } y = \frac{5}{2}x - 1.$$

62.2 $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{7}{3}$

62.3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

62.4



b. Não, pois existem retas verticais do plano que intersestam esse conjunto em mais de um ponto.

63.1 $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \Rightarrow f$ é ímpar

63.2 $h(-x) = (-x+1)(-x-1) = (x+1)(x-1) = h(x) \Rightarrow h$ é par

63.3 $i(-x) = (-x-1)^2 \neq i(x)$ e $i(-x) \neq -i(x)$; i não é par nem ímpar.

63.4 $j(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + (-x) = \frac{1}{x^2} - x \neq j(x)$ e $j(-x) \neq -j(x)$; j não é par nem ímpar.

64. f é ímpar, pois o gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial;

h é par, pois o gráfico é simétrico relativamente ao eixo Oy ;

g não é par nem ímpar, pois o gráfico não é simétrico relativamente à origem do referencial, nem relativamente ao eixo Oy .

65.1 $f(0) = 1$; f não é ímpar, pois $f(0) \neq 0$.

65.2 $f(-2) = 15$; $f(2) = 3$; f não é par, pois $f(-2) \neq f(2)$.

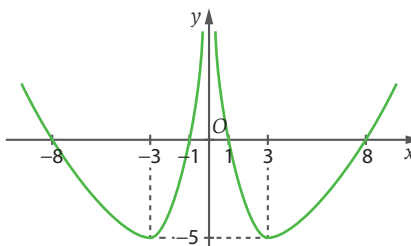
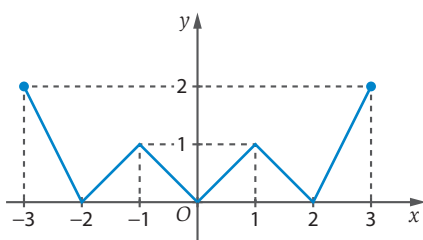
65.3 $g(x) = f(x) + f(-x) = 2x^2 - 3x + 1 + 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 4x^2 + 2$

$g(-x) = 4(-x)^2 + 2 = 4x^2 + 2 = g(x) \Rightarrow g$ é par

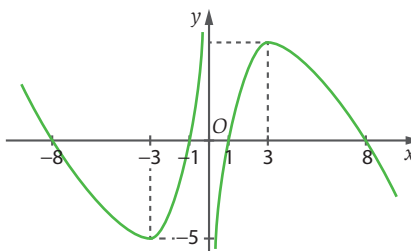
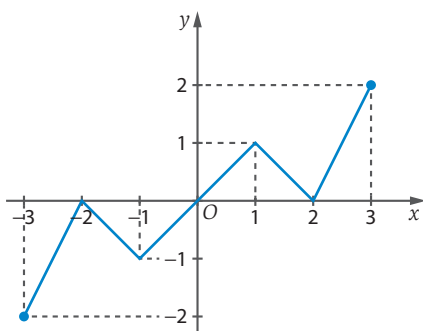
65.4 $h(x) = f(x) - f(-x) = 2x^2 - 3x + 1 - 2(-x)^2 + 3(-x) - 1 = -6x$

$h(-x) = -6(-x) = 6x = -h(x) \Rightarrow h$ é ímpar

66.1



66.2



67.1 Sendo $D_g = \mathbb{R}$, qualquer que seja x pertencente a D_g , $-x$ pertence a D_g e $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x) \Rightarrow g$ é ímpar

67.2 $g(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$; $g(2) = 2^3 - 2 = 6$

$(-2, -6)$ e $(2, 6)$ são coordenadas de pontos simétricos relativamente à origem do referencial (a origem é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são esses pontos).

67.3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e $P(a, g(a)) = P(a, a^3 - a)$ um ponto do gráfico de g .

As coordenadas de um ponto Q do gráfico de g de abscissa $-a$ são $(-a, f(-a)) = (-a, -a^3 + a)$.

Com o objetivo de mostrar que os pontos P e Q são simétricos relativamente à origem do referencial, O , verifiquemos que o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$ é o ponto O .

$$M_{[PQ]} \left(\frac{a + (-a)}{2}, \frac{a^3 - a + (-a^3 + a)}{2} \right) = M_{[PQ]}(0, 0)$$

Sendo a um elemento genérico do domínio da função g , concluímos que os pontos do gráfico de g de abscissas $-a$ e a são simétricos relativamente à origem do referencial, pelo que o gráfico de g é simétrico relativamente à origem do referencial.

68.1 $f(a) = a^2 - 1$; $P(a, a^2 - 1)$; $f(-a) = (-a)^2 - 1 = a^2 - 1$; $Q(-a, a^2 - 1)$

68.2 O ponto médio de $[PQ]$ tem coordenadas $\left(\frac{a + (-a)}{2}, \frac{a^2 - 1 + a^2 - 1}{2} \right) = (0, a^2 - 1)$. Como o ponto médio de $[PQ]$ tem abscissa nula, pertence ao eixo das ordenadas.

68.3 Os pontos P e Q têm a mesma ordenada, pelo que definem uma reta paralela ao eixo Ox e, portanto, perpendicular ao eixo Oy . Concluindo, o segmento de reta $[PQ]$ é perpendicular ao eixo Oy .

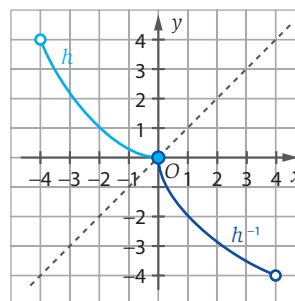
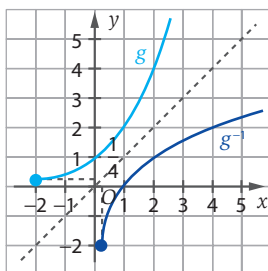
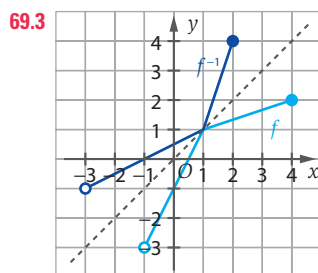
68.4 Sendo o segmento de reta $[PQ]$ perpendicular ao eixo Oy e pertencendo o seu ponto médio a esse mesmo eixo, conclui-se que o eixo Oy é a mediatriz de $[PQ]$, para quaisquer pontos P e Q . Assim, para qualquer $a \in D_f$, conclui-se que esse eixo é eixo de simetria do gráfico de f .

69.1 $D_f =]-1, 4]$; $D'_f =]-3, 2]$

$$D_g = [-2, +\infty[; D'_g = \left[\frac{1}{4}, +\infty[\right.$$

$$D_h =]-4, 0] ; D'_h = [0, 4[$$

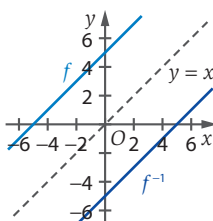
69.2 As funções admitem inversa porque são bijetivas.



70. Não, pois um dos gráficos não é de uma função e o outro corresponde a uma função não injetiva.

71.1 f é bijetiva, pois é uma função afim.

$$y = x + 5 \Leftrightarrow x = y - 5 ; f^{-1}(x) = x - 5$$



71.2 O ponto A tem coordenadas $(-3, f(-3)) = (-3, 2)$. A imagem do ponto A pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o ponto $A'(2, -3)$.

O ponto B tem coordenadas $(1, f(1)) = (1, 6)$. A imagem do ponto B pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o ponto $B'(6, 1)$.

O ponto $A'(2, -3)$ pertence ao gráfico de f^{-1} pois $f^{-1}(2) = -3$ ($f(-3) = 2$). O ponto $B'(6, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1} pois $f^{-1}(6) = 1$ ($f(1) = 6$).

71.3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e $P(a, f(a)) = P(a, a+5)$ um ponto do gráfico de f . A imagem de P pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o ponto $P'(a+5, a)$.

Sendo $f(a) = a+5$, tem-se, por definição de f^{-1} , $f^{-1}(a+5) = a$. Assim, $P'(a+5, a)$ é um ponto do gráfico de f^{-1} . Como o valor de a foi tomado com generalidade, conclui-se que a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o gráfico de f^{-1} .

72. Seja $P(x, x)$, com $x \in \mathbb{R}$, um ponto genérico da reta de equação $y = x$.

Determinemos a distância entre P e $A(a, f(a))$ e entre P e $A'(f(a), a)$, onde $a \geq -1$.

$$d(P, A) = \sqrt{(x-a)^2 + (x-f(a))^2}$$

$$d(P, A') = \sqrt{(x-f(a))^2 + (x-a)^2}$$

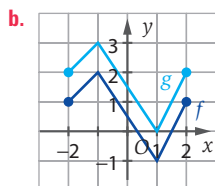
Conclui-se que $d(P, A) = d(P, A')$. Assim, qualquer ponto P da reta de equação $y = x$ é equidistante dos pontos A e A' , ou seja, a bissetriz dos quadrantes ímpares é a mediatriz do segmento de reta $[AA']$. Os pontos A e A' são portanto simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Como os pontos A e A' são pontos genéricos dos gráficos de f e de f^{-1} , conclui-se que estes gráficos são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

73.1 $D_f = [-2, 2]$; $D_{f^{-1}} = [-1, 2]$

73.2

a. $g(-2) = f(-2) + 1 = 1 + 1 = 2$; $g(-1) = f(-1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$g(1) = f(1) + 1 = -1 + 1 = 0$; $g(2) = f(2) + 1 = 1 + 1 = 2$

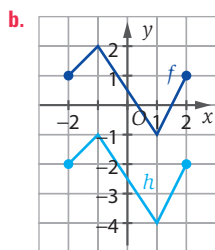


c. $D_g = D_f = [-2, 2]$; $D'_g = [0, 3]$

73.3

a. $h(-2) = f(-2) - 3 = 1 - 3 = -2$; $h(-1) = f(-1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$h(1) = f(1) - 3 = -1 - 3 = -4$; $h(2) = f(2) - 3 = 1 - 3 = -2$

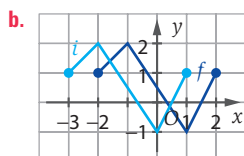


c. $D_h = D_f = [-2, 2]$; $D'_h = [-4, -1]$

74.1

a. $i(-3) = f(-3+1) = f(-2) = 1$; $i(-2) = f(-2+1) = f(-1) = 2$

$i(0) = f(0+1) = f(1) = -1$; $i(1) = f(1+1) = f(2) = 1$



c. $D_i = [-3, 1]$; $D'_i = D'_f = [-1, 2]$

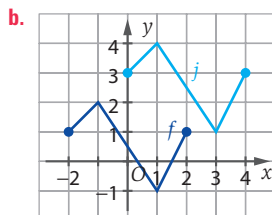
74.2

a. $j(0) = f(0-2) + 2 = f(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$

$j(1) = f(1-2) + 2 = f(-1) + 2 = 2 + 2 = 4$

$j(3) = f(3-2) + 2 = f(1) + 2 = -1 + 2 = 1$

$j(4) = f(4-2) + 2 = f(2) + 2 = 1 + 2 = 3$



c. $D_j = [0, 4]$; $D'_j = [1, 4]$

75.1 Como o gráfico da função g se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(0, 2)$, tem-se:

$D_g = D_f = [-3, 4]$; $D'_g = [-4, 1]$

75.2 Como o gráfico da função h se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(-1, 0)$, tem-se:

$D_h = [-4, 3]$; $D'_h = D'_f = [-2, 3]$

75.3 Como o gráfico da função i se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(4, 1)$, tem-se:

$D_i = [1, 8]$; $D'_i = [-1, 4]$

76. Como o gráfico da função g se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(2, 0)$, tem-se $g(x) = f(x-2)$.

Como o gráfico da função h se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(0, 2)$, tem-se $h(x) = f(x) + 2$.

Como o gráfico da função i se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(-2, 0)$, tem-se $i(x) = f(x+2)$.

Como o gráfico da função j se obtém do gráfico de f pela translação de vetor $(-2, 2)$, tem-se $j(x) = f(x+2) + 2$.

Função	g	h	i	j
Expressão	II	I	IV	III

77.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \geq 0\} = [3, +\infty[$

77.2 $f(4) = \sqrt{4} = 2$; $T_{\vec{u}}(A) = (7, 2)$; $g(7) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$

77.3 Seja P o ponto do gráfico de f de abscissa $a (a \geq 0)$. Como $f(a) = \sqrt{a}$, o ponto P tem coordenadas $(a, \sqrt{a})$.

A imagem de P pela translação de vetor $\vec{u}$ é o ponto P' de coordenadas $(a+3, \sqrt{a})$. Como $a+3 \in D_g$ e $g(a+3) = \sqrt{a+3-3} = \sqrt{a}$, o ponto P' pertence ao gráfico de g . Sendo a um valor genérico de D_f , a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}$ é o gráfico de g .

78.1 $P(a, f(a))$; $Q = T_{\vec{u}}(P)$

O ponto Q tem coordenadas $(a+0, f(a)+c)$. Como $g(a) = f(a)+c$, Q pertence ao gráfico de g .

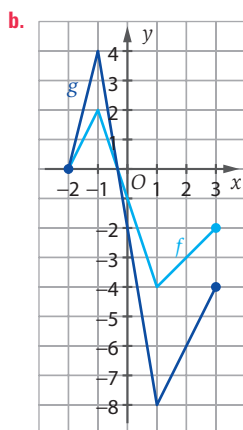
78.2 Consideremos o ponto R de coordenadas $(a, g(a))$, com $a \in D_g$. Como $g(a) = f(a)+c$, o ponto R tem coordenadas $(a, f(a)+c)$, sendo portanto a imagem do ponto de coordenadas $(a, f(a))$, do gráfico de f , pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.

79.1 $D_f = [-2, 3]$; $D_f' = [-4, 2]$

79.2

a. $g(-2) = 2f(-2) = 2 \times 0 = 0$; $g(-1) = 2f(-1) = 2 \times 2 = 4$

$g(1) = 2f(1) = 2 \times (-4) = -8$; $g(3) = 2f(3) = 2 \times (-2) = -4$

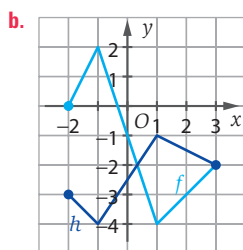


c. $D_g = D_f = [-2, 3]$; $D_g' = [-8, 4]$

79.3

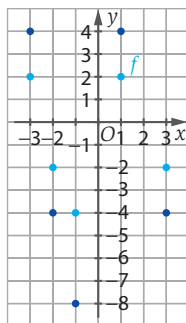
a. $h(-2) = -\frac{1}{2}f(-2) - 3 = -\frac{1}{2} \times 0 - 3 = -3$; $h(-1) = -\frac{1}{2}f(-1) - 3 = -\frac{1}{2} \times 2 - 3 = -4$;

$h(1) = -\frac{1}{2}f(1) - 3 = -\frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -1$; $h(3) = -\frac{1}{2}f(3) - 3 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -2$



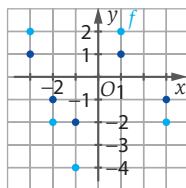
c. $D_h = [-2, 3]$; $D_h' = [-4, -1]$

A azul escuro estão as imagens P' .



Por exemplo, $(-3, g(-3)) = (-3, 2f(-3)) = (-3, 4) = \phi(-3, 2) = \phi(-3, f(-3))$.

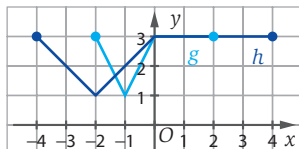
A azul escuro estão as imagens P' .



Como o gráfico da função j se obtém do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{4}$, seguida da translação de vetor $(-2, 0)$, tem-se $j(x) = \frac{1}{4}f(x+2)$.

Função	g	h	i	j
Expressão	I	III	IV	II

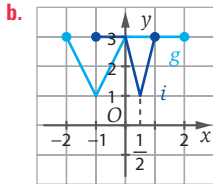
b.



c. $D_h = [-4, 4]$; $D'_h = [1, 3]$

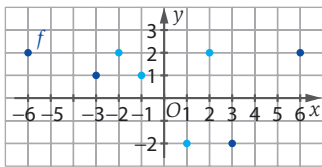
82.3

a. $i(-1) = f(-2 \times (-1)) = f(2) = 3$; $i(0) = f(-2 \times 0) = f(0) = 3$; $i\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-2 \times \frac{1}{2}\right) = f(-1) = 1$; $i(1) = f(-2 \times 1) = f(-2) = 3$



c. $D_i = [-1, 1]$; $D'_i = [1, 3]$

83.1 e 83.2

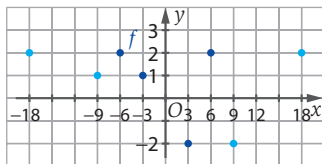


A azul claro estão as imagens P' .

83.3 O gráfico cartesiano de g é a imagem do gráfico de f pela transformação ϕ . Verifica-se, para cada $a \in D_g$, que o respetivo ponto do gráfico de g , de coordenadas $(a, g(a))$, é a imagem pela transformação ϕ do ponto $(3a, f(3a))$ do gráfico de f , pois $(a, g(a)) = (a, f(3a))$.

