

MAT 10

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

10.º ANO Matemática A

Cristina Viegas • Sérgio Valente

Documentos orientadores

Planificação

Guia de exploração de recursos multimédia

Propostas de resolução dos exercícios do Manual

Propostas de resolução dos exercícios do Caderno de Apoio

Banco de questões

**VERSÃO DE
DEMONSTRAÇÃO**

Introdução	2
Documentos orientadores	3
Programa e Metas Curriculares – Matemática A	3
Conteúdos	3
Níveis de desempenho	6
Indicações metodológicas	7
Avaliação	8
Metas Curriculares Secundário	9
Planificação	70
Guia de exploração de recursos multimédia	71
Propostas de resolução dos exercícios do Manual	78
Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos	78
Atividades «Será que...?»	78
Exercícios propostos	80
+ Exercícios propostos	97
Propostas de resolução dos exercícios do Caderno de Apoio	109
Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos	109
Banco de questões	118

No ano letivo 2015/2016 entra em vigor o novo Programa de Matemática A para o 10.º ano de escolaridade, e as respetivas Metas Curriculares. Tratando-se de documentos orientadores novos, transcrevem-se neste Caderno de Apoio ao Professor as **Metas Curriculares** para o Secundário.

Considerando o número de aulas previstas no Programa para cada tema, apresenta-se ainda uma **planificação** global com distribuição de tempos por cada capítulo do Manual.

O projeto MVT 10 apresenta, complementarmente ao Manual e ao Caderno de Exercícios, um Simulador de Testes e um conjunto de recursos multimédia. O **Simulador de Testes** estará disponível para todos os alunos em www.mat10.te.pt. Apresenta-se neste Caderno de Apoio ao Professor um **guia com sugestões de exploração** para os **recursos multimédia** que estarão disponíveis em **20 AULA DIGITAL**. Destacam-se, entre estes, um simulador de lógica com cerca de 200 questões e as resoluções animadas de exercícios com grau de dificuldade diversificado.

Para facilitar ao professor a gestão do tempo, nomeadamente agilizando a correção de exercícios em sala de aula, o projeto MVT 10 disponibiliza ao professor as seguintes propostas de resolução:

- propostas de resolução de todos os exercícios e das propostas «Será que...?» do Manual;
- propostas de resolução de todos os exercícios do Caderno de Exercícios;
- propostas de resolução de todos os exercícios do Caderno de Apoio à implementação das Metas Curriculares.

Todas estas propostas estarão disponíveis, em formato projetável, em **20 AULA DIGITAL**. Apresenta-se aqui uma versão de demonstração das propostas referentes aos exercícios de Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos do Manual e do Caderno de Apoio.

O Caderno de Apoio complementa as Metas Curriculares de Matemática A e apresenta várias sugestões de exercícios. Os exercícios identificados com * ou ** correspondem a níveis de desempenho mais avançados. Estes exercícios podem ser considerados como «balizas» para o trabalho de alunos e professores, razão pela qual fornecemos as respetivas resoluções.

Disponibiliza-se ainda ao professor um banco de questões, ferramenta útil para construir as suas próprias fichas e testes. Este banco de questões estará disponível, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**. Apresenta-se aqui uma versão de demonstração das questões relativas à Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos.

Nas páginas 3 a 69 apresentam-se transcrições do *Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário*, de janeiro de 2014. A versão completa do documento pode ser consultada no sítio da Direção Geral da Educação.

Conteúdos de 10.º ano

Domínio	Conteúdos
LTC10 18 aulas	Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos Proposições – Valor lógico de uma proposição; Princípio de não contradição; – Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência; – Prioridades das operações lógicas; – Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedade da dupla negação; – Princípio do terceiro excluído; Princípio da dupla implicação; – Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção; – Leis de De Morgan; – Implicação contrarrecíproca; – Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. Condições e conjuntos – Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos; – Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão; – União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar; – Inclusão de conjuntos; – Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem; – Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação; – Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco; – Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.
ALG10 30 aulas	Radicais – Monotonia da potenciação; raízes de índice, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; – Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes; – Racionalização de denominadores; – Resolução de problemas envolvendo operações com radicais. Potências de expoente racional – Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência; – Resolução de problemas envolvendo operações com potências. Polinómios – Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini; – Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto; – Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades; – Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios; – Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.

GA10 54 aulas	Geometria analítica no plano – Referenciais ortonormados; – Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respectivas coordenadas; – Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta; – Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; – Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos; – Equação cartesiana reduzida da circunferência; – Definição de elipse e respectiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal; – Inequações cartesianas de semiplanos; – Inequações cartesianas de círculos; – Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano; – Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. Cálculo vetorial no plano – Norma de um vetor; – Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico; – Diferença entre vetores; – Propriedades algébricas das operações com vetores; – Coordenadas de um vetor; – Vetor-posição de um ponto e respectivas coordenadas; – Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares; – Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respectivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; – Cálculo da norma de um vetor em função das respectivas coordenadas; – Vetor diretor de uma reta; relação entre as respectivas coordenadas e o declive da reta; – Paralelismo de retas e igualdade do declive; – Equação vetorial de uma reta; – Sistema de equações paramétricas de uma reta; – Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano. Geometria analítica no espaço – Referenciais cartesianos ortonormados do espaço; – Equações de planos paralelos aos planos coordenados; – Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; – Distância entre dois pontos no espaço; – Equação do plano mediador de um segmento de reta; – Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; – Inequação cartesiana reduzida da esfera; – Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço; – Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço. Cálculo vetorial no espaço – Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; – Equação vetorial da reta no espaço; – Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.
FRVR10 58 aulas	Generalidades acerca de funções – Produtos cartesianos de conjuntos; – Gráficos de funções; – Restrições de uma função; – Imagem de um conjunto por uma função; – Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; – Composição de funções; – Função inversa de uma função bijetiva.

	Generalidades acerca de funções reais de variável real – Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas; – Propriedades geométricas dos gráficos de funções; – Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; – Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa; – Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x + c)$ e $f(x) + d$, a, b, c, d números reais, a e b não nulos. Monotonia, extremos e concavidade – Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas; – Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos; – Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real. Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos – Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas; – Funções definidas por ramos; – Estudo da função $x \rightarrow a x - b + c$, $a \neq 0$; – As funções $x \rightarrow \sqrt{x}$ e $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas; – Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x - b} + c$, $a \neq 0$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x - b} + c$, $a \neq 0$; – Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais. Resolução de problemas – Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas; – Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real; – Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
EST10 18 aulas	Características amostrais – Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição; – Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística; – Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra; – Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra; – Percentil de ordem k; propriedades do percentil de ordem k; – Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra; – Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

Níveis de desempenho

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
10.º ano	LTC10 1.16, 2.19, 3.1, 3.2. ALG10 1.1, 1.2, 1.11, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 4.2, 4.5, 4.11, 5.1, 5.2, 5.3. GA10 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2. FRVR10 1.11, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 4.8, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. EST10 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.
11.º ano	TRI11 1.6, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. GA11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. SUC11 3.3, 5.2, 5.3, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. FRVR11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 7.13, 9.1, 9.2, 9.3. EST11 1.3, 2.1, 2.2, 2.3.
12.º ano	CC12 2.4, 2.5, 2.8, 2.10, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3. PRB12 3.1, 3.2, 3.3. FRVR12 3.1, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5. TRI12 1.1, 1.2, 2.1, 4.1, 4.2. FEL12 4.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. PCI12 1.7, 3.1, 3.2, 3.3. NC12 1.3, 4.3, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3; TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11; CC12 2.3; FRVR12 4.3, 4.4; FEL12 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 3.11, 4.1), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios LTC10, ALG10, SUC11, FRVR11, FRVR12, CC12, PRB12 e FEL12 encontram-se assinalados com o símbolo «#» alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Indicações metodológicas

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de

propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

Avaliação

O Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei n.º 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação científico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas metas curriculares.

Metas Curriculares para o Ensino Secundário – Matemática A

O presente documento descreve o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o Ensino Secundário. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados em cada ano de escolaridade, por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

Domínio

Subdomínio

1. *Objetivo geral*

1. Descritor
2. Descritor

.....

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («identificar», «designar», «referir», «representar», «reconhecer», «saber», «provar», «demonstrar», «justificar») encontra-se definido no parágrafo intitulado «Leitura das Metas Curriculares».

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

São também disponibilizados aos professores Cadernos de Apoio às presentes metas curriculares (um por ano de escolaridade) contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

Leitura das Metas Curriculares

«Identificar»/«Designar»/«Referir»/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

«Reconhecer»: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«Saber»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«Provar»/«Demonstrar»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«Justificar»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo «+».

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificaram-se nos Cadernos de Apoio diferentes níveis de desempenho.

- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo «#», ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

1. Operar com proposições

1. Designar por «proposição» toda a expressão p suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa» e designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições p e q , que « p é equivalente a q » é uma proposição, designada por «equivalência entre p e q », que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Saber, dada uma proposição p , que «não p » é uma proposição, designada por «negação de p », que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
5. Justificar, dada uma proposição p , que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
6. Saber, dadas proposições p e q , que « p e q » é uma proposição, designada por «conjunção de p e q », que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
7. Saber, dadas proposições p e q , que « p ou q » é uma proposição, designada por «disjunção de p e q », que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por « $p \vee q$ » e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
8. Saber, dadas proposições p e q , que « p implica q » é uma proposição, designada por «implicação entre p e q », que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar p por «antecedente» e q por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição r , que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$.
9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
10. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.
11. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
12. #Provar, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$.
13. #Provar, dadas proposições p e q , que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».

14. #Provar, dadas proposições p, q e r , que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade» e «distributividade».
15. #Provar, dadas duas proposições p e q , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ».
16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

2. Relacionar condições e conjuntos

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a , se obtém uma proposição $p(a)$.
2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «qualquer que seja x , $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «existe x tal que $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como «impossível» se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
6. Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por « $\forall x \in U, p(x)$ », e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por «condição universal em U ».
8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por « $\exists x \in U: p(x)$ », no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por «condição possível em U » e, no caso contrário, por «condição impossível em U ».
9. +Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$.

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por « $\{x : p(x)\}$ » um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$ ».
11. Saber, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A , a por «elemento de A » quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por « $\{a_1, \dots, a_k\}$ » o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por «definição em extensão do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$ ».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em U » (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U ») e representá-lo também por « $\{x \in U : p(x)\}$ ».
14. Identificar, dados conjuntos A e B , o «conjunto união (ou reunião) de A e B » e o «conjunto interseção de A e B » respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
15. Identificar, dados conjuntos A e B , A como estando «contido em B » (« $A \subset B$ ») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por «subconjunto de B » ou por «uma parte de B ».
16. Designar, dados conjuntos A e B , por «diferença entre A e B » o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de B em A ».
17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
18. Reconhecer, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
19. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição « $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ » é equivalente à proposição « $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ », isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.
20. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Álgebra ALG10

Radicais

1. Definir e efetuar operações com radicais

1. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que se $a < b$ então $a^n < b^n$.
2. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que se $0 \leq a < b$ então $0 \leq a^n < b^n$ e se $a < b \leq 0$ então $a^n > b^n \geq 0$.
3. Saber, dado um número real a e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que existe um número real b tal que $b^n = a$, provar que é único, designá-lo por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
4. +Saber, dado um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que existe um número real positivo b tal que $b^n = a$, provar que $(-b)^n = a$ e que não existe, para além de b e de $-b$, qualquer outra solução da equação $x^n = a$, designar b por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
5. Justificar, dado um número natural n , que 0 é o único número real cuja potência de expoente n é igual a 0 e, por esta razão, representá-lo também por « $\sqrt[n]{0}$ » («raiz índice n de 0»).
6. #Provar, dados números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
7. #Provar, dados números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
8. #Provar, dados números reais a e b (respetivamente números reais a e b não negativos), $b \neq 0$, e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar (respetivamente um número $n \in \mathbb{N}$ par), que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e justificar que para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{b})^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$.
9. #Provar, dados números naturais n e m (respetivamente números naturais ímpares n e m) e um número real não negativo a (respetivamente um número real a), que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
10. Designar também por «fração» a representação « $\frac{a}{b}$ » do quociente entre números reais a e b (com $b \neq 0$), a e b , neste contexto, respetivamente por «numerador» e «denominador» e identificar duas frações como «equivalentes» quando representam o mesmo número.
11. +Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$, ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (a e c números inteiros, b, d, n números naturais, $n > 1$).

Potências de expoente racional

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional

1. +Reconhecer, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (sendo m, n, m' e n' números inteiros, $m, m' \geq 0$ e $n, n' \geq 2$), que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.
2. +Identificar, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo $q = \frac{m}{n}$ (m e n números inteiros, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), $q \neq 0$ se $a = 0$, a «potência de base a e de expoente q », a^q , como $\sqrt[n]{a^m}$, reconhecendo que este número não depende da fração escolhida para representar q , e que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $(a^b)^c = a^{bc}$ a expoentes racionais positivos.
3. Identificar, dado um número real positivo a e um número racional positivo q , a «potência de base a e de expoente $-q$ », a^{-q} , como $\frac{1}{a^q}$, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $a^b \times a^c = a^{b+c}$ a expoentes racionais.
4. +Reconhecer que as propriedades algébricas previamente estudadas das potências de expoente inteiro (relativas ao produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência) podem ser estendidas às potências de expoente racional.
5. +Simplificar expressões envolvendo radicais e potências.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações com radicais e com potências.

Divisão inteira de polinómios

4. Efetuar operações com polinómios

1. Designar um polinómio P com apenas uma variável x por « $P(x)$ ».
2. +Reconhecer, dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, que o grau do polinómio $A(x)B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.
3. Saber, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, que existem dois únicos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$ e $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, e designar, neste contexto, $A(x)$ por «polinómio dividendo», $B(x)$ por «polinómio divisor», $Q(x)$ por «polinómio quociente» e $R(x)$ por «polinómio resto» da «divisão inteira» (ou «divisão euclidiana») de $A(x)$ por $B(x)$.
4. Determinar, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, as formas reduzidas dos polinómios quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
5. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que aplicando a «regra de Ruffini» se obtém o quociente e o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$.
6. Provar, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ e designar esta propriedade por «Teorema do Resto».

7. Designar, dado um polinómio $P(x)$, por «raiz do polinómio» (ou «zero do polinómio») qualquer número real a tal que $P(a) = 0$.
8. Identificar um polinómio $P(x)$ como «divisível» por um polinómio $Q(x)$ não nulo se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é nulo.
9. Provar, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ e um número real a , que a é uma raiz de $P(x)$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $x - a$ e que, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
10. Identificar, dado um polinómio $P(x)$ e uma raiz a de $P(x)$, a «multiplicidade de a » como o maior número natural n tal que existe um polinómio $Q(x)$ com $P(x) = (x - a)^n Q(x)$, justificar que nesta situação $Q(a) \neq 0$ e designar a por «raiz simples» quando a respetiva multiplicidade é igual a 1.
11. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, que $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, tendo-se $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero.
12. Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a divisão inteira de polinómios e o Teorema do resto.
2. +Resolver problemas envolvendo a fatorização de polinómios de que se conhecem algumas raízes.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação dos zeros e do sinal de funções polinomiais de grau superior a dois.

Geometria Analítica GA10

Geometria Analítica no plano

1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

1. Designar por «referencial ortonormado» um referencial ortogonal e monométrico de um dado plano, tal que a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento pré-fixada e, dados números reais a_1 e a_2 , designar por « $A(a_1, a_2)$ », o ponto A de abscissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial.
2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por « $d(A, B)$ ».
3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abscissas a e b respetivamente, que a abscissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$.
4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por «equação cartesiana» (respetivamente por «inequação cartesiana») de um conjunto C uma equação (respetivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C .
6. Determinar, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ na forma $y = mx + b$ (equação reduzida da reta) ou na forma $x = c$.
7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a esse plano e um número $r > 0$, que a equação $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da circunferência».
8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «elipse» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, por «focos da elipse» os pontos A e B , por «centro da elipse» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «eixo maior da elipse» o número $2a$ (e a por «semieixo maior da elipse»), interpretando-o geometricamente.
9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseca a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).
10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação

cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

11. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação reduzida $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $y > ax + b$ e $y < ax + b$ (respetivamente $y \geq ax + b$ e $y \leq ax + b$) e designá-los respetivamente por «semiplano superior» e «semiplano inferior» em relação à reta r .
12. Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação cartesiana $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $x > c$ e $x < c$ (respetivamente $x \geq c$ e $x \leq c$) e designá-los respetivamente por «semiplano à direita» e «semiplano à esquerda» da reta r .
13. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que a inequação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$) é uma inequação do círculo de centro $C(a, b)$ e de raio r .

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano, e equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

Cálculo vetorial no plano

3. Operar com vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a «norma do vetor $\vec{v}$ » como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por $\|\vec{v}\|$.
2. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por «escalar») λ , o «produto de $\vec{v}$ por λ » (« $\lambda\vec{v}$ ») como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda > 0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda < 0$, justificar que $\lambda\vec{v}$ não depende da unidade de comprimento fixada e que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.
3. Justificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.
4. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, provando que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por «diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » e representá-lo por $\vec{u} - \vec{v}$.
5. +Reconhecer, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ , que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.
6. +Reconhecer, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

4. Operar com coordenadas de vetores

1. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1,0)$, $Y(0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)» e representar por $\vec{v}(v_1, v_2)$ o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2) .
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A , o «vetor-posição do ponto A » como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ , que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são colineares se e somente se as respetivas coordenadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a «diferença entre os pontos B e A » como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por « $B - A$ » e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

5. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano

1. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo e uma reta r , $\vec{v}$ como «tendo a direção de r » quando r tiver a direção das retas suporte dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$.
2. Designar por «vetor diretor» de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção do que r .
3. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r não vertical de declive m , que o vetor $\vec{v}(a, b)$ é vetor diretor de r se e somente se $a \neq 0$ e $m = \frac{b}{a}$, e que, em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r .
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que os vetores diretores das retas verticais são os vetores $\vec{v}(0, b)$, $b \neq 0$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r , e designar esta equação por «equação vetorial da reta r ».

- Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1$ e $y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por «sistema das equações paramétricas da reta r ».

6. Resolver problemas

- +Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo a colinearidade de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo equações vetoriais, paramétricas e cartesianas de retas do plano.

Geometria Analítica no espaço

7. Definir referenciais cartesianos do espaço

- Identificar um «referencial (cartesiano) ortonormado do espaço» (ou simplesmente «referencial cartesiano») como um terno ordenado de retas numéricas que se intersectam nas respectivas origens, duas a duas perpendiculares e com unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada, designar a origem comum das três retas por «origem do referencial», a primeira reta por «eixo das abcissas», a segunda por «eixo das ordenadas», a terceira por «eixo das cotas», genericamente cada uma delas por «eixo coordenado» e, se for representada por « O » a origem do referencial, representar estes três eixos respetivamente por « Ox », « Oy » e « Oz » e o referencial por « $Oxyz$ ».
- Designar, dado um ponto P e uma reta r , por «projeção ortogonal de P sobre r » como o próprio ponto P quando P pertencer a r e como o pé da perpendicular traçada de P para r no caso contrário, reconhecendo que é a interseção com r do plano normal a r passando por P .
- Designar, dado um referencial ortonormado e um ponto P de projeções ortogonais P_x , no eixo das abcissas, P_y , no eixo das ordenadas e P_z , no eixo das cotas, por «abscissa de P », «ordenada de P » e «cota de P » respetivamente a abscissa de P_x , de P_y e de P_z nas respectivas retas numéricas, e o terno ordenado destes três valores por «coordenadas de P ».
- Designar por «planos coordenados» os três planos determinados por dois dos eixos coordenados, representá-los por « xOy », « xOz » e « yOz » consoante os eixos coordenados que contêm, e reconhecer que são perpendiculares dois a dois.
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um terno ordenado de números reais (x, y, z) , que existe um e apenas um ponto P com essas coordenadas e representá-lo por « $P(x, y, z)$ ».
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$ de projeção ortogonal P' no plano xOy , que, nesse plano, munido do referencial constituído pelos eixos Ox e Oy , P' tem coordenadas (a, b) e enunciar resultados análogos para os planos xOz e yOz .

8. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que intersesta o eixo das abscissas no ponto $A(a, 0, 0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados xOz e xOy .
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o «sistema de equações cartesianas» $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que intersesta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.
3. +Provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ e representá-la por « $d(A, B)$ ».
4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica».
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$ é uma inequação cartesiana da esfera de centro A e de raio r , e designá-la por «inequação (cartesiana) reduzida da esfera».

Cálculo vetorial no espaço

9. Definir vetores do espaço

1. Designar um par de segmentos orientados do espaço por «equipolentes» quando são coplanares e equipolentes num plano que os contenha.
2. Saber que um «vetor do espaço» fica determinado por um segmento orientado do espaço de tal modo que segmentos de reta equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos de reta não equipolentes determinam vetores distintos.
3. Estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor, de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respectivas propriedades geométricas e algébricas.

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

1. +Reconhecer, fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O e um vetor $\vec{v}$ que, sendo $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$, existe um e somente um terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, designar o terno ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do espaço», (v_1, v_2, v_3) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)» e representar por « $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ » o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3) .
2. Estender do plano ao espaço a definição do vetor posição de um ponto e a identificação das respectivas coordenadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas da soma e da diferença de vetores, do produto de um vetor por um escalar, do simétrico de um vetor, da diferença de dois pontos, da soma de um ponto com um vetor e da norma de um vetor, e o critério de colinearidade de vetores através das respectivas coordenadas.
3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

11. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço, equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.
2. +Resolver problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

Funções Reais de Variável Real FRVR10

Generalidades acerca de funções

1. Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva

1. Identificar, dados conjuntos A e B , o «produto cartesiano de A por B » como o conjunto $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a, b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por « $A \times B$ ».
2. Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.
3. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e um conjunto C , a «restrição de f a C » como a função $f|_C : C \cap A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$.
4. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e $C \subset A$, o «conjunto imagem de C por f » como o conjunto $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C : y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C , representá-lo também por « $\{f(x) : x \in C\}$ ».
5. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B ».
6. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B , existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B » ou por «função de A sobre B ».
7. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «bijetiva» se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por «bijeção de A em B ».
8. Identificar, dadas funções $f : D_f \rightarrow A$ e $g : D_g \rightarrow B$, a «função composta de g com f » como a função $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow B$, tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g(f(x))$ e designá-la também por « g composta com f », « g após f » ou « f seguida de g ».
9. Designar, dado um conjunto A , por «função identidade em A » a função $Id_A : A \rightarrow A$ tal que $\forall x \in A, Id_A(x) = x$ e justificar que se trata de uma função bijetiva.
10. Justificar, dados conjuntos A e B e uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que para todo o y pertencente a B existe um e apenas um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$ e, representando-o por x_y , designar por «função inversa de f » a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$.
11. +Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que f^{-1} é bijetiva e que $(f^{-1})^{-1} = f$ e designar também f^{-1} por «bijeção recíproca de f ».
12. Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$, que f é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$, tal que $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.
13. Justificar que uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$ e que, nesse caso, $g = f^{-1}$.

