

Resoluções dos exercícios

do **Caderno de Apoio** (Metas Curriculares)

MAT 10 MATEMÁTICA A
10.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**



Texto

Tema 1 – Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos	2
Tema 2 – Álgebra	11
Tema 3 – Geometria Analítica	26
Tema 4 – Funções Reais de Variável Real	55
Tema 5 – Estatística	76

Tema 1 | Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Pág. 4

Descritor 1.16

1.1. Dado que p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira, pode concluir-se que q é verdadeira.

$$1.2. p \wedge q \Leftrightarrow f \wedge v \Leftrightarrow f$$

$$1.3. \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim f \vee v \Leftrightarrow v \vee v \Leftrightarrow v$$

$$1.4. \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim (f \vee v) \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$$

$$1.5. \sim (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim f \wedge v) \Leftrightarrow \sim (v \wedge v) \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$$

$$1.6. (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (f \Rightarrow \sim v) \Leftrightarrow (f \Rightarrow f) \Leftrightarrow v$$

$$1.7. (\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim v \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow v$$

Pág. 5

Descritor 1.16

$$2.1. \sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \wedge q \Leftrightarrow f \wedge q \Leftrightarrow f$$

$$2.2. \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow v \vee q \Leftrightarrow v$$

$$2.3. \sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

$$2.4. [\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow (\text{considerando o resultado anterior})$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge f \Leftrightarrow f$$

$$2.5. [p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [v \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v$$

3.1.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa

↓

p é verdadeira e $q \Rightarrow r$ é falsa

↓

p é verdadeira e q é verdadeira e r é falsa

3.2.

$\sim(p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira

↓

$\sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira e r é verdadeira

↓

$p \Rightarrow q$ é falsa e r é verdadeira

↓

p é verdadeira e q é falsa e r é verdadeira

4.

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p &\text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ (p \Rightarrow \sim q) \text{ é verdadeira} &\text{ e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira} \text{ e } p \text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ (V \Rightarrow \sim q) \text{ é verdadeira} &\text{ e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira} \text{ e } p \text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ \sim q \text{ é verdadeira} &\text{ e } \sim r \Rightarrow q \text{ é verdadeira} \text{ e } p \text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ q \text{ é falsa} &\text{ e } \sim r \Rightarrow F \text{ é verdadeira} \text{ e } p \text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ q \text{ é falsa} &\text{ e } \sim r \text{ é falsa} \text{ e } p \text{ é verdadeira} \\ \Downarrow \\ q \text{ é falsa} &\text{ e } r \text{ é verdadeira} \text{ e } p \text{ é verdadeira}\end{aligned}$$

Pág. 6

Descritores 2.3 e 2.5

- 1.1.** $x = x$ é uma condição universal
 $x \neq x$ é uma condição impossível
 $x \in \mathbb{N}$ é uma condição possível
 $x \notin \mathbb{R}$ é uma condição possível
 $x \in \emptyset$ é uma condição impossível
 $x \notin \emptyset$ é uma condição universal

1.2.1. $x \neq x \wedge x \in \mathbb{N}$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, possível)

1.2.2. $x = x \vee x \in \emptyset$ é uma condição universal por ser a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, impossível)

1.2.3. $x \in \mathbb{N} \vee x \in \emptyset$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, impossível)

1.2.4. $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{N}$ é uma condição universal por ser a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, possível)

1.2.5. $x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, possível)

2. Sejam:

- $c(x)$ uma condição qualquer
 $p(x)$ uma condição possível
 $u(x)$ uma condição universal
 $i(x)$ uma condição impossível

i. A disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.

Demonstração:

Se $u(x)$ é uma condição universal, então $\forall x, u(x)$ é uma proposição verdadeira, pelo que, para cada concretização, a , da variável, $u(a)$ é uma proposição verdadeira, pelo que também $u(a) \vee c(a)$ é uma

proposição verdadeira, ou seja, $\forall x, u(x) \vee c(x)$ é uma proposição verdadeira, pelo que, finalmente, $u(x) \vee c(x)$ é uma condição universal.

ii. A disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível.

Demonstração:

Se $p(x)$ é uma condição possível, então $\exists x: p(x)$ é uma proposição verdadeira, pelo que existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual $p(a)$ é uma proposição verdadeira, pelo que também $p(a) \vee c(a)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, $\exists: p(x) \vee c(x)$ é uma proposição verdadeira, pelo que, finalmente, $p(x) \vee c(x)$ é uma condição possível.

iii. A conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.

Demonstração:

Se $i(x)$ é uma condição impossível, então $\exists x: i(x)$ é uma proposição falsa, pelo que, para qualquer concretização, a , da variável, $i(a)$ é uma proposição falsa, pelo que também $i(a) \wedge c(a)$ é uma proposição falsa para qualquer concretização, a , da variável, ou seja, $\exists: i(x) \wedge c(x)$ é uma proposição falsa, pelo que, finalmente, $i(x) \wedge c(x)$ é uma condição impossível.

Pág. 8

Descritores 2.7 e 2.8

1.1. $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ é universal porque a proposição $\forall x \in]2, +\infty[, x^2 > 4$ é verdadeira.

1.2. $(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftarrow x = 1$ é universal porque a proposição $\forall x \in \{1\}, (x - 1)(x - 2) = 0$ é verdadeira.

1.3. $x = 3 \Rightarrow x^4 = 81$ é universal porque a proposição $\forall x \in \{3\}, x^4 = 81$ é verdadeira.

1.4. $x > 3 \Rightarrow x^3 > 27$ é universal porque a proposição $\forall x \in]3, +\infty[, x^3 > 27$ é verdadeira.

1.5. $|x + 3| < 2 \Rightarrow x + 3 < 2$

Seja $k = x + 3$.

$|k| < 2 \Rightarrow k < 2$ é universal porque a proposição $\forall k \in]-2, 2[, k < 2$ é verdadeira.

2. Para $x \in \mathbb{R}$: $x^2 = -2$ é uma condição impossível

$x^2 > -2$ é uma condição universal

$x^2 \geq 4$ é uma condição possível

2.1. $x^2 = -2 \wedge x^2 \geq 4$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, possível).

2.2. $x^2 = -2 \vee x^2 \geq 4$ é uma condição possível por ser a disjunção de uma condição possível com outra condição (neste caso, impossível).

2.3. $x^2 = -2 \wedge x^2 > -2$ é uma condição impossível por ser a conjunção de uma condição impossível com outra condição (neste caso, universal).

2.4. $x^2 \geq -2$ é uma condição universal pois é equivalente a $x^2 > -2 \vee x^2 = -2$, sendo, portanto, a disjunção de uma condição universal com outra condição (neste caso, impossível).

Pág. 8

Descritor 2.9

1.1. «Todos os colegas da minha turma têm irmãos.»

1.2. «Há pelo menos uma pessoa que está nesta sala e não está a usar um chapéu.»

2.1. $\forall x \in A, p(x)$ é falsa porque existe um elemento no conjunto A que não é primo e

$\exists x \in A: q(x)$ é falsa porque nenhum elemento do conjunto A é múltiplo de 6.

2.2. $\sim \forall x \in A, p(x) \Leftrightarrow \exists x \in A: \sim p(x)$

Há pelo menos um número no conjunto A que não é primo.

$\sim \exists x \in A: q(x) \Leftrightarrow \forall x \in A: \sim q(x)$

Qualquer elemento do conjunto A não é múltiplo de 6.

2.3. $p(x)$ é possível porque a proposição $\exists x \in A: p(x)$ é verdadeira.

$q(x)$ é impossível porque a proposição $\exists x \in A: q(x)$ é falsa.

$\sim p(x)$ é possível porque a proposição $\exists x \in A: \sim p(x)$ é verdadeira.

$\sim q(x)$ é universal porque a proposição $\forall x \in A: \sim q(x)$ é verdadeira.

3.1. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o losango é um quadrilátero então tem as diagonais iguais.

3.2. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o número 9 é ímpar mas não é primo.

3.3. A proposição é falsa, pois, por exemplo, o número 11 é um número primo formado por dois algarismos e esses algarismos não são distintos.

Pág. 9

Descritor 2.9

4. $(\forall x \in U, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x, x \in U \Rightarrow p(x))$

$\sim (\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim (x \in U \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \exists x: x \in U \wedge \sim p(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \in U: \sim p(x)$

5. Se $p(x)$ é universal em U , então, para qualquer elemento, a , de U , tem-se que $p(a)$ é verdadeira, pelo que $\sim p(a)$ é falsa para qualquer elemento, a , de U . Logo, $\sim p(a)$ é impossível em U .

Se $p(x)$ é impossível em U , então, para qualquer elemento, a , de U , tem-se que $p(a)$ é falsa, pelo que $\sim p(a)$ é verdadeira para qualquer elemento, a , de U . Logo, $\sim p(a)$ é universal em U .

6. Sejam, em U :

$c(x)$ uma condição qualquer

$p(x)$ uma condição possível

$u(x)$ uma condição universal

$i(x)$ uma condição impossível

Tem-se, para qualquer elemento, a , de U , $c(a) \vee u(a) \Leftrightarrow c(a) \vee v \Leftrightarrow v$, pelo que a condição $c(x) \vee u(x)$ é universal em U .

Se $p(x)$ é possível em U , existe pelo menos um elemento a , de U , para o qual $p(a)$ é verdadeira, pelo que $p(a) \vee c(a)$ é verdadeira. Então, $p(x) \vee c(x)$ é possível em U .

Tem-se, para qualquer elemento, a , de U , $c(a) \wedge i(a) \Leftrightarrow c(a) \wedge f \Leftrightarrow f$, pelo que a condição $c(x) \wedge i(x)$ é impossível em U .

Pág. 10

Descritores 2.19 e 2.20

1.1. A afirmação é falsa pois, por exemplo, 15 é múltiplo de 5, mas não é múltiplo de 10.

1.2. A afirmação é falsa pois os quadriláteros com os lados todos iguais são os losangos e há losangos que não são quadrados.

1.3. A afirmação é falsa pois um retângulo que não seja quadrado tem os ângulos iguais mas não tem os lados iguais.

2.1. Qualquer número natural que não seja múltiplo de 10 não é múltiplo de 5.

2.2. Qualquer quadrilátero que não seja um quadrado não tem os quatro lados iguais.

2.3. Qualquer quadrilátero que não tenha os lados iguais também não tem os ângulos iguais.

3. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é: «Se um número natural n é par, o seu quadrado é par.»

Demonstração:

n é par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = (2k)^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2$ pelo que n^2 , sendo múltiplo de 4, é par.

Pág. 11

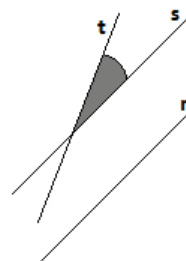
Descritores 2.19 e 2.20

4. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é «Se duas retas s e t não são paralelas entre si então uma outra reta r não pode ser simultaneamente paralela a ambas.»

Demonstração:

Sejam s e t duas retas não paralelas.

Demonstrar que r não pode ser simultaneamente paralela a ambas as retas s e t é equivalente a demonstrar que, se for paralela a uma delas, então não é paralela à outra.



Admitamos que r é paralela a s . Neste caso, como a reta t não é paralela a s , o ângulo que a reta t faz com a reta r e o ângulo que a reta t faz com a reta s são iguais por serem ângulos agudos com os lados paralelos. Logo, como esse ângulo não é nulo, r e t não são paralelas.

$$5. \sim(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim(p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x : p(x) \wedge \sim q(x)$$

6. Vamos mostrar que as proposições têm o mesmo valor lógico.

Se a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ for verdadeira, então, para cada concretização, a , da variável, a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é verdadeira. Então, como

$[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)]$, também a proposição $\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)$ é verdadeira para cada a , pelo que a proposição $\forall x, \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ é verdadeira.

Se a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ for falsa, então, existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é falsa. Então, como

$[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)]$, também a proposição $\sim q(a) \Rightarrow \sim p(a)$ é falsa, pelo que se pode concluir que existe pelo menos uma concretização, a , da variável, para a qual a proposição $p(a) \Rightarrow q(a)$ é falsa, pelo que a proposição $\forall x, \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ é falsa.

Pág. 11

Descritor 3.1

1.1. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição verdadeira, «7 é um número primo.», com uma proposição falsa, «2 não é um número primo.».

1.2. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição falsa, « $\sqrt{49}$ é um número irracional.», com uma proposição verdadeira, « π é um número irracional.».

1.3. A proposição é verdadeira porque é a conjunção de duas proposições verdadeiras: «70 é múltiplo de 7.» e «70 é múltiplo de 5.».

1.4. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição verdadeira, «28 é múltiplo de 7.», com uma proposição falsa, «28 é múltiplo de 8.».

1.5. A proposição é falsa porque é a disjunção de duas proposições falsas.

2.1. A proposição é falsa porque é a disjunção de duas proposições falsas: « π é igual a 3,14.» e « π é igual a 3,1416.».

2.2. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição verdadeira, «12 é um número múltiplo de 4.», com uma proposição falsa, «12 é um número múltiplo de 7.».

2.3. A proposição é verdadeira porque é a disjunção de uma proposição falsa, « $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3}$ », com uma proposição verdadeira, « $\frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ ».

2.4. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição verdadeira, «17 é um número primo.», com uma proposição falsa, «17 é um número par.».

2.5. A proposição é falsa porque é a conjunção de uma proposição falsa, « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional.», com uma proposição verdadeira, « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número maior que 1.».

2.6. A proposição é verdadeira porque é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

3.1. a é verdadeira, b é falsa e c é falsa.

3.2.1. $\sqrt{7}$ é um número irracional menor ou igual do que 3.

$$a \wedge \sim b \Leftrightarrow v \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$$

A proposição é verdadeira.

3.2.2. $\sqrt{7}$ não é um número irracional ou é maior do que 3

$$\sim a \vee b \Leftrightarrow \sim v \vee f \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$$

A proposição é falsa.

3.2.3. Se $\sqrt{7}$ é menor ou igual do que 3, então $1 - \sqrt{7}$ é maior ou igual do que -2 .

$$(\sim b \Rightarrow \sim c) \Leftrightarrow (\sim f \Rightarrow \sim f) \Leftrightarrow (v \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$$

A proposição é verdadeira.

4.1. $a \Leftrightarrow b$ sendo

a : «5163 é múltiplo de 3.»

b : « $5 + 1 + 6 + 3$ é múltiplo de 3.»

4.2. $\sim a \wedge \sim b$ sendo

a : «102 é um número ímpar.»

b : « $\sqrt{11}$ é um número racional.»

4.3. $a \Rightarrow (b \wedge c \wedge d)$ sendo

a : «3400 termina por dois zeros.»

b : «3400 é múltiplo de 2.»

c : «3400 é múltiplo de 5.»

d : «3400 é múltiplo de 4.»

Pág. 12

Descritor 3.1

5. $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$

6.1. $(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

6.2. Vamos construir uma tabela de verdade relativa aos antecedentes e consequentes de todas as equivalências referidas:

p	q	$p \dot{\vee} q$	$\sim(p \dot{\vee} q)$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V

Dado que as proposições $\sim(p \dot{\vee} q)$ e $p \Leftrightarrow q$, e só elas, são equivalentes, podemos concluir que a proposição c , e só ela, é verdadeira.

Pág. 12

Descritor 3.2

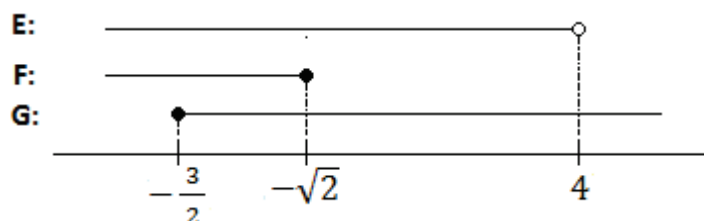
1. P é o conjunto dos números primos que são inferiores a 10, pelo que $P = \{2, 3, 5, 7\}$.

Q é o conjunto dos múltiplos de 3 que são divisores de 18, pelo que $Q = \{3, 6, 9, 18\}$.

R é o conjunto dos números naturais que são divisores de 18 ou inferiores a 10, pelo que $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

S é o conjunto dos números naturais inferiores a 10 que não são divisores de 18, pelo que $S = \{4, 5, 7, 8\}$.

2. Começamos por representar, na reta real, os conjuntos E , F e G :



2.1. $E \cup F = E =] - \infty, 4[$

2.2. $F \cup G = \mathbb{R}$

2.3. $E \cap F = F =] - \infty, -\sqrt{2}]$

$$2.4. E \cap G = \left[-\frac{3}{2}, 4\right[$$

$$2.5. E \cap (F \cap G) = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right]$$

$$2.6. \bar{E} = [4, +\infty[$$

$$2.7. \bar{G} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$$

$$2.8. E \setminus F =]-\sqrt{2}, 4[$$

$$2.9. E \setminus (F \cap G) = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup]-\sqrt{2}, 4[$$

3. Como $A = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 5 < 10 \wedge n \text{ é ímpar}\}$ e $2n - 5 < 10 \Leftrightarrow n < 7,5$, tem-se

$$A = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Como $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8 = 2x\}$ e $x^2 - 8 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$, tem-se

$$B = \{-2, 4\}.$$

Como $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$ e $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$, tem-se $C =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

$$A \setminus C = A \cap \bar{C} = \{1, 3, 5, 7\} \cap]-2, 2[= \{1\}$$

$$B \cap C = \{-2, 4\}$$

Pág. 13

Descritor 3.2

4. Todas as condições apresentadas são do tipo $p(x) \Rightarrow q(x)$, pelo que cada uma delas só é falsa se existir pelo menos uma concretização, a , da variável para a qual $p(a)$ seja verdadeira e $q(a)$ seja falsa.

Analisemos cada condição no respetivo conjunto U indicado, dos possíveis valores da variável.

4.1. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer número real que seja menor do que 2 e que não seja menor do que 5.

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$$

4.2. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer número natural que seja múltiplo de 6 e que não seja par (um número é múltiplo de 6 se e só se é simultaneamente múltiplo de 3 e de 2, pelo que tem que ser par).

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \text{ não é par} \Rightarrow x \text{ não é múltiplo de } 6$$

4.3. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira, pois, por exemplo, 2 é maior do que 1 mas não é maior do que 5.

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \leq 5 \Rightarrow x \leq 1$$

4.4. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois como a hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre maior do que os catetos, não existe qualquer triângulo retângulo que seja equilátero.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um triângulo é equilátero então não é retângulo.

4.5. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira, pois, por exemplo, o triângulo cujos lados medem 1, 1 e $\sqrt{2}$, é isósceles e é retângulo ($1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2$), pelo que tem um ângulo interno reto.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um triângulo tem algum ângulo interno reto então não é isósceles.

4.6. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer losango com as diagonais iguais que não seja um quadrado.

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um losango não é um quadrado então não tem as diagonais iguais.

4.7. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer triângulo obtusângulo que não tenha um ângulo externo agudo (um ângulo externo é o suplementar de um ângulo interno, pelo que, se o triângulo é obtusângulo então tem um ângulo interno obtuso, pelo que tem um ângulo externo agudo).

O contrarrecíproco desta condição é:

Se um losango não tem um ângulo externo agudo, então não é obtusângulo.

4.8. Esta condição converte-se sempre numa proposição verdadeira, pois não existe qualquer número real que seja igual a -1 e cujo quadrado não seja igual a 1 .

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$$

4.9. Esta condição não se converte sempre numa proposição verdadeira, pois $(-1)^2 = 1$ mas -1 não é igual a 1 .

O contrarrecíproco desta condição é:

$$x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$$

5. O contrarrecíproco da propriedade enunciada é:

Se um número natural n é divisível por 15 então é divisível por 3 .

Demonstração:

$$n \text{ é divisível por } 15 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \frac{n}{15} = k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 15k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = (3 \times 5) \times k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 3 \times (5 \times k) \text{ pelo que } n \text{ é divisível por } 3$$

Pág. 14

Descritores 1.1 e 1.2

1.1. Provemos que $a^2 < b^2$

- Para o caso em que $a = 0$, e dado que $b > 0$, tem-se, simultaneamente, $a^2 = 0$ e $b^2 > 0$, pelo que $a^2 < b^2$
- Para o caso em que $a > 0$:

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} a \times a < b \times a \\ b \times a < b \times b \end{cases} \Rightarrow a^2 < b \times a < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2$$

Provemos que $a^3 < b^3$

- Para o caso em que $a = 0$, e dado que $b > 0$, tem-se, simultaneamente, que $a^3 = 0$ e $b^3 > 0$, pelo que $a^3 < b^3$
- Para o caso em que $a > 0$:

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} a \times a^2 < b \times a^2 \\ a^2 < b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 < b \times a^2 \\ b \times a^2 < b \times b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 < b \times a^2 \\ b \times a^2 < b^3 \end{cases} \Rightarrow a^3 < b \times a^2 < b^3 \Rightarrow a^3 < b^3$$

1.2.

- Para o caso em que $a = 0$, e dado que $b > 0$, tem-se, simultaneamente, que $a^n = 0$, $a^{n+1} = 0$, $b^n > 0$ e $b^{n+1} > 0$, pelo que $a^n < b^n \Rightarrow 0 < b^n \Rightarrow 0 < b^{n+1} \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$
- Para o caso em que $a > 0$:
 $a^n < b^n \Rightarrow a^n \times a < b^n \times a$
 Por outro lado, como $a < b$, tem-se $b^n \times a < b^n \times b$
 Então, tem-se:
 $a^n < b^n \Rightarrow a^n \times a < b^n \times a < b^n \times b \Rightarrow a^{n+1} < b^n \times a < b^{n+1} \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$

2. Consideremos os números $-a$ e $-b$, simétricos respetivamente de a e de b

Como $a < b < 0$, tem-se $0 < -b < -a$

- Para o caso em que n é par:
 $0 < -b < -a \Rightarrow$ (de acordo com a propriedade enunciada)
 $\Rightarrow (-b)^n < (-a)^n \Rightarrow$ (pois n é par)
 $\Rightarrow b^n < a^n \Rightarrow a^n > b^n$
- Para o caso em que n é ímpar:
 $0 < -b < -a \Rightarrow$ (de acordo com a propriedade enunciada)
 $\Rightarrow (-b)^n < (-a)^n \Rightarrow$
 $\Rightarrow -b \times (-b)^{n-1} < -a \times (-a)^{n-1} \Rightarrow$ (pois, como n é ímpar, $n - 1$ é par)
 $\Rightarrow -b \times b^{n-1} < -a \times a^{n-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(b \times b^{n-1}) < -(a \times a^{n-1}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow -b^n < -a^n \Rightarrow b^n > a^n \Rightarrow a^n < b^n$

Pág. 14

Descritor 1.4

$$1.1. \quad (-b)^n = (-1 \times b)^n = (-1)^n \times b^n = \quad (n \text{ é par}) \\ = 1 \times b^n = b^n = a$$

1.2.