Por exemplo, $(-2, g(-2)) = (-2, f(-6)) = (-2, 2) = \phi(-6, 2) = \phi(-6, f(-6))$.

83.4



83.5 $h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

84. Como o gráfico da função g se obtém do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 2, tem-se $g(x) = 2f(x)$.

Como o gráfico da função h é simétrico do gráfico de f relativamente ao eixo das ordenadas, tem-se $h(x) = f(-x)$.

Como o gráfico da função i se obtém do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, tem-se $i(x) = f(2x)$.

Como o gráfico da função j se obtém do gráfico de f pela simetria de eixo Oy , seguida da dilatação horizontal de coeficiente 2, tem-se $j(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

Função	g	h	i	j
Expressão	IV	I	II	III

85. Dos conjuntos dados, o único que pode ser gráfico de uma função é a semicircunferência, pois é o único em que cada reta vertical do plano interseeta, no máximo, uma vez esse conjunto.

Opção correta: C

86. Dos gráficos apresentados, o único que apresenta simetria relativamente ao eixo Oy é o da opção B, pelo que é o que pode representar uma função par.

Opção correta: B

87. As funções r.v.r. pares não admitem inversa, pois são não injetivas, logo não bijetivas.

Nem todas as funções r.v.r. ímpares admitem inversa, por exemplo a função definida por $f(x) = x^3 - x$ é ímpar, mas não é injetiva, logo é não bijetiva.

Há funções tais que $f(0) = 0$ que não são ímpares, por exemplo a função definida por $f(x) = x^2$.

Uma função real de variável real que não seja par, pode também não ser ímpar, por exemplo a função definida por $f(x) = x^2 + x$.

Opção correta: C

88. O gráfico de uma função ímpar tem de conter pares de pontos simétricos relativamente à origem do referencial e se contiver algum ponto de abcissa nula, este terá de ser a origem do referencial. O único conjunto que satisfaz estas condições é o da opção D.

Opção correta: D

89. O gráfico da função inversa de f é simétrico do gráfico de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Opção correta: C

90. Os pares ordenados do gráfico da função inversa de f têm as suas coordenadas trocados relativamente aos pares ordenado do gráfico de f .

Opção correta: D

91. O gráfico da função definida por $f(x) - 2$ obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(0, -2)$.

Opção correta: D

92. O gráfico da função definida por $f(-x)$ é simétrico do gráfico de f relativamente ao eixo Oy . O gráfico da opção A corresponde a esta transformação.

O gráfico da função definida por $f(x+1)$ obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(-1, 0)$. Nenhum dos gráficos dados corresponde a esta transformação.

Opção correta: A

93. O gráfico da função definida por $g(x+1)$ obtém-se do gráfico de g pela translação de vetor $(-1, 0)$.

Opção correta: C

94. O gráfico de h obtém-se do gráfico de g pela simetria axial de eixo Oy , seguida pela translação de vetor $(1, 0)$.

Assim, $D'_h = D'_g = [0, 2]$ e $D_h = [-4+1, 3+1] = [-3, 4]$.

Opção correta: A

95. O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela contração horizontal de fator $\frac{1}{2}$.

Opção correta: B

96.1 $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$

96.2 f não é par porque, por exemplo, $6 \in D_f$, mas $-6 \notin D_f$.

96.3 Por exemplo, $[-4, 4]$.

97.1 $D_f = D_g = \mathbb{R}$, por isso, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\{-x, x\} \subset D_f$ e $\{-x, x\} \subset D_g$. Mais: $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x) \Rightarrow f$ é par
 $g(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$; tem-se $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$, logo g não é par nem ímpar.

97.2 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

97.3 $(f \circ g)(-x) = 4(-x)^2 + 4(-x) = 4x^2 - 4x$; $(f \circ g)(-x) \neq (f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)(-x) \neq -(f \circ g)(x)$, logo $f \circ g$ não é par nem ímpar.

97.4 $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - 1$

97.5 Seja $h(x) = (f \circ g)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - 1$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$, por isso, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\{-x, x\} \subset D_f$.

Tem-se, ainda, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = h(x)$. Logo a função é par.

98.1 $Q(-a, -f(a))$

98.2 O ponto médio de $[PQ]$ tem coordenadas $\left(\frac{a + (-a)}{2}, \frac{f(a) + (-f(a))}{2}\right) = (0, 0)$.

98.3 Os pontos P e Q são simétricos um do outro relativamente à origem do referencial. Como foram escolhidos para qualquer $a \in D_f$, conclui-se que a imagem do gráfico de f pela reflexão central de centro O coincide com o próprio gráfico.

99. Se o gráfico de f é simétrico relativamente à origem do referencial, então o ponto $Q(-a, -f(a))$, com $a \in D_f$, tem que pertencer ao gráfico de f , pois é o simétrico de $P(a, f(a))$ relativamente à origem do referencial. Assim, tem-se que $f(-a) = -f(a)$. Como esta igualdade se dá para qualquer $a \in D_f$ e a simetria relativamente à origem implica que $-a \in D_f$, conclui-se que a função f é ímpar.

100.1 $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) \underset{(*)}{=} f(-g(x)) \underset{(**)}{=} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(*) g é ímpar

(**) f é par

Concluimos, portanto, que a composição de uma função par com uma função ímpar é uma função par.

100.2 $D_{g \circ f} \in \mathbb{R}$; $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$\forall x \in D_{g \circ f}$, $-x \in D_{g \circ f}$ e $(g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)$. Logo $g \circ f$ é par.

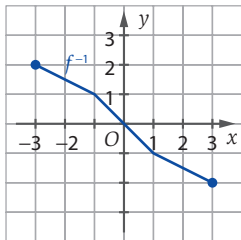
100.3 A função $g \circ f$ não admite inversa, pois é uma função par, logo não injetiva.

101.1 f é ímpar, pois o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial.

101.2 f admite inversa, pois é bijetiva.

101.3 $f(-2) = 3$; $f^{-1}(3) = -2$; $P(-2, 3)$ e $Q(3, -2)$ são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois a mediatriz de $[PQ]$ é a reta de equação $y = x$.

101.4



101.5

a. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in [-2, 2] : f(x) \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$

$D'_{g \circ f} = (f \circ g)([-2, 2]) = f(g([-2, 2])) = f(g([-3, 3])) = [0, 9]$

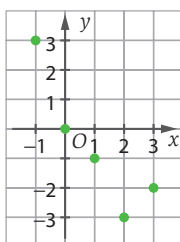
b. A função $g \circ f$ não é bijetiva, pois não é injetiva. Por exemplo, $(g \circ f)(-2) = (g \circ f)(2) = 9$.

102.1 A função f não tem inversa, pois não é bijetiva. Por exemplo, $f(-3) = f(1) = 2$, logo não é injetiva.

102.2

a. Por exemplo, $C = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$.

b.



103. $y = mx + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{m} ; f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$

$f = f^{-1}$ se, e só se,

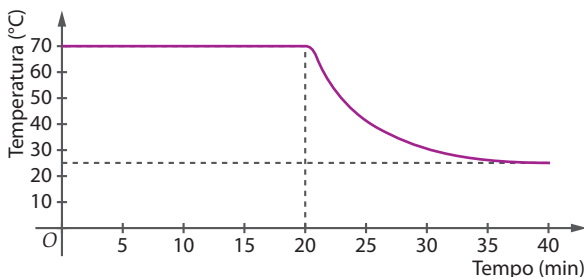
$$\begin{cases} \frac{1}{m} = m \\ -\frac{b}{m} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ -\frac{b}{m} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 1 \\ -\frac{b}{m} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = b \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ -b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

104.1 O António encheu a chávena 10 minutos depois de chegar ao emprego.

104.2 O café estava na garrafa térmica a 70 °C.

104.3 A temperatura ambiente da sala onde o António estava a trabalhar era de 25 °C.

104.4



RESOLUÇÕES

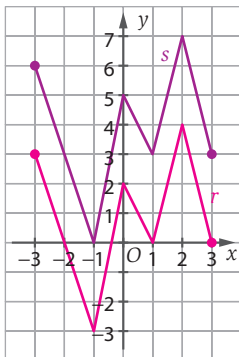
105.1 O gráfico da função representado a azul obtém-se do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 2 ; $y = 2f(x)$.

105.2 O gráfico da função representado a azul obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(0, 2)$; $y = f(x) + 2$.

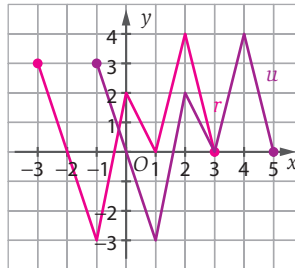
105.3 O gráfico da função representado a azul obtém-se do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$; $y = f(2x)$.

105.4 O gráfico da função representado a azul obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(2, 0)$; $y = f(x - 2)$.

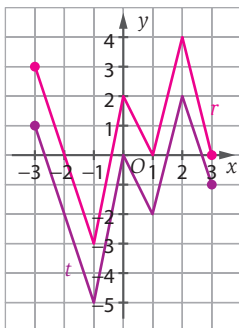
106.1



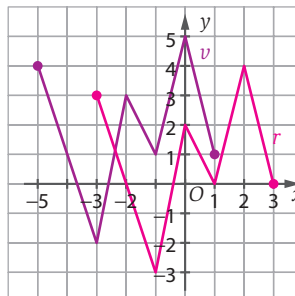
106.3



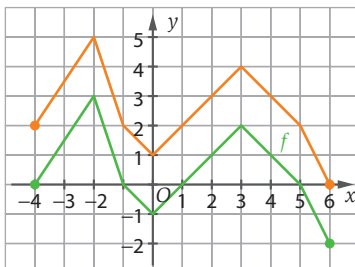
106.2



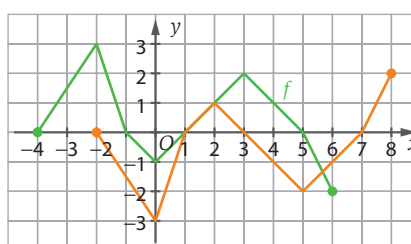
106.4



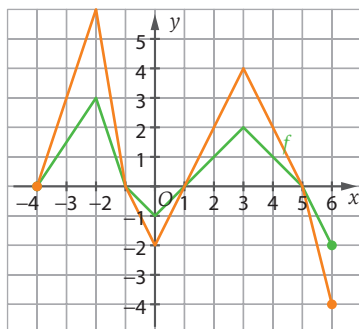
107.1



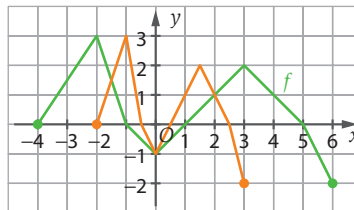
107.2



107.3



107.4



108.1 O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela translação de vetor $(0, 2)$; $D'_h = [0, +\infty[$.

108.2 O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela translação de vetor $(0, -2)$; $D'_h = [-4, +\infty[$.

108.3 O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela simetria de eixo Ox , seguida pela translação de vetor $(0, 1)$; $D'_h =]-\infty, 3]$.

108.4 O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela simetria de eixo Oy , seguida pela translação de vetor $(0, -2)$; $D'_h = [-4, +\infty[$.

108.5 O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$; $D'_h = [2, +\infty[$.

109. Sendo $g(x) = f(2x) - 3$, o gráfico de g obtém-se do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, -3)$. Tem-se que $D_g = [-3, 3]$ e $D'_g = [-7, 0]$.

O gráfico A não é o gráfico de g , pois representa uma função cujo contradomínio é $[-6, 1]$.

O gráfico B não é o gráfico de g , pois representa uma função cujo domínio é $[-4, 8]$.

O gráfico C não é o gráfico de g , pois representa uma função cujo domínio é $[-12, 12]$.

O gráfico D é o gráfico da função g .

TESTE da pág. 84

- 1.1** A correspondência i não é uma função, pois há um elemento do primeiro conjunto ao qual correspondem dois elementos do segundo conjunto.

Opção correta: D

- 1.2** As correspondências f e h são funções injetivas, pois a cada elemento do segundo conjunto corresponde apenas um do primeiro.

Opção correta: A

- 1.3** A correspondência f é uma função bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

Opção correta: A

- 1.4** $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(\alpha) = A$

Opção correta: C

- 2.** $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \mathbb{R}_0^-$

Opção correta: D

- 3.** $D_f = [-3, 3] \setminus \{0\}$; f é não injetiva

Opção correta: C

- 4.1** f é bijetiva porque é injetiva ($x_1 \neq x_2 \implies 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$) e sobrejetiva (o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, $\mathbb{R}$).

- 4.2** $y = 2x + 3 \iff x = \frac{y-3}{2}$; $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

- 4.3** $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$$

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$, pois $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ e ambas têm domínio $\mathbb{R}$.

- 4.4** $f(-x) = 2(-x) + 3 = -2x + 3$

A expressão de $f(-x)$ não coincide com a expressão de $f(x)$, nem com a de $-f(x)$. Logo, f não é par nem ímpar.

- 5.1** $D_g = \mathbb{R}$

- 5.2** $g(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = g(x) \implies g$ é par

- 6.** $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 5 - 2x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{5}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$

- 7.1** O gráfico da função g obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(0, -3)$.

$$D'_g = [-2-3, 3-3] = [-5, 0]$$

- 7.2** O gráfico da função h obtém-se do gráfico de f pela simetria de eixo Ox , seguida da translação de vetor $(0, 1)$; $D'_h = [-3+1, -(-2)+1] = [-2, 3]$.

- 7.3** O gráfico da função i obtém-se do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 2.

$$D'_i = [2 \times (-2), 2 \times 3] = [-4, 6]$$

- 8.1** Os objetos que têm por imagem 4 são -4 e 0 .

- 8.2** Por exemplo, $[-2, 0]$.

- 8.3** O gráfico da função g é o segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(0, 4)$ e $(4, -2)$. Determine-mos a equação da respetiva reta.

$$m = \frac{-2-4}{4-0} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} ; \quad b = 4 ; \quad y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + 4$$

- 8.4** O gráfico da função h obtém-se do gráfico de g pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, seguida da translação de vetor $(0, 1)$.

$$D_g = [0, 4] ; \quad D'_g = [-2, 4]$$

$$D_h = \left[\frac{1}{2} \times (-4), \frac{1}{2} \times 4\right] = [-2, 2] ;$$

$$D'_h = [-2+1, 4+1] = [-1, 5]$$

- 8.5** $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) = 0$

3. MONOTONIA, EXTREMOS E CONCAVIDADE

110.1 $D_f = [-2, 1[\cup]1, 4[$; $D'_f = [-1, 3]$

110.2

a. $(-2, -1)$

b. $(0, 3)$

110.3

a. $[-2, 0]$ e $]1, 3]$

b. $[0, 1[$ e $[3, 4[$

111. O domínio de g é $\{-2, -1, 0, 1\}$.

g é estritamente decrescente porque $\forall a, b \in \{-2, -1, 0, 1\}, a < b \Rightarrow g(a) > g(b)$.

112. Estritamente crescente em $[-1, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, 2[$.

113.1 Sim, f é estritamente crescente em $] -2, 0]$.

113.2 Não, pois a função f é crescente em $] -2, 0]$ e é crescente em $]0, 2]$, no entanto, não é crescente em $] -2, 2]$, pois, por exemplo, $1 > 0$ e, no entanto, $f(1) < f(0)$.

114.

a. Verdadeira.

b. Falsa, pois g é estritamente decrescente em $]a, +\infty[$ e também é estritamente decrescente em $[a, +\infty[$.

115. A função f é:

- estritamente crescente em $[0, 1]$;
- estritamente decrescente em $[1, 5]$;
- constante em $] -3, 0[$;
- crescente em sentido lato em $] -3, 1]$.

Os intervalos de monotonia de f são: $[0, 1]$, $[1, 5]$, $] -3, 0[$ e $] -3, 1]$, sendo $[0, 1]$ e $[1, 5]$ intervalos de monotonia estrita.

A função g é:

- estritamente crescente em $[-2, -1]$, $[1, 3]$ e $]4, 5[$;
- estritamente decrescente em $[-1, 1]$ e $[3, 4[$;

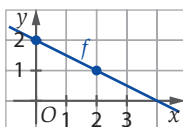
Os intervalos de monotonia de f são: $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4[$ e $]4, 5[$, sendo todos de monotonia estrita.

116. O declive da reta que representa graficamente a função f é $-\frac{1}{2}$. Como esse valor é negativo a função é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

A ordenada na origem da função f é 2, logo, o gráfico de f passa no ponto de coordenadas $(0, 2)$.

Seja $x = 2$: $f(2) = -\frac{1}{2} \times 2 + 2 = 1$.

A reta passa no ponto de coordenadas $(2, 1)$.



117.1 $D_g = \mathbb{R}$

117.2 $b = 4$ e $a = -2$

117.3 g é decrescente em todo o seu domínio ($a < 0$).

