

RESOLUÇÕES

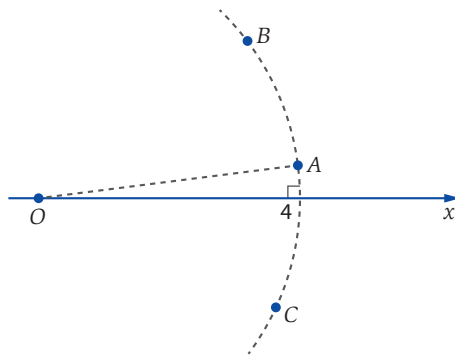
Geometria Analítica

Geometria Analítica

1. GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

$$1.1 \quad \overline{OA}^2 = 4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = \frac{64}{4} + \frac{1}{4} \xLeftrightarrow{\overline{OA} > 0} \overline{OA} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

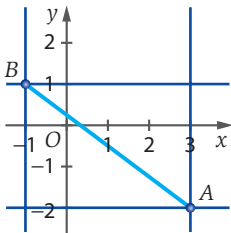
1.2 Por exemplo os pontos B e C , marcados sobre a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$, tal como na figura que se segue.



2. Pontos com a mesma abscissa: C, F e J ; A e G ; B, D e K ; E e L .

Pontos com a mesma ordenada: A e B ; C, D e E ; F, G e H ; J, K e L .

3.1



$$3.2 \quad \overline{AB}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 + 9 \xLeftrightarrow{\overline{AB} > 0} \overline{AB} = 5$$

$$4. \quad \overline{EF} = |7 - 2| = 5$$

$$\overline{GH} = |-3 - (-1)| = 2$$

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 3^2 \xLeftrightarrow{\overline{AB} > 0} \overline{AB} = 5$$

$$\text{ou } \overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(-2 - (-6))^2 + (-4 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\overline{CD}^2 = 5^2 + 3^2 \xLeftrightarrow{\overline{CD} > 0} \overline{CD} = \sqrt{34}$$

$$\text{ou } \overline{CD} = d(C, D) = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$5.1 \quad A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_2, y_1)$$

$$5.2 \quad P = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$6.1 \quad d(O, A) = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$$

$$6.2 \quad d(B, C) = \sqrt{\left(3 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{146}}{3}$$

$$6.3 \quad d(D, C) = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 + (2-\sqrt{2})^2} = \sqrt{5-2\sqrt{5}+1+4-4\sqrt{2}+2} = \sqrt{12-4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$$

$$7.1 \quad \left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$7.2 \quad \left(\frac{\frac{1}{2}+(-1)}{2}, \frac{-4+\frac{3}{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$7.3 \quad \left(\frac{-\frac{3}{4}+6}{2}, \frac{3+\frac{5}{2}}{2}\right) = \left(\frac{21}{8}, \frac{11}{4}\right)$$

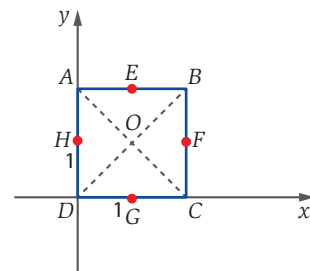
$$8. \quad M_{[AB]} \left(\frac{-6+0}{2}, \frac{0+5}{2} \right) = M_{[AB]} \left(-3, \frac{5}{2} \right); \quad M_{[CD]} \left(\frac{2+2}{2}, \frac{-5+0}{2} \right) = M_{[CD]} \left(2, -\frac{5}{2} \right);$$

$$M_{[EF]} \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = M_{[EF]} \left(\frac{5}{2}, 1 \right); \quad M_{[GH]} \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-1+(-4)}{2} \right) = M_{[GH]} \left(4, -\frac{5}{2} \right)$$

9.1

$A(0, 2); B(2, 2); C(2, 0); D(0, 0); E(1, 2);$

$F(2, 1); G(1, 0); H(0, 1); O(1, 1)$

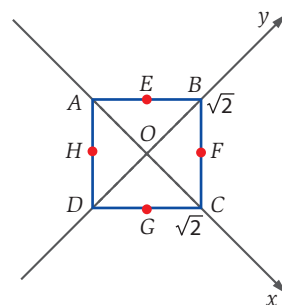


9.2

Cálculos auxiliares: $\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 $\overline{AC} > 0$

$A(-\sqrt{2}, 0); B(0, \sqrt{2}); C(\sqrt{2}, 0); D(0, -\sqrt{2});$

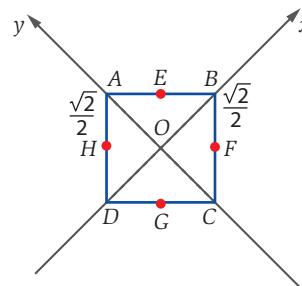
$E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); O(0, 0)$



9.3

$$A\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); E\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right); G\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right); H\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right); O(0, 0)$$



10.1 $d(A, D) = d(B, D)$

10.2 $d(A, C) < d(B, C)$

10.3 $d(A, E) > d(B, E)$

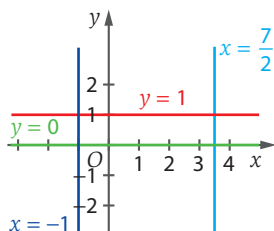
10.4 $d(B, F) = d(A, F)$

11.1 $x = -1$

11.2 $y = 0$

11.3 $x = \frac{7}{2}$

11.4 $y = 1$



12.1

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

12.2

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

12.3

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

12.4

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{6}{11}x + \frac{115}{44}$$

13.1 $M_{[AB]}\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M_{[AB]}(0, 0); M_{[AC]}\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M_{[AC]}(-2, 2); M_{[BC]}\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M_{[BC]}(2, 2)$

13.2 Mediatriz de $[AB]$: $x = 0$

Mediatriz de $[AC]$:

$$(x+4)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow y = -x$$

Mediatriz de $[BC]$:

$$(x-4)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow y = x$$

14. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$; $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$

15.1 $C(0, 0)$; $r = 3$

15.2 $C(1, -2)$; $r = \sqrt{5}$

15.3 $C(0, -4)$; $r = 5$

16.

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9 + 1 + 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 13$$

$$C(3, 1); r = \sqrt{13}$$

17.1

a. Centro: $O(0, 0)$

b. Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 8$

c. Eixo menor: $\overline{CD} = 6$

d. Eixo maior: $\overline{AB} = 10$

e. Vértices: A, B, C, D

17.2 O ponto E pertence à elipse, pois a soma das distâncias de E aos focos é igual ao eixo maior.

$$d(E, F_1) + d(E, F_2) = \sqrt{(3+4)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(3-4)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} = 10$$

17.3 Os pontos da elipse de abscissa -1 têm coordenadas da forma $(-1, y)$, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{(-1+4)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(-1-4)^2 + (y-0)^2} = 10. \text{ Determinemos as soluções desta equação.}$$

$$\sqrt{9+y^2} + \sqrt{25+y^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{9+y^2} = 10 - \sqrt{25+y^2} \Rightarrow (\sqrt{9+y^2})^2 = (10 - \sqrt{25+y^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{25+y^2} + 25 + y^2 \Leftrightarrow 20\sqrt{25+y^2} = 100 + 25 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10\sqrt{25+y^2})^2 = 58^2 \Leftrightarrow 100(25+y^2) = 3364 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3364}{100} - 25 \Leftrightarrow y^2 = \frac{216}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{216}{25}} \Leftrightarrow y = \pm \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Como sabemos que há dois pontos da elipse com abscissa igual a -1 , sabemos também que as duas soluções encontradas são soluções desta equação, não havendo necessidade de verificação algébrica na equação inicial.

Assim, as ordenadas dos pontos da elipse de abscissa -1 são $-\frac{6\sqrt{6}}{5}$ e $\frac{6\sqrt{6}}{5}$.

18.1 Sendo $\overline{AP} + \overline{BP} = 14$, tem-se $2a = 14$, logo $a = 7$. Assim, tem-se $E(-7, 0)$ e $F(7, 0)$.

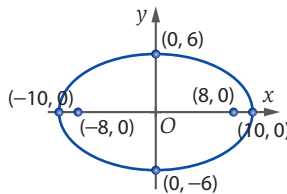
18.2 Sendo $A(-\sqrt{33}, 0)$ um dos focos da elipse, tem-se $c = \sqrt{33}$. Assim:

$$b = \sqrt{7^2 - (\sqrt{33})^2} = \sqrt{49 - 33} = \sqrt{16} = 4$$

Portanto, $C(0, -4)$ e $D(0, 4)$.

19. Sendo $F(8, 0)$ um foco, tem-se $c = 8$. Sendo $V(10, 0)$ um dos vértices no eixo das abscissas, tem-se $a = 10$. Assim, o valor de b é dado por: $b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$.

Ficamos a conhecer os vértices da elipse, que têm as seguintes coordenadas: $(-10, 0)$, $(10, 0)$, $(0, -6)$ e $(0, 6)$. Apresenta-se de seguida o esboço da elipse.



20.1 Eixo maior: 8; eixo menor: 4

20.2 Tendo em conta a alínea anterior, tem-se $a = 4$ e $b = 2$. Assim, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

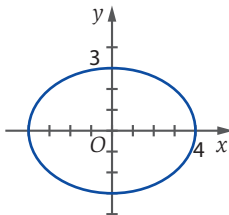
20.3 O ponto pertence à elipse, pois as suas coordenadas verificam a equação reduzida da elipse:

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{16} + \frac{1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (proposição verdadeira)}$$

21. Usando a equação reduzida da elipse, obtemos os valores de a e b :

$$a = \sqrt{16} = 4 \text{ e } b = \sqrt{9} = 3$$

Apresenta-se de seguida o esboço da elipse.



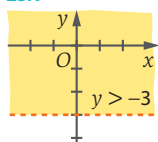
22. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{(2b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como o ponto $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ pertence à elipse, as suas coordenadas satisfazem esta equação. A sua substituição na equação, permite determinar o valor de b .

$$\frac{(\frac{3}{2})^2}{4b^2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{16b^2} + \frac{4}{16b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{13}{16b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{13}{16} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

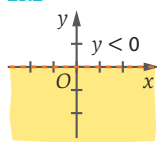
Assim, temos $b = \frac{\sqrt{13}}{4}$ e $a = 2 \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Substituindo, agora, estes valores na equação reduzida, obtém-se:

$$\frac{x^2}{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{13}}{4})^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{13}{4}} + \frac{y^2}{\frac{13}{16}} = 1$$

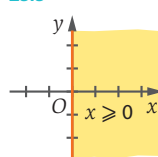
23.1



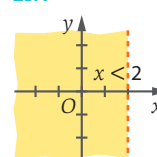
23.2



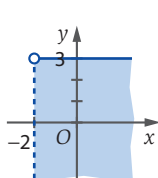
23.3



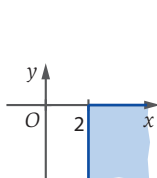
23.4



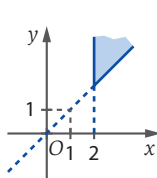
24.1



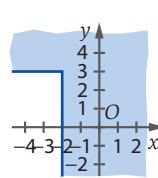
24.2



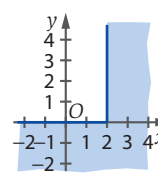
24.3



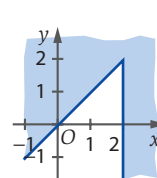
24.4



24.5



24.6



25.1 Usemos dois pontos da reta representada a tracejado para determinar a sua equação reduzida (da forma $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$). Por exemplo, os pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, -2)$. Temos:

$$a = \frac{-2 - 0}{0 - (-2)} = -1 \quad \text{e} \quad b = -2.$$

A equação reduzida da reta é, portanto, $y = -x - 2$.

Como o conjunto de pontos representados na figura é o semiplano aberto inferior definido por essa reta, a inequação que o representa é:

$$y < -x - 2$$

25.2 O conjunto de pontos representados na figura é a interseção do semiplano aberto inferior à reta de equação $y = -x - 2$ (determinada na alínea anterior) e do semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 0$. Assim, este conjunto de pontos fica representado pela conjunção das respetivas condições:

$$y < -x - 2 \wedge x \leq 0$$

25.3 O conjunto de pontos representado na figura é a reunião do semiplano aberto inferior à reta de equação $y = -x - 2$ (determinada na alínea 25.1) e do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 1$. Assim, este conjunto de pontos fica representado pela disjunção das respetivas condições:

$$y < -x - 2 \vee x \geq 1$$

25.4 Usemos dois pontos da reta oblíqua representada a cheio para determinar a sua equação reduzida. Por exemplo, os pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Temos:

$$a = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = -1 \quad \text{e} \quad b = 1$$

A equação reduzida dessa reta é, portanto, $y = -x + 1$.

O conjunto de pontos representados na figura é a reunião do semiplano aberto inferior à reta de equação $y = -x - 2$ (determinada na alínea 25.1) e do semiplano fechado superior à reta de equação $y = x + 1$. Assim, este conjunto de pontos fica representado pela disjunção das respetivas condições:

$$y < -x - 2 \vee y \geq x + 1$$

26. $r = d(A, B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = 5$

Opção correta: C

27. As coordenadas do ponto $J(3, -1)$ satisfazem unicamente a condição $(x + 2)^2 + y^2 = 26$, pelo que J pertence ao respetivo conjunto.

Opção correta: C

28. Sendo $A(-8, 0)$ e $B(0, 3)$ vértices da elipse de centro na origem do referencial, concluímos que $a=8$ e $b=3$. As retas de equações $y=3$ e $x=-8$ intersectam a elipse em um, e um só, ponto. A reta de equação $y=8$ não intersecta a elipse e a reta de equação $x=-2$ intersecta a elipse em dois pontos.

Opção correta: B

- 29.1 Da representação gráfica, deduz-se que $a=4$ e $b=1$. Para determinar a distância focal $(2c)$, começemos por determinar c :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$2c = 4\sqrt{2}$$

Opção correta: D

- 29.2 A equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

Opção correta: B

30. O conjunto de pontos representado na figura é a interseção do semiplano fechado superior à reta de equação $y=-x$ e do círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, -2)$ e raio 2, que fica representado pela condição $(x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 4 \wedge y \geq -x$.

Opção correta: C

31. O conjunto de pontos representado na figura pode ser visto como a reunião de dois conjuntos. Um deles é a interseção do semiplano aberto à direita da reta de equação $x=5$ e do semiplano aberto superior à reta de equação $y=3$. O outro conjunto é a interseção do semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x=5$ e do semiplano aberto inferior à reta de equação $y=3$. Concluindo, uma condição que representa o conjunto da figura é:

$$(x > 5 \wedge y > 3) \vee (x < 5 \wedge y < 3)$$

Opção correta: A

32. A condição $-1 \leq x \leq 0$ representa o conjunto de pontos do plano que ficam entre as retas de equações $x=-1$ e $x=0$, incluindo os pontos dessas retas. A condição $0 \leq y \leq 1$ representa o conjunto de pontos que ficam entre as retas de equações $y=0$ e $y=1$, incluindo os pontos dessas retas. A conjunção destas condições representa o quadrado representado no referencial da opção B.

Opção correta: B

- 33.1 Figura 1:

$$A(0, 4), B(-5, 0), C(3, -2)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{41}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{68}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45}$$

Figura 2:

$$A(-4, -2), B(4, 4), C(3, -3)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+4)^2 + (4+2)^2} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-4)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3+4)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{50}$$

33.2 Figura 1:

$$\sqrt{68}^2 = \sqrt{45}^2 + \sqrt{41}^2 \Leftrightarrow 68 = 86 \text{ (proposição falsa). Logo, o triângulo não é retângulo.}$$

Figura 2:

$$\sqrt{100}^2 = \sqrt{50}^2 + \sqrt{50}^2 \Leftrightarrow 100 = 100 \text{ (proposição verdadeira). Logo, o triângulo é retângulo.}$$

34.1 Os vértices do retângulo são: $A(-3, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -1)$, $D(3, 1)$.

$$\text{O perímetro do retângulo é dado por: } P = 2(\overline{AD} + \overline{AB}) = 2 \times (6 + 2) \Leftrightarrow P = 16$$

$$34.2 \overline{AO}^2 = 3^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{AO} = \sqrt{10} \quad \overline{AO} > 0$$

$$\text{O perímetro do losango é dado por: } P = 4\sqrt{10}$$

35.1 Um ponto genérico da bissetriz dos quadrantes ímpares tem coordenadas da forma (x, x) , com $x \in \mathbb{R}$. Sendo a distância de um desses pontos a $A(1, 4)$ igual a 3, tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + (x-4)^2} &= 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 - 8x + 16} = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 10x + 17} &= 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 17 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares cuja distância a $A(1, 4)$ é 3 têm coordenadas $(1, 1)$ e $(4, 4)$.

35.2 O ponto $B(-1, 2)$ pertence à reta de equação $y = 2$, pelo que os pontos dessa reta cuja distância a B é 3 têm coordenadas $(-4, 2)$ e $(2, 2)$.

36.1

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-1)^2 &= (x-5)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow 6y = -6x + 36 \Leftrightarrow y = -x + 6 \end{aligned}$$

36.2

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-3)^2 &= (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow 2y = 2x \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

36.3

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y-5)^2 &= (x-3)^2 + (y-6)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow 2y = -10x + 16 \Leftrightarrow y = -5x + 8 \end{aligned}$$

36.4

$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-5)^2 &= (x+2)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow -10y = 4x - 21 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{10} \end{aligned}$$

$$37.1 (x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$$

37.2 Sendo o diâmetro 5, o raio é $\frac{5}{2}$. Assim, a equação reduzida da circunferência é: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$

$$37.3 r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$37.4 r = \sqrt{(2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8}; \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$$

38.1 $C(1, 5)$ e $r=2$

38.2 $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e $r=3$

38.3 $C\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ e $r=1$

38.4
 $2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

$C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $r=2$

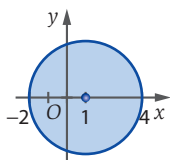
38.5
 $4x^2 + 4y^2 + 8x + 16y = -19 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 4y = -\frac{19}{4} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -\frac{19}{4} + 1 + 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{4}$

$C(-1, -2)$ e $r=\frac{1}{2}$

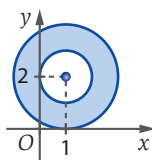
38.6
 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 4y = 8 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 8 + 4 + 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$

$C(-2, 2)$ e $r=4$

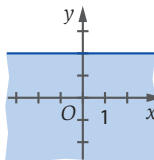
39.1



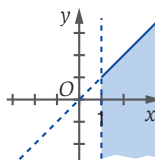
39.3



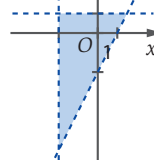
39.5



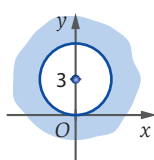
39.7



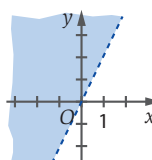
39.9



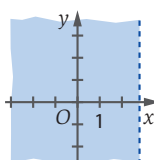
39.2



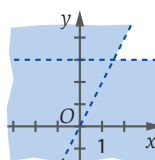
39.4



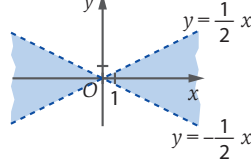
39.6



39.8



39.10



40.1 Circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.

40.2 Circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1, -3)$ e raio $\sqrt{2}$.

40.3

$4x^2 + 4y^2 + 12x + 8y = 11 \Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 + 2y = \frac{11}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + 1 = \frac{11}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{4} + \frac{9}{4} + 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 6$

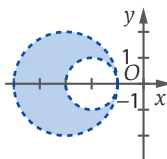
Circunferência de centro $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ e raio $\sqrt{6}$.