Generalidades acerca de funções reais de variável real

2. Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respectivas funções

1. Designar por «função real de variável real» uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
2. Saber, dada uma expressão $f(x)$, que se convencionou, quando nada for indicado em contrário, que essa expressão representa a função f com conjunto de chegada igual a $\mathbb{R}$ e domínio constituído por todos os números reais a para os quais fica representado um número real pela expressão que se obtém substituindo todas as ocorrências de x em $f(x)$ por um símbolo representando o número a , designar, nesse caso, a expressão $f(x)$ por «expressão analítica de f » e este processo de caracterizar f por «definição (analítica) de f pela expressão $f(x)$ ».
3. Identificar uma função real de variável real f como «par» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
4. Identificar uma função real de variável real f como «ímpar» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
5. Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f , que, se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
6. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.
7. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à origem O do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.
9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.
10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay) .
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a .

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y) .
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.
15. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox .
16. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy .

3. Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) crescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) crescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) decrescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) decrescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «crescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «crescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «decrescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «decrescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.
5. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) monótona em A » (ou simplesmente «(estritamente) monótona» se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como «monótona, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «monótona, em sentido lato» se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , um «intervalo de (estrita) monotonia de f » como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f|_I$ é (estritamente) monótona.
7. Identificar, dada uma função real de variável real e $A \subset D_f$, f como «constante em A » se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A , $f(x_1) = f(x_2)$.
8. Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).
9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $] -\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $] -\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

4. Identificar extremos de funções reais de variável real

1. Designar, dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, um número real M como «majorante de f » (respetivamente «minorante de f ») quando $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(x) \geq M$), referindo a função f como «majorada» (respetivamente «minorada») quando admitir um majorante (respetivamente um minorante).
2. Designar por «limitada» uma função simultaneamente majorada e minorada.
3. Designar por «mínimo absoluto» (respetivamente por «máximo absoluto») de uma função real de variável real um valor $f(a)$ do contradomínio de f tal que $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$) e designar por «extremos absolutos de f » os máximos absolutos e os mínimos absolutos de f .
4. Designar, dados um número real x_0 e um número real positivo r , por «vizinhança r de x_0 » o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representá-la por « $V_r(x_0)$ ».
5. Referir que uma função real de variável real «atinge um mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «atinge um máximo relativo (ou local)») em $a \in D_f$ quando existe $r > 0$, tal que, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$ (respetivamente, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$) e designar $f(a)$ por «mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «máximo relativo (ou local)») de f e a por um «minimizante» (respetivamente por um «maximizante») de f .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR .
7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I , a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar “abaixo” (respetivamente “acima”) do segmento de reta $[PQ]$.
8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a , que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $] -\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

5. Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções

1. Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x - b)^2 + c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos.
2. Identificar uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual são dados um número natural $n > 1$, uma partição $A_1, A_2, \dots, A_n$ de D_f e n expressões $f_j(x)$ ($1 \leq j \leq n$) tais que para todo o j e para todo o $x \in A_j, f(x) = f_j(x)$ como «estando definida por ramos pelas expressões $f_j(x)$, respetivamente nos conjuntos A_j ($1 \leq j \leq n$)».
3. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) interpretando geometricamente os valores a, b e c .

4. Justificar que a função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
5. Justificar que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
6. Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt[n]{x-b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$, $a \neq 0$).
7. Identificar «função polinomial» como uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.
8. Esboçar o gráfico de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3.º grau, módulos e radicais quadrados e cúbicos.
9. Identificar, dadas funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, um número real α e um número racional r , as funções $f + g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$ («soma de f com g »), $fg: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, («produto de f por g »), $\frac{f}{g}: D_{\frac{f}{g}} \rightarrow \mathbb{R}$ («quociente de f por g », onde $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\}$), $\alpha f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ («produto de f pelo escalar α ») e $f^r: D_{f^r} \rightarrow \mathbb{R}$ («potência de expoente r de f », onde D_{f^r} é o conjunto dos números reais x para os quais está definido $f(x)^r$), como as funções com os domínios e conjunto de chegada indicados, definidas, para cada elemento x do respetivo domínio, respetivamente por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $f^r(x) = f(x)^r$, podendo utilizar-se, para representar as potências de expoente racional, as notações envolvendo raízes.

6. Resolver problemas

1. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais e a composição da função módulo com funções polinomiais.
2. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica.
3. +Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo as funções afim, quadrática, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas.

Estatística EST10

Características amostrais

1. Manipular o sinal de somatório

1. Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ por «somatório de 1 a p dos x_i » (ou por «soma dos p termos da sequência», quando esta designação não for ambígua), representá-la por « $\sum_{i=1}^p x_i$ », designar o símbolo « Σ » por «sinal de somatório» e, para $1 < m \leq p$, representar também por « $\sum_{i=m}^p x_i$ » a soma $x_m + x_{m+1} + \dots + x_p$ («somatório de m a p dos x_i »).
2. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
3. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
4. Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p$.

2. Utilizar as propriedades da média de uma amostra

1. Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.
2. Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , por « x_i » o valor da variável x no elemento de A com o número i , por « $\tilde{x}$ » a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, designá-la por «amostra da variável estatística x » ou simplesmente por «amostra» e por «valores da amostra» os valores x_i , $1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.
3. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de uma variável estatística, por « $\bar{x}$ » a média $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, designando-a igualmente por «média da amostra $\tilde{x}$ » sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.
4. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com m valores ($1 \leq m \leq n$), por « $\tilde{\tilde{x}}$ » o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \dots, \tilde{\tilde{x}}_m$ os elementos de $\tilde{\tilde{x}}$, por

« n_j » ($1 \leq j \leq m$) o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por «frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$ », e justificar que $\sum_{j=1}^m n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j n_j}{n}$, designando esta última igualdade por «fórmula da média para dados agrupados».

5. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e a , por « $a\tilde{x} + h$ » a amostra $\tilde{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
6. Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a média de $\tilde{x}$ como a abscissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\tilde{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abscissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j .
7. Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».

3. Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por «desvio de x_i em relação à média» a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por « d_i » e provar que $\sum_{i=1}^n d_i = 0$.
2. +Representar dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por « SS_x » a soma $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que é possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios, e referir, por esta razão, que « SS_x tem $n - 1$ graus de liberdade».
4. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
5. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\tilde{y} = \tilde{x} + h$ (respetivamente $\tilde{y} = \alpha\tilde{x}$) então $SS_y = SS_x$ (respetivamente $SS_y = \alpha^2 SS_x$).
6. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = \sum_{j=1}^m (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\tilde{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
7. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por «variância da amostra $\tilde{x}$ » e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por «desvio-padrão da amostra $\tilde{x}$ ».

8. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $s_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
9. Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $y = \tilde{x} + h$ (respetivamente $y = \alpha \tilde{x}$) então $s_y = s_x$ (respetivamente $s_y = |\alpha| s_x$).
10. Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra correspondente da variável estatística x , que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par $(\bar{x}, s_x)$ reflete a distribuição dos valores da amostra $\tilde{x}$ em termos de “localização” e de “dispersão”.
11. Reconhecer que para comparar a “dispersão” dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.
12. Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são consideradas boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.

4. Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por «amostra $\tilde{x}$ ordenada» a sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\tilde{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\tilde{x}$.
2. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0, 100]$, por «percentil de ordem k » o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100} \right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, $\llbracket x \rrbracket$ designa a «parte inteira de x », ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por « P_k ».

3. Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\tilde{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75} .
4. Designar, dados números naturais n e k , $k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por «percentil de ordem k », o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1} (a_{i+1} - a_i) n_i + (x - a_L) n_L = \frac{k}{100} \sum_{i=1}^m (a_{i+1} - a_i) n_i$, ou seja, tal que $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{kh n}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.
2. +Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

Trigonometria e Funções trigonométricas TRI11

Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

1. Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos

1. Provar, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{ACB}$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, e designar estas igualdades por «Lei dos senos» ou «Analogia dos senos».
2. Estender a definição do seno aos ângulos retos, tomando $\sin \alpha = 1$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos retângulos.
3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin \alpha = \sin \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos obtusângulos.
4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A , que, se $\alpha = \widehat{BAC}$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».
5. Estender a definição do cosseno aos ângulos retos, tomando $\cos \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao Teorema de Pitágoras.
6. +Estender a definição do cosseno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos \alpha = -\cos \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno obtuso.
7. Estender a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\hat{\alpha}$.
8. Determinar, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos comprimentos dos três lados (LLL), as medidas do comprimento de dois dos lados e da amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou as medidas do comprimento de um dos lados e das amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA), as medidas dos comprimentos dos restantes lados e as medidas das amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo, designar este procedimento por «resolução do triângulo $[ABC]$ » e obter valores aproximados destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma máquina de calcular.

Orientação de ângulos num plano e rotações

2. Definir ângulos orientados e as respectivas medidas de amplitude

1. Identificar «ângulo orientado» como um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para «lado origem», designando o outro por «lado extremidade».
2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo «orientação negativa» quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado nesse plano π , os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade, identificar um ângulo orientado como tendo «orientação positiva» no caso contrário, e afetar do sinal «-» as amplitudes dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respectivas medidas.

3. Definir rotações segundo ângulos orientados

1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por «imagem do ponto M pela rotação de centro O e de ângulo orientado α » quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\hat{OM}'$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\hat{OM}$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

4. Definir ângulos generalizados

1. Identificar um «ângulo generalizado» (ou «ângulo trigonométrico») como um par ordenado (α, n) , onde α é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e n é um número inteiro, que é positivo ou nulo se α tiver orientação positiva e negativo ou nulo se α tiver orientação negativa, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n .
2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por «lado origem (respetivamente extremidade) dos ângulos generalizados (α, n) » e um ângulo nulo ω também como «lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n) ».
3. Identificar, fixado um ângulo unidade e sendo g a medida de amplitude dos ângulos giros, a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) como $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α .
4. Reconhecer que dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') têm a mesma amplitude se e somente α e α' tiverem a mesma amplitude e $n = n'$ e justificar, fixado um ângulo unidade que, dado um número real x e fixada uma semirreta para lado origem, existe um e apenas um ângulo generalizado cuja medida de amplitude é igual a x .
5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n) , a «rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) », no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α e ao ponto O associa o próprio ponto O .
6. Reconhecer, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') , α, α' ângulos orientados, que as rotações de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') coincidem se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude ou se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respectivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro.

5. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados

1. Designar um referencial ortonormado num dado plano como «direto» quando o primeiro quadrante, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com semieixo positivo Oy , tem orientação positiva.
2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por «circunferência trigonométrica» (ou, por abuso de linguagem, por «círculo trigonométrico»).
3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um ângulo orientado α desse plano, o «seno de α » (respetivamente o «cosseno de α ») como a ordenada (respetivamente a abcissa) do ponto P , interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\text{sen}(\alpha)$, $\sin \alpha$ ou $\text{sen } \alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos \alpha$), reconhecer que este valor não depende da escolha do referencial, e que esta definição estende a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos convexos, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um ângulo orientado α desse plano de lados não perpendiculares, a «tangente de α » como a ordenada do ponto P , interseção da reta de equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a reta suporte do lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-la por $\tan(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$, $\tan \alpha$ ou $\text{tg } \alpha$, reconhecer que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e que esta definição estende a definição de tangente de um ângulo agudo, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
5. Identificar, dado um ângulo generalizado $\theta = (\alpha, n)$, o «seno de θ », o «cosseno de θ » e a «tangente de θ » como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α .
6. Justificar, dados ângulos generalizados θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

6. Definir medidas de ângulos em radianos

1. Designar por «radiano» a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio e reconhecer que o radiano não depende da escolha da circunferência, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.
2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.

7. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades

1. Identificar, dado um número real x , a «tangente de x » (respetivamente o «seno de x » e o «cosseno de x ») como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um ângulo generalizado de medida de amplitude igual a x , em radianos, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por «(função) tangente» (respetivamente «(função) seno» e «(função) cosseno»), representando-a por «tan» ou «tg» (respetivamente por «sin» ou «sen» e por «cos») e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$ (respetivamente por «sin x » ou «sen x » e por «cos x »).
2. Identificar, dado um número $P > 0$, uma função f como «periódica de período P » ou « P -periódica» se para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x + P) = f(x)$.
3. Designar, dada uma função f , o número $P_0 > 0$ por «período fundamental de f ou por «período positivo mínimo de f » se f for P_0 -periódica e não admitir outro período P inferior a P_0 .
4. Justificar que as funções reais de variável real seno e cosseno têm domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1, 1]$ e período fundamental $P_0 = 2\pi$.
5. Provar que os zeros da função seno (respetivamente da função cosseno) são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
6. Justificar que a função seno (respetivamente a função cosseno) admite extremos locais nos pontos de abcissa da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
7. Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a fórmula fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.
8. Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.
9. Justificar que a função real de variável real tangente tem domínio $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período fundamental $P_0 = \pi$ e que os respetivos zeros são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. Justificar que as funções seno e tangente são ímpares e a função cosseno é par.

8. Definir funções trigonométricas inversas

1. +Reconhecer que as funções $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ e $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por «(função) arco-seno» (arcsin ou arcsen), «(função) arco-cosseno» (arccos) e «(função) arco-tangente» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.
2. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\cos x = \cos \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

3. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\sin x = \sin \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Reconhecer, dados números reais x e α do domínio da função tangente, que $\tan x = \tan \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + k\pi$.
5. Resolver equações da forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos.
2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respectivas razões trigonométricas.
3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas.
4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas.

Geometria Analítica GA11

Declive e inclinação de uma reta

1. Definir a inclinação de uma reta

1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dada uma reta r que passa pela origem e é distinta do eixo Ox , a «inclinação de r » como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semirreta $\vec{OP}$, onde P é um qualquer ponto de r de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O , a inclinação de uma reta r como a inclinação da reta paralela a r que passa por O .
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

Produto escalar

2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o «produto escalar (ou interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como o número $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$, (respetivamente o número $-\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$) onde, fixado um ponto O , $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP , se $\overrightarrow{OQ'}$ e $\overrightarrow{OP}$ tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto O , identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».
2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, «ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, reconhecendo que têm todos a mesma amplitude, designar também essa amplitude por «ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » quando essa designação não for ambígua, e representá-la por « $(\vec{u}, \vec{v})$ ».
3. Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Identificar vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como «perpendiculares» quando um deles for nulo ou quando, não sendo nulo nenhum dos dois, forem perpendiculares duas retas de vetores diretores respetivamente iguais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e indicar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares escrevendo « $\vec{u} \perp \vec{v}$ ».
5. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
6. Justificar, dado um vetor $\vec{u}$, que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
7. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
8. +Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ , que $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
9. +Provar, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
10. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

11. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que duas retas de declives respetivamente iguais a m e a m' são perpendiculares se e somente se $mm' = -1$.
12. Justificar, fixado um referencial ortonormado do espaço e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$.

3. Determinar equações de planos no espaço

1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como «normal a um plano α » se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β , que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0$.
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.
5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.
7. Identificar, dado um plano α , um vetor $\vec{v}$ como «paralelo a α » se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α .
8. +Provar, dado um plano α , um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por «equação vetorial do plano α ».
9. Justificar, dado um plano α , um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por «sistema das equações paramétricas do plano α ».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores.
2. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.
3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Sucessões SUC11

Generalidades sobre sucessões

1. Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais

1. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «majorado» quando existe um número real M tal que $\forall a \in A, a \leq M$ e designar M por «majorante de A ».
2. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «minorado» quando existe um número real m tal que $\forall a \in A, a \geq m$ e designar m por «minorante de A ».
3. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «limitado» quando for majorado e minorado.
4. Designar por «máximo» (respetivamente por «mínimo») de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ um majorante (respetivamente um minorante) de A pertencente a A e justificar que se existir é único.

2. Estudar propriedades elementares de sucessões reais

1. Identificar uma «sucessão real» (ou simplesmente «sucessão» quando esta designação não for ambígua) como uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e de conjunto de chegada $\mathbb{R}$, e representar por « u_n », dito «termo geral da sucessão», a imagem $u(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ por u e por « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » (ou simplesmente por « (u_n) », ou ainda por « u_n », quando estas notações não forem ambíguas) a própria sucessão u .
2. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente» (respetivamente «decrescente») quando o for como função real de variável real, ou seja, quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} > u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} < u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ (respetivamente $u_{n+1} < u_n$).
3. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato» quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \geq u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \leq u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (respetivamente $u_{n+1} \leq u_n$).
4. Identificar uma sucessão (u_n) como «majorada» se o conjunto $\{u_n: n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for majorado e designar os majorantes deste conjunto também por «majorantes da sucessão».
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «minorada» se o conjunto $\{u_n: n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for minorado e designar os minorantes deste conjunto também por «minorantes da sucessão».
6. Designar por «limitada» uma sucessão (u_n) simultaneamente majorada e minorada.

Princípio de Indução matemática

3. Utilizar o princípio de indução matemática

1. Saber, dada uma condição $T(n)$, que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, T(n)$ é verdadeira se $T(1)$ for verdadeira e se, além disso, para todo o $n \in \mathbb{N}, T(n) \Rightarrow T(n+1)$, designar este resultado por «princípio de indução (matemática)», $T(n)$, enquanto antecedente da

implicação $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, por «hipótese de indução» e a proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ por «hereditariedade» da propriedade $T(n)$ e saber que o princípio de indução pode estender-se, *mutatis mutandis*, fixado um número inteiro p e uma condição $T(n)$, à demonstração da proposição $\forall n \in \mathbb{N}_p$ $T(n)$, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$.

2. Saber, dada uma função $f: A \rightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) «por recorrência» e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A , onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$, também designadas por «sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)».
3. +Utilizar o princípio de indução para efetuar demonstrações.

Progressões aritméticas e geométricas

4. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão aritmética de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.
3. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão geométrica de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times r$.
4. Justificar que o termo geral da progressão geométrica de primeiro termo a e razão r não nula é dado por $u_n = ar^{n-1}$.

5. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por «progressão aritmética (finita) de comprimento N » (respetivamente «progressão geométrica (finita) de comprimento N »), a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ «dos N primeiros termos» de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n) .
2. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento N , $(u_1, u_2, \dots, u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^N u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.
3. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento N , de primeiro termo u_1 e de razão r diferente de 1, é dada por $S = u_1 \frac{1-r^N}{1-r}$.

Limites de sucessões

6. Definir o limite de uma sucessão

1. Identificar, dada uma sucessão (u_n) , um número real l como «limite da sucessão (u_n) » ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$ » quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que « u_n tende para l » (« $u_n \rightarrow l$ »), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite l existe e por «divergente» quando não for convergente.

2. Provar que uma sucessão convergente (u_n) admite um único limite e representá-lo por « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ », « $\lim_n u_n$ » ou simplesmente por « $\lim u_n$ ».
3. +Reconhecer que as sucessões convergentes são limitadas.
4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $+\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_n u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $+\infty$ » (« $u_n \rightarrow +\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente.
6. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $-\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, $\lim_n u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $-\infty$ » (« $u_n \rightarrow -\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).
7. Reconhecer, dada uma sucessão (u_n) com limite $l \in \mathbb{R}$ ou tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente sem limite), que qualquer sucessão (v_n) que possa ser obtida de (u_n) alterando apenas um número finito de termos, tem o mesmo limite (respetivamente não tem limite).
8. +Provar, dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (u_n) com limite nulo, que $\lim u_n v_n = 0$.
9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($cn+d \neq 0$ para todo o n) é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d}$, se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.
10. Provar, utilizando a definição de limite, que, dado um número racional p , $\lim n^p = +\infty$ se $p > 0$ e $\lim n^p = 0$ se $p < 0$.
11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e que $\lim (u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n v_n)$ é convergente e que $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.
13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.
14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a , que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim (au_n) = a \lim u_n$.
15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r , que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim (u_n)^r = (\lim u_n)^r$.
16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por « $+\infty + l = +\infty$ » (ou por « $+\infty + (+\infty) = +\infty$ »).
17. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por « $-\infty + l = -\infty$ » (ou por « $-\infty + (-\infty) = -\infty$ »).

18. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ ».
19. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por « $(+\infty) \times l = +\infty$ » e « $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ » (respetivamente por « $(+\infty) \times l = -\infty$ » e « $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ »).
20. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por « $(-\infty) \times l = -\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty) \times l = +\infty$ » e « $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ »).
21. #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por « $(+\infty)^r = +\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty)^r = +\infty$ » se r for par e por « $(-\infty)^r = -\infty$ » se r for ímpar).
22. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\infty \times 0$ ».
23. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^+$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ».
24. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, negativa a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^-$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^-} = -\infty$ ».
25. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{\infty} = 0$ ».
26. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ » (respetivamente «indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ »).
27. Justificar, dado um polinómio $P(x)$ de grau superior ou igual a 1, que a sucessão $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim P(n) = +\infty$ se o coeficiente do termo de maior grau da forma reduzida de P for positivo e que $\lim P(n) = -\infty$ no caso contrário.
28. Calcular, dadas sucessões $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, $Q(x)$ sem raízes naturais, o limite $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ e relacioná-lo com os graus de $P(n)$ e $Q(n)$ e com os coeficientes dos termos de maior grau das respetivas formas reduzidas.
29. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ e que $\lim a^n = 0$ se $a < 1$.

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.
31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral n^p ($p \in \mathbb{Q}$), a^n e $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

7. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.
2. +Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.
3. +Calcular, por meios algébricos, o limite de sucessões em situação indeterminada e referir esse cálculo como um «levantamento da indeterminação».
4. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite de uma sucessão.