118.1 $g(0) = 3 \Leftrightarrow (1-k) \times 0 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$

118.2 g é crescente se, e só se, $1-k > 0 \Leftrightarrow k < 1 \Leftrightarrow k \in]-\infty, 1[$

118.3 g é decrescente se, e só se, $1-k < 0 \Leftrightarrow k > 1 \Leftrightarrow k \in]1, +\infty[$

119.1 $f(1) = 2 \Leftrightarrow m \times 1 - 3 = 2 \Leftrightarrow m = 5$

119.2 f é decrescente se $m < 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, 0[$

119.3 f é crescente se $m > 0 \Leftrightarrow m \in]0, +\infty[$

119.4 f é simultaneamente crescente e decrescente em sentido lato se $m = 0$.

120. $f(x) = ax + b$, $f(1) = 4 \Leftrightarrow a \times 1 + b = 4 \Leftrightarrow a = 4 - b$

f é estritamente crescente se, e só se, $a > 0 \Leftrightarrow 4 - b > 0 \Leftrightarrow b < 4 \Leftrightarrow b \in]-\infty, 4[$

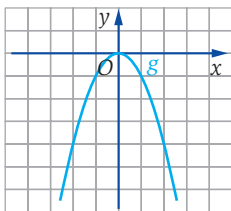
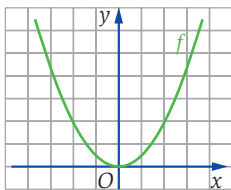
121. $f(x) = ax^2$; $f(-5) = -5 \Leftrightarrow a(-5)^2 = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}$; $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$

122.1 f é decrescente em $]-\infty, 0]$ se $a > 0 \Leftrightarrow a \in]0, +\infty[$

122.2 f é crescente em $]-\infty, 0]$ se $a < 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 0[$

122.3 $f(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

123.1



123.2 f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

124.1 $D_g = \mathbb{R}$

124.2 $b = 0$; $a = \frac{1-0}{-2-0} = -\frac{1}{2}$

124.3 $g(x) = -\frac{1}{2}x$

124.4 A função é estritamente decrescente no seu domínio porque $a = -\frac{1}{2} < 0$.

124.5 f é estritamente monótona, pois $f(x) = \frac{1}{2}x$, pelo que, sendo $a = \frac{1}{2} > 0$, a função é estritamente crescente.

124.6 A função é não limitada, pois não é majorada, nem minorada.

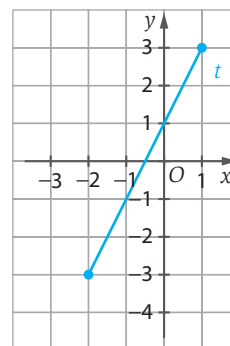
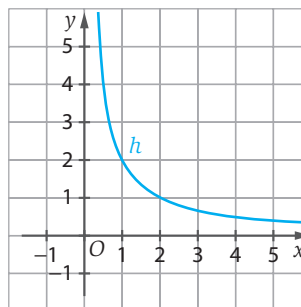
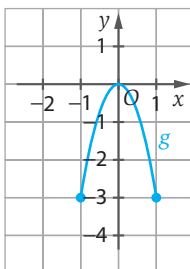
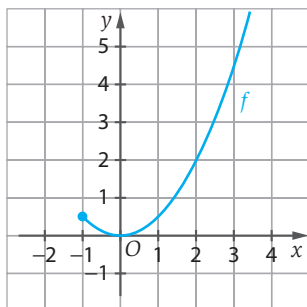
125.1 Começemos por esboçar os gráficos das funções dadas. Os gráficos de f e de g são partes de parábolas de eixo vertical e vértice na origem do referencial; o gráfico de h é um ramo de uma hipérbole; e o gráfico de t é um segmento de reta. Calculemos alguns pontos desses gráficos.

$$f(-1) = \frac{1}{2} ; f(0) = 0$$

$$g(-1) = g(1) = -3 ; g(0) = 0$$

$$h(1) = 2 ; h(2) = 1 ; h(4) = \frac{1}{2} ; h\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$t(-2) = -3 ; t(1) = 3$$



f é minorada; g é limitada; h é minorada; t é limitada.

125.2 f tem mínimo absoluto 0; g tem mínimo absoluto -3 e máximo absoluto 0; t tem mínimo absoluto -3 e máximo absoluto 3; h não tem extremos absolutos.

126.1 4 é o supremo e máximo absoluto de g e 0 é o ínfimo e mínimo absoluto de g .

126.2 4 é o supremo e máximo absoluto de h e 1 é o ínfimo de h ; h não tem mínimo absoluto.

126.3 2 é o supremo de f e -2 é o ínfimo f ; f não tem extremos absolutos.

126.4 3 é o supremo e máximo absoluto de j e 1 é o ínfimo e mínimo absoluto de j .

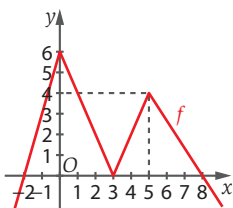
127.1 f não tem máximos nem mínimos.

127.2 g tem mínimo absoluto 1; g não tem máximos.

127.3 h não tem máximos nem mínimos.

127.4 i tem mínimo relativo 1; i não tem mínimo absoluto e i não tem máximos.

128.



129. A função não tem mínimo absoluto; 1 é mínimo relativo; 1 e 3 são máximos relativos, sendo 3 o máximo absoluto; maximizantes: elementos de $[-1, 2[$ e 3; minimizantes: elementos de $] -1, 2]$ e 5.

130.1 $f(0) = 7 \times 0^2 = 0$; $f(2) = 7 \times 2^2 = 28$; $f(5) = 7 \times 5^2 = 175$

$P(0, 0)$; $Q(2, 28)$; $R(5, 175)$

130.2 O declive da reta PQ é $\frac{28-0}{2-0} = 14$ e o declive da reta QR é $\frac{175-28}{5-2} = 49$.

130.3 Consideremos três pontos arbitrários P , Q e R do gráfico de f , de abscissas x_P , x_Q e x_R , respetivamente, tais que $x_P < x_Q < x_R$.

As coordenadas destes pontos são: $P(x_P, 7x_P^2)$, $Q(x_Q, 7x_Q^2)$ e $R(x_R, 7x_R^2)$.

Os declives das retas PQ e QR são:

$$m_{PQ} = \frac{7x_Q^2 - 7x_P^2}{x_Q - x_P} = \frac{7(x_Q^2 - x_P^2)}{x_Q - x_P} = \frac{7(x_Q - x_P)(x_Q + x_P)}{x_Q - x_P} = 7(x_Q + x_P)$$

$$m_{QR} = \frac{7x_R^2 - 7x_Q^2}{x_R - x_Q} = \frac{7(x_R^2 - x_Q^2)}{x_R - x_Q} = \frac{7(x_R - x_Q)(x_R + x_Q)}{x_R - x_Q} = 7(x_R + x_Q)$$

Como $x_P < x_Q < x_R$, tem-se:

$$x_P < x_R \iff x_Q + x_P < x_R + x_Q \iff 7(x_Q + x_P) < 7(x_R + x_Q)$$

Sendo $m_{PQ} < m_{QR}$, a concavidade do gráfico de f é estritamente voltada para cima.

131.1 $f(2) = -\frac{1}{4} \times 2^2 = -1$; $f(4) = -\frac{1}{4} \times 4^2 = -4$; $f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 = -9$

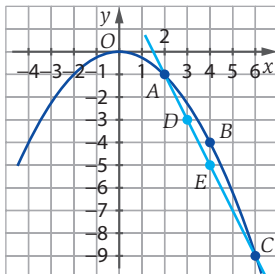
$A(2, -1)$; $B(4, -4)$; $C(6, -9)$

131.2 $m_{AC} = \frac{-9 - (-1)}{6 - 2} = -2$; $-1 = -2 \times 2 + b \iff b = 3$; $y = -2x + 3$

131.3 $y = -2 \times 3 + 3 = -3$; $y = -2 \times 4 + 3 = -5$

A ordenada de D é -3 e a ordenada de E é -5 .

131.4



131.5 Falso. Todos os pontos da função f com abcissas pertencentes ao intervalo $]2, 6[$ ficam acima do segmento de reta $[AC]$, pelo que se conclui que a concavidade do gráfico de f é estritamente voltada para baixo nesse intervalo.

131.6 $m_{AB} = \frac{-4 - (-1)}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$

131.7 $m_{BC} = \frac{-9 - (-4)}{6 - 4} = -\frac{5}{2}$

131.8 $m_{AB} > m_{BC}$

132.1 $m_{AB} = \frac{2-3}{4-3} = -1$; $m_{BC} = \frac{6-2}{6-4} = 2$; a relação $m_{AB} < m_{BC}$ é compatível com o facto de o gráfico de g ter a concavidade estritamente voltada para cima.

132.2 $m_{BD} = \frac{1-2}{5-4} = -1$; $m_{DE} = \frac{-2-1}{6-5} = -3$; $m_{BD} > m_{DE}$.

A relação $m_{BD} > m_{DE}$ é compatível com o facto de o gráfico de g ter a concavidade estritamente voltada para baixo.

133. $5 - 2a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$

Opção correta: D

134. A função g é estritamente crescente em $[-3, 0]$; em $]0, 2]$ é constante ; em $]0, -3]$ é estritamente decrescente. Das opções apresentadas apenas a B está correta.

Opção correta: B

135. A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa (j não tem extremos).

Opção correta: C

136. As condições enunciadas permitem concluir que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

Opção correta: D

137. Tendo extremos absolutos, a função tem majorantes e minorantes e é limitada. Tendo mínimo absoluto, para $x = -1$, e máximo absoluto, para $x = 2$, a função não pode ser decrescente em $[-1, 2]$. Por outro lado, sendo 4 o máximo absoluto de g , é também o seu supremo de g e, sendo -2 o mínimo absoluto de g , é também o seu ínfimo.

Opção correta: A

138.1 $-0,5$ m

138.2 1 h ; 7 h ; 13 h ; 19 h.

138.3 Subida da maré: $[0, 4]$; $[10, 16]$; $[22, 24[$
Descida da maré: $[4, 10]$; $[16, 22]$

138.4 Valores máximos: às 4 h e 16 h ; valores mínimos: às 10 h e 22 h.

139.1 Falsa; g tem um máximo relativo para $x = 0$.

139.2 Verdadeira, pois sendo g uma função par e estritamente decrescente no intervalo $[0, 6]$ será, em particular, estritamente crescente no intervalo $[-2, -1]$.

139.3 Falsa; como $g(0) = 0$ e a função g é estritamente decrescente no intervalo $[0, 6]$ a imagem de 1 é um número real negativo.

139.4 Verdadeira, pois a função é par.

140.1 Como f é uma função quadrática do tipo $y = ax^2$ ($a \neq 0$), com $a < 0$, tem-se:

em $]-\infty, 0]$ a função é estritamente crescente e em $[0, +\infty[$ a função é estritamente decrescente.

140.2

a. $g(x) = -(-2(-x)^2) = 2x^2$
 $D'_g = [0, +\infty[$

b. Como g é uma função quadrática do tipo $y = ax^2$ ($a \neq 0$), com $a < 0$, tem-se:
 em $]-\infty, 0]$ a função é estritamente decrescente; em $[0, +\infty[$ a função é estritamente crescente.

c. Mínimo absoluto: 0; g não tem máximo absoluto.

141. A função f é uma função quadrática do tipo $y = ax^2$, com $a > 0$, logo, o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima. Como A , B e C são três pontos arbitrários do gráfico de f de abscissas a , b e c , respetivamente, tais que $a < b < c$, o declive da reta AB é inferior ao declive da reta BC .

142.1

- a. Por exemplo, $[-4, -2]$.
- b. Por exemplo, $[-6, -4]$.
- c. Por exemplo, $[-2, 4]$.
- d. Por exemplo, $[2, 4]$.

142.2 Por exemplo, $[-2, 2]$.

142.3 Supremo: 2. Ínfimo: -2 .

142.4 Sim, 2 é máximo absoluto porque é supremo de f e pertence a D'_f .

142.5 Maximizantes: -6 ; -2 ; elementos de $]2, 4[$; elementos de $[5, 7]$.

Minimizantes: -4 ; elementos de $[2, 4]$; elementos de $]5, 7]$.

142.6 Concavidade voltada para cima.

143. $D =]-10, 2[\cup]2, 4]$

$D' =]-5, 4]$

A função é não injetiva.

A função é estritamente crescente em $]-10, -8]$, $[-4, 0]$ e $]2, 4]$.

A função é crescente em sentido lato em $[-6, 0]$.

A função é estritamente decrescente em $[-8, -6]$ e $[0, 2[$.

A função é decrescente em sentido lato em $[-8, -4]$.

Supremo: 4.

Ínfimo: -5 .

Os máximos relativos (ou locais): -2 , 0 e 4.

Os mínimos relativos (ou locais): -2 .

Máximo absoluto: 4 .

Mínimo absoluto: não tem.

144.1

$$m_{AB} = \frac{2-1}{5-(-1)} = \frac{1}{6}$$

$$m_{BC} = \frac{6-2}{4-2} = 2$$

144.2 Como o sentido da concavidade do gráfico da função não muda no domínio da função e $m_{AB} < m_{BC}$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

145.

$$m_{PQ} = \frac{k-3}{4-1} = \frac{k-3}{3}$$

$$m_{QR} = \frac{6-k}{10-4} = \frac{6-k}{6}$$

Como o gráfico de uma função real de variável real f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[1, 10]$, tem-se $m_{PQ} > m_{QR}$.

$$\frac{k-3}{3} > \frac{6-k}{6} \Leftrightarrow 2k-6 > 6-k \Leftrightarrow 3k > 12 \Leftrightarrow k > 4$$

$$k \in]4, +\infty[$$

4. FUNÇÕES QUADRÁTICAS, RAIZ QUADRADA, RAIZ CÚBICA, MÓDULO E DEFINIDAS POR RAMOS

$$146.1 \quad a(x) = x^2 + 3x = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{9}{4}\right) ; \quad V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$146.2 \quad b(x) = 2x^2 - x = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right) ; \quad V\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$146.3 \quad c(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} ; \quad V\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$146.4 \quad d(x) = -2x^2 + 3x + 4 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} ; \quad V\left(\frac{3}{4}, \frac{41}{8}\right)$$

$$146.5 \quad e(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3} = -\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{3} = -\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{48} ; \quad V\left(\frac{3}{4}, \frac{11}{48}\right)$$

$$147.1 \quad h = -\frac{0}{2 \times 1} = 0 ; \quad k = 2 - \frac{0^2}{4 \times 1} = 2 ; \quad V(0, 2)$$

$$147.2 \quad h = -\frac{0}{2 \times 1} = 0 ; \quad k = -4 - \frac{0^2}{4 \times 1} = -4 ; \quad V(0, -4)$$

$$147.3 \quad h = -\frac{0}{2 \times 2} = 0 ; \quad k = -1 - \frac{0^2}{4 \times 2} = -1 ; \quad V(0, -1)$$

$$147.4 \quad h = -\frac{0}{2 \times (-3)} = 0 ; \quad k = \frac{1}{2} - \frac{0^2}{4 \times (-3)} = \frac{1}{2} ; \quad V\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

148.1 Como a parábola que representa a função g tem vértice $V(2, 3)$, tem-se $g(x) = a(x-2)^2 + 3$.

Por outro lado, $g(0) = 7 \Leftrightarrow a(0-2)^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow a = 1$. Logo, $a = 1$, $h = 2$ e $k = 3$.

148.2

Expressão analítica	Vetor da translação	Função
(A)	$\vec{u}(3, -2)$	j
(B)	$\vec{u}(-3, 2)$	i
(C)	$\vec{u}(3, 2)$	g
(D)	$\vec{u}(-3, -2)$	h

$$148.3 \quad g(x) = -x^2$$

$$149.1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

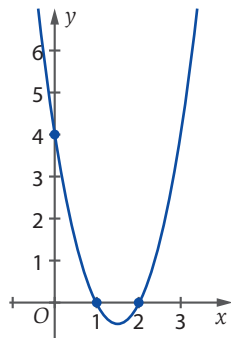
$$149.2 \quad h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times 2} = \frac{3}{2} ; \quad k = c - \frac{b^2}{4a} = 4 - \frac{(-6)^2}{4 \times 2} = -\frac{1}{2} ; \quad V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

149.3

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

149.4



150.1 $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$; logo, f tem dois zeros.

150.2 $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = -7 < 0$; logo, g não tem zeros.

150.3 $\Delta = 12^2 - 4 \times (-3) \times (-12) = 0$; logo, h tem um zero.

151. f tem apenas um zero se o binómio discriminante da equação $f(x) = 0$ for nulo.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-p)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0 \Leftrightarrow (1-p)^2 = 16 \Leftrightarrow 1-p = \pm 4 \Leftrightarrow p = -3 \vee p = 5$$

152.1 $a > 0 \Leftrightarrow a \in]0, +\infty[$

152.2 $a < 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 0[$

152.3 $f(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

153. O binómio discriminante da equação $ax^2 + k = 0$ é igual a $0^2 - 4 \times a \times k = -4ak$

153.1 $-4ak > 0 \Leftrightarrow ak < 0$, ou seja, a e k devem ter sinais contrários.