- Como $0^n = 0 \neq a$, conclui-se que 0 não é solução da equação $x^n = a$
- Seja c uma solução positiva da equação $x^n = a$
Mostremos que c tem que ser igual a b
Se fosse $c > b$, seria $c^n > b^n$ e, portanto, também se teria $c^n > a$, pelo que c não seria solução da equação $x^n = a$
Se fosse $0 < c < b$, seria $c^n < b^n$ e, portanto, também se teria $c^n < a$, pelo que c não seria solução da equação $x^n = a$
Então, tem que ser $c = b$, pelo que está provado que não existe uma solução positiva da equação $x^n = a$ diferente de b
- Seja c uma solução negativa da equação $x^n = a$
Mostremos que c tem que ser igual a $-b$
Se fosse $c < -b$, seria $c^n > (-b)^n$ e, portanto, também se teria $c^n > a$, pelo que c não seria solução da equação $x^n = a$
Se fosse $-b < c < 0$, seria $c^n < (-b)^n$ e, portanto, também se teria $c^n < a$, pelo que c não seria solução da equação $x^n = a$
Então, tem que ser $c = -b$, pelo que está provado que não existe uma solução negativa da equação $x^n = a$ diferente de $-b$

Pág. 15

Descritor 1.11

$$1.1. \quad \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$1.2. \quad \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{6}$$

$$1.3. \quad \frac{4}{2+3\sqrt{7}} = \frac{4 \times (2-3\sqrt{7})}{(2+3\sqrt{7}) \times (2-3\sqrt{7})} = \frac{8-12\sqrt{7}}{2^2 - (3\sqrt{7})^2} = \frac{8-12\sqrt{7}}{4-63} = \frac{8-12\sqrt{7}}{-59} = \frac{12\sqrt{7}-8}{59}$$

$$1.4. \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{7}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+2\sqrt{3}) \times (\sqrt{7}-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{21}-2 \times (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{21}-2 \times 3}{7-4 \times 3} = \frac{\sqrt{21}-6}{7-12} = \frac{\sqrt{21}-6}{-5} = \frac{6-\sqrt{21}}{5}$$

$$1.5. \quad \frac{2-3a}{\sqrt{a+2}+2\sqrt{a}} = \frac{(2-3a) \times (\sqrt{a+2}-2\sqrt{a})}{(\sqrt{a+2}+2\sqrt{a}) \times (\sqrt{a+2}-2\sqrt{a})} = \frac{(2-3a) \times (\sqrt{a+2}-2\sqrt{a})}{(\sqrt{a+2})^2 - (2\sqrt{a})^2} = \frac{(2-3a) \times (\sqrt{a+2}-2\sqrt{a})}{a+2-4a} = \\ = \frac{(2-3a) \times (\sqrt{a+2}-2\sqrt{a})}{-3a+2} = \sqrt{a+2} - 2\sqrt{a}$$

$$1.6. \quad \frac{1}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}) \times (a\sqrt{b}-c\sqrt{d})} = \frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b})^2 - (c\sqrt{d})^2} = \frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}$$

1.7. De acordo com a fórmula da fatorização de $A^n - B^n$, tem-se

$$(\sqrt[4]{2})^4 - 1^4 = (\sqrt[4]{2} - 1) \left((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1 \right), \quad \text{pelo que}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{2 \times ((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1)}{(\sqrt[4]{2}-1)((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1)} = \frac{2 \times ((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1)}{(\sqrt[4]{2})^4 - 1^4} = \frac{2 \times ((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1)}{2-1} = \\ = 2 \times ((\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt[4]{2})^2 + \sqrt[4]{2} + 1) = 2(\sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + 1)$$

Outro processo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt[4]{2}-1} &= \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2})^2-1} = \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \\ &= \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1) = \dots = 2(\sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + 1) \end{aligned}$$

1.8. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-(-\sqrt[3]{2})} =$ (de acordo com a fórmula da fatorização de $A^n - B^n$ e

fazendo $A = \sqrt[3]{3}$ e $B = -\sqrt[3]{2}$)

$$= \frac{(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}(-\sqrt[3]{2}) + (-\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3}(-\sqrt[3]{2}) + (-\sqrt[3]{2})^2)} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{6} + (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3})^3 - (-\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$$

Pág. 16

Descritor 2.1

1. Tem-se, para $a > 0$:

$$(\sqrt[3]{a^2})^6 = (\sqrt[3]{a^2})^3 \times (\sqrt[3]{a^2})^3 = a^2 \times a^2 = a^4 \quad \text{e} \quad (\sqrt[6]{a^4})^6 = a^4$$

Então, como $\sqrt[3]{a^2}$ e $\sqrt[6]{a^4}$ são ambos positivos e $(\sqrt[3]{a^2})^6 = (\sqrt[6]{a^4})^6$, tem-se $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$

2. Tem-se, para $a > 0$:

$$(\sqrt[n]{a^m})^{n \times m'} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^{m'} = (a^m)^{m'} = a^{m \times m'} \quad \text{e}$$

$$(\sqrt[n']{a^{m'}})^{n \times m'} = \quad \text{(pois } \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow n \times m' = n' \times m)$$

$$= (\sqrt[n']{a^{m'}})^{n' \times m} = \left((\sqrt[n']{a^{m'}})^{n'} \right)^m = (a^{m'})^m = a^{m \times m'}$$

Então, como $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n']{a^{m'}}$ são ambos positivos e $(\sqrt[n]{a^m})^{n \times m'} = (\sqrt[n']{a^{m'}})^{n \times m'}$,

tem-se $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$

Pág. 16

Descritor 2.2

1.1. Para se ter $x = 8^{1/3}$, tem que ser $x^3 = (8^{1/3})^3$ pelo que $x^3 = 8$, donde $x = 2$, ou seja $8^{1/3} = 2 = \sqrt[3]{8}$

1.2.1. De igual modo se mostra que, para se ter, para $a > 0$, $x = a^{1/3}$, tem que ser $x = \sqrt[3]{a}$

1.2.2. Tem-se, para $a > 0$:

$x = a^{1/n} \Rightarrow x^n = (a^{1/n})^n \Rightarrow x^n = a$, pelo que x é a raiz de índice n de a , ou seja, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Se n for par, $a^{1/n} \geq 0$ porque $a^{1/n}$ se pode escrever como um quadrado de um número:

$$a^{1/n} = a^{\frac{1}{2n} \times 2} = \left(a^{\frac{1}{2n}} \right)^2$$

1.3. $8^{2/3} = 8^{2 \times \frac{1}{3}} = (8^2)^{1/3} = \sqrt[3]{8^2}$ pois, como se viu em 1.2.1, $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

Simplificando, tem-se, ainda: $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

1.4.1. De igual modo se mostra que, para $a > 0$, tem que ser $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

1.4.2. Para $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, tem-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{pois, como se viu em 1.2.2, } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

2. A resposta a esta questão está apresentada no manual, ao longo do tópico «Potências de expoente racional» (consultar as páginas 91 a 94).

Pág. 16

Descritor 2.3

1. Pretende-se determinar, para cada $a > 0$, o valor de a^{-q} , sendo $q = \frac{m}{n}$ de modo que a propriedade $a^p a^q = a^{p+q}$ se mantenha válida para todos os racionais p e q

Considerando $p = -q$ na igualdade anterior, tem-se $a^{-q} a^q = a^{-q+q} = a^0 = 1$

Portanto, a^{-q} é o inverso de a^q , ou seja, tem-se $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$

Pág. 17

Descritor 2.4

$$\mathbf{1.1.} \quad a^{\frac{4}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^4} \times \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^4 \times a^3} = \sqrt[5]{a^7} = a^{\frac{7}{5}}$$

$$\mathbf{1.2.} \quad a^{\frac{4}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{8}{10}} \times a^{\frac{5}{10}} = \sqrt[10]{a^8} \times \sqrt[10]{a^5} = \sqrt[10]{a^8 \times a^5} = \sqrt[10]{a^{13}} = a^{\frac{13}{10}}$$

$$\mathbf{1.3.} \quad a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{k}{p}} = a^{\frac{mp}{np}} \times a^{\frac{nk}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}} \times \sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[np]{a^{mp} \times a^{nk}} = \sqrt[np]{a^{mp+nk}} = a^{\frac{mp+nk}{np}}$$

$$\mathbf{1.4.} \quad \left(a^{\frac{4}{5}}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(a^{\frac{4}{5}}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^2} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{(a^4)^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^8}} = \sqrt[15]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}$$

$$\mathbf{1.5.} \quad a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[4]{a^3 \times b^3} = \sqrt[4]{(ab)^3} = (ab)^{\frac{3}{4}}$$

1.6.

$$\frac{2^{1,3}}{5^{1,3}} = \frac{2^{\frac{13}{10}}}{5^{\frac{13}{10}}} = \frac{\sqrt[10]{2^{13}}}{\sqrt[10]{5^{13}}} = \sqrt[10]{\frac{2^{13}}{5^{13}}} = \sqrt[10]{\left(\frac{2}{5}\right)^{13}} = \sqrt[10]{0,4^{13}} = 0,4^{\frac{13}{10}} = 0,4^{1,3}$$

$$\mathbf{1.7.} \quad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{4}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^4}{a}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Pág. 17

Descritor 2.5

1.1. Tem-se $48 = 2^4 \times 3$, pelo que

$$3^4 \sqrt[3]{3} - 2^4 \sqrt[4]{48} = 3^4 \sqrt[3]{3} - 2^4 \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 3^4 \sqrt[3]{3} - 2 \times 2 \times \sqrt[4]{3} = 3^4 \sqrt[3]{3} - 4 \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3}$$

1.2. Tem-se $567 = 3^4 \times 7$, pelo que

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{567} \times \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} &= \sqrt[6]{3^4 \times 7} \times \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \sqrt[6]{3^4 \times 3^2 \times 7} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} = \sqrt[6]{3^6 \times 7} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2} \\ &= 3 \sqrt[6]{7} - \frac{1}{2} \sqrt[6]{7} = \frac{5}{2} \sqrt[6]{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1.3.} \quad (1 - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3} - 5)^2 &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 - ((2\sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3} + 25) = \\ &= 4 - 2\sqrt{3} - (12 - 20\sqrt{3} + 25) = 4 - 2\sqrt{3} - 12 + 20\sqrt{3} - 25 = 18\sqrt{3} - 33 \end{aligned}$$

1.4. Tem-se $54 = 2 \times 3^3$, $250 = 2 \times 5^3$ e $16 = 2^4$, pelo que

$$5\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2 \times 3^3} - \sqrt[3]{2 \times 5^3} + \sqrt[3]{2^4} = 5 \times 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3 \times 2} =$$

$$= 15\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2}$$

1.5. Tem-se $80 = 2^4 \times 5$, pelo que

$$\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{2^4 \times 5} = \sqrt[4]{5} + 2 \times 2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5} + 4\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$$

1.6. $\sqrt[6]{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \sqrt[6]{2 \times 3} \times \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{2^2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \sqrt[6]{2 \times 3 \times 2^3 \times 2^2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} =$

$$= \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{3} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = 2\sqrt[6]{3} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{3}}{2}$$

1.7. $\frac{\sqrt[3]{4 \times \sqrt{2}}}{\sqrt[6]{2}} - (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt[6]{4^2 \times \sqrt{2^3}}}{\sqrt[6]{2}} - [4 - (\sqrt{5})^2] =$

$$= \sqrt[6]{\frac{4^2 \times 2^3}{2}} - (4 - 5) = \sqrt[6]{\frac{2^4 \times 2^3}{2}} + 1 = 1 + \sqrt[6]{2^6} = 1 + 2 = 3$$

1.8. Tem-se, para $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^4}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} + \frac{a^{\frac{4}{6}}}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{9}{6} + \frac{2}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}} + a^{\frac{4}{6} - (-2)} = a^{\frac{11}{6} - \frac{5}{6}} + a^{\frac{4}{6} - (-2)}$$

$$= a^{\frac{6}{6}} + a^{\frac{2}{3} + 2} = a + a^{\frac{8}{3}} = a + \sqrt[3]{a^8}$$

1.9. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - (\sqrt[3]{2} - 1)^2 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - \left[(\sqrt[3]{2})^2 - 2\sqrt[3]{2} \times 1 + 1\right] =$

$$= \sqrt[2 \times 3]{2^2} \times \sqrt[2 \times 3]{3} \times \sqrt[2 \times 3]{3^3} \times \sqrt[2 \times 3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1 = \sqrt[6]{2^2 \times 3 \times 3^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1 =$$

$$= \sqrt[6]{3^6 \times 2^2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1 = 3 \times \sqrt[6]{2^2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1$$

$$= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} - 1 = 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1$$

2.1. Dado que $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ e $2 - \sqrt{3}$ são ambos positivos, os dois números são iguais se e só se os seus quadrados o forem.

$$\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 \Leftrightarrow 7 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

2.2. Dado que $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ e $\sqrt{5} + 2$ são ambos positivos, os dois números são iguais se e só se os seus quadrados o forem.

$$\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right)^2 = (\sqrt{5} + 2)^2 \Leftrightarrow 9 + 4\sqrt{5} = 5 + 4\sqrt{5} + 4 \Leftrightarrow 9 + 4\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}$$

Portanto a igualdade é verdadeira.

3.1. Tem-se, para $a, b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} &= a + b\sqrt{c} \Rightarrow 29 + 12\sqrt{5} = a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2c &= 29 \wedge 2ab\sqrt{c} = 12\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2c = 29 \wedge 2ab = 12 \wedge c = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 5b^2 &= 29 \wedge a = \frac{6}{b} \wedge c = 5 \Leftrightarrow \frac{36}{b^2} + 5b^2 = 29 \wedge a = \frac{6}{b} \wedge c = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 36 + 5b^4 - 29b^2 &= 0 \wedge a = \frac{6}{b} \wedge c = 5 \Leftrightarrow b^2 = 4 \wedge a = \frac{6}{b} \wedge c = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (b = 2 \vee b = -2) \wedge a &= \frac{6}{b} \wedge c = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \\ c = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2 \\ a = -3 \\ c = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

$-2 - 3\sqrt{5}$ não é solução para o problema pois designa um número negativo e $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$ designa um número positivo.

A solução procurada é a expressão $2 + 3\sqrt{5}$

3.2. Tem-se, para $a, b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= a + b\sqrt{c} \Rightarrow 11 - 6\sqrt{2} = a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2c &= 11 \wedge 2ab\sqrt{c} = -6\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2c = 11 \wedge 2ab = -6 \wedge c = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 &= 11 \wedge a = -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} + 2b^2 = 11 \wedge a = -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 + 2b^4 - 11b^2 &= 0 \wedge a = -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow (b^2 = \frac{9}{2} \vee b^2 = 1) \wedge a = -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \vee b = \frac{3\sqrt{2}}{2} \vee b = -1 \vee b = 1\right) \wedge a &= -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow (\text{dado que } b \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow (b = -1 \vee b = 1) \wedge a &= -\frac{3}{b} \wedge c = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \\ c = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \\ c = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

$-3 + \sqrt{2}$ não é solução para o problema pois designa um número negativo e $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ designa um número positivo.

A solução procurada é a expressão $3 - \sqrt{2}$

4. De forma análoga ao exercício 3 se prova que

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{e que} \quad \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = 4 - \sqrt{5}$$

Então, tem-se:

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5} - (4 - \sqrt{5}) = -1$$

Está provado que $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$ é um número inteiro.

Pág. 18

Descritor 2.5

5.

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{3\sqrt{2}}}} = \sqrt[2 \times 2 \times 2]{3\sqrt{2}} = \sqrt[24]{2} = 2^{\frac{1}{24}}$$

Pág. 18

Descritor 3.1

1. A figura ao lado ilustra a situação descrita.

Tem-se, de acordo com o teorema de Pitágoras:

$$l^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow l^2 = 18 \Leftrightarrow l = \sqrt{2 \times 3^2} \Leftrightarrow l = 3\sqrt{2}$$

2. Tem-se, de acordo com a figura ao lado:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}a$$

Seja h a altura do triângulo $[ABC]$. Tem-se:

$$h^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = (\sqrt{2}a)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

Então:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{3}{2}}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \text{ unidades quadradas}$$

$$3.1. V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

3.2. A medida da área da superfície do cubo é igual a 6 vezes a medida da área de cada face do cubo, que é, neste caso, a^2

Portanto, a medida da área da superfície do cubo é igual a $6 \times a^2 = 6 \times (\sqrt[3]{V})^2 = 6V^{\frac{2}{3}}$.

4.1. Como a medida da área da base, que é um quadrado, é igual a b , a medida do comprimento da aresta da base do prisma é igual a $\sqrt{b}$

Como altura do prisma é igual ao quádruplo da medida do comprimento da aresta da base, a altura do prisma é igual a $4\sqrt{b}$

Portanto, a medida do volume, V , do prisma é $V = b \times 4\sqrt{b} = 4bb^{\frac{1}{2}} = 4b^{\frac{3}{2}}$

$$4.2. V = 32 \Leftrightarrow 4b^{\frac{3}{2}} = 32 \Leftrightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{b^3} = 8 \Leftrightarrow b^3 = 64 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow b = 4$$

5.1. Seja R o raio da esfera e seja a a aresta do cubo. Tem-se $a = \sqrt[3]{V}$ e $R = \frac{a}{2}$

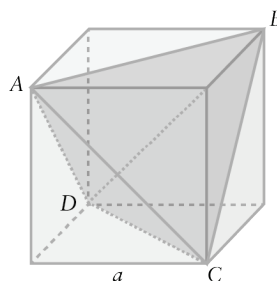
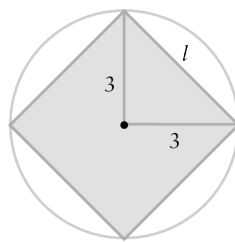
$$\text{Então, vem: } R = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$$

$$5.2. \text{ O volume da esfera é dado por } V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2}\right)^3}{3} = \frac{4\pi \frac{V}{2^3}}{3} = \frac{4\pi V}{8 \times 3} = \frac{\pi V}{6}$$

6. Seja r o raio da esfera e seja a a aresta do cubo.

Dado que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, tem-se $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, pelo que o diâmetro da superfície esférica, ou seja, a diagonal espacial do cubo é dada por $2 \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Como a diagonal espacial do cubo é igual a $\sqrt{3}a$, tem-se $\sqrt{3}a = 2 \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, pelo que $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$



7. Tem-se, de acordo com a figura ao lado:

$$\cos(60^\circ) = \frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

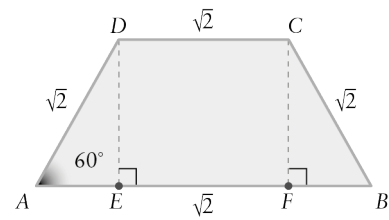
Portanto, $\overline{FB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que o perímetro do trapézio

$$\text{é igual a } 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Por outro lado, tem-se } \sin(60^\circ) = \frac{\overline{DE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Portanto, a área do trapézio é igual a

$$\frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{DE} = \frac{(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}) \times \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{12}}{4} = \frac{3 \times 2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$



8.1. Tem-se:

$$(1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 0 \quad \text{e}$$

$$(1 + \sqrt{3})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0, \quad \text{pelo que ambos os números são raízes da equação.}$$

$$\text{8.2. Tem-se: } 2\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 - \sqrt{5}\left(\sqrt[6]{5}\right)^3 - 5 = 2 \times 5 - \sqrt{5} \sqrt[6]{5^3} - 5 = 10 - 5 - \sqrt[6]{5^3 \times 5^3} = 5 - \sqrt[6]{5^3 \times 5^3} = 5 - \sqrt[6]{5^6} = 5 - 5 = 0$$

e

$$2\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right)^6 - \sqrt{5}\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right)^3 - 5 = 2\left(\frac{5}{4}\right) - \sqrt{5}\left(-\sqrt[6]{\frac{5}{4}}\right)^3 - 5 = \frac{5}{2} - \sqrt[6]{5^3} \left(\frac{-\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{4^3}}\right) - 5 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt[6]{5^3 \times 5^3}}{\sqrt[6]{(2^2)^3}} - 5 = \frac{5}{2} + \frac{5}{\sqrt[6]{2^6}} - 5 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5 = 0, \text{ pelo que ambos os números são raízes da equação.}$$

9. Tem-se, para $x > 0$, $y > 0 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\frac{2\sqrt{x} \sqrt[3]{y}}{\sqrt[n]{xy^2}} = 2\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \sqrt[3]{y} = 2\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{xy^2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} \sqrt[3]{y}}{2\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{xy^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{y}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{xy^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[6]{x^3} \sqrt[6]{y^2}}{\sqrt[6]{x^2}} = \sqrt[n]{xy^2} \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x^3 y^2}{x^2}} = \sqrt[n]{xy^2} \Leftrightarrow \sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[n]{xy^2}$$

Ora, tem-se $\sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[n]{xy^2}$, independentemente dos valores de x e de y , se e só se $n = 6$

Pág. 19

Descritor 4.2

$$\text{1.1. Tem-se: } A(x) \times B(x) = (x^3 + 3x^2 - 2)(4x^5 - x + 1) = 4x^8 - x^4 + x^3 + 12x^7 - 3x^3 + 3x^2 - 8x^5 + 2x - 2 = 4x^8 + 12x^7 - 8x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

O grau do polinómio $A(x) \times B(x)$ é 8

$$\text{1.2. } A(x) \times B(x) = (x^n + 3x^2 - 2)(4x^m - x + 1) = 4x^{n+m} - x^{n+1} + x^n + 12x^{m+2} - 3x^3 + 3x^2 - 8x^m + 2x - 2$$

Como $n > 2$ e $m > 1$, tem-se $n + m > n + 1$ e $n + m > m + 2$, pelo que o polinómio $A(x) \times B(x)$ tem grau $n + m$, ou seja, a soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$

2. O polinómio $A(x)$ tem $n + 1$ parcelas e o polinómio $B(x)$ tem $m + 1$ parcelas. Após uma primeira aplicação da propriedade distributiva, irão aparecer, por isso, $(n + 1) \times (m + 1)$ parcelas da forma $a_i x^i \times b_j x^j$, cada uma delas com grau $i + j$

O maior valor que $i + j$ toma é o que se obtém para $i = n$ e $j = m$, ou seja, $n + m$

Logo, o grau do polinómio $A(x) \times B(x)$ é $n + m$

Pág. 19

Descritor 4.5

1. Tem-se:

	a	b	c	d
1		a	$a + b$	$a + b + c$
	a	$a + b$	$a + b + c$	$a + b + c + d = R$

Vamos, então, verificar que os polinómios

$$Q(x) = ax^2 + (a + b)x + (a + b + c) \quad \text{e} \quad R = a + b + c + d$$

são, de facto, o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x - 1$, mostrando que se tem

$$Q(x) \times (x - 1) + R = A(x)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} & [ax^2 + (a + b)x + (a + b + c)](x - 1) + (a + b + c + d) = \\ & = [ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b + c)x] - [ax^2 + (a + b)x + (a + b + c)] + (a + b + c + d) = \\ & = ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b + c)x - ax^2 - ax - bx - a - b - c + a + b + c + d = \\ & = ax^3 + bx^2 + (a + b + c)x - ax - bx + d = \\ & = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

Está provado.

2. Tem-se:

	b_m	b_{m-1}	b_{m-2}	...	b_1	b_0
a		aq_{m-1}	aq_{m-2}	...	aq_1	aq_0
	$q_{m-1} = b_m$	$q_{m-2} = b_{m-1} + aq_{m-1}$	$q_{m-3} = b_{m-2} + aq_{m-2}$	...	$q_0 = b_1 + aq_1$	$b_0 + aq_0 = R$

Vamos, então, verificar que os polinómios

$$Q(x) = q_{m-1}x^{m-1} + q_{m-2}x^{m-2} + \dots + q_1x^1 + q_0 \quad \text{e} \quad R = b_0 + aq_0$$

são, de fato, o quociente e o resto da divisão inteira de $B(x)$ por $x - a$, mostrando que se tem

$$Q(x) \times (x - a) + R = B(x)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left[q_{m-1}x^{m-1} + q_{m-2}x^{m-2} + \dots + q_1x^1 + q_0 \right] (x-a) + (b_0 + aq_0) = \\
 & = q_{m-1}x^m + q_{m-2}x^{m-1} + \dots + q_1x^2 + q_0x - aq_{m-1}x^{m-1} - aq_{m-2}x^{m-2} - \dots - aq_1x^1 - aq_0 + b_0 + aq_0 = \\
 & = b_m x^m + q_{m-2}x^{m-1} + \dots + q_1x^2 + q_0x - aq_{m-1}x^{m-1} - aq_{m-2}x^{m-2} - \dots - aq_1x^1 + b_0 = \\
 & = b_m x^m + (q_{m-2} - aq_{m-1})x^{m-1} + \dots + q_1x^2 + q_0x - aq_{m-2}x^{m-2} - \dots - aq_1x^1 + b_0 = \\
 & = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + q_1x^2 + q_0x - aq_{m-2}x^{m-2} - \dots - aq_1x^1 + b_0 = \\
 & \dots \\
 & = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0
 \end{aligned}$$

Está provado.