Funções Reais de Variável Real FRVR11

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A » quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a » quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a » e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à esquerda de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f , que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
7. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
8. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, se calculam, em pontos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.
10. Justificar, dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$ e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

2. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a » quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
3. Designar, dada uma função real de variável real f de domínio D_f , a função f por «contínua no conjunto $A \subset D_f$ » quando f é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por «contínua» quando é contínua em todos os pontos de D_f .
4. Saber que se uma função real de variável real f de domínio D_f for contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$) então existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a , então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a .
6. Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.
7. Justificar que as funções polinomiais e racionais são contínuas.
8. Justificar que as potências de expoente racional são contínuas.
9. Saber que as funções seno e cosseno são contínuas e justificar que a função tangente é contínua.
10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .
11. Justificar a continuidade de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções «de referência para a continuidade»: funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções cosseno, seno e tangente.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como « assíntota vertical ao gráfico de f » quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) por « assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ » (respetivamente por « assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ ») se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por « assíntota horizontal ».
3. Provar, dada uma função real de variável real f , que a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um « levantamento da indeterminação ».
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

5. Definir a noção de derivada

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a « taxa média de variação de f entre a e b » como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. Justificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a « taxa instantânea de variação de f no ponto x_0 » como o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por « derivada de f no ponto x_0 », representá-lo por « $f'(x_0)$ » e, nesse caso, identificar a função f como « diferenciável em x_0 » ou « derivável em x_0 ».
4. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.

5. Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a «reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ » como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in D_f$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) = f'(x_0)$.

6. *Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto*
 1. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L e um intervalo I , uma função $p : I \rightarrow \mathbb{R}$, como «função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I », se, para cada $t \in I$, $p(t)$ for a abcissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo T depois de τ_0 se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo T antes de τ_0 se $t < 0$, designando também por «instante», neste contexto, cada $t \in I$.
 2. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo I , a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I , e dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T » como a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 , $\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T » como a derivada de p em t , $p'(t)$, caso exista.

7. *Operar com derivadas*
 1. Designar, dada uma função real de variável real f , a «função derivada de f » como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.
 2. Identificar uma função real de variável real como «diferenciável num conjunto A » quando é diferenciável em todos os pontos de A .
 3. Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).
 4. Provar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se f é diferenciável em a , f é contínua em a e justificar que a recíproca não é verdadeira.
 5. Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k , que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
 6. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
8. +Provar, dada uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e que $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.
10. Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
11. +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
12. Provar, para todo o número racional α , que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
13. +Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

8. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções

1. Provar, dada uma função real de variável real f com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$), e diferenciável em $x_0 \in I$, que se f atinge um extremo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e dar um contraexemplo para a implicação recíproca.
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a, b]$, ($a < b$), e diferenciável em $]a, b[$ que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».
3. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$) então f é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) no intervalo I .
4. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$) então f é crescente em sentido lato (respetivamente decrescente em sentido lato) no intervalo I .

5. Justificar que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante em I .

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.

Estatística EST11

Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

1. Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados

1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) por «desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t » ($i \in \{1, \dots, n\}$) a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por « e_i ».
2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que as condições $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.
3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^n e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t , que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $\bar{y} - a\bar{x}$) por «reta de mínimos quadrados» da sequência de pontos.
4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , a «amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y » (ou simplesmente «amostra de dados bivariados (quantitativos)») como a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, representá-la por « (x, y) » e designar por «dimensão da amostra bivariada» o número natural n .
5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.
6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por «variável resposta» e a variável considerada independente por «variável explicativa».
7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos $(x, y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, por «nuvem de pontos» o conjunto $\{(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))\}$ e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.
9. Designar, dado um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos (x, y) , por «coeficiente de correlação linear» o quociente $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por « r », reconhecer que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que $|r|$ é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, estão alinhados e referir que a «associação linear entre as variáveis estatísticas» é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais «forte» quanto mais perto de 1 estiver $|r|$.

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2. +Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
3. +Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

Cálculo Combinatório CC12

Introdução ao cálculo combinatório

1. Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos

1. #Provar, dados conjuntos A e B , que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
2. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U , que $A \subset B$ se e somente se $\bar{B} \subset \bar{A}$.
3. #Provar, dados conjuntos A , B e C , que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $A \cap A = A$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\cap$ » e « $\cup$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».
4. #Provar, dado um conjunto U , que, para quaisquer subconjuntos A e B de U , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».
5. Provar, dados conjuntos A , B e C , que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

2. Conhecer factos elementares da combinatória

1. Saber, dados conjuntos A e B , que $\#A = \#B$ se e somente se existir uma bijeção de A sobre B e nesse caso identificar os conjuntos A e B como «equipotentes».
2. Saber, dados conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$, que $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
3. +Provar, dados conjuntos A e B de cardinais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, que o cardinal do produto cartesiano $A \times B$ é igual a $n \times m$.
4. +Reconhecer que existem exatamente n^p sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$, designar esse número por «arranjos com repetição de n elementos p a p » (« ${}^nA'_p$ ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA'_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.
5. +Designar, dado um conjunto E , por «conjunto das partes de E » o conjunto formado pelos subconjuntos de E , representá-lo por $\mathcal{P}(E)$ e reconhecer que se E tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#E = p$) então $\mathcal{P}(E)$ tem 2^p elementos ($\#\mathcal{P}(E) = 2^p$).
6. Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ formas de ordenar os elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$, designar este número por «(número de) permutações de n elementos» e representá-lo por « $n!$ » (« n fatorial»).
7. Saber que, por convenção, $0! = 1$, reconhecendo que esta definição é a única para a qual a igualdade $n! = n(n-1)!$ vale também para $n = 1$.

8. +Reconhecer que existem exatamente $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos distintos escolhidos num conjunto de $n \geq p$ elementos, designar este número por «(número de) arranjos (sem repetição) de n elementos p a p » (« nA_p ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente nA_p formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem repor o objeto escolhido após cada uma das extrações.
9. Justificar que um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos tem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos de p elementos ($0 \leq p \leq n$), e designar este número por «(número de) combinações de n elementos p a p », reconhecendo que, dado $n \in \mathbb{N}$ objetos, existem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!}$ formas de escolher p ($p \leq n$) de entre eles e representar este número por « nC_p », por « C_p^n » ou por « $\binom{n}{p}$ », reconhecendo que se trata de um número natural.
10. +Simplificar expressões envolvendo fatoriais, arranjos e combinações.

3. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton

1. Justificar, dados números naturais n e p , $p \leq n$, que ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ de dois modos distintos: utilizando um cálculo algébrico e um argumento combinatório.
2. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=0}^n {}^nC_k = 2^n$, interpretando esta igualdade à luz do número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.
3. +Reconhecer, dados números naturais n e p , $p < n$, que ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$ e utilizar esta igualdade para construir, progressivamente, o «triângulo de Pascal», no qual figuram, na n -ésima linha, os números ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \dots, {}^nC_{n-1}$ e nC_n , por esta ordem.
4. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$, a igualdade entre polinómios nas variáveis x e y , $(x + y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y^1 + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}^nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} y^k$, designando-a por «binómio de Newton», e por esta razão, designar os números nC_p igualmente por «coeficientes binomiais».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos.
2. +Resolver problemas de contagens envolvendo arranjos e combinações.
3. +Resolver problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

Probabilidades PRB12

Definição de probabilidade

1. Definir espaços de probabilidade

1. Identificar, dado um conjunto finito E , uma «probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E » como uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ e de valores não negativos tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, designar, neste contexto, o conjunto E por «espaço amostral» ou «universo dos resultados», $\mathcal{P}(E)$ por «espaço dos acontecimentos», os respetivos elementos por «acontecimentos», $P(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, por «probabilidade do acontecimento A » e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ por (um caso particular de) «espaço de probabilidade».
2. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, o conjunto vazio $\emptyset$ por «acontecimento impossível», o conjunto E por «acontecimento certo», dois acontecimentos por «incompatíveis» ou por «mutuamente exclusivos» se forem disjuntos, por «complementares» ou por «contrários» se forem disjuntos e a respetiva união for igual a E e por «equiprováveis» se tiverem a mesma probabilidade.
3. Designar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \subset E$, por «casos favoráveis a A » os elementos de A e por «casos possíveis» os elementos do espaço amostral E .
4. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, um acontecimento A por «elementar» quando $\#A = 1$ e por «composto» quando $\#A \geq 2$.
5. Justificar, dado um conjunto finito E , que a função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ definida por $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) = \frac{\#A}{\#E}$ é a única probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ tal que os acontecimentos elementares são equiprováveis e designar esta definição da função de probabilidade por «definição de Laplace».
6. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$, que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e que $P(\emptyset) = 0$.
7. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que se $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, justificando que $P(A) \leq P(B)$, e designar este último resultado por «monotonia da probabilidade».
8. Justificar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, que $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \in [0, 1]$.
9. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
10. Saber que se podem considerar espaços amostrais E infinitos, podendo-se definir, nessa situação, uma função de probabilidade P cujas propriedades generalizam as que caracterizam este conceito no caso em que E é finito, desde que se defina de forma apropriada a classe de acontecimentos, subconjunto de $\mathcal{P}(E)$, que constitui o domínio de p .

2. Definir probabilidade condicionada

1. Reconhecer, no quadro de uma experiência aleatória em que o universo dos resultados é finito, que, se se souber que um dado acontecimento B ocorreu, o número de casos possíveis da experiência aleatória é $\#B$ e o número de casos favoráveis de um acontecimento A é dado por $\#(A \cap B)$, e justificar que, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B é igual a $\frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ em que P representa a probabilidade no espaço inicial.
2. Designar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B , com $P(B) \neq 0$, por «probabilidade de A se B », por «probabilidade condicionada de A se B » ou por «probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B » a quantidade $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e representá-la por « $P(A|B)$ ».
3. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) \neq 0$, que a função P_B definida pela expressão $P_B(A) = P(A|B)$ é uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$.
4. Justificar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se e somente se $P(B) \neq 0$ e $P(A|B) = P(A)$, e identificar os acontecimentos A e B como «independentes» quando é verdadeira uma destas condições equivalentes.
5. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, $N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ de E constituída por acontecimentos de probabilidade não nula, que para todo o acontecimento $A \subset E$, $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \dots + P(A|E_N)P(E_N)$ e designar este resultado por «Teorema da probabilidade total».

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório e a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares.
2. +Resolver problemas envolvendo espaços de probabilidades e a determinação de propriedades da função de probabilidade.
3. +Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

Funções Reais de Variável Real FRVR12

Limites e Continuidade

1. Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas

1. #Provar, dadas sucessões convergentes (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.
2. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim u_n = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.
3. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim v_n = -\infty$ então $\lim u_n = -\infty$.
4. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$, que (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$, e designar este resultado por «Teorema das sucessões enquadradas».
5. #Provar, dadas funções reais de variável real f e g de domínio D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D que, se para todo o $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
6. #Provar, dado um número real l , funções reais de variável real f, g e h de domínio D e $a \in \mathbb{R}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$, e designar este resultado por «Teorema das funções enquadradas».

2. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas

1. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $I = [a, b]$, ($a < b$), que para qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$ e designar esta propriedade por «Teorema dos valores intermédios» ou por «Teorema de Bolzano-Cauchy».
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que f admite máximo e mínimo absolutos e designar este resultado por «Teorema de Weierstrass».

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo os teoremas de comparação e das sucessões e funções enquadradas para o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções reais de variável real.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

4. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração

1. Designar, dada uma função real de variável real f diferenciável num intervalo I tal que a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, a derivada $(f')'(a)$ por «derivada de segunda ordem de f no ponto a » e representá-la por « $f''(a)$ ».
2. Identificar uma função real de variável real f como «duas vezes diferenciável» num dado intervalo I se $f''(a)$ existir para todo o $a \in I$.
3. +Provar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a, b[$, $a < b$, e $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, que se $f''(c) > 0$ (respetivamente $f''(c) < 0$) f admite um mínimo (respetivamente um máximo) local em c .
4. +Provar, dada uma função f diferenciável num intervalo I , que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) em I se e somente se f' for estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) em I .
5. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , que se para todo o $x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$ (respetivamente $f''(x) < 0$), o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I .
6. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I então, para todo o $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (respetivamente $f''(x) \leq 0$).
7. Identificar, dada uma função f de domínio D , o ponto $(c, f(c))$ onde $c \in D$, como «ponto de inflexão do gráfico de f » se existirem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a, b] \subset D$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a, c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c, b]$ e, nesse caso, referir que «o gráfico de f tem ponto de inflexão em c ».
8. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico de f tem ponto de inflexão em c então $f''(c) = 0$.
9. Identificar, fixado um instante T_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não vazio nem reduzido a um ponto, dada a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I e dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «aceleração média de P no intervalo no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T^2 » como a taxa média de variação de p' entre t_1 e t_2 , $\frac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade L/T^2 » como a derivada de segunda ordem de p em t .

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo propriedades das funções diferenciáveis.
2. +Esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas ao respetivo gráfico.

3. +Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.
4. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de valores aproximados de soluções de equações da forma $f(x) = g(x)$ (f e g funções contínuas) utilizando uma calculadora gráfica, em casos em que é possível justificar, através da leitura das informações fornecidas pela calculadora, que determinados valores coincidem, até à casa decimal indicada, com soluções da referida equação, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o Teorema dos valores intermédios, ou outras propriedades analíticas das funções f e g , previamente estabelecidas.

Trigonometria e Funções Trigonométricas TRI12

Diferenciação de funções trigonométricas

1. Estabelecer fórmulas de trigonometria

1. +Reconhecer, dados ângulos α e β cuja soma é um ângulo convexo, que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.
2. +Reconhecer, dado um ângulo α convexo de amplitude superior à de um ângulo β , que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$, onde $\alpha - \beta$ é um ângulo cuja soma com β é igual a α .
3. Saber que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, estendendo-se assim as fórmulas já conhecidas envolvendo apenas medidas de amplitude de ângulos geométricos convexos e justificar que $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ e $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

2. Calcular a derivada de funções trigonométricas

1. +Reconhecer que para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ e provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, referindo este limite como «limite notável».
2. Provar que as funções seno e cosseno são diferenciáveis e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$.
3. Provar que a função tangente é diferenciável no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

3. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

1. Designar por «oscilador harmónico» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I , de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «amplitude», «pulsção» e «fase», justificar que a função x é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f = \frac{1}{T}$ por «frequência» do oscilador harmónico.
2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a \sin(bx + c) + d$, $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ e $f(x) = a \tan(bx + c) + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.
3. Saber, dado um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que P se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de P no instante t satisfaz a equação $mx''(t) = -\alpha x(t)$ ($\alpha > 0$), interpretando o termo $-\alpha x(t)$ como a força exercida pela mola sobre P («lei de Hooke»), designar a igualdade desta força com o produto da massa pela aceleração de P por (um caso particular da) «segunda Lei de Newton» e resolver problemas envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. Justificar, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde A e b são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material P colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas, o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos.
2. +Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmónicos.

Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas FEL12

Juros compostos e número de Neper

1. Operar com juros compostos e definir o número de Neper

1. Designar, dado um número real r , uma unidade de medida temporal T e $n \in \mathbb{N}$, por «aplicar juros compostos à taxa de $r\%$ a T durante n períodos de tempo T » a um dado capital disponível em certo instante inicial t_0 , a operação que consiste em calcular um juro igual a $r\%$ do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a T e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante t_0 , e levando-o a cabo n vezes seguidas.
2. Provar, dado um capital inicial C_0 , que, aplicando-se juros compostos à taxa de $r\%$ a T , o capital disponível ao fim de $n \in \mathbb{N}$ períodos de tempo T é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.
3. Justificar, dado um número real r , um número natural n e um capital C_0 disponível no início de um determinado período de um ano, que dividindo esse ano em n períodos iguais de medida temporal T e aplicando juros compostos à taxa de $\frac{r}{n}\%$ a T durante esses n períodos ao capital inicial C_0 , o capital disponível ao fim do ano é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$.
4. +Provar que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, majorada, justificar que é convergente, designar por «número de Neper» (« e ») o respetivo limite, interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto e saber que e é um número irracional.

Funções exponenciais

2. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.
2. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e justificar que f é contínua.
3. +Provar, dado um número real $a > 1$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, utilizando o limite já conhecido $\lim a^n = +\infty$ e o facto de f ser crescente.
4. Justificar, dado $a \in \mathbb{R}$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ quando $a > 1$, e, quando $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
5. Saber, dado um número real $a > 0$ e um número irracional x , que se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de números racionais de limite x , a sucessão de termo geral a^{q_n} é convergente e o respetivo limite depende apenas de x e de a , e que, representando esse limite por « a^x », se estende a função definida por $f(x) = a^x$ em $\mathbb{Q}$ ao conjunto $\mathbb{R}$,

obtendo-se por este processo uma função contínua nesse conjunto, designada por «função exponencial de base a », que mantém a monotonia, os limites em $\pm\infty$ e as propriedades algébricas de f em $\mathbb{Q}$: para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(ab)^x = a^x b^x$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

6. Saber que, tal como no caso em que $b \in \mathbb{Q}$, mais geralmente quando $b \in \mathbb{R}$ a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^b$ é contínua.
7. Saber que a função definida em $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ tem por limite e em $\pm\infty$ e justificar, dado $x \in \mathbb{R}$, que $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. Designar a função exponencial de base e simplesmente por «função exponencial» e representá-la também por «exp».
9. Saber que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, referindo este limite como um «limite notável».
10. Provar que a função exponencial é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Funções logarítmicas

3. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. Reconhecer, dado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva e designar a respetiva bijeção recíproca, $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, por «logaritmo de base a », representá-la por « $\log_a$ », e justificar que $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$ e $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$.
2. Designar o logaritmo de base 10 por «logaritmo decimal», representando-o também por «log» e designar o logaritmo de base e por «logaritmo neperiano», representando-o também por «ln».
3. Justificar que a função logaritmo de base a é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
4. Justificar que $x = 1$ é o único zero da função logaritmo de base $a > 0$, $a \neq 1$, e que, se $a > 1$ (respetivamente se $0 < a < 1$), $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (respetivamente $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$).
5. Justificar, dado $a > 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
6. Justificar, dado $0 < a < 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
7. #Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, e $x, y \in \mathbb{R}^+$, que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ e $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.
8. #Provar, dados $a, b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, que $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
9. Justificar, dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, que $a^x = e^{x \ln(a)}$.
10. Justificar, dado $a > 0$, que a função exponencial de base a é diferenciável e que a respetiva derivada é dada, em $\mathbb{R}$, pela expressão $\ln(a) a^x$.
11. +Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, que $\log_a$ é diferenciável e que para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.
12. Justificar, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que a função x^α é diferenciável para $x > 0$, de derivada $\alpha x^{\alpha-1}$, estendendo-se assim o caso já conhecido correspondente a α racional.

Limites notáveis

4. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

1. +Provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.
2. Justificar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k , que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f , tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$.

Primitivas e Cálculo Integral PCI12

Noção de primitiva

1. Definir a noção de primitiva

1. Designar, dada uma função f real definida num intervalo I , uma função F por «primitiva de f em I » quando F é diferenciável em I , e, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ e designar f como «primitivável em I » quando f admite uma primitiva nesse intervalo.
2. Justificar, dada uma função f primitivável num intervalo I e F e G duas primitivas de f nesse intervalo, que a função $F - G$ é constante em I .
3. Justificar que se f é primitivável num intervalo I , então as primitivas de f nesse intervalo são as funções definidas pelas expressões $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, onde F é uma qualquer primitiva de f em I , representar esta expressão por « Pf » ou por « $\int f(x)dx$ » e designar as constantes c por «constantes de primitivação».
4. Justificar, dado um intervalo I , um ponto $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ e uma função f primitivável em I , que existe uma única primitiva de F em I tal que $F(a) = b$.
5. Calcular e conhecer de memória as primitivas das funções «de referência para a primitivação»: 1 , x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$), $\frac{1}{x}$, e^x , $\sin x$ e $\cos x$.
6. Justificar, dadas funções f e g primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, que $f + g$ e kf são primitiváveis em I , que a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f + g$ e o produto de uma primitiva de f por k é uma primitiva de kf e representar estes resultados, respetivamente, pelas expressões « $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ » e « $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ », quando estas notações não forem ambíguas e designá-los conjuntamente por «linearidade da primitivação».
7. +Calcular primitivas de funções dadas por expressões da forma $u'(x)f(u(x))$, sendo conhecida uma primitiva de f .

Noção de integral

2. Abordar intuitivamente a noção de integral definido

1. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como a medida, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f .
2. Conhecer a origem histórica da expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », representando o símbolo « $\int$ » uma “soma” e « $f(x)dx$ » a medida da área de um “retângulo” com lados de medida $f(x)$ e “ dx ”, sendo esta última “infinitesimal”.
3. Saber que na expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », o símbolo « x » pode ser substituído por qualquer outro e designar, por esta razão, a variável x como «muda».

4. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$, ($a \leq b$), que se para todo o $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, então $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ e designar esta propriedade por «monotonia do integral definido».
5. Reconhecer, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que a função F_a definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ é a primitiva de f no intervalo $[a, b]$ nula em a e designar este resultado por «Teorema fundamental do cálculo (integral)».
6. Provar, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$, onde F é uma qualquer primitiva de f no intervalo $[a, b]$ e $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, e designar este resultado por «Fórmula de Barrow».
7. Saber, dada uma função f contínua não negativa num intervalo I e dois pontos α e β de I tais que $\alpha < \beta$, que, por convenção, $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ e justificar que com esta convenção, dados quaisquer pontos a, b e c de I , se tem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, designando este resultado por «relação de Chasles».
8. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$) tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como o simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f e reconhecer que se tem $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$.
9. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas ou não positivas num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ e que $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ e designar o conjunto destes resultados por «linearidade do integral definido».
10. Identificar, dada uma função f contínua de domínio $[a, b]$ ($a < b$) para a qual existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k+1} = b$, tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos $[c_j, c_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq k$), o integral de f entre a e b , $\int_a^b f(x)dx$, como a soma $\int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$, reconhecendo que este valor não depende da sequência $(c_1, \dots, c_k)$ e saber que se podem estender a esta categoria de funções a propriedade de monotonia do integral, o Teorema fundamental do cálculo, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles (com a mesma convenção relativa à inversão dos extremos de integração) e a propriedade de linearidade.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o cálculo de integrais definidos.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidade, aceleração e a primitivação e integração de funções reais de variável real.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação da medida da área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções.

Números Complexos NC12

Introdução aos números complexos

1. Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção

1. Saber que, em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou uma fórmula, dita «fórmula resolvente para equações do terceiro grau», que permite obter uma solução real de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q .
2. Saber que ao substituir formalmente p e q por certos valores na fórmula de Cardano esta passa a apresentar o símbolo « $\sqrt{-1}$ » e que, operando formalmente com este símbolo, considerando em particular que « $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ », se obtém efetivamente uma solução real da equação $x^3 + px + q = 0$, e que este facto está na origem da motivação para se definir adequadamente um “número” cujo quadrado é igual a -1 .
3. +Reconhecer que se existir um conjunto C contendo $\mathbb{R}$, munido de duas operações « $+$ » e « $\times$ » que estendem respetivamente a operação de adição e de multiplicação de números reais, mantendo os mesmos elementos neutros, que são associativas, comutativas, tais que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ », e tal que C contém um elemento i que satisfaz $i \times i = -1$, então, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se necessariamente em C a equivalência $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ bem como as igualdades $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, notando, em particular, que os resultados das operações « $+$ » e « $\times$ » sobre elementos de C da forma $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) têm essa mesma forma.