153.2 $k = 0$

154.1 $D_f = \mathbb{R}$;

Gráfico: parábola de vértice $V(0, 9)$ e concavidade voltada para baixo ($a < 0$);

$D'_f =]-\infty, 9]$;

Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$;

f é positiva em $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ e negativa em $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$;

f tem máximo absoluto 9;

f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$;

f é par; eixo de simetria da parábola: reta de equação $x=0$.

154.2 $D_g = \mathbb{R}$;

Gráfico: parábola de vértice $V(0, 9)$ e concavidade voltada para cima ($a > 0$);

$D'_g = [9, +\infty[$;

Zeros: $g(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+9=0$ (impossível), logo g não tem zeros;

g é positiva em $\mathbb{R}$;

g tem mínimo absoluto 9;

g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$;

g é par; eixo de simetria da parábola: reta de equação $x=0$.

155.1 Duas quaisquer funções definidas por $y=a(x+2)^2$, $a \in \mathbb{R}^+$.

155.2 Duas quaisquer funções definidas por $y=a(x-3)^2$, $a \in \mathbb{R}^-$.

155.3 Duas quaisquer funções definidas por $y=a(x+1)^2$, $a \in \mathbb{R}^+$.

156.1 A função f tem uma expressão analítica do tipo $f(x)=ax^2+k$.

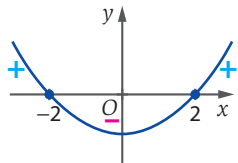
Como o vértice da parábola tem coordenadas $(0, 2)$ e o ponto de coordenadas $(1, 5)$ pertence à parábola, tem-se $a \times 1^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow a = 3$. Logo, $f(x) = 3x^2 + 2$.

156.2 A função g tem uma expressão analítica do tipo $g(x)=a(x-h)^2+k$.

Como o vértice da parábola tem coordenadas $(-1, 0)$ e o ponto de coordenadas $(0, -3)$ pertence à parábola, tem-se $a(0+1)^2 + 0 = -3 \Leftrightarrow a = -3$. Logo, $g(x) = -3(x+1)^2$.

157.1 $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

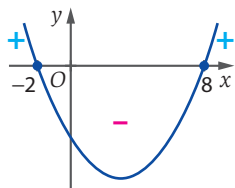


Conjunto-solução: $[-2, 2]$

157.2 $x^2 - 6x - 1 > 15 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 > 0$

$x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

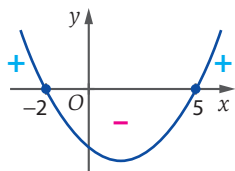
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 8$



Conjunto-solução: $]-\infty, -2[\cup]8, +\infty[$

157.3 $x^2 - 3x - 2 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \geq 0$

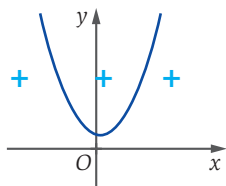
$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 5$$



Conjunto-solução: $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$

157.4 $2x^2 - \frac{x}{3} \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 6x^2 - x + 1 \leq 0$

$6x^2 - x + 1 = 0$ é uma equação impossível, pois $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times 1 = -23 < 0$.

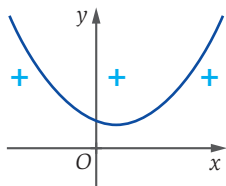


$2x^2 - \frac{1}{3}x \leq -\frac{1}{3}$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

Conjunto-solução: $\{ \}$

157.5 $(x - 2)^2 - 6x \geq -24 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 6x + 24 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 28 \geq 0$

$x^2 - 10x + 28 = 0$ é uma equação impossível, pois $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 28 = -12 < 0$.

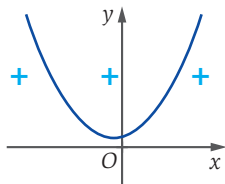


$(x - 2)^2 - 6x \geq -24$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

Conjunto-solução: $\mathbb{R}$

157.6 $2x^2 + x + 1 < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$ é uma equação impossível, pois $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$.

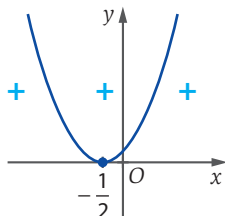


$2x^2 + x + 1 < 0$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

Conjunto-solução: $\{ \}$

157.7 $4x^2 + 4x + 1 > 0$

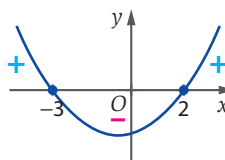
$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$



Conjunto-solução: $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

157.8 $(x + 2)^2 < 3x + 10 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$



Conjunto-solução: $] -3, 2[$

158.1 Para $x = 0$, $y = 2$.

O *bouquet* foi lançado a 2 metros de altura.

158.2 $y = -\frac{1}{5} \times 3^2 + \frac{3}{5} \times 3 + 2 = 2$

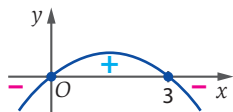
A Maria não conseguiu apanhar o *bouquet* porque este passou a 2 metros de altura e ela apenas consegue saltar até 1,90 m.

158.3 $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times 10}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 5$

O *bouquet* caiu a 5 metros da noiva.

$$158.4 \quad y < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 2 < 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 0$$

$$-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$



$$-x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

No contexto da situação, $x \in [0, 5]$, tem-se:

$$y < 2 \Leftrightarrow x \in]3, 5]$$

158.5 A altura mínima da sala deve ser igual à altura máxima atingida pelo *bouquet*, ou seja, deve ser igual à ordenada do vértice da sua trajetória parabólica.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{3}{5}}{2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 2 - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{4 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} = 2,45$$

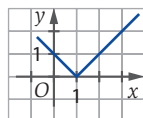
A altura mínima da sala deve ser igual a 2,45 metros.

159.1 Para fazer o esboço do gráfico de f , que é constituído por duas semirretas, determinemos as coordenadas de dois pontos de cada uma dessas semirretas:

$$(0, f(0)) = (0, -0 + 1) = (0, 1)$$

$$(1, f(1)) = (1, 1 - 1) = (1, 0) \text{ (este ponto é a origem das duas semirretas)}$$

$$(2, f(2)) = (2, 2 - 1) = (2, 1)$$

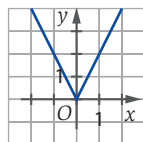


159.2 Para fazer o esboço do gráfico de g , que é constituído por duas semirretas, determinemos as coordenadas de dois pontos de cada uma dessas semirretas:

$$(-1, g(-1)) = (-1, -2 \times (-1)) = (-1, 2)$$

$$(0, g(0)) = (0, -2 \times 0) = (0, 0) \text{ (este ponto é a origem das duas semirretas)}$$

$$(1, g(1)) = (1, 2 \times 1) = (1, 2)$$



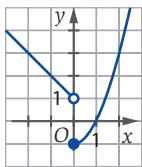
RESOLUÇÕES

159.3 Para $x < 0$, o gráfico de h é parte de uma semirreta. Determinemos as coordenadas da origem dessa semirreta (embora não pertença ao gráfico de h) e outro dos seus pontos:

origem da semirreta: $(0, -0 + 1) = (0, 1)$; outro ponto da semirreta: $(-1, h(-1)) = (-1, -2 \times (-1)) = (-1, 2)$.

Para $x \geq 0$, o gráfico de h é parte de uma parábola de vértice no ponto de coordenadas $(0, -1)$, que se pode obter do gráfico da função definida por $y = x^2$ pela translação de vetor $\vec{u}(0, -1)$. Determinemos as coordenadas de outro ponto dessa parábola:

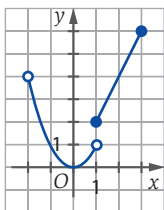
$$(1, h(1)) = (1, 1^2 - 1) = (1, 0)$$



159.4 Para $-2 < x < 1$, o gráfico de i é parte da parábola definida por $y = x^2$, que tem vértice na origem do referencial. Embora não pertençam ao gráfico de i , os pontos de coordenadas $(-2, (-2)^2) = (-2, 4)$ e $(1, 1^2) = (1, 1)$ são os extremos da parte dessa parábola que faz parte do gráfico de i .

Para $1 \leq x \leq 3$, o gráfico de i é o segmento de reta cujos extremos têm coordenadas $(1, i(1))$ e $(3, i(3))$.

$$(1, i(1)) = (1, 2); \quad (3, i(3)) = (3, 6)$$



160.1 No intervalo $[0, 20]$, a função tem uma expressão do tipo $a(t) = kt$. Como $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, tem-se $a(t) = \frac{1}{2}t$.

No intervalo $[20, 50]$, a função é constante e igual a 10.

No intervalo $[40, 60]$, a função tem uma expressão do tipo $a(t) = mt + b$. Com os pontos de coordenadas $(50, 10)$ e $(60, 5)$, deter-

minamos m : $\frac{10-5}{50-60} = -\frac{1}{2}$; com o ponto $(60, 5)$, determinamos b : $5 = -\frac{1}{2} \times 60 + b \Leftrightarrow b = 35$.

$$\text{Assim, } a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \leq t < 20 \\ 10 & \text{se } 20 \leq t < 50 \\ -\frac{1}{2}t + 35 & \text{se } 50 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

160.2 $a(13) = \frac{1}{2} \times 13 = 6,5$; ao fim de 13 segundos o objeto encontra-se a 6,5 metros do solo.

160.3 O objeto foi levantado durante 20 segundos, com velocidade constante, até à altura de 10 metros. Durante 30 segundos o objeto manteve-se a 10 metros de altura. Nos 10 segundos seguintes foi descido até à altura de 5 metros, quando foi depositado.

161.1 Devemos considerar dois escalões de consumo, até 10 m³ ($0 \leq a < 10$) e para consumos superiores ou iguais a este valor ($a \geq 10$).

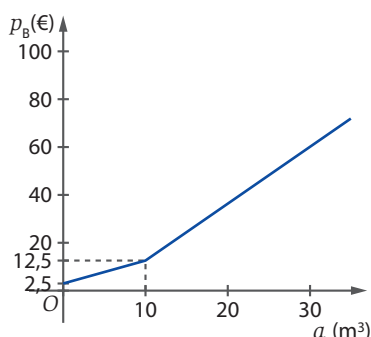
Para $0 \leq a < 10$, $p(a) = 2,5 + a$.

Para $a \geq 10$, $p(a) = 2,5 + 10 + 2(a - 10) = 12,5 + 2a - 20 = 2a - 7,5$.

$$p(a) = \begin{cases} 2,5 + a & \text{se } 0 \leq a < 10 \\ 2a - 7,5 & \text{se } a \geq 10 \end{cases}$$

161.2

a	p
0	2,5
10	12,5
20	32,5



161.3 O preço, p_B , a pagar pela água na localidade B, em função da quantidade de água consumida, em m^3 , é dado por:

$$p_B(a) = 3 + 1,25a$$

Considerando o 1.º escalão de consumo na localidade A ($0 \leq a < 10$), verifica-se que a água é mais barata nesta localidade, pois tem o aluguer e preço por m^3 mais baratos.

Verifiquemos o que se passa no 2.º escalão ($a \geq 10$), pois o preço por m^3 passa a ser superior na localidade A e, portanto, há de haver um valor de consumo a partir do qual o preço a pagar passa a ser superior nesta localidade.

$$2a - 7,5 > 3 + 1,25a \iff 0,75a > 10,5 \iff a > \frac{10,5}{0,75} \iff a > 14$$

Até 14 m^3 água é mais barata na localidade A; a partir desse valor de consumo é mais barata na localidade B.

161.4 Passando a ter dois contadores e consumindo de forma equitativa dos dois até aos 20 m^3 , o preço, p' , a pagar, em euros, pela água é dado em função da quantidade de água consumida, a , em m^3 , por:

$$p'(a) = 2 + 2 + a = 4 + a$$

Determinemos para que valores de a ($a \geq 10$) se tem $p'(a) < p(a)$.

$$4 + a < 2a - 7,5 \iff -a < -12,5 \iff a > 12,5$$

Para consumos entre $12,5 \text{ m}^3$ e 20 m^3 é mais vantajosa a existência de dois contadores.

Na situação de existirem dois contadores, o preço por m^3 , para consumos superiores a 20 m^3 , passa também a ser 2 € , mas, como os primeiros 20 m^3 são mais baratos, verifica-se que $p'(a) < p(a)$.

Concluindo, para um consumo superior a $12,5 \text{ m}^3$ é mais vantajosa a existência de dois contadores.

$$162.1 \quad f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$162.2 \quad g(x) = |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) & \text{se } x + 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x - 3 & \text{se } x < -3 \\ x + 3 & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

$$162.3 \quad h(x) = \left| \frac{1}{2} - 3x \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x & \text{se } \frac{1}{2} - 3x \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2} - 3x\right) & \text{se } \frac{1}{2} - 3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x & \text{se } x \leq \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} + 3x & \text{se } x > \frac{1}{6} \end{cases}$$

que é equivalente a

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 3x & \text{se } x \leq \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} + 3x & \text{se } x > \frac{1}{6} \end{cases}$$

163.1 Vértice: $(1, -3)$; Eixo de simetria: reta de equação $x = 1$.

163.2 $D_f = [-3, +\infty[$; f tem mínimo absoluto -3 ;

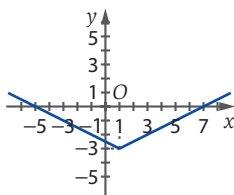
f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty[$.

163.3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-1|-3=0 \Leftrightarrow |x-1|=6 \Leftrightarrow x-1=6 \vee x-1=-6 \Leftrightarrow x=7 \vee x=-5$

Os zeros de f são -5 e 7 .

f é positiva em $]-\infty, -5[\cup]7, +\infty[$ e é negativa em $]-5, 7[$.

163.4 O gráfico de f pode obter-se do gráfico da função definida por $y = |x|$ pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$, seguida da translação de vetor $\vec{u}(1, 0)$. Com os zeros e as coordenadas do vértice determinados nas alíneas anteriores, obtém-se a seguinte representação gráfica de f :



163.5 A função não é par porque o gráfico não é simétrico relativamente ao eixo Oy e não é ímpar porque não é simétrico em relação à origem do referencial.

164.1 $f(x) = \left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{3} = \left|2\left(x + \frac{1}{4}\right)\right| + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2\left|x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left(-\frac{1}{3}\right)$; $V\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right)$

164.2 f tem mínimo absoluto $-\frac{1}{3}$ ($a = 2 > 0$).

164.3 $D_f = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

165.1 Translação de vetor $\vec{u}(1, 0)$.

165.2 Dilatação vertical de coeficiente 2 seguida de translação de vetor $\vec{v}(0, -1)$.

165.3 Dilatação vertical de coeficiente 2 , reflexão de eixo Ox e translação de vetor $\vec{v}(0, 2)$.

165.4 Translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$, contração vertical de coeficiente $\frac{2}{3}$ e translação de vetor $\vec{v}(0, 3)$.

166.1 $V(0, 0)$;

$y = a|x|$; $a|-2| = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}|x|$

166.2 $V(2, 0)$

$y = a|x-2|$; $a|0-2| = 2 \Leftrightarrow a = 1$

$y = |x-2|$

166.3 $V(1, 2)$

$$y = a|x-1|+2 ; a|0-1|+2=3 \Leftrightarrow a=1$$

$$y = |x-1|+2$$

166.4 $V(-3, -1)$

$$y = a|x+3|-1 ; a|-2+3|-1=-3 \Leftrightarrow a=-2$$

$$y = -2|x+3|-1$$

167.1 $|x-4|=7 \Leftrightarrow x-4=7 \vee x-4=-7 \Leftrightarrow x=11 \vee x=-3$

167.2 $3-\frac{1}{3}|x-5|=2 \Leftrightarrow |x-5|=3 \Leftrightarrow x-5=3 \vee x-5=-3 \Leftrightarrow x=8 \vee x=2$

168. $|3x-4|+5=2 \Leftrightarrow |3x-4|=-3$ é uma equação impossível porque o módulo de um número é sempre não negativo.