Pág. 19

Descritor 4.11

1. Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar a ordem de multiplicidade da raiz 1 :

	1	-1	-6	12	-13	13	-6
1		1	0	-6	6	-7	6
	1	0	-6	6	-7	6	0
1		1	1	-5	1	-6	
	1	1	-5	1	-6	0	
1		1	2	-3	-2		
	1	2	-3	-2	-8		

Concluimos que 1 tem multiplicidade 2 e que $A(x) = (x-1)^2(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar a ordem de multiplicidade da raiz 2 :

	1	1	-5	1	-6
2		2	6	2	6
	1	3	1	3	0
2		2	10	22	
	1	5	11	25	

Concluimos que 2 tem multiplicidade 1 e que $A(x) = (x-1)^2(x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar a ordem de multiplicidade da raiz -3 :

	1	3	1	3
-3		-3	0	-3
	1	0	1	0
-3		-3	9	
	1	-3	10	

Concluimos que -3 tem multiplicidade 1 e que $A(x) = (x-1)^2(x-2)(x+3)(x^2 + 1)$

Como o polinómio $x^2 + 1$ não tem raízes, concluimos que $B(x) = x^2 + 1$, $m = 2$, $n = 1$ e $p = 1$

2.1. Como x_1 tem multiplicidade 2, x_2 tem multiplicidade 3, o polinómio tem grau 7 e a soma das multiplicidades é inferior ou igual ao grau do polinómio, então x_3 tem multiplicidade inferior ou igual a 2.

2.2. Se x_3 tivesse multiplicidade 1, então ter-se-ia $A(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^3(x - x_3)Q(x)$, em que, como o polinómio $A(x)$ tem grau 7, $Q(x)$ teria que ser um polinómio de grau 1 cujo zero seria diferente de x_1 , de x_2 e de x_3 . Então, o polinómio $A(x)$ teria uma raiz diferente de x_1 , de x_2 e de x_3 .

Portanto, x_3 tem multiplicidade 2.

3. A resposta a esta questão está apresentada no manual, ao longo do tópico «Fatorização de polinómios» (consultar as páginas 112 a 117).

Pág. 19

Descritor 5.1

1.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3 \quad \Big| \quad x^2 + 2 \\
 -x^5 - 2x^3 \quad \hline
 0 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 0 - 3 \\
 -3x^4 - 6x^2 \quad \hline
 0 - 4x^3 - 10x^2 + 0 - 3 \\
 + 4x^3 + 8x \quad \hline
 0 - 10x^2 + 8x - 3 \\
 + 10x^2 + 20 \quad \hline
 0 + 8x + 17
 \end{array}$$

O quociente é o polinómio $x^3 + 3x^2 - 4x - 10$ e o resto é o polinómio $8x + 17$

Pág. 20

Descritor 5.1

2.1.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -4 & 0 & -3 \\
 -2 & & -4 & 16 & -32 \\
 \hline
 & 2 & -8 & 16 & -35
 \end{array}$$

Então, o quociente é $2x^2 - 8x + 16$ e o resto é -35

2.2.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -4 & 0 & -3 \\
 0 & & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & 2 & -4 & 0 & -3
 \end{array}$$

Então, o quociente é $2x^2 - 4x$ e o resto é -3

2.3. $B(x) = 3x - 6 = 3(x - 2)$

Vamos dividir o polinómio $A(x)$ por $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$ são, respetivamente, $2x^2$ e -3 , pelo que o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $3(x - 2)$ são, respetivamente, $\frac{2x^2}{3}$ e -3

2.4. $B(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Vamos dividir o polinómio $A(x)$ por $x + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ \hline & 2 & -5 & \frac{5}{2} & -\frac{17}{4} \end{array}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ são, respetivamente,

$2x^2 - 5x + \frac{5}{2}$ e $-\frac{17}{4}$, pelo que o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ são, respetivamente, $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$ e $-\frac{17}{4}$

2.5. $B(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & & -2 & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -6 & 6 & -9 \\ 1 & & 2 & -4 & \\ \hline & 2 & -4 & 2 & \end{array}$$

Então, tem-se:

$$A(x) = (x + 1)(2x^2 - 6x + 6) - 9 = (x + 1)[(x - 1)(2x - 4) + 2] - 9 =$$

$$= (x + 1)(x - 1)(2x - 4) + 2(x + 1) - 9 = (x^2 - 1)(2x - 4) + (2x - 7)$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $x^2 - 1$ são, respetivamente, $2x - 4$ e $2x - 7$

3. $B(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Então, de acordo com o teorema do resto, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A(-1)$

Tem-se: $A(-1) = (-1)^4 - 3 \times (-1)^3 + 2 \times (-1) - 3 = 1 + 3 - 2 - 3 = -1$

4. Tem-se $P(x) = a(x + 4)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$, $a \neq 0$ e $P(-2) = 1$

$$P(-2) = 1 \Leftrightarrow a(-2 + 4)(-2 + 1)\left(-2 - \frac{1}{2}\right)(-2 - 3) = 1 \Leftrightarrow -25a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{25}$$

Então, $P(x) = -\frac{1}{25}(x + 4)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = -\frac{x^4}{25} - \frac{3x^3}{50} + \frac{12x^2}{25} + \frac{13x}{50} - \frac{6}{25}$

5. Tem-se $2x - 7 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)$ pelo que o polinómio $P(x)$ também é divisível por $x - \frac{7}{2}$

	2	-13	25	-14
$\frac{7}{2}$		7	-21	14
	2	-6	4	0

Tem-se, então $P(x) = (2x^2 - 6x + 4)\left(x - \frac{7}{2}\right)$

Vejam-se o polinómio $2x^2 - 6x + 4$ tem raízes:

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Então, tem-se:

As raízes de $P(x)$ são $\frac{7}{2}$, 1 e 2 e $P(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x - 1)(x - 2)$

6.

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a + b - 1 = 0 \\ 2(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 1 = -10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a + b - 1 = 0 \\ -2 + a - b - 1 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 + b \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7 + b + b - 1 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 6 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $a = -4$ e $b = 3$

7. O polinómio $P(x) = x^n + a^n$ é divisível por $x + a$ se e só se $P(-a) = 0$

Para n ímpar, tem-se: $P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$

Está provado.

8.1. Note-se que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $2n$ é par e $2n + 1$ é ímpar.

Então, para $a > 0$, tem-se:

$$P(a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 \quad \text{e} \quad P(-a) = (-a)^{2n+1} - (-a)^{2n} - (-a) + 1 = -a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1$$

$$\text{pelo que } P(a) + P(-a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 - a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1 = -2a^{2n} + 2$$

8.2.

- $(x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1) = (x - 1)[(x^n)^2 - 1] = (x - 1)(x^{2n} - 1) = x^{2n+1} - x - x^{2n} + 1 = x^{2n+1} - x^{2n} - x + 1 = P(x)$
- $P(1) = (1 - 1)(1^n - 1)(1^n + 1) = 0 \times 0 \times 2 = 0$, pelo que 1 é zero de P
- $P(-1) = (-1 - 1)((-1)^n - 1)((-1)^n + 1) = -2 \times [(-1)^{2n} - 1] = -2 \times [1 - 1] = -2 \times 0 = 0$, pelo que -1 é zero de P
- Para determinarmos a multiplicidade de 1, comecemos por notar que 1 é raiz de $x^n - 1$ e que se tem $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$

$$\text{Então, } P(x) = (x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1) =$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x^n + 1) =$$

$$= (x - 1)^2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x^n + 1)$$

Então, como $(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x^n + 1)$ não é divisível por $(x - 1)$, concluímos que a multiplicidade de 1 é 2

Descritores 5.2 e 5.3

1.1. $A(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

1.2. Tem-se

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

Tem-se, então $A(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$ e as raízes de $A(x)$ são -2 e 1

1.3. Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+
$(x + 2)^2$	+	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	-	0	+

Então, tem-se: $A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty, 1[\setminus \{-2\}$

1.4. $B(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6)$

$B(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$

Então, $B(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$, pelo que se tem o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
$B(x)$	+	0	+	0	-	0	+

Então, tem-se: $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty, 0[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$

2.1.

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xLeftrightarrow_{(y=x^2)} y^2 - 13y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = 9$

2.2. $y = 4 \vee y = 9 \xLeftrightarrow_{(y=x^2)} x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = -3 \vee x = 3$

3. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \xLeftrightarrow_{(y=x^2)} y^2 - 26y + 25 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 1 \times 25}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 25 \xLeftrightarrow_{(y=x^2)} x^2 = 1 \vee x^2 = 25 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -5 \vee x = 5$

4. O polinómio $B(x)$ pode ter um dos seguintes quadros de variação de sinal:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$B(x)$	-	0	+

ou

x	$-\infty$	b		2	$+\infty$
$B(x)$	-	0	-	0	+

em que b é uma raiz dupla menor do que 2

4.1. Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	2		$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$B(x)$	0/-	0	+	+	+
$3x - 7$	-	-	-	0	+
$(3x - 7)B(x)$	0/+	0	-	0	+

Então, tem-se: $(3x - 7)B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2, \frac{7}{3}\right] \cup \{x < 2 : B(x) = 0\}$

4.2. Tem-se $-x^2 - 1 = -(x^2 + 1)$, pelo que $-x^2 - 1$ é sempre negativo.

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-1 - x^2$	-	-	-
$B(x)$	0/-	0	+
$(-1 - x^2)B(x)$	0/+	0	-

Então, tem-se: $(-1 - x^2)B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\setminus \{x < 2 : B(x) = 0\}$

4.3. Tem-se: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

Então, $(x^2 - 5x + 6)B(x) = (x - 2)(x - 3)B(x)$, pelo que se tem o seguinte quadro de variação de sinal.

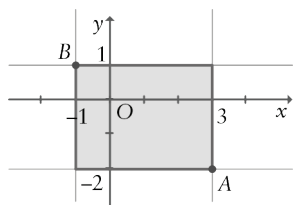
x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	0	+	+	+
$B(x)$	0/-	0	+	+	+
$(x^2 - 5x + 6)B(x)$	0/-	0	-	0	+

Então, tem-se: $(x^2 - 5x + 6)B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, 3[\cup]-\infty, 2[\setminus \{x < 2 : B(x) = 0\}$

Pág. 21

Descritor 1.2

1.1.



1.2. $\overline{AB}^2 = |3 - (-1)|^2 + |-2 - 1|^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 25$, pelo que $\overline{AB} = 5$

2. A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita ao longo do item.

2.1. $d_1 = |b_1 - a_1|$

2.2. $d_2 = |b_2 - a_2|$

2.3. $\overline{AB}^2 = (d_1)^2 + (d_2)^2$, pelo que

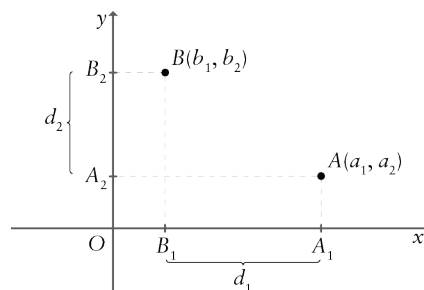
$$\overline{AB} = \sqrt{(d_1)^2 + (d_2)^2}$$

Ora, tem-se:

$$(d_1)^2 = (|b_1 - a_1|)^2 = |b_1 - a_1|^2 = (b_1 - a_1)^2$$

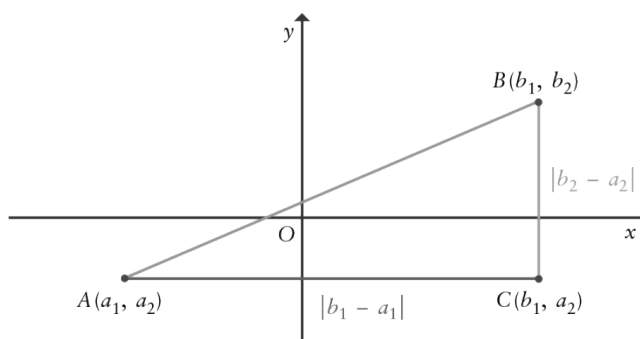
e

$$(d_2)^2 = (|b_2 - a_2|)^2 = |b_2 - a_2|^2 = (b_2 - a_2)^2, \text{ pelo que } \overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



3. Sejam A e B dois quaisquer pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy ; suponhamos que $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$.

Seja C um dos pontos que determinam, com A e B , um triângulo retângulo de hipotenusa $[AB]$ e catetos paralelos aos eixos do referencial.



Tem-se $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$.

Como os pontos A e C tem ordenadas iguais, e como os pontos B e C têm abscissas iguais, tem-se $\overline{AC} = |b_1 - a_1|$ e $\overline{CB} = |b_2 - a_2|$.

Então:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = |b_1 - a_1|^2 + |b_2 - a_2|^2$$

Portanto, $\overline{AB} = \sqrt{|b_1 - a_1|^2 + |b_2 - a_2|^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Pág. 21

Descritor 1.3

1. Tem-se $\overline{AM} = \left| \frac{a+b}{2} - a \right| = \left| \frac{a+b}{2} + \frac{-2a}{2} \right| = \left| \frac{b-a}{2} \right|$ e $\overline{MB} = \left| b - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{b-a}{2} \right|$

pelo que se conclui que $\overline{AM} = \overline{MB}$

2.1. $d(A, B) = |b - a|$

2.2. A medida da distância entre A e M é igual a metade da medida da distância entre A e B , sendo, portanto, dada por $\frac{|b-a|}{2}$

2.3. Se $b > a$, a abscissa de M é dada por $a + \frac{|b-a|}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

Se $b \leq a$, a abscissa de M é dada por $b + \frac{|b-a|}{2} = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

A abscissa de M é, então, dada por $\frac{a+b}{2}$

Pág. 21

Descritor 1.4

1.1. A ordenada de D é igual à ordenada de A e de C

A abscissa de D é igual a $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$

As coordenadas de D são $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

1.2. Tem-se, de acordo com o teorema de Tales, $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$

Ora:

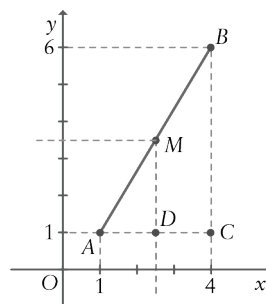
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}, \text{ pelo que } M$$

é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

A abscissa de M é igual à abscissa de D , ou seja, $\frac{5}{2}$

1.3. De modo análogo se mostra que a ordenada de M é a média aritmética das ordenadas de A e de B

A ordenada de M é igual a $\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$



Pág. 22

Descritor 1.4

2.1. Tem-se, de acordo com o teorema de Tales, $\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$

Ora:

$$\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{A'M'} = \frac{\overline{A'B'}}{2}, \text{ pelo que } M' \text{ é o ponto médio do segmento de reta } [A'B']$$

De modo análogo se mostra que M'' é o ponto médio do segmento de reta $[A''B'']$

2.2. A abscissa de M é igual à abscissa de M' , ou seja, a média aritmética das abscissas de A' e de B' , e a ordenada de M é igual à ordenada de M'' , ou seja, a média aritmética das ordenadas de A'' e de B''

Então, as coordenadas de M são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Pág. 22

Descritor 1.9

1.1. Os triângulos $[OPF_1]$ e $[OPF_2]$ são dois triângulos retângulos em que os catetos de um são iguais aos catetos do outro, pelo que as suas hipotenusas são iguais.

$$\mathbf{1.2.} \quad \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \Leftrightarrow \overline{F_1P} + \overline{F_1P} = 2a \Leftrightarrow 2\overline{F_1P} = 2a \Leftrightarrow \overline{F_1P} = a$$

$$\mathbf{1.3.} \quad \overline{OP}^2 + \overline{OF_1}^2 = \overline{F_1P}^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = a^2 - c^2 \text{ pelo que } \overline{OP} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

2.1. Tem-se $\overline{AB} = 2c$

A mediatriz de $[AB]$ é a reunião de duas semirretas com origem no ponto médio de $[AB]$ e constituídas, cada uma delas, pelos pontos equidistantes de A e de B pertencentes a cada um dos semiplanos de fronteira AB

Ora, para $a > c$, existe, em cada uma dessas semirretas, um único ponto cuja distância a A e a B é igual a a . Esse é o ponto dessa semirreta que pertence à elipse de focos A e B e eixo maior igual a $2a$, pelo que a mediatriz de $[AB]$ intersesta a elipse em dois pontos, um em cada um dos semiplanos anteriores.

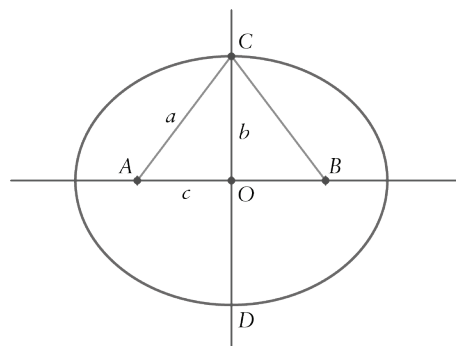
A mediatriz de $[AB]$ contém o ponto médio de $[AB]$, que é o centro da elipse por ser, igualmente, o ponto médio do eixo maior.

$$\mathbf{2.2.} \text{ Tem-se } \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{AC}^2$$

Ora

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2, \text{ pelo que } b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



Pág. 22

Descritor 1.10

1.1. A expressão $\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$ é a que dá, para cada ponto $P(x,y)$, o valor de $\overline{PF_1}$ e a expressão $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ é a que dá, para cada ponto $P(x,y)$, o valor de $\overline{PF_2}$

Então, tem que ser $d = 2a$

$$\mathbf{1.2.} \quad \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

(tem-se, para cada ponto $P(x,y)$ pertencente à elipse, $\overline{PF_2} < 2a$, pelo que, neste caso, se tem sempre $10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} > 0$ pois $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} < 10$)

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+4)^2 + y^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 8x + 16) - 100 = -20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 16x - 100 = -20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow 100 - 16x = 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5 - \frac{4x}{5} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow \quad (\text{como se tem sempre } x < 5, \text{ tem-se sempre } 5 - \frac{4x}{5} > 0) \\
&\Leftrightarrow \left(5 - \frac{4x}{5}\right)^2 = (x-4)^2 + y^2 \Leftrightarrow 25 - 8x + \frac{16x^2}{25} = x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{9x^2}{25} + y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1
\end{aligned}$$

1.3. A_1 e A_2 são os pontos da elipse que têm ordenada nula.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5, \text{ pelo que se tem } A_1(-5,0) \text{ e } A_2(5,0)$$

B_1 e B_2 são os pontos da elipse que têm abcissa nula.

$$\frac{0^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3, \text{ pelo que se tem } B_1(0,-3) \text{ e } B_2(0,3)$$

Logo, $2b = \overline{B_1B_2} = 6$

1.4. Tem-se, neste exemplo, $a = 5$, $b = 3$ e $c = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2} = 4$

Então, $b = \sqrt{a^2 - c^2} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{5^2 - 4^2} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{25 - 16}$, que é uma proposição verdadeira.

2.1. A expressão $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ é a que dá, para cada ponto $P(x,y)$, o valor de $\overline{PF_1}$ e a expressão $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ é a que dá, para cada ponto $P(x,y)$, o valor de $\overline{PF_2}$

Então, a condição $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ define o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a $2a$, ou seja, a elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior igual a $2a$

$$\mathbf{2.2.} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

(tem-se, para cada ponto $P(x,y)$ pertencente à elipse, $\overline{PF_2} < 2a$, pelo que, neste caso, se tem sempre $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} > 0$)

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 - (x^2 - 2cx + c^2) - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow 4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{cx}{a} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \quad (\text{como se tem sempre } x < a, \text{ tem-se sempre } a - \frac{cx}{a} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

2.3. Tem-se $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ pelo que $a^2 - c^2 = b^2$

Então, a equação da alínea anterior toma a forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Atividade I

a. $P(1,7)$ pertence a A pois $7 > 2 \times 1 + 1$ e $Q(2,6)$ pertence a A pois $6 > 2 \times 2 + 1$

A reta PQ tem como vetor diretor, por exemplo, $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,6) - (1,7) = (1,-1)$, pelo que o declive de PQ é igual a -1

Então, a equação reduzida da reta PQ é da forma $y = -x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1,7)$ pertence à reta, vem $7 = -1 + b$ pelo que $b = 8$

Então, a equação reduzida de PQ é $y = -x + 8$

$$\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ -x + 8 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{17}{3} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

O ponto de interseção das duas retas tem coordenadas $\left(\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$

Este ponto não pertence ao segmento de reta $[PQ]$ porque todos os pontos deste segmento têm abcissa compreendida entre 1 e 2 (que são as abcissas dos extremos do segmento) e $\frac{7}{3} > 2$

b. $R(3,1)$ pertence a B pois $1 < 2 \times 3 + 1$

A reta PR tem como vetor diretor, por exemplo, $\overrightarrow{PR} = R - P = (3,1) - (1,7) = (2,-6)$, pelo que o declive de PR é igual a -3

Então, a equação reduzida da reta PR é da forma $y = -3x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1,7)$ pertence à reta, vem $7 = -3 \times 1 + b$ pelo que $b = 10$

Então, a equação reduzida de PR é $y = -3x + 10$

$$\begin{cases} y = -3x + 10 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 10 \\ -3x + 10 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 10 \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{23}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases}$$

O ponto de interseção das duas retas tem coordenadas $\left(\frac{9}{5}, \frac{23}{5}\right)$

Este ponto pertence ao segmento de reta $[PR]$ porque pertence à reta PR e tem abcissa compreendida entre 1 e 3 (que são as abcissas dos extremos do segmento).

c.