40.4 Elipse de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$, semieixo maior $a=3$, semieixo menor $b=2$ e focos no eixo Ox .

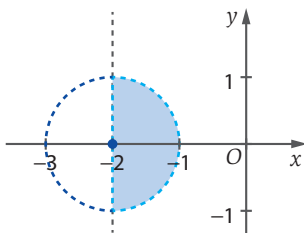
40.5 Elipse de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$, semieixo menor $a=2$, semieixo maior $b=3$ e focos no eixo Oy .

40.6 Coroa circular definida pelas circunferências de centro no ponto de coordenadas $(3, -1)$ e raios 1 e 2.

40.7 Conjunto de pontos exteriores à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e raio 1 e interiores à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e raio 2, conforme se ilustra na figura que se segue.



40.8 Conjunto de pontos interiores à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e raio 1 com abscissa superior a -2 , conforme se ilustra na figura que se segue.



41.1 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

41.2 $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \wedge x < 2$

41.3 $(x-3)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \wedge (x \geq -2 \vee y \geq 5)$

41.4 Determinemos a equação reduzida da reta representada a tracejado:

O declive é dado por $a = \frac{0 - (-5)}{0 - (-8)} = \frac{5}{8}$ e a ordenada na origem é $b = 0$. Assim, o semiplano aberto inferior à reta é caracterizado por $y < \frac{5}{8}x$ e o conjunto de pontos da figura por $(x+3)^2 + y^2 \leq 25 \vee y < \frac{5}{8}x$.

41.5 $(x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 9 \wedge y \geq -x$

41.6 $(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-4)^2 + y^2 \leq 4$

42.1 Da equação reduzida, obtém-se: $a = \sqrt{16} = 4$ e $b = \sqrt{1} = 1$.

O valor de c obtém-se de $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$.

Os vértices da elipse são os pontos de coordenadas $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e os focos são os pontos de coordenadas $(-\sqrt{15}, 0)$ e $(\sqrt{15}, 0)$.

42.2 A equação reduzida da elipse obtém-se dividindo ambos os membros da equação dada por 144, sendo:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Da equação reduzida, obtém-se: $a = \sqrt{16} = 4$ e $b = \sqrt{9} = 3$.

O valor de c obtém-se de $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Os vértices da elipse são os pontos de coordenadas $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -3)$ e $(0, 3)$ e os focos são os pontos de coordenadas $(-\sqrt{7}, 0)$ e $(\sqrt{7}, 0)$.

43. Sendo o semieixo maior 9, tem-se $a = 9$, pelo que a equação reduzida da elipse é da forma:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } b > 0$$

Como o ponto de coordenadas (4, 6) pertence à elipse, terá de satisfazer a respetiva equação, o que permite determinar o valor de b .

$$\frac{4^2}{81} + \frac{6^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{81} + \frac{16}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{b^2} = 1 - \frac{36}{81} \Leftrightarrow b^2 = 16 \times \frac{81}{45} \Leftrightarrow b^2 = \frac{144}{5}$$

A equação reduzida desta elipse é, portanto, $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1$.

44.1 $y < -5$

44.2 $x > 0$

44.3 $y \geq x$

44.4 $y \leq -x$

44.5 $x > 2 \wedge y \geq 2$

44.6 $x < 2 \vee y \leq 2$

44.7 $x > 2 \vee y > 2$

44.8 $y \geq 0 \vee y < -2$

44.9 $-2 \leq x \leq 1 \wedge y \geq -2$ (ou $x \geq -2 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq -2$)

44.10 $(y \leq x \wedge y \geq -x) \vee (y \leq -x \wedge y \geq x)$

44.11 $x < 2 \wedge y \leq x$

44.12 $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$ (ou $|x| \leq 2 \wedge |y| \leq 2$)

45. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \wedge (x < -3 \vee y > 1)$

46.1 $(2, k+1) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge k+1 = 3 \Leftrightarrow k = 2$

46.2 Sendo $D(x, y)$, tem-se $(3, 1) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) \Leftrightarrow 3 = \frac{1+x}{2} \wedge 1 = \frac{5+y}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 5 \wedge y = -3$, logo $D(5, -3)$.

46.3 $d(A, D) = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{80} = \sqrt{5 \times 2^4} = 4\sqrt{5}$

46.4 $(x-1)^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow -16y = -8x + 8$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

46.5 $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(1-3)^2 + (5-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{5 \times 2^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 5$

47. Consideremos um triângulo $[ABC]$ retângulo em C , com catetos a e b .

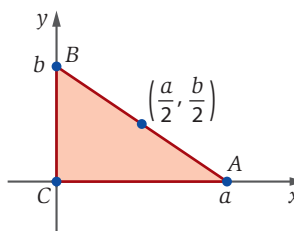
Tomando para origem do referencial o vértice C , tem-se, sem perda de generalidade, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ e $C(0, 0)$. O ponto médio da hipotenusa deste triângulo tem coordenadas $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Determinemos as distâncias de $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ a A , a B e a C .

$$d(A, M) = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$d(B, M) = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$d(C, M) = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$



Tem-se: $d(A, M) = d(B, M) = d(C, M) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Pelo teorema de Pitágoras, $\sqrt{a^2 + b^2}$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo, sendo a distância determinada igual a metade deste comprimento.

Demonstramos, assim, que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é equidistante dos respectivos vértices, sendo a distância a cada um destes igual a metade do comprimento da hipotenusa.

48.1 $A(0, 6)$; $B(6, 6)$; $C(6, 0)$

$$48.2 \overline{PA} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \times 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(3-6)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \times 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{PC} = \sqrt{(3-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

$[AB]$, pois P pertence à mediatriz de $[AB]$.

$$48.3 x^2 + (y-6)^2 = (x-6)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 12x + 36 + y^2 \Leftrightarrow y = x$$

$$48.4 \overline{AC} = \sqrt{(0-6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$$

$$48.5 \text{ Tendo em conta a semelhança dos triângulos } [ABC] \text{ e } [DBE], \text{ tem-se: } \overline{DE} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}. \text{ Por outro lado, } \overline{DF} = \overline{FE} = \frac{6}{2} = 3.$$

Recorrendo ao recíproco do teorema de Pitágoras, tem-se $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow 18 = 18$, o que demonstra que o triângulo $[DFE]$ é retângulo em F .

48.6 O centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é o ponto F , pois é equidistante dos vértices do triângulo (ver problema 47, pág. 29, vol. 2) e o seu raio é $\overline{AF} = 3\sqrt{2}$. Assim, uma equação desta circunferência é:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{2})^2, \text{ ou seja, } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$$

$$48.7 0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6$$

49.1

$$a. (3, -2) = \left(\frac{a+1+3}{2}, \frac{2+2-b}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{a+4}{2} = 3 \wedge \frac{4-b}{2} = -2 \Leftrightarrow a=2 \wedge b=8$$

$$b. (a+1, 2) = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2-b-2}{2}\right) \Leftrightarrow a+1 = 3 \wedge \frac{-b}{2} = 2 \Leftrightarrow a=2 \wedge b=-4$$

49.2 Começemos por determinar as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(a+1-3)^2 + (2-(2-b))^2} = \sqrt{(a-2)^2 + b^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-3)^2 + (2-b-(-2))^2} = \sqrt{(4-b)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(a+1-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 4^2}$$

Sabendo que o triângulo é equilátero, tem-se:

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 4^2} \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = (a-2)^2 + 4^2 \Leftrightarrow b = \pm 4$$

Considerando $b = 4$, conclui-se que $\overline{BC}$ é nulo, pelo que consideraremos $b = -4$. Tem-se:

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + 4^2} = \sqrt{8^2} \Leftrightarrow (a-2)^2 + 4^2 = 8^2 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-2 = \pm \sqrt{48} \Leftrightarrow a = 2 \pm 4\sqrt{3}$$

Assim, $A(3-4\sqrt{3}, 2)$ ou $A(3+4\sqrt{3}, 2)$ e $B(3, 6)$.

49.3 O círculo de centro em C e raio 5 fica definido pela seguinte inequação:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 25$$

Substituindo as coordenadas do ponto A , obtém-se:

$$(a+1-3)^2 + (2+2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 \leq 0$$

Para resolver esta inequação, fatorizemos o polinómio, em a , $a^2 - 4a - 5$.

$$a^2 - 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 5$$

$$a^2 - 4a - 5 = (a+1)(a-5)$$

a	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$a+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$a-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(a+1)(a-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Concluindo, $a^2 - 4a - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 5$

49.4 Trata-se da mediatriz do segmento de reta $[AC]$, com $A(3, 2)$ e $C(3, -2)$. Como A e C têm a mesma abscissa, a mediatriz é a

reta horizontal de equação $y = \frac{2+(-2)}{2}$, ou seja, $y = 0$.

50.1 Começemos por determinar a altura do trapézio: $h^2 = 2^2 - 1^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Assim, $A(3, \sqrt{3})$, $B(-3, \sqrt{3})$, $C(-2, 0)$ e $D(2, 0)$.

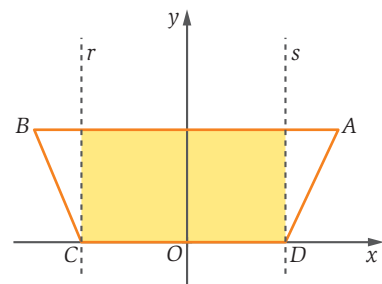
50.2 $-2 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{3}$

50.3 $A = \frac{6+4}{2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

50.4 Trata-se do círculo de centro em O e raio $\overline{OA}$.

$$\overline{OA} = d(O, A) = \sqrt{(3-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{12}$$

A condição pedida é $x^2 + y^2 \leq 12$.



51.1 Substituindo as coordenadas da origem do referencial na equação da circunferência, obtém-se:

$$(0-2)^2 + (0-2)^2 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \text{ (proposição verdadeira).}$$

Portanto, a origem pertence à circunferência.

51.2 O raio da circunferência é $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Assim, tem-se:

$$A(2, 2+2\sqrt{2}), B(2-2\sqrt{2}, 2), C(2, 2-2\sqrt{2}) \text{ e } D(2+2\sqrt{2}, 2).$$

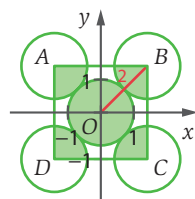
51.3 A diagonal do quadrado mede $4\sqrt{2}$. Usando o teorema de Pitágoras podemos determinar o lado l do quadrado:

$$l^2 + l^2 = (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 32 \Leftrightarrow l^2 = 16 \Leftrightarrow_{l>0} l = 4$$

O perímetro é, então, $P = 4 \times 4 = 16$.

52.1 A área total sombreada é igual à área de dois dos cinco círculos. A área total não sombreada é igual à área de três dos cinco círculos. Assim, a razão solicitada é $\frac{2}{3}$.

52.2 Consideremos um referencial com origem no centro do círculo central e eixos paralelos aos lados do quadrado.



Cálculos auxiliares:

$$l^2 + l^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 4 \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow_{l>0} l = \sqrt{2}$$

$$O(0, 0), A(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, \sqrt{2}), C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ e } D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

52.3

$$\begin{aligned} (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 &= (x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 &= x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 \Leftrightarrow y = -x \end{aligned}$$

52.4 Círculo de centro em $A: (x+\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 1$

Círculo de centro em $B: (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 1$

Círculo de centro em $C: (x-\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \leq 1$

Círculo de centro em $D: (x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \leq 1$

$$\mathbf{52.5} \quad [x^2 + y^2 \leq 1 \vee (x+\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 1 \vee (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 1 \vee$$

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \leq 1 \vee (x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \leq 1] \wedge$$

$$\wedge -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \wedge -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

53.1 Mediatriz do segmento de reta $[AB]$:

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = -8x - 32 \Leftrightarrow y = x + 4$$

53.2 Círculo de centro no ponto C e raio 4: $(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 16$

$$53.3 \quad \sqrt{(x+5)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-4)^2 = 4(x-1)^2 + 4(y-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 4(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 8y + 16) \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 3y^2 - 24y + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 16 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16 \text{ Circunferência de centro no ponto } (3, 4) \text{ e raio } 4.$$

53.4 Elipse de eixo maior 7, com focos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$, de equação reduzida:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$$

Cálculo auxiliar: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{33}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

53.5 Retas de equações $y = -3$ e $y = 1$.

53.6

Mediatriz de $[OG]$:

$$x^2 + y^2 = (x+3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = -6x - 18 \Leftrightarrow y = -x - 3$$

Circunferência de centro no ponto G e tangente aos eixos coordenados: $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$

$$y = -x - 3 \wedge (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

$$y = -x - 3 \wedge (x+3)^2 + (-x-3+3)^2 = 9$$

$$y = -x - 3 \wedge x^2 + 6x + 9 + x^2 = 9$$

$$y = -x - 3 \wedge 2x^2 + 6x = 0$$

$$y = -x - 3 \wedge (x=0 \vee x=-3)$$

$$(x=-3 \wedge y=0) \vee (x=0 \wedge y=-3)$$

Pontos de interseção da mediatriz do segmento de reta $[OG]$ com a circunferência de centro no ponto G e raio 3: $(-3, 0)$ e $(0, -3)$.

53.7

a. Circunferência de centro na origem e raio 1: $x^2 + y^2 = 1$

b. Os pontos da reta têm coordenadas $(x, 5-x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Os pontos médios dos segmentos de reta definidos pelo ponto $H(1, 3)$ e por cada ponto da reta têm coordenadas $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{8-x}{2}\right)$.

Designado por x' a abscissa destes pontos, tem-se $x' = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x = 2x' - 1$. Assim, a ordenada destes pontos é dada, em função da abscissa, por $\frac{8-2x'+1}{2} = -x' + \frac{9}{2}$.

Concluindo, o conjunto de pontos nas condições do enunciado é a reta de equação reduzida $y = -x + \frac{9}{2}$, ou seja, a reta de equação $x + y = \frac{9}{2}$.

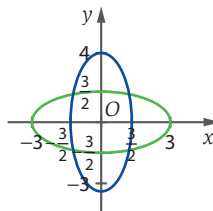
54.1 Determinemos os semieixos maior e menor de cada uma das elipses:

$$\bullet \quad 4x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ e } b = \sqrt{9} = 3$$

$$\bullet \quad x^2 + 4y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$a = \sqrt{9} = 3 \text{ e } b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$



54.2 As coordenadas dos pontos de interseção das elipses têm de satisfazer as respectivas equações, pelo que são as soluções do sistema dessas duas equações.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 4y^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 - 4x^2 \\ x^2 + 4(9 - 4x^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 - 4x^2 \\ x^2 + 36 - 16x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 - 4x^2 \\ 15x^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 - 4x^2 \\ x^2 = \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y^2 = 9 - 4 \times \frac{9}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 9 - 4 \times \frac{9}{5} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{9}{5} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = \frac{9}{5} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

Os pontos de interseção das elipses têm coordenadas:

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \text{ e } \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

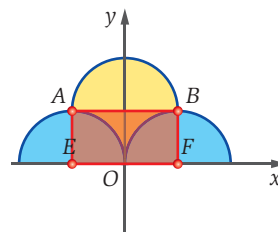
55.1 $A(-2, 2)$, $B(2, 2)$, $E(-2, 0)$ e $F(2, 0)$.

55.2

a. $x = 2$

b. $y = 2$

55.3 A região colorida pode ser decomposta no retângulo $[ABFE]$, em dois quartos de círculo e num semicírculo. Assim, a sua área pode ser obtida pela soma da área desse retângulo com a área de um círculo de raio 2, ou seja, $2 \times 4 + \pi \times 2^2 = 8 + 4\pi$.



56.1 A circunferência tem centro no ponto $A(-1, 1)$ e raio 3, pelo que fica definida pela seguinte equação reduzida:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

56.2 As coordenadas dos pontos de interseção da reta s com a circunferência têm de satisfazer as respectivas equações, pelo que são as soluções do sistema dessas duas equações.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ y = -x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 9 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)^2 = 9 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Os pontos de interseção da reta s com a circunferência têm coordenadas

$$\left(-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

56.3 $(y \geq -x \wedge y \leq 4 \wedge x \leq 0) \vee [(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \wedge y \geq -x \wedge x \leq 0]$

57.1 Consideremos C_1 o ponto médio do segmento $[AB]$, C_2 o ponto médio do segmento $[BC]$ e C_3 o ponto médio do segmento $[AC]$. Tem-se $C_1(2, 3)$, $C_2(2, 1)$ e $C_3(-1, 1)$.