169.1 $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow x-2 \leq 3 \wedge x-2 \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 5 \wedge x \geq -1$

Conjunto-solução: $[-1, 5]$

169.2 $|3x-1|-2 < 8 \Leftrightarrow |3x-1| < 10 \Leftrightarrow 3x-1 < 10 \wedge 3x-1 > -10 \Leftrightarrow x < \frac{11}{3} \wedge x > -3$

Conjunto-solução: $\left]-3, \frac{11}{3}\right[$

169.3 $\left|x-\frac{1}{2}\right|-2 \geq 0 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right| \geq 2 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} \geq 2 \vee x-\frac{1}{2} \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} \vee x \leq -\frac{3}{2}$

Conjunto-solução: $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

170.1 $|x-3| < 6 \Leftrightarrow x-3 < 6 \wedge x-3 > -6 \Leftrightarrow x < 9 \wedge x > -3$

Conjunto-solução: $] -3, 9[$

170.2 $|2x-1| > 3 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \vee 2x-1 < -3 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -1$

Conjunto-solução: $] -\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

170.3 $|4x+1| \geq 2 \Leftrightarrow 4x+1 \geq 2 \vee 4x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \vee x \leq -\frac{3}{4}$

Conjunto-solução: $\left]-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

170.4 $|2x-1| \leq 3 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \wedge 2x-1 \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -1$

Conjunto-solução: $[-1, 2]$

170.5 $|x|+4 < 1 \Leftrightarrow |x| < -3$ (condição impossível)

Conjunto solução: $\emptyset$

170.6 $|2x|+5 > 3 \Leftrightarrow |2x| > -2$ (condição universal)

Conjunto solução: $\mathbb{R}$

170.7

$$\begin{aligned}
 |x-3| > |x-5| &\Leftrightarrow [x < 3 \wedge -(x-3) > -(x-5)] \vee [3 \leq x < 5 \wedge x-3 > -(x-5)] \vee [x \geq 5 \wedge x-3 > x-5] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow [x < 3 \wedge -x+3 > -x+5] \vee [3 \leq x < 5 \wedge x-3 > -x+5] \vee [x \geq 5 \wedge -3 > -5] \\
 &\Leftrightarrow [x < 3 \wedge 3 > 5] \vee [3 \leq x < 5 \wedge 2x > 8] \vee x \geq 5 \\
 &\Leftrightarrow [3 \leq x < 5 \wedge x > 4] \vee (x \geq 5) \\
 &\Leftrightarrow 4 < x < 5 \vee x \geq 5 \\
 &\Leftrightarrow x > 4
 \end{aligned}$$

Conjunto-solução: $]4, +\infty[$

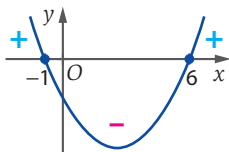
170.8 $|x^2 - 5x| \leq 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x \leq 6 \wedge x^2 - 5x \geq -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 \leq 0 \wedge x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Resolvamos independentemente as inequações $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ e $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 6$$

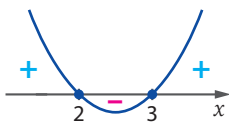


$$x^2 - 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 6]$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$

Conjunto-solução de $|x^2 - 5x| \leq 6$ é a interseção dos conjuntos-solução de cada uma das inequações quadráticas resolvidas:

$$[-1, 6] \cap (]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[) = [-1, 2] \cup [3, 6]$$

171.1 $D_a = \{x \in \mathbb{R} : x + 10 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -10\} = [-10, +\infty[$

171.2 $D_b = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = [3, +\infty[$

171.3 $D_c = \{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{2} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\sqrt{2}\} = [-\sqrt{2}, +\infty[$

171.4 $D_d = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{4} \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4}\right\} = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

171.5 $D_e = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$

171.6 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$

171.7 $D_g = \mathbb{R}$

171.8 $D_h = \mathbb{R}$

172. O gráfico de g pode obter-se do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$; logo, $g(x) = \sqrt{x+2}$.

O gráfico de h pode obter-se do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$; logo, $h(x) = 1 - \sqrt{x}$.

173. Da aplicação sucessiva das transformações envolvidas, obtém-se funções definidas da seguinte forma:

$$y = \sqrt[3]{x+2} \text{ (translação de vetor } \vec{u}(-2, 0))$$

$$y = -\sqrt[3]{x+2} \text{ (reflexão de eixo } Ox)$$

$$g(x) = -\sqrt[3]{x+2} + 1 \text{ (translação de vetor } \vec{v}(0, 1))$$

174. O gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico da função f pela dilatação vertical de coeficiente 2, logo, trata-se do gráfico (D).

O gráfico da função h pode ser obtido a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$, seguida da reflexão de eixo Ox e, depois, da translação de vetor $\vec{v}(0, 2)$; logo, trata-se do gráfico (C).

O gráfico da função i pode ser obtido a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, -2)$; logo, trata-se do gráfico (B).

O gráfico da função j pode ser obtido a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(1, 2)$; logo, trata-se do gráfico (A).

O gráfico da função k pode ser obtido a partir do gráfico da função f pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$; logo, trata-se do gráfico (E).

175.1 $\sqrt{x-2} = 4 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = 4^2 \Leftrightarrow x-2 = 16 \Leftrightarrow x = 18$

Verificação:

$$\sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4$$

Conjunto-solução: $\{18\}$

175.2 $\sqrt{x+1} = 2x-1 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x+1 = 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(4x-5)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 4x-5=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{4}$$

Verificação:

$$\sqrt{0+1} = 2 \times 0 - 1 \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (proposição falsa)}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} = 2 \times \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conjunto-solução: $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

175.3

$$\sqrt{3x+1}-1=x \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=x+1 \Rightarrow (\sqrt{3x+1})^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow 3x+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Verificação:

$$\sqrt{3 \times 0 + 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$\sqrt{3 \times 1 + 1} - 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conjunto-solução: $\{0, 1\}$

175.4

$$2x + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1-2x \Rightarrow (\sqrt{2-x})^2 = (1-2x)^2 \Leftrightarrow 2-x = 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \vee x = 1$$

Verificação:

$$2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$2 \times 1 + \sqrt{2-1} = 1 \Leftrightarrow 3 = 1 \text{ (proposição falsa)}$$

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

175.5

$$\sqrt{x+2} - x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2+x \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (2+x)^2 \Leftrightarrow x+2 = 4+4x+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Verificação:

$$\sqrt{-2+2} - (-2) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$\sqrt{-1+2} - (-1) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conjunto-solução: $\{-2, -1\}$

175.6

$$\sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow x-2 = x^2-8x+16 \Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times 18}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 6$$

Verificação:

$$\sqrt{3-2} = 3-4 \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (proposição falsa)}$$

$$\sqrt{6-2} = 6-4 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conjunto-solução: $\{6\}$

175.7 $\sqrt{2x+1} = x \Rightarrow (\sqrt{2x+1})^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x+1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$$

Verificação:

$$\sqrt{2(1-\sqrt{2})}+1=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{2} \text{ (proposição falsa; } 1-\sqrt{2}<0 \text{)}$$

$$\sqrt{2(1+\sqrt{2})}+1=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2=(1+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2} \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conjunto-solução: $\{1+\sqrt{2}\}$

$$\mathbf{175.8} \quad \sqrt[3]{x+1}=2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1})^3=2^3 \Leftrightarrow x+1=8 \Leftrightarrow x=7$$

Conjunto-solução: $\{7\}$

$$\mathbf{175.9} \quad \sqrt[3]{x-3}=-1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-3})^3=(-1)^3 \Leftrightarrow x-3=-1 \Leftrightarrow x=2$$

Conjunto-solução: $\{2\}$

176.1 O gráfico da função definida por $y=\sqrt{x-5}+2$ obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{v}(0, 2)$, enquanto o gráfico da função definida por $y=-\sqrt{x}$ se obtém do gráfico de g pela translação de vetor $\vec{v}(0, -1)$; portanto, os gráficos não se intersectam, pelo que a equação é impossível.

176.2 Aplicando a translação de vetor $\vec{v}(0, -4)$ ao gráfico de f , o gráfico obtido parece intersectar o gráfico de g em $x=9$.

176.3 Basta substituir na equação e verificar que se obtém uma proposição verdadeira.

$$\sqrt{9-5}-4=-\sqrt{9}+1 \Leftrightarrow \sqrt{4}-4=-3+1 \Leftrightarrow -2=-2 \text{ (proposição verdadeira)}$$

(Alternativamente, pode-se resolver a equação.)

$$\sqrt{x-5}-4=-\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}=5-\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x-5})^2=(5-\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-5=25-10\sqrt{x}+x \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=3^2 \Leftrightarrow x=9$$

(9 verifica a equação inicial)

Conjunto-solução: $\{9\}$

177.1

a. $\{-1\}$

b. $\{\}$

c. $\{3\}$

d. $\{1\}$

177.2 Confirmam-se as conjecturas da alínea anterior exceto a de **177.1.b**

a. $\sqrt[3]{x}=-1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3=(-1)^3 \Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow x=-1$

b. $\sqrt[3]{x}=3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3=3^3 \Leftrightarrow x=27$

c. $-2\sqrt[3]{x-2}+1=-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}=\frac{-1-1}{-2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-2})^3=1^3 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$

d. $-2\sqrt[3]{x-2}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}=\frac{3-1}{-2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-2})^3=(-1)^3 \Leftrightarrow x-2=-1 \Leftrightarrow x=1$

178.1 $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\} = [-3, +\infty[$

$$\sqrt{x+3} < 2 \underset{(\sqrt{x+3} \text{ crescente})}{\Leftrightarrow} x+3 < 2^2 \Leftrightarrow x+3 < 4 \Leftrightarrow x < 1$$

Conjunto-solução: $[-3, +\infty[\cap]-\infty, 1[= [-3, 1[$

178.2 $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty[$

$$\sqrt{x-1} \leq 3 \underset{(\sqrt{x-1} \text{ crescente})}{\Leftrightarrow} x-1 \leq 3^2 \Leftrightarrow x-1 \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 10$$

Conjunto-solução: $[1, +\infty[\cap]-\infty, 10] = [1, 10]$

178.3 $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$

$$-3\sqrt{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq -\frac{1}{3} \text{ (condição universal em } D)$$

Conjunto-solução: $[-1, +\infty[$

178.4 $D = \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{x+5} < -2 \underset{(\sqrt[3]{x+5} \text{ crescente})}{\Leftrightarrow} x+5 < (-2)^3 \Leftrightarrow x+5 < -8 \Leftrightarrow x < -13$$

Conjunto-solução: $] -\infty, -13[$

178.5 $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{2} \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$5\sqrt{x-\frac{1}{2}} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-\frac{1}{2}} \geq \frac{2}{5} \underset{(\sqrt{x-\frac{1}{2}} \text{ crescente})}{\Leftrightarrow} x-\frac{1}{2} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} \geq \frac{4}{25} \Leftrightarrow x \geq \frac{33}{50}$$

Conjunto-solução: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left[\frac{33}{50}, +\infty\right[= \left[\frac{33}{50}, +\infty\right[$

178.6 $D = \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-2} + 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} > 1 \underset{(\sqrt[3]{x-2} \text{ crescente})}{\Leftrightarrow} x-2 > 1^3 \Leftrightarrow x-2 > 1 \Leftrightarrow x > 3$$

Conjunto-solução: $]3, +\infty[$

179. Atendendo ao Teorema Fundamental da Álgebra e considerando os zeros de $g(-3$ e $2)$, sendo -3 um zero duplo, tem-se:

$$g(x) = a(x+3)^2(x-2), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como $g(0) = 6$, tem-se:

$$a(0+3)^2(0-2) = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Assim, } g(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2(x-2) = -\frac{1}{3}(x^2+6x+9)(x-2) = -\frac{1}{3}(x^3+6x^2+9x-2x^2-12x-18) = -\frac{1}{3}(x^3+4x^2-3x-18)$$

$$\text{Logo, } g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + x + 6.$$

180.1 $f(-4) = -\frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -1$; $f(0) = -(0+2)^2 + 4 = 0$

180.2 Para $x \leq -4$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 3 = 0 \wedge x \leq -4 \Leftrightarrow x = -6 \wedge x \leq -4 \Leftrightarrow x = -6$$

Para $-4 < x \leq 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+2)^2 + 4 = 0 \wedge -4 < x \leq 0 \Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 0) \wedge -4 < x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

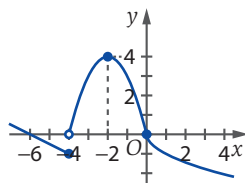
Para $x > 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x > 0 \text{ (condição impossível)}$$

Os zeros de f são -6 e 0 .

180.3 $V(-2, 4)$

180.4



180.5 Para $x \leq -4$

$$f(x) > -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 3 > -1 \wedge x \leq -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x > 2 \wedge x \leq -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -4 \wedge x \leq -4 \Leftrightarrow x < -4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[$$

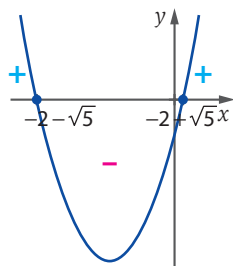
Para $-4 < x \leq 0$

$$f(x) > -1 \Leftrightarrow -(x+2)^2 + 4 > -1 \wedge -4 < x \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 < 5 \wedge -4 < x \leq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$(x+2)^2 < 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 < 0$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{5}$$



$$(x+2)^2 < 5 \Leftrightarrow x \in]-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}[$$

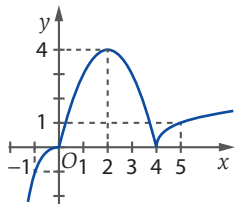
$$-(x+2)^2 + 4 > -1 \wedge -4 < x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}[\cap]-4, 0] \Leftrightarrow x \in]-4, 0]$$

Para $x > 0$

$$f(x) > -1 \Leftrightarrow -\sqrt{x} > -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$$

$$\text{Conclusão: } f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]-4, 0] \cup]0, 1[\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\setminus \{-4\}$$

181.1



181.2 Para $x \leq 0$

$$h(x) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 3 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} \wedge x \leq 0 \text{ (condição impossível)}$$

Para $0 < x \leq 4$

$$\begin{aligned} h(x) = 3 &\Leftrightarrow -(x-2)^2 + 4 = 3 \wedge 0 < x \leq 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \wedge 0 < x \leq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-2 = \pm 1 \wedge 0 < x \leq 4 \Leftrightarrow (x=1 \vee x=3) \wedge 0 < x \leq 4 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3 \end{aligned}$$

Para $x > 4$

$$h(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-4} = 3 \wedge x > 4 \Leftrightarrow x-4 = 3^3 \wedge x > 4 \Leftrightarrow x = 31 \wedge x > 4 \Leftrightarrow x = 31$$

As soluções da equação dada são 1, 3 e 31.

182.1 $D_f = [0, 4]$; $D_g = [0, 6]$

182.2 $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, 4] \cap [0, 6] = [0, 4]$

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 3 + 1 = 4$$

182.3 $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0, 4] \cap [0, 6] = [0, 4]$

$$(f \times g)(0) = f(0) \times g(0) = 2 \times 3 = 6$$

183.1 $D_f = [-1, 5]$; $D_g = [0, 6]$

183.2 $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-1, 5] \cap [0, 6] = [0, 5]$

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f = [0, 6] \cap [-1, 5] = [0, 5]$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = 0 - (-1) = 1$$

$$(g-f)(3) = g(3) - f(3) = 0 - (-1) = 1$$

183.3 $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 3, 4, 5\}$

183.4 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = [0, 5] \setminus \{0, 3, 5\} =]0, 5[\setminus \{3\}$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = [0, 5] \setminus \{1, 4\}$$

184. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \cap]-\infty, 2] =]-\infty, 2[\setminus \{1\}$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =]-\infty, 2[\setminus \{1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\} =]-\infty, 2[\setminus \{-3, 1\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} =]-\infty, 2[\setminus \{1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 3\} =]-\infty, 2[\setminus \{-2, 1\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =]-\infty, 2] \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\} =]-\infty, 2] \setminus \{-3\}$$

$$185.1 \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 9 - 2x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{9}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right]$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{3}\right\} = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

$$185.2 \quad D_h = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[= \left[-\frac{1}{3}, \frac{9}{2}\right]$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-2x} = \sqrt{3x+1} + 2 \Rightarrow (\sqrt{9-2x})^2 = (\sqrt{3x+1} + 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2x = 3x + 1 + 4\sqrt{3x+1} + 4 \Leftrightarrow 4 - 5x = 4\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4}x = \sqrt{3x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{5}{4}x\right)^2 = (\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - \frac{11}{2}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 88x = 0 \Leftrightarrow x(25x - 88) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 25x - 88 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3,52$$

Verificação:

$$\sqrt{9-2 \times 0} = \sqrt{3 \times 0 + 1} + 2 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$\sqrt{9-2 \times 3,52} = \sqrt{3 \times 3,52 + 1} + 2 \Leftrightarrow 1,4 = 5,4 \text{ (proposição falsa)}$$

O zero de h é 0.

$$185.3 \quad (f \times g)(4) + \left(\frac{f}{g}\right)(1) = f(4) \times g(4) + \frac{f(1)}{g(1)} = 1 \times (\sqrt{13} + 2) + \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{7}}{4} + 2$$

$$186. \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Verificação: } \sqrt{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = [-1, +\infty[\cap [0, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{4\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$$

187. Os zeros de f , a existirem, são as soluções da equação $x^2 + 6x + c = 0$. O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times c = 36 - 4c$. Para que a função f não tenha zero tem que se verificar a condição $\Delta < 0$, ou seja, $36 - 4c < 0$.

$$36 - 4c < 0 \Leftrightarrow c > 9$$

Opção correta: D

188. Os zeros de f , a existirem, são as soluções da equação $2x^2 + 8x + c = 0$. O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times c = 64 - 8c$. Para que a função f tenha pelo menos um zero tem que se verificar a condição $\Delta \geq 0$, ou seja, $64 - 8c \geq 0$.

$$64 - 8c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq 8$$

Opção correta: B

189. Opção correta: B

190.1 Sejam x e y os comprimentos, em milímetros, dos catetos do triângulo. Tem-se $x + y = 100$, ou seja, $y = 100 - x$.