• Admitamos que $P_1 \in A$ e $P_2 \in A$, com $y_1 < y_2$

Seja $P(a, y)$ um ponto qualquer do segmento $[P_1P_2]$. Tem-se $y_1 < y < y_2$

Se $P_1 \in A$ então $y_1 > 2a + 1$, pelo que se tem $y > y_1 > 2a + 1$

Então, para qualquer ponto $P(a, y)$ do segmento $[P_1P_2]$ não se tem $y = 2a + 1$, pelo que o segmento de reta $[P_1P_2]$ não intersesta a reta r

A demonstração é idêntica para o caso em que $P_1 \in B$ e $P_2 \in B$

• Admitamos que $P_1 \in A$ e $P_2 \in B$. Tem-se, então, $y_1 > 2a + 1$ e $y_2 < 2a + 1$, pelo que existe y compreendido entre y_1 e y_2 para o qual se tem $y = 2a + 1$

Então, existe um ponto $P(a, y)$ do segmento $[P_1P_2]$ que pertence à reta r

As coordenadas desse ponto são $(a, 2a + 1)$

A demonstração é idêntica para o caso em que $P_1 \in B$ e $P_2 \in A$

d₁. Sendo $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, então a reta P_1P_2 tem como vetor diretor, por exemplo,
 $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Então, uma equação vetorial do segmento de reta $[P_1P_2]$ é

$$(x, y) = (x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ que é equivalente a } \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) \end{cases}, s \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d_2.} \quad & \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, t \in [0, 1] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + tx_2 - tx_1 \\ y = y_1 + ty_2 - ty_1 \end{cases}, t \in [0, 1] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2 \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2 \end{cases}, t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Queremos demonstrar que se $P_1(x_1, y_1) \in A$ e $P_2(x_2, y_2) \in A$, então $P(x, y) \in A$

Ora, $P_1 \in A \Leftrightarrow y_1 > 2x_1 + 1$ e $P_2 \in A \Leftrightarrow y_2 > 2x_2 + 1$

Tem-se:

$$\begin{aligned} y &= (1 - t)y_1 + ty_2 > & (\text{pois } y_1 > 2x_1 + 1 \text{ e } y_2 > 2x_2 + 1) \\ &> (1 - t)(2x_1 + 1) + t(2x_2 + 1) = \\ &= 2x_1 + 1 - 2tx_1 - t + 2tx_2 + t = 2x_1 + 1 - 2tx_1 + 2tx_2 = 2(x_1 - tx_1 + tx_2) + 1 = \\ &= 2[(1 - t)x_1 + tx_2] + 1 = 2x + 1 \end{aligned}$$

Está provado que, se $P_1 \in A$ e $P_2 \in A$, então $y > 2x + 1$ pelo que $P(x, y) \in A$

Então, se qualquer ponto do segmento de reta $[P_1P_2]$ pertence a A , o segmento não intersesta r

$$\mathbf{d_3.} \quad P_1(x_1, y_1) \in A \xrightarrow{(s=0)} \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 > 2x_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow y > 2x + 1$$

$$P_2(x_2, y_2) \in A \xrightarrow{(s=1)} \begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 < 2x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow y < 2x + 1$$

E existe um valor de $s \in]0, 1[$ para o qual se tem $y = 2x + 1$

A esse valor corresponde o ponto $P(x, y)$ do segmento $[P_1P_2]$ que pertence à reta r

Determinemos o valor de s correspondente ao ponto de interseção:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) \\ y = 2x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) \\ y = 2[x_1 + s(x_2 - x_1)] + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) \\ y = 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 = y_1 + sy_2 - sy_1 \\ y = 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ 2sx_2 - 2sx_1 - sy_2 + sy_1 = -2x_1 + y_1 - 1 \\ y = 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ s(2x_2 - 2x_1 - y_2 + y_1) = -2x_1 + y_1 - 1 \\ y = 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ s = \frac{-2x_1 + y_1 - 1}{2x_2 - 2x_1 - y_2 + y_1} \\ y = 2x_1 + 2sx_2 - 2sx_1 + 1 \end{cases}$$

$$\text{O valor de } s \text{ procurado é } \frac{-2x_1 + y_1 - 1}{2x_2 - 2x_1 - y_2 + y_1} = \frac{2x_1 - y_1 + 1}{2x_1 - 2x_2 - y_1 + y_2}$$

e. Os conjuntos A e B são os conjuntos dos pontos do plano tais que quaisquer dois pontos de um desses conjuntos são extremos de um segmento que não intersesta a reta r e quaisquer dois pontos, um em cada um dos dois conjuntos, são extremos de um segmento que intersesta a reta r , ou seja, são os dois semiplanos abertos cuja fronteira é a reta r

Atividade II

a. Admitamos que $P(x_1, y_1) \in A$ e $Q(x_2, y_2) \in A$, com $x_1 < x_2$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do segmento $[PQ]$. Tem-se $x_1 < x < x_2$

Como $P \in A$ então $x_1 > c$, pelo que se tem $y > x_1 > c$

Então, para qualquer ponto $M(x, y)$ do segmento $[PQ]$ não se tem $x = c$, pelo que o segmento de reta $[PQ]$ não intersesta a reta r

A demonstração é idêntica para o caso em que $P \in B$ e $Q \in B$

b. Dado que $R(x_1, y_1) \in A$ e $S(x_2, y_2) \in B$, tem-se, $x_1 > c$ e $x_2 < c$, pelo que existe x compreendido entre x_1 e x_2 para o qual se tem $x = c$

Então, existe um ponto $M(x, y)$ do segmento $[RS]$ que pertence à reta r

c. Os conjuntos A e B são os conjuntos dos pontos do plano tais que quaisquer dois pontos de um desses conjuntos são extremos de um segmento que não intersesta a reta r e quaisquer dois pontos, um em cada um dos dois conjuntos, são extremos de um segmento que intersesta a reta r , ou seja, são os dois semiplanos abertos cuja fronteira é a reta r

Pág. 26

Descritor 1.13

1.1. $d = \overline{CP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

1.2. P pertence à parte interna da circunferência se e só se $\overline{CP} < r$

Tem-se $\overline{CP} < r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$

1.3. O círculo de centro $C(a, b)$ e raio r é a reunião da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r com a parte interna desta circunferência, pelo que é definido pela condição

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \vee (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

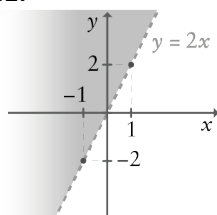
ou seja

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

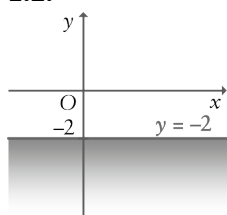
Pág. 26

Descritor 2.1

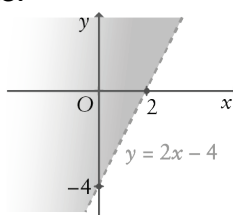
1.1.



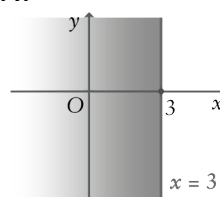
1.2.



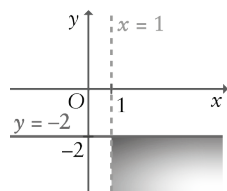
1.3.



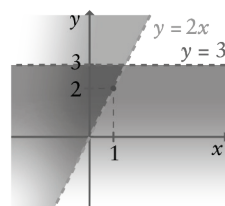
1.4.



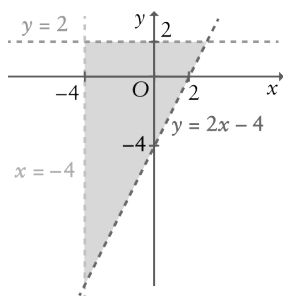
1.5.



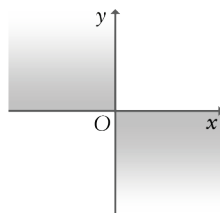
1.6.



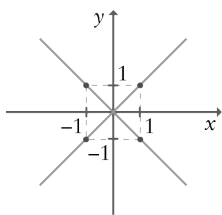
1.7. $2x - y < 4 \wedge x > -4 \wedge 2 - y > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y > 2x - 4 \wedge x > -4 \wedge y < 2$



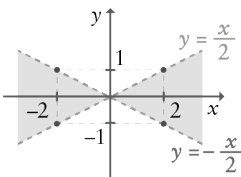
1.8. $xy < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$



1.9. $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \vee x + y = 0 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x$



1.10. $x^2 - 4y^2 > 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 2y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 2y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y < \frac{x}{2} \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y > \frac{x}{2} \\ y < -\frac{x}{2} \end{cases}$



2.1. Tem-se $(x + 2)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow [x - (-2)]^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{2}^2$, pelo que a condição define a circunferência de centro $(-2, 0)$ e raio $\sqrt{2}$

2.2. A condição define o círculo de centro $(1, -3)$ e raio 1

2.3. Tem-se

$$x^2 + y^2 + 5x + 8y = 2,75 \Leftrightarrow (x^2 + 5x) + (y^2 + 8y) = 2,75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + (y^2 + 8y + 4^2) = 2,75 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 2,75 + \frac{25}{4} + 16 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25, \text{ pelo que a condição define a circunferência de centro } \left(-\frac{5}{2}, -4\right) \text{ e raio } 5$$

2.4. Tem-se

$$4x^2 + 4y^2 + 12x + 8y = 11 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x + 2y = \frac{11}{4} \Leftrightarrow (x^2 + 3x) + (y^2 + 2y) = \frac{11}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + (y^2 + 2y + 1) = \frac{11}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{11}{4} + \frac{9}{4} + 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = 6, \text{ pelo que a condição define a circunferência de centro } \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \text{ e raio } \sqrt{6}$$

2.5. Tem-se $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, pelo que a condição define a elipse com centro na origem do referencial, com semieixo maior igual a 3 e semieixo menor igual a 2

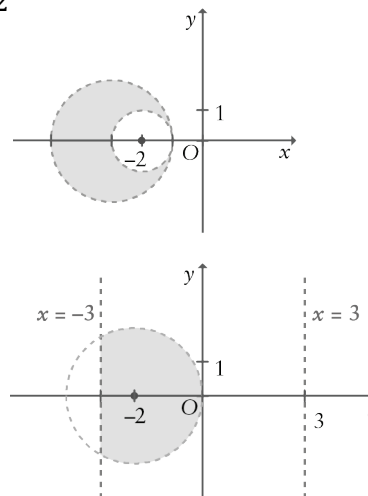
2.6. Tem-se $5x^2 + 16y^2 = 80 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{80} + \frac{16y^2}{80} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$, pelo que a condição define a elipse com centro na origem do referencial, com semieixo maior igual a 4 e semieixo menor igual a $\sqrt{5}$

2.7. Tem-se $9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, pelo que a condição define a elipse com centro na origem do referencial, com semieixo maior, paralelo ao eixo das ordenadas, igual a 3 e semieixo menor, paralelo ao eixo das abscissas, igual a 2

2.8. A condição define a coroa circular limitada pela circunferência de centro no ponto de coordenadas $(3, -1)$ e raio 1 e pela circunferência com o mesmo centro e raio 2

2.9. Tal como ilustrado na figura ao lado, a condição define a interseção do interior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e raio 2 com o exterior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e raio 1

2.10. Tem-se $(x + 2)^2 + y^2 < 4 \wedge |x| < 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 < 4 \wedge -3 < x < 3$, pelo que, tal como ilustrado na figura na lado, a condição define a interseção do interior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e raio 2 com a porção de plano estritamente compreendida entre a reta de equação $x = -3$ e a reta de equação $x = 3$



3.1. Mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(-3, 5)$ e $(1, 1)$. É definida pela equação $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

3.2. Círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, -3)$ e raio 4. É definido pela inequação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 4^2$

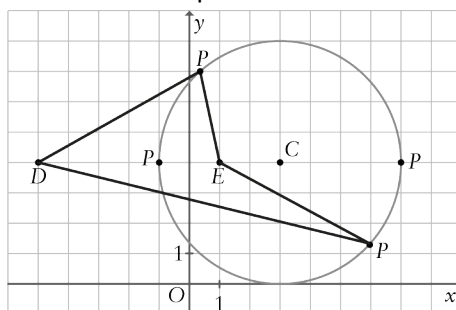
3.3. O conjunto é definido pela equação $\sqrt{(x + 5)^2 + (y - 4)^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + 5)^2 + (y - 4)^2} &= 2\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 4)^2 &= 4(x - 1)^2 + 4(y - 4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 &= 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 32y + 64 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 3y^2 - 24y + 27 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y = -9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) &= -9 + 9 + 16 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16 \end{aligned}$$

A condição define a circunferência com centro no ponto de coordenadas $(3, 4)$ e raio 4

A figura ilustra a situação apresentada. Para todos os pontos P da circunferência se tem $\overline{PD} = 2\overline{PE}$



3.4. Elipse cujos focos são os pontos de coordenadas $(-2,0)$ e $(2,0)$ e cujo eixo maior é 7. Seja a o semieixo maior da elipse, seja b o semieixo menor e seja c a semidistância focal.

Tem-se: $a = \frac{7}{2}$ e $c = 2$

Então

$$b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{49}{4} - 4 \Leftrightarrow b^2 = \frac{49-16}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{33}{4}, \quad \text{pelo que a elipse é definida pela equação}$$

$$\frac{x^2}{\frac{49}{4}} + \frac{y^2}{\frac{33}{4}} = 1$$

3.5. Retas paralelas ao eixo das abscissas e que passam, por exemplo, nos pontos de coordenadas $(0,-3)$ e $(0,1)$. São definidas pelas equações $y = -3$ e $y = 1$

Pág. 27

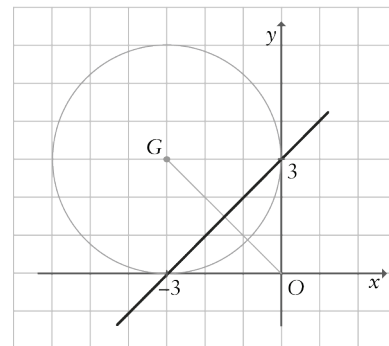
Descritor 2.1

3.6. Conjunto de pontos da referida circunferência que pertencem à mediatriz do segmento de reta $[OG]$

Tal como ilustrado na figura ao lado, esses pontos são os pontos de coordenadas $(-3,0)$ e $(0,3)$

O conjunto é definido pela condição

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$



3.7.1. Circunferência de raio 1 e centro na origem. É definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$

3.7.2. Como $x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$, podemos concluir que cada um dos pontos, $P(a,b)$, da reta definida por esta equação, tem coordenadas $(a, 5 - a)$

Como H é o ponto de coordenadas $(1,3)$, para cada um dos pontos $P(a, 5 - a)$ o ponto médio, M , do segmento de reta $[PH]$ é o ponto de coordenadas

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{5-a+3}{2}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{8-a}{2}\right)$$

Determinemos uma relação entre as coordenadas do ponto M

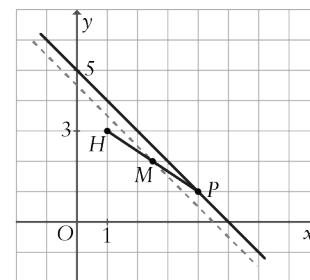
A figura do lado ilustra a situação descrita.

Como $x = \frac{a+1}{2}$, tem-se $a = 2x - 1$, pelo que, como

$$y = \frac{8-a}{2}, \text{ vem } y = \frac{8-(2x-1)}{2} \text{ ou seja } y = -x + \frac{9}{2}$$

Então, como, para cada um dos pontos P da reta definida por $x + y = 5$, o ponto médio, M , do segmento de reta $[PH]$ satisfaz a condição $y = -x + \frac{9}{2}$,

podemos concluir que o conjunto dos pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ponto $H(1,3)$ e cada um dos pontos da reta definida por $x + y = 5$ é a reta definida pela equação $y = -x + \frac{9}{2}$



4. O triângulo é equilátero se e só se $d(A, B) = d(A, C) = d(B, C)$

Tem-se:

$$d(A, B) = \sqrt{(-3 - (-5))^2 + (1 + 2\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$$

Designemos por y a ordenada do ponto C

Tem-se:

$$d(A, C) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(-1 + 5)^2 + (y - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{16 + (y - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + (y - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Confirmemos que, para $C(-1, 1)$, se tem $d(B, C) = 4$

$$d(B, C) = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (1 - 1 - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

O triângulo é equilátero se e só se a ordenada de C for igual a 1

5.

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(3 - (-3))^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow 6^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 4 + \cancel{y^2} - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

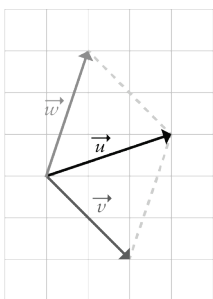
$$\Leftrightarrow 36 - 2y + 1 = -4y + 8 \Leftrightarrow -2y + 4y = 8 - 36 - 1 \Leftrightarrow 2y = -29 \Leftrightarrow y = -\frac{29}{2}$$

Portanto, $y = -\frac{29}{2}$

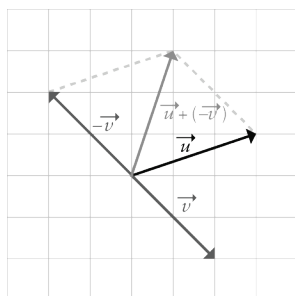
Pág. 30

Descritores 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4

1.1.



1.2.



$\vec{u} + (-\vec{v})$ é o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$, ou seja, o vetor cuja soma com $\vec{v}$ é igual a $\vec{u}$. Ora, esse é o vetor $\vec{w}$ tal como caracterizado na alínea anterior (as figuras ilustram esse facto).

Pág. 31

Descritores 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4

2. Por construção geométrica:

$\vec{u} - \vec{v}$ é o vetor $\vec{w}$ cuja soma com $\vec{v}$ é igual a $\vec{u}$ e

$\vec{u} + (-\vec{v})$ é o vetor soma de $\vec{u}$ com o vetor simétrico de $\vec{v}$

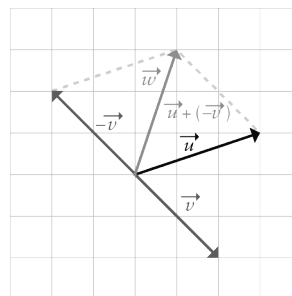
Na figura ao lado está ilustrado o facto de $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Utilizando as definições referidas:

$\vec{u} - \vec{v}$ é o vetor $\vec{w}$ cuja soma com $\vec{v}$ é igual a $\vec{u}$, ou seja, $(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} = \vec{u}$

Então, vem

$$(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-\vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{0} = \vec{u} + (-\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Pág. 31

Descritor 3.6

1.1. Tem-se, pela regra do triângulo, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

1.2. Tem-se $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \lambda$ e $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$, pelo que, como $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}}$, se pode concluir que BC e DE são paralelas.

1.3. Dado que BC e DE são paralelas, os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, pelo que $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{BC}} = \lambda$, donde se conclui que $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{BC}$

1.4. As semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DE}$ são paralelas, têm origem na reta BD e estão contidas no mesmo semiplano determinado por BD (pois os pontos C e E estão numa mesma semirreta de origem no ponto A da reta BD), pelo que têm o mesmo sentido.

Tem-se $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ pois:

- os dois vetores são colineares;
- os dois vetores têm o mesmo sentido;
- $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, com $\lambda > 0$

1.5. Tem-se, pela regra do triângulo, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, pelo que se pode concluir:

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

2. O enunciado é idêntico ao do item anterior, exceto para o facto de ser $\lambda < 0$

2.1. Tem-se, pela regra do triângulo $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

2.2. Tem-se $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = -\lambda$ e $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}} = -\lambda$, pelo que, como

$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}}$, se pode concluir que BC e DE são paralelas.

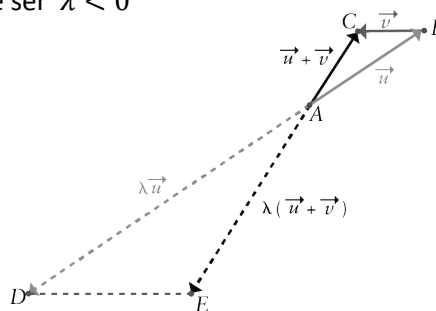
2.3. Dado que BC e DE são paralelas, os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, pelo que

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{BC}} = -\lambda, \text{ donde se conclui que } \overrightarrow{DE} = -\lambda \overrightarrow{BC}$$

2.4. As semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DE}$ são paralelas, têm origem na reta BD e estão contidas em diferentes semiplanos determinados por BD , pelo que têm sentidos opostos.

Tem-se $\overrightarrow{DE} = -\lambda \overrightarrow{BC}$, pois:

- os dois vetores são colineares;
- os dois vetores têm sentidos opostos;
- $\overrightarrow{DE} = -\lambda \overrightarrow{BC}$, com $\lambda < 0$



2.5. Tem-se, pela regra do triângulo, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, pelo que se pode concluir:

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

3.1. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, existe um número real λ : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

O ponto B pertence à reta OA se e só se $\exists k \in \mathbb{R} : B = O + k\overrightarrow{OA}$

$$\text{Ora, } B = O + \vec{v} = O + \lambda\vec{u} = O + \lambda\overrightarrow{OA}$$

Logo, B pertence à reta OA

3.2. Seja a a abcissa do ponto A , seja b a abcissa do ponto B e seja $\vec{e}$ um vetor colinear com $\overrightarrow{OA}$ cujo comprimento tem medida igual a 1 tal que $\vec{u} = a\vec{e}$ e $\vec{v} = b\vec{e}$

Vem:

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda(a\vec{e} + b\vec{e}) = \lambda[(a + b)\vec{e}] = [\lambda(a + b)]\vec{e} = (\lambda a + \lambda b)\vec{e} = (\lambda a)\vec{e} + (\lambda b)\vec{e} = \\ &= \lambda(a\vec{e}) + \lambda(b\vec{e}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}\end{aligned}$$

4. O produto de um vetor $\vec{u}$ por um escalar α , digamos $\alpha\vec{u}$, é um vetor com comprimento $|\alpha||\vec{u}|$, com a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}$ se $\alpha > 0$, e com a mesma direção e sentido contrário ao vetor $\vec{u}$ se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ então $\alpha\vec{u}$ é o vetor nulo.

Vamos então verificar que $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$, ou seja, que os vetores $\lambda(\mu\vec{u})$ e $(\lambda\mu)\vec{u}$ têm o mesmo comprimento, direção e sentido (para $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, pois se, ou λ ou μ forem nulos, temos $\lambda(\mu\vec{u}) = \vec{0}$ e $(\lambda\mu)\vec{u} = \vec{0}$)

• Quanto ao comprimento:

$$\|\lambda(\mu\vec{u})\| = |\lambda||\mu\vec{u}| = |\lambda||\mu||\vec{u}| = |\lambda\mu||\vec{u}| = \|(\lambda\mu)\vec{u}\| \text{ portanto, os dois vetores têm o mesmo comprimento.}$$

• Quanto à direção:

$\lambda(\mu\vec{u})$ e $(\lambda\mu)\vec{u}$ são ambos colineares com o vetor $\vec{u}$, sendo, portanto, colineares entre si.

• Quanto ao sentido:

Se $\lambda > 0$ e $\mu > 0$:

$\mu\vec{u}$ tem o mesmo sentido de $\vec{u}$, pelo que $\lambda(\mu\vec{u})$ também.

Por outro lado, $\lambda\mu > 0$ logo $(\lambda\mu)\vec{u}$ também tem mesmo o sentido de $\vec{u}$

Se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$:

$\mu\vec{u}$ tem o sentido contrário ao de $\vec{u}$, pelo que $\lambda(\mu\vec{u})$ tem o sentido de $\vec{u}$

Por outro lado, $\lambda\mu > 0$ logo $(\lambda\mu)\vec{u}$ também tem o sentido de $\vec{u}$

Se $\lambda > 0$ e $\mu < 0$:

$\mu\vec{u}$ tem o sentido contrário ao de $\vec{u}$, pelo que $\lambda(\mu\vec{u})$ também.

Por outro lado, $\lambda\mu < 0$ logo $(\lambda\mu)\vec{u}$ também tem o sentido contrário ao de $\vec{u}$

Se $\lambda < 0$ e $\mu > 0$:

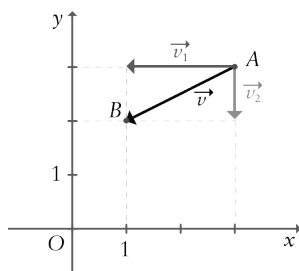
$\mu\vec{u}$ tem o sentido de $\vec{u}$, pelo que $\lambda(\mu\vec{u})$ tem o sentido contrário ao de $\vec{u}$

Por outro lado, $\lambda\mu < 0$ logo $(\lambda\mu)\vec{u}$ também tem o sentido contrário ao de $\vec{u}$

Ou seja, os vetores $\lambda(\mu\vec{u})$ e $(\lambda\mu)\vec{u}$ têm sempre o mesmo sentido.

Portanto, tem-se sempre $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

1.1.

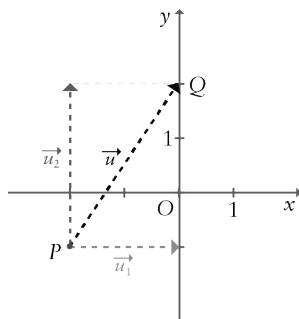


Tem-se: $\vec{v}_1 = -2\vec{e}_1$ e $\vec{v}_2 = -\vec{e}_2$

1.2. Existe uma só solução pois existe um único paralelogramo cujos lados são paralelos aos eixos do referencial que admite o segmento $[AB]$ como diagonal e, nesse paralelogramo, uma única forma de obter $\vec{v}$ por meio de uma soma de dois vetores com a direção dos lados do paralelogramo.

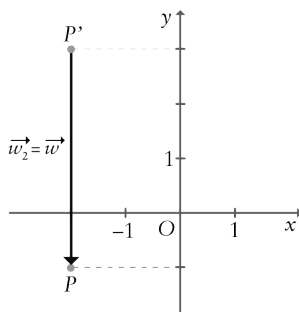
1.3. Existe, de acordo com a alínea anterior, um único par de vetores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Esse é o par $(-2\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$, a que corresponde o par $(-2, -1)$, designado por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ ».

1.4.



Tem-se: $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1$ e $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_2$, e existe um único par de vetores $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tal que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Esse é o par $(2\vec{e}_1, 3\vec{e}_2)$, a que corresponde o par $(2, 3)$, designado por «coordenadas do vetor $\vec{u}$ ».

1.5.



Tem-se: $\vec{w}_1 = 0\vec{e}_1$ e $\vec{w}_2 = -4\vec{e}_2$, e existe um único par de vetores $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ tal que $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Esse é o par $(0\vec{e}_1, -4\vec{e}_2)$, a que corresponde o par $(0, -4)$, designado por «coordenadas do vetor $\vec{w}$ ».