57.2 Semicírculo de centro em $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \wedge y \geq 3$

Semicírculo de centro em $C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 13 \wedge y \leq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Cálculos auxiliares (determinação de equação reduzida da reta BC):

$$a = \frac{-1-3}{-1-5} = \frac{2}{3}; -1 = \frac{2}{3}(-1) + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}; BC: y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Semicírculo de centro em $C_3: (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge x \leq -1$

57.3

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8y = -12x + 32 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$\text{57.4 } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{3}{2}x + 4 - 3\right)^2 = 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{4}x^2 - 3x + 1 = 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 28x - 16 = 0 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 13 \times (-16)}}{2 \times 13} \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28 \pm \sqrt{1616}}{26} \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28 \pm 4\sqrt{101}}{26} \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14 \pm 2\sqrt{101}}{13} \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}$$

O ponto de interseção da semicircunferência de diâmetro $[AB]$ com a reta r tem abscissa negativa, logo $x = \frac{14 - 2\sqrt{101}}{13}$ e

$$y = -\frac{3}{2} \left(\frac{14 - 2\sqrt{101}}{13} \right) + 4 = \frac{31 + 3\sqrt{101}}{13}. \text{ Assim, as coordenadas do ponto de interseção são } \left(\frac{14 - 2\sqrt{101}}{13}, \frac{31 + 3\sqrt{101}}{13} \right).$$

$$\text{57.5 } \overline{BC} = \sqrt{(-1-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\frac{\pi 3^2}{2} + \frac{\pi 2^2}{2} = \frac{\pi (\sqrt{13})^2}{2} \Leftrightarrow 9 + 4 = 13 \Leftrightarrow 13 = 13$$

57.6

$$\frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

2. CÁLCULO VETORIAL NO PLANO

58.1 Os segmentos que têm a mesma direção de $[A, B]$ são d e g .

58.2 Na figura não há segmentos orientados equipolentes, pois apesar de haver segmentos com a mesma direção, não têm o mesmo sentido ou não têm o mesmo comprimento.

59.1 $[C, D]$ e $[E, F]$; $[G, H]$ e $[K, L]$; $[O, P]$, $[Q, R]$ e $[M', N']$; $[S, T]$ e $[B', A']$; $[M, N]$ e $[U, V]$; $[K', L']$ e $[O', P']$.

59.2

a. $\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = 3$ e $\|\vec{D'C}\| = 5$

b. $\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = 1$ e $\|\vec{D'C}\| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

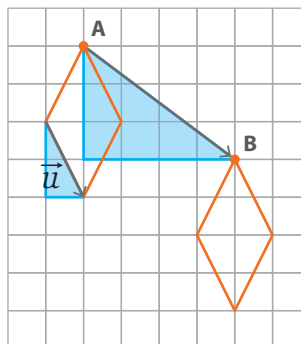
60. Considerando a quadrícula, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

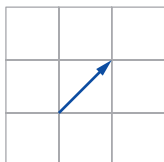
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Tomando $\|\vec{u}\|$ para unidade de medida, tem-se:

$$\|\vec{AB}\| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



61. Por exemplo:



62.1 $\vec{FA} + \vec{AB} = \vec{FB}$

62.2 $\vec{BG} + \vec{GC} = \vec{BC}$

62.3 $\vec{CD} + \vec{DE} = \vec{CE}$

62.4 $\vec{GE} + \vec{ML} = \vec{GE} + \vec{ED} = \vec{GD}$

62.5 $\vec{GD} + \vec{DH} = \vec{GH}$

63.1 $A + \vec{AF} = F$

63.2 $F + \vec{DL} = F + \vec{FH} = H$

63.3 $G + \vec{EH} = G + \vec{GK} = K$

63.4 $L + \vec{AK} = L + \vec{LE} = E$

64. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ e $\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}\right)\vec{b}$

62.6 $\vec{IK} + \vec{DC} = \vec{IK} + \vec{KJ} = \vec{IJ}$

62.7 $\vec{IG} + (-\vec{AG}) = \vec{IG} + \vec{GA} = \vec{IA}$

62.8 $\vec{KL} + \vec{BC} = \vec{KL} + \vec{LM} = \vec{KM}$

62.9 $\vec{KC} + (-\vec{FA}) = \vec{KC} + \vec{AF} = \vec{KC} + \vec{CG} = \vec{KG}$

62.10 $\vec{IE} + (-\vec{GE}) = \vec{IE} + \vec{EG} = \vec{IG}$

63.5 $\vec{AF} + \vec{FD} = \vec{AD}$

63.6 $\vec{AD} + (-\vec{HD}) = \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{AH}$

63.7 $\vec{AH} + (-\vec{HB}) = \vec{AH} + \vec{BH} = \vec{AH} + \vec{HD} = \vec{AD}$

63.8 $\vec{GH} + \vec{FH} = \vec{GH} + \vec{HG} = \vec{0}$

RESOLUÇÕES

65. Por exemplo:



65.1



65.3



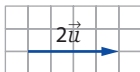
65.5



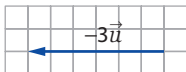
65.7



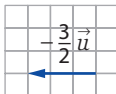
65.2



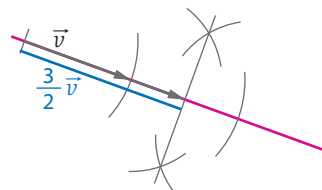
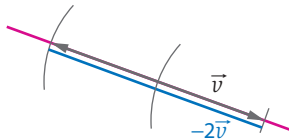
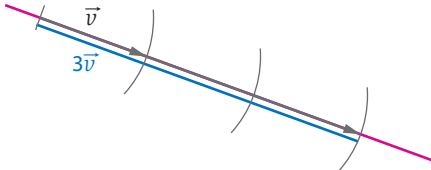
65.4



65.6



66.



67.1

a. Por exemplo, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

b. Por exemplo, $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$.

c. Por exemplo, $\frac{1}{2}\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IK}$.

d. Por exemplo, $-\frac{1}{4}\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{JI}$.

67.2

a. $\|\overrightarrow{FH}\| = 4 \times \|\overrightarrow{AB}\| = 4$

b. $\|2\overrightarrow{FG}\| = \|\overrightarrow{FH}\| = 4$

c. $\| -3\overrightarrow{DE} \| = \|3\overrightarrow{ED}\| = \|\overrightarrow{EB}\| = 3 \times \|\overrightarrow{AB}\| = 3$

68.1 $0 < k < 1$

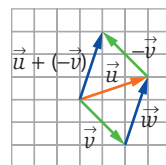
68.2 $k > 1$

68.3 $k < 0$

68.4 $k = 1$

68.5 $k = 0$

69. $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, pois $\vec{w}$ e $\vec{u} + (-\vec{v})$ são representados por segmentos de reta equipolentes. Os dois triângulos representados na figura têm, de um para o outro, dois lados iguais (o segmento que representa $\vec{u}$, comum aos dois triângulos, e os segmentos que representam $\vec{v}$ e $-\vec{v}$) e os ângulos internos formados por esses lados iguais. Assim, os triângulos são geometricamente iguais, o que garante que os segmentos de reta que representam $\vec{w}$ e $\vec{u} + (-\vec{v})$ têm o mesmo comprimento. Estes segmentos de reta têm a mesma direção, pois os dois triângulos formam um paralelogramo e o sentido destes segmentos orientados é também o mesmo. Conclui-se, portanto, que $\vec{w}$ e $\vec{u} + (-\vec{v})$ são representados por segmentos de reta equipolentes, o que implica que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

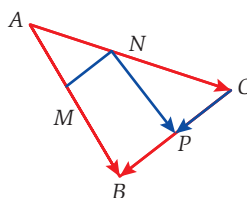


70. Tem-se:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$ e $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CP}$
- $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$

Assim, tem-se $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{CP} = 2(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}) = 2\overrightarrow{NP}$

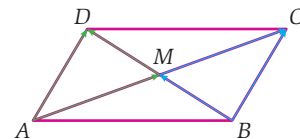
Conclui-se, portanto, que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{NP}\|$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{NP}$.



71. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Escrevendo $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ como soma dos vetores representados na figura ao lado, tem-se:

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$



Tem-se, portanto, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$.

Sendo M o ponto médio da diagonal $[AC]$, tem-se $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, pelo que se conclui que $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM}$. Assim, se M é o ponto médio da diagonal $[AC]$, então também é o ponto médio da diagonal $[BD]$.

Sendo M o ponto médio da diagonal $[BD]$, tem-se $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, pelo que se conclui, da igualdade $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$, que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$. Assim, se M é o ponto médio da diagonal $[BD]$, então também é o ponto médio da diagonal $[AC]$.

Provou-se, por dupla implicação, que as diagonais do paralelogramo se intersectam no seu ponto médio, ou seja bisseitam-se.

72. Considerando o triângulo $[BAD]$, tem-se $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

Sendo M o ponto médio do lado $[BA]$ e Q o ponto médio do lado $[AD]$, tem-se $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AQ}$.

Conjugando estas igualdades, tem-se:

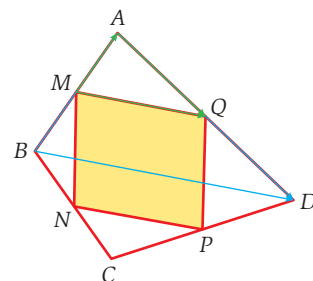
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AQ} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ}) = 2\overrightarrow{MQ}$$

Conclui-se, portanto, que $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{MQ}$ são colineares.

Aplicando um raciocínio análogo ao triângulo $[BDC]$, conclui-se que $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{NP}$ são colineares.

Portanto, $\overrightarrow{MQ}$ e $\overrightarrow{NP}$ são colineares.

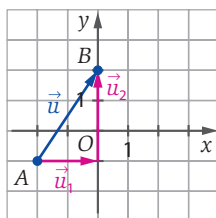
Fica, assim, demonstrado que os lados $[MQ]$ e $[NP]$ são paralelos. Com argumentos idênticos pode-se demonstrar que os lados $[MN]$ e $[PQ]$ são também paralelos, pelo que o quadrilátero $[MNPQ]$ é um paralelogramo.



Observação: Alternativamente, poder-se-ia, a partir das igualdades $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MQ}$ e $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{NP}$ (não expressa atrás), concluir que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$, resultado que é suficiente para mostrar que o quadrilátero $[MNPQ]$ é um paralelogramo.

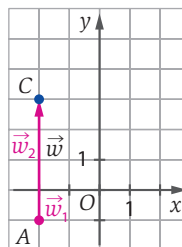
73.1

a.



$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

b.

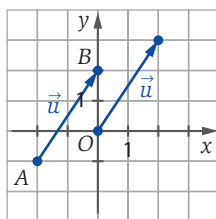


$$\vec{w} = 0\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

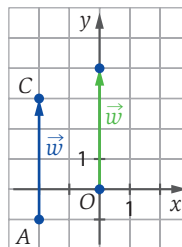
73.2 $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{w} = (0, 4)$.

73.3

a.

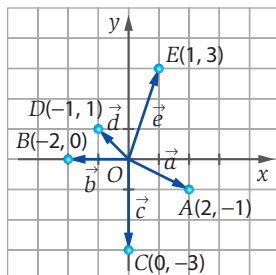


b.



74. $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(-2, 0)$,

$\vec{c}(0, -3)$, $\vec{d}(-1, 1)$ e $\vec{e}(1, 3)$



75. $\vec{u} + \vec{v}$ tem coordenadas $(-3 + 1, 2 - 3) = (-2, -1)$;

$\vec{w} + \vec{v}$ tem coordenadas $(4 + 1, 2 - 3) = (5, -1)$;

$(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ tem coordenadas $(5 - 3, -1 + 2) = (2, 1)$.

76. $\vec{r} + \vec{s}$ tem coordenadas $(-3 - 4, 3 + 1) = (-7, 4)$;

$\vec{r} + \vec{u}$ tem coordenadas $(\frac{3}{2} - 3, \frac{1}{2} + 2) = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$;

$\vec{u} - \vec{r}$ tem coordenadas $(-3 - (-3), 2 - 3) = (0, -1)$;

$2\vec{r}$ tem coordenadas $(2 \times \frac{3}{2}, 2 \times \frac{1}{2}) = (3, 1)$;

$-3\vec{u}$ tem coordenadas $(-3 \times (-3), -3 \times 2) = (9, -6)$.

77.1 $\frac{-3}{1} = \frac{-12}{4} = -3$; $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares pois $\vec{v} = -3\vec{u}$.

77.2 $\frac{-1}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$; $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares pois $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

77.3 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares pois $\frac{-4}{-2} = 2 \neq \frac{4}{-2} = -2$.

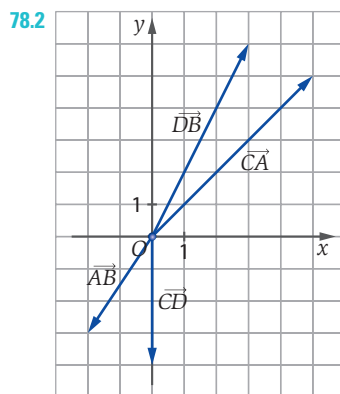
77.4 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares pois $u_1 = v_1 = 0$; tem-se $\vec{v} = 3\vec{u}$.

78.1 $\overrightarrow{AB} = B - A$; $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(0 - 2, 2 - 5) = (-2, -3)$;

$\overrightarrow{CD} = D - C$; $\overrightarrow{CD}$ tem coordenadas $(-3 - (-3), -4 - 0) = (0, -4)$;

$\overrightarrow{CA} = A - C$; $\overrightarrow{CA}$ tem coordenadas $(2 - (-3), 5 - 0) = (5, 5)$;

$\overrightarrow{DB} = B - D$; $\overrightarrow{DB}$ tem coordenadas $(0 - (-3), 2 - (-4)) = (3, 6)$.



79. $\overrightarrow{AB} = B - A$; $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(3 - 1, 3 - 2) = (2, 1)$;
 $\overrightarrow{CD} = D - C$; $\overrightarrow{CD}$ tem coordenadas $(5 - 1, 2 - 0) = (4, 2)$;
 $\overrightarrow{EF} = F - E$; $\overrightarrow{EF}$ tem coordenadas $(0 - 2, 3 - 4) = (-2, -1)$;
 $\overrightarrow{GH} = H - G$; $\overrightarrow{GH}$ tem coordenadas $(8 - 5, 5 - 5) = (3, 0)$;
 $\overrightarrow{KL} = L - K$; $\overrightarrow{KL}$ tem coordenadas $(9 - 4, 4 - 4) = (5, 0)$;
 $\overrightarrow{MN} = N - M$; $\overrightarrow{MN}$ tem coordenadas $(6 - 9, 2 - 2) = (-3, 0)$;
 $\overrightarrow{OP} = P - O$; $\overrightarrow{OP}$ tem coordenadas $(11 - 11, 2 - 4) = (0, -2)$;
 $\overrightarrow{QR} = R - Q$; $\overrightarrow{QR}$ tem coordenadas $(12 - 12, 5 - 2) = (0, 3)$;
 $\overrightarrow{ST} = T - S$; $\overrightarrow{ST}$ tem coordenadas $(13 - 13, 5 - 1) = (0, 4)$;
 $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{UV}$ tem coordenadas $(2, 1)$;
 $\overrightarrow{WX} = \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{WX}$ e $\overrightarrow{YZ}$ têm coordenadas $(3, 0)$.

80. Tem-se $\overrightarrow{XY}(5, -6)$ e $Y(3, -3)$. Sendo $X(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, de $Y = X + \overrightarrow{XY}$, obtém-se:
 $(3, -3) = (x_1 + 5, x_2 - 6) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (3 - 5, -3 - (-6)) = (-2, 3)$

81.1 $B = A + \overrightarrow{u}$ tem coordenadas $(2 - 2, 1 + 3) = (0, 4)$.

81.2 $C = A - \overrightarrow{u} = A + (-\overrightarrow{u})$ tem coordenadas $(2 + 2, 1 - 3) = (4, -2)$.

81.3 $D = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ tem coordenadas $\left(2 + \frac{1}{2} \times (-2), 1 + \frac{1}{2} \times 3\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

81.4 $E = A - 3\overrightarrow{u}$ tem coordenadas $(2 - 3 \times (-2), 1 - 3 \times 3) = (8, -8)$.

81.5 $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow F = A + \overrightarrow{u}$; F tem coordenadas $(2 - 2, 1 + 3) = (0, 4)$.

82.1 $B - A$ tem coordenadas $(-2 - 2, 3 - (-3)) = (-4, 6)$

82.2 $A - B$ tem coordenadas $(2 - (-2), -3 - 3) = (4, -6)$

82.3 $2(A - B) + \left(-\frac{1}{2}\right)(B - A)$ tem coordenadas $\left(2 \times 4 - \frac{1}{2} \times (-4), 2 \times (-6) - \frac{1}{2} \times 6\right) = (10, -15)$.

83. $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

84. Os outros dois vértices do losango são $C + \overrightarrow{AC}$ e $C + \overrightarrow{BC}$.

As coordenadas de $\overrightarrow{AC} = C - A$ são $(2 - 0, 1 - 3) = (2, -2)$.

As coordenadas de $\overrightarrow{BC} = C - B$ são $(2 - 5, 1 - 4) = (-3, -3)$.

As coordenadas dos outros dois vértices do losango são, respetivamente,

$(2 + 2, 1 + (-2)) = (4, -1)$ e $(2 + (-3), 1 + (-3)) = (-1, -2)$.

85. Por exemplo:

$$(x, y) = (1, 4) + \lambda(1, -2), \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(x, y) = (1, 4) + \lambda(2, -4), \lambda \in \mathbb{R}$$

86. O vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$ é um vetor diretor da reta AB , cujas coordenadas são:

$$(-1 - 2, 3 - 5) = (-3, -2)$$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é: $(x, y) = (2, 5) + \lambda(-3, -2), \lambda \in \mathbb{R}$

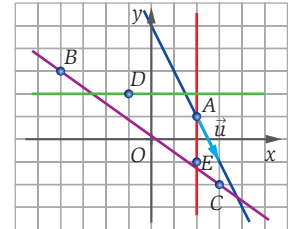
87.1 Por exemplo, $(x, y) = (2, 1) + \lambda(1, -2), \lambda \in \mathbb{R}$

87.2 O vetor $\overrightarrow{BC} = C - B$ é um vetor diretor da reta BC , cujas coordenadas são:

$$(3 - (-4), -2 - 3) = (7, -5)$$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y) = (-4, 3) + \lambda(7, -5), \lambda \in \mathbb{R}$$



87.3 O vetor de coordenadas $(1, 0)$ é um vetor diretor das retas horizontais do plano. Assim, uma equação vetorial da reta horizontal que passa no ponto $D(-1, 2)$ é:

$$(x, y) = (-1, 2) + \lambda(1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

87.4 O vetor de coordenadas $(0, 1)$ é um vetor diretor das retas do plano paralelas ao eixo Oy . Assim, uma equação vetorial da reta paralela a esse eixo e que passa no ponto $E(2, -1)$ é:

$$(x, y) = (2, -1) + \lambda(0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

88. Uma equação vetorial da reta que passa em $Q(2, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(1, -2)$ é:

$$(5, -4) = (2, 2) + \lambda(1, -2), \lambda \in \mathbb{R}$$

Verifiquemos que as coordenadas do ponto P conduzem à determinação de um valor de λ .

$$(5, -4) = (2, 2) + \lambda(1, -2), \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} 5 = 2 + \lambda \\ -4 = 2 - 2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Conclui-se que, para $\lambda = 3$, $P = Q + \lambda\vec{u}$, pelo que o ponto P pertence à reta que passa em $Q(2, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(1, -2)$.