2. Definir o corpo dos números complexos

1. Definir em $\mathbb{R}^2$ uma operação aditiva « $+$ » por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e uma operação multiplicativa « $\times$ » por $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ($(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$), designar o conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido destas duas operações, por «corpo dos números complexos» e representá-lo por $\mathbb{C}$.
2. Justificar que as operações « $+$ » e « $\times$ », definidas em $\mathbb{R}^2$, são associativas, comutativas, que $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são respetivamente os elementos neutros de « $+$ » e « $\times$ » e que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ ».
3. Justificar que, dados $a, c \in \mathbb{R}$, $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ e $(a, 0) \times (c, 0) = (ac, 0)$ e, por esta razão, identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$ e representando, portanto, o número complexo $(x, 0)$ por « x ».
4. Representar o número complexo $(0, 1)$ por « i », designá-lo por «unidade imaginária» e provar que $i^2 = -1$.
5. Provar que, dado um número complexo z , existe um único número real a e um único número real b tais que $z = a + bi$, observando que z é, por definição, um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e que $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

6. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), a por «parte real de z » e b por «parte imaginária de z », e representá-las respetivamente por $Re(z)$ e por $Im(z)$.
7. Justificar que um número complexo z é real se e somente se $Im(z) = 0$ e designar por «números imaginários puros» os números complexos não reais tais que $Re(z) = 0$.
8. Justificar, dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, que $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e que $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.
9. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e $a, b \in \mathbb{R}$, o ponto M de coordenadas (a, b) como o «afixo do número complexo $z = a + bi$ » e reconhecer que se podem assim representar os números complexos no plano, designando, neste contexto, o plano por «plano complexo» ou «plano de Argand», o eixo das abscissas por «eixo real» e o eixo das ordenadas por «eixo imaginário».
10. Justificar, dados números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, que o afixo de $z + z_0$ é a imagem pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$ do ponto M , afixo de z .

3. Operar com números complexos

1. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, por «conjugado de z » o número complexo $a - bi$, representando-o por $\bar{z}$, e justificar que o ponto afixo de $\bar{z}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do ponto afixo de z .
2. Justificar, dados números complexos z e w , que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ e $\overline{\bar{z}} = z$.
3. Justificar, dado um número complexo z , que $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e que $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
4. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que z é um número real (respetivamente um número imaginário puro) se e somente se $z = \bar{z}$ (respetivamente $z = -\bar{z}$).
5. Designar, dado um número complexo z , por «módulo de z » a medida da distância, no plano complexo, entre a origem e o ponto afixo de z , representá-lo por « $|z|$ », justificar que se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que o módulo de um número complexo estende a noção de módulo de um número real e que se tem a equivalência $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
6. Provar, dados pontos A e B afijos respetivamente dos números complexos z_1 e z_2 , que $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$.
7. Justificar, dados números complexos z e w , que $|zw| = |z||w|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ e $|z + w| \leq |z| + |w|$, designando esta última propriedade por «desigualdade triangular».
8. Designar, dado um número complexo z não nulo, por «inverso de z » um número z' tal que $zz' = 1$, justificar que existe e é único, representá-lo por « $\frac{1}{z}$ » e provar que o inverso de z é igual a $\frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.
9. Designar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, o «quociente de w por z » como o número complexo pelo qual se tem de multiplicar z para obter w , representá-lo por « $\frac{w}{z}$ » e justificar que $\frac{w}{z} = w \times \frac{1}{z}$.
10. Justificar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, que $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$ e que $\overline{\left(\frac{w}{z} \right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

4. Definir a forma trigonométrica de um número complexo

1. Designar um número complexo z de módulo 1 por «unitário» e justificar, dado um número complexo z , que z é unitário se e somente se existir um número real α tal que $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, designando α , nesse caso, por um «argumento de z » e justificar que dois argumentos de um mesmo número complexo diferem por $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Justificar, dados números complexos unitários $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que $z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ e que $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$, representar, para $\theta \in \mathbb{R}$, o número complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ por « $e^{i\theta}$ », designando esta expressão por «exponencial complexa de $i\theta$ » e motivar esta notação observando que se tem $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ e $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$.
3. +Reconhecer, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único número positivo r e um único número complexo unitário w tais que $z = rw$, que $r = |z|$ e se θ for um argumento de w , designar igualmente θ por um «argumento de z », interpretando geometricamente r e θ .
4. Designar a representação de um número complexo $z \neq 0$ na forma $|z|e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z , por «forma trigonométrica» (ou «forma polar») de z , e justificar, dados números complexos não nulos z e z' de argumentos respetivamente iguais a θ e a θ' , que $z = z'$ se e somente se $|z| = |z'|$ e existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \theta' + 2k\pi$, interpretando geometricamente esta equivalência.
5. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único argumento de z no intervalo $] -\pi, \pi]$, designá-lo por «argumento principal de z » e representá-lo por « $Arg(z)$ ».
6. Justificar, dado um número real θ , que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $e^{i\theta}z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo generalizado de medida θ .
7. Justificar, dado um número complexo $z_0 \neq 0$, que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $z_0 z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo orientado de medida θ , argumento de z_0 , composta com a homotetia de centro O e razão $|z_0|$.
8. Justificar que θ é um argumento do número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, se e somente se $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e que, nesse caso, se $a \neq 0$, $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
9. Provar, dado $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ e designar este resultado por «Fórmula de De Moivre».

5. Extrair raízes n -ésimas de números complexos

1. +Reconhecer, dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, que a equação $z^n = w$ tem exatamente as n soluções $z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde α é um argumento de w , e designar estes números por «raízes n -ésimas de w » ou «raízes de ordem n de w ».
2. Reconhecer, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$) que se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, as raízes da equação $az^2 + bz + c = 0$, em $\mathbb{C}$, são dadas por $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ e $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo números complexos e as respectivas propriedades algébricas.
2. +Resolver problemas envolvendo a representação, por números complexos, de isometrias do plano (translações, reflexões e rotações) ou outras transformações do plano, como as homotetias.
3. +Resolver problemas envolvendo a representação trigonométrica de números complexos.
4. +Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos.
5. +Resolver problemas envolvendo equações da forma $z^n = w$, ($n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$) e vértices de polígonos regulares enquanto afijos de números complexos.
6. +Resolver problemas envolvendo polinómios de segundo grau.

Planificação

Uma dificuldade decorrente da implementação do novo Programa é a gestão do tempo. Considerando o número de aulas previstas no Programa (178, no total), apresenta-se em seguida uma proposta de distribuição global de aulas para cada capítulo do manual. Nestes tempos não se incluem as aulas dedicadas a testes, avaliações, visitas de estudo ou outros extras que possam surgir.

Introdução à Lógica e à Teoria dos conjuntos	16 aulas
Proposições	8 aulas
Condições e conjuntos	8 aulas
Álgebra	28 aulas
Radicais e potências de expoente racional	10 aulas
Polinómios	18 aulas
Geometria Analítica	48 aulas
Geometria analítica no plano	18 aulas
Cálculo vetorial no plano	12 aulas
Geometria analítica no espaço	10 aulas
Cálculo vetorial no espaço	8 aulas
Funções reais de variável real	50 aulas
Generalidades acerca de funções	8 aulas
Generalidades acerca de f.r.v.r	10 aulas
Monotonia, extremos e concavidade	12 aulas
Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções	20 aulas
Estatística	16 aulas
Manipular o símbolo de somatório	4 aulas
Características amostrais	12 aulas
158 aulas	

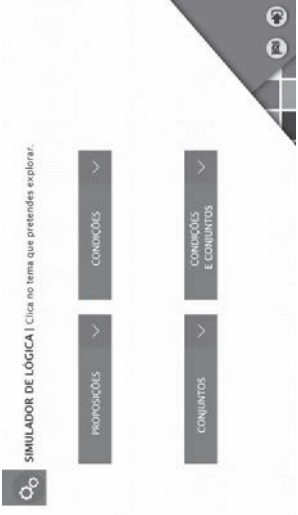
Guia de exploração de recursos multimédia

O **20 AULA DIGITAL** é uma ferramenta inovadora que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto MVT 10 através das novas tecnologias. Permite o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia associados ao Manual:

- Simulador de lógica
- Animações (Resoluções de exercícios por etapas)
- Simuladores (Geogebra)
- Resoluções projetáveis de exercícios

Este documento constitui uma proposta de exploração dos conteúdos multimédia presentes no Manual. Apresenta, igualmente, a listagem de todos os recursos, ordenados por páginas, que estarão disponíveis com o projeto em **20 AULA DIGITAL**.

Listagem geral dos recursos multimédia de MVT 10

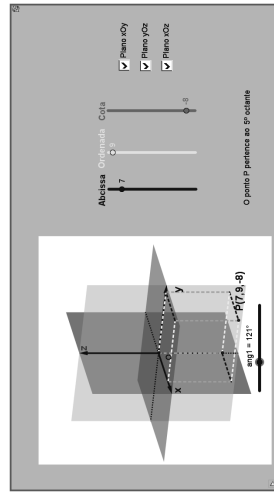
Recurso	Sugestões de exploração
Simulador de lógica 	Utilizar o recurso como revisão de conteúdo: Opção 1 • Propor a realização de um teste sobre um dos conteúdos como trabalho para casa. • Enviar o relatório desse teste para o professor avaliar as eventuais dificuldades manifestadas pelo aluno. • Realizar, em sala de aula, exercícios sobre os conteúdos em que os alunos evidenciaram mais dificuldades. Opção 2 • De forma individual ou em grupo, responder às questões projetadas em sala de aula. • Apresentar cada uma das perguntas e, após algum tempo de ponderação nas respostas, solicitar a um aluno que selecione a resposta que considera correta. • No final do teste, solicitar a um aluno que se desloque ao quadro e resolva o exercício.
Banco de questões de lógica bivalente e teoria de conjuntos agrupadas por conteúdos que permite: • testar de forma dinâmica e interativa os conhecimentos de lógica; • aceder a uma grande quantidade e diversidade de questões; • aceder a um relatório de avaliação com a possibilidade de correção das questões. O simulador inclui cerca de 200 questões, acessíveis através de mini-testes com cerca de 10 questões, gerados a partir da seleção dos conteúdos a testar. No final de cada teste, é apresentado o respetivo relatório de avaliação.	
Neste momento, disponibiliza-se uma versão de demonstração do simulador de lógica. A versão final será apresentada em setembro de 2015 aos professores que se encontrem a trabalhar com o Manual MVT 10 em 2015 AULA DIGITAL.	

Resoluções projetáveis de exercícios

RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DE "PROPOSIÇÕES"				MVT 10	Vol. 1	
Exercício 1 (pág. 35)	Exercício 9 (pág. 22)	Exercício 17 (pág. 37)	Exercício 24 (pág. 37)			
Exercício 2 (pág. 36)	Exercício 10 (pág. 23)	Exercício 18 (pág. 37)	Exercício 26 (pág. 38)			
Exercício 3 (pág. 36)	Exercício 11 (pág. 25)	Exercício 19 (pág. 37)	Exercício 27 (pág. 38)			
Exercício 4 (pág. 37)	Exercício 12 (pág. 27)	Exercício 20 (pág. 37)	Exercício 28 (pág. 38)			
Exercício 5 (pág. 37)	Exercício 13 (pág. 29)	Exercício 21 (pág. 37)	Exercício 29 (pág. 38)			
Exercício 6 (pág. 39)	Exercício 14 (pág. 30)	Exercício 22 (pág. 37)	Exercício 30 (pág. 38)			
Exercício 7 (pág. 20)	Exercício 15 (pág. 30)	Exercício 23 (pág. 37)	Exercício 31 (pág. 38)			
Exercício 8 (pág. 21)	Exercício 16 (pág. 37)	Exercício 24 (pág. 37)	Exercício 32 (pág. 38)			
5 a 15 TESTE 1 (Págs. 34 e 35)						
 Texto						

Resoluções projetáveis de todos os exercícios do Manual, Caderno de Exercícios e Caderno de Apoio às Metas Curriculares, agrupadas por capítulo.

Simuladores (Geogebra)



Recursos interativos que permitem uma exploração dinâmica de conteúdos de geometria, funções e estatística.

* Ver a listagem dos simuladores existentes em **20 AULA DIGITAL**, na página 75.

Opção 1

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno, em sala de aula.
- Projetar a resolução do exercício em sala de aula.

Opção 2

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno como trabalho de casa.
- Projetar a resolução do exercício em sala de aula.

Opção 3

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno como trabalho de casa.
- Enviar a resolução do exercício ao aluno por email, para que ele o corrija.

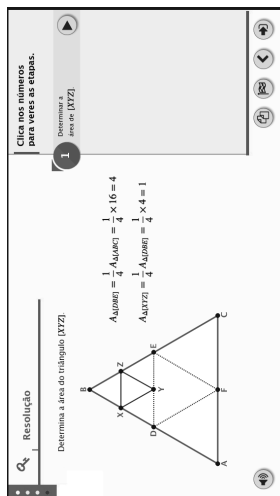
Opção 1

- Explorar o simulador com os alunos, propondo que o manipulem mediante um objetivo proposto pelo professor.

Opção 2

- Propor aos alunos um determinado objetivo como trabalho para casa, solicitando o envio de um print por email a comprovar a correta execução do objetivo proposto.

Animações (Resoluções de exercícios por etapas)



Recursos que apresentam **as resoluções, por etapas, de alguns exercícios do Manual com diferentes níveis de dificuldade**. São compostos por diversas seções. A primeira apresenta o enunciado do exercício e as restantes as diferentes etapas da resolução.

Clicando em  terá acesso a uma versão pdf da resolução que poderá ser descarregada e impressa ou enviada por email aos alunos.

Estes recursos permitem uma exploração interativa dos exercícios, rentabilizando o tempo em sala de aula.

* Apresenta-se nas páginas 76 e 77 uma lista das animações existentes em

20 AULA DIGITAL.

Opção 1

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno.
- Apresentar a resolução do exercício, explorando cada uma das etapas que compõem a animação.

Opção 2

- Apresentar o enunciado.
- Apresentar cada uma das etapas, propondo que o aluno vá executando a respetiva tarefa. O professor só passa para a etapa seguinte quando a turma terminar a etapa anterior.

Opção 3

- Apresentar o enunciado.
- Explorar cada uma das etapas com os alunos. Para assegurar a máxima concentração dos alunos, estes devem focar-se em cada uma das etapas, debatendo-a oralmente.
- Apresentar a resolução da etapa.
- Entregar ao aluno a resolução total do exercício, previamente impressa.

LISTAGEM DOS SIMULADORES EXISTENTES EM **20** AULA DIGITAL

Volume 1	
• Localização de coordenadas com valores inteiros (pág. 147) • Localização de coordenadas com valores decimais (pág. 147) • Declive de uma reta não vertical (pág. 149) • Variação do declive e da ordenada na origem (pág. 149) • Circunferência (pág. 158) • Construção da elipse (pág. 166) • Conjunto de pontos e condições (pág. 173) • Equação vetorial de uma reta no plano (pág. 211) • Referenciais no espaço (pág. 231) • Planos paralelos ao plano xOz (pág. 235)	• Planos paralelos ao plano yOz (pág. 235) • Planos paralelos ao plano xOy (pág. 235) • Superfície esférica (pág. 242)
Volume 2	
• Função quadrática I (pág. 87) • Função quadrática II (pág. 87) • Zeros e sinal de uma função quadrática (pág. 90) • Função do tipo $f(x) = a x - b + c$ (pág. 104) • Variação da média em função da variação de dados (pág. 167) • Variação do desvio-padrão em função da variação de dados (pág. 176)	

Volume 1	
• Resolução do exercício 9 (pág. 22)	• Resolução do exercício 111 (pág. 134)
• Resolução do exercício 5 (pág. 34)	• Resolução do exercício 178 (pág. 142)
• Resolução do exercício 110, alínea c (pág. 73)	• Resolução do exercício 181 (pág. 143)
• Resolução do exercício 113, alínea c (pág. 74)	• Resolução do exercício 28 (pág. 161)
• Resolução do exercício 113, alínea d (pág. 74)	• Resolução do exercício 62 (pág. 184)
• Resolução do exercício 116, alínea d (pág. 74)	• Resolução do exercício 68, alínea a (pág. 185)
• Resolução do exercício 118, alínea j (pág. 74)	• Resolução do exercício 77 (pág. 190)
• Resolução do exercício 43 (pág. 100)	• Resolução do exercício resolvido 1 (pág. 194)
• Resolução do exercício 55 (pág. 100)	• Resolução do exercício 95 (pág. 205)
• Resolução do exercício 109 (pág. 134)	• Resolução do exercício 155 (pág. 238)

Volume 1	• Resolução do exercício 67 (pág. 58)
• Resolução do exercício 189 (pág. 269)	• Resolução do exercício 74 (pág. 59)
• Resolução do exercício 271 (pág. 281)	• Resolução do exercício 81 (pág. 59)
• Resolução do exercício 280 (pág. 282)	• Resolução do exercício 83 (pág. 59)
• Resolução do exercício 291 (pág. 285)	• Resolução do exercício 122 (pág. 84)
• Resolução do exercício 292 (pág. 285)	• Resolução do exercício 193 (pág. 129)
• Resolução do exercício 293 (pág. 285)	• Resolução do exercício 208 (pág. 130)
Volume 2	• Resolução do exercício 10 (pág. 160)
• Resolução do exercício 19 (pág. 31)	• Resolução do exercício 22 (pág. 174)
• Resolução do exercício 32 (pág. 32)	• Resolução do exercício 47 (pág. 197)
• Resolução do exercício 37 (pág. 32)	• Resolução do exercício 49 (pág. 197)

Tema 1 | Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Atividades «Será que...?»

Pág. 10

SERÁ QUE...? Por onde seguiu a Alice?

Dever-se-á ouvir as conjecturas e argumentações dos alunos e voltar ao problema depois de estudar as várias operações com proposições.

Basicamente, designando por a a afirmação «O melhor caminho é o da direita.», o gato aponta o caminho da direita e afirma que:

$$(a \Rightarrow \sim a) \wedge (\sim a \Rightarrow a)$$

Construindo a tabela de verdade relativa a esta proposição, conclui-se que o gato está a mentir e, portanto, o melhor caminho é o da esquerda e é por esse caminho que a Alice deve ter seguido.

a	$\sim a$	$a \Rightarrow \sim a$	$\sim a \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow \sim a) \wedge (\sim a \Rightarrow a)$
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F

Pág. 39

SERÁ QUE...? Papiro de Rhind

Designemos por x a parte que restará ao camponês. Então, a quantidade de milho que dá ao Faraó é $\frac{1}{5}x$.

A equação $\frac{1}{5}x + x = 21$ traduz o problema e tem-se:

$$\frac{1}{5}x + x = 21 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} \Leftrightarrow x = 17,5$$

O camponês fica com 17 unidades e meia, tendo dado 3 unidades e meia ao Faraó.

Poder-se-á recordar o conceito de equação e de inequação. Os alunos poderão eventualmente conhecer o termo condição e devem ser incentivados a apresentar exemplos de condições.

Pág. 49

SERÁ QUE...? Negação de proposições que envolvem quantificador

1. A negação da proposição «Todos os números reais são positivos.» é «Existe pelo menos um número real que não é positivo.»

Opção (C)

2. A negação da proposição «Existe pelo menos um homem que é imortal.» é «Todos os homens são mortais.»

Opção (B)

3. A conjectura correta será:

$$\sim(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim p(x) \text{ e } \sim(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$$

É natural que alguns alunos sejam tentados a dizer que a negação de «Todos os números reais são positivos.» é «Todos os números reais são negativos.» e que a negação da proposição «Existe pelo menos um homem que é imortal.» é «Existe pelo menos um homem que é mortal.». De um modo geral, este é um assunto em que os alunos se sentem à vontade para defenderem as suas opções. É uma boa oportunidade para exporem as suas argumentações.

Pág. 50

SERÁ QUE...? Contraexemplos

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$

2. a) As proposições $2^2 > 2$, $3^2 > 3$, $\left(\frac{10}{3}\right)^2 > \frac{10}{3}$, $\left(-\frac{7}{2}\right)^2 > -\frac{7}{2}$ e $(-4)^2 > -4$ são todas verdadeiras e, portanto, 2, 3, $\frac{10}{3}$, $-\frac{7}{2}$ e -4 são soluções da condição $x^2 > x$.

b) Não. O facto de termos verificado que cinco números reais são solução da condição não nos permite garantir que todos os números reais sejam solução da condição.

c) A proposição $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ e é, portanto, uma proposição falsa. Conclui-se, então, que $\frac{1}{2}$ não é solução da condição $x^2 > x$.

d) Sim, o facto de existir um número real que não é solução da condição $x^2 > x$ permite concluir que a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ é falsa.

As restantes resoluções e sugestões relativas a estas atividades serão disponibilizadas aos professores adotantes do projeto MVT 10.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Proposições

Pág. 15

1. Tabela de verdade da conjunção:

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Pág. 16

2. Tabela de verdade da disjunção:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.

- a) A proposição $7 \leq 7$ é verdadeira porque equivale a $7 < 7 \vee 7 = 7$ e a proposição $7 = 7$ é verdadeira.
b) A proposição $7 \leq 9$ é verdadeira porque equivale a $7 < 9 \vee 7 = 9$ e a proposição $7 < 9$ é verdadeira.
c) A proposição $7 \leq 5$ é falsa porque equivale a $7 < 5 \vee 7 = 5$ e nem a proposição $7 < 5$ nem a proposição $7 = 5$ são verdadeiras.

Pág. 17

4.

- a) A proposição é falsa porque equivale à conjunção da proposição « $\sqrt{49}$ é um número irracional.» com a proposição « π é um número irracional.» e a primeira destas proposições é falsa.
b) A proposição é verdadeira porque equivale à conjunção da proposição «70 é múltiplo de 7.» com a proposição «70 é múltiplo de 5.» e ambas as proposições são verdadeiras.
c) A proposição é falsa porque equivale à conjunção da proposição « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional.» com a proposição « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número maior do que 1.» e a primeira destas proposições é falsa.
d) A proposição é verdadeira porque equivale à conjunção da proposição «102 não é um número ímpar.» com a proposição « $\sqrt{11}$ não é um número racional.» e ambas as proposições são verdadeiras.