1.6. O ponto $O + \vec{v}$ é a extremidade do segmento orientado cuja origem é a origem do referencial e que determina o vetor $\vec{v}$

O segmento orientado, cuja origem é a origem do referencial e que determina o vetor $\vec{v}$, tem extremidade no ponto cuja abscissa é igual a $0 + (-2) = -2$ e cuja ordenada é igual a $0 + (-1) = -1$, ou seja, tem extremidade no ponto de coordenadas $(-2, -1)$, pelo que as coordenadas deste ponto são iguais às do vetor $\vec{v}$

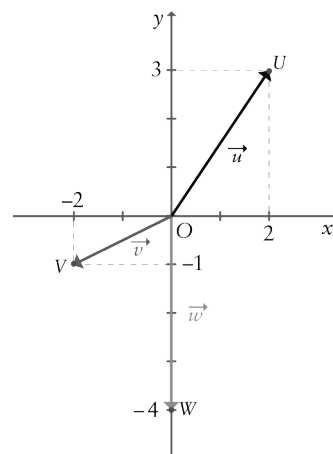
De modo idêntico se fazem as justificações pedidas para os pontos $O + \vec{u}$ e $O + \vec{w}$

Tem-se, de acordo com a figura:

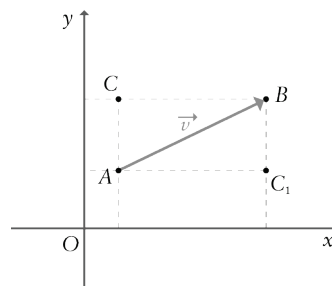
O segmento orientado $[O, V]$ determina o vetor $\vec{v}$

O segmento orientado $[O, U]$ determina o vetor $\vec{u}$

O segmento orientado $[O, W]$ determina o vetor $\vec{w}$



2.1. Fixado um ponto A e determinado o ponto B tal que $B = A + \vec{v}$, existem somente duas posições para o ponto C de tal modo que o triângulo $[ABC]$ seja retângulo em C , e, assim, tenha os catetos paralelos aos eixos do referencial. Destas duas posições, somente numa delas, aquela em que o ponto está designado por C_1 , é que se tem $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{CB}$



2.2. Existe um e um só ponto C tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, em que $\overrightarrow{AC}$ tem a direção de $\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{CB}$ tem a direção de $\vec{e}_2$

Como $\overrightarrow{AC}$ tem a direção de $\vec{e}_1$, existe um e um só número real v_1 tal que $\overrightarrow{AC} = v_1\vec{e}_1$ e, como $\overrightarrow{CB}$ tem a direção de $\vec{e}_2$, existe um e um só número real v_2 tal que $\overrightarrow{CB} = v_2\vec{e}_2$

Então, existe um e um só par de números reais (v_1, v_2) para o qual $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$

2.3. O ponto $P = O + \vec{v}$ é a extremidade do segmento orientado cuja origem é a origem do referencial e que determina o vetor $\vec{v}$

O segmento orientado, cuja origem é a origem do referencial e que determina o vetor $\vec{v}$, tem extremidade no ponto cuja abscissa é igual a $0 + v_1 = v_1$ e cuja ordenada é igual a $0 + v_2 = v_2$, ou seja, tem extremidade no ponto de coordenadas (v_1, v_2) , pelo que as coordenadas deste ponto são iguais às do vetor $\vec{v}$

Pág. 32

Descritores 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6

1.1. Dizer que $\vec{u}$ tem coordenadas (u_1, u_2) na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ significa dizer que $\vec{u}$ se escreve de forma única como $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$

Dizer que $\vec{v}$ tem coordenadas (v_1, v_2) na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ significa dizer que $\vec{v}$ se escreve de forma única como $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$

1.2. Tem-se

$$\begin{aligned} \bullet \vec{u} + \vec{v} &= u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = u_1\vec{e}_1 + v_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + v_2\vec{e}_2 = \\ &= (u_1 + v_1)\vec{e}_1 + (u_2 + v_2)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

pelo que se conclui que $\vec{u} + \vec{v}$ tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{u} - \vec{v} &= u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 - (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 - v_1\vec{e}_1 - v_2\vec{e}_2 = \\ &= u_1\vec{e}_1 - v_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 - v_2\vec{e}_2 = (u_1 - v_1)\vec{e}_1 + (u_2 - v_2)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

pelo que se conclui que $\vec{u} - \vec{v}$ tem coordenadas $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

$$\bullet \lambda\vec{u} = \lambda(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2) = (\lambda u_1)\vec{e}_1 + (\lambda u_2)\vec{e}_2, \text{ pelo que se conclui que } \lambda\vec{u} \text{ tem coordenadas } (\lambda u_1, \lambda u_2)$$

$$\bullet -\vec{u} = (-1)(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2) = (-u_1)\vec{e}_1 + (-u_2)\vec{e}_2, \text{ pelo que se conclui que } -\vec{u} \text{ tem coordenadas } (-u_1, -u_2)$$

Descritores 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6

1.3. Sejam $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$ e $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$ dois vetores não nulos.

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existe uma constante real não nula $\lambda : \vec{u} = \lambda\vec{v}$

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 = \lambda(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 = \lambda v_1\vec{e}_1 + \lambda v_2\vec{e}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u_1 = 0 \wedge v_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge v_2 = 0) \vee \left(u_1 = 0 \wedge v_1 = 0 \wedge \lambda = \frac{u_2}{v_2} \right) \vee$$

$$\vee \left(\lambda = \frac{u_1}{v_1} \wedge u_2 = 0 \wedge v_2 = 0 \right) \vee \begin{cases} \lambda = \frac{u_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{u_2}{v_2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u_1 = 0 \wedge v_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge v_2 = 0) \vee \left(u_1 = 0 \wedge v_1 = 0 \wedge \lambda = \frac{u_2}{v_2} \right) \vee$$

$$\vee \left(\lambda = \frac{u_1}{v_1} \wedge u_2 = 0 \wedge v_2 = 0 \right) \vee \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

2.1. De acordo com a regra do triângulo, tem-se, quaisquer que sejam os pontos A , B e O , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AO}$ é o simétrico de $\overrightarrow{OA}$, pelo que se tem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2.2. Pela alínea anterior $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Como sabemos que as coordenadas do vetor posição de um ponto são iguais às coordenadas do ponto, então as coordenadas de $\overrightarrow{OB}$ são iguais às coordenadas de B , ou seja, (b_1, b_2) , e as de $\overrightarrow{OA}$ são iguais às coordenadas de A , ou seja, (a_1, a_2)

Assim, as coordenadas de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (que é uma diferença de vetores) são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

2.3. Seja $\vec{v}$ um vetor de coordenadas (v_1, v_2) e P um ponto de coordenadas (x_1, x_2) em que $P = A + \vec{v}$

Por definição $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$ e, pela alínea anterior, $\overrightarrow{AP}$ tem coordenadas $(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$

Assim, $v_1 = x_1 - a_1 \wedge v_2 = x_2 - a_2 \Leftrightarrow x_1 = a_1 + v_1 \wedge x_2 = a_2 + v_2$, pelo que se conclui que as coordenadas de P são $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$

3. Num plano onde está fixado um referencial o.n. xOy e considerada a base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, seja $\vec{v}$ o vetor de coordenadas (v_1, v_2)

Tem-se, portanto, $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$

Seja A um ponto qualquer do plano e sejam C e B tais que $\overrightarrow{AC} = v_1\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{CB} = v_2\vec{e}_2$

Tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{v}$ e, como o triângulo $[ACB]$ é retângulo, pode aplicar-se o teorema de Pitágoras e

escrever $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2$, ou seja, $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2$, ou ainda:

$$\|\vec{v}\|^2 = \|v_1\vec{e}_1\|^2 + \|v_2\vec{e}_2\|^2 = (|v_1|\|\vec{e}_1\|)^2 + (|v_2|\|\vec{e}_2\|)^2 \stackrel{(1)}{=} |v_1|^2 + |v_2|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Finalmente, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

⁽¹⁾ $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

Pág. 33

Descritor 6.1

1.1. As coordenadas de $\vec{w}$ são: $2 \times (-3,4) - \frac{3}{2}(2,5) = (-6,8) - \left(3, \frac{15}{2}\right) = \left(-9, \frac{1}{2}\right)$

1.2. $\frac{1}{3}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{y} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}$

As coordenadas de $\vec{y}$ são: $\frac{1}{6}(-3,4) - \frac{1}{4}(2,5) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = \left(-1, -\frac{7}{12}\right)$

2.1. $\vec{AC} = \vec{AH} + \vec{HG} + \vec{GC} = \vec{AH} + \vec{GC} + \vec{HG} = \vec{HD} + \vec{DG} + \vec{HG} = \vec{HG} + \vec{HG} = 2\vec{HG}$
 $2\vec{HG} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, pelo que as coordenadas de $\vec{HG}$ são: $\frac{1}{2}(4,0) = (2,0)$

2.2. Coordenadas do ponto G :

$G = H + \vec{HG}$, pelo que as coordenadas de G são: $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + (2,0) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$

Coordenadas do ponto F :

$\vec{FG} = \frac{1}{2}\vec{BD}$, pelo que as coordenadas de $\vec{FG}$ são: $\frac{1}{2}(-2, -4) = (-1, -2)$

$F = G + \vec{GF} = G - \vec{FG}$, pelo que as coordenadas de F são: $\left(\frac{7}{2}, 2\right) - (-1, -2) = \left(\frac{9}{2}, 4\right)$

Coordenadas do ponto E :

$E = H + \vec{GF} = H - \vec{FG}$, pelo que as coordenadas de E são: $\left(\frac{3}{2}, 2\right) - (-1, -2) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$

2.3. $\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{BC} + \vec{EB} + \vec{CG} = \vec{BC} + \vec{EB} + \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{0} = \vec{BC}$

Tem-se:

$\vec{EG} = G - E$, pelo que as coordenadas de $\vec{EG}$ são: $\left(\frac{7}{2}, 2\right) - \left(\frac{5}{2}, 4\right) = (1, -2)$

$\vec{HD} = \frac{1}{2}\vec{EG}$, pelo que as coordenadas de $\vec{HD}$ são: $\frac{1}{2}(1, -2) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$A = H + \vec{DH}$, pelo que as coordenadas de A são: $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (1,3)$

$D = H + \vec{HD}$, pelo que as coordenadas de D são: $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = (2,1)$

$B = F + \vec{DH}$, pelo que as coordenadas de B são: $\left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (4,5)$

$C = F + \vec{HD}$, pelo que as coordenadas de C são: $\left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = (5,3)$

3. Sejam D e E os restantes dois vértices do losango.

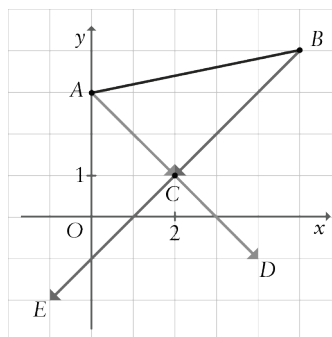
Tem-se, de acordo com o ilustrado na figura ao lado e pelo facto de o quadrilátero ser um paralelogramo:

$D = C + \vec{AC}$ e $E = C + \vec{BC}$

Ora,

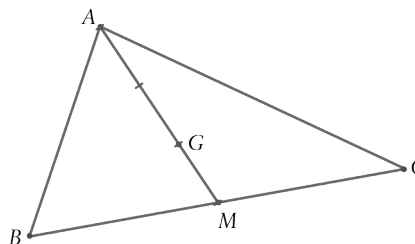
$\vec{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\vec{AC}$ são $(2,1) - (0,3) = (2, -2)$, e

$\vec{BC} = C - B$, pelo que as coordenadas de $\vec{BC}$ são $(2,1) - (5,4) = (-3, -3)$



Então, as coordenadas de D são $(2,1) + (2, -2) = (4, -1)$ e as coordenadas de E são $(2,1) + (-3, -3) = (-1, -2)$

4. Na figura do lado está representado um triângulo $[ABC]$ e os pontos M e G , nas condições do enunciado.



4.1. O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$

4.2. $\overrightarrow{AM} = M - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$

$$\text{são: } \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right) - (a_1, a_2) =$$

$$= \left(\frac{b_1+c_1-2a_1}{2}, \frac{b_2+c_2-2a_2}{2}\right)$$

4.3. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AG}$ são:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{b_1+c_1-2a_1}{2}, \frac{b_2+c_2-2a_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1-2a_1}{3}, \frac{b_2+c_2-2a_2}{3}\right)$$

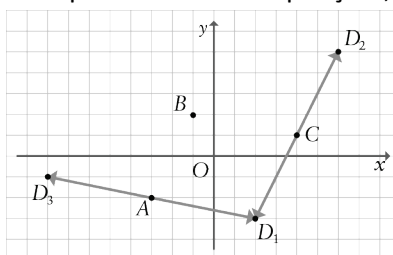
4.4. $G = A + \overrightarrow{AG}$, pelo que as coordenadas de G são:

$$(a_1, a_2) + \left(\frac{b_1+c_1-2a_1}{3}, \frac{b_2+c_2-2a_2}{3}\right) = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Pág. 34

Descritor 6.2

1. O quarto vértice do paralelogramo pode ocupar três diferentes posições, designadas na figura por D_1 , D_2 e D_3



Posição D_1 :

As diagonais do paralelogramo são $[AC]$ e $[BD]$

$$\overrightarrow{BC} = C - B, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{BC} \text{ são: } (4, 1) - (-1, 2) = (5, -1)$$

$$D = A + \overrightarrow{BC}, \text{ pelo que as coordenadas de } D \text{ são: } (-3, -2) + (5, -1) = (2, -3)$$

Posição D_2 :

As diagonais do paralelogramo são $[AD]$ e $[BC]$

$$\overrightarrow{AC} = C - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AC} \text{ são: } (4, 1) - (-3, -2) = (7, 3)$$

$$D = B + \overrightarrow{AC}, \text{ pelo que as coordenadas de } D \text{ são: } (-1, 2) + (7, 3) = (6, 5)$$

Posição D_3 :

As diagonais do paralelogramo são $[AB]$ e $[CD]$

$$D = A + \overrightarrow{CB}, \text{ pelo que as coordenadas de } D \text{ são: } (-3, -2) + (-5, 1) = (-8, -1)$$

Portanto, as coordenadas do vértice D podem ser $(2, -3)$, $(6, 5)$ ou $(-8, -1)$

2. $\vec{u}(1, k+1)$ e $\vec{v}(2k+1, 6)$ são colineares se e só se $1 \times 6 = (k+1) \times (2k+1)$

$$1 \times 6 = (k+1) \times (2k+1) \Leftrightarrow 2k^2 + 3k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{2} \vee k = 1$$

Para $k = -\frac{5}{2}$, tem-se que $\vec{u}$ tem coordenadas $(1, -\frac{3}{2})$ e $\vec{v}$ tem coordenadas $(-4, 6)$, pelo que, como $\vec{v} = -4\vec{u}$, os vetores não têm o mesmo sentido.

Para $k = 1$, tem-se que $\vec{u}$ tem coordenadas $(1, 2)$ e $\vec{v}$ tem coordenadas $(3, 6)$, pelo que, como $\vec{v} = 3\vec{u}$, os vetores têm o mesmo sentido.

3. Seja $\vec{x}$ o vetor nas condições do enunciado.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Tem-se } \vec{x} = \lambda \vec{u} \text{ com } \lambda < 0 \text{ e } |\lambda| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{15}{5} = 3$$

Então, $\lambda = -3$, pelo que, como $\vec{x} = -3\vec{v}$, as coordenadas de $\vec{x}$ são $(9, -12)$

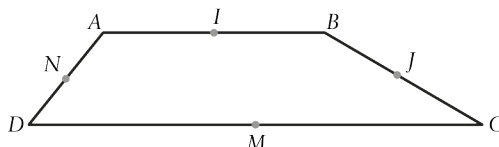
4.1. Como $[AB]$ e $[CD]$ são as bases de um trapézio, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares.

Para que se tenha $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, tem que se ter $D = C + 2\overrightarrow{AB}$ ou $D = C - 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são: $(6,4) - (2,1) = (4,3)$

Então, as coordenadas de D são $(8,7) + 2(4,3) = (16,13)$ ou são $(8,7) - 2(4,3) = (0,1)$

4.2. Na figura está desenhado o trapézio $[ABCD]$ e, nele assinalados, os pontos I , J , M e N , pontos médios dos lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$, respetivamente.



Para mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos I , J , M e N é um paralelogramo, basta mostrar que $\overrightarrow{NI}$ é colinear a $\overrightarrow{MJ}$ e que $\overrightarrow{IJ}$ é colinear a $\overrightarrow{NM}$

Determinemos as coordenadas dos pontos I , J , M e N :

$$I\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(4, \frac{5}{2}\right); J\left(\frac{6+8}{2}, \frac{7+4}{2}\right) = \left(7, \frac{11}{2}\right); M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = (4,4); N\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1,1)$$

Então, tem-se:

$$\overrightarrow{NI} = I - N = \left(4, \frac{5}{2}\right) - (1,1) = \left(3, \frac{3}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{MJ} = J - M = \left(7, \frac{11}{2}\right) - (4,4) = \left(3, \frac{3}{2}\right), \quad \text{pelo que } \overrightarrow{NI} \text{ é colinear a } \overrightarrow{MJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(7, \frac{11}{2}\right) - \left(4, \frac{5}{2}\right) = (3,3) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{NM} = M - N = (4,4) - (1,1) = (3,3) \quad \text{pelo que } \overrightarrow{IJ} \text{ é colinear a } \overrightarrow{NM}$$

Está provado que o quadrilátero $[IJMN]$ é um paralelogramo.

Pág. 34

Descritor 6.3

1.1. Ponto de interseção com o eixo das ordenadas (ponto de abcissa nula):

$$2 \times 0 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \quad \text{O ponto tem coordenadas } \left(0, -\frac{1}{3}\right)$$

Ponto de interseção com o eixo das abcissas (ponto de ordenada nula):

$$2x + 3 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{O ponto tem coordenadas } \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$1.2. (3, y) = (1, 5) + t(6, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 + 6t \\ y = 5 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = 5 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = 5 + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = \frac{19}{3} \end{cases}$$

O ponto tem ordenada $\frac{19}{3}$

$$1.3. \begin{cases} -2 = \lambda \\ 3 \times (-1) = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ 2\lambda = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Logo, o ponto de coordenadas $(-2, -1)$ pertence a p

1.4. Reta r :

Como os pontos de coordenadas $(0, -\frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$ pertencem a r , o vetor de coordenadas $(0, -\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ é um vetor diretor de r

Reta s :

O vetor de coordenadas $(6, 4)$ é um vetor diretor de s

Reta p :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 3y = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1 \times \lambda \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \lambda \end{cases}$$

O vetor de coordenadas $(1, \frac{2}{3})$ é um vetor diretor de p

1.5. Como o vetor de coordenadas $(6, 4)$ é um vetor diretor de s , o declive da reta é igual a $\frac{2}{3}$, pelo que a equação reduzida de s é da forma $y = \frac{2}{3}x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1, 5)$ pertence a s , tem-se $5 = \frac{2}{3} \times 1 + b$ pelo que $b = \frac{13}{3}$

Portanto, a equação reduzida da reta s é $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

1.6. Duas retas são paralelas se e só se os seus vetores diretores forem colineares.

Tem-se:

O vetor $\vec{r}$, de coordenadas $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, é um vetor diretor de r

O vetor $\vec{s}$, de coordenadas $(6, 4)$, é um vetor diretor de s

O vetor $\vec{p}$, de coordenadas $(1, \frac{2}{3})$, é um vetor diretor de p

Como $\vec{p} = 6\vec{s}$, os vetores $\vec{p}$ e $\vec{s}$ são colineares, pelo que as retas p e s são paralelas.

Como $\frac{1}{2} \times 4 \neq -\frac{1}{3} \times 6$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares, pelo que as retas r e s não são paralelas. Então, como as retas p e s são paralelas, as retas r e p não são paralelas.

2. O declive de n é igual ao declive de m , ou seja, é igual a $-\frac{4}{5}$

Então, a equação reduzida de n é da forma $y = -\frac{4}{5}x + b$

Determinemos o ponto de interseção da reta p com o eixo das abcissas:

$$6x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \quad \text{O ponto tem coordenadas } (\frac{1}{6}, 0)$$

Como este ponto também pertence a n , tem-se $0 = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + b$ pelo que $b = \frac{2}{15}$

Portanto, a equação reduzida da reta n é $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{15}$

3. O ponto pertence à reta se e só se as suas coordenadas satisfizerem a condição que define a reta.

$$k^2 = -5k - 6 \Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow k = -3 \vee k = -2$$

4. Começemos por determinar o ponto de interseção das retas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-1}{4} \\ 4x - 3\left(\frac{3x-1}{4}\right) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4x - \frac{9}{4}x + \frac{3}{4} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 16x - 9x + 3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 7x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 3 \times \left(-\frac{11}{7}\right) - 1 \\ x = -\frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -\frac{33}{7} - 1 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{10}{7} \\ x = -\frac{11}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

O ponto de interseção das retas é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right)$, e é um dos vértices do triângulo.

Designemo-lo por A

Na figura ao lado, que pretende ilustrar a situação, estão representadas, num plano em que se fixou um referencial o.n., as retas r e s , o ponto A e os pontos R_1 , R_2 , S_1 e S_2 , que são os pontos das retas r e s que distam 10 unidades do ponto A

Nas condições do enunciado, o triângulo pode ser:

$[AR_1S_1]$, $[AR_1S_2]$, $[AR_2S_1]$ e $[AR_2S_2]$

• Determinemos as coordenadas dos pontos R_1 e R_2 :

A equação reduzida de r é $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$, pelo que um ponto R pertence a r se e só se as suas coordenadas forem da forma $\left(x, \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AR} = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{10}{7}\right)^2} = 10 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{33}{28}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{22}{7}x + \frac{121}{49} + \frac{9}{16}x^2 + \frac{99}{56}x + \frac{1089}{784} = 100 \Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 + \frac{275}{56}x - \frac{75375}{784} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{45}{7} \vee x = -\frac{67}{7} \end{aligned}$$

Então, R_1 é o ponto de coordenadas $\left(\frac{45}{7}, \frac{3}{4} \times \frac{45}{7} - \frac{1}{4}\right)$ ou seja $\left(\frac{45}{7}, \frac{32}{7}\right)$ e

R_2 é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{67}{7}, -\frac{3}{4} \times \frac{67}{7} - \frac{1}{4}\right)$ ou seja $\left(-\frac{67}{7}, -\frac{52}{7}\right)$

• Determinemos as coordenadas dos pontos S_1 e S_2 :

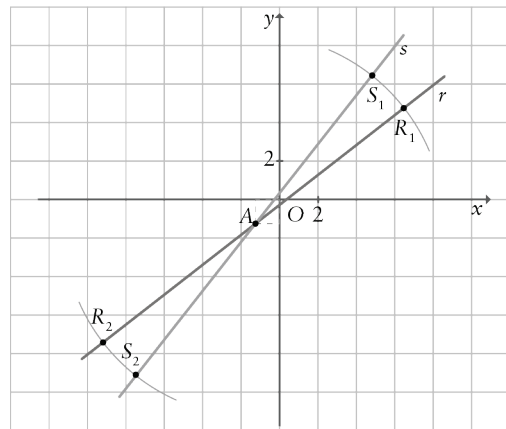
A equação reduzida de s é $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, pelo que um ponto S pertence a s se e só se as suas coordenadas forem da forma $\left(x, \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AS} = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{10}{7}\right)^2} = 10 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{44}{21}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{22}{7}x + \frac{121}{49} + \frac{16}{9}x^2 + \frac{352}{63}x + \frac{1936}{441} = 100 \Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 + \frac{550}{63}x - \frac{41075}{441} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{31}{7} \vee x = -\frac{53}{7} \end{aligned}$$

Então, S_1 é o ponto de coordenadas $\left(\frac{31}{7}, \frac{4}{3} \times \frac{31}{7} + \frac{2}{3}\right)$ ou seja $\left(\frac{31}{7}, \frac{46}{7}\right)$ e

S_2 é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{53}{7}, -\frac{4}{3} \times \frac{53}{7} + \frac{2}{3}\right)$ ou seja $\left(-\frac{53}{7}, -\frac{67}{7}\right)$



5. Na figura ao lado, que pretende ilustrar o problema, está representada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$, bem como o ponto P e as retas cujas equações reduzidas são as soluções do problema. As retas são tangentes à circunferência nos pontos designados por A_1 e A_2

Começemos por determinar as coordenadas dos pontos A_1 e A_2

Um ponto A pertence à semicircunferência contida no semiplano inferior ao eixo das abscissas se e só se as suas coordenadas forem da forma $(a, -\sqrt{10-a^2})$, e a reta PA é tangente à circunferência se e só se $[PA] \perp [OA]$