A área do triângulo, em mm^2 , é dada em função de x por $A(x) = \frac{x(100-x)}{2}$, no intervalo $]0, 100[$

Opção correta: A

190.2 O gráfico da função A é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pelo que o máximo da função é igual à ordenada do vértice da parábola.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(100-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 100 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 100$$

$$\text{A abscissa do vértice da parábola é } h = \frac{0 + 100}{2} = 50.$$

$$\text{A ordenada do vértice é } k = A(50) = \frac{50 \times (100 - 50)}{2} = 1250.$$

O valor máximo da área desse triângulo pode ser 1250 mm^2 .

Opção correta: C

191. Como o ponto de coordenadas $(0, 4)$ tem ordenada positiva e a função não tem zeros, o gráfico da função terá de ser uma parábola cujos pontos têm todos ordenada positiva, o que implica que a concavidade da parábola seja voltada para cima. Assim, o vértice terá de ter a ordenada positiva e inferior ou igual a 4 . Para que a ordenada do vértice seja 4 , o vértice teria de ser o ponto de coordenadas $(0, 4)$. Como este par ordenado não está entre as opções, o valor da ordenada do vértice tem que estar no intervalo $]0, 4[$.

Opção correta: B

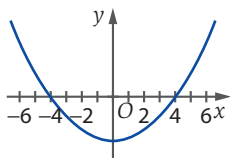
192. O eixo da parábola tem equação $x = -1$, pelo que, sendo $(-3, 0)$ as coordenadas de um dos pontos de interseção com o eixo Ox , o outro ponto de interseção com este eixo tem coordenadas $(1, 0)$.

Opção correta: A

193. Opção correta: A

$$\mathbf{194.} \quad x^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$$



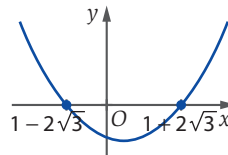
$$x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4$$

Opção correta: C

195. $x^2 - 2x - 11 > 0$

$$x^2 - 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-11)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3}$$



O conjunto-solução de $x^2 - 2x - 11 > 0$ é $] -\infty, 1 - 2\sqrt{3}[\cup] 1 + 2\sqrt{3}, +\infty[$.

Opção correta: B

196. $2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$V(0, f(0)) = V(0, -4)$

$D_f' = [-4, +\infty[$

Opção correta: A

197. Como $a < 0$ a parábola que é o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Por outro lado, o vértice dessa parábola tem coordenadas $(-h, k)$. Assim, $D_f' =]-\infty, k]$.

Opção correta: A

198.

$$|2x| = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Se $x < 0$,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$f(x) = g(x) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Se $x \geq 0$,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$f(x) = g(x) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\text{Assim, } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2\}$$

Opção correta: D

199. $|x - 9| = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Opção correta: B

200. $|2x - 4| < 2 \Leftrightarrow 2x - 4 < 2 \wedge 2x - 4 > -2 \Leftrightarrow 2x < 6 \wedge 2x > 2 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > 1$

Conjunto-solução: $]1, 3[$

Opção correta: A

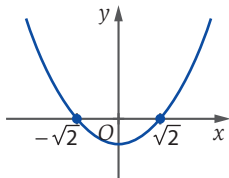
201. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 4| - 4 \geq 0\}$

$$|2x^2 - 4| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |2x^2 - 4| \geq 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 \geq 4 \vee 2x^2 - 4 \leq -4 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \vee x^2 \leq 0$$

Resolvamos separadamente cada uma das condições $x^2 \geq 2$ e $x^2 \leq 0$.

- $x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x^2 \geq 2$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$



$$x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$$

Concluindo, $|2x^2 - 4| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} \vee x = 0$

$$D_f =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty[$$

Opção correta: C

202. $|2x - 4| > 1 \Leftrightarrow 2x - 4 > 1 \vee 2x - 4 < -1 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \vee x < \frac{3}{2}$

Opção correta: D

203. $a(x - b)^3 = 0 \Leftrightarrow (x - b)^3 = 0 \Leftrightarrow x - b = 0 \Leftrightarrow x = b$

Opção correta: B

204. f pode ter no máximo 4 zeros.

Opção correta: C

205.1 $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+$

Opção correta: B

205.2 $D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$

Opção correta: B

205.3 $(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Como $f(3) = g(3) = 0$, sabemos que $f - g$ tem, necessariamente, 3 como zero.

Opção correta: D

206.1 $f(0) = 5$; $f(-1) = -2 \times (-1)^2 - (-1) + 5 = 4$; $f(1) = -2 \times 1^2 - 1 + 5 = 2$

206.2 $-2x^2 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-2) \times 5}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

206.3 $f(-x) = -2(-x)^2 - (-x) + 5 = -2x^2 + x + 5$

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$

A função f não é par nem ímpar.

206.4 Não, porque existem objetos diferentes com a mesma imagem. Por exemplo, 0 é a imagem dos dois zeros de f .

207.1 $f(x) = a(x-1)^2 + 2$, com $a \neq 0$.

Se $a > 0$, $D_f' = [2, +\infty[$.

Se $a < 0$, $D_f' =]-\infty, 2]$.

207.2 $f(x) = a(x+1)^2$, com $a \neq 0$.

Se $a > 0$, $D_f' = [0, +\infty[$.

Se $a < 0$, $D_f' =]-\infty, 0]$.

207.3 $f(x) = a(x-2)^2 - 3$, com $a \neq 0$.

Se $a > 0$, $D_f' = [-3, +\infty[$.

Se $a < 0$, $D_f' =]-\infty, -3]$.

208. Função f

$V(-1, -3)$

$f(x) = a(x+1)^2 - 3$, com $a \neq 0$.

$f(0) = -2$; $a(0+1)^2 - 3 = -2 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = (x+1)^2 - 3$

Função g

$V\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$g(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3$, com $a \neq 0$.

$g(-2) = 0$; $a\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$

$g(x) = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

Função h

$V(2, 1)$

$h(x) = a(x-2)^2 + 1$, com $a \neq 0$.

$h(3) = 2$; $a(3-2)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$

$h(x) = (x-2)^2 + 1$

Função i

$V(4, 0)$

$i(x) = a(x-4)^2$, com $a \neq 0$.

$i(3) = 1$; $a(3-4)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$i(x) = (x-4)^2$

209. Designando essa função por f , tem-se $f(1)=3$.

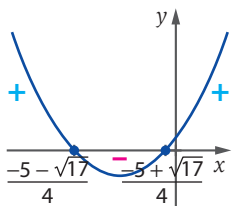
$$1^2 + k \times 1 + k = 3 \Leftrightarrow k = 1$$

$$y = x^2 + x + 1$$

210.1 $2x^2 + 5x + 3 > 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 1 > 0$

$$2x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$$



$$2x^2 + 5x + 3 > 2 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \right[\cup \left] \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}, +\infty \right[$$

210.2 $2x^2 + 5x + 3 \leq 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 1 \leq 0$

$$2x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$2x^2 + 5x + 3 \leq 2 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \right]$$

210.3 $2x^2 + 5x + 3 < 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 1 < 0$

$$2x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$2x^2 + 5x + 3 < 2 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \right[$$

211.1 $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow_{h>0} r^2 = \frac{V}{\pi h} \Leftrightarrow_{r>0} r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

211.2 $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{128\pi}{\pi \times 8}} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

212.1 $2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$

Os zeros de f são -1 e $\frac{3}{2}$.

212.2 Como a parábola que é o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima, relativamente ao sinal de f tem-se:

$$f \text{ é positiva em }]-\infty, -1[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$f \text{ é negativa em }]-1, \frac{3}{2}[$$

212.3 A abcissa do vértice da parábola (gráfico de f) é a média aritmética dos zeros da função f , isto é, $\frac{-1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

Atendendo ao sentido da concavidade e à abcissa do vértice da parábola, relativamente ao sinal de f tem-se:

$$f \text{ é crescente em } \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[;$$

$$f \text{ é decrescente em }]-\infty, \frac{1}{4}].$$

213.1 O gráfico da função g é o que apresenta a concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente do termo em x^2 de $g(x)$ é negativo, portanto, é o gráfico da figura II.

A função h tem 0 como único zero, pelo que o respetivo gráfico é o da figura III.

O gráfico da função i é, então, o da figura I.

213.2

a. $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [2, +\infty[$

b. $h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c. $i(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{1\}$

214.1 $f(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + (1-k) \times 3 + 2k = 0 \Leftrightarrow 12 - k = 0 \Leftrightarrow k = 12$

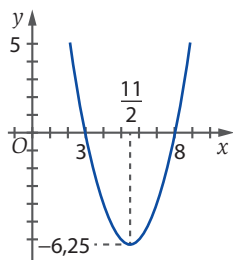
214.2 Para $k = 12$, f fica definida por $f(x) = x^2 - 11x + 24$.

$$f(x) = x^2 - 11x + 24 = x^2 - 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 24 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

O vértice da parábola que é o gráfico de f tem coordenadas $\left(\frac{11}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

Sendo a reta de equação $x = \frac{11}{2}$ o eixo de simetria da parábola, o outro zero de f é $8 \left(\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}\right)$.

Com base na informação apurada, representa-se graficamente a função f .



A função f é positiva em $]-\infty, 3[\cup]8, +\infty[$.

215.1 Como f é uma função afim, tem-se: $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R}$.

A função g é uma função quadrática, pelo que $D_g = \mathbb{R}$. Para determinar o seu contradomínio atenderemos ao sentido da concavidade da parábola, gráfico de g , e à ordenada do vértice dessa parábola.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{5}{2 \times (-1)}, -6 - \frac{5^2}{4 \times (-1)}\right) = V\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, tem-se $D'_g = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

$$\mathbf{215.2} \quad f(x) \geq 2 \Leftrightarrow 4 - 6x \geq 2 \Leftrightarrow -6x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Conjunto-solução: $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$

$$\mathbf{215.3} \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4 - 6x = -x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 9}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 10$$

$$f(1) = -2$$

$$f(10) = -56$$

Os pontos de interseção dos gráficos das duas funções têm coordenadas $(1, -2)$ e $(10, -56)$.

216.1 O vértice da parábola, gráfico da função f , tem coordenadas $(1, 3)$.

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, o mínimo absoluto de f é a ordenada do vértice da parábola, ou seja, 3.

216.2 Atendendo ao sentido da concavidade da parábola e à abscissa do vértice, tem-se:

f é decrescente em $]-\infty, 1]$;

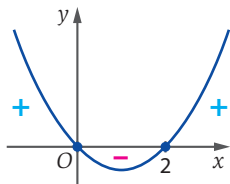
f é crescente em $[1, +\infty[$.

216.3 Não tem zeros, porque o mínimo absoluto da função é 3 e a parábola (gráfico de f) tem a concavidade voltada para cima.

216.4 -1 não pertence ao contradomínio da função, porque 3 é o mínimo absoluto. ($D'_f = [3, +\infty[$).

$$\mathbf{216.5} \quad f(x) > 5 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 3 > 5 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x > 0$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$



$$2x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

$$\mathbf{217.1} \quad f(x) = -(x-3)^2 - 2$$

O vértice da parábola, gráfico da função f , tem coordenadas $(3, -2)$.

Como $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Assim, $D'_f =]-\infty, -2]$.

217.2 O contradomínio da função definida por $g(x) = |f(x)|$ é diferente de $[0, +\infty[$ se o gráfico de f não interseja o eixo das abcissas, ou seja, se a função f não tiver zeros.

Determinemos, então, os valores de a e de k que tornam a equação $f(x) = 0$ impossível.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-3)^2 + k = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 6ax + 9a + k = 0$$

O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = (-6a)^2 - 4 \times a \times (9a + k) = 36a^2 - 36a^2 - 4ak = -4ak$.

Para que a equação seja impossível, teremos que ter $\Delta < 0$.

$$-4ak < 0 \Leftrightarrow ak > 0 \Leftrightarrow (a < 0 \wedge k < 0) \vee (a > 0 \wedge k > 0)$$

218.1

a. $f(2) = -3 \times 2^2 + 4 \times 2 + c = -4 + c$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right) + c = \frac{4}{3} + c$$

$$-4 + c < \frac{4}{3} + c \Leftrightarrow -4 < \frac{4}{3} \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$f(2) < f\left(\frac{2}{3}\right) \text{ tem valor lógico verdadeiro.}$$

b. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{4}{2 \times (-3)}, 1 - \frac{4^2}{4 \times (-3)}\right) = V\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\text{Como a parábola, gráfico de } f, \text{ tem a concavidade voltada para baixo, } D'_f = \left]-\infty, \frac{7}{3}\right].$$

A proposição tem valor lógico falso.

c. Como a parábola, gráfico de f , tem a concavidade voltada para baixo e as coordenadas do seu vértice são $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$, a função f tem como máximo absoluto $f\left(\frac{2}{3}\right)$. Assim, tem-se $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right)$.

A proposição 'Se $x < \frac{2}{3}$ então $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right)$ ' tem valor lógico verdadeiro.

218.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x + c = 0$

O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times c = 16 + 12c$.

Para que a equação seja impossível, teremos que ter $\Delta < 0$.

$$16 + 12c < 0 \Leftrightarrow c < -\frac{16}{12} \Leftrightarrow c < -\frac{4}{3}$$

$$c \in \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[$$

219. Qualquer reta do plano paralela à reta de equação $y = 2x$ fica definida por uma equação da forma $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Para a reta que intersesta a parábola num único ponto, verifica-se que a equação $x^2 - 4x = 2x + k$ tem apenas uma solução.

$$x^2 - 4x = 2x + k \iff x^2 - 6x - k = 0$$

O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 36 + 4k$.

Para que a equação tenha apenas uma solução, teremos que ter $\Delta = 0$.

$$36 + 4k = 0 \iff k = -9$$

A reta paralela à reta de equação $y = 2x$ nas condições impostas tem equação $y = 2x + 9$.

Determinemos as coordenadas do ponto de interseção.

$$x^2 - 4x = 2x + 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 = 0 \iff x = 3$$

$$y = 2 \times 3 - 9 = -3$$

As coordenadas do ponto de interseção são $(3, -3)$.

220. Para que uma reta de equação $y = mx + 4$, com $m \in \mathbb{R}$, interseste a parábola de equação $y = (x - 2)^2 + 1$ num único ponto, a equação $(x - 2)^2 + 1 = mx + 4$ deve ter apenas uma solução.

$$(x - 2)^2 + 1 = mx + 4 \iff x^2 - 4x + 4 + 1 = mx + 4 \iff x^2 - (4 + m)x + 1 = 0$$

O binómio discriminante desta equação é igual a $\Delta = (-(4 + m))^2 - 4 \times 1 \times 1 = (4 + m)^2 - 4$

Para que a equação tenha apenas uma solução, teremos que ter $\Delta = 0$.

$$(4 + m)^2 - 4 = 0 \iff (4 + m)^2 = 4 \iff 4 + m = \pm 2 \iff m = -6 \vee m = -2$$

Determinemos as coordenadas do ponto de interseção.

Para $m = -6$:

$$(x - 2)^2 + 1 = -6x + 4 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$$

$$y = -6 \times (-1) + 4 = 10$$

As coordenadas do ponto de interseção são $(-1, 10)$.

Para $m = -2$:

$$(x - 2)^2 + 1 = -2x + 4 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$$

$$y = -2 \times 1 + 4 = 2$$

As coordenadas do ponto de interseção são $(1, 2)$.

221.1 $a(0) = 80$ cm

221.2 Sendo a a altura do gafanhoto em relação ao chão, a expressão faz sentido para os valores de $t \geq 0$ que satisfazem a condição $a(t) \geq 0$. Determinemos os zeros da função a .

$$a(t) = 0 \iff -30t^2 + 20t + 80 = 0 \iff -3t^2 + 2t + 8 = 0 \iff$$

$$\iff t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-3) \times 8}}{2 \times (-3)} \iff t = \frac{-2 \pm 10}{-6} \iff t = -\frac{4}{3} \vee t = 2$$

Sendo a concavidade do gráfico da função a voltada para baixo, $a(t) \geq 0 \iff \left[-\frac{4}{3}, 2\right]$.

Considerando $t \geq 0$, a expressão $a(t)$ tem significado, no contexto da situação descrita para $t \in [0, 2]$.

221.3 A altura máxima atingida no salto pelo gafanhoto é igual à ordenada do vértice da parábola, gráfico da função a , pois a parábola tem concavidade voltada para baixo.

A abscissa do vértice é igual à média aritmética dos zeros de a : $\frac{-\frac{4}{3}+2}{2} = \frac{1}{3}$.

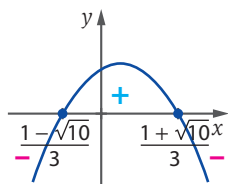
A ordenada do vértice é igual a $a\left(\frac{1}{3}\right) = -30 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times \frac{1}{3} + 80 = \frac{250}{3}$.