5.

- a) A proposição é verdadeira porque equivale à disjunção da proposição «28 é múltiplo de 7.» com a proposição «28 é múltiplo de 8.» e a primeira destas proposições é verdadeira.

b) A proposição é falsa porque equivale à disjunção da proposição « π é igual a 3,14.» com a proposição « π é igual a 3,1416.» e ambas as proposições são falsas.

Pág. 19

6. Tabela de verificação da associatividade da disjunção:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Pág. 20

7. Tabela de verificação da equivalência $p \wedge f \Leftrightarrow f$:

p	f	$p \wedge f$
V	F	F
F	F	F

Pág. 21

8. Tabelas de verificação das equivalências $p \vee v \Leftrightarrow v$ e $p \vee f \Leftrightarrow p$:

p	v	$p \vee v$
V	V	V
F	V	V

p	f	$p \vee f$
V	F	V
F	F	F

Pág. 22

9. Tabela de verificação da distributividade da disjunção em relação à conjunção. Como a conjunção e a disjunção são comutativas, basta provar que $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, quaisquer que sejam as proposições p , q e r .

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Pág. 23

10. Tabela de verificação da propriedade relativa à negação da disjunção:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Pág. 25

11.

- a) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- b) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- c) Dado que o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente é falso, a implicação é falsa.
- d) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- e) Dado que o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente é falso, a implicação é falsa.

Pág. 27

12.

- a) $v \Rightarrow a$. Para que esta proposição seja verdadeira, a tem de ter o valor lógico V.
- b) $a \Rightarrow v$. Esta proposição é verdadeira, qualquer que seja o valor lógico de a .
- c) $a \Rightarrow \sim v$. Para que esta proposição seja verdadeira, a tem de ter o valor lógico F.

Pág. 29

13.

- a) «Vou ao cinema e ao teatro.»
- b) «Não estou doente e não vou à escola.»
- c) «Não estudo e passo de ano.»

Pág. 30

14.

- a) «Passo de ano ou vou para o Minho.»
- b) «Não me porto bem ou não sou castigado.»
- c) «Não vou à escola ou não vou ao ginásio.»

15.

- a) $(\sim a \Rightarrow b) \Leftrightarrow [\sim (\sim a) \vee b] \Leftrightarrow (a \vee b)$
- b) $(a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$

16.

- a) É proposição.
- b) Não é proposição.
- c) Não é proposição.
- d) É proposição.
- e) Não é proposição.

17.

- a) F
- b) F
- c) F
- d) V
- e) V
- f) V
- g) F

18.

- a) $\sim p \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$
- b) $p \wedge q \Leftrightarrow v \wedge f \Leftrightarrow f$
- c) $\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim v \vee f \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$
- d) $(\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim v \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow (f \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow v$

19.

- a) $\sim a \wedge b$ é uma proposição verdadeira se e só se ambas as proposições $\sim a$ e b forem verdadeiras, pelo que se conclui que a é falsa e b é verdadeira, ou seja, $a \Leftrightarrow f$ e $b \Leftrightarrow v$.
- b) $\sim a \vee \sim b$ é uma proposição falsa se e só se ambas as proposições $\sim a$ e $\sim b$ forem falsas, pelo que se conclui que a e b são ambas verdadeiras, ou seja, $a \Leftrightarrow v$ e $b \Leftrightarrow v$.

20.

$\sim(a \vee b) \wedge (b \vee c)$ é verdadeira, pelo que
 $\sim(a \vee b)$ é verdadeira e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 $a \vee b$ é falsa e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e $f \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e c é verdadeira.
De entre aquelas três línguas, a Leonor só estuda alemão.

21.

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

c) $(p \wedge v) \Leftrightarrow p$

d) $(f \vee r) \Leftrightarrow r$

e) $[\sim(p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Propriedade comutativa da conjunção.

Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção.

A conjunção de uma qualquer proposição p com uma proposição verdadeira é equivalente a p .

A disjunção de uma proposição falsa com uma qualquer proposição r é equivalente a r .

Leis de De Morgan e propriedade da dupla negação.

22.

a) $2 \geq -1$

b) Sejam p e c as proposições:

p : «As retas r e s são paralelas.»

c : «As retas r e s são concorrentes.»

Pretende-se negar a proposição $p \vee c$.

Tem-se $\sim(p \vee c) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim c$.

A negação da proposição enunciada é, por isso, «As retas r e s não são paralelas nem concorrentes.»

c) Sejam r e i as proposições:

r : «O triângulo $[ABC]$ é retângulo.»

i : «O triângulo $[ABC]$ é isósceles.»

Pretende-se negar a proposição $\sim r \wedge i$.

Tem-se $\sim(\sim r \wedge i) \Leftrightarrow r \vee \sim i$.

A negação da proposição enunciada é, por isso, «O triângulo $[ABC]$ é retângulo ou não é isósceles.»

d) $\sim(0 \leq 2 < 1) \Leftrightarrow \sim(0 \leq 2 \wedge 2 < 1) \Leftrightarrow \sim(0 \leq 2) \vee \sim(2 < 1) \Leftrightarrow 0 > 2 \vee 2 \geq 1$

23.

a) $\sim(a \vee \sim b) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim(\sim b) \Leftrightarrow \sim a \wedge b$

b) $\sim[\sim(a \wedge b) \wedge c] \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee \sim c$

c) $\sim[a \wedge (\sim b \vee c)] \Leftrightarrow \sim a \vee \sim(\sim b \vee c) \Leftrightarrow \sim a \vee (b \wedge \sim c)$

24.

a) $\sim(\sim p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge q \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge f \Leftrightarrow f$

b) Dado que $\sim p \wedge q$ é a negação de $p \vee \sim q$, a proposição enunciada é a disjunção de uma proposição com a sua negação, pelo que, pelo princípio do terceiro excluído, é verdadeira.

De outro modo:

$$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \vee \sim p] \wedge [(p \vee \sim q) \vee q] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \vee \sim q] \wedge [p \vee (\sim q \vee q)] \Leftrightarrow [v \vee \sim q] \wedge [p \vee v] \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$$

c) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [f \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge v \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)$

25.

- a) $(2 + 2 = 5 \Rightarrow 1 > 1) \Leftrightarrow (f \Rightarrow f) \Leftrightarrow v$
b) $(7 = 8 \Rightarrow 7 \neq 8) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$
c) $[-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2] \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$

26. Como a proposição $\sim a \vee b$ é uma proposição falsa, $\sim a$ é falsa e b é falsa, pelo que se pode concluir que a proposição a é verdadeira e que a proposição b é falsa.

- a) $a \Leftrightarrow v$
b) $a \vee b \Leftrightarrow v \vee f \Leftrightarrow v$
c) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$
d) $(b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$

27.

a) $\sim a \Rightarrow \sim b$ é uma proposição falsa, pelo que
 $\sim a$ é uma proposição verdadeira e $\sim b$ é uma proposição falsa, pelo que
 a é uma proposição falsa e b é uma proposição verdadeira.

b) $a \Rightarrow \sim a \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que
 a é uma proposição verdadeira e $\sim a \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que
 a é uma proposição verdadeira e $f \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que
 a é uma proposição verdadeira e b é uma proposição falsa.

28.

- a) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \sim a \vee b$
b) $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Leftrightarrow \sim a \vee (b \Rightarrow c) \Leftrightarrow \sim a \vee (\sim b \vee c)$

29. Sejam e e m as proposições:

e : «Este rapaz é estudante.»

m : «Este rapaz mente.»

a) A proposição enunciada pode ser traduzida por $e \Rightarrow \sim m$.

Tem-se $(e \Rightarrow \sim m) \Leftrightarrow \sim e \vee \sim m$.

Esta proposição pode traduzir-se por «Este rapaz não é estudante ou não mente.».

b) $\sim(e \Rightarrow \sim m) \Leftrightarrow e \wedge \sim(\sim m) \Leftrightarrow e \wedge m$

Esta proposição pode traduzir-se por «Este rapaz é estudante e mente.».

30. a) Sejam p e i as proposições:

p : «2 é um número primo.»

i : «2 é um número ímpar.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $\sim p \Rightarrow i$.

Tem-se $\sim(\sim p \Rightarrow i) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim i$.

Esta proposição pode traduzir-se por «2 não é um número primo nem ímpar.»

b) Sejam q e u as proposições:

q : «3 é maior do que 4.»

u : «3 é maior do que 1.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $q \Rightarrow u$.

Tem-se $\sim(q \Rightarrow u) \Leftrightarrow q \wedge \sim u$.

Esta proposição pode traduzir-se por «3 é maior do que 4 mas menor ou igual do que 1.».

c) Sejam a e m as proposições:

a : «Agrada-me o programa do canal 1.»

m : «mudo de canal.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $\sim a \Rightarrow m$.

Tem-se $\sim(\sim a \Rightarrow m) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim m$.

Esta proposição pode traduzir-se por «Não me agrada o programa do canal 1, mas não mudo de canal.».

31.

a₁) $p \Rightarrow q$

a₂) $p \wedge \sim q$

a₃) $q \Rightarrow p$

b₁) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A ganha todos os domingos, mas não ganha o campeonato.».

b₂) $\sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim(\sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A não ganha todos os domingos ou ganha o campeonato.».

b₃) $\sim(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \wedge \sim p$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A ganha o campeonato e não ganha todos os domingos.».

c) Admitir que houve pelo menos um domingo em que o clube A não ganhou, significa considerar que a proposição p é falsa.

c₁) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (f \Rightarrow q) \Leftrightarrow v$

c₂) $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (f \wedge \sim q) \Leftrightarrow f$

c₃) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow f) \Leftrightarrow \sim q \vee f \Leftrightarrow \sim q$

32.

Primeiro processo:

$$[(c \Rightarrow b) \Rightarrow a] \Leftrightarrow \sim(c \Rightarrow b) \vee a \Leftrightarrow (c \wedge \sim b) \vee a \Leftrightarrow a \vee (c \wedge \sim b)$$

Segundo processo:

a	b	c	$\sim b$	$c \wedge \sim b$	$a \vee (c \wedge \sim b)$	$c \Rightarrow b$	$(c \Rightarrow b) \Rightarrow a$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F

Capítulo 2 | Condições e conjuntos

Pág. 41

34.

- a) Não pode, pois só se define o máximo divisor comum de dois ou mais números naturais.
- b) D_x pode ser $\mathbb{R}$, mas o 0 não pode pertencer a D_y .
- c) Não pode, a variável não pode tomar valores inferiores a -3.
- d) Pode, pois a expressão $x^2 + 3$ é positiva para qualquer valor real da variável x .

35.

- a) Não é uma condição. Por exemplo, para $x = 1999$, a expressão converte-se em «A equipa vencedora da Taça de Portugal, em futebol, no ano 1999.», que não é uma proposição, mas sim uma expressão que designa a equipa de futebol do Beira-Mar.
- b) É uma condição. Sempre que se substitui a por um número real, obtém-se uma proposição: falsa, se se substituir a por um número real não positivo; verdadeira, se se substituir a por um número real positivo.
- c) Não é uma condição. Por exemplo, para $y = \sqrt{5}$, a expressão converte-se em «O maior número inteiro inferior a $\sqrt{5}$.», que não é uma proposição, mas sim uma expressão que designa o número 2.
- d) É uma condição. Sempre que se substitui a variável por um número natural, obtém-se uma proposição: verdadeira, se a concretização da variável for um número que tem quatro divisores; falsa, se a concretização da variável for um número que não tem quatro divisores.
- e) É uma condição. Sempre que se substitui a variável por um número real, obtém-se uma proposição: verdadeira, se substituirmos x por -1 ou por 3; falsa, para qualquer outra concretização.
- f) Não é uma condição. Por exemplo, quando se substitui x por 0 obtém-se não uma proposição, mas uma expressão que designa o número -3.

Pág. 42

36.

- a) A proposição $(-1)^5 + (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 0$ é verdadeira.
- b) A proposição $1^5 + 1^3 + 1^2 + 1 = 0$ é falsa.

Pág. 43

37.

$$\frac{1}{2} + a = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{17}{6}, \text{ pelo que } \frac{17}{6} \text{ é o valor de } a \text{ para o qual } \frac{1}{3} \text{ é solução da condição } \frac{x}{2} + a = 3.$$

Pág. 44

38.

- a) $\sim p(n) \vee q(n)$
- b) Dizer que n é múltiplo de 6 é dizer que é par e é múltiplo de 3. Assim, a condição enunciada pode-se traduzir por $\sim p(n) \wedge q(n)$.
- c) O resto da divisão de um número natural, n , por 3, é 0, 1 ou 2. Se o resto for 0, o número diz-se múltiplo de 3, pelo que o resto da divisão de n por 3 é 1 ou 2 se e só se n não for múltiplo de 3. Assim, condição enunciada pode traduzir-se por $\sim q(n)$.

39.

a) 5 é solução, pois $\sim (5 + 1 \neq 6)$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 4 não é solução, pois $\sim (4 + 1 \neq 6)$ é uma proposição falsa.

b) Por exemplo, 3 é solução, pois $2 \times 3 > 5 \wedge 3 + 1 \leq 9$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 1 não é solução, pois $2 \times 1 > 5 \wedge 1 + 1 \leq 9$ é uma proposição falsa.

c) Por exemplo, 2 é solução, pois $2 = 2 \vee 2 = 3$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 1 não é solução, pois $1 = 2 \vee 1 = 3$ é uma proposição falsa.

d) Por exemplo, 4 é solução, pois $4 > 1 \Rightarrow 4 > 2$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, $\frac{3}{2}$ não é solução, pois $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \frac{3}{2} > 2$ é uma proposição falsa.

e) Por exemplo, 2 é solução, pois $2^2 = -1 \Rightarrow 2 = 5$ é uma proposição verdadeira; aliás, todos os números reais são solução da condição.

f) Por exemplo, 0 é solução, pois $0 = 5 \Rightarrow 0^2 = -1$ é uma proposição verdadeira.

5 não é solução, pois $5 = 5 \Rightarrow 5^2 = -1$ é uma proposição falsa.

g) Por exemplo, -2 é solução, pois $(-2)^2 = -1 \Leftrightarrow -2 \geq 0$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 2 não é solução, pois $2^2 = -1 \Leftrightarrow 2 \geq 0$ é uma proposição falsa.

h) Por exemplo, -10 é solução, pois $|-10| \geq 0 \Leftrightarrow -10 \leq 0$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 10 não é solução, pois $|10| \geq 0 \Leftrightarrow 10 \leq 0$ é uma proposição falsa.

Pág. 45

40.

a) Falso. A soma de qualquer número natural com 3 é sempre maior do que 3 e, portanto, nunca é 1.

b) Verdade. Para $n = 7$, a condição:

$$n > 1 \wedge n \text{ é divisor de } 7$$

converte-se numa proposição verdadeira (7 é solução da condição).

41.

a) Verdade. Todos os números reais negativos são solução da condição $2x < x$.

b) Verdade. Para $x = -3$, a condição:

$$x \neq 3 \wedge x^2 = 9$$

converte-se numa proposição verdadeira (-3 é solução da condição).

42.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3,14 < x < \pi$

b) $\exists n \in \mathbb{N} : 3n = 18$

Pág. 46

43.

a) Falso. Para $n = 1$, a condição:

$$2n > 2$$

converte-se numa proposição falsa.

b) Falso. Por exemplo, para $n = 6$, a condição:

$$n \text{ é múltiplo de } 3 \Rightarrow n \text{ é ímpar}$$

converte-se numa proposição falsa.

44.

- a) Verdade. Se a um número real qualquer adicionarmos 1, obtemos sempre um número que é maior do que ele, e, portanto, diferente dele.
b) Falso. Por exemplo, para $x = -2$, a condição $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ converte-se numa proposição falsa.

45.

- a) $\forall n \in \mathbb{N}$, m.d.c. $(n, n + 1) = 1$
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \times x = x \wedge x \times 1 = x$

Pág. 47

46.

- a) Possível ($\sqrt{5}$, por exemplo, é solução), mas não universal (1, por exemplo, não é solução).
b) Possível (-5 , por exemplo, é solução), mas não universal (0, por exemplo, não é solução).
c) Possível (1, por exemplo, é solução), mas não universal (0 não é solução).
d) A condição é universal.
e) A condição dada é equivalente à condição $x^2 = -4$ e é, portanto, uma condição impossível em $\mathbb{R}$.
f) A condição é universal, pois qualquer valor da variável que transforme $x > 3$ numa proposição verdadeira, também transforma $x^3 > 27$ numa proposição verdadeira e qualquer valor da variável que transforme $x > 3$ numa proposição falsa, também transforma $x^3 > 27$ numa proposição falsa.

47.

- a) Possível (2 é solução), mas não universal (3, por exemplo, não é solução).
b) Impossível. Tem-se $n^2 + n = n(n + 1)$. Qualquer que seja o valor atribuído a n , tem-se que n e $n + 1$ são números naturais consecutivos. Por isso, um deles é necessariamente par. Portanto, o produto $n(n + 1)$ é sempre par.

48.

- a) $\Rightarrow$
b) $\Leftarrow$
c) $\Rightarrow$
d) $\Leftarrow$

49.

As condições não são equivalentes, pois a condição $p(n) \Leftrightarrow q(n)$ não é universal, em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $p(10)$ é uma proposição verdadeira e $q(10)$ é uma proposição falsa.

Pág. 48

50.

- a) A proposição enunciada pode traduzir-se por «Qualquer número real compreendido entre 0 e 1 é maior do que o seu quadrado.», o que é verdade.
b) A proposição enunciada pode traduzir-se por «Pelo menos um dos números 1, 51 e 85 é primo.», o que é falso: 1 não é primo, por definição, 51 não é primo, pois $51 = 3 \times 17$ e 85 não é primo, pois $85 = 5 \times 17$.

51.

Por exemplo:

- a) Impossível em $\mathbb{N}$, possível mas não universal em $\mathbb{Z}$, universal em $\{-1\}$.
- b) Impossível em $\mathbb{N}$, possível mas não universal em $\mathbb{Z}$, universal em $]-\infty, 1[$.
- c) Impossível no conjunto das aves, possível mas não universal no conjunto dos mamíferos, universal no conjunto dos seres humanos.

52.

Como a condição $p(x)$ é possível, existe, no universo U , pelo menos um objeto a tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira, pelo que $\sim p(a)$ é uma proposição falsa. Portanto, a condição $\sim p(x)$ não é universal. Como a condição $p(x)$ não é universal, existe, no universo U , pelo menos um objeto b tal que $p(b)$ é uma proposição falsa, pelo que $\sim p(b)$ é uma proposição verdadeira. Portanto, a condição $\sim p(x)$ é possível.

Pág. 49

53.

- a) $\sim(\exists x : 2x - 3 = x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x, \sim(2x - 3 = x) \Leftrightarrow \forall x, 2x - 3 \neq x$
- b) $\sim(\forall x, x < 1 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x : \sim(x < 1 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x : \sim(x < 1) \wedge \sim(x > 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x : x \geq 1 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x : 1 \leq x \leq 2$

54.

- a) «Há pelo menos um número natural que não é ímpar.»

A tradução da proposição inicial em linguagem simbólica pode ajudar a esclarecer a negação da proposição em linguagem corrente:

$$\begin{aligned} &\sim(\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ é ímpar}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \sim(x \text{ é ímpar}) \end{aligned}$$

- b) «Todos os colegas da minha turma têm irmãos».

Recorrendo à tradução da proposição inicial em linguagem simbólica, têm-se:

$$\begin{aligned} &\sim(\exists x \in T : x \text{ não tem irmãos}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in T, \sim(x \text{ não tem irmãos}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in T, x \text{ tem irmãos} \end{aligned}$$

- c) «Existe pelo menos uma pessoa nesta sala que não está a usar um chapéu.»

Em linguagem simbólica, tem-se:

$$\begin{aligned} &\sim(\forall x \in S, x \text{ está a usar um chapéu}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \in S : \sim(x \text{ está a usar um chapéu}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \in S : x \text{ não está a usar um chapéu} \end{aligned}$$

55.

Seja $p(x)$ uma condição. Dizer que a condição $p(x)$ é universal, é dizer que a proposição $\forall x, p(x)$ é uma proposição verdadeira. Atendendo a que as proposições $\forall x, p(x)$ e $\sim[\exists x : \sim p(x)]$ são equivalentes, conclui-se que a proposição $\exists x : \sim p(x)$ é falsa, o que significa que a condição $\sim p(x)$ é uma condição impossível.

Pág. 50

56.

$$\begin{aligned}\sim[\exists x \in A : p(x)] &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sim[\exists x : x \in A \wedge p(x)] &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x, \sim[x \in A \wedge p(x)] &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x, \sim x \in A \vee \sim p(x) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow \sim p(x) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x \in A, \sim p(x) &\end{aligned}$$

Pág. 51

57.

A afirmação «Todos os números ímpares são primos.» é falsa pois, por exemplo, 15 é ímpar e não é primo.

Pág. 52

58.

a) $\{1, 4, 9\}$

b) $\{-4, -3, -2, -1\}$

Pág. 53

59.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par} \wedge x < 7\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5 \wedge x \leq 8\}$$

60.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} : x > 5\}$

Pág. 67

61.

a) Não é uma condição porque, para cada concretização da variável, não dá origem a uma proposição.

b) Não é uma condição.

c) É uma condição porque, para cada concretização da variável, dá origem a uma proposição; por exemplo, para $x = 5$, a condição converte-se em $2 \times 5 = 1$.

d) É uma condição.

e) Não é uma condição.

f) É uma condição.

62.

3, por exemplo, é solução da condição porque a proposição «3 é divisor de 12.» é verdadeira. 5, por exemplo, não é solução da condição porque a proposição «5 é divisor de 12.» é falsa. De um modo geral, qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ é solução da condição e qualquer número natural que não esteja neste conjunto não é solução da condição.

63.

-3 não é solução da condição porque a proposição « $(-3)^3 - 3(-3)^2 - (-3) + 3 = 0$ » é falsa.

-1 é solução da condição porque a proposição « $(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3 = 0$ » é verdadeira.

1 é solução da condição porque a proposição « $1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 3 = 0$ » é verdadeira.

3 é solução da condição porque a proposição « $3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 3 = 0$ » é verdadeira.

64.

Para que -2 seja solução da condição é necessário que esta se converta, para $x = -2$, numa proposição verdadeira.