Então, tem-se $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{PA}^2$

Ora:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{PA}^2 \Leftrightarrow 100 = 10 + \overline{PA}^2 \Leftrightarrow \overline{PA}^2 = 90 \Leftrightarrow$$

$$\left(\overline{PA} = \sqrt{(a-0)^2 + (-\sqrt{10-a^2}+10)^2} = \sqrt{a^2 + 10 - a^2 - 20\sqrt{10-a^2} + 100} = \sqrt{110 - 20\sqrt{10-a^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 110 - 20\sqrt{10-a^2} = 90 \Leftrightarrow -20\sqrt{10-a^2} = -20 \Leftrightarrow \sqrt{10-a^2} = 1 \Leftrightarrow 10-a^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 3$$

Então, A_1 é o ponto de coordenadas $(-3, -1)$ e A_2 é o ponto de coordenadas $(3, -1)$

• Equação da reta PA_1

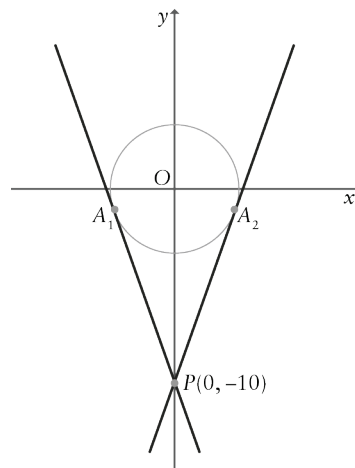
$\overrightarrow{PA_1}$ é o vetor de coordenadas $(-3, -1) - (0, -10)$ ou seja $(-3, 9)$, pelo que o declive da reta é igual a $\frac{9}{-3} = -3$

Então, a equação reduzida da reta PA_1 é $y = -3x - 10$

• Equação da reta PA_2

$\overrightarrow{PA_2}$ é o vetor de coordenadas $(3, -1) - (0, -10)$ ou seja $(3, 9)$, pelo que o declive da reta é igual a $\frac{9}{3} = 3$

Então, a equação reduzida da reta PA_2 é $y = 3x - 10$



Pág. 35

Descritor 6.3

6.1. Pontos de interseção com o eixo das ordenadas (pontos de abscissa nula):

$$(0-3)^2 + (y-2)^2 = 10 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow y-2 = -1 \vee y-2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 3$$

Como o ponto D tem ordenada superior à de A , as coordenadas de D são $(0, 3)$

Pontos de interseção com o eixo das abscissas (pontos de ordenada nula):

$$(x-3)^2 + (0-2)^2 = 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 6 \Leftrightarrow x-3 = -\sqrt{6} \vee x-3 = \sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{6} \vee x = 3 + \sqrt{6}$$

O ponto F tem coordenadas $(3 - \sqrt{6}, 0)$ e o ponto E tem coordenadas $(3 + \sqrt{6}, 0)$

6.2. $\overrightarrow{FD}$ é o vetor de coordenadas $(0, 3) - (3 - \sqrt{6}, 0)$ ou seja $(-3 + \sqrt{6}, 3)$, pelo que o declive da reta é igual a $\frac{3}{-3+\sqrt{6}} = -3 - \sqrt{6}$

Então, a equação reduzida da reta DF é $y = (-3 - \sqrt{6})x + 3$

6.3. A altura do triângulo $[DEF]$ é igual à ordenada de D e a medida da base é igual a $\overline{EF}$

$$\text{Então: Área do triângulo } [DEF] = \frac{\overline{EF} \times 3}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 3}{2} = 3\sqrt{6}$$

7.1. Seja A o ponto de coordenadas (a, a) , $a < 0$

Vem:

- as coordenadas de B são $(-\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$
- $\overline{OA} = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2} = -a\sqrt{2}$
- $\overline{OB} = \sqrt{(-\frac{3}{2}a-0)^2 + (\frac{3}{2}a-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}a^2} = |a|\sqrt{\frac{9}{2}} = -a\sqrt{\frac{9}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}a$

Então: Área do triângulo $[AOB] = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = 12 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OB} = 24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-a\sqrt{2}) \times (-\frac{3}{\sqrt{2}}a) = 24 \Leftrightarrow 3a^2 = 24 \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = -\sqrt{8} \vee a = \sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -2\sqrt{2} \vee a = 2\sqrt{2}$$

Como se tem $a < 0$, conclui-se que $a = -2\sqrt{2}$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e B é o ponto de coordenadas $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

7.2. Como $[OA]$ está contido na bissetriz dos quadrantes ímpares e $[OB]$ está contido na bissetriz dos quadrantes pares, o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O . Como a amplitude do arco AB é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB , o arco AB é uma semicircunferência, pelo que $[AB]$ é um diâmetro dessa circunferência.

O centro da circunferência é o ponto médio do diâmetro $[AB]$, pelo que é o ponto de coordenadas $(\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2})$

O raio da circunferência é igual a $\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{-5\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{25}{2}} = \sqrt{13}$

Portanto, uma equação da circunferência é $(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{5\sqrt{2}}{2})^2 = 13$

7.3. Como os pontos de coordenadas $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ pertencem à reta AB , o vetor de coordenadas $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) - (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = (5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ é um vetor diretor de AB , pelo que o declive da reta é igual a $-\frac{1}{5}$. Então, a equação reduzida de AB é da forma $y = -\frac{1}{5}x + b$

Como o ponto de coordenadas $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ pertence a AB , tem-se

$$-2\sqrt{2} = -\frac{1}{5} \times (-2\sqrt{2}) + b \text{ pelo que } b = -\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

Portanto, a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{5}x - \frac{12\sqrt{2}}{5}$

Pág. 36

Descritor 7.5

1.1. Um ponto P' é a projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r se e só se é o ponto de interseção da reta r com o plano α perpendicular a r e que passa por P , pelo que P' é a projeção ortogonal sobre r de todos os pontos de α

Por outro lado, se um dado ponto R não pertence a α , existe outro plano estritamente paralelo a α que passa por R e que intersesta a reta r num ponto diferente de P' , pelo que P' não é a projeção ortogonal de R sobre a reta r

1.2. Sejam r e s duas retas perpendiculares.

Se um certo plano é perpendicular a r e um outro plano é perpendicular a s , então os dois planos são perpendiculares entre si.

Então, um plano perpendicular ao eixo Ox é perpendicular a qualquer plano perpendicular ao eixo Oy , pelo que α e β são perpendiculares. Todos os pontos de α têm abcissa igual a a e todos os pontos de β têm ordenada igual a b , pelo que a reta interseção dos dois planos é constituída por todos os pontos que têm, simultaneamente, abcissa igual a a e ordenada igual a b .

1.3. Um plano perpendicular a dois planos perpendiculares é perpendicular à reta que intersesta estes dois, pelo que a intersesta num único ponto.

Então, os três planos têm um único ponto comum e, por isso, esse é o único ponto do espaço que tem, simultaneamente, abcissa igual a a , ordenada igual a b e cota igual a c .

Pág. 36

Descritor 7.6

1.1. Existe um único plano perpendicular a Ox que passa por P e que contém o ponto P'' .

Esse plano contém todos os pontos do espaço cuja abcissa é igual à abcissa de P , pelo que contém P' .

Esse plano é, então, definido pelos pontos P , P' e P'' e é perpendicular a Ox .

1.2. A reta $P''P'$ é perpendicular ao eixo Ox porque está contida num plano perpendicular a Ox e uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano que lhe são concorrentes.

Então, como P' tem abcissa igual à abcissa de P e P'' tem abcissa igual à abcissa de P' (por $P''P'$ ser perpendicular ao eixo Ox), a abcissa de P'' é igual à abcissa de P , ou seja, igual a a .

1.3. De modo análogo: considera-se o ponto P''' , projeção ortogonal do ponto P no eixo Oy , justifica-se que o plano definido pelos pontos P , P' e P''' é perpendicular ao eixo Oy , justifica-se que a reta $P'''P'$ é perpendicular ao eixo Oy e conclui-se que a abcissa de P' é igual a b .

Como, por outro lado, o ponto P' pertence ao plano xOy , a sua cota é nula, pelo que P tem coordenadas $(a, b, 0)$, e as suas coordenadas no plano xOy são (a, b) .

Pág. 36

Descritor 8.3

1.1. Tem-se, de acordo com o teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ pelo que

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2. $[CG]$ é uma aresta lateral do paralelepípedo, logo é perpendicular à base do paralelepípedo, pelo que é perpendicular a qualquer reta pertencente ao plano que contém essa base. Como AC pertence a esse plano, CG é perpendicular a AC .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AG}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

1.3.1. Começamos por recordar que o módulo de uma diferença entre dois números reais é igual à diferença positiva entre eles, ou seja, a diferença entre o maior deles e o menor.

Dado que o eixo Oy é paralelo a AB , $\overline{AB}$ (ou seja, a) é igual à diferença positiva entre as ordenadas de A e de B , pelo que $a = |g_2 - a_2|$.

Dado que o eixo Ox é paralelo a BC , $\overline{BC}$ (ou seja, b) é igual à diferença positiva entre as abcissas de B e de C , pelo que $b = |g_1 - a_1|$.

Dado que o eixo Oz é paralelo a CG , $\overline{CG}$ (ou seja, c) é igual à diferença positiva entre as cotas de C e de G , pelo que $c = |g_3 - a_3|$.

1.3.2. Tem-se, pelo teorema de Pitágoras

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = |g_2 - a_2|^2 + |g_1 - a_1|^2 = (g_2 - a_2)^2 + (g_1 - a_1)^2, \text{ pelo que}$$

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = (g_2 - a_2)^2 + (g_1 - a_1)^2 + (g_3 - a_3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{(g_1 - a_1)^2 + (g_2 - a_2)^2 + (g_3 - a_3)^2}$$

Pág. 38

Descritores 10.1 e 10.2

1. A resposta a esta questão é apresentada no manual, ao longo do tópico «Operar com coordenadas de vetores do espaço», páginas 253 e 254, sendo que a unicidade da decomposição se demonstra de modo análogo ao apresentado na margem da página 196.

Pág. 38

Descritor 11.1

1. Na figura ao lado está representado o prisma depois de fixado um referencial cartesiano do espaço.

1.1. A base do prisma é um quadrado, pelo que se tem

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B \text{ pelo que } \overrightarrow{BA} \text{ é o vetor de coordenadas } (2,0,0) - (2,2,0) = (0,-2,0)$$

Então, D é o ponto de coordenadas $(0,2,0) + (0,-2,0) = (0,0,0)$, pelo que coincide com a origem O do referencial.

1.2.1. $z = 6$

1.2.2. $x = 1$

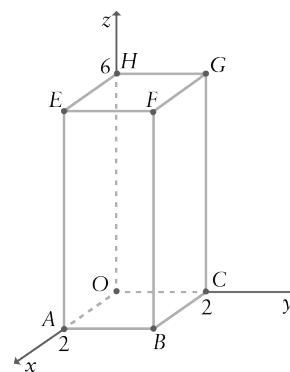
1.2.3. $x = 2 \wedge y = 0$

1.2.4. $z = 3$

1.2.5. $x = 2 \wedge z = 6 \wedge 0 \leq y \leq 2$

1.2.6. O conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto B é igual a 2 é a superfície esférica de centro em B e raio igual a 2. Uma equação que define esta superfície esférica é $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$

1.3. Volume do prisma $= 2 \times 2 \times 6 = 24$ unidades cúbicas



Pág. 39

Descritor 11.1

$$\mathbf{2.1.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 8z + 16) = -12 + 4 + 1 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$$

A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $(2, -1, 4)$ e tem raio igual a 3

2.2.1. O eixo Ox é definido pela condição $y = 0 \wedge z = 0$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-2)^2 + (0+1)^2 + (0-4)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-2)^2 + 1 + 16 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-2)^2 = -8 \end{cases}, \text{ que é uma condição impossível} \end{aligned}$$

A interseção da superfície esférica com o eixo Ox é o conjunto vazio.

Uma condição que a define é $x \in \emptyset$

2.2.2. O plano de equação $z = 4$ passa no centro da superfície esférica, pelo que a interseção da superfície esférica com o plano é circunferência contida neste plano, de centro no centro da superfície esférica e de raio igual ao raio da superfície esférica. Uma condição que define esta circunferência é $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \wedge z = 4$

$$\begin{aligned} \text{2.2.3. } \begin{cases} y = -4 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ (x-2)^2 + (-4+1)^2 + (z-4)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ (x-2)^2 + (z-4)^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. O ponto $A(0,0,2)$ pertence à superfície esférica pois $(0-2)^2 + (0+1)^2 + (2-4)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9$

Tem-se $\overline{AC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Portanto, a esfera de centro A e raio $\overline{AC}$ é definida pela inequação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$

3.1. Tem-se $2 = \frac{-5+x}{2} \wedge 0 = \frac{1+y}{2} \wedge -1 = \frac{2+z}{2} \Leftrightarrow x = 9 \wedge y = -1 \wedge z = -4$, pelo que C é o ponto de coordenadas $(9, -1, -4)$

3.2. O centro da esfera é o ponto médio de $[AB]$, ou seja, é o ponto de coordenadas

$$\left(\frac{-5+2}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{2+(-1)}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Tem-se $\overline{AB} = \sqrt{(2+5)^2 + (0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{49+1+9} = \sqrt{59}$, pelo que o raio da esfera é igual a $\frac{\sqrt{59}}{2}$

Portanto, a esfera de diâmetro $[AB]$ é definida pela inequação

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{59}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{4.1. } \begin{cases} y = 3 \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (x+3)^2 + (3-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (x+3)^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4.2. } \begin{cases} z = a \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 + (a+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5 - (a+1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

A interseção é não vazia se e só se $5 - (a+1)^2 \geq 0$

$$\text{Tem-se } 5 - (a+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 \leq \sqrt{5} \\ a+1 \geq -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -1 + \sqrt{5} \\ a \geq -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Portanto, a interseção é não vazia se e só se $a \in [-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}]$

$$4.3. \begin{cases} x = b \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ (b+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5 - (b+3)^2 \end{cases}$$

A interseção é uma circunferência de raio $\sqrt{5}$ se e só se $5 - (b+3)^2 = 5$

$$\text{Tem-se } 5 - (b+3)^2 = 5 \Leftrightarrow (b+3)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -3$$

Portanto, a interseção é uma circunferência de raio $\sqrt{5}$ se e só se $b = -3$

5. O conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A , B e C é o conjunto formado pelos pontos $P(x, y, z)$

$$\text{que satisfazem a condição } \begin{cases} d(P, A) = d(P, B) \\ d(P, B) = d(P, C) \end{cases}$$

$$\text{Tem-se } \begin{cases} d(P, A) = d(P, B) \\ d(P, B) = d(P, C) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 = (y-3)^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3 = y-3 \vee y+3 = -y+3 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -3 \vee 2y = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + (0-3)^2 = (x+2)^2 + (0+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-2 = x+2 \vee x-2 = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2 = 2 \vee 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A , B e C é o eixo Oz

Pág. 39

Descritor 11.2

$$1.1. \text{ As coordenadas de } A + 3\vec{u} \text{ são } (-3, 2, 1) + 3(8, 0, -6) = (21, 2, -17)$$

$$1.2. \vec{AB} = B - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \vec{AB} \text{ são } (1, 1, -2) - (-3, 2, 1) = (4, -1, -3)$$

Então, as coordenadas de $\vec{AB} + 2(-5\vec{u})$, ou seja, $\vec{AB} - 10\vec{u}$ são

$$(4, -1, -3) - 10(8, 0, -6) = (-76, -1, 57)$$

$$1.3. \text{ As coordenadas de } 4\vec{AB} - \frac{5}{2}\vec{u} \text{ são } 4(4, -1, -3) - \frac{5}{2}(8, 0, -6) = (-4, -4, 3)$$

$$1.4. \text{ As coordenadas de } 3(\vec{AB} + \vec{u}) \text{ são } 3[(4, -1, -3) + (8, 0, -6)] = (36, -3, -27) \text{ pelo que}$$

$$B - 3(\vec{AB} + \vec{u}) \text{ é o ponto de coordenadas } (1, 1, -2) - (36, -3, -27) = (-35, 4, 25)$$

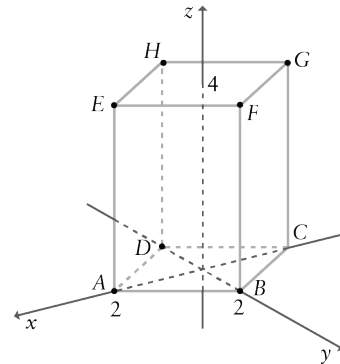
$$1.5. \text{ Tem-se } \|\vec{v}\| = 2 \text{ e } \|\vec{u}\| = \sqrt{8^2 + 0 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\text{Então, para que } \vec{v} \text{ seja colinear com } \vec{u}, \text{ tem que ser } \vec{v} = \frac{2}{10}\vec{u} \vee \vec{v} = -\frac{2}{10}\vec{u}$$

$$\text{Então, as coordenadas de } \vec{v} \text{ são } \frac{1}{5}(8, 0, -6) = \left(\frac{8}{5}, 0, -\frac{6}{5}\right) \text{ ou são } -\frac{1}{5}(8, 0, -6) = \left(-\frac{8}{5}, 0, \frac{6}{5}\right)$$

$$1.6. \text{ Tem-se } \vec{x} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{u}, \text{ pelo que as coordenadas de } \vec{x} \text{ são } (4, -1, -3) - \frac{1}{2}(8, 0, -6) = \\ = (0, -1, 0)$$

2. Na figura ao lado está representado o prisma depois de fixado um referencial cartesiano do espaço.



2.1. M é o ponto de coordenadas $(0,2,2)$ e D é o ponto de coordenadas $(0,-2,0)$

Tem-se $\overrightarrow{DM} = M - D$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{DM}$ são $(0,2,2) - (0,-2,0) = (0,4,2)$

2.2. $\overrightarrow{BC} = C - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são $(-2,0,0) - (0,2,0) = (-2,-2,0)$

$\overrightarrow{BA} = A - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BA}$ são $(2,0,0) - (0,2,0) = (2,-2,0)$

$\overrightarrow{BF} = F - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BF}$ são $(0,2,4) - (0,2,0) = (0,0,4)$

Tem-se: $\overrightarrow{DM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow (0,4,2) = a(-2,-2,0) + b(2,-2,0) + c(0,0,4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2a + 2b \\ 4 = -2a - 2b \\ 2 = 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = -2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b = -2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2.3. E é o ponto de coordenadas $(2,0,4)$ e G é o ponto de coordenadas $(-2,0,4)$

$\overrightarrow{EC} = C - E$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{EC}$ são $(-2,0,0) - (2,0,4) = (-4,0,-4)$

$\overrightarrow{GB} = B - G$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{GB}$ são $(0,2,0) - (-2,0,4) = (2,2,-4)$

Então, o vetor $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GB}$ tem coordenadas $(-4,0,-4) + (2,2,-4) = (-2,2,-8)$

2.4. $\begin{cases} x = 0 + \lambda \times 0 \\ y = 2 + \lambda \times 1, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \\ z = 4 + \lambda \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$

3.1. $\begin{cases} x = 2 + \lambda \times 1 \\ y = -1 + \lambda \times 1 \\ z = 0 + \lambda \times (-2) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ -3 = -1 + \lambda \\ -4 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$ Logo, o ponto B pertence à reta r

3.3. O ponto pertence ao plano xOz se e só se a sua ordenada for nula.

$y = 0 \wedge \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \wedge \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ 0 = -1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \wedge \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ \lambda = 1 \\ z = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 0 \wedge \begin{cases} x = 3 \\ \lambda = 1 \\ z = -2 \end{cases}$ Logo, o ponto P tem coordenadas $(3,0,-2)$

3.4. Como A e D são extremidades de um diâmetro da esfera e $D = A + 2\vec{v}$, então o centro da esfera é o ponto $C = A + \vec{v}$. As coordenadas de C são, então, $(2,-1,0) + (1,1,-2) = (3,0,-2)$

O raio da esfera é igual a $d(A,C) = \sqrt{(3-2)^2 + (0+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

3.5. Para obter um ponto que não seja colinear com P e D , ou seja, que não pertença à reta PD , basta adicionar a P um vetor que não seja colinear a $\overrightarrow{PD}$

As coordenadas de $D = A + 2\vec{v}$ são $(2,-1,0) + 2(1,1,-2) = (4,1,-4)$, pelo que $\overrightarrow{PD}$ é o vetor de coordenadas $(4,1,-4) - (3,0,-2) = (1,1,-2)$

Ora, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1,0,0)$ não é colinear a $(1,1,-2)$, pelo que se tem, por exemplo, que Q é o ponto de coordenadas $(3,0,-2) + (1,0,0) = (4,0,-2)$

4.1. As aresta do tetraedro $[BDEG]$ são todas iguais porque todas são diagonais de faces do mesmo cubo.

4.2. $\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AD}$ são $(0,1,2) - (3,0,2) = (-3,1,0)$

$\overrightarrow{AE} = E - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AE}$ são $(3,0,2 + \sqrt{10}) - (3,0,2) = (0,0,\sqrt{10})$

Então, tem-se:

$C = B + \overrightarrow{AD}$, pelo que C é o ponto de coordenadas $(4,3,2) + (-3,1,0) = (1,4,2)$

$F = B + \overrightarrow{AE}$, pelo que F é o ponto de coordenadas $(4,3,2) + (0,0,\sqrt{10}) = (4,3,2 + \sqrt{10})$

$G = C + \overrightarrow{AE}$, pelo que G é o ponto de coordenadas $(1,4,2) + (0,0,\sqrt{10}) = (1,4,2 + \sqrt{10})$

$H = D + \overrightarrow{AE}$, pelo que H é o ponto de coordenadas $(0,1,2) + (0,0,\sqrt{10}) = (0,1,2 + \sqrt{10})$

4.3. A reta EC passa por C e tem a direção do vetor $\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{EC} = C - E$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{EC}$ são $(1,4,2) - (3,0,2 + \sqrt{10}) = (-2,4,-\sqrt{10})$

Então, a reta EC é definida por

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \times (-2) \\ y = 4 + \lambda \times 4 \\ z = 2 + \lambda \times (-\sqrt{10}) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - \sqrt{10}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

4.4. O segmento de reta $[EG]$ é definido por $(x,y,z) = E + \lambda \overrightarrow{EG}$, $\lambda \in [0,1]$

Ora, $\overrightarrow{EG} = G - E$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{EG}$ são $(1,4,2 + \sqrt{10}) - (3,0,2 + \sqrt{10}) = (-2,4,0)$

Então, o segmento de reta $[EG]$ é definido por

$(x,y,z) = (3,0,2 + \sqrt{10}) + \lambda(-2,4,0)$, $\lambda \in [0,1]$

5. Dado que a terceira coordenada de $\vec{v}$ é nula, também tem que ser nula a terceira coordenada de $\vec{u}$, pelo que o valor de k referido no enunciado, para o qual os vetores são colineares, tem que ser -1 ou 1

Para $k = -1$, tem-se que $\vec{u}$ tem coordenadas $(1,0,0)$ e que $\vec{v}$ tem coordenadas $(-1,6,0)$, pelo que, neste caso, os vetores não são colineares.

Para $k = 1$, tem-se que $\vec{u}$ tem coordenadas $(1,2,0)$ e que $\vec{v}$ tem coordenadas $(3,6,0)$, pelo que, como $\vec{v} = 3\vec{u}$, os vetores são colineares.