89.1 A reta s passa nos pontos de coordenadas $(2, 4)$ e $(-1, -1)$. Um vetor diretor da reta s tem coordenadas $(2 - (-1), 4 - (-1)) = (3, 5)$.

Uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y) = (-1, -1) + \lambda(3, 5), \lambda \in \mathbb{R}$$

89.2 O ponto da reta s de abscissa 1 tem coordenadas da forma $(1, y), y \in \mathbb{R}$.

Substituindo-as na equação vetorial, obtém-se:

$$(1, y) = (-1, -1) + \lambda(3, 5) \iff \begin{cases} 1 = -1 + 3\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

O ponto em questão tem ordenada $\frac{7}{3}$.

89.3 Substituindo as coordenadas do ponto na equação vetorial, obtém-se:

$$(a, -2) = (2, 4) + \lambda(3, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + 3\lambda \\ -2 = 4 + 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \lambda = -\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{5} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$a = -\frac{8}{5}$$

90.1 O declive da reta é $m = \frac{1}{2}$.

A equação reduzida é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$, $y \in \mathbb{R}$. Para determinar b , substituem-se as coordenadas de um ponto da reta nesta equação: $3 = \frac{1}{2}(-2) + b \Leftrightarrow b = 4$.

A equação reduzida de reta é $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Alternativamente, tem-se:

$$(x, y) = (-2, 3) + k(2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{2} = k \\ y-3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{2} = y-3 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ \text{---} \end{cases}$$

90.2 Por exemplo, para $k=2$, obtemos o ponto de coordenadas $(2, 5)$ e para $k=3$ obtemos o ponto de coordenadas $(4, 6)$.

91. Da equação $y = -2x + 1$, sabemos que o declive da reta é -2 e a ordenada na origem é 1 . Logo, um ponto da reta tem coordenadas $(0, 1)$ e um vetor diretor da reta tem coordenadas $(1, -2)$. Assim, uma equação vetorial da reta é:

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda(1, -2), \lambda \in \mathbb{R}$$

92. Da leitura da equação reduzida, sabemos que o declive da reta a é 2 .

Sendo $y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x$, sabemos que o declive da reta b é 2 .

Sendo $(-1, -2)$ as coordenadas de um vetor diretor da reta c , sabemos que o seu declive é $\frac{-2}{-1} = 2$.

Como as retas têm todas o mesmo declive, as retas são paralelas.

93. O declive da reta de equação $y = -\frac{1}{3}x + 1$ é $-\frac{1}{3}$ e o declive da reta de equação $(x, y) = (-2, 1) + \lambda(-6, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é $\frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$.

As retas têm o mesmo declive. Como o ponto de coordenadas $(-2, 1)$ não pertence à primeira reta $\left(1 = -\frac{1}{3}(-1) + 1\right)$ é uma proposição falsa), as retas são estritamente paralelas e, consequentemente, não se intersectam.

94.1 Um ponto da reta r tem coordenadas $(0, 1)$ e um vetor diretor tem coordenadas $(3, -1)$. Assim,

$$r: (x, y) = (0, 1) + t(3, -1), t \in \mathbb{R}.$$

O declive da reta s é $m = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$. A ordenada na origem vem de $-3 = -\frac{1}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{3}$. Portanto, $s: y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$.

94.2 $r: 7 = -\frac{1}{3} \times 3 + 1 \Leftrightarrow 7 = 0$ (proposição falsa) e $s: 7 = -\frac{1}{3} \times 3 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow 7 = -\frac{11}{3}$ (proposição falsa)

Não pertence a nenhuma das retas.

94.3 As duas retas são paralelas, pois têm o mesmo declive.

94.4 A equação reduzida da reta é da forma:

$$y = -\frac{1}{3}x + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

O valor de b obtém-se por substituição das coordenadas do ponto do eixo Ox de abscissa 5:

$$0 = -\frac{1}{3} \times 5 + b \iff b = \frac{5}{3}$$

A equação reduzida da referida reta é $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

95.1 $(x, y) = (1, -1) + k(2, 5), \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

95.2 $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} k = \frac{x-1}{2} \\ k = \frac{y+1}{5} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \iff \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{5} \iff y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

96. O vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$ é um vetor diretor da reta AB . As suas coordenadas são $(-2 - 1, 0 - 3) = (-3, -3)$. Partindo de uma equação vetorial, chegamos a um sistema de equações paramétricas:

$$(x, y) = (1, 3) + k(-3, -3), \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 3 - 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

97.1

$$\begin{cases} x = 1 - 4k \\ y = -1 - 6k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-6} \\ \text{_____} \end{cases} \iff y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

As retas são paralelas, pois têm o mesmo declive $\left(\frac{3}{2}\right)$.

97.2

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 2 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} \\ \text{_____} \end{cases} \iff y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Como se pode verificar pelos cálculos desta alínea e da anterior, ambos os sistemas de equações conduzem à mesma equação reduzida. Assim, este sistema de equações também define a reta r .

98.1 $\frac{x-2}{3} = y + 1 \iff y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

Um vetor diretor: $(3, 1)$; um ponto: $(5, 0)$.

$$(x, y) = (5, 0) + k(3, 1), \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

98.2 Um vetor diretor: $(2, -1)$; um ponto: $(2, -4)$.

$$(x, y) = (2, -4) + k(2, -1), \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -4 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

98.3 Um vetor diretor: $(1, 0)$; um ponto: $(0, 3)$.

$$(x, y) = (0, 3) + k(1, 0), \quad k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = k \\ y = 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

98.4 Um vetor diretor: $(0, 1)$; um ponto: $(-3, 0)$.

$$(x, y) = (-3, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

99.1 O ponto de interseção da reta com o eixo Ox tem ordenada nula. Como $0 = -2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, as coordenadas deste ponto são $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

O ponto de interseção da reta com o eixo Oy tem abscissa nula. Como $y = -2 \times 0 + 5 \Leftrightarrow y = 5$, as coordenadas deste ponto são $(0, 5)$.

99.2 Um vetor diretor da reta paralela à reta dada tem coordenadas $(1, -2)$. Assim, uma equação vetorial da reta paralela é:

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 7\right) + k(1, -2), k \in \mathbb{R}$$

Desta equação, podem-se obter as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + k \\ y = 7 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

100. $A + \vec{v} = B$

Opção correta: B

101. $\vec{AB} = B - A$ tem coordenadas $(6 - 4, 8 - 5) = (2, 3)$

Opção correta: C

102. $\vec{PQ} = Q - P$ tem coordenadas $(2 - (-1), -4 - 5) = (3, -9)$.

$\vec{AB} = -3\vec{u}$, pelo que $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ têm sentidos contrários (sem ter a mesma norma).

Opção correta: A

103. $\frac{-1}{k+1} = \frac{3}{-1} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$, pelo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares se $k = -\frac{2}{3}$.

Opção correta: B

104. $3\vec{u} - \vec{v}$ tem coordenadas $(3 \times (-3) - 3, 3 \times 2 - (-4)) = (-12, 10)$.

$$\|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(-12)^2 + 10^2} = \sqrt{244}$$

Opção correta: B

105. Os vetores diretores da reta são colineares ao vetor de coordenadas $(2, -3)$.

Opção correta: C

106. A reta representada tem declive negativo, pelo que a única equação que se adequa é a da opção A.

Opção correta: A

107. $m = \frac{4}{1} = 4$; $0 = -1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 4$; $y = 4x + 4$

Opção correta: B

108.1

- a. $F + \overrightarrow{FG} = G$
- b. $F + \overrightarrow{GC} = F + \overrightarrow{FD} = D$
- c. $A + \overrightarrow{DE} = A + \overrightarrow{AF} = F$
- d. $A + \overrightarrow{ED} = A + \overrightarrow{AC} = C$
- e. $C + \overrightarrow{EF} = C + \overrightarrow{CB} = B$
- f. $B + \overrightarrow{GE} = B + \overrightarrow{BD} = D$

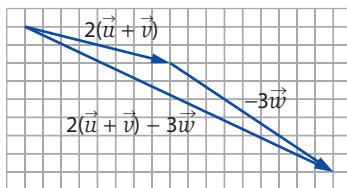
108.2 $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{GF}$; $\overrightarrow{DF}$ e $\overrightarrow{GC}$.

108.3 $\overrightarrow{DF}$ e $\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{DG}$ e $\overrightarrow{CF}$.

108.4

- a. $A - C = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BG}$
- b. $B - A = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA}$
- c. $D - F = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{GC}$

109.



110.1 $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$ tem coordenadas $\left(2 \times (-3) - \frac{3}{2} \times 2, 2 \times 4 - \frac{3}{2} \times 5\right) = \left(-9, \frac{1}{2}\right)$.

110.2 $\frac{1}{3}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{y} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}$

$\vec{y}$ tem coordenadas $\left(\frac{1}{6} \times (-3) - \frac{1}{4} \times 2, \frac{1}{6} \times 4 - \frac{1}{4} \times 5\right) = \left(-1, -\frac{7}{12}\right)$

111.1 $M\left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$

111.2 $\overrightarrow{AM} = M - A$ tem coordenadas $\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1, \frac{b_2 + c_2}{2} - a_2\right)$.

111.3 Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ tem coordenadas $\left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}, \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3}\right)$.

111.4 $G = A + \overrightarrow{AG}$ tem coordenadas $\left(a_1 + \frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}, a_2 + \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3}\right) = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

112. $\|\vec{u}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4$

Existem dois vetores nas condições dadas: o vetor de coordenadas $(3, 4)$ e o vetor de coordenadas $(3, -4)$.

113. Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ **colineares**, existe $k \neq 0$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$. Assim,

$$\|\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|k\vec{v} + \vec{v}\| = \|(k+1)\vec{v}\| = |k+1| \times \|\vec{v}\|$$

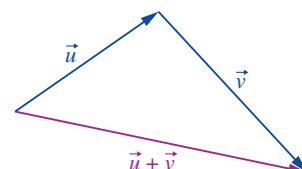
$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|k\vec{v}\| + \|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\| = (|k|+1) \|\vec{v}\|$$

Se $k > 0$ (vetores com o mesmo sentido), tem-se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Se $k < 0$ (vetores com sentidos opostos), tem-se $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Assim, no caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem colineares, tem-se $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ **não colineares**, utilizaremos a regra do triângulo e a desigualdade triangular para demonstrar a desigualdade pretendida. Considerando quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares, tem-se, sem perda de generalidade, a seguinte relação geométrica entre os segmentos de reta orientados que os representam e o segmento que representa o respectivo vetor soma.



Pela desigualdade triangular, conclui-se que:

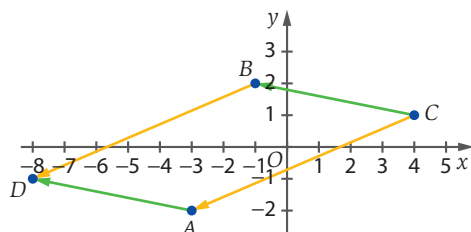
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Em conclusão, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ verifica-se:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

114. Designemos por D o quarto vértice do paralelogramo. Há três situações a considerar:

1.ª situação: $D = A + \vec{CB}$ ou $D = B + \vec{CA}$

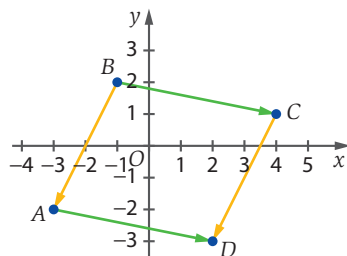


Considerando $D = A + \vec{CB}$, tem-se:

$$\vec{CB}(-1-4, 2-1) = \vec{CB}(-5, 1)$$

$$D(-3-5, -2+1) = D(-8, -1)$$

2.ª situação: $D = C + \vec{BA}$ ou $D = A + \vec{BC}$

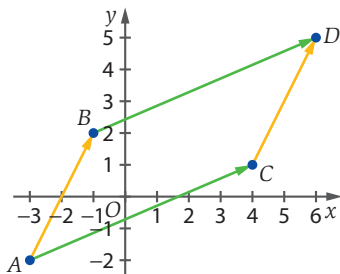


Considerando $D = C + \vec{BA}$, tem-se:

$$\vec{BA}(-3-(-1), -2-2) = \vec{BA}(-2, -4)$$

$$D(4-2, 1-4) = D(2, -3)$$

3.ª situação: $D = B + \overrightarrow{AC}$ ou $D = C + \overrightarrow{AB}$



Considerando $D = B + \overrightarrow{AC}$, tem-se:

$$\overrightarrow{AC}(4 - (-3), 1 - (-2)) = \overrightarrow{AC}(7, 3)$$

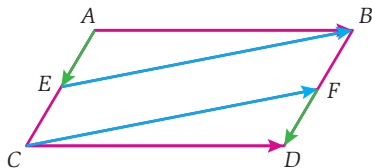
$$D(-1 + 7, 2 + 3) = D(6, 5)$$

115. Sendo $[ABDC]$ um paralelogramo, tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Sendo E o ponto médio de $[AC]$, tem-se $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Sendo F o ponto médio de $[BD]$, tem-se $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Tem-se, portanto, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BF}$, pelo que os lados $[EC]$ e $[BF]$ são paralelos.



Por outro lado, tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}$, pelo que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}$.

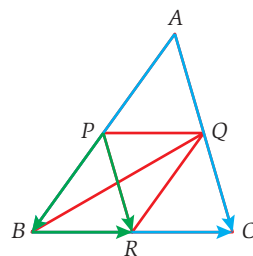
Desta igualdade, e por se ter $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FD}$, conclui-se que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CF}$, o que implica que os lados $[EB]$ e $[CF]$ são paralelos.

Fica assim demonstrado que o quadrilátero $[CFBE]$ um paralelogramo.

116.1 Tem-se $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR}$.

Por outro lado, $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

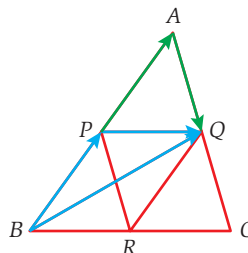
Conclui-se, portanto, que $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



116.2 Tem-se $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Conclui-se, portanto, que $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.



$$117.1 \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

117.2 Seja $P(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ tem coordenadas $(x-2, y+1)$.

Sendo $\vec{u} = -2\overrightarrow{PQ}$, tem-se $(x-2, y+1) = (-2 \times 4, -2 \times (-1))$.

$$(x-2, y+1) = (-8, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -8 \\ y+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

O ponto Q tem coordenadas $(-6, 3)$.

118. Para $2k+1 \neq 0$, os vetores são colineares se e só se $\frac{1}{2k+1} = \frac{k+1}{6}$.

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{k+1}{6} \Leftrightarrow 6 = (2k+1)(k+1) \Leftrightarrow 2k^2 + 3k - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{5}{2} \vee k = 1$$

Para que os vetores tenham o mesmo sentido, terá de ser $k = 1$.

119. Seja $\vec{v}(x, y)$ um vetor colinear a $\vec{u}$ tal que $\|\vec{v}\| = 15$.

Seja k um número real não nulo tal que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow (x, y) = (-3k, 4k)$$

$$\|\vec{v}\| = 15 \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + (4k)^2} = 15 \Leftrightarrow 9k^2 + 16k^2 = 225 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25k^2 = 225 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\vec{u}$, como se pretende, tem que se ter $k = -3$.

Assim, o vetor colinear a $\vec{u}$, que tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ e norma 15, tem coordenadas $(-3 \times (-3), -3 \times 4) = (9, -12)$.

120.1 Interseção com Ox :

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}; \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Interseção com Oy :

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}; \left(0, -\frac{1}{3}\right)$$

120.2

$$(3, y) = (1, 5) + t(6, 4), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 + 6t \\ y = 5 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{6} \\ t = \frac{y-5}{4} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-5}{4} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3y-15=4 \Leftrightarrow y = \frac{19}{3}$$

$$120.3 \quad \begin{cases} -2 = \lambda \\ 3 \times (-1) = 1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Para $\lambda = -2$, as coordenadas do ponto satisfazem o sistema de equações paramétricas da reta p .

120.4

$$r: 2x + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$p: \begin{cases} x = \lambda \\ 3y = 1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ \frac{3y-1}{2} = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3y-1}{2} = x \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Reta	Coordenadas de um vetor diretor
r	$(3, -2)$
s	$(6, 4)$
p	$\left(1, \frac{2}{3}\right)$

120.5 O declive da reta s é $m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Cálculo de b : $5 = \frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{13}{3}$

$$s: y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

120.6

Reta	Declive
r	$-\frac{2}{3}$
s	$\frac{2}{3}$
p	$\frac{2}{3}$

As retas s e p são paralelas, pois têm o mesmo declive.

121.1 $\vec{u} \left(-1 - \left(-\frac{3}{2} \right), 1 - 2 \right) = \vec{u} \left(-\frac{5}{2}, -1 \right)$

121.2 $P(-1, 3)$, $Q(4, -1)$ e $M\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

121.3 Um vetor diretor da reta PQ é $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P \text{ tem coordenadas } (4 - (-1), -1 - 3) = (5, -4).$$

Uma equação da reta PQ é: $(x, y) = (-1, 3) + k(5, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

121.4 $\frac{-4}{1} = -4$; $\frac{5}{-\frac{5}{4}} = -4$; $\overrightarrow{PQ} = -4\vec{v}$

121.5 O declive da reta s é $m = \frac{-1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$.

Cálculo de b : $-1 = \frac{2}{5} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\frac{13}{5}$

$$p: y = \frac{2}{5}x - \frac{13}{5}$$

122.1 Um vetor diretor da reta MN é $\overrightarrow{MN}$;

$\overrightarrow{MN} = N - M$ tem coordenadas $(3 - 2, 1 - (-5)) = (1, 6)$.