A altura máxima atingida no salto pelo gafanhoto foi $\frac{250}{3}$ centímetros.

$$\mathbf{221.4} \quad -30t^2 + 20t + 80 > 50 \Leftrightarrow -3t^2 + 2t + 3 > 0$$

$$-3t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-3) \times 3}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{-6} \vee t = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{-6} \Leftrightarrow t = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \vee t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$



$$-30t^2 + 20t + 80 > 50 \Leftrightarrow t \in \left] \frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \right[.$$

Como $t \in [0, 2]$, o gafanhoto esteve acima de meio metro de altura deste o início do salto até ao instante $t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ segundos, isto é, durante aproximadamente 1,4 segundos.

$$\mathbf{222.1} \quad y = -\frac{2}{5}(x+2)(x-5) + 1 = -\frac{2}{5}(x^2 - 3x - 10) + 1 = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 5$$

A altura máxima que o volante atinge é igual à ordenada do vértice da parábola descrita pelo volante.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{\frac{6}{5}}{2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)}, 5 - \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^2}{4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)}\right) = V\left(\frac{3}{2}, \frac{59}{10}\right)$$

A altura máxima que o volante atinge é 5,9 metros, a 1,5 metros da rede.

$$\mathbf{222.2} \quad -\frac{2}{5}(x+2)(x-5) + 1 = 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 5 = 2 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (-2) \times 15}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{156}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{39}}{2} \approx -1,62 \vee x = \frac{3 + \sqrt{39}}{2} \approx 4,62$$

Como no campo do jogador B o valor de x é positivo, este jogador deverá estar a, aproximadamente, 4,62 metros da rede.

222.3 Determinemos a que distância o volante cai no chão, isto é, o valor de $x > 0$ tal que $y = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5}(x+2)(x-5)+1 &= 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x + 25 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (-2) \times 25}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{236}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{59}}{-4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 - \sqrt{59}}{2} \approx -2,34 \vee x = \frac{3 + \sqrt{59}}{2} \approx 5,34 \end{aligned}$$

O comprimento máximo do campo para que o volante caia fora dele deveria ser, aproximadamente, 5,34 metros.

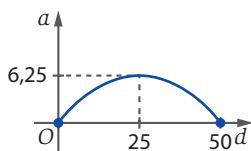
223.1 O gráfico da função a é a parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, em que $a \geq 0$ e $d \geq 0$. Determinemos os zeros da função e as coordenadas do vértice.

$$\begin{aligned} 0,5d - 0,01d^2 &= 0 \Leftrightarrow d(0,5 - 0,01d) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee 0,5 - 0,01d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d &= 0 \vee d = \frac{0,5}{0,01} = 50 \end{aligned}$$

O domínio de a é o intervalo $[0, 50]$.

A abscissa do vértice da parábola é igual a $\frac{0+50}{2} = 25$.

A ordenada do vértice da parábola é igual a $a(25) = 0,5 \times 25 - 0,01 \times 25^2 = 6,25$.



O contradomínio de a é o intervalo $[0; 6,25]$.

223.2 A bola caiu a 50 metros do ponto de partida.

223.3 A altura máxima atingida pela bola foi 6,25 metros.

223.4 $a(7) = 0,5 \times 7 - 0,01 \times 7^2 = 3,01$

Não consegue, porque a bola passa a cerca de 3 metros de altura.

$$\begin{aligned} \mathbf{223.5} \quad a(d) \geq 4 &\Leftrightarrow 0,5d - 0,01d^2 \geq 4 \Leftrightarrow -0,01d^2 + 0,5d - 4 \geq 0 \\ -0,01d^2 + 0,5d - 4 &= 0 \Leftrightarrow d^2 - 50d + 400 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \times 1 \times 400}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d &= \frac{50 \pm 30}{2} \Leftrightarrow d = 10 \vee d = 40 \end{aligned}$$

Entre os 10 e os 40 metros, ou seja, para $d \in [10, 40]$.

223.6 Determinemos os zeros da nova função.

$$\begin{aligned} 0,5d - 0,025d^2 &= 0 \Leftrightarrow d(0,5 - 0,025d) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee 0,5 - 0,025d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d &= 0 \vee d = \frac{0,5}{0,025} = 20 \end{aligned}$$

No ressalto, a bola afastou-se mais 20 metros do guarda-redes. Adicionando os 50 metros já atingidos, obtemos uma distância de 70 metros.

224.1

$$h(t) = 3 \Leftrightarrow -5t^2 + \frac{59}{2}t + 3 = 3 \Leftrightarrow -5t^2 + \frac{59}{2}t = 0 \Leftrightarrow t\left(-5t + \frac{59}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -5t + \frac{59}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 5,9$$

A flecha está a uma distância de 3 metros do solo no instante inicial e passados 5,9 segundos.

224.2 Determinemos a altura máxima atingida pela flecha, que corresponde à ordenada do vértice da parábola que representa graficamente a altura da flecha em função do tempo, pois a concavidade desta parábola está voltada para baixo.

A abscissa do vértice da parábola é igual a $\frac{0 + 5,9}{2} = 2,95$

A ordenada do vértice da parábola é igual a $h(2,95) = -5 \times 2,95^2 + \frac{59}{2} \times 2,95 + 3 = 46,5125$

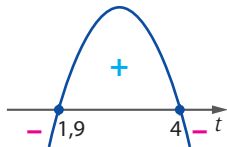
A flecha não atinge uma altura de 47 metros, pois a altura máxima atingida é inferior a esse valor.

224.3

$$h(t) \geq 41 \Leftrightarrow -5t^2 + \frac{59}{2}t + 3 \geq 41 \Leftrightarrow -5t^2 + \frac{59}{2}t - 38 \geq 0 \Leftrightarrow -10t^2 + 59t - 76 \geq 0$$

$$-10t^2 + 59t - 76 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-59 \pm \sqrt{59^2 - 4 \times (-10) \times (-76)}}{2 \times (-10)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-59 \pm 21}{-20} \Leftrightarrow t = 1,9 \vee t = 4$$



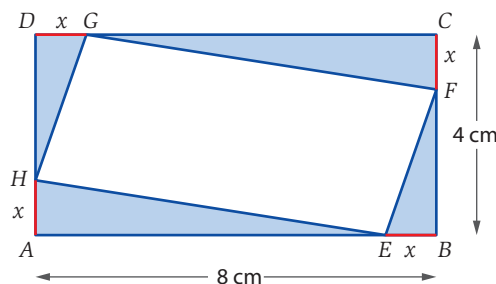
$$h(t) \geq 41 \Leftrightarrow [1,9; 4]$$

A flecha esteve a uma altura superior ou igual a 41 metros durante 2,1 segundos.

225.1 A área da zona colorida é dada por

$$2A_{[AEH]} + 2A_{[EBF]} = 2 \times \frac{\overline{AE} \times \overline{EH}}{2} + 2 \times \frac{\overline{EB} \times \overline{BF}}{2} = \overline{AE} \times \overline{EH} + \overline{EB} \times \overline{BF}$$

$$A(x) = (8 - x)x + x(4 - x) = 8x - x^2 + 4x - x^2 = 12x - 2x^2$$



225.2 Para que haja região colorida, x terá que ser positivo e inferior ou igual a 4.

$$D_A =]0, 4]$$

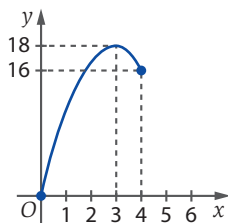
225.3 O gráfico da função A é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima. Determinemos alguns dos seus pontos.

$$A(4) = 12 \times 4 - 2 \times 4^2 = 16$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(12 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 12 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

A abscissa do vértice da parábola é igual a $\frac{0+6}{2} = 3$.

A ordenada do vértice da parábola é igual a $A(3) = 12 \times 3 - 2 \times 3^2 = 18$.



225.4 Como o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, o valor de x para o qual a área colorida é máxima é igual à abscissa do vértice da parábola, ou seja, 3 cm.

$$\mathbf{225.5} \quad A(x) = 10 \Leftrightarrow 12x - 2x^2 = 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Atendendo a que $D_A =]0, 4]$, a área colorida é 10 cm^2 para $x = 1$.

226.1 A altura do 1.º poste é igual a $f(0) = 16$ metros.

A altura do 2.º poste é igual a $f(30) = 0,07 \times 30^2 - 1,4 \times 30 + 16 = 37$ metros.

A diferença de alturas dos dois postes é igual a $37 - 16 = 21$ metros.

226.2 O ponto do fio mais próximo do solo corresponde ao vértice da parábola. A abscissa do vértice da parábola dá-nos a distância do primeiro poste a esse ponto.

A abscissa do vértice da parábola é igual a $-\frac{b}{2a} = -\frac{-1,4}{2 \times 0,07} = 10$.

A distância do primeiro poste ao ponto do fio mais próximo do solo é 10 metros.

$$\mathbf{227.1} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2x-1}) = 5\sqrt{2x-1} - 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] : \sqrt{2x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(\sqrt{5x-1}) = \sqrt{2(5x-1)-1} = \sqrt{10x-3}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 5x-1 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right\} = \left[\frac{3}{10}, +\infty\right[$$

Cálculos auxiliares:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x-1 \geq 0\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$5x-1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x \geq 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{10}$$

227.2 A composição de funções não é comutativa.

228.1 $R(4\pi\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3} \times 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3 \times 4^2} = \sqrt[4]{\frac{3 \times 4^2}{2^4}} = \sqrt[4]{3}$

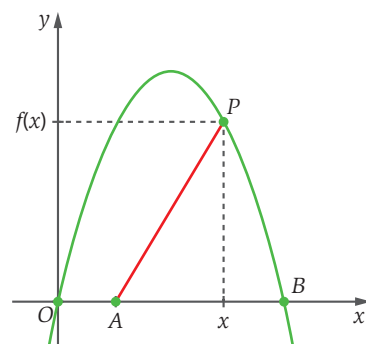
228.2 $V(x) = \frac{4}{3} \pi (R(x))^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{4} \times \frac{x}{\pi} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$

228.2 $V(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = 9 \Leftrightarrow x = 9\pi$

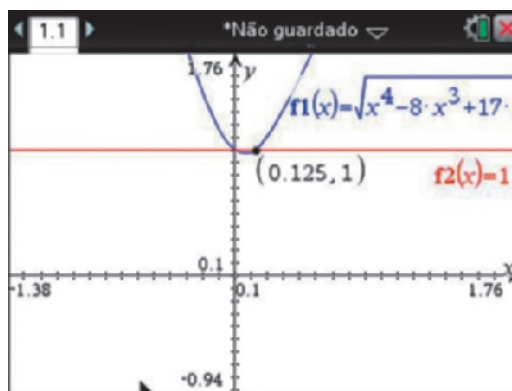
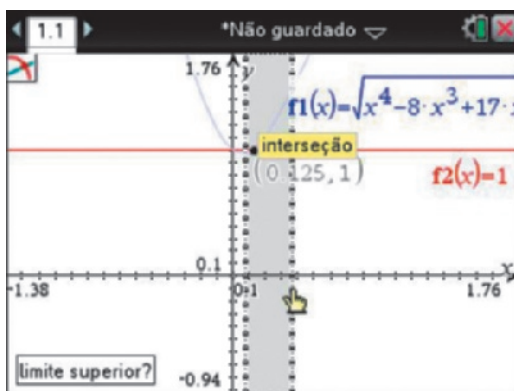
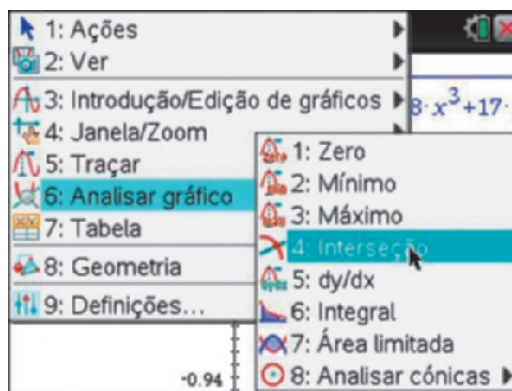
229.1 O ponto P tem coordenadas $(x, -x^2 + 4x)$.

$$g(x) = d(P, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (-x^2 + 4x - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^4 - 8x^3 + 16x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$$



229.2 As abscissas dos pontos do gráfico de f que distam uma unidade do ponto A são as soluções da equação $g(x) = 1$. Um desses pontos é a origem do referencial, a que corresponde $x = 0$. Para obter uma aproximação da outra solução, recorremos a uma calculadora gráfica, onde introduzimos as funções $f_1(x) = g(x)$ e $f_2(x) = 1$. Ajustamos a janela de visualização para que se possa observar melhor o ponto de interseção pretendido e através da ferramenta «Interseção» obtemos as suas coordenadas.



A abscissa do outro ponto que dista uma unidade do ponto A é aproximadamente igual a 0,1.

$$\begin{aligned}
 229.3 \quad f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x^2 + 4x = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (-x^2 + 4x)^2 = (\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1})^2 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1
 \end{aligned}$$

Verificação:

$$-1^2 + 4 \times 1 = \sqrt{1^4 - 8 \times 1^3 + 17 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{9} \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$$

O ponto de interseção dos gráficos de f e de g tem coordenadas $(1, f(1)) = (1, 3)$.

A distância desse ponto do gráfico de f ao ponto A coincide com $f(1)$, pois a sua projeção ortogonal no eixo Ox é o ponto A , sendo $f(1)$ essa distância, tem-se $f(1) = g(1)$, por definição da função g .

$$230.1 \quad f(-\sqrt[3]{2}) + f\left(5^{\frac{3}{2}}\right) = -2 \times (-\sqrt[3]{2})^3 - 2 + \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 3 = -2 \times (-2) - 2 + 5^3 - 3 = 124$$

$$\begin{aligned}
 230.2 \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow (-2x^3 - 2 = 0 \wedge x < 0) \vee (x^2 - 3 = 0 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^3 = -1 \wedge x < 0) \vee (x^2 = 3 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow (x = \sqrt[3]{-1} \wedge x < 0) \vee (x = \pm \sqrt{3} \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

A função f tem os seguintes zeros: -1 e $\sqrt{3}$.

231.1 Para $x \geq 0$ a função fica definida por $y = 2$ e para $x < 0$ por $y = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

231.2 Para $x < 0$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(-1, 0)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{0 - (-1)}{-1 - 0} = -1 ; \quad b = -1 ; \quad y = -x - 1$$

Para $x \geq 0$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(3, 0)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{0 - (-1)}{3 - 0} = \frac{1}{3} ; \quad b = -1 ; \quad y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

231.3 Para $-2 \leq x < 0$, o gráfico da função é parte da parábola que tem vértice na origem do referencial e que passa no ponto de coordenadas $(-2, 4)$. Determinemos a equação que define essa parábola.

$$y = ax^2 ; \quad 4 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = 1 ; \quad y = x^2$$

Para $0 \leq x < 2$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(2, 4)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2 ; \quad b = 0 ; \quad y = 2x$$

Para $x \geq 2$ a função fica definida por $y = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

231.4 Para $0 \leq x < 2$, o gráfico da função é parte da parábola que tem vértice no ponto de coordenadas $(2, 0)$ e que passa no ponto de coordenadas $(0, 3)$. Determinemos a equação que define essa parábola.

$$y = a(x-2)^2 ; \quad 3 = a \times (0-2)^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4} ; \quad y = \frac{3}{4}(x-2)^2$$

Para $2 \leq x < 3$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(3, 1)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{1-0}{3-2} = 1 ;$$

$$y = x + b ; \quad 0 = 2 + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$y = x - 2$$

Para $x \geq 3$ a função fica definida por $y = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-2)^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

231.5 Para $-4 \leq x < -1$, o gráfico da função é parte da parábola que tem vértice no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e que passa no ponto de coordenadas $(-4, -1)$. Determinemos a equação que define essa parábola.

$$y = a(x+3)^2 ; \quad -1 = a \times (-4+3)^2 \Leftrightarrow a = -1 ; \quad y = -(x+3)^2$$

Para $-1 \leq x < 1$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(4, 1)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{4-0}{1-0} = 4 ; \quad b = 0 ; \quad y = 4x$$

Para $1 \leq x \leq 4$, o gráfico da função é parte da parábola que tem vértice no ponto de coordenadas $(3, 0)$ e que passa no ponto de coordenadas $(4, 1)$. Determinemos a equação que define essa parábola.

$$y = a(x-3)^2 ; \quad 1 = a \times (4-3)^2 \Leftrightarrow a = 1 ; \quad y = (x-3)^2$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & \text{se } -4 \leq x < -1 \\ 4x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-3)^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

231.6 Para $10 \leq x < 20$, a função fica definida por $y = 100$. Para $x \geq 60$, a função fica definida por $y = 20$.