Tem-se:

$$(-2)^3 - k(-2) = 1 \Leftrightarrow -8 + 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$$

Na verdade, a proposição $(-2)^3 - \frac{9}{2}(-2) = 1$ é verdadeira.

65.

Para que -1 e 2 sejam soluções da condição é necessário que esta se converta, para $x = -1$ e para $x = 2$, em proposições verdadeiras.

Tem-se:

$$a \times (-1)^3 < 1 \wedge a \times 2^3 < 1 \Leftrightarrow a > -1 \wedge a < \frac{1}{8} \Leftrightarrow a \in \left] -1, \frac{1}{8} \right[$$

66.

a) Uma solução da condição $x > 2 \vee x \leq \sqrt{2}$ é qualquer número real que seja solução de, pelo menos, uma das condições $p(x)$ e $q(x)$. Por exemplo, 3 e -1 são duas soluções da condição.

Qualquer número real que converta ambas as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições falsas não é solução da condição $x > 2 \vee x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, $1,5$ e 2 não são soluções da condição.

b) $\frac{1}{2} > 2 \vee \frac{1}{2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$, pelo que $\frac{1}{2}$ não é solução da condição.

c) Qualquer número real que converta ambas as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições com o mesmo valor lógico é solução da condição $x > 2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, $1,5$ e 2 são soluções da condição.

Qualquer número real que converta as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições com diferentes valores lógicos não é solução da condição $x > 2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, 3 e -1 não são soluções da condição.

d) 3 é solução da condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ se e só se for verdadeira a proposição $p(3) \Rightarrow q(3)$.

$$p(3) \Rightarrow q(3) \Leftrightarrow (3 > 2 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{2}) \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$$

A proposição « 3 é solução da condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ » é falsa.

67. Como $p(a) \vee q(a)$ é uma proposição falsa, podemos concluir que são falsas ambas as proposições $p(a)$ e $q(a)$.

a) $p(a) \vee \sim q(a) \Leftrightarrow f \vee \sim f \Leftrightarrow f \vee v \Leftrightarrow v \rightarrow a$ é solução da condição

- b) $[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [f \Rightarrow f] \Leftrightarrow v \rightarrow a \text{ é solução da condição}$
 c) $[\sim p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim f \Rightarrow f] \Leftrightarrow [v \Rightarrow f] \Leftrightarrow f \rightarrow a \text{ não é solução da condição}$
 d) $[p(a) \Leftrightarrow q(a)] \Leftrightarrow [f \Leftrightarrow f] \Leftrightarrow v \rightarrow a \text{ é solução da condição}$

68.

- a) A proposição «Existe pelo menos um número natural.» é verdadeira; 1, por exemplo, é um número natural.
 b) A proposição «Existe pelo menos um número natural que não é um número inteiro.» é falsa, pois qualquer número natural é inteiro.
 c) A proposição «Existe pelo menos um x cujo módulo é igual ao módulo de -4 .» é verdadeira; basta considerar o próprio -4 .
 d) A proposição «Existe pelo menos um número racional cujo quadrado é igual a 2.» é falsa, pois só há dois números cujo quadrado é igual a 2 e são ambos irracionais: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

69.

- a) A proposição $\exists x : p(x)$ é falsa e, portanto, a condição $p(x)$ é uma condição impossível.
 b) A proposição $p(a)$ é uma proposição verdadeira; então a condição $p(x)$ é possível e a proposição $\exists x : p(x)$ é verdadeira.

70.

- a) A proposição «Existe pelo menos um número natural que é igual ao seu dobro.» é falsa, pois só há um número que é igual ao seu dobro e esse número, o zero, não é natural.
 b) A proposição «Qualquer número real é diferente do seu quadrado.» é falsa, pois $1 = 1^2$.
 c) A proposição «Existe pelo menos um número real que é maior do que 1 e menor do que 2.» é verdadeira; 1,5, por exemplo, é maior do que 1 e menor do que 2.
 d) A proposição «O quadrado de qualquer número real é maior ou igual do que o próprio número.» é falsa, pois, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$.
 e) A proposição «Existe pelo menos um número real cujo décuplo é menor do que o próprio número.» é verdadeira; tem-se, por exemplo, $10 \times (-1) < -1$.
 f) A proposição «Existe pelo menos um número real menor do que 2 cujo quadrado é maior do que 4.» é verdadeira; tem-se, por exemplo, $-3 < 2 \wedge (-3)^2 > 4$.

71.

- a) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x < 2$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $1,5 > 1 \wedge 1,5 < 2$.
 b) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$.
 c) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge x^2 = 9$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $-3 \neq 3 \wedge (-3)^2 = 9$.
 d) A condição é impossível, pois é falsa a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 1$ dado que $1 - x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 < 0$ e não existe nenhum número real cujo quadrado seja negativo.
 e) A condição é impossível, pois é falsa a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq x$ dado que para qualquer concretização da variável, a condição $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq x$ se converte numa proposição que é uma implicação cujo antecedente é verdadeiro e cujo consequente é falso.

72.

A proposição $0 > 1 \Rightarrow 0 < 2$ é verdadeira (recorda que $(f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$) e, portanto, a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow \Rightarrow x < 2$ é verdadeira.

A proposição $3 > 1 \Rightarrow 3 < 2$ é falsa (recorda que $(v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$) e, portanto, a proposição $\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow \Rightarrow x < 2$ é falsa.

73.

a) $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível (não existe qualquer número real compreendido entre -2 e 2 cujo módulo seja maior do que 3).

b) $q(x) \vee r(x)$ é uma condição universal (qualquer concretização da variável converte uma das duas condições, $q(x)$ e $r(x)$, numa proposição verdadeira).

74.

a) A proposição é falsa porque, por exemplo, para $x = 1$, a condição $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ converte-se na proposição $(1 + 2)^2 = 1^2 + 4$, que é uma proposição falsa.

b) A proposição é falsa porque para $x = 0$, a condição $|x| > 0$ converte-se na proposição $|0| > 0$, que é uma proposição falsa.

c) A proposição é verdadeira porque para $x = 0$, a condição $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ converte-se na proposição $(0 + 2)^2 = 0^2 + 4$, que é uma proposição verdadeira.

d) A proposição é falsa porque existe pelo menos um habitante de Almada que não é português (dando este facto como certo para quem não conheça nenhum estrangeiro que habite em Almada).

e) A proposição é falsa porque, como cada quadrado tem os ângulos todos retos, todos os quadrados são retângulos.

75.

a) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 = x^2 + 4) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2 \neq x^2 + 4$

b) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \sim(|x| > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0$

c) $\sim[\exists x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2 = x^2 + 4] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 \neq x^2 + 4$

d) Há pelo menos um habitante de Almada que não é português.

e) Todos os quadrados são retângulos.

76.

a) A proposição «Há pelo menos um número real maior ou igual do que 2 .» é verdadeira.

A negação da proposição é: $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2$.

b) A proposição «A soma de qualquer número natural com 2 é diferente de 1 .» é verdadeira.

A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{N} : x + 2 = 1$.

c) A proposição «Qualquer número racional é menor do que 2 ou maior do que 3 .» é falsa.

A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 3$.

d) A proposição «Há pelo menos um número inteiro estritamente compreendido entre 2 e 3 .» é falsa.

A negação da proposição é: $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 \vee x \geq 3$.

e) A proposição «Tem-se, para qualquer número real, que, se ele for menor do que 3 , então o seu quadrado é menor do que 9 .» é falsa.

A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x^2 \geq 9$.

f) Começemos por analisar a condição $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$: como, para qualquer número real, se tem $x^2 \geq 0$, tem-se sempre $x^2 + 1 \geq 1$, pelo que, por um lado, $\frac{1}{x^2+1}$ é sempre positivo e, por outro, é sempre menor ou igual a 1. Então, a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ é verdadeira.

A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2+1} \leq 0 \vee \frac{1}{x^2+1} > 1$.

g) A proposição «Tem-se, para qualquer número real, que, se o seu módulo for igual a 4, então esse número é -4 .» é falsa.

A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = 4 \wedge x \neq -4$.

77.

Se a adição fosse distributiva em relação à multiplicação, ter-se-ia, para quaisquer números reais a , b e c :

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Ora, tem-se, por exemplo, $2 + (3 \times 4) = 14$ e $(2 + 3) \times (2 + 4) = 30$, pelo que, para $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ se tem $a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$.

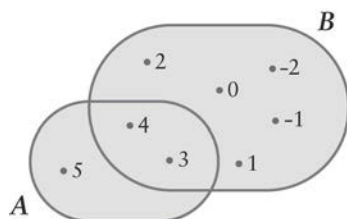
78.

Tem-se: $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) $A \cap B = \{3, 4\}$

b) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $A \setminus B = \{5\}$



79.

Tem-se: $A =] - \infty, 2[\cup [4, +\infty[$, $B = [-1, 5]$ e $C =] - \infty, 0]$

Representemos, na reta real, os conjuntos A , B e C :



Tem-se:

a) $A \cap B \cap C = [-1, 0]$

b) $A \cap B = [-1, 2[\cup [4, 5]$

c) $B \setminus C =]0, 5]$

d) $A \cap \bar{C} =]0, 2[\cup [4, +\infty[$

e) $A \cup \bar{C} = \mathbb{R}$

80.

a) $1 - 2x < 6 \Leftrightarrow -2x < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

Conjunto-solução = $]-\frac{5}{2}, +\infty[$

b) $\frac{x}{3} - \frac{1+x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 - 3x = 6 \Leftrightarrow -x = 9 \Leftrightarrow x = -9$

Conjunto-solução = $\{-9\}$

c) $1 - |x| < 4 \wedge x^2 = 1 \Leftrightarrow -|x| < 3 \wedge (x = -1 \vee x = 1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x| > -3 \wedge (x = -1 \vee x = 1) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Conjunto-solução = $\{-1, 1\}$

Nota: $|x| > -3$ é uma condição universal e a conjunção de uma condição universal com outra condição é esta condição.

d) $1 + x^2 = 0 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = -1 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Conjunto-solução = $\emptyset$

Nota: $x^2 = -1$ é uma condição impossível e a conjunção de uma condição impossível com outra condição é uma condição impossível.

e) $|x| + x = 0 \vee x - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| = -x \vee x > 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x > 1$

Conjunto-solução = $] -\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

+ Exercícios propostos

Pág. 69

81.

Opção (C)

A opção (A) é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

A opção (B) é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

A opção (C) é uma proposição falsa, pois é a disjunção de duas proposições falsas.

A opção (D) é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição falsa com uma proposição verdadeira.

82.

Opção (B)

Se a proposição «Encestei pelo menos 10 vezes.» é falsa, então é verdadeira a proposição «Encestei no máximo 9 vezes.», pelo que também se pode concluir que falhei pelo menos 7 vezes. Então, a única afirmação verdadeira é a da opção (B).

83.

Opção (D)

Substituindo a variável sucessivamente pelos valores apresentados em todas as opções, observa-se que só na opção (D) é que a condição se converte em duas proposições verdadeiras.

84.

Opção (C)

$$\sim(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \sim p(x) \wedge \sim q(x) \Leftrightarrow \sim(x > -2) \wedge \sim(x \leq \sqrt{2}) \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x > \sqrt{2}$$

85.

Opção (A)

A proposição a é falsa, pois, por exemplo, um retângulo não quadrado tem os ângulos internos iguais e não é um polígono regular.

A proposição b é verdadeira, pois, por exemplo, um losango tem os lados iguais e os ângulos internos diferentes.

A proposição c é verdadeira, pois, por exemplo, o retângulo com comprimento igual a 1 e largura igual a 2 e o retângulo com comprimento igual a 1 e largura igual a 3 não são semelhantes.

A proposição d é verdadeira, pois, como a hipotenusa, sendo o lado maior, é sempre diferente dos catetos, um triângulo retângulo ou é isósceles, se os catetos forem iguais, ou é escaleno, se os catetos forem diferentes.

86.

Opção (D)

Analisemos as equações das quatro opções.

Opção (A):

$$2x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x - 1 = 1 - 2x$ é verdadeira, pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (B):

$$x^2 - 1 = 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Como $-1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 1 = 1 - x^2$ é verdadeira, pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (C):

$$2x - 2 = 2 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Como $1 \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x - 2 = 2 - 2x$ é verdadeira pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (D):

$$x^2 - 2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 2 - x^2$ é falsa, pelo que a condição é impossível em $\mathbb{Q}$.

87.

Opção (A)

Tem-se $(2 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

O conjunto-solução é o conjunto $\{2\}$.

Analisemos as equações das quatro opções.

Opção (A):

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{2\}$, pelo que esta equação é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (B):

$$4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

O conjunto-solução é o conjunto vazio, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (C):

$$(2 + x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{-2\}$, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (D):

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{-2, 2\}$, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Pág. 70

88.

Opção (D)

O conjunto apresentado na opção (A) é o conjunto vazio, o conjunto apresentado na opção (B) é o conjunto $[-1, 1]$, o conjunto apresentado na opção (C) é o conjunto $\{0\}$ e o conjunto apresentado na opção (D) é o conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

89.

Opção (D)

O conjunto A é igual à união do conjunto dos números naturais cujo quadrado não é superior a 36 com o conjunto dos números naturais ímpares que não excedem 11.

O conjunto dos números naturais cujo quadrado não é superior a 36 é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

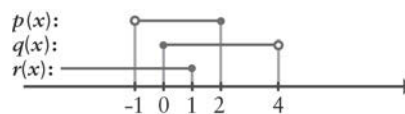
O conjunto dos números naturais ímpares que não excedem 11 é o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Então, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$.

90.

Opção (A)

Representemos, na reta real, os conjuntos definidos pelas condições $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$:

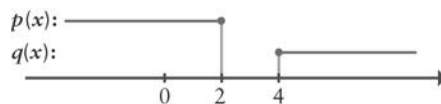


O conjunto definido pela condição $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$ é a interseção dos três conjuntos, ou seja, o conjunto $[0, 1]$.

91.

Opção (C)

Representemos, na reta real, os conjuntos definidos pelas condições $p(x)$ e $q(x)$:



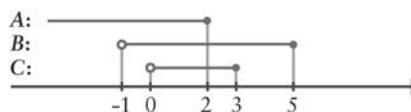
O conjunto definido pela condição $\sim[p(x) \vee q(x)]$ é o complementar da união daqueles dois conjuntos, ou seja, o conjunto $]2, 4[$.

92.

Opção (B)

Tem-se $(A \cap B) \setminus \bar{C} = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

Representemos, na reta real, os conjuntos A , B e C :



Então, $A \cap B \cap C =]0, 2]$.

93.

- a) Verdadeira.
- b) Falsa.
- c) Falsa.
- d) Verdadeira.
- e) Falsa.
- f) Verdadeira.
- g) Falsa.
- h) Falsa.

94.

- a) $p \Leftrightarrow v$
- b) $q \Leftrightarrow v$
- c) $r \Leftrightarrow f$
- d) $(p \wedge q) \wedge \sim r \Leftrightarrow (v \wedge v) \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$
- e) $(p \vee r) \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow [(v \vee f) \Rightarrow \sim v] \Leftrightarrow [v \Rightarrow f] \Leftrightarrow f$
- f) $[(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(v \wedge \sim f) \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow [(v \wedge v) \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow [v \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow v$
- g) $(r \Rightarrow p) \wedge \sim (q \wedge r) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \wedge \sim (v \wedge f) \Leftrightarrow v \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$
- h) $(q \Leftrightarrow \sim r) \wedge (r \vee \sim p) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow \sim f) \wedge (f \vee \sim v) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow v) \wedge (f \vee f) \Leftrightarrow v \wedge f \Leftrightarrow f$

Pág. 71

95.

- a) «Não está a chover.»
- b) «Não vou ficar em casa.»
- c) «Está a chover e vou ficar em casa.»
- d) «Está a chover, mas não vou ficar em casa.»
- e) «Se estiver a chover, então vou ficar em casa.»

96.

- a) $\sim p$
- b) $p \wedge \sim q$
- c) $\sim p \Rightarrow \sim q$
- d) $q \Leftrightarrow p$

97.

- a) $p \wedge (q \vee r)$
- b) $\sim r \Rightarrow q$
- c) $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$
- d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

98.

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

b) $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow v$

99.

a)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$	$\sim [\sim p \vee (p \wedge \sim q)]$	$p \wedge q$
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F

b) $\sim [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow p \wedge \sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow f \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$

c) «Copio e sou apanhado.»

100.

a) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee f] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee f] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

b) «Dou-te um livro mas não te dou um DVD, ou dou-te um DVD mas não te dou um livro.»

Pág. 72

101.

Dado que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é falsa, pode concluir-se que uma das proposições p e q é verdadeira e a outra é falsa.

a) F, dado que uma das proposições é falsa.

b) V, dado que uma das proposições é verdadeira.

c) V, dado que o antecedente da implicação é uma proposição falsa.

d) V, dado que o consequente da implicação é uma proposição verdadeira.

102.

a) Verdadeira.

Negação: $3 < 2$

b) Falsa.

Negação: $\frac{4 \times 6}{2} \neq 2 \times 3$

c) Falsa.

Negação: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

d) Verdadeira.

Negação: $[0, \sqrt{2}] \cap [\frac{7}{5}, 2] \neq [\frac{7}{5}, \sqrt{2}]$

e) Falsa.

Negação: $\sim (1 < \pi < 2) \Leftrightarrow \sim (1 < \pi \wedge \pi < 2) \Leftrightarrow \sim (1 < \pi) \vee \sim (\pi < 2) \Leftrightarrow 1 \geq \pi \vee \pi \geq 2$

f) Falsa.

Negação: $2 + 3 = 5 \wedge 2^2 + 3^2 \neq 5^2$.

103.

a) «O João não joga andebol nem futebol.»

b) «O João joga andebol ou não joga futebol.»

c) «O João joga andebol e joga futebol.»

d) «O João não joga andebol, nem futebol, nem basquetebol.»

e) «O João não joga andebol ou não joga futebol nem basquetebol.»

f) «O João joga andebol e futebol ou não joga andebol nem futebol.»

104. $\sim (q \vee \sim r) \wedge p \Leftrightarrow (\sim q \wedge r) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge r \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow q) \wedge r \Leftrightarrow \sim v \wedge r \Leftrightarrow f \wedge r \Leftrightarrow f$

105.

a) Tem-se $5 - 3x < 9 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$ e $4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$. Ora, o número inteiro -1 é maior do que $-\frac{4}{3}$ e menor do que $-\frac{1}{4}$, pelo que a proposição enunciada é verdadeira.

b) Tem-se $(x - 1)(x + 1) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt{8} \vee x = \sqrt{8}$, donde a condição $(x - 1)(x + 1) = 7$ é impossível em $\mathbb{Q}$, pelo que a proposição enunciada é falsa.

c) A proposição enunciada é verdadeira, pois tem-se $x^2 + 1 \neq 16 \Leftrightarrow x^2 \neq 15$, que é uma condição universal em $\mathbb{Q}$.

d) A proposição enunciada pode traduzir-se por «O quadrado de qualquer número real diferente de 3 é diferente de 9.». Esta proposição é falsa, pois -3 é diferente de 3 mas o seu quadrado é igual a 9.

106.

	Equação...	... equivalente a	Em $\mathbb{N}$	Em $\mathbb{Z}$	Em $\mathbb{Q}$	Em $\mathbb{R}$
a)	$2x + 7 = 5$	$x = -1$	Impossível	Possível	Possível	Possível
b)	$3x \geq 1$	$x \geq \frac{1}{3}$	Universal	Possível	Possível	Possível
c)	$5x - 6 = 3x + 1$	$x = \frac{7}{2}$	Impossível	Impossível	Possível	Possível
d)	$x^2 + 1 = 4x$	$x = 2 \pm \sqrt{3}$	Impossível	Impossível	Impossível	Possível
e)	$ x = x$	$x \geq 0$	Universal	Possível	Possível	Possível
f)	$3x^2 < 1 \wedge x \neq 0$	$x^2 < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0$	Impossível	Impossível	Possível	Possível

107.

- a) $[-1, 1]$ (por exemplo)
- b) $[0, 2]$ (por exemplo)
- c) $]1, +\infty[$ (por exemplo)

108.

- a) $x > 5$ (por exemplo)
- b) $x > \frac{11}{2}$ (por exemplo)
- c) $x > 6$ (por exemplo)

Pág. 73

109.

a) «Qualquer número real que seja menor do que 5 é menor do que 2.»

«Qualquer número natural múltiplo de 6 é par.»

«Existe pelo menos um número real entre 3 e 7.»

«Existe pelo menos um número par que é divisor de 75.»

b)

- Falsa. A condição $x < 5 \Rightarrow x < 2$ não é universal em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, o número 4 não é solução da condição, dado que 4 é um número real menor do que 5 e não é menor do que 2.
- Verdadeira. A condição x é múltiplo de 6 $\Rightarrow x$ é par é uma condição universal em $\mathbb{N}$, pois, dado que 6 é um número par, todos os seus múltiplos são números pares.
- Verdadeira. A condição $3 < x < 7$ é possível em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, o número real 5 é solução da condição, pois é maior do que 3 e é menor do que 7.
- Falsa. A condição x é par e x é divisor de 75 é impossível em $\mathbb{N}$, pois os divisores de 75 (1,3,5,15,25 e 75) são todos números ímpares.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x < 5 \wedge x \geq 2$

$\exists x \in \mathbb{N} : x$ é múltiplo de 6 $\wedge x$ é ímpar

$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \vee x \geq 7$

$\forall x \in \mathbb{N}, x$ é ímpar $\vee x$ não é divisor de 75 ou $\forall x \in \mathbb{N}, x$ é divisor de 75 $\Rightarrow x$ é ímpar

«Existe pelo menos um número real inferior a 5 e superior ou igual a 2.»

«Existe pelo menos um múltiplo natural de 6 que é ímpar.»

«Qualquer número real é inferior ou igual a 3 ou superior ou igual a 7.»

«Qualquer divisor natural de 75 é ímpar.»