Uma equação da reta MN é:

$$(x, y) = (3, 1) + k(1, 6), k \in \mathbb{R}$$

O declive da reta MN é $m = \frac{6}{1} = 6$.

$$\text{Cálculo de } b: 1 = 6 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -17$$

$$MN: y = 6x - 17$$

122.2 Interseção com Ox :

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}; (3, 0)$$

Uma equação cartesiana da reta vertical considerada é $x = 3$.

122.3 As retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares têm como vetores diretores, vetores paralelos ao vetor de coordenadas $(1, 1)$. Assim, uma equação vetorial da reta considerada é:

$$(x, y) = (3, -2) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$$

122.4 O declive da reta pretendida é $m = \frac{5}{2}$.

$$\text{Cálculo de } b: 3 = \frac{5}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{2}$$

$$\text{A equação reduzida dessa reta é } y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}.$$

123. O declive da reta n é igual ao da reta m , ou seja, $m = -\frac{4}{5}$.

Interseção da reta p com Ox :

$$\begin{cases} y=0 \\ 6x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 6x-0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{6} \end{cases}; \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

$$\text{Cálculo de } b: 0 = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$\text{A equação reduzida da reta } n \text{ é } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{15}.$$

124.

$$k^2 = -5k - 6 \Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow k = -3 \vee k = -2$$

125. Começemos por determinar o ponto de interseção das retas r e s .

$$\begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-1}{4} \\ 4x - 3 \times \frac{3x-1}{4} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-1}{4} \\ 16x - 9x + 3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{10}{7} \\ x = -\frac{11}{7} \end{cases}$$

$$\text{Coordenadas do ponto de interseção: } \left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right)$$

Determinemos agora os pontos de interseção da circunferência centro em $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ e raio 10 com cada uma das retas.

Interseção da circunferência com a reta r :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{10}{7}\right)^2 = 100 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-1}{4} \\ \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3x-1}{4} + \frac{10}{7}\right)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{22}{7}x + \frac{121}{49} + \left(\frac{3x-1}{4} + \frac{10}{7}\right)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{22}{7}x + \frac{121}{49} + \frac{9x^2}{16} + \frac{99x}{56} + \frac{1089}{784} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{16}x^2 + \frac{275}{56}x - \frac{75375}{784} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{67}{7} \vee x = \frac{45}{7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{52}{7} \\ x = -\frac{67}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{32}{7} \\ x = \frac{45}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Coordenadas dos pontos de interseção: $\left(-\frac{67}{7}, -\frac{52}{7}\right)$ e $\left(\frac{45}{7}, \frac{32}{7}\right)$

Interseção da circunferência com a reta s :

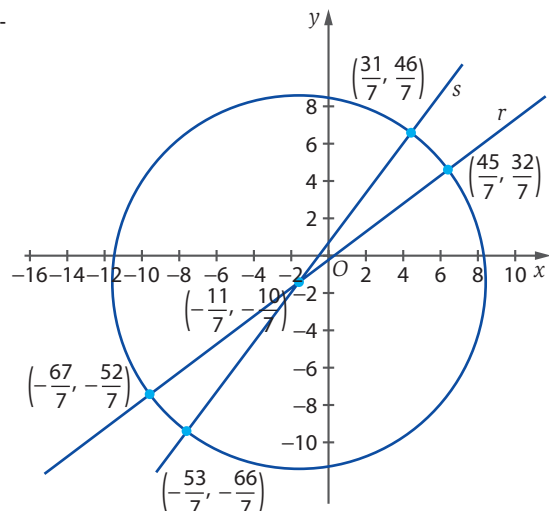
$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0 \\ \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{10}{7}\right)^2 = 100 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-2}{4} \\ \left(\frac{3y-2}{4} + \frac{11}{7}\right)^2 + y^2 + \frac{20}{7}y + \frac{100}{49} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3y-2}{4} + \frac{11}{7}\right)^2 + y^2 + \frac{20}{7}y + \frac{100}{49} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{16}y^2 + \frac{45}{28}y + \frac{225}{196} + y^2 + \frac{20}{7}y + \frac{100}{49} = 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{16}y^2 + \frac{125}{28}y - \frac{18975}{196} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{66}{7} \vee y = \frac{46}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{53}{7} \\ y = -\frac{66}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{31}{7} \\ y = \frac{46}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Coordenadas dos pontos de interseção: $\left(-\frac{53}{7}, -\frac{66}{7}\right)$ e $\left(\frac{31}{7}, \frac{46}{7}\right)$

No referencial ortonormado seguinte estão representados os pontos de interseção das retas r e s com a circunferência de centro em $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ e raio 10 com cada uma das retas, de forma a ajudar a visualizar os possíveis triângulos.

Assim, podem ter-se os triângulos com os seguintes vértices:

- $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right), \left(\frac{45}{7}, \frac{32}{7}\right)$ e $\left(\frac{31}{7}, \frac{46}{7}\right)$;
- $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right), \left(\frac{45}{7}, \frac{32}{7}\right)$ e $\left(-\frac{53}{7}, -\frac{66}{7}\right)$;
- $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right), \left(-\frac{67}{7}, -\frac{52}{7}\right)$ e $\left(\frac{31}{7}, \frac{46}{7}\right)$;
- $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right), \left(-\frac{67}{7}, -\frac{52}{7}\right)$ e $\left(-\frac{53}{7}, -\frac{66}{7}\right)$.



126.1 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

126.2 Interseção da circunferência com a reta $r: y = x$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (x+1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Coordenadas dos pontos de interseção: $(0, 0)$

Interseção da circunferência com a reta $s: y = -x + 2$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (-x+3)^2 = 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)^2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Coordenadas dos pontos de interseção: $(2, 0)$

127.1 Interseção da circunferência com o eixo Oy :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \vee y = 3 \\ x = 0 \end{cases}; D(0, 3)$$

Interseção da circunferência com o eixo Ox :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{6} \\ y = 0 \end{cases}$$

$E(3 + \sqrt{6}, 0); F(3 - \sqrt{6}, 0)$

127.2 $\overrightarrow{DF} = F - D$ tem coordenadas $(3 - \sqrt{6} - 0, 0 - 3) = (3 - \sqrt{6}, -3)$

$$m = \frac{-3}{3 - \sqrt{6}} = \frac{-3(3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} = \frac{-3(3 + \sqrt{6})}{9 - 6} = -3 - \sqrt{6}$$

$$b = 3$$

$$DF: y = -(3 + \sqrt{6})x + 3$$

127.3 $\text{Área} = \frac{\overline{EF} \times \overline{OD}}{2} = \frac{[(3 + \sqrt{6}) - (3 - \sqrt{6})] \times 3}{2} = 3\sqrt{6}$

128.1 Consideremos que o ponto A tem coordenadas (a_1, a_2) e o ponto B tem coordenadas (b_1, b_2) . Como A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, tem coordenadas (a_1, a_1) e como B pertence à bissetriz dos quadrantes pares, tem coordenadas $(b_1, -b_1)$.

Por outro lado, sabemos que a ordenada de B é igual a $\frac{3}{2}$ da ordenada de A , pelo que as coordenadas de B se podem escrever como $(-\frac{3}{2}a_1, \frac{3}{2}a_1)$.

Sendo os lados $[AO]$ e $[OB]$ perpendiculares e a área do triângulo $[AOB]$ igual a 12, tem-se:

$$\frac{\overline{AO} \times \overline{OB}}{2} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_1^2} \times \sqrt{\left(-\frac{3}{2}a_1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a_1\right)^2} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{2a_1^2} \times \frac{\sqrt{18a_1^2}}{2} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{36a_1^4}}{2} = 24 \Leftrightarrow 3a_1^2 = 24 \Leftrightarrow a_1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow a_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

Como A pertence ao 3.º quadrante tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e B tem coordenadas $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

RESOLUÇÕES

128.2 O triângulo $[AOB]$ é retângulo no vértice O . Assim, o ângulo inscrito AOB é reto, pelo que o correspondente arco mede 180° . Conclui-se, portanto, que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

$$\text{Centro: } M_{[AB]} \left(\frac{-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{-2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{Raio: } \frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{(3\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}))^2 + (-3\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}))^2}}{2} = \frac{\sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{\sqrt{13 \times 2^2}}{2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Equação da circunferência: } \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 13$$

128.3 Um vetor diretor da reta AB é $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ tem coordenadas } (3\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}), -3\sqrt{2} - (-2\sqrt{2})) = (5\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

$$\text{O declive da reta } AB \text{ é } m = \frac{-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5}.$$

$$-2\sqrt{2} = -\frac{1}{5} \times (-2\sqrt{2}) + b \iff b = -\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

$$AB: y = -\frac{1}{5}x - \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

129.1 Equação vetorial: $(x, y) = (-2, 0) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

$$m = \frac{3}{-1} = -3$$

$$0 = -3 \times (-2) + b \iff b = -6$$

$$\text{Equação reduzida: } y = -3x - 6$$

129.2 $\overrightarrow{BC} = C - B$ tem coordenadas $(0 - (-1), 2 - 0) = (1, 2)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$0 = 2 \times (-1) + b \iff b = 2$$

$$\text{Equação reduzida: } y = 2x + 2$$

129.3 $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ tem coordenadas $(-4 - (-3), 0 - 2) = (-1, -2)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (5, 1) + k(-1, -2), k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

$$m = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$1 = 2 \times 5 + b \iff b = -9$$

$$\text{Equação reduzida: } y = 2x - 9$$

129.4 Equação vetorial: $(x, y) = (2, -4) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

Equação reduzida: $y = -4$

129.5 Equação vetorial: $(x, y) = (2, -4) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

Equação cartesiana: $x = 2$ (por exemplo)

129.6 $\overrightarrow{FG} = G - F$ tem coordenadas $(\pi - \pi, 3 - (-2)) = (0, -5)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (\pi, 3) + k(0, -5)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

Equação cartesiana: $x = \pi$ (por exemplo)

129.7 Equação vetorial: $(x, y) = (2, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

Equação cartesiana: $x = 2$ (por exemplo)

129.8 Sendo $H(0, 2)$, $\overrightarrow{GH} = H - G$ tem coordenadas $(0 - (-4), 2 - 0) = (4, 2)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (-4, 0) + k(4, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$0 = \frac{1}{2} \times (-4) + b \iff b = 2$$

Equação reduzida: $y = \frac{1}{2}x + 2$

129.9 Sendo o declive 5, um vetor diretor tem coordenadas $(1, 5)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (-1, 3) + k(1, 5)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo).

$$3 = 5 \times (-1) + b \iff b = 8$$

Equação reduzida: $y = 5x + 8$

129.10 $M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$; sendo o declive $\frac{1}{3}$, um vetor diretor tem coordenadas $(3, 1)$.

Equação vetorial: $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right) + k(3, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo).

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times 1 + b \iff b = \frac{1}{6}$$

Equação reduzida: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

129.11 $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{5} \iff 5x = 2y+6 \iff y = \frac{5}{2}x - 3$

Equação reduzida: $y = \frac{5}{2}x$

Sendo o declive $\frac{5}{2}$, um vetor diretor tem coordenadas $(2, 5)$.

Equação vetorial: $(x, y) = (0, 0) + k(2, 5)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo).

TESTE – págs. 72 e 73

1. Opção correta: B
2. Opção correta: C

- 3.1 Opção correta: A
3.2 Opção correta: D
3.3 Opção correta: D

4.1 $m = \frac{6}{-3} = -2$

$-3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$
 $y = -2x - 1$

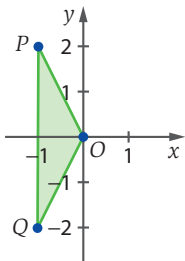
- 4.2 $2 = -2 \times (-1) - 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ (proposição falsa), logo o ponto P não pertence à reta dada.

- 4.3 Sim, porque têm o mesmo declive (-2) .

- 4.4 O ponto de coordenadas $(2, -5)$ pertence à reta dada. A distância deste ponto ao eixo Ox é 5 e a distância ao eixo Oy é 2. Assim, uma circunferência de centro em $(2, -5)$ e raio inferior a 2 pertence ao 4.º quadrante. Por exemplo, tem-se:

$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 1$

4.5 Área = $\frac{4 \times 1}{2} = 2$ unidades quadradas



5.1 $3y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$; $m = \frac{2}{3}$ e $\vec{v}(3, 2)$

5.2 $(0, -1)$ e $(3, 1)$

5.3 $(x, y) = (0, -1) + k(3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

5.4 $b = -1$

5.5 $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}; \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

5.6 $y = \frac{2}{3} \times 1 - 1 = -\frac{1}{3}; \left(1, -\frac{1}{3}\right)$

5.7 $3(1-p) = 2p - 3 \Leftrightarrow 3 - 3p = 2p - 3 \Leftrightarrow p = \frac{6}{5}$

- 6.1 P é o ponto do 4.º quadrante que pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio 5. Assim, as coordenadas do ponto P têm de satisfazer a equação cartesiana dessa circunferência: $x^2 + y^2 = 5^2$.

$3^2 + y_0^2 = 5^2 \Leftrightarrow y_0^2 = 16 \Leftrightarrow y_0 = \pm 4$

Como P é o ponto do 4.º quadrante, $y_0 = -4$.

6.2 $(x, y) = k(3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

6.3 $\vec{AP} = P - A$ tem coordenadas $(3-5, -4-0) = (-2, -4)$

$\|\vec{AP}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

6.4 $x = 4$

- 6.5 A região sombreada resulta da interseção da coroa circular definida por $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ com o semiplano fechado definido por $x \leq 0$ e com o semiplano fechado definido por $y \geq -\frac{4}{3}x$. Fica, portanto, definida pela seguinte conjunção de condições:

$9 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq -\frac{4}{3}x$

7. Começamos por definir analiticamente a elipse.

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Para definir a região sombreada, basta considerar a interseção do interior e fronteira da elipse com o plano fechado acima da bissetriz dos quadrantes ímpares:

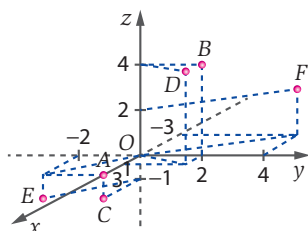
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \wedge y \geq x$

3. GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

130. $A(0, 2, 0)$; $B(0, 0, -5)$; $C(-1, -3, 0)$; $D(3, -2, -4)$

131. $A(0, -3, -4)$; $B(0, 4, -4)$; $C(3, 4, -4)$; $D(3, -3, -4)$; $E(3, -3, 0)$; $F(0, -3, 0)$; $G(0, 4, 0)$; $H(3, 4, 0)$; $I(0, 3, 0)$; $J(-2, 3, 0)$; $K(-2, 3, 5)$; $L(-2, 0, 5)$; $M(0, 3, 5)$; $N(0, 0, 5)$; $O(0, 0, 0)$; $P(-2, 0, 0)$

132.



133.1 $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$, por exemplo.

133.2 Não, porque todos os pontos do plano têm abscissa 1.

133.3 $x = 1$

134.1 3.º octante

134.3 8.º octante

134.5 7.º octante

134.2 5.º octante

134.4 6.º octante

135.1 xOy (pois $z = 0$)

135.3 xOz (pois $y = 0$)

135.2 xOy (pois $z = 0$)

135.4 yOz (pois $x = 0$)

136.1 Plano paralelo a yOz que passa no ponto de coordenadas $(-1, 0, 0)$.

136.2 Plano paralelo a xOz que passa no ponto de coordenadas $(0, 3, 0)$.

136.3 Plano paralelo a xOy que passa no ponto de coordenadas $(0, 0, 2)$.

137.1 $x = 1$

137.2 $y = 0$

137.3 $z = 0$

138.1 $y = -5$

138.2 $z = 5$

139.1 $A(2,5; -4; -1)$; $B(-2,5; -4; 1)$; $C(-2,5; 4; 1)$; $D(2,5; 4; 1)$; $E(-2,5; -4; -1)$; $F(2,5; -4; -1)$; $G(2,5; 4; -1)$; $H(-2,5; 4; -1)$

139.2 $ADG: x = 2,5$; $BCH: x = -2,5$; $DCH: y = 4$; $ABE: y = -4$; $ABC: z = 1$; $FGH: z = -1$

140.1 $A(4, -4, 0)$; $B(4, 2, 0)$; $C(0, 2, 0)$; $D(0, -4, 0)$; $E(4, -4, 4)$; $F(4, 2, 4)$; $G(0, 2, 4)$; $H(0, -4, 4)$

140.2

- a. Plano que contém a face $[EFGH]$.
b. Reta EH .

- c. Aresta $[BF]$.
d. Face $[EFGH]$.

140.3

- a. $x = 4 \wedge z = 0$
b. $y = 2 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 4$
c. $x = 4$

- d. $y = -4 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 4$
e. $0 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 4$

141.1 $d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{14}$

141.2 $d(C, D) = \sqrt{(3 - 4)^2 + (-1 - 5)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{86}$

141.3 $d(E, F) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-3 - 5)^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{129}$

142.1 $\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (3 - 3)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{17}$

$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$

142.2 Triângulo escaleno.

142.3 Vejamos se os comprimentos dos lados do triângulo verificam a condição do contrarrecíproco do teorema de Pitágoras.

$\sqrt{45}^2 = \sqrt{17}^2 + \sqrt{8}^2 \Leftrightarrow 45 = 25$ (proposição falsa), logo o triângulo $[ABC]$ não é retângulo em A .

143.1 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$

143.2 Sendo o paralelepípedo retângulo, CG é perpendicular ao plano ABC , logo, a qualquer reta que lhe pertença, em particular, a AC .

$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

144. $\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 - 1)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{33}$

$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (1 - 2)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{53}$

O triângulo é escaleno.

$\sqrt{53}^2 = \sqrt{33}^2 + 2^2 \Leftrightarrow 53 = 37$ (proposição falsa). Logo o triângulo $[ABC]$ não é retângulo.

145.1 $A(1, 0, 0); B(1, 2, 0); C(0, 2, 0); O(0, 0, 0); D(0, 2, 5); E(0, 0, 5); F(1, 0, 5)$

145.2 $M\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = M(1, 1, 5)$

145.3 $y = 1$

145.4 $\overline{BD} = d(B, D) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{BE} = d(B, E) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{30}$

146.

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \Leftrightarrow y = z$$

(1, 0, 0) pertence; (2, 2, 1) não pertence.