Para $0 \leq x < 10$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(0, 20)$ e $(10, 100)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{100-20}{10-0} = 8 ; \quad b = 20 ; \quad y = 8x + 20$$

Para $20 \leq x < 60$, o gráfico da função é parte da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(20, 100)$ e $(60, 20)$. Determinemos a equação reduzida dessa reta.

$$m = \frac{100-20}{20-60} = -2$$

$$y = -2x + b ; \quad 20 = -2 \times 60 + b \Leftrightarrow b = 140$$

$$y = -2x + 140$$

$$f(x) = \begin{cases} 8x + 20 & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 100 & \text{se } 10 \leq x < 20 \\ -2x + 140 & \text{se } 20 \leq x < 60 \\ 20 & \text{se } x \geq 60 \end{cases}$$

RESOLUÇÕES

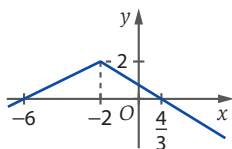
232.1 Para fazer o esboço do gráfico de g , que são duas semirretas, determinemos as coordenadas de dois pontos de cada uma delas.

$$(-6, g(-6)) = (-6, 0,5 \times (-6) + 3) = (-6, 0)$$

$$(-2, g(-2)) = (-2, 0,5 \times (-2) + 3) = (-2, 2)$$

$$\left(\frac{4}{3}, g\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, -0,6 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 0,8\right) = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Usando a expressão $y = -0,6 \times x + 0,8$, se $x = -2$, tem-se $y = -0,6 \times (-2) + 0,8 = 2$.



232.2 Na determinação de coordenadas de pontos do gráfico de g , feita na alínea anterior, determinámos os zeros de g : -6 e $\frac{4}{3}$.

232.3

x	$-\infty$	-6		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

232.4 Tem um máximo absoluto: 2 .

233.1 Ao fim de 20 minutos, o preço a pagar pela chamada feita pela operadora R deverá ficar constante (no intervalo de tempo das 20h00 às 8h00 do dia seguinte). Assim, o gráfico II é o que representa esta chamada.

233.2 Ambas as chamadas duraram 40 minutos. A chamada feita pela operadora P custou 0,80 €; a chamada feita pela operadora R custou 1,05 €.

233.3 Pela operadora P , o preço teria sido 0,60 €; pela operadora R , o preço teria sido 1,05 €.

234.1 Determinemos o volume de cada um dos cilindros.

$$\text{Volume do cilindro maior} = \frac{4}{3} \times 4,5 = 6 \text{ m}^3$$

$$\text{Volume do cilindro maior} = \frac{2}{3} \times 1,5 = 1 \text{ m}^3$$

Para $0 \leq V < 6$, apenas há azeite no cilindro maior, pelo que a altura é dada, em função de V , por:

$$V = \frac{4}{3}h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{4}$$

Para $6 \leq V \leq 7$, há azeite nos dois cilindros, estendo o cilindro maior cheio, pelo que a altura é dada, em função de V , por:

$$V - 6 = \frac{2}{3}(h - 4,5) \Leftrightarrow V - 3 = \frac{2}{3}h \Leftrightarrow h = \frac{3V - 9}{2}$$

A função h que dá a altura do azeite no depósito, em metros, para cada valor do volume V , ocupado pelo azeite, em m^3 , fica definida por:

$$h(V) = \begin{cases} \frac{3V}{4} & \text{se } 0 \leq V < 6 \\ \frac{3V-9}{2} & \text{se } 6 \leq V \leq 7 \end{cases}$$

234.2 Sabemos que para $h = 1,5$ apenas há azeite no cilindro maior.

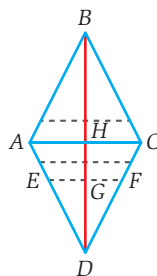
$$h(V) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{3V}{4} = 1,5 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \times 1,5 = 2 \text{ m}^3$$

$$\textbf{234.3} \quad h(6,5) = \frac{3 \times 6,5 - 9}{2} = 5,25 \text{ m}$$

$$\textbf{235.1} \quad \overline{EF} = \overline{AC} = 6 \text{ cm}$$

235.2 Como os triângulos $[ACD]$ e $[EFD]$ são semelhantes, tem-se:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{3 \times 6}{5} \Leftrightarrow \overline{EF} = 3,6 \text{ cm}$$



$$\textbf{235.3} \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{\overline{DG}}{5} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{4 \times 5}{6} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

235.4 Para $0 \leq \overline{DG} \leq 5$, ou seja, $0 \leq x \leq 5$, tem-se:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{6}{5}x \text{ cm}$$

Para $5 < \overline{DG} \leq 10$, ou seja, $5 < x \leq 10$, consideramos a semelhança existente entre os triângulos $[ACD]$ e $[EFB]$.

$$\overline{DG} = 10 - \overline{BG} = 10 - x$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{10-x}{5} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{6}{5}(10-x) \Leftrightarrow \overline{EF} = -\frac{6}{5}x + 12$$

A função l fica definida analiticamente por:

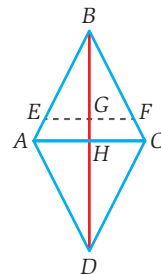
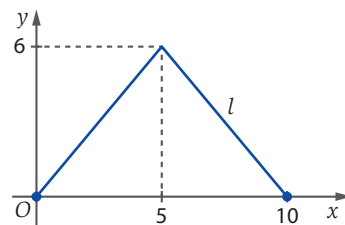
$$l(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{6}{5}x + 12 & \text{se } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

O gráfico de l é constituído, em referencial o.n., por dois segmentos de reta. Determinemos as coordenadas dos seus extremos:

$$(0, l(0)) = (0, 0) ; (5, l(5)) = (5, 6)$$

$$(10, l(10)) = (10, 0);$$

$$\text{Usando a expressão } y = -\frac{6}{5}x + 12, \text{ se } x = 5, \text{ tem-se } y = -\frac{6}{5} \times 5 + 12 = 6$$



235.5 Tendo em conta que os declives dos segmentos de reta do gráfico de l são simétricos e têm um extremo comum, sabemos que uma expressão analítica que define a função l é da forma $l(x) = a|x - b| + c$, com $a \neq 0$. A partir do gráfico da função $y = |x|$, o da função l obtém-se pela dilatação vertical de coeficiente $\frac{6}{5}$, seguida de simetria de eixo Ox e, depois, pela translação de vetor $\vec{u}(5, 6)$. Assim, tem-se:

$$l(x) = -\frac{6}{5}|x - 5| + 6; \quad D_l = [0, 10]$$

236. $2 = a|1 + 3| \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

237.1 $f(x) = -3|x + 1| + 5$

O vértice do gráfico de f tem coordenadas $(-1, 5)$. Como o gráfico de f está invertido relativamente ao da função definida por $y = |x|$, o contradomínio de f é $]-\infty, 5]$.

237.2 $f(0) = -3|0 + 1| + 5 = -2$

O ponto de interseção com o eixo Oy tem coordenadas $(0, 2)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3|x + 1| + 5 = 0 \Leftrightarrow |x + 1| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{5}{3} \vee x + 1 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{8}{3}$$

Os pontos de interseção com o eixo Ox têm coordenadas $(-\frac{8}{3}, 0)$ e $(\frac{2}{3}, 0)$.

237.3 $f(x) > -4 \Leftrightarrow -3|x + 1| + 5 > -4 \Leftrightarrow -3|x + 1| > -9 \Leftrightarrow |x + 1| < 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x + 1 < 3 \wedge x + 1 > -3 \Leftrightarrow x < 2 \wedge x > -4$

Conjunto-solução: $]-4, 2[$

238. Para $2 - x \leq 0$, ou seja, $x \geq 2$, tem-se:

$$|2 - x| + 2x = -(2 - x) + 2x = -2 + x + 2x = 3x - 2$$

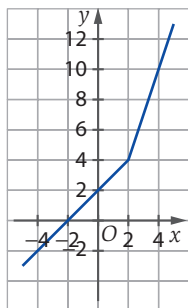
Para $2 - x > 0$, ou seja, $x < 2$, tem-se:

$$|2 - x| + 2x = 2 - x + 2x = x + 2$$

Resumindo, tem-se:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Graficamente, tem-se:



Cálculos auxiliares:

$$g(-2) = |2 - (-2)| + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$$

$$g(0) = |2 - 0| + 2 \times 0 = 2$$

$$g(4) = |2 - 4| + 2 \times 4 = 2 + 8 = 10$$

239.1 $f(x) = |2x| - 1$

$$f(-x) = |2(-x)| - 1 = |-2x| - 1 = |2x| - 1 = f(x)$$

f é par, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = f(x)$$

239.2 $f(x) = 2x^3 - 3x$

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x) = -f(x)$$

f é ímpar, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = -f(x)$$

239.3 $f(x) = x|5x|$

$$f(-x) = -x|5(-x)| = -x|-5x| = -x|5x| = -f(x)$$

f é ímpar, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = -f(x)$$

239.4 $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$

$$f(-x) = 5\sqrt[3]{(-x)} = -5\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

f é ímpar, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = -f(x)$$

239.5 $f(x) = 5x^2 - 3x^4$

$$f(-x) = 5(-x)^2 - 3(-x)^4 = 5x^2 - 3x^4 = f(x)$$

f é par, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = f(x)$$

239.6 $f(x) = 1 + \sqrt{16 - x^2}$

$$f(-x) = 1 + \sqrt{16 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{16 - x^2} = f(x)$$

f é par, pois verifica-se que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = f(x)$$

239.7 $f(x) = (x - 1)^2$

$$f(-x) = (-x - 1)^2 = (-(x + 1))^2 = (x + 1)^2$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, a função não é par nem ímpar.

239.8 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$

$$f(-x) = 2\sqrt{-x+1} - 1$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, a função não é par nem ímpar.

240. As funções definidas por f_a têm todos os zeros em $x = -2$ e $x = 1$. A abscissa do vértice é $h = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

A reta que contém todos os vértices da parábola tem equação $x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{A ordenada do vértice é } f_a\left(-\frac{1}{2}\right) = a\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = a\left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}a$$

A ordenada do vértice em função de a é $-\frac{9}{4}a$.

Se $a > 0$,

a concavidade está virada para cima e a função é estritamente decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

e estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Se $a < 0$,

a concavidade está virada para baixo e a função é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

e estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

TESTE – Página 169

1.1

- a. Opção correta: B
- b. Opção correta: D
- c. Opção correta: B

$$1.2 \quad h(x) = 1 \Leftrightarrow (-x^2 + 1 = 1 \wedge x < 1) \vee (\sqrt{x-1} = 1 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \wedge x < 1) \vee (x + 1 = 1 \wedge x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \wedge x < 1) \vee (x = 2 \wedge x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Opção correta: C

2. O gráfico da função f pela translação de vetor de coordenadas $(1, 0)$ da parábola definida por $y = x^2$, logo, $f(x) = (x-2)^2$.
O gráfico da função g pela translação de vetor de coordenadas $(2, 1)$ da parábola definida por $y = x^2$, logo, $g(x) = (x-2)^2 + 1$.

Opção correta: A

3. Como o eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 2$, a abscissa do vértice da parábola é igual a 2. Como o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, a ordenada do vértice da parábola é um número real positivo. Portanto, o vértice da parábola, V , tem coordenadas $(2, k)$, com $k > 0$.

Como 5 é um dos zeros de f ($f(5) = 0$), um dos pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas, que designaremos por A , tem coordenadas $(5, 0)$. Sendo a reta de equação $x = 2$ o eixo de simetria da parábola, o outro ponto de interseção da parábola com o eixo das abscissas, que designaremos por B , tem coordenadas $(-1, 0)$.

$$\overline{AB} = 5 - (-1) = 6$$

$$\overline{AV} = d(A, V) = \sqrt{(5-2)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{9+k^2}$$

$$\overline{BV} = d(B, V) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{9+k^2}$$

Como o perímetro do triângulo $[ABV]$ é igual a 16, tem-se:

$$6 + 2\sqrt{9+k^2} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{9+k^2} = 5 \Leftrightarrow 9+k^2 = 25 \Leftrightarrow k = \sqrt{16} = 4$$

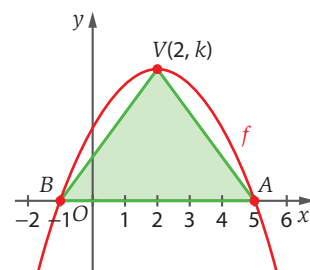
Uma expressão analítica da função f é da forma:

$$f(x) = a(x-2)^2 + 4 \quad (a \neq 0)$$

O valor de a obtém-se pela consideração da igualdade $f(5) = 0$.

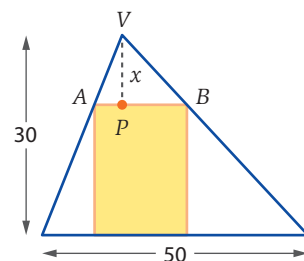
$$f(5) = 0 \Leftrightarrow a(5-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 9a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}$$

Uma expressão analítica de f é, portanto, $f(x) = -\frac{4}{9}(x-2)^2 + 4$.



- 4.1 O triângulo $[ABV]$ é semelhante ao triângulo escaleno de base 50 cm e altura correspondente igual a 30 cm, pois os triângulos têm de um para o outro dois ângulos iguais. Assim, tem-se:

$$\frac{x}{30} = \frac{\overline{AB}}{50} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5}{3}x$$



4.2 $A(x) = (30 - x) \times \frac{5}{3}x = 50x - \frac{5x^2}{3}$

Tendo em conta que o ponto P é um ponto pertencente à altura correspondente ao lado do triângulo que mede 50 cm, tem-se $x \in]0, 30[$.

4.3 O gráfico da função A é uma parábola com a concavidade voltada para baixo $\left(-\frac{5}{3} < 0\right)$, logo a área do retângulo é máxima quando x toma o valor da abcissa do vértice da parábola, h .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \times \left(-\frac{5}{3}\right)} = 15$$

A área do retângulo é máxima quando o ponto P está a 15 cm do vértice V .

5.1 $a(0) = 1,6$

A altura do projétil no instante em que foi lançado era de 1,6 metros.

5.2 O gráfico da função a é uma parábola com a concavidade voltada para baixo $(-4,9 < 0)$, pelo que a altura máxima atingida pelo projétil é igual à ordenada do vértice da parábola.

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 1,6 - \frac{39,2^2}{4 \times (-4,9)} = 80$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 80 metros.

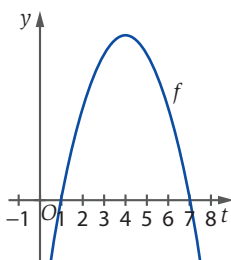
5.3 $a(t) > 35,9 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 1,6 > 35,9 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t - 34,3 > 0$

Determinemos os zeros da função definida por $f(t) = -4,9t^2 + 39,2t - 34,3$.

$$-4,9t^2 + 39,2t - 34,3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm \sqrt{39,2^2 - 4 \times (-4,9) \times (-34,3)}}{2 \times (-4,9)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm 29,4}{-9,8} \Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm 29,4}{-9,8} \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 7$$

Façamos, agora, o esboço do gráfico de f .



$$-4,9t^2 + 39,2t - 34,3 > 0 \Leftrightarrow t \in]1, 7[$$

O projétil esteve a uma altura superior a 35,9 metros durante 6 segundos.

6.

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Uma equação do eixo de simetria do gráfico dessa função é $x = 1$.

$$7. \sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x-5})^2 = (5 - \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x \Leftrightarrow 10\sqrt{x} = 30 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$$

Verificação:

$$\sqrt{9-5} + \sqrt{9} = 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5 \text{ (proposição verdadeira)}$$

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 9$$

8.1

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow (|x+1| < 1 \wedge x < 1) \vee (2\sqrt{x-1} < 1 \wedge x \geq 1)$$

Para $x < 1$:

$$|x+1| < 1 \Leftrightarrow x+1 < 1 \wedge x+1 > -1 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x > -2$$

Para $x \geq 1$:

$$2\sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x-1})^2 < 1 \Leftrightarrow 4x-4 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$$

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow (-2 < x < 0 \wedge x < 1) \vee \left(x < \frac{5}{4} \wedge x \geq 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee 1 \leq x < \frac{5}{4}$$

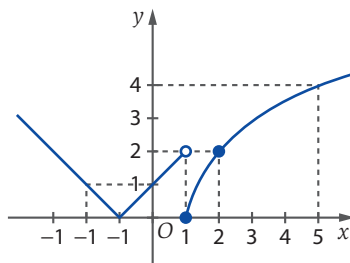
$$\text{O conjunto-solução é }]-2, 0[\cup \left[1, \frac{5}{4}\right[$$

8.2 Para $x < 1$, o gráfico é o que resulta da translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$ do gráfico da função definida por $y = |x|$, em $x < 2$.

Para $x \geq 1$ o gráfico é o que resulta da translação de vetor $\vec{v}(1, 0)$, seguida da dilatação vertical de coeficiente 2, do gráfico da função definida por $y = \sqrt{x}$.

Determinemos as imagens de alguns objetos de D_f para obter as coordenadas de alguns pontos do gráfico:

$$f(-2) = 1; f(-1) = 0; f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 2$$



8.3 f é não monótona: f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e f é crescente em $[-1, 1[$ e em $[1, +\infty[$.

Extremos: mínimo absoluto 0; não tem máximos.