6.1. Coordenadas de F :

$E = V + \overrightarrow{VE}$, pelo que E é o ponto de coordenadas $(1,1,10) + (1,-1,-3) = (2,0,7)$

$F = E + \overrightarrow{EF}$, pelo que F é o ponto de coordenadas $(2,0,7) + (0,2,0) = (2,2,7)$

Coordenadas de G :

$G = V + \overrightarrow{VG}$, pelo que G é o ponto de coordenadas $(1,1,10) + (-1,1,-3) = (0,2,7)$

Coordenadas de $\overrightarrow{VH}$:

$\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{VG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{VG} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{VG} + (-\overrightarrow{EF})$, pelo que $\overrightarrow{VH}$ é o vetor de coordenadas $(-1,1,-3) + (0,-2,0) = (-1,-1,-3)$

6.2. Coordenadas de $\overrightarrow{VB}$:

Tem-se que $\overline{AB} = 6$ e $\overline{EF} = 2$. Como os triângulos $[VEF]$ e $[VAB]$ são semelhantes, tem-se $\frac{\overline{VB}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = 3$ pelo que $\overline{VB} = 3\overline{VF}$ e, então, $\overrightarrow{VB} = 3\overrightarrow{VF}$

Ora, $\overrightarrow{VF} = F - V$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{VF}$ são $(2,2,7) - (1,1,10) = (1,1,-3)$

Então, $\overrightarrow{VB} = (3,3,-9)$

Coordenadas de D :

$\overrightarrow{VD} = 3\overrightarrow{VH}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{VD}$ são $(-3,-3,-9)$

$D = V + \overrightarrow{VD}$, pelo que D é o ponto de coordenadas $(1,1,10) + (-3,-3,-9) = (-2,-2,1)$

Tema 4 | Funções Reais de Variável Real

Pág. 41

Descritores 1.11, 1.12 e 1.13

1.1.

- Mostremos que f é injetiva:

Tem-se, para quaisquer números reais x_1 e x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 5x_1 \neq 5x_2 \Rightarrow 5x_1 + 2 \neq 5x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ pelo que } f \text{ é injetiva.}$$

- Mostremos que f é sobrejetiva:

Tem-se $f(x) = y \Leftrightarrow 5x + 2 = y \Leftrightarrow 5x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{5}$, pelo que, qualquer que seja o número real y , existe um número real x para o qual $f(x) = y$. Então, f é sobrejetiva.

- Portanto, como f é injetiva e sobrejetiva, f é bijetiva.

- Determinemos uma expressão para $f^{-1}(x)$:

$$\text{Tem-se } f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{5} \text{ pelo que } f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

1.2.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x + 2) = \frac{5x+2-2}{5} = \frac{5x}{5} = x \text{ e}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = 5 \times \frac{x-2}{5} + 2 = x - 2 + 2 = x$$

2. Tem-se, de acordo com a definição de função inversa de f

$$f^{-1}: B \rightarrow A \text{ tal que } f^{-1}(y) = x_y, \text{ para todo o } y \in B$$

$$\text{Seja } f(a) = y_a \text{ e } f^{-1}(b) = x_b$$

Então

$$f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(y_a) = a \text{ pelo que } f^{-1} \circ f = Id_A \text{ e}$$

$$f \circ f^{-1}(b) = f[f^{-1}(b)] = f(x_b) = b \text{ pelo que } f \circ f^{-1} = Id_B$$

3.1.1.

- Mostremos que f é injetiva:

Se f não fosse injetiva, ter-se-ia a existência de $x_1, x_2 \in A$ tais que $(x_1, y) \in A \times B$ e $(x_2, y) \in A \times B$, pelo que se teria $x_1 = g(y)$ e $x_2 = g(y)$, donde g não seria função.

Portanto, f é injetiva.

- Mostremos que f é sobrejetiva:

Como g é função e se tem $g: B \rightarrow A$, tem-se que, para todo o $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tais que $g(y) = x$

Ora, $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$, pelo que se conclui que, para todo o $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tais que $f(x) = y$, ou seja, f é sobrejetiva.

- Dado que $f: A \rightarrow B$ é bijetiva, que, para todo o $y \in B$, existe um e um só $x \in A$ tais que $f(x) = y$ e dado que $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, tem-se que $g = f^{-1}$

3.1.2 Dado que $g = f^{-1}$ e que se tem $f: A \rightarrow B$, tem-se $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$

3.2.1. Tem-se, $\forall (x, y) \in A \times B$:

• $y = f(x) \Rightarrow$ (g é uma função)

$\Rightarrow g(y) = g[f(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y) = g \circ f(x) \Rightarrow$ ($g \circ f = Id_A$)

$\Rightarrow g(y) = Id_A(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y) = x$

• De modo análogo, se mostra que $g(y) = x \Rightarrow y = f(x)$

3.2.2.

• f é bijetiva se e só se para todo o $y \in B$ existe um e um só $x \in A$ tais que $f(x) = y$

Tem-se:

$f(x) = y \Leftrightarrow g[f(x)] = g(y) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g(y) \Leftrightarrow Id_A(x) = g(y) \Leftrightarrow x = g(y)$

Ora, como g é uma função, tem-se que para cada $y \in B$ existe um e um só $x \in A$ tais que $g(y) = x$

• De $f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ conclui-se que $g = f^{-1}$

Pág. 42

Descritor 2.6

1.1. $f(a) = a^2 - 1$, pelo que o ponto P de abcissa a tem coordenadas $(a, a^2 - 1)$

$f(-a) = (-a)^2 - 1 = a^2 - 1$, pelo que o ponto Q de abcissa $-a$ tem coordenadas $(-a, a^2 - 1)$

1.2. O ponto médio de $[PQ]$ tem abcissa $\frac{a+(-a)}{2} = 0$, pelo que pertence ao eixo das ordenadas.

1.3. Dado que P e Q têm a mesma ordenada, o segmento $[PQ]$ é paralelo ao eixo das abcissas, sendo, portanto, perpendicular ao eixo das ordenadas.

1.4. Se um ponto P pertence ao gráfico de f , o seu simétrico, Q , relativamente ao eixo das ordenadas também pertence ao gráfico de f , pelo que o eixo das ordenadas é o eixo de simetria do gráfico de f

2.1. Se f é par, $f(-a) = f(a)$, pelo que o ponto Q tem coordenadas $(-a, f(a))$

2.2. Um ponto S pertence ao eixo das ordenadas se e só se a sua abcissa for igual a 0

Vamos mostrar que, para $S(0, y)$, $P(a, f(a))$ e $Q(-a, f(a))$, se tem sempre

$$d(S, P) = d(S, Q)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} d(S, P) = d(S, Q) &\Leftrightarrow \sqrt{(a-0)^2 + [f(a)-y]^2} = \sqrt{(-a-0)^2 + [f(a)-y]^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-0)^2 + [f(a)-y]^2 = (-a-0)^2 + [f(a)-y]^2 \Leftrightarrow a^2 = (-a)^2 \end{aligned}$$

2.3. Qualquer que seja o segmento de reta horizontal $[PQ]$, com $P(a, f(a))$ e $Q(-a, f(a))$, o seu ponto médio pertence ao eixo das ordenadas, pelo que, se um ponto P pertence ao gráfico de f , o seu simétrico, Q , relativamente ao eixo das ordenadas também pertence ao gráfico de f e, portanto, o eixo das ordenadas é o eixo de simetria do gráfico de f

3. Seja $a \in D_f$. Então, o ponto $P(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f . Como o gráfico de f é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas, o ponto simétrico de P , em relação a este eixo, também pertence ao gráfico de f . Ora, o ponto simétrico do ponto $P(a, f(a))$ relativamente ao eixo das ordenadas tem coordenadas $(-a, f(a))$. Como o ponto $(-a, f(a))$ pertence ao gráfico de f , podemos concluir que $-a \in D_f$ e que $f(-a) = f(a)$

Portanto, f é par.

Descritor 2.7

1.1. Tem-se, para todo o $a \in D_f$:

$-a \in D_f$ e $f(-a) = (-a)^3 - (-a) = -a^3 + a = -(a^3 - a) = -f(a)$. Então, f é ímpar.

1.2. Tem-se:

$f(2) = 2^2 - 2 = 8 - 2 = 6$, pelo que o ponto do gráfico de f que tem abcissa 2 é o ponto de coordenadas (2,6)

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) = -8 + 2 = -6$, pelo que o ponto do gráfico de f que tem abcissa -2 é o ponto de coordenadas $(-2, -6)$

Ora, os pontos de coordenadas (2,6) e $(-2, -6)$ são simétricos relativamente à origem do referencial.

1.3. Tem-se, para todo o $a \in D_f$:

- O ponto do gráfico de f que tem abcissa a é o ponto de coordenadas $(a, f(a))$
- $-a \in D_f$
- O ponto do gráfico de f que tem abcissa $-a$ é o ponto de coordenadas $(-a, -f(a))$

Então, qualquer que seja o ponto de coordenadas (a, b) pertencente ao gráfico de f , o ponto de coordenadas $(-a, -b)$ pertencente ao gráfico de f , pelo que o gráfico de f é simétrico relativamente à origem do referencial.

2.1. Como f é ímpar, tem-se $f(-a) = -f(a)$, pelo que o ponto Q tem coordenadas $(-a, -f(a))$

2.2. O ponto médio de $[PQ]$ é o ponto de coordenadas

$\left(\frac{a-a}{2}, \frac{f(a)-f(a)}{2}\right) = (0, 0)$, ou seja, é a origem do referencial.

2.3. Seja, para $x \in D_f$, $(x, f(x))$ um ponto do gráfico de f

A imagem de $(x, f(x))$ pela reflexão central de centro O é o ponto de coordenadas $(-x, -f(x))$

Ora, como f é uma função ímpar, $f(-x) = -f(x)$, pelo que o ponto de coordenadas $(-x, -f(x))$ pertence ao gráfico de f

Portanto, a imagem do gráfico de f pela reflexão central de centro O coincide com o próprio gráfico.

3. Seja $a \in D_f$. Então, o ponto $P(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f . Como o gráfico de f é simétrico relativamente à origem do referencial, o ponto simétrico de P em relação à origem do referencial também pertence ao gráfico de f . Ora, o ponto simétrico do ponto $P(a, f(a))$ relativamente à origem do referencial tem coordenadas $(-a, -f(a))$. Como o ponto $(-a, -f(a))$ pertence ao gráfico de f , podemos concluir que $-a \in D_f$ e que $f(-a) = -f(a)$

Portanto, f é ímpar.

Pág. 42

Descritor 2.8

1.1. Tem-se $y = x + 5 \Leftrightarrow x = y - 5$, pelo que, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe um e um só $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Logo, f é bijetiva e $f^{-1}(x) = x - 5$

1.2. Tem-se $f(-3) = -3 + 5 = 2$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-3, 2)$

Então, a imagem de A pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o ponto de coordenadas $(2, -3)$

Ora, $f^{-1}(2) = 2 - 5 = -3$, pelo que o ponto de coordenadas $(2, -3)$ pertence ao gráfico de f^{-1}

Tem-se $f(1) = 1 + 5 = 6$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(1, 6)$

Então, a imagem de A pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o ponto de coordenadas $(6, 1)$

Ora, $f^{-1}(6) = 6 - 5 = 1$, pelo que o ponto de coordenadas $(6, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}

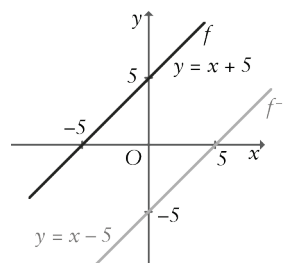
1.3. Tem-se, qualquer que seja $a \in D_f$:

O ponto de coordenadas $(a, a + 5)$ pertence ao gráfico de f

Então, a imagem de $(a, a + 5)$ pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o ponto de coordenadas $(a + 5, a)$

Ora, $f^{-1}(a + 5) = (a + 5) - 5 = a$, pelo que o ponto de coordenadas $(a + 5, a)$ pertence ao gráfico de f^{-1}

Logo, a imagem do gráfico de f pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ é o gráfico de f^{-1}



Pág. 43

Descritor 2.8

2. A é o ponto de coordenadas $(a, f(a))$, pelo que A' é o ponto de coordenadas $(f(a), a)$

Seja $P(x, x)$ um ponto qualquer da reta de equação $y = x$

Tem-se:

$d(P, A) = \sqrt{(x - a)^2 + [x - f(a)]^2}$ e $d(P, A') = \sqrt{[x - f(a)]^2 + (x - a)^2}$, pelo que se tem sempre $d(P, A) = d(P, A')$

Logo, a reta de equação $y = x$ é a mediatriz do segmento de reta $[AA']$, pelo que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos um do outro relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

3. A resposta a esta questão é apresentada no manual, ao longo do tópico «Relação entre o gráfico de uma função bijetiva e o gráfico da respetiva inversa», páginas 44 e 45 do volume 2.

Pág. 43

Descritor 2.9

1.1. O ponto P é o ponto de coordenadas $(4, f(4))$ ou seja $(4, 16)$

Tem-se $Q = P + \vec{u}$, pelo que Q é o ponto de coordenadas $(4, 16) + (0, 3) = (4, 19)$

Q pertence ao gráfico de g pois $g(4) = 4^2 + 3 = 16 + 3 = 19$

1.2. Um ponto pertence ao gráfico de f se e só se é um ponto de coordenadas do tipo (a, a^2) com $a \in \mathbb{R}$

A imagem de (a, a^2) , pela translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$ é o ponto de coordenadas $(a, a^2 + 3)$

Ora, este ponto pertence ao gráfico de g pois $g(a) = a^2 + 3$

1.3. Um ponto pertence ao gráfico de g se e só se é um ponto de coordenadas do tipo $(a, a^2 + 3)$ com $a \in \mathbb{R}$. Tem-se $(a, a^2 + 3) = (a, a^2) + (0, 3)$, pelo que o ponto de coordenadas $(a, a^2 + 3)$ é a imagem de (a, a^2) pela translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$.

Como (a, a^2) pertence ao gráfico de f , $(a, a^2 + 3)$ é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$.

2.1. O ponto P tem coordenadas $(a, f(a))$.

Tem-se $Q = P + \vec{u}$, pelo que Q é o ponto de coordenadas $(a, f(a)) + (0, c) = (a, f(a) + c)$.

Ora, este ponto pertence ao gráfico de g pois $g(a) = f(a) + c$.

2.2. Um ponto pertence ao gráfico de g se e só se é um ponto de coordenadas do tipo $(a, f(a) + c)$ com $a \in \mathbb{R}$.

Tem-se $(a, f(a) + c) = (a, f(a)) + (0, c)$, pelo que o ponto de coordenadas $(a, f(a) + c)$ é a imagem de $(a, f(a))$ pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.

Como $(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f , $(a, f(a) + c)$ é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.

Pág. 43

Descritor 2.10

1.1. Tem-se $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, pelo que o domínio de g é $[3, +\infty[$.

1.2. Tem-se $f(4) = \sqrt{4} = 2$, pelo que o ponto de coordenadas $(4, 2)$ pertence ao gráfico de f .

Tem-se $A + \vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(4, 2) + (3, 0) = (7, 2)$, pelo que a imagem de A pela translação de vetor $\vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(7, 2)$.

Ora, este ponto pertence ao gráfico de g pois $g(7) = \sqrt{7 - 3} = \sqrt{4} = 2$.

1.3. Um ponto pertence ao gráfico de f se e só se é um ponto de coordenadas do tipo $(a, \sqrt{a})$ com $a \geq 0$.

A imagem de $(a, \sqrt{a})$ pela translação de vetor $\vec{u}(3, 0)$ é o ponto de coordenadas $(a + 3, \sqrt{a})$.

Ora, este ponto pertence ao gráfico de g pois $g(a + 3) = \sqrt{(a + 3) - 3} = \sqrt{a}$.

Inversamente, um ponto pertence ao gráfico de g se e só se é um ponto de coordenadas do tipo $(a, \sqrt{a - 3})$ com $a \geq 3$.

Tem-se $(a, \sqrt{a - 3}) = ((a - 3) + 3, \sqrt{a - 3}) = (a - 3, \sqrt{a - 3}) + (3, 0)$, pelo que o ponto de coordenadas $(a, \sqrt{a - 3})$ é a imagem de $(a - 3, \sqrt{a - 3})$ pela translação de vetor $\vec{u}(3, 0)$.

Como $(a - 3, \sqrt{a - 3})$ pertence ao gráfico de f , $(a, \sqrt{a - 3})$ é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(3, 0)$.

Pág. 44

Descritor 2.10

2.1. O ponto P tem coordenadas $(a, f(a))$.

A imagem de P pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$ é o ponto Q , de coordenadas $(a + c, f(a))$.

Ora, Q pertence ao gráfico de g pois $g(a + c) = f((a + c) - c) = f(a)$.

2.2. Um ponto R pertence ao gráfico de g se e só se é um ponto de coordenadas do tipo $(a, f(a - c))$, com $a - c \in D_f$

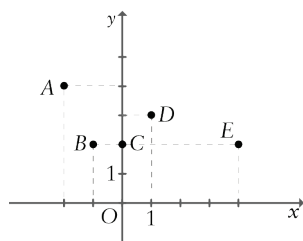
Tem-se $(a, f(a - c)) = ((a - c) + c, f(a - c)) = (a - c, f(a - c)) + (c, 0)$, pelo que o ponto de coordenadas $(a, f(a - c))$ é a imagem de $(a - c, f(a - c))$ pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$

Como $(a - c, f(a - c))$ pertence ao gráfico de f , $(a, f(a - c))$ é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$

Pág. 44

Descritores 2.11 e 2.12

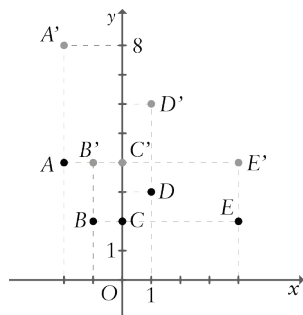
1.1.



Tem-se, relativamente a G_f : $A(-2, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 2)$, $D(1, 3)$ e $E(4, 2)$

1.2. Tem-se: $A'(-2, 8)$, $B'(-1, 4)$, $C'(0, 4)$, $D'(1, 6)$ e $E'(4, 4)$

Representemos, no mesmo referencial, o gráfico de f e as imagens que se obtêm dos pontos de G_f pela transformação referida.

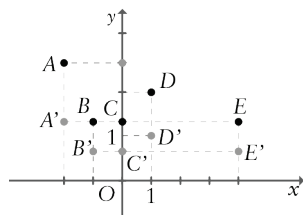


1.3. Tem-se:

- $g(-2) = 2f(-2) = 2 \times 4 = 8$
- $g(-1) = 2f(-1) = 2 \times 2 = 4$
- $g(0) = 2f(0) = 2 \times 2 = 4$
- $g(1) = 2f(1) = 2 \times 3 = 6$
- $g(4) = 2f(4) = 2 \times 2 = 4$

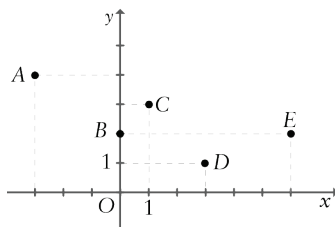
Então, tem-se: $G_g = \{(-2, 8), (-1, 4), (0, 4), (1, 6), (4, 4)\}$, que é o que se obtém do gráfico de f pela transformação ϕ

1.4.



1.5. Uma expressão analítica para h é $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

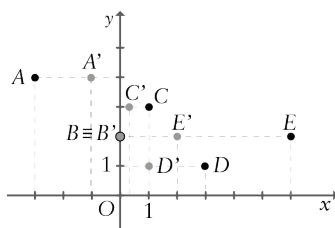
1.1.



Tem-se, relativamente a G_f : $A(-3, 4)$, $B(0, 2)$, $C(1, 3)$, $D(3, 1)$ e $E(6, 2)$

1.2. Tem-se: $A'(-1, 4)$, $B'(0, 2)$, $C'(\frac{1}{3}, 3)$, $D'(1, 1)$ e $E'(2, 2)$

Representemos, no mesmo referencial, o gráfico de f e as imagens que se obtêm dos pontos de G_f pela transformação referida.

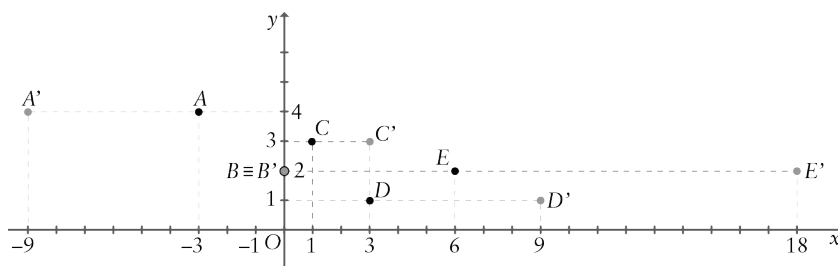


1.3. Tem-se:

- $g(-1) = f[3 \times (-1)] = f(-3) = 4$
- $g(0) = f(3 \times 0) = f(0) = 2$
- $g(\frac{1}{3}) = f(3 \times \frac{1}{3}) = f(1) = 3$
- $g(1) = f(3 \times 1) = f(3) = 1$
- $g(2) = f(3 \times 2) = f(6) = 2$

Então, tem-se: $G_g = \{(-1, 4), (0, 2), (\frac{1}{3}, 3), (1, 1), (2, 2)\}$, que é o que se obtém do gráfico de f pela transformação ψ

1.4.



1.5. Tem-se $D_h = \{-9, 0, 3, 9, 18\}$ e $h(x) = f(\frac{1}{3}x)$

1.1. $f(0)=0$, pelo que a ordenada de P é igual a 0

$f(2)=28$, pelo que a ordenada de Q é igual a 28

$f(5)=175$, pelo que a ordenada de R é igual a 175

1.2. Tem-se $P(0,0)$, $Q(2,28)$ e $R(5,175)$

O declive da reta PQ é igual a $\frac{28-0}{2-0} = 14$

O declive da reta QR é igual a $\frac{175-28}{5-2} = 49$

O declive da reta QR é maior do que o declive da reta PQ

1.3. Dados $x_P < x_Q < x_R$, consideremos os pontos P , Q e R do gráfico de f :

$P(x_P, 7x_P^2)$, $Q(x_Q, 7x_Q^2)$ e $R(x_R, 7x_R^2)$

O declive da reta PQ é igual a $\frac{7x_Q^2 - 7x_P^2}{x_Q - x_P} = 7 \frac{x_Q^2 - x_P^2}{x_Q - x_P} = 7 \frac{(x_Q - x_P)(x_Q + x_P)}{x_Q - x_P} = 7(x_Q + x_P)$

O declive da reta QR é igual a $\frac{7x_R^2 - 7x_Q^2}{x_R - x_Q} = 7 \frac{x_R^2 - x_Q^2}{x_R - x_Q} = 7 \frac{(x_R - x_Q)(x_R + x_Q)}{x_R - x_Q} = 7(x_R + x_Q)$

Dado que $x_P < x_R$, tem-se $x_Q + x_P < x_R + x_Q$, pelo que o declive da reta QR é maior do que o da reta PQ ; conclui-se, então, que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

2. Consideremos os pontos $P(x_P, ax_P^2)$, $Q(x_Q, ax_Q^2)$ e $R(x_R, ax_R^2)$

2.1. O declive da reta PQ é igual a

$$\frac{ax_Q^2 - ax_P^2}{x_Q - x_P} = a \frac{x_Q^2 - x_P^2}{x_Q - x_P} = a \frac{(x_Q - x_P)(x_Q + x_P)}{x_Q - x_P} = a(x_Q + x_P)$$

2.2. O declive da reta QR é igual a

$$\frac{ax_R^2 - ax_Q^2}{x_R - x_Q} = a \frac{x_R^2 - x_Q^2}{x_R - x_Q} = a \frac{(x_R - x_Q)(x_R + x_Q)}{x_R - x_Q} = a(x_R + x_Q)$$

2.3. Seja $a > 0$. Tem-se: $x_Q + x_P < x_R + x_Q \Leftrightarrow a(x_Q + x_P) < a(x_R + x_Q)$, pelo que o declive da reta PQ é menor do que o da reta QR

2.4. Seja $a < 0$. Tem-se: $x_Q + x_P < x_R + x_Q \Leftrightarrow a(x_Q + x_P) > a(x_R + x_Q)$, pelo que o declive da reta PQ é maior do que o da reta QR

2.5. Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo.

Pág. 46

Descritor 6.1

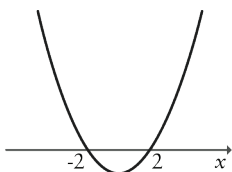
1.1. Tem-se: $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 4$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$; conjunto-solução = $[-2, 2]$

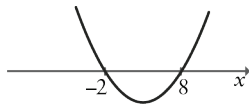
1.2. Tem-se: $x^2 - 6x - 1 > 15 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 8$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 6x - 16 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]8, +\infty[$

Conjunto-solução = $]-\infty, -2[\cup]8, +\infty[$

1.3. Tem-se: $(x - 2)^2 - 6x \geq -24 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 6x + 24 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 28 \geq 0$

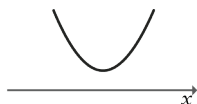
Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 10x + 28$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 112}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

f não tem zeros.

Um esboço do gráfico de f é:



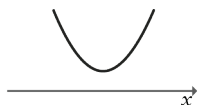
Então, $x^2 - 10x + 28 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; conjunto-solução = $\mathbb{R}$

1.4. Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 2x^2 + x + 1$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset; f \text{ não tem zeros}$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $2x^2 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$; conjunto-solução = $\emptyset$

1.5. $4x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Conjunto-solução = $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

1.6. $|x - 3| < 6 \Leftrightarrow x - 3 > -6 \wedge x - 3 < 6 \Leftrightarrow x > -3 \wedge x < 9 \Leftrightarrow x \in]-3, 9[;$

conjunto-solução = $]-3, 9[$

1.7. $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = -3 \vee 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$; conjunto-solução = $\{-1, 2\}$

1.8. $|4x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow 4x + 1 \leq -2 \vee 4x + 1 \geq 2 \Leftrightarrow 4x \leq -3 \vee 4x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4} \vee x \geq \frac{1}{4};$

conjunto-solução = $]-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty[$

1.9. $|2x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq -3 \wedge 2x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-1, 2]$; conjunto-solução = $[-1, 2]$

1.10. $|x| + 4 < 1 \Leftrightarrow |x| < -3$

A condição $|x| < -3$ é impossível; conjunto-solução = $\emptyset$

1.11. $|2x| + 5 > 3 \Leftrightarrow |2x| > -2$

A condição $|2x| > -2$ é universal; conjunto-solução = $\mathbb{R}$

1.12. $|x - 3| < |x - 5| \Leftrightarrow |x - 3|^2 < |x - 5|^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 < (x - 5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow 4x < 16 \Leftrightarrow x < 4$; conjunto-solução = $] - \infty, 4[$

1.13. $|x^2 - 5x| \leq 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x \geq -6 \wedge x^2 - 5x \leq 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \wedge x^2 - 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\wedge x \in [-1, 6] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-1, 2] \cup [3, 6]$

Pág. 47

Descritor 6.1

2.1. Para $a = -1$ e $k = -2$, tem-se $f(x) = -(x - 3)^2 - 2$, pelo que o gráfico de f é uma parábola com vértice no ponto de coordenadas $(3, -2)$ e com a concavidade voltada para baixo. Então, $D'_f =] - \infty, -2]$

2.2. O contradomínio de g é diferente de $[0, +\infty[$ se e só se f não tiver zeros.

Ora, f não tem zeros se e só se: $a > 0 \wedge k > 0$ (caso em que o gráfico da função é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem ordenada positiva) ou $a < 0 \wedge k < 0$ (caso em que o gráfico da função é uma parábola que tem a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem ordenada negativa).

3.1.

- Proposição (I) :

$f(2) < f\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \times 2^2 + 4 \times 2 + c < -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{3} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12 + 8 + c < -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 < \frac{4}{3}$

(I) é uma proposição verdadeira.

- Proposição (II) :

Se $c = 1$, tem-se $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem ordenada igual a

$-\frac{4^2 - 4 \times (-3) \times 1}{4 \times (-3)} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$, pelo que o contradomínio de f é o intervalo $] - \infty, \frac{7}{3}[$

(II) é uma proposição falsa.

- Proposição (III) :

Para todo o número real c , tem-se que o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem abcissa igual a $-\frac{4}{2 \times (-3)} = \frac{2}{3}$, pelo que qualquer objeto diferente de $\frac{2}{3}$ tem imagem menor do

que $f\left(\frac{2}{3}\right)$; em particular, qualquer objeto menor do que $\frac{2}{3}$ tem imagem menor do que $f\left(\frac{2}{3}\right)$

(III) é uma proposição verdadeira.

3.2. Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-3) \times c}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12c}}{-6}$

Então, $f(x) = 0$ é impossível se e só se $16 + 12c < 0$, ou seja, se e só se $c < -\frac{4}{3}$

4. A equação reduzida de qualquer reta paralela à reta de equação $y = 2x$ é da forma $y = 2x + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Começemos por determinar o valor de b para o qual a condição $\begin{cases} y = 2x + b \\ y = x^2 - 4x \end{cases}$ admite uma única solução.

$$\begin{cases} y = 2x + b \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + b \\ 2x + b = x^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + b \\ x^2 - 6x - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + b \\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4b}}{2} \end{cases}$$

Então, o valor de b para o qual a condição admite uma única solução é $b = -9$

Tem-se, nesse caso, $x = 3$ e $y = -3$; o ponto tem coordenadas $(3, -3)$

5. Começemos por determinar o valor de m para o qual a condição $\begin{cases} y = mx + 4 \\ y = (x - 2)^2 + 1 \end{cases}$

admite uma única solução.

$$\begin{cases} y = mx + 4 \\ y = (x - 2)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + 4 \\ mx + 4 = x^2 - 4x + 4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + 4 \\ -x^2 + (m + 4)x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + 4 \\ x = \frac{-m - 4 \pm \sqrt{(m + 4)^2 - 4}}{-2} \end{cases}$$

Então, a condição admite uma única solução para $m + 4 = -2$ ou $m + 4 = 2$, ou seja, para $m = -6$ ou $m = -2$

Coordenadas do ponto de interseção

Para $m = -6$, tem-se $x = \frac{2}{-2} = -1$ e $y = 10$; o ponto tem coordenadas $(-1, 10)$

Para $m = -2$, tem-se $x = \frac{-2}{-2} = 1$ e $y = 2$; o ponto tem coordenadas $(1, 2)$

Pág. 47

Descritor 6.2

1.1. $\sqrt{x - 2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = \sqrt{16} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \Leftrightarrow x = 18$

1.2. Como resolver a equação $\sqrt{2x + 1} = x$?

Para fazer desaparecer o símbolo de radical, somos tentados a elevar ambos os membros ao quadrado, pois $(\sqrt{2x + 1})^2 = 2x + 1$ se $2x + 1 \geq 0$

Note-se que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, se tem $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, mas não é verdade que $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (por exemplo: $(-3)^2 = 3^2$, mas $-3 \neq 3$).

Assim, ao elevar ambos os membros de uma equação ao quadrado, podemos não obter uma equação equivalente à inicial. O que podemos garantir é que qualquer solução da equação inicial é solução da segunda.

Portanto, o que temos de fazer, depois de elevarmos ambos os membros ao quadrado, é resolver a equação obtida e verificar quais das soluções desta são também soluções da equação inicial.

$$\sqrt{2x + 1} = x \Rightarrow (\sqrt{2x + 1})^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Note-se que $1 - \sqrt{2} < 0$, pelo que se conclui imediatamente que $1 - \sqrt{2}$ não pode ser solução da equação inicial, pois $\sqrt{2x+1} \geq 0$, para qualquer x do domínio da condição.

Vejam agora se $1 + \sqrt{2}$ é solução da equação inicial.

$$\text{Tem-se: } \sqrt{2(1+\sqrt{2})+1} = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, $1 + \sqrt{2}$ é a única solução da equação $\sqrt{2x+1} = x$

$$\mathbf{1.3.} \quad \sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow x-2 = x^2-8x+16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-4 \times 1 \times 18}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 6$$

Note-se que $3-4 < 0$, pelo que se conclui imediatamente que 3 não pode ser solução da equação inicial, pois $\sqrt{x-2} \geq 0$, para qualquer x do domínio da condição.

Vejam agora se 6 é solução da equação inicial.

$$\text{Tem-se: } \sqrt{6-2} = 6-4 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 6 é a única solução da equação $\sqrt{x-2} = x-4$

1.4. Para que, simultaneamente, $\sqrt{x-5}$ e $\sqrt{x}$ tenham significado, tem que ser $x \geq 5$

Para $x \geq 5$, tem-se:

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-5} + \sqrt{x})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x-5 + 2 \times \sqrt{x-5} \times \sqrt{x} + x = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-5x} = -2x+30 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x} = -x+15 \Leftrightarrow x^2-5x = (-x+15)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x = x^2-30x+225 \Leftrightarrow 25x = 225 \Leftrightarrow x = 9$$

Dado que $9 \geq 5$, 9 é solução da condição.

$$\mathbf{1.5.} \quad \sqrt[3]{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$$

2.1. Começamos por notar que é necessário impor a condição $x+3 \geq 0$, para que a expressão $\sqrt{x+3}$ tenha significado.

$$\text{Tem-se } x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Leftrightarrow x \in [-3, +\infty[$$

$$\text{Em } [-3, +\infty[\text{ tem-se: } \sqrt{x+3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < \sqrt{4} \Leftrightarrow x+3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[-3, 1[$

2.2. Para que $\sqrt{x-1}$ tenha significado, tem que ser $x \geq 1$

$$\text{Para } x \geq 1, \text{ tem-se: } \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq \sqrt{9} \Leftrightarrow x-1 \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 10$$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[1, 10]$

2.3. Começamos por notar que é necessário impor a condição:

$$x \geq 0 \wedge x-3 \geq 0$$

$$\text{Tem-se } x \geq 0 \wedge x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Por outro lado, como se tem $\sqrt{x} \geq 0$ e $\sqrt{x-3} \geq 0$, para que $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} < 3$ é necessário que $\sqrt{x} < 3 \wedge \sqrt{x-3} < 3$, donde vem $x < 9 \wedge x < 12$, o que equivale a $x < 9$

$$\text{Tem-se, ainda, que } \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} > 0$$

Assim, em $[3, 9[$ tem-se: $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 < (3 - \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x - 3 < 9 - 6\sqrt{x} + x \Leftrightarrow 6\sqrt{x} < 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[3, 4[$

Pág. 47

Descritor 6.3

1.1.

$$f(x) = |2x| - 1$$

$$f(-x) = |2(-x)| - 1 = |-2x| - 1 = |2x| - 1 = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, f é par.

1.2.

$$f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, f é ímpar.

1.3.

$$f(x) = x|5x|$$

$$f(-x) = (-x)|5(-x)| = -x|5x| = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, f é ímpar.

1.4.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x}$$

$$f(-x) = 5\sqrt[3]{-x} = -5\sqrt[3]{x} = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, f é ímpar.

1.5.

$$f(x) = 5x^2 - 3x^4$$

$$f(-x) = 5(-x)^2 - 3(-x)^4 = 5x^2 - 3x^4 = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, f é par.

1.6.

$$f(x) = 1 + \sqrt{16 - x^2}$$

$$f(-x) = 1 + \sqrt{16 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{16 - x^2}$$

Portanto, f é par.

2.1.1. Dado que o gráfico de f interseja o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 3, tem-se $f(x) = mx + 3$

Dado que o gráfico de f interseja o eixo das abscissas no ponto de abscissa 2, tem-se

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow m \times 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

Tem-se, então, $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$

2.1.2. Tem-se:

$$g(x) = -f(x+1) = -\left[-\frac{3}{2}(x+1) + 3\right] = \frac{3}{2}(x+1) - 3 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

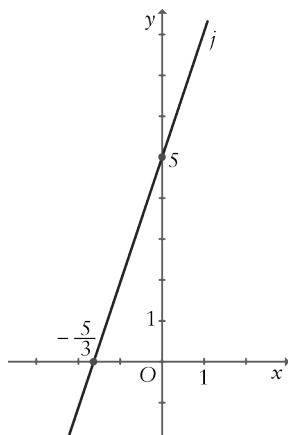
O zero de g é 1

2.1.3. Tem-se: $h(x) = -|f(x)| + 2 = -\left|-\frac{3}{2}x + 3\right| + 2$

Ora, o contradomínio da função definida por $\left|-\frac{3}{2}x + 3\right|$ é $[0, +\infty[$, pelo que o contradomínio da função definida por $-\left|-\frac{3}{2}x + 3\right|$ é $] -\infty, 0]$, pelo que o contradomínio da função h , definida por $-\left|-\frac{3}{2}x + 3\right| + 2$, é $] -\infty, 2]$

2.2. Tem-se: $j(x) = 2f(-x) - 1 = 2\left[-\frac{3}{2}(-x) + 3\right] - 1 = 2\left(\frac{3x}{2} + 3\right) - 1 = 3x + 5$

Um esboço do gráfico da função j é:



Pág. 48

Descritor 6.3

3.1. $g(x) = f(x) - 3$

f	$D'_f = [-2, 3]$
$g(x) = f(x) - 3$	$D'_g = [-5, 0]$

3.2. $h(x) = -f(x) + 1$

f	$D'_f = [-2, 3]$
$h_1(x) = -f(x)$	$D'_{h_1} = [-3, 2]$
$h(x) = -f(x) + 1$	$D'_h = [-2, 3]$

3.3. $j(x) = 2f(x)$

f	$D'_f = [-2, 3]$
$j(x) = 2f(x)$	$D'_j = [-4, 6]$

3.4. $j(x) = |f(x)|$

f	$D'_f = [-2, 3]$
$j(x) = f(x) $	$D'_j = [0, 3]$

4.1. Ponto A :

$$f(0) = (0 - 2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

A é o ponto de coordenadas (0,5)

Ponto B :

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 ; \text{ a abcissa de } B \text{ é } 4$$

B é o ponto de coordenadas (4,5)

Ponto C :

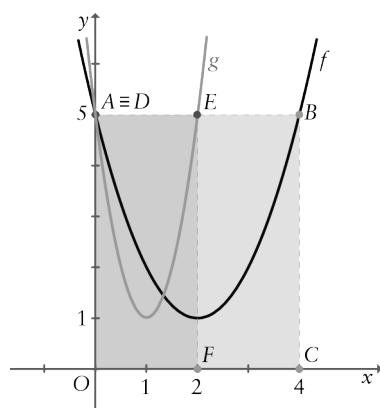
C é o ponto de coordenadas (4,0)

4.2. Área do retângulo $[ABCO] = \overline{OC} \times \overline{OA} = 4 \times 5 = 20$ unidades de área

4.3. Como $g(x) = f(2x)$, o gráfico de g é obtido, a partir do gráfico de f , por meio de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$

4.3.1. D coincide com A

4.3.2.

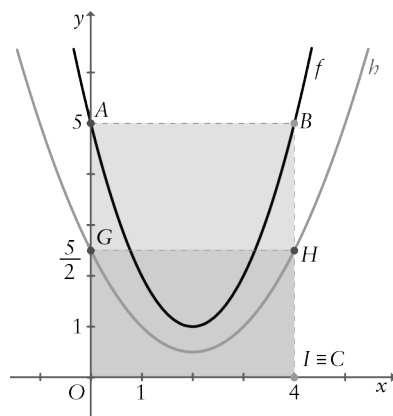


Área do retângulo $[ODEF] = \overline{OF} \times \overline{OD} = 2 \times 5 = 10$ unidades de área

4.3.3. A área do retângulo $[ODEF]$ é metade da área do retângulo $[ABCO]$, o que se compreende pelo facto de a contração horizontal que transforma o gráfico de f no gráfico de g ter coeficiente $\frac{1}{2}$, reduzindo-se, por isso, a base do retângulo a metade da do original e mantendo-se a altura.

4.4. Como $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$, o gráfico de h é obtido, a partir do gráfico de f , por meio de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$

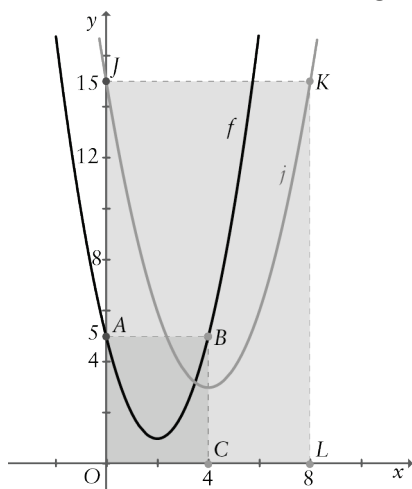
4.4.1. G é a imagem do ponto A por meio daquela contração, pelo que as suas coordenadas são (0; 2,5)



Área do retângulo $[OGHI] = \overline{OI} \times \overline{OG} = 4 \times 2,5 = 10$ unidades de área

4.4.2. A área do retângulo $[OGHI]$ é metade da área do retângulo $[ABCO]$, o que se compreende pelo facto de a contração vertical que transforma o gráfico de f no gráfico de h ter coeficiente $\frac{1}{2}$, reduzindo-se, por isso, a altura do retângulo a metade da do original e mantendo-se a base.

4.5. Como $j(x) = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$, o gráfico de j é obtido, a partir do gráfico de f , por meio de uma dilatação horizontal de coeficiente 2 seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 3



Área do retângulo $[OJKL] = \overline{OL} \times \overline{OJ} = 8 \times 15 = 120$ unidades de área

A área do retângulo $[OJKL]$ é o sêxtuplo da área do retângulo $[ABCO]$, o que se compreende pelo facto de a transformação geométrica que permite obter o gráfico de j a partir do gráfico de f conduzir a que a altura do retângulo obtido seja o triplo da do original e a base seja o dobro da do original.

Pág. 48

Descritor 6.4

1.1. Função $f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] : \sqrt{2x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2x-1}) = 5\sqrt{2x-1} - 1$$

Função $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 5x-1 \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{3}{10}, +\infty\right[$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(5x-1) = \sqrt{2(5x-1)-1} = \sqrt{10x-3}$$

1.2. Podemos afirmar que a composição de funções não é comutativa.

2.1. Tem-se

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(-x+2) = 2(-x+2) - 1 = -2x+3$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x-1) = -(2x-1) + 2 = -2x+3$$

Logo, $f \circ g = g \circ f$, pelo que f e g são permutáveis.

2.2. Por exemplo, as funções f e g , definidas por $f(x) = 3x-2$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, interseitam-se no ponto de coordenadas (1,1)

Vejamos que f e g são permutáveis:

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x-2) = \frac{1}{2}(3x-2) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Logo, $f \circ g = g \circ f$, pelo que f e g são permutáveis.

Pág. 49

Descritor 6.4

3. $y = mx + b \Leftrightarrow mx = y - b \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}y - \frac{b}{m}$, pelo que se tem $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$

Como $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f = f^{-1}$ se e só se $f(x) = f^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Tem-se $f(x) = f^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = \frac{1}{m} \wedge b = -\frac{b}{m}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} m = \frac{1}{m} \\ b = -\frac{b}{m} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 1 \\ b = -\frac{b}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = -\frac{b}{m} \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ b = -\frac{b}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = b \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ b = -b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $f = f^{-1}$ se e só se:

- $f(x) = -x + b, b \in \mathbb{R}$, caso em que se tem $f^{-1}(x) = -x + b$

A função inversa de uma função afim cujo gráfico é uma reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares é a própria função.

- $f(x) = x$, caso em que se tem $f^{-1}(x) = x$

A função inversa da função afim cujo gráfico é a bissetriz dos quadrantes ímpares é a própria função.

4.1. O gráfico de uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola.

Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e, portanto, a função tem um mínimo e não tem nenhum máximo.

Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo e, portanto, a função tem um máximo e não tem nenhum mínimo.

4.2. Os zeros da função f são: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

A média aritmética dos zeros é:

$$\frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Portanto, a abcissa do vértice da parábola é igual à média aritmética dos zeros.

5.1. Sendo r o raio da base, a área da base é πr^2

Designando por h a altura do cone, tem-se $h = 3r$

Portanto, $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 3r = \pi r^3$

Tem-se, então: $V = \pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

5.2. Tem-se:

$$\text{Área da base} = 2\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$$

Portanto, $V = \pi r^3 = \pi(\sqrt{2})^3 = \pi\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}\pi$

6. A abscissa do ponto B é 1.

A ordenada do ponto A é $\sqrt{x-1}$

$$\overline{BC} = 2(x-1)$$

Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{2} = (x-1)\sqrt{x-1}$$

Como $x-1 > 0$, tem-se $(x-1)\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^3} &= 27 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 27^2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (3^3)^2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (3^2)^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{7.1.} \quad f(-\sqrt[3]{2}) + f\left(\frac{3}{5^2}\right) &= \left[-2 \times (-\sqrt[3]{2})^3 + 2\right] + \left[\left(\frac{3}{5^2}\right)^2 + 3\right] = \\ &= [-2 \times (-2) - 2] + [5^3 - 3] = 4 - 2 + 125 - 3 = 124\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{7.2.} \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow (-2x^3 - 2 = 0 \wedge x < 0) \vee (x^2 - 3 = 0 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^3 = -1 \wedge x < 0) \vee (x^2 = 3 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow (x = -1 \wedge x < 0) \vee (x = \pm\sqrt{3} \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Os zeros de f são -1 e $\sqrt{3}$

$$\mathbf{8.1.} \quad a(0) = 1,6$$

A altura do projétil no instante em que foi lançado era 1,6 metros.

8.2. A altura máxima atingida pelo projétil é a ordenada do vértice do gráfico da função a .

$$\text{Essa ordenada é } -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{39,2^2 - 4 \times (-4,9) \times 1,6}{4 \times (-4,9)} = 80$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 80 metros.

$$\begin{aligned}\mathbf{8.3.} \quad a(t) > 35,9 &\Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 1,6 > 35,9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t - 34,3 > 0\end{aligned}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}-4,9t^2 + 39,2t - 34,3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-39,2 \pm \sqrt{39,2^2 - 4 \times (-4,9) \times (-34,3)}}{2 \times (-4,9)} \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 7\end{aligned}$$

Portanto, $a(t) > 35,9 \Leftrightarrow t \in]1, 7[$

Como $7 - 1 = 6$, o projétil esteve a uma altura superior a 35,9 metros durante 6 segundos.

8.4. Para $t > 0$, tem-se:

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 8,0$$

O projétil atingiu o solo ao fim de 8,0 segundos.

9.1. Gráfico da função f :

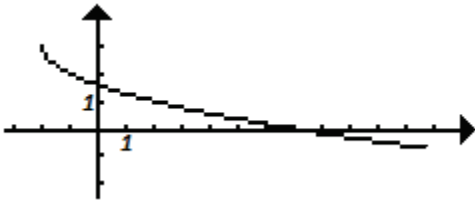
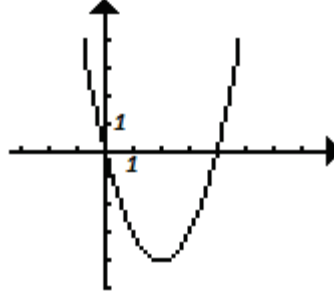


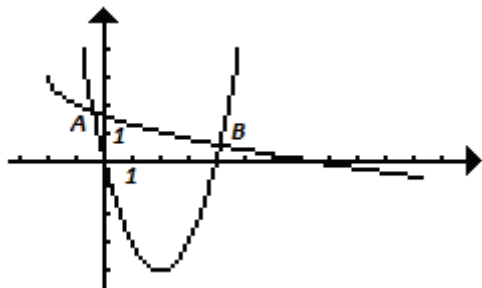
Gráfico da função g :



9.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow x+2 = 9 \Leftrightarrow x = 7$

O único zero de f é 7

9.3. Recorrendo à calculadora gráfica, podemos esboçar, sobrepostos, os gráficos de f e de g e obter as coordenadas dos pontos de interseção:



Tem-se: $A(-0,4; 1,7)$ e $B(4,1; 0,5)$

As soluções da equação $f(x) = g(x)$ são, então, $-0,4$ e $4,1$

Sejam x_A e x_B as abscissas, respetivamente, dos pontos A e B

Existem exatamente duas soluções pois, por um lado, estes dois valores satisfazem a condição e, por outro, no intervalo $[-2, x_A[$ não há outra solução, bem como no intervalo $]x_B, +\infty[$, dado que a função f é, nesse intervalo, estritamente crescente ao passo que a função g é, nesse intervalo, estritamente decrescente.

10.1. $R(4\pi\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

10.2. O volume da esfera é dado, em função do raio R da esfera, por $\frac{4}{3}\pi R^3$, pelo que

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} \times \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^3} =$$

$$= \frac{4\pi}{24} \times \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{\pi}{6} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{\pi}{6} \times \frac{x}{\pi} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

10.3. $V(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{6}\sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x}{\pi}} = 3x \Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x}{\pi}} - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{\frac{x}{\pi}} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{\frac{x}{\pi}