147.1 $z=4$

147.2 $y=4$

147.3

$$(x-8)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-8)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 16y + 64 + z^2 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

147.4

$$(x-8)^2 + y^2 + (z-8)^2 = x^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 - 16z + 64 = x^2 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

Alternativa: o aluno pode apresentar a equação obtida no ponto anterior e referir que o plano medidor de $[CH]$ é o plano medidor de $[BE]$ uma vez que são segmentos de reta estritamente paralelos e com o mesmo comprimento.

147.5

$$(x-8)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow x - z = 0$$

148.

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow x - 2y - z + 6 = 0$$

149.1 BDH

149.2 Fixando um referencial o.n na figura, por exemplo, com origem no ponto F , semieixo positivo das abcissas $\vec{FB}$, semieixo positivo das ordenadas $\vec{FE}$ e semieixo positivo das cotas $\vec{FG}$, e tomando para unidade de medida 1 cm, tem-se $K(3, 0, 0)$, $I(6, 3, 6)$ e $J(6, 6, 3)$.

Assim, tem-se:

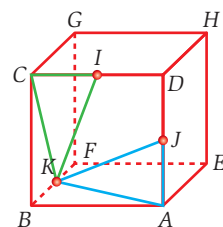
$$\overline{KI} = d(K, I) = \sqrt{(6-3)^2 + (3-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\overline{KJ} = d(K, J) = \sqrt{(6-3)^2 + (6-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Portanto, conclui-se que $\overline{KI} = \overline{KJ}$, pelo que $[IJK]$ é um triângulo isósceles.

Outro processo: Os triângulos $[ICK]$ e $[JAK]$ são geometricamente iguais pois, $\overline{IC} = \overline{JA}$, $\overline{KC} = \overline{KA}$ e $\hat{ICK} = \hat{JAK}$.

Por conseguinte, tem-se $\overline{KI} = \overline{KJ}$, ou seja, o triângulo $[IJK]$ é isósceles.



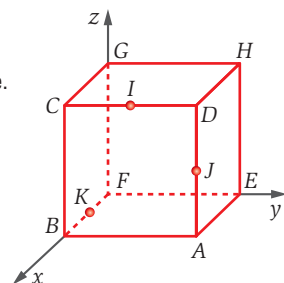
149.3 No referencial ortonormado seguinte, fixando para unidade de medida $\overline{FK}$, o vértice F coincide com a origem, os vértices B , E e G pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respectivamente.

Neste referencial, $I(2, 1, 2)$ e $J(2, 2, 1)$.

O plano medidor de $[IJ]$ fica definido por:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow y - z = 0$$



150. Sendo $P(x, y, z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, um ponto equidistante dos pontos A, B e C , tem-se:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 = (y-3)^2 \\ (x-2)^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \\ x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Concluindo, o conjunto de pontos equidistantes dos pontos A, B e C é a reta definida por $x=0 \wedge y=0$, ou seja, o eixo Oz .

151. A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $(0, 0, 4)$ e raio 3. Os pontos de coordenadas $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 7)$ são os extremos de um diâmetro da superfície esférica que tem a direção do eixo Oz , pelo que os planos $z=1$ e $z=7$ são tangentes à superfície esférica.

152.1 Superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(-3, 2, -1)$ e raio 4.

152.2 Superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(0, -4, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.

152.3 Superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(0, 2, -3)$ e raio 7.

153. Centro: $M_{[AB]} \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{-4+(-2)}{2} \right) = M_{[AB]}(2, 1, -3)$

Raio: $\frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2 + (-4-(-2))^2}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 \times 11}}{2} = \sqrt{11}$

Equação da superfície esférica: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 11$

154.1 $(2-4)^2 + y^2 + (0-1)^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$(2, -2, 0)$ e $(2, 2, 0)$

154.2

$(x-4)^2 + 2^2 + (3-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 15}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5$

$(3, 2, 3)$ e $(5, 2, 3)$

154.3 $(4-4)^2 + 0^2 + (z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow z-1 = \pm 3 \Leftrightarrow z = -2 \vee z = 4$

$(4, 0, -2)$ e $(4, 0, 4)$

155.1 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4$

155.2 $(1-2)^2 + (-1+1)^2 + (-3+3)^2 = 4 \Leftrightarrow 1 = 4$ (proposição falsa). Logo o ponto P não pertence à superfície esférica.

156.1 Raio: $\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

156.2 $x^2 + y^2 + z^2 = 29$

Interseção com Ox : $(\sqrt{29}, 0, 0)$ e $(-\sqrt{29}, 0, 0)$

Interseção com Oy : $(0, \sqrt{29}, 0)$ e $(0, -\sqrt{29}, 0)$

Interseção com Oz : $(0, 0, \sqrt{29})$ e $(0, 0, -\sqrt{29})$

157.1 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 1^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}; \quad r = \sqrt{3}$

157.2 Tendo em conta que o raio da superfície esférica é 2 e o respetivo centro é a origem do referencial, os planos tangentes à superfície esférica, paralelos ao plano coordenado yOz , ficam definidos por $x = -2$ e $x = 2$.

158.1 $\left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+5}{2}\right) = (3, -1, 5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{2} = 3 \\ \frac{y}{2} = -1 \\ \frac{z+5}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$$

$C(2, -2, 5)$

158.2 Centro: $M_{[AB]} \left(\frac{3+4}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = M_{[AB]} \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 5\right)$

Raio: $\frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{(3-4)^2 + (-1-0)^2 + (5-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Inequação reduzida da esfera: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 5)^2 \leq \frac{1}{2}$

159.1 $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 \leq 9$

159.2 Raio: $d(B, O) = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 \leq 14$

160.1

$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (3, 0, -1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{2} = 3 \\ \frac{y+1}{2} = 0 \\ \frac{z+3}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases}$$

$C(8, -1, -5)$

160.2 Raio: $d(A, B) = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{42}$

Inequação reduzida da esfera: $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 42$

161.1 Esfera de centro no ponto de coordenadas $(-1, 7, -2)$ e raio 5.

161.2 Esfera de centro no ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$ e raio $\sqrt{7}$.

161.3

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z + 10 \leq 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 \leq -10 + 1 + 4 + 9 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 4$$

Esfera de centro no ponto de coordenadas $(1, 2, -3)$ e raio 2.

161.4

$$x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 8 \leq 0 \iff$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 \leq 8 + 1 \iff x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 9$$

Esfera de centro no ponto de coordenadas $(0, 1, 0)$ e raio 3.

162.1

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 6 \leq 0 \iff$$

$$\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \leq 6 + 1 + 9 \iff (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 16$$

Centro no ponto de coordenadas $(-1, 0, 3)$ e raio 4.

162.2 A interseção da esfera com um plano que passa pelo seu centro é um círculo de raio igual ao da esfera. Assim, a área deste conjunto de pontos é $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

163.1 Superfície esférica de centro em A e raio 3.

163.2 Esfera de centro em A e raio 2.

164.1 $(x+2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9 \wedge y=0 \iff (x+2)^2 + (z+2)^2 = 9 \wedge y=0$

Circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0, -2)$ e raio 3, situada no plano xOz .

164.2

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 \leq 25 \wedge z=1 \iff$$

$$\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 + (1+3)^2 \leq 25 \wedge z=1 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9 \wedge z=1$$

Círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -1, 1)$ e raio 3, paralelo ao plano xOy .

165.1 $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Opção correta: B

165.2 $d(A, G) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Opção correta: C

166.1 $D(-3, -4, 0); d(D, O) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$

Opção correta: A

166.2 $V(0, 0, 5); d(A, V) = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$

Opção correta: D

167. Pertencendo A e B ao mesmo plano paralelo a xOy , as suas coordenadas satisfazem a condição $z=5$. Assim, tem-se:

$$d(A, B) = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(-2-2)^2 + (y-3)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{16 + (y-3)^2} = \sqrt{17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + (y-3)^2 = 17 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow y-3 = \pm 1 \Leftrightarrow y=2 \vee y=4$$

Opção correta: C

168. A reta AB fica definida pela condição $y=4 \wedge z=5$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(0, 4, 5)$ e o ponto B terá que ter

abscissa tal que $\frac{x+0}{2} = -3 \Leftrightarrow x = -6$.

Opção correta: A

169. A afirmação D é falsa pois a condição $x=4 \wedge y=5$ representa, no espaço, uma reta paralela ao eixo Oz .

Opção correta: D

170. A afirmação A não é necessariamente verdadeira pois P é um ponto do plano mediador do segmento $[BC]$, mas não necessariamente o seu ponto médio.

Opção correta: A

171. Opção correta: C

172. Opção correta: C

173.1 $\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-1)^2 + (3-3)^2} = 2$

$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (3-3)^2} = 4$

173.2 Triângulo escaleno.

173.3 Verifiquemos se os comprimentos dos lados do triângulo verificam a condição do contrarrecíproco do teorema de Pitágoras.

$\sqrt{20}^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow 20 = 20$ (proposição verdadeira). Logo o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

174.1 $\overline{VQ} = d(V, Q) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{44} = \sqrt{2^2 \times 11} = 2\sqrt{11}$

$\overline{PQ} = d(P, Q) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-(-2))^2 + (0-0)^2} = 4$

174.2 A interseção da pirâmide com o plano de equação $z=3$ é um quadrado que é a base de uma pirâmide semelhante à pirâmide $[PQRSV]$, cuja altura é metade da altura desta pirâmide. Assim, o lado deste quadrado mede $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, pelo que a sua área é $2^2 = 4$ unidades quadradas.

174.3 $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 = 32$

175.1

- a. $y = 2$
- b. $x = 1$
- c. $z = 3$

175.2

- a. $B(1, 2, -3)$ e $G(-1, 2, 3)$

$$\overline{BG} = d(B, G) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{40} = \sqrt{2^3 \times 5} = 2\sqrt{10}$$

- b. $B(1, 2, -3)$ e $E(1, -2, 3)$

$$\overline{BE} = d(B, E) = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-2)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \times 13} = 2\sqrt{13}$$

- c. $B(1, 2, -3)$ e $E(-1, -2, 3)$

$$\overline{BH} = d(B, H) = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{56} = \sqrt{2^2 \times 14} = 2\sqrt{14}$$

175.3 $V = 2 \times 4 \times 6 = 48$ unidades cúbicas

176.1 $|1 - (-1)| = 2$

176.2 $y = \frac{1}{2}$

176.3 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\overline{V_1M} = d(V_1, M) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{V_3M} = d(V_3, M) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1} = 2$$

177.1 $A(0, 8, 0); C(-8, 0, 0); F(-8, 8, -8); H(0, 0, -8)$

177.2

- a. $y = 8$
- b. $y = 0 \wedge z = -8$

177.3

$$a. V_{[ACBF]} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times \overline{BF} = \frac{1}{3} \times \frac{8 \times 8}{2} \times 8 = \frac{256}{3} \text{ cm}^3$$

$$b. V_{\text{Tetraedro}} = V_{\text{Cubo}} - 4 \times V_{[ACFH]} = 8^3 - 4 \times \frac{256}{3} = \frac{512}{3} \text{ cm}^3$$

$$177.4 \quad \frac{V_{\text{Cubo}}}{V_{\text{Tetraedro}}} = \frac{8^3}{\frac{512}{3}} = 3$$

178.1

- a. $x = 3 \wedge 0 \leq y \leq 5 \wedge z = 5$
- b. $0 \leq x \leq 3 \wedge y = 5 \wedge 2 \leq z \leq 5$
- c. $y = 7 \wedge z = 9$

178.2 $B(0, 0, 5)$; $C(0, 5, 5)$; $D(3, 5, 5)$; $E(3, 0, 2)$

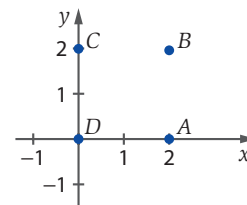
a. $\overline{BE} = d(B, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

b. $\overline{ED} = d(E, D) = \sqrt{(3-3)^2 + (5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{34}$

c. $\overline{CE} = d(C, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{43}$

d. $M_{[CE]} \left(\frac{0+3}{2}, \frac{5+0}{2}, \frac{5+2}{2} \right) = M_{[CE]} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$

179.1 A base está contida no plano de equação $z=0$. Observando as projeções ortogonais dos pontos A , B e C no plano xOy (que coincidem com os próprios pontos), concluímos que as coordenadas do vértice D são $(0, 0, 0)$.



179.2

a. $z=6$

b. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 \Leftrightarrow x=1$

c. $x=2 \wedge y=0$

d. Trata-se de um plano paralelo ao plano xOy , cujos pontos têm cota 3: $z=3$.

e. $E(2, 0, 6)$ e $F(2, 2, 6)$

$x=2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge z=6$

f. Trata-se da superfície esférica de centro em B e raio 2:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$

179.3 As arestas da base do prisma medem 2 unidades e a altura 6 unidades. Assim, $V=2 \times 2 \times 6=24$ unidades cúbicas.

180.1

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = -12 + 4 + 1 + 16$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$

Centro: ponto de coordenadas $(2, -1, 4)$; raio: 3

180.2

a.

$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 + (z-4)^2 = 9 \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (0+1)^2 + (0-4)^2 = 9 \wedge y=0 \wedge z=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -8 \wedge y=0 \wedge z=0$

Condição impossível. Conjunto vazio.

b.

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \wedge z=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (4-4)^2 = 9 \wedge z=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \wedge z=4$

Circunferência de centro no ponto de coordenadas $(2, -1, 4)$ e raio 3, contida no plano de equação $z=4$.

c.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \wedge y = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (-4+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \wedge y = -4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (z-4)^2 = 0 \wedge y = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \wedge y = -4 \wedge z = 4$$

Ponto de coordenadas $(2, -4, 4)$.

180.3 $(0-2)^2 + (0+1)^2 + (2-4)^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$ (proposição verdadeira). Logo o ponto A pertence à superfície esférica.

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (4-2)^2} = 3$$

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$$

181.1 $(x+3)^2 + (3-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (z+1)^2 = 4 \wedge y = 3$

181.2 $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (a+1)^2 = 5$; $(a+1)^2 \leq 5 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq a \leq -1 + \sqrt{5}$

181.3 $(b+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$; $(b+3)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -3$

182.1 $B(6, 1, 2)$; $D(6, 0, 0)$; $E(0, 4, 0)$; $G(0, 0, 2)$

182.2 A distância de B ao plano yOz é 6 (abscissa de B) e ao plano de equação $y = -2$ é $3(1 - (-2))$.

182.3

a. $x = 6 \wedge y = 0$

b. $0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge z = 2$

c. $(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow x = 3$

182.4 Centro: $M_{[CG]}(3, 0, 2)$; raio: 3; Inequação reduzida da esfera: $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$

182.5 $M_{[AF]} \left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = M_{[AF]} \left(3, \frac{5}{2}, 1 \right)$

182.6 $V = A_b \times h = \frac{1+4}{2} \times 2 \times 6 = 30 \text{ cm}^3$

183.1 $A(2, 2, 4)$; $B(2, 4, 2)$; $C(0, 2, 2)$; $D(2, 0, 2)$; $E(4, 2, 2)$; $F(2, 2, 0)$

183.2 MNH : $y = 4$; LM : $x = 4 \wedge z = 4$

183.3

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow x - y = 0$$

183.4 Centro: ponto de coordenadas $(2, 2, 2)$; raio: 2

Inequação reduzida da esfera: $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$

184.1 A abscissa de P , bem como a sua ordenada, é 3. Determinemos a sua cota.

$$V_{\text{sólido}} = 276 \Leftrightarrow V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} = 276 \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = 276 - 6^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = 60 \Leftrightarrow \frac{6^2 \times h}{3} = 60 \Leftrightarrow h = 5$$

Logo, $P(3, 3, 5)$.

184.2

- a. $y = 6$
 b. $0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge z = -6$
 c. $x = 6 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge z = -6$
 d. $0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge -6 \leq z \leq 0$

184.3 Equação de α :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 &= (x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 &= x^2 + y^2 - 12y + 36 + z^2 \\ \Leftrightarrow 6x - 6y + 10z &= 7\end{aligned}$$

Coordenadas de I :

$$\begin{cases} x - 6y + 10z = 7 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10z = 7 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{10} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad I\left(0, 0, \frac{7}{10}\right)$$

$$\overline{IB} = d(I, B) = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2 + \left(-6 - \frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{8089}{100}} = \frac{\sqrt{8089}}{10}$$

$$\overline{OC} = d(O, C) = \sqrt{(6-0)^2 + (6-0)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{3 \times 6^2} = 6\sqrt{3}$$

$$\overline{IB} \neq \overline{OC} \left(\text{porque } \frac{8089}{100} < 108 \right)$$

185.1 $C(1, 2, 0)$; $r = 5$ 185.2 $z = -5$ e $z = 5$

185.3 Um círculo.

185.4

- a. $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 25 \wedge z = 0$; círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, 2, 0)$ e raio 5, contido no plano de equação $z = 0$.
 b. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 25 \wedge x = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 + z^2 \leq 24 \wedge x = 0$; círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 2, 0)$ e raio $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, contido no plano de equação $x = 0$.
 c. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 25 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + z^2 \leq 21 \wedge y = 0$; círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, 0, 0)$ e raio $\sqrt{21}$, contido no plano de equação $y = 0$.

186.1 Por exemplo, $[A, C]$ e $[B, D]$.186.2 Por exemplo, $[A, C]$, $[B, D]$, $[E, F]$ e $[H, G]$.186.3 $[C, G]$ 186.4 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{HC}$ e os seus simétricos.187. $C + \overrightarrow{AG} = C + \overrightarrow{CF} = F$

$$B - A = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AF}$$

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

188.1 $\overrightarrow{OG} = G - O$; $G(-1, 2, 3)$

$\overrightarrow{OG}$ tem coordenadas $(-1-0, 2-0, 3-0) = (-1, 2, 3)$.

188.2 $\overrightarrow{OF} = F - O$; $F(1, 2, 3)$

$\overrightarrow{OF}$ tem coordenadas $(1-0, 2-0, 3-0) = (1, 2, 3)$.

188.3 $\overrightarrow{EF} = F - E$; $E(1, -2, 3)$; $F(1, 2, 3)$

$\overrightarrow{EF}$ tem coordenadas $(1-1, 2-(-2), 3-3) = (0, 4, 0)$.

188.4 $\overrightarrow{BC} = C - B$; $B(1, 2, -3)$; $C(-1, 2, -3)$

$\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(-1-1, 2-2, -3-(-3)) = (-2, 0, 0)$.