110.

a)

- $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{Z} : -\pi < x < -\sqrt{7}$
- $\forall x \in \mathbb{Q}, 2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}$
- $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x < 1 \Rightarrow x < 0$

b) F ($0^2 = 0$); V ($-\pi < -3 < -\sqrt{7}$); V ($\sqrt{5} < 2,24$); V (não há números inteiros entre 0 e 1).

c)

- $\sim \forall x \in \mathbb{Q}, x^2 > 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \sim (x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0$
- $\sim \exists x \in \mathbb{Z} : -\pi < x < -\sqrt{7} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (-\pi < x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (x > -\pi \wedge x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (x > -\pi) \vee \sim (x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \leq -\pi \vee x \geq -\sqrt{7}$
- $\sim [\forall x \in \mathbb{Q}, 2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \sim (2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : 2,24 \leq x \leq 2,25 \wedge \sim (x > \sqrt{5}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : 2,24 \leq x \leq 2,25 \wedge x \leq \sqrt{5}$
- $\sim [\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x < 1 \Rightarrow x < 0] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \sim (x < 1 \Rightarrow x < 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x < 1 \wedge \sim (x < 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x < 1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 0 \leq x < 1$

«Existe pelo menos um número racional cujo quadrado é inferior ou igual a 0.»

«Qualquer número inteiro é inferior ou igual a $-\pi$ ou superior ou igual a $-\sqrt{7}$.»

«Existe pelo menos um número racional superior ou igual a 2,24 e inferior ou igual a 2,25, que é menor ou igual a $\sqrt{5}$.»

«Existe pelo menos um número inteiro não nulo no intervalo $[0, 1[$.»

111.

- a₁) A proposição $\forall x \in A, p(x)$ é falsa, pois 4 não é um número primo.
- a₂) A proposição $\exists x \in A : q(x)$ é falsa, pois, em A , nenhum número é múltiplo de 6.
- b₁) $\sim (\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A : \sim p(x)$
- b₂) $\sim (\exists x \in A : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A : \sim q(x)$
- c₁) $\exists x \in A : \sim p(x)$; em A , existe pelo menos um número que não é primo.
- c₂) $\forall x \in A : \sim q(x)$; em A , nenhum número é múltiplo de 6.
- d₁) $p(x)$ é uma condição possível, mas não universal em A .
- d₂) $q(x)$ é uma condição impossível em A .
- d₃) $\sim p(x)$ é uma condição possível, mas não universal em A .
- d₄) $\sim q(x)$ é uma condição universal em A .

112.

a) Como a conjunção de uma condição com a sua contrária e uma condição impossível, conclui-se que duas condições contrárias são incompatíveis.

b) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições incompatíveis.

Sejam, respetivamente, P e Q os conjuntos a elas associados.

Como $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível, tem-se $P \cap Q = \emptyset$, pelo que P e Q são conjuntos disjuntos.

c) Tem-se: $2x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -2$ e $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2$.

c₁) As condições $x^2 \neq 4$ e $x \in \{-2, 2\}$ são contrárias.

c₂) As condições $x^2 \neq 4$ e $2x + 5 = 1$ são incompatíveis mas não contrárias.

113.

$$\text{a)} \frac{2(1-x)}{3} \geq \frac{1}{4} \wedge 3x^4 + 5 > 2 \Leftrightarrow 8(1-x) \geq 3 \wedge 3x^4 > -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 8x \geq 3 \wedge x^4 > -1 \Leftrightarrow -8x \geq -5 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8}$$

$$\text{Conjunto-solução} =]-\infty, \frac{5}{8}]$$

$$\text{b)} (x-2)^2 + 6x = 19 \vee 2(x-1) = 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 6x = 19 \vee 2x - 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \vee -2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{-5, 3\}$$

$$\text{c)} x^2 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge x-3 > 0) \vee (x > 0 \wedge x-3 < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \wedge x > 3) \vee (x > 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee (x > 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

$$\text{Conjunto-solução} =]0, 3[$$

$$\text{d)} (x+4)(x-4) > x^2 - 8x \wedge |x| + 3 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 16 > x^2 - 8x \wedge |x| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 16 > 0 \wedge (x = -4 \vee x = 4) \Leftrightarrow x > 2 \wedge (x = -4 \vee x = 4) \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{4\}$$

114.

a) Verdadeira. Se p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira, podemos concluir que q é verdadeira.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

e) Falsa.

f) Verdadeira.

g) Verdadeira.

115.

$$\text{a)} \sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \wedge q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \wedge q \Leftrightarrow f, \text{ valor lógico F}$$

$$\text{b)} \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v \vee q \Leftrightarrow v, \text{ valor lógico V}$$

$$\text{c)} \sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

$$\text{d)} [\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge f \Leftrightarrow f, \text{ valor lógico F}$$

$$\text{e)} [p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [v \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v, \text{ valor lógico V}$$

116.

a) $(p \Rightarrow q) \vee r$ é falsa, pelo que

$p \Rightarrow q$ é falsa e r é falsa, pelo que

p é verdadeira e q é falsa e r é falsa.

b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa, pelo que

p é verdadeira e $q \Rightarrow r$ é falsa, pelo que

p é verdadeira e q é verdadeira e r é falsa.

c) $\sim (p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira, pelo que

$\sim (p \Rightarrow q)$ é verdadeira e r é verdadeira, pelo que

$p \Rightarrow q$ é falsa e r é verdadeira, pelo que

p é verdadeira e q é falsa e r é verdadeira.

d) $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira e $\sim r \Rightarrow q$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, $\sim q$ é verdadeira e $\sim r \Rightarrow q$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, q é falsa e $\sim r$ é falsa, pelo que

p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira.

117.

$\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$ ou $(a \wedge \sim c) \Rightarrow \sim b$

118.

Tem-se: $E =] - \infty, 4[$, $F =] - \infty, -\sqrt{2}]$ e $G = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

a) $E \cup F =] - \infty, 4[$

b) $F \cup G =] - \infty, +\infty[$

c) $E \cap F =] - \infty, -\sqrt{2}]$

d) $E \cap G = \left[-\frac{3}{2}, 4\right[$

e) $E \cap (F \cap G) = E \cap \left(\left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]\right) = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]$

f) $\bar{E} = \overline{]-\infty, 4[} = [4, +\infty[$

g) $\bar{G} = \overline{\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[} =] - \infty, -\frac{3}{2}[$

h) $E \setminus F = E \cap \bar{F} = E \cap] - \sqrt{2}, +\infty[=] - \sqrt{2}, 4[$

i) $E \setminus G = E \cap \bar{G} = E \cap] - \infty, -\frac{3}{2}[=] - \infty, -\frac{3}{2}[$

j) $E \setminus (F \cap G) = E \setminus \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right] = E \cap \overline{\left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]} =$
 $= E \cap \left(] - \infty, -\frac{3}{2}[\cup] - \sqrt{2}, +\infty[\right) =] - \infty, -\frac{3}{2}[\cup] - \sqrt{2}, 4[$

Pág. 75

119.

P é o conjunto dos números primos menores do que 10; $P = \{2, 3, 5, 7\}$.

Q é o conjunto dos múltiplos de 3 que sejam divisores de 18; $Q = \{3, 6, 9, 18\}$.

R é o conjunto de todos os números naturais que sejam divisores de 18 ou menores do que 10; $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

S é o conjunto de todos os números naturais menores do que 10 que não sejam divisores de 18; $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

120.

a) t é retângulo $\Rightarrow \sim(t$ é equilátero)

t é isósceles $\Rightarrow \sim(t$ é retângulo)

t é obtusângulo $\Rightarrow (t$ tem um ângulo externo agudo)

b) Universal

Não é universal, pois existem triângulos isósceles retângulos.

Universal

c) t é equilátero $\Rightarrow \sim(t$ é retângulo)

t é retângulo $\Rightarrow \sim(t$ é isósceles)

$\sim(t$ tem um ângulo externo agudo) $\Rightarrow \sim(t$ é obtusângulo)

Por exemplo:

«Um triângulo não é retângulo quando é equilátero.»

«Um triângulo não é isósceles quando é retângulo.»

«Um triângulo não é obtusângulo quando não tem um ângulo externo agudo.»

121.

Apresentamos duas resoluções.

Resolução I:

Para qualquer número real x , tem-se:

$$x < -5 \Rightarrow x \text{ é negativo}$$

Portanto, multiplicando por x ambos os membros da desigualdade $x < -5$, vem:

$$x \times x > -5 \times x, \text{ ou seja, } x^2 > -5x$$

Adicionando $6x$ a ambos os membros desta desigualdade, vem:

$$x^2 + 6x > -5x + 6x, \text{ ou seja, } x^2 + 6x > x$$

Resolução II:

$$x < -5 \Rightarrow x + 5 < 0 \wedge x < 0 \Rightarrow (x + 5) \times x > 0 \Rightarrow x^2 + 5x > 0 \Rightarrow x^2 + 6x - x > 0 \Rightarrow x^2 + 6x > x$$

122.

Designemos por ' ab ' o número inicial (a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades). Ao trocarmos a ordem dos dois algarismos, obtemos o número ' ba '. Tem-se:

$$'ab' = 10a + b \text{ e } 'ba' = 10b + a$$

Vem, então:

$$10b + a - (10a + b) = 27 \Rightarrow 10b + a - 10a - b = 27 \Rightarrow 9b - 9a = 27 \Leftrightarrow 9(b - a) = 27 \Rightarrow b - a = 3$$

123.

Sendo n um número ímpar, tem-se que $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

Vem:

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$$

Tem-se:

- se $k = 1$, $4(k^2 - k) + 1$ é igual a 1, que é ímpar;
- se $k \neq 1$, $4(k^2 - k)$ é um número múltiplo de 4, pelo que é par, donde $4(k^2 - k) + 1$ é ímpar.

124.

Provar por contrarrecíproco que «Se $n^2 + 2n$ não é múltiplo de 4, então n é ímpar.» é mostrar que:

$$n \text{ par} \Rightarrow n^2 + 2n \text{ é múltiplo de 4}$$

Para qualquer número natural n , tem-se $n^2 + 2n = n(n + 2)$. Vem, então:

n é par $\Rightarrow n + 2$ é par $\Rightarrow n(n + 2)$ é múltiplo de 4, pois o produto de dois números pares é um número múltiplo de 4.

125.

Se a reta r não for paralela ao plano α , então a reta r interseca o plano α num ponto P . Seja t a reta contida no plano α que passa por P e é paralela à reta s . As retas t e r não são coincidentes, pois r não está contida no plano α e t está contida no plano α . Como as retas t e r não são coincidentes e o ponto P pertence às retas t e r , as retas t e r são concorrentes. Porém, tem-se que t é paralela a s e que s é paralela a r , pelo que as retas t e r são paralelas, o que é absurdo, pois tínhamos chegado à conclusão que as retas t e r são concorrentes. Portanto, a reta r é paralela ao plano α .

126.

Suponhamos que era possível cobrir o tabuleiro (sem as duas casas dos cantos) com as 31 peças de dominó. Cada peça cobre uma casa branca e uma casa preta. Portanto, no final, o número de casas brancas cobertas seria igual ao número de casas pretas cobertas, o que é absurdo, pois o tabuleiro completo tem igual número de casas brancas e de casas pretas e foram retiradas duas casas pretas.

As restantes resoluções, assim como as do Caderno de Exercícios, serão disponibilizadas aos professores adotantes do projeto MVT 10 a partir de setembro de 2015.

Tema 1 | Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Pág. 4

Descritor 1.16

1.1. Dado que p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira, pode concluir-se que q é verdadeira.

$$1.2. p \wedge q \Leftrightarrow f \wedge v \Leftrightarrow f$$

$$1.3. \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim f \vee v \Leftrightarrow v \vee v \Leftrightarrow v$$

$$1.4. \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim (f \vee v) \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$$

$$1.5. \sim (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim f \wedge v) \Leftrightarrow \sim (v \wedge v) \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$$

$$1.6. (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (f \Rightarrow \sim v) \Leftrightarrow (f \Rightarrow f) \Leftrightarrow v$$

$$1.7. (\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim v \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow v$$

Pág. 5

Descritor 1.16

$$2.1. \sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \wedge q \Leftrightarrow f \wedge q \Leftrightarrow f$$

$$2.2. \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow v \vee q \Leftrightarrow v$$

$$2.3. \sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

$$2.4. [\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow (\text{considerando o resultado anterior})$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge f \Leftrightarrow f$$

$$2.5. [p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [v \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v$$

3.1.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \text{ é falsa}$$

$\Downarrow$

$$p \text{ é verdadeira e } q \Rightarrow r \text{ é falsa}$$

$\Downarrow$

$$p \text{ é verdadeira e } q \text{ é verdadeira e } r \text{ é falsa}$$

3.2.

$$\sim(p \Rightarrow q) \wedge r \text{ é verdadeira}$$

$\Downarrow$

$$\sim(p \Rightarrow q) \text{ é verdadeira e } r \text{ é verdadeira}$$

$\Downarrow$

$$p \Rightarrow q \text{ é falsa e } r \text{ é verdadeira}$$

$\Downarrow$

$$p \text{ é verdadeira e } q \text{ é falsa e } r \text{ é verdadeira}$$

4.

$$\begin{aligned} & (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & (p \Rightarrow \sim q) \text{ é verdadeira e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira e } p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & (V \Rightarrow \sim q) \text{ é verdadeira e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira e } p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & \sim q \text{ é verdadeira e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira e } p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & q \text{ é falsa e } \sim r \Rightarrow F \text{ é verdadeira e } p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & q \text{ é falsa e } \sim r \text{ é falsa e } p \text{ é verdadeira} \\ & \Downarrow \\ & q \text{ é falsa e } r \text{ é verdadeira e } p \text{ é verdadeira} \end{aligned}$$

Pág. 6

Descritores 2.3 e 2.5

- 1.1.** $x = x$ é uma condição universal
 $x \neq x$ é uma condição impossível
 $x \in \mathbb{N}$ é uma condição possível
 $x \notin \mathbb{R}$ é uma condição possível
 $x \in \emptyset$ é uma condição impossível
 $x \notin \emptyset$ é uma condição universal

1.2.1. $x \neq x \wedge x \in \mathbb{N}$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, possível)

1.2.2. $x = x \vee x \in \emptyset$ é uma condição universal por ser a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, impossível)

1.2.3. $x \in \mathbb{N} \vee x \in \emptyset$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, impossível)

1.2.4. $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{N}$ é uma condição universal por ser a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, possível)

1.2.5. $x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, possível)

2. Sejam:

- $c(x)$ uma condição qualquer
 $p(x)$ uma condição possível
 $u(x)$ uma condição universal
 $i(x)$ uma condição impossível

i. A disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.

Demonstração:

Se $u(x)$ é uma condição universal, então $\forall x, u(x)$ é uma proposição verdadeira pelo que, para cada concretização, a , da variável, $u(a)$ é uma proposição verdadeira pelo que também $u(a) \vee c(a)$ é uma

proposição verdadeira, ou seja, $\forall x, u(x) \vee c(x)$ é uma proposição verdadeira pelo que, finalmente, $u(x) \vee c(x)$ é uma condição universal.

ii. A disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível.

Demonstração:

Se $p(x)$ é uma condição possível, então $\exists x: p(x)$ é uma proposição verdadeira pelo que existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual $p(a)$ é uma proposição verdadeira pelo que também $p(a) \vee c(a)$ é uma proposição verdadeira, ou seja,

$\exists: p(x) \vee c(x)$ é uma proposição verdadeira pelo que, finalmente, $p(x) \vee c(x)$ é uma condição possível.

iii. A conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.

Demonstração:

Se $i(x)$ é uma condição impossível, então $\exists x: i(x)$ é uma proposição falsa pelo que, para qualquer concretização, a , da variável, $i(a)$ é uma proposição falsa pelo que também $i(a) \wedge c(a)$ é uma proposição falsa para qualquer concretização, a , da variável, ou seja, $\exists: i(x) \wedge c(x)$ é uma proposição falsa pelo que, finalmente, $i(x) \wedge c(x)$ é uma condição impossível.

Pág. 8

Descritores 2.7 e 2.8

1.1. $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ é universal porque a proposição $\forall x \in]2, +\infty[, x^2 > 4$ é verdadeira.

1.2. $(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftarrow x = 1$ é universal porque a proposição $\forall x \in \{1\}, (x - 1)(x - 2) = 0$ é verdadeira.

1.3. $x = 3 \Rightarrow x^4 = 81$ é universal porque a proposição $\forall x \in \{3\}, x^4 = 81$ é verdadeira.

1.4. $x > 3 \Rightarrow x^3 > 27$ é universal porque a proposição $\forall x \in]3, +\infty[, x^3 > 27$ é verdadeira.

1.5. $|x + 3| < 2 \Rightarrow x + 3 < 2$

Seja $k = x + 3$.

$|k| < 2 \Rightarrow k < 2$ é universal porque a proposição $\forall k \in]-2, 2[, k < 2$ é verdadeira.

2. Para $x \in \mathbb{R}$: $x^2 = -2$ é uma condição impossível

$x^2 > -2$ é uma condição universal

$x^2 \geq 4$ é uma condição possível

2.1. $x^2 = -2 \wedge x^2 \geq 4$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, possível).

2.2. $x^2 = -2 \vee x^2 \geq 4$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, impossível).

2.3. $x^2 = -2 \wedge x^2 > -2$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, universal).

2.4. $x^2 \geq -2$ é uma condição universal pois é equivalente a $x^2 > -2 \vee x^2 = -2$ sendo, portanto, a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, impossível).

Pág. 8

Descritor 2.9

1.1. «Todos os colegas da minha turma têm irmãos.»

1.2. «Há pelo menos uma pessoa que está nesta sala e não está a usar um chapéu.»

2.1. $\forall x \in A, p(x)$ é falsa porque existe um elemento no conjunto A que não é primo e

$\exists x \in A: q(x)$ é falsa porque nenhum elemento do conjunto A é múltiplo de 6.

2.2. $\sim \forall x \in A, p(x) \Leftrightarrow \exists x \in A: \sim p(x)$

Há pelo menos um número no conjunto A que não é primo.

$\sim \exists x \in A: q(x) \Leftrightarrow \forall x \in A: \sim q(x)$

Qualquer elemento do conjunto A não é múltiplo de 6.

2.3. $p(x)$ é possível porque a proposição $\exists x \in A: p(x)$ é verdadeira.

$q(x)$ é impossível porque a proposição $\exists x \in A: q(x)$ é falsa.

$\sim p(x)$ é possível porque a proposição $\exists x \in A: \sim p(x)$ é verdadeira.

$\sim q(x)$ é universal porque a proposição $\forall x \in A: \sim q(x)$ é verdadeira.

3.1. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o losango é um quadrilátero então tem as diagonais iguais.

3.2. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o número 9 é ímpar mas não é primo.

3.3. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o número 11 é um número primo formado por dois algarismos e esses algarismos não são distintos.

Pág. 9

Descritor 2.9

4. $(\forall x \in U, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x, x \in U \Rightarrow p(x))$

$\sim (\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim (x \in U \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \exists x: x \in U \wedge \sim p(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \in U: \sim p(x)$

5. Se $p(x)$ é universal em U , então, para qualquer elemento, a , de U , tem-se que $p(a)$ é verdadeira, pelo que $\sim p(a)$ é falsa para qualquer elemento, a , de U . Logo, $\sim p(a)$ é impossível em U .

Se $p(x)$ é impossível em U , então, para qualquer elemento, a , de U , tem-se que $p(a)$ é falsa, pelo que $\sim p(a)$ é verdadeira para qualquer elemento, a , de U . Logo, $\sim p(a)$ é universal em U .

6. Sejam, em U :

$c(x)$ uma condição qualquer

$p(x)$ uma condição possível

$u(x)$ uma condição universal

$i(x)$ uma condição impossível

Tem-se, para qualquer elemento, a , de U , $c(a) \vee u(a) \Leftrightarrow c(a) \vee v \Leftrightarrow v$, pelo que a condição $c(x) \vee u(x)$ é universal em U .

Se $p(x)$ é possível em U , existe pelo menos um elemento a , de U , para o qual $p(a)$ é verdadeira, pelo que $p(a) \vee c(a)$ é verdadeira. Então, $p(x) \vee c(x)$ é possível em U .

Tem-se, para qualquer elemento, a , de U , $c(a) \wedge i(a) \Leftrightarrow c(a) \wedge f \Leftrightarrow f$, pelo que a condição $c(x) \wedge i(x)$ é impossível em U .

Pág. 10

Descritores 2.19 e 2.20

1.1. A afirmação é falsa pois, por exemplo, 15 é múltiplo de 5, mas não é múltiplo de 10

1.2. A afirmação é falsa pois os quadriláteros com os lados todos iguais são os losangos e há losangos que não são quadrados.

1.3. A afirmação é falsa pois um retângulo que não seja quadrado tem os ângulos iguais mas não tem os lados iguais.

2.1. Qualquer número natural que não seja múltiplo de 10 não é múltiplo de 5.

2.2. Qualquer quadrilátero que não seja um quadrado não tem os quatro lados iguais.

2.3. Qualquer quadrilátero que não tenha os lados iguais também não tem os ângulos iguais.

3. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é: «Se um número natural n é par, o seu quadrado é par.»

Demonstração:

n é par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = (2k)^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2$ pelo que n^2 , sendo múltiplo de 4, é par.

Pág. 11

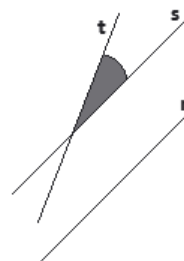
Descritores 2.19 e 2.20

4. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é «Se duas retas s e t não são paralelas entre si então uma outra reta r não pode ser simultaneamente paralela a ambas.»

Demonstração:

Sejam s e t duas retas não paralelas.

Demonstrar que r não pode ser simultaneamente paralela a ambas as retas s e t é equivalente a demonstrar que, se for paralela a uma delas, então não é paralela à outra.



Admitamos que r é paralela a s . Neste caso, como a reta t não é paralela a s , o ângulo que a reta t faz com a reta r e o ângulo que a reta t faz com a reta s são iguais por serem ângulos agudos com os lados paralelos. Logo, como esse ângulo não é nulo, r e t não são paralelas.

$$5. \sim(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim(p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x : p(x) \wedge \sim q(x)$$

6. Vamos mostrar que as proposições têm o mesmo valor lógico.

Se a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ for verdadeira, então, para cada concretização, a , da variável, a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é verdadeira. Então, como

$[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)]$, também a proposição $\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)$ é verdadeira para cada a , pelo que a proposição $\forall x, \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ é verdadeira.

Se a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ for falsa, então, existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é falsa. Então, como

$[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)]$, também a proposição $\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)$ é falsa, pelo que se pode concluir que existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é falsa pelo que a proposição $\forall x, \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ é falsa.

Pág. 11

Descritor 3.1

1.1. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição verdadeira, «7 é um número primo.», com uma proposição falsa, «2 não é um número primo.».

1.2. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição falsa, « $\sqrt{49}$ é um número irracional.», com uma proposição verdadeira, « π é um número irracional.».