188.5 $\overrightarrow{BF} = F - B$; $F(1, 2, 3)$; $B(1, 2, -3)$

$\overrightarrow{BF}$ tem coordenadas $(1-1, 2-2, 3-(-3)) = (0, 0, 6)$.

188.6 $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ tem coordenadas $(0, 0, 6)$.

188.7 $\overrightarrow{EF}(0, 4, 0)$

$2\overrightarrow{EF}$ tem coordenadas $(2 \times 0, 2 \times 4, 2 \times 0) = (0, 8, 0)$.

188.8 $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(-2, 0, 0)$.

$-2\overrightarrow{FG}$ tem coordenadas $(-2 \times (-2), -2 \times 0, -2 \times 0) = (4, 0, 0)$.

189.1 $\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

189.2 $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 3$, $\|3\vec{v}\| = 3\|\vec{v}\| = 3\sqrt{38}$, $\left\|\frac{1}{2}\vec{w}\right\| = \frac{1}{2}\|\vec{w}\| = \frac{3}{2}$

190.1 $\vec{u} + \vec{v}$ tem coordenadas $(-3+1, 3+0, 3+(-1)) = (-2, 3, 2)$.

190.2 $\vec{v} + \vec{w}$ tem coordenadas $(1+1, 0+2, -1+3) = (2, 2, 2)$.

190.3 $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ tem coordenadas $(-3+1+1, 3+0+2, 3+(-1)+3) = (-1, 5, 5)$.

190.4 $\vec{v} - \vec{u}$ tem coordenadas $(1-(-3), 0-3, -1-3) = (4, -3, -4)$.

190.5 $-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ tem coordenadas $(-(-3)+1-1, -3+0-2, -3-1-3) = (3, -5, -7)$.

190.6 $2\vec{u}$ tem coordenadas $(2 \times (-3), 2 \times 3, 2 \times 3) = (-6, 6, 6)$.

190.7 $-3\vec{v}$ tem coordenadas $(-3 \times 1, -3 \times 0, -3 \times (-1)) = (-3, 0, 3)$.

190.8 $\vec{v} + 2\vec{w}$ tem coordenadas $(1+2 \times 1, 0+2 \times 2, -1+2 \times 3) = (3, 4, 5)$.

190.9 $-\frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$ tem coordenadas $\left(-\frac{1}{3} \times (-3) + 2 \times 1 - 2 \times 1, -\frac{1}{3} \times 3 + 2 \times 0 - 2 \times 2, -\frac{1}{3} \times 3 + 2 \times (-1) - 2 \times 3\right) = (1, -5, -9)$.

191. $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. Sendo $Q(x, y, z)$, $\overrightarrow{PQ}$ tem coordenadas $(x-0, y-0, z-5)$. Assim, tem-se:

$$(x-0, y-0, z-5) = (4, 4, 4) \iff \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z-5=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases}$$

Q tem coordenadas $(4, 4, 9)$.

192.1 $A + 3\vec{u}$ tem coordenadas $(-3 + 3 \times 8, 2 + 3 \times 0, 1 + 3 \times (-6)) = (21, 2, -17)$.

192.2 $\vec{AB} = B - A$ tem coordenadas $(1 - (-3), 1 - 2, -2 - 1) = (4, -1, -3)$.

$\vec{AB} + 2(-5\vec{u}) = \vec{AB} - 10\vec{u}$ tem coordenadas $(4 - 10 \times 8, -1 - 10 \times 0, -3 - 10 \times (-6)) = (-76, -1, 57)$

192.3 $4\vec{AB} - \frac{5}{2}\vec{u}$ tem coordenadas $(4 \times 4 - \frac{5}{2} \times 8, 4 \times (-1) - \frac{5}{2} \times 0, 4 \times (-3) - \frac{5}{2} \times (-6)) = (-4, -4, 3)$

192.4 $B - 2(\vec{AB} + \vec{u})$ tem coordenadas $(1 - 2 \times (4 + 8), 1 - 2 \times (-1 + 0), -2 - 2 \times (-3 - 6)) = (-23, 3, 16)$

192.5 $\|\vec{u}\| = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-6)^2} = 10$

$$\vec{v} = \frac{2}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{5} \vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -\frac{1}{5} \vec{u}$$

$\vec{v}$ tem coordenadas $(\frac{1}{5} \times 8, \frac{1}{5} \times 0, \frac{1}{5} \times (-6)) = (\frac{8}{5}, 0, -\frac{6}{5})$ ou $(-\frac{8}{5}, 0, \frac{6}{5})$.

192.6 $\vec{AB} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{u} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{u}$

$\vec{x}$ tem coordenadas $(4 - \frac{1}{2} \times 8, -1 - \frac{1}{2} \times 0, -3 - \frac{1}{2} \times (-6)) = (0, -1, 0)$.

193. Os vetores $\vec{u}(k+1, 3, 2)$ e $\vec{v}(1, 6, k-1)$ são colineares se e só se:

$$\frac{k+1}{1} = \frac{3}{6} = \frac{2}{k-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{k-1} \\ \frac{k+1}{1} = \frac{2}{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = 5 \wedge k = \pm\sqrt{3}$$

Logo, não existe um número real k tal que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.

194. Começamos por indicar as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.

$A(4, -3, 9); B(4, 8, 9); C(0, 8, 9); D(0, -3, 9); E(4, -3, 0); F(4, 8, 0); G(0, 8, 0); H(0, -3, 0)$.

194.1 $\vec{EH} + \vec{HG} = \vec{EG} = G - E$ tem coordenadas $(0 - 4, 8 - (-3), 0 - 0) = (-4, 11, 0)$.

194.2 $\vec{FG} + \vec{GC} = \vec{FC} = C - F$ tem coordenadas $(0 - 4, 8 - 8, 9 - 0) = (-4, 0, 9)$.

194.3 $\vec{FH} + \vec{HD} = \vec{FD} = D - F$ tem coordenadas $(0 - 4, -3 - 8, 9 - 0) = (-4, -11, 9)$.

194.4 $\vec{EF} + \vec{HG} = 2\vec{EF}$

$\vec{EF} = F - E$ tem coordenadas $(4 - 4, 8 - (-3), 0 - 0) = (0, 11, 0)$.

$2\vec{EF}$ tem coordenadas $(2 \times 0, 2 \times 11, 2 \times 0) = (0, 22, 0)$.

194.5 $\vec{OE} = E - O$ tem coordenadas $(4, -3, 0)$.

$\vec{FE} = E - F$ tem coordenadas $(4 - 4, -3 - 8, 0 - 0) = (0, -11, 0)$.

$\vec{OE} + \vec{FE}$ tem coordenadas $(4 + 0, -3 + (-11), 0 + 0) = (4, -14, 0)$.

194.6 $-\vec{EH} = \vec{HE} = E - H$ tem coordenadas $(4 - 0, -3 - (-3), 0 - 0) = (4, 0, 0)$.

194.7 $-3\vec{OH} = 3\vec{HO}$ tem coordenadas $(3 \times 0, 3 \times 3, 3 \times 0) = (0, 9, 0)$.

194.8 $-\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} = G - O$ tem coordenadas $(0, 8, 0)$.

194.9 $\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ tem coordenadas $(0, 0, 0)$.

194.10 $\overrightarrow{HG} = G - H$ tem coordenadas $(0 - 0, 8 - (-3), 0 - 0) = (0, 11, 0)$.

$\overrightarrow{BC} = C - B$ tem coordenadas $(0 - 4, 8 - 8, 9 - 9) = (-4, 0, 0)$.

$\overrightarrow{HG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $\left(0 + \frac{3}{2} \times (-4), 11 + \frac{3}{2} \times 0, 0 + \frac{3}{2} \times 0\right) = (-6, 11, 0)$.

194.11 $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} = G - A$ tem coordenadas $(0 - 4, 8 - (-3), 0 - 9) = (-4, 11, -9)$.

195.1 Por exemplo, para $k=0$, tem-se $(1, 3, -2)$.

$$\mathbf{195.2} \quad (7, -6, -14) = (1, 3, -2) + k(2, -3, -4) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 1 + 2k \\ -6 = 3 - 3k \\ -14 = -2 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow k = 3$$

Para $k=3$, tem-se $(x, y, z) = (7, -6, -14)$, logo o ponto A pertence à reta r .

195.3 Por exemplo, para $k=1$, obtém-se $(3, 0, -6)$, e, para $k=2$, obtém-se $(5, -3, -10)$.

196. $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(-2 - 1, -3 - 0, 1 - 3) = (-3, -3, -2)$

$(x, y, z) = (1, 0, 3) + k(-3, -3, -2), k \in \mathbb{R}$

$(x, y, z) = (-2, -3, 1) + k(-3, -3, -2), k \in \mathbb{R}$

197. A reta BC tem a direção de $\vec{e}_2(0, 1, 0)$. Considerando $B(3, 0, 3)$, tem-se:

$$BC: (x, y, z) = (3, 0, 3) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = k, k \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

A reta DF tem a direção de $\overrightarrow{DF}(-3, 0, 3)$. Considerando $D(3, 3, 0)$, tem-se:

$$DF: (x, y, z) = (3, 3, 0) + k(-3, 0, 3), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 3 \\ z = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

A reta ED tem a direção de $\overrightarrow{ED}(3, 3, -3)$. Considerando $E(0, 0, 3)$, tem-se:

$$ED: (x, y, z) = (0, 0, 3) + k(3, 3, -3), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 3k \\ z = 3 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

198. $\overrightarrow{BA}$ tem coordenadas $(-1 - 2, 3 - (-1), 4 - 3) = (-3, 4, 1)$

Os vetores $(6, k, -2)$ e $\overrightarrow{BA}$ são colineares se e só se $\frac{6}{-3} = \frac{k}{4} = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow k = -8$

Opção correta: A

199. Os vetores $\vec{a}(-5, 2, 5)$ e $\vec{b}(-1, m, 1)$ são colineares se, e só se, $\frac{-1}{-5} = \frac{m}{2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$

Opção correta: B

200. A interseção dos planos de equações $y=4$ e $z=1$ é a reta paralela ao eixo Ox (com a direção do vetor $\vec{e}_1(1, 0, 0)$) que passa, por exemplo, no ponto de coordenadas $(5, 4, 1)$. Assim, uma equação vetorial dessa reta é:

$$(x, y, z) = (5, 4, 1) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$$

Opção correta: D

201. Os vetores diretores das duas retas são colineares, pois sendo $\vec{u}(-1, 5, 7)$ e $\vec{v}(-3, 15, 21)$, tem-se $\vec{v} = 3\vec{u}$. Assim, as retas só podem ser coincidentes ou paralelas. Verifiquemos se um ponto de uma das retas pertence à outra.

$$(1, 0, -9) = (5, 3, 1) + k(-1, 5, 7) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 5 - k \\ 0 = 3 + 5k \\ -9 = 1 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = -\frac{3}{5} \\ k = -\frac{10}{7} \end{cases} \text{ (condição impossível)}$$

As retas são estritamente paralelas e, portanto, são coplanares.

Opção correta: A

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-1 + \lambda, \lambda, 2 + 3\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1, 0, 2) + \lambda(1, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

202.1 Opção correta: C

202.2 Opção correta: B

203.1

a. $\vec{ST} + \vec{TP} = \vec{SP}$

b. $\vec{RU} + \vec{UT} = \vec{RT}$

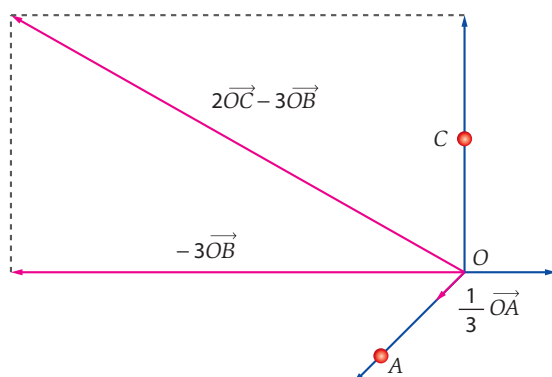
c. $\vec{OS} + \vec{TU} = \vec{OS} + \vec{SV} = \vec{OV}$

203.2 $[V, R], [R, V], [O, S], [S, O], [U, Q], [Q, U], [T, P], [P, T]$. Correspondem a dois vetores.

203.3 Sendo X e Y dois quaisquer vértices distintos do cubo, $\|\vec{XY}\|$ representa a medida de uma aresta, a medida de uma diagonal facial ou a medida de uma diagonal espacial.

Como $\|\vec{RQ}\| = 3$, $\|\vec{RU}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ e $\|\vec{RT}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, tem-se $\|\vec{XY}\| \in \{3, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}\}$.

204.1, 204.2 e 204.3



205.1 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + 0\vec{v} + \vec{w}$

205.2 $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AE} + (-\overrightarrow{BC}) + (-\overrightarrow{AB}) = -\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

205.3 $0\vec{u} + 0\vec{v} - \vec{w}$

205.4 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

206.1

a. $A + \overrightarrow{AF} = F$

b. $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{ED}$

c. $H + \overrightarrow{CD} = H + \overrightarrow{HE} = E$

d. $G + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = G - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = G + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = G + \overrightarrow{BA} = G + \overrightarrow{GF} = F$

206.2 $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

206.3 Consideremos os pontos $D(0, 2, 5)$, $A(0, 0, 5)$ e $G(2, 3, 0)$. A reta pedida tem a direção do vetor $\overrightarrow{AG}$, cujas coordenadas são $(3-0, 2-0, 0-5) = (3, 2, -5)$.

Uma equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (0, 2, 5) + k(3, 2, -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

207.1 O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (0, 2, 2)$ e o vetor $\overrightarrow{DM} = M - D$ tem coordenadas $(0-0, 2-2, 2-0) = (0, 4, 2)$.

207.2 $\overrightarrow{BC}(-2-0, 0-2, 0-0) = \overrightarrow{BC}(-2, -2, 0)$

$\overrightarrow{BA}(2-0, 0-2, 0-0) = \overrightarrow{BA}(2, -2, 0)$

$\overrightarrow{BF}(0-0, 2-2, 4-0) = \overrightarrow{BF}(0, 0, 4)$

$\overrightarrow{DM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow (0, 4, 2) = (-2a+2b+0c, -2a-2b+0c, 0a+0b+4c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2a + 2b + 0c \\ 4 = -2a - 2b + 0c \\ 2 = 0a + 0b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4 = -4b \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

207.3 O vetor $\overrightarrow{EC}$ tem coordenadas $(-2-2, 0-(-2), 0-4) = (-4, 2, -4)$.

$\overrightarrow{GB}$ tem coordenadas $(0-(-2), 2-2, 0-4) = (2, 0, -4)$.

O vetor $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GB}$ tem coordenadas $(-4+2, 2+0, -4+(-4)) = (-2, 2, -8)$.

207.4 Uma equação vetorial da reta é:

$(x, y, z) = (0, 2, 4) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

O respetivo sistema de equações paramétricas é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

208.1 Da equação vetorial $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(1, 1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, obtém-se: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$

$$208.2 \quad \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ -3 = -1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ 4 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2, \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Para $\lambda = -2$, obtém-se $(x, y, z) = (0, -3, 4)$, pelo que o ponto B pertence à reta.

208.3 O ponto de interseção da reta com o plano coordenado xOz tem a ordenada nula. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ 0 = -1 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ k = 1 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{---} \\ z = -2 \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $(3, 0, -2)$.

208.4 Centro: $C = A + \vec{v}$ tem coordenadas $(2+1, -1+1, 0+(-2)) = (3, 0, -2)$

$$\text{Raio: } \overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (0-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{6}$$

208.5 O ponto $D = A + 2\vec{v}$ tem coordenadas $(2+2 \times 1, -1+2 \times 1, 0+2 \times (-2)) = (4, 1, -4)$.

$$\overrightarrow{DP}(4-3, 1-0, -4-(-2)) = \overrightarrow{DP}(1, 1, -2)$$

A reta DP tem a seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (3, 0, -2) + k(1, 1, -2), k \in \mathbb{R}$$

Verifica-se que, por exemplo, o ponto Q de coordenadas $(0, 0, 0)$ não pertence à reta DP , pelo que D, P e Q são não colineares.

$$(0, 0, 0) = (3, 0, -2) + k(1, 1, -2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + k \\ 0 = k \\ 0 = -2 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 0 \\ k = -1 \end{cases}$$

(condição impossível)

209.1 O tetraedro $[BDEG]$ é regular porque as suas arestas são diagonais faciais do cubo, logo iguais.

209.2

$$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD}(0-3, 1-0, 2-2) = \overrightarrow{AD}(-3, 1, 0)$$

$$C(4+(-3), 3+1, 2+0) = C(1, 4, 2)$$

$$F = B + \overrightarrow{BF} = B + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AE}(3-3, 0-0, 2+\sqrt{10}-2) = \overrightarrow{AE}(0, 0, \sqrt{10})$$

$$F(4+0, 3+0, 2+\sqrt{10}) = F(4, 3, 2+\sqrt{10})$$

$$G = C + \overrightarrow{CG} = C + \overrightarrow{AE}$$

$$G(1+0, 4+0, 2+\sqrt{10}) = G(1, 4, 2+\sqrt{10})$$

$$H = D + \overrightarrow{DH} = D + \overrightarrow{AE}$$

$$H(0+0, 1+0, 2+\sqrt{10}) = H(0, 1, 2+\sqrt{10})$$

$$209.3 \quad \overrightarrow{EC}(1-3, 4-0, 2-(2+\sqrt{10})) = \overrightarrow{EC}(-2, 4, -\sqrt{10})$$

Uma equação vetorial da reta EC é:

$$(x, y, z) = (1, 4, 2) + \lambda(-2, 4, -\sqrt{10}), \lambda \in \mathbb{R}$$

O correspondente sistema de equações paramétricas é:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - \sqrt{10}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

209.4 $\overrightarrow{EG}(1 - 3, 4 - 0, 2 + \sqrt{10} - (2 + \sqrt{10})) = \overrightarrow{EG}(-2, 4, 0)$

O segmento de reta $[EG]$ pode ser definido por:

$P = E + k\overrightarrow{EG}$, $k \in [0, 1]$, sendo P um ponto genérico de $[EG]$.

Em termos analíticos, tem-se:

$(x, y, z) = (3, 0, 2 + \sqrt{10}) + k(-2, 4, 0)$, $k \in [0, 1]$

210.1

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

b. $A - \overrightarrow{GE} = A + \overrightarrow{EG} = A + \overrightarrow{AC} = C$

c. $\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$

210.2 $A(0, -4, 3); B(0, 2, 3); D(3, -4, 3); F(0, 2, 0); G(3, 2, 0); H(3, -4, 0)$

210.3 $0 \leq x \leq 3 \wedge -4 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 3$

210.4 O vetor $\overrightarrow{EC}$ tem coordenadas $(3 - 0, 2 - (-4), 3 - 0) = (3, 6, 3)$.

Uma equação vetorial da reta EC é:

$(x, y, z) = (0, -4, 0) + k(3, 6, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

210.5 Raio: $\|\overrightarrow{EC}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{54}$;

Inequação reduzida da esfera: $x^2 + (y + 4)^2 + z^2 \leq 54$

210.6 $M\left(3, -4, \frac{3}{2}\right); N\left(\frac{3}{2}, -4, 3\right)$

$\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{2} - 3, -4 - (-4), 3 - \frac{3}{2}\right) = \overrightarrow{MN}\left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{BG}(3 - 0, 2 - 2, 0 - 3) = \overrightarrow{BG}(3, 0, -3)$

Os vetores $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{MN}$ são colineares, logo os lados $[BG]$ e $[MN]$ são paralelos.

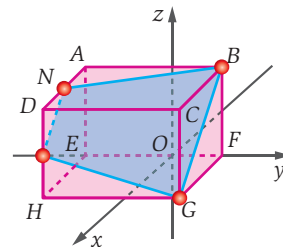
$\overrightarrow{BN}\left(\frac{3}{2} - 0, -4 - 2, 3 - 3\right) = \overrightarrow{BN}\left(\frac{3}{2}, -6, 0\right)$

$\overrightarrow{GM}\left(3 - 3, -4 - 2, \frac{3}{2} - 0\right) = \overrightarrow{GM}\left(0, -6, \frac{3}{2}\right)$

$\|\overrightarrow{BN}\| = \|\overrightarrow{GM}\| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{4}} = \sqrt{36 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{144 + 9}{4}} = \frac{\sqrt{153}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 \times 17}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

Os vetores $\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{GM}$ têm a mesma norma, logo os lados $[BN]$ e $[GM]$ são iguais (não sendo paralelos, pois $\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{GM}$ são não colineares).

Concluindo, sendo $[BG]$ e $[MN]$ paralelos e $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{GM}$, o quadrilátero $[BGMN]$ é um trapézio isósceles.



211.1 Considerando o centímetro como unidade de medida do referencial, tem-se:

$A(3, 0, 0)$; $B(3, 6, 0)$; $C(-3, 6, 0)$; $D(-3, 0, 0)$; $E(3, 0, 12)$; $F(3, 6, 12)$; $G(-3, 6, 12)$; $H(-3, 0, 12)$.

211.2

a. $x = 3 \wedge y = 0$

b. $y = 3$

c. $-3 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge z = 12$

d. Centro: $\left(\frac{3-3}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 3, 0)$

Raio: $\overline{BD}(-3-3, 0-6, 0-0) = \overline{BD}(-6, -6, 0)$

$$r = \frac{\|\overline{BD}\|}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \frac{\sqrt{6^2 \times 2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Equação da superfície esférica: $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 18$

211.3 O vetor $\overline{FC}$ tem coordenadas $(-3-3, 6-6, 0-12) = (-6, 0, -12)$.

$(x, y, z) = (3, 6, 12) + k(-6, 0, -12), k \in \mathbb{R}$

211.4 $(2, 0, 3) = (3, 6, 12) + k(-6, 0, -12), k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} 2 = 3 - 6k \\ 0 = 6 \\ 3 = 12 - 12k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ é uma condição impossível, logo o ponto não pertence à reta.}$

211.5

a. $G + \overline{DA} = G + \overline{GF} = F$

b. $\overline{GA} - \overline{GC} = \overline{GA} + \overline{CG} = \overline{GA} + \overline{AE} = \overline{GE}$

c. $\overline{BC} + \overline{HE} = \overline{BC} + \overline{CB} = \vec{0}$

212.1 $C(0, 8, 4)$; $D(12, 4, 7)$

212.2

a. $\overline{DB} + \overline{BC} = \overline{DC}$

b. $\overline{AC} + \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AE}$

212.3 $z = 0$

212.4 O vetor $\overline{BA}$ tem coordenadas $(0-0, 0-4, 4-7) = (0, -4, -3)$.

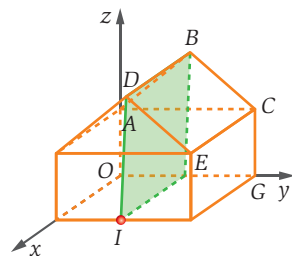
$(x, y, z) = (12, 4, 7) + k(0, -4, -3), k \in \mathbb{R}$

212.5 A interseção do sólido com o plano DBI é um retângulo de dimensões $12 \text{ dm} \times 7 \text{ dm}$.

Assim, a área é:

$A = 12 \times 7 = 84 \text{ dm}^2$

212.6 $V = 12 \times 8 \times 4 + \frac{8 \times 3}{2} \times 12 = 528 \text{ dm}^3$



213.1 A aresta do cubo mede $\sqrt[3]{27} = 3$. Tomando o centímetro como unidade de medida do referencial, tem-se:

$P\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$; $O\left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$; $M\left(\frac{3}{2}, 3, 0\right)$; $N\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$; $R\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$; $Q\left(3, 0, \frac{3}{2}\right)$;

$L\left(3, 3, \frac{3}{2}\right)$; $K\left(0, 3, \frac{3}{2}\right)$; $S\left(\frac{3}{2}, 0, 3\right)$; $T\left(3, \frac{3}{2}, 3\right)$; $J\left(\frac{3}{2}, 3, 3\right)$; $I\left(0, \frac{3}{2}, 3\right)$.

$$213.2 \quad \overrightarrow{OM} \left(\frac{3}{2} - 3, 3 - \frac{3}{2}, 0 - 0 \right) = \overrightarrow{OM} \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$213.3 \quad A_{\text{quadrado}} = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

$$h^2 = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4} \sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{8} \Leftrightarrow h^2 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow_{h>0} h = \sqrt{\frac{27}{8}} \Leftrightarrow h = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{9}{8} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$213.4 \quad V_{\text{cubo}} = 27 \text{ cm}^3$$

$$V_{[AOPQ]} = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{16} \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_{\text{não ocupado cuboctaedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{8 \times V_{[AOPQ]}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{8 \times \frac{9}{16}}{27} = \frac{\frac{9}{2}}{27} = \frac{1}{6} = 16,6\%$$

213.5

a. $\vec{u} + \frac{1}{2} \vec{w}$

b. $\frac{1}{2} \vec{u} + \vec{w}$

c. $\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{w}$

d. $\frac{1}{2} \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

213.6

a. $\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM}$

b. $\overrightarrow{SF} - \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{SN}$

c. $\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SQ} = \vec{0}$

TESTE – Página 120

1. Opção correta: B

2.1 A reta CD é a interseção dos planos de equações $x = 1$ e $z = 0$; fica, portanto, definida por $x = 1 \wedge z = 0$.

Opção correta: C

2.2 Opção correta: C

2.3 Centro: $C(1, -1, 0)$; raio $= \frac{1}{2}$.A esfera fica definida por: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$

Opção correta: D

3. Uma reta paralela ao eixo Oz tem a direção do vetor $\vec{e}_3(0, 0, 1)$. Das equações dadas a única que satisfaz esta condição é a da opção B.

Opção correta: B

4.1 $C(3, 3, 5)$; $G(3, 0, 0)$; $F(3, 3, 0)$ 4.2 $M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$ 4.3 $y = 3$ 4.4 O vetor $\vec{CM}$ tem coordenadas

$$\left(\frac{3}{2} - 3, 3 - 3, \frac{5}{2} - 5\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right).$$

Um vetor diretor da reta CM tem coordenadas $(3, 0, 5)$.Uma equação vetorial da reta CM é

$$(x, y, z) = (3, 3, 5) + k(3, 0, 5), k \in \mathbb{R}$$

4.5 $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = (x-3)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow -6y - 10z + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y + 5z - 17 = 0$$

4.6 Centro: $M_{[CG]}\left(\frac{3+3}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = M_{[CG]}\left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Raio: } \frac{d(C, G)}{2} = \frac{\sqrt{(3-3)^2 + (3-0)^2 + (5-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\text{Equação da superfície esférica: } (x-3)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

5.1 Os pontos B e F têm a mesma abscissa e a mesma ordenada. Assim, tem-se:

$$a = 3 \wedge b = 4 \Rightarrow 3 - 4 = \frac{c}{2} \Leftrightarrow c = -2$$

5.2 $V = 3 \times 4 \times 2 + \frac{4 \times 4}{2} \times 3 = 48$ 5.3 $ABC: z = -2$; $EFI: x = 3$ 5.4 $\vec{EG} = G - E$ tem coordenadas

$$(0 - 3, 4 - 0, 0 - 0) = (-3, 4, 0).$$

 $\vec{GC} = C - G$ tem coordenadas

$$(0 - 0, 4 - 4, -2 - 0) = (0, 0, -2).$$

 $\vec{u} = 3\vec{EG} - \vec{GC}$ tem coordenadas

$$(3 \times (-3) - 0, 3 \times 4 - 0, 3 \times 0 - (-2)) = (-9, 12, 2).$$

5.5 O vetor $\vec{IF}$ tem coordenadas

$$(3 - 3, 4 - 0, 0 - 4) = (0, 4, -4).$$

$$(x, y, z) = (3, 4, 0) + k(0, 4, -4), k \in \mathbb{R}$$

6.1

$$\text{a. } \vec{EF} + \vec{FG} = \vec{AC}$$

$$\text{b. } F + \vec{CD} = F + \vec{FE} = E$$

$$\text{c. } D + 2\vec{AB} + \vec{CE} = D + \vec{DF} = F$$

6.2 $F = E + \vec{AB}$ $\vec{AB} = B - A$ tem coordenadas

$$(13 - 11, 12 - (-1), 8 - 2) = (2, 13, 6).$$

$$F(2 + 8, 13 + 5, 6 + 0) = F(10, 18, 6)$$

A reta que contém o ponto F e é paralela ao eixo Oz tem como vetor diretor, por exemplo, $\vec{e}_3(0, 0, 1)$. Assim, uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (10, 18, 6) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

TESTE GLOBAL – Página 122

1.

$$\begin{aligned} \sim[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] &\Leftrightarrow [\sim(p \vee \sim q) \vee \sim(\sim p)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow \Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \wedge (q \vee p)) \\ &\Leftrightarrow (v \wedge (q \vee p)) \Leftrightarrow (q \vee p) \end{aligned}$$

Opção correta: C

2. $4 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 4$$

O conjunto-solução da primeira condição no conjunto dos números naturais é $\{1, 2, 3\}$. Relativamente à segunda condição tem-se $\{4\}$ como conjunto-solução. Considerando a reunião destes conjuntos, tem-se:

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

Opção correta: D

3. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x^{\frac{1}{5}}x}{\sqrt[5]{x^4} \times \sqrt[5]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{5}}x}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{x^{\frac{1}{5}}x}{x} \underset{x \neq 0}{=} \sqrt[5]{x}$

Opção correta: B

4. $\sqrt[3]{3^6 a} \times \sqrt[12]{a} = \sqrt[6]{3^6 \times a} \times \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{3^6 \times a} \times \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{3^6 \times a^2} = \sqrt{(3^3 \times a^2)} = \sqrt[6]{3^3 a} = (27a)^{\frac{1}{6}}$

Opção correta: A

5.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-2) + (x-1)(x+2) = (x-1)[(x-1)(x-2) + (x+2)] \\ &= (x-1)[x^2 - 3x + 2 + (x+2)] = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Opção correta: B

6. O conjunto de pontos definido por esta condição é a parte do círculo de centro em $(-1, 1)$ e raio $\sqrt{2}$, cujos pontos têm abcissa positiva. Este último aspeto permite excluir a opção C. Considerando que o centro é um ponto do 2.º quadrante, exclui-se a opção D. Por outro lado, como a origem do referencial pertence à circunferência do círculo, apenas a opção B pode representar este conjunto de pontos.

Opção correta: B

7. Esta reta é a interseção de dois planos paralelos ao eixo Ox , pelo que também é paralela a este eixo, não o sendo em relação a qualquer um dos outros eixos coordenados. Sendo paralela a Ox , também o é em relação ao plano xOy .

Opção correta: B

8. $\overrightarrow{AB} = B - A$ tem coordenadas

$$(3 - (-2), -1 - 3, 3 - 5) = (5, -4, -2).$$

Opção correta: C

9. Simplifiquemos a expressão:

$$\begin{aligned} \sim((q \Rightarrow p) \vee \sim(\sim p \wedge q)) &\Leftrightarrow (\sim(q \Rightarrow p) \wedge (\sim p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow ((q \wedge \sim p) \wedge (\sim p \wedge q)) \Leftrightarrow (q \wedge \sim p \wedge \sim p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (q \wedge q \wedge \sim p \wedge \sim p) \Leftrightarrow (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

Sendo $\sim((q \Rightarrow p) \vee \sim(\sim p \wedge q))$ verdadeira, também o é $q \wedge \sim p$, o que é equivalente a dizer que q e $\sim p$ são proposições verdadeiras, ou seja, o valor lógico de q é verdadeiro e o valor lógico de p é falso.

10.1 Sendo $A(x)$ divisível por $x + \sqrt{2}$, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x + \sqrt{2}$ é 0. Assim, pelo teorema do resto, tem-se $A(-\sqrt{2}) = 0$.

$$\begin{aligned} A(-\sqrt{2}) = 0 &\Leftrightarrow (-\sqrt{2})^4 - a(-\sqrt{2})^3 - (-\sqrt{2})^2 + a(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}^4 + 2a\sqrt{2}^3 - 2 - a\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4 + 2a\sqrt{2} - 2 - a\sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{2} - \sqrt{2})a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = -\frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

10.2 Começemos por fatorizar o polinómio

$A(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$, colocando em evidência o fator x :

$$A(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

Para continuar o processo de fatorização, determinemos uma raiz do polinómio $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Se este polinómio tiver alguma raiz inteira, esta terá de ser um divisor do termo independente, isto é, terá de pertencer ao conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$. Como $(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$, -1 é uma raiz deste polinómio, pelo que $x^3 - 2x^2 - x + 2$ é divisível por $x + 1$. Determinemos o quociente desta divisão.

	1	-2	-1	2
-1		-1	3	-2
	1	-3	2	0

$$Q(x) = x^2 - 3x + 2$$

Determinemos, agora, as raízes de $Q(x)$.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Concluimos, por aplicação do teorema fundamental da Álgebra, que:

$$A(x) = x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = x(x+1)(x^2 - 3x + 2) = x(x+1)(x-1)(x-2)$$

10.3 Recorrendo à fatorização feita na alínea anterior, podemos agora construir um quadro de sinal do polinômio $A(x)$.

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+
$A(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+

O conjunto-solução de $A(x) \leq 0$ é $[-1, 0] \cup [1, 2]$.

11.

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{\sqrt{2a+1}+a\sqrt{a}} &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a})}{(\sqrt{2a+1}+a\sqrt{a})(\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a})} = \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a})}{(\sqrt{2a+1})^2 - (a\sqrt{a})^2} = \frac{(a+1)(\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a})}{2a+1-a^3} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{(a+1)(\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a})}{(a+1)(-a^2+a+1)} \stackrel{a \in \mathbb{R}^+}{=} \frac{\sqrt{2a+1}-a\sqrt{a}}{-a^2+a+1} \end{aligned}$$

(*) Por aplicação da regra de Ruffini, uma vez que -1 é raiz do polinômio $-a^3 + 2a + 1$.

12. Seja a a medida da aresta do cubo.

$$\text{Então, tem-se } V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

Sendo d o diâmetro da base do cilindro, tem-se $d^2 = a^2 + a^2$

$$\Leftrightarrow d = a\sqrt{2} \text{ e, portanto, o raio da base é } r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathbf{12.1} \quad A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi (\sqrt[3]{V})^2}{2} = \frac{\pi}{2} V^{\frac{2}{3}}$$

12.2

$$\begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= 2\pi rh = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{2} a = \pi a^2 \sqrt{2} = \pi \sqrt{2} a^2 = \pi \sqrt{2} (\sqrt[3]{V})^2 = \\ &= \pi \sqrt{2} \sqrt[3]{V^4} = \pi \sqrt{2} \sqrt[3]{2^3 V^4} = \pi \sqrt{8} V^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

13.1 Coordenadas de um ponto: $(0, 3)$; coordenadas de um vetor diretor: $(-2, 1)$

13.2 Interseção com o eixo das abscissas:

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ 0 = 3 + k \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ k = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(6, 0)$

Interseção com o eixo das ordenadas:

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2k \\ y = 3 + k \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0, 3)$

13.3

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{x}{2} \\ k = y - 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = y - 3$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

14.1

$$(1, -2, 7) = (1, 3, 2) + k(0, -1, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = 3 - k \\ 7 = 2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ k = 5 \\ k = 5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Para $k = 5$, as coordenadas do ponto A satisfazem a equação que define analiticamente a reta s , logo o ponto pertence à reta.

14.2 Não, os vetores diretores de s têm coordenadas da forma $(0, -k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{15.1} \quad H = G + \overrightarrow{BA}$$

$\overrightarrow{BA} = A - B$ tem coordenadas

$$(11 - 8, -1 - 5, 2 - 0) = (3, -6, 2).$$

H tem coordenadas $(6 + 3, 9 + (-6), 15 + 2) = (9, 3, 17)$.

15.2 Centro: $A(11, -1, 2)$

$$\text{Raio: } d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Equação da superfície esférica: } (x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$$

15.3 Um vetor diretor desta reta é $\vec{e}_2(0, 1, 0)$. Uma equação vetorial desta reta (considerando que passa no ponto G) é:

$$(x, y, z) = (6, 9, 15) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

16.1

a. $A + \overrightarrow{AC} = C$

b. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

c. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

RESOLUÇÕES

16.2 $B(2, 3, 0); G(0, 0, 5)$

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{38}$$

16.3 $\overrightarrow{AD} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$

$$\overrightarrow{BF} = 0\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

16.4 $A(2, 0, 0); \overrightarrow{AD}(-2, 3, 5)$

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-2, 3, 5), k \in \mathbb{R}$$

16.5
$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 3k \\ z = 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$