1.3. A proposição é verdadeira porque é a conjunção de duas proposições verdadeiras: «70 é múltiplo de 7.» e «70 é múltiplo de 5.».

1.4. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição verdadeira, «28 é múltiplo de 7.», com uma proposição falsa, «28 é múltiplo de 8.».

1.5. A proposição é falsa porque é a disjunção de duas proposições falsas.

2.1. A proposição é falsa porque é a disjunção de duas proposições falsas: « π é igual a 3,14.» e « π é igual a 3,1416.».

2.2. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição verdadeira, «12 é um número múltiplo de 4.», com uma proposição falsa, «12 é um número múltiplo de 7.».

2.3. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição falsa, « $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3}$ », com uma proposição verdadeira, « $\frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ ».

2.4. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição verdadeira, «17 é um número primo.», com uma proposição falsa, «17 é um número par.».

2.5. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição falsa, « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional.», com uma proposição verdadeira, « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número maior que 1.».

2.6. A proposição é verdadeira porque é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

3.1. a é verdadeira, b é falsa e c é falsa.

3.2.1. $\sqrt{7}$ é um número irracional menor ou igual do que 3.

$$a \wedge \sim b \Leftrightarrow v \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$$

A proposição é verdadeira.

3.2.2. $\sqrt{7}$ não é um número irracional ou é maior do que 3

$$\sim a \vee b \Leftrightarrow \sim v \vee f \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$$

A proposição é falsa.

3.2.3. Se $\sqrt{7}$ é menor ou igual do que 3, então $1 - \sqrt{7}$ é maior ou igual do que -2 .

$$(\sim b \Rightarrow \sim c) \Leftrightarrow (\sim f \Rightarrow \sim f) \Leftrightarrow (v \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$$

A proposição é verdadeira.

4.1. $a \Leftrightarrow b$ sendo

a : «5163 é múltiplo de 3.»

b : « $5 + 1 + 6 + 3$ é múltiplo de 3.»

4.2. $\sim a \wedge \sim b$ sendo

a : «102 é um número ímpar.»

b : « $\sqrt{11}$ é um número racional.»

4.3. $a \Rightarrow (b \wedge c \wedge d)$ sendo

a : «3400 termina por dois zeros.»

b : «3400 é múltiplo de 2.»

c : «3400 é múltiplo de 5.»

d : «3400 é múltiplo de 4.»

Pág. 12

Descritor 3.1

5. $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$

6.1. $(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

6.2. Vamos construir uma tabela de verdade relativa aos antecedentes e consequentes de todas as equivalências referidas:

p	q	$p \dot{\vee} q$	$\sim(p \dot{\vee} q)$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V

Dado que as proposições $\sim(p \dot{\vee} q)$ e $p \Leftrightarrow q$, e só elas, são equivalentes, podemos concluir que a proposição c , e só ela, é verdadeira.

Pág. 12

Descritor 3.2

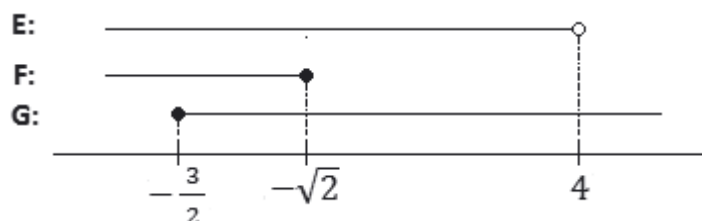
1. P é o conjunto dos números primos que são inferiores a 10, pelo que $P = \{2, 3, 5, 7\}$.

Q é o conjunto dos múltiplos de 3 que são divisores de 18, pelo que $Q = \{3, 6, 9, 18\}$.

R é o conjunto dos números naturais que são divisores de 18 ou inferiores a 10, pelo que $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

S é o conjunto dos números naturais inferiores a 10 que não são divisores de 18, pelo que $S = \{4, 5, 7, 8\}$.

2. Começamos por representar, na reta real, os conjuntos E , F e G :



2.1. $E \cup F = E =] - \infty, 4[$

2.2. $F \cup G = \mathbb{R}$

2.3. $E \cap F = F =] - \infty, -\sqrt{2}]$

$$2.4. E \cap G = \left[-\frac{3}{2}, 4\right[$$

$$2.5. E \cap (F \cap G) = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]$$

$$2.6. \bar{E} = [4, +\infty[$$

$$2.7. \bar{G} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$$

$$2.8. E \setminus F =]-\sqrt{2}, 4[$$

$$2.9. E \setminus (F \cap G) = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup]-\sqrt{2}, 4[$$

3. Como $A = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 5 < 10 \wedge n \text{ é ímpar}\}$ e $2n - 5 < 10 \Leftrightarrow n < 7,5$, tem-se

$$A = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Como $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8 = 2x\}$ e $x^2 - 8 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$, tem-se

$$B = \{-2, 4\}.$$

Como $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$ e $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$, tem-se $C =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

$$A \setminus C = A \cap \bar{C} = \{1, 3, 5, 7\} \cap]-2, 2[= \{1\}$$

$$B \cap C = \{-2, 4\}$$

Pág. 13

Descritor 3.2

4. Todas as condições apresentadas são do tipo $p(x) \Rightarrow q(x)$ pelo que cada uma delas só é falsa se existir pelo menos uma concretização, a , da variável para a qual $p(a)$ seja verdadeira e $q(a)$ seja falsa.

Analisemos cada condição no respetivo conjunto U indicado, dos possíveis valores da variável.

4.1. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer número real que seja menor do que 2 e que não seja menor do que 5.

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$$

4.2. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer número natural que seja múltiplo de 6 e que não seja par (um número é múltiplo de 6 se e só se é simultaneamente múltiplo de 3 e de 2, pelo que tem que ser par).

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \text{ não é par} \Rightarrow x \text{ não é múltiplo de } 6$$

4.3. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira, pois, por exemplo, 2 é maior do que 1 mas não é maior do que 5.

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \leq 5 \Rightarrow x \leq 1$$

4.4. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois como a hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre maior do que os catetos, não existe qualquer triângulo retângulo que seja equilátero.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um triângulo é equilátero então não é retângulo.

4.5. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira, pois, por exemplo, o triângulo cujos lados medem 1, 1 e $\sqrt{2}$, é isósceles e é retângulo ($1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2$) pelo que tem um ângulo interno reto.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um triângulo tem algum ângulo interno reto então não é isósceles.

4.6. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer losango com as diagonais iguais que não seja um quadrado.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um losango não é um quadrado então não tem as diagonais iguais.

4.7. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer triângulo obtusângulo que não tenha um ângulo externo agudo (um ângulo externo é o suplementar de um ângulo interno pelo que, se o triângulo é obtusângulo então tem um ângulo interno obtuso pelo que tem um ângulo externo agudo).

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um losango não tem um ângulo externo agudo, então não é obtusângulo.

4.8. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira pois não existe qualquer número real que seja igual a -1 e cujo quadrado não seja igual a 1

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$$

4.9. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira pois, $(-1)^2 = 1$ mas -1 não é igual a 1 .

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$$

5. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é:

Se um número natural n é divisível por 15 então é divisível por 3 .

Demonstração:

$$n \text{ é divisível por } 15 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \frac{n}{15} = k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 15k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = (3 \times 5) \times k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 3 \times (5 \times k) \text{ pelo que } n \text{ é divisível por } 3$$

As propostas de resolução dos restantes exercícios do Caderno de Apoio serão disponibilizadas aos professores adotantes do projeto MVT 10 a partir de setembro de 2015.

Pergunta 1

Pergunta:

Considera a expressão «O dia está bonito» e seleciona a opção correta.

- (A) A expressão é uma proposição verdadeira.
- (B) A expressão é uma proposição falsa.
- (C) A expressão não é uma proposição.

Resposta:

(C)

Pergunta 2

Pergunta:

Considera a expressão «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° » e seleciona a opção correta.

- (A) É uma proposição verdadeira.
- (B) É uma proposição falsa.
- (C) Não é uma proposição.

Resposta:

(A)

Pergunta 3

Pergunta:

Considera a expressão « $\sqrt[3]{8}$ » e seleciona a opção correta.

- (A) É uma proposição verdadeira.
- (B) É uma proposição falsa.
- (C) Não é uma proposição.

Resposta:

(C)

Pergunta 4

Pergunta:

Considera a expressão « $\sqrt{(-2)^2} = -2$ » e seleciona a opção correta.

- (A) É uma proposição verdadeira.
- (B) É uma proposição falsa.
- (C) Não é uma proposição.

Resposta:

(B)

Pergunta 5

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : «A Joana tem os olhos azuis.»

q : «A Joana tem o cabelo louro.»

Selecione a opção que traduz em linguagem corrente a proposição: $p \wedge \sim q$.

(A) A Joana tem os olhos azuis mas não tem o cabelo louro.

(B) A Joana nem tem os olhos azuis nem o cabelo louro.

(C) A Joana tem os olhos azuis ou o cabelo louro.

(D) A Joana não tem os olhos azuis e tem o cabelo louro.

Resposta:

(A)

Pergunta 6

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : «5 é divisor de 14.»

q : «7 é divisor de 14.»

Selecione a opção que traduz em linguagem corrente a proposição: $\sim p \wedge \sim q$.

(A) Nem 5 nem 7 são divisores de 14.

(B) 5 não é divisor de 14 mas o 7 é.

(C) Quer 5 quer 7 são divisores de 14.

(D) 5 é divisor de 14 mas o 7 não é.

Resposta:

(A)

Pergunta 7

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : « π é um número irracional.»

q : « $\sqrt{2}$ é um número irracional.»

Selecione a opção que traduz em linguagem simbólica a proposição:

«Quer π quer $\sqrt{2}$ são números irracionais.»

(A) $p \wedge q$

(B) $\sim p \wedge \sim q$

(C) $p \vee q$

(D) $\sim p \vee \sim q$

Resposta:

(A)

Pergunta 8

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : « π é um número irracional.»

q : « $\sqrt{2}$ é um número irracional.»

Selecione a opção que traduz em linguagem simbólica a proposição:

«Pelo menos um destes números, π e $\sqrt{2}$, é irracional.»

(A) $p \wedge q$

(B) $\sim p \wedge \sim q$

(C) $p \vee q$

(D) $\sim p \vee \sim q$

Resposta:

(C)

Pergunta 9

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : «O João é médico.»

q : «A Maria joga andebol.»

r : «A Maria joga futebol.»

Selecione a opção que traduz em linguagem corrente a proposição:

«O João é médico e a Maria joga futebol ou andebol.»

(A) $p \vee q \vee r$

(B) $p \wedge q \wedge r$

(C) $p \wedge (q \vee r)$

(D) $(p \wedge q) \vee r$

Resposta:

(C)

Pergunta 10

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : «A Rita toca piano.»

q : «A Rita toca violino.»

Selecione a opção que traduz em linguagem corrente a proposição:

«A Rita ou toca piano ou violino (não os dois instrumentos).»

(A) $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

(B) $p \vee q$

(C) $p \vee \sim q$

(D) $(p \vee q) \wedge \sim p \wedge \sim q$

Resposta:

(A)

Pergunta 11

Pergunta:

Considera as seguintes proposições:

p : «A Rita toca piano.»

q : «A Rita toca violino.»

Selecione a opção que traduz em linguagem corrente a proposição:

«A Rita toca pelo menos um dos dois instrumentos, piano e violino.»

(A) $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

(B) $p \vee q$

(C) $p \vee \sim q$

(D) $(p \vee q) \wedge \sim p \wedge \sim q$

Resposta:

(B)

Pergunta 12

Pergunta:

Considera a seguinte implicação: Se 20 é múltiplo de 4, então é múltiplo de 2.

Relativamente a esta implicação, selecione a opção correta.

(A) A proposição «20 é múltiplo de 4.» é o antecedente e a proposição «20 é múltiplo de 2.» é o consequente.

(B) A proposição «20 é múltiplo de 2.» é o antecedente e a proposição «20 é múltiplo de 4.» é o consequente.

Resposta:

(A)

Pergunta 13

Pergunta:

Seja p uma proposição verdadeira e seja q uma qualquer proposição.

Selecione a opção correta.

(A) $p \wedge q$ é uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de q .

(B) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de q .

(C) $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de q .

(D) $p \Rightarrow q$ é uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de q .

Resposta:

(B)

Pergunta 14

Pergunta:

Seja p uma proposição falsa e seja q uma qualquer proposição.

Selecione a opção correta.

- (A) $p \wedge q$ é uma proposição falsa, independentemente do valor lógico de q .
- (B) $p \vee q$ é uma proposição falsa, independentemente do valor lógico de q .
- (C) $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição falsa, independentemente do valor lógico de q .
- (D) $p \Rightarrow q$ é uma proposição falsa, independentemente do valor lógico de q .

Resposta:

(A)

Pergunta 15

Pergunta:

Selecione a proposição verdadeira.

- (A) $(4 = 5) \Rightarrow (4 \times 5 = 10)$
- (B) $(4 = 4) \Rightarrow (4 \times 5 = 10)$
- (C) $(4 = 5) \wedge (4 \times 5 = 10)$
- (D) $(4 = 4) \wedge (4 \times 5 = 10)$

Resposta:

(A)

Pergunta 16

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«Quer 5, quer 55, são números primos.»

- (A) Nem 5 nem 55 são números primos.
- (B) Um dos números 5 e 55 não é primo.
- (C) Quer 5, quer 55, não são números primos.
- (D) Nenhum dos números 5 e 55 é primo.

Resposta:

(B)

Pergunta 17

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«2 é divisor de pelo menos um dos números 5 e 10.»

- (A) «2 não é divisor de 5 ou não é divisor de 10.»
- (B) «2 é divisor de 5 e de 10.»
- (C) «2 não é divisor de pelo menos um dos números 5 e 10.»
- (D) «2 não é divisor nem de 5 nem de 10.»

Resposta:

(D)

Pergunta 18

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição « $3 < \pi < 4$ ».

(A) $\pi \leq 3 \vee \pi \geq 4$

(B) $\pi < 3 \vee \pi > 4$

(C) $3 > \pi > 4$

(D) $3 \geq \pi \geq 4$

Resposta:

(A)

Pergunta 19

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«Os filhos do Carlos são ambos médicos.»

(A) «Um dos filhos do Carlos não é médico e o outro é.»

(B) «Nenhum dos filhos do Carlos é médico.»

(C) «Pelo menos um dos filhos do Carlos não é médico.»

(D) «Um dos filhos do Carlos é médico e o outro não.»

Resposta:

(C)

Pergunta 20

Pergunta:

Sejam p e q as seguintes proposições:

p : «A Maria é do Benfica.»

q : «A Maria é do Porto.»

A proposição $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ é falsa.

Selecione a opção correta.

(A) A proposição p é verdadeira.

(B) A proposição q é verdadeira.

Resposta:

(A)

Pergunta 21

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«A Maria faz anos em janeiro ou fevereiro e o Manuel faz anos em novembro ou dezembro.»

- (A) «A Maria não faz anos em janeiro nem em fevereiro, ou o Manuel não faz anos em novembro nem em dezembro.»
- (B) «Nem a Maria faz anos em janeiro nem em fevereiro, nem o Manuel faz anos em novembro nem em dezembro.»
- (C) «A Maria faz anos em janeiro ou fevereiro e o Manuel não faz anos em novembro nem em dezembro.»
- (D) «A Maria não faz anos em janeiro ou fevereiro ou o Manuel não faz anos em novembro ou dezembro.»

Resposta:

(A)

Pergunta 22

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«Se π é um número irracional então $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$.»

- (A) « π é um número irracional ou $(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2$.»
- (B) « π é um número irracional e $(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2$.»
- (C) « π é um número irracional e $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$.»
- (D) « π é um número irracional ou $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$.»

Resposta:

(B)

Pergunta 23

Pergunta:

Sejam p e q duas proposições.

Selecione a proposição equivalente à proposição $p \Rightarrow q$.

- (A) $\sim p \wedge q$
- (B) $p \wedge q$
- (C) $\sim p \vee q$
- (D) $p \vee \sim q$

Resposta:

(C)

Pergunta 24

Pergunta:

Sejam p e q duas proposições.

Selecione a proposição equivalente à proposição $\sim [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$.

- (A) p
- (B) $p \wedge q$
- (C) $\sim p \vee q$
- (D) $p \vee q$

Resposta:

(D)

Pergunta 25

Pergunta:

Sejam p e q duas proposições.

Selecione a proposição equivalente à proposição $\sim (p \Rightarrow q)$.

- (A) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (B) $q \Rightarrow p$
(C) $\sim(\sim q \Rightarrow \sim p)$ (D) $\sim p \Rightarrow q$

Resposta:

(C)

Pergunta 26

Pergunta:

Selecione a proposição equivalente à negação da proposição:

«Hoje o Rui vai ao cinema se e só se não chover.»

- (A) «Hoje não vai chover e o Rui vai ao cinema ou hoje vai chover e o Rui não vai ao cinema.»
(B) «Hoje vai chover e o Rui vai ao cinema ou hoje não vai chover e o Rui não vai ao cinema.»
(C) «Hoje não vai chover nem o Rui vai ao cinema.»
(D) «Hoje vai chover e o Rui vai ao cinema.»

Resposta:

(A)

Pergunta 27

Pergunta:

Considere p , q e r três proposições.

Selecione a opção correta.

- (A) A proposição $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ é verdadeira ou falsa, consoante os valores lógicos de p , q e r .
(B) A proposição $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ é falsa, independentemente dos valores lógicos de p , q e r .
(C) A proposição $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ é verdadeira, independentemente dos valores lógicos de p , q e r .

Resposta:

(C)

Pergunta 28

Pergunta:

Sabendo que o valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow q$ é falso, seleciona o valor lógico da proposição:

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

(A) Verdade.

(B) Falso.

Resposta:

(A)

Pergunta 29

Pergunta:

Sejam p , q e r três proposições.

Sabendo que o valor lógico da proposição $\sim (p \Rightarrow \sim q) \wedge r$ é verdade, seleciona a opção correta.

(A) As proposições p e r são verdadeiras e a proposição q é falsa.

(B) A proposição r é verdadeira e as proposições p e q são falsas.

(C) As três proposições são verdadeiras.

(D) As três proposições são falsas.

Resposta:

(C)

Pergunta 30

Pergunta:

Dada uma proposição composta formada por n proposições elementares, seleciona o número de linhas que terá a sua tabela de verdade.

(A) $2n$ linhas.

(B) 2^n linhas.

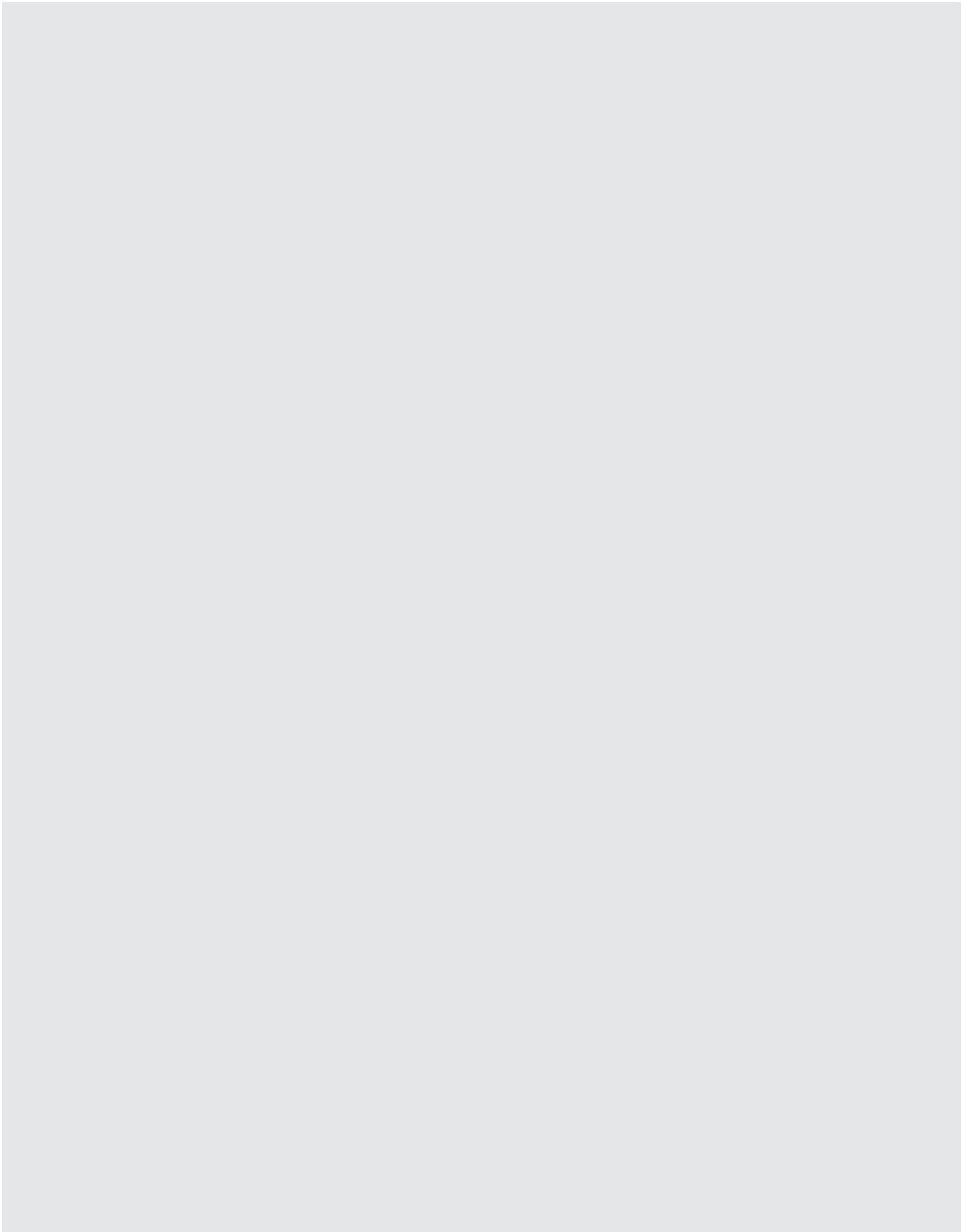
(C) n linhas.

(D) $4n$ linhas.

Resposta:

(B)

Em **20 AULA DIGITAL** estará disponível em setembro de 2015 a versão completa do banco de questões, que abrange todos os temas tratados no 10.º ano de escolaridade. Este banco estará disponível em formato editável.



AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-3802-8
		 9 781111 113802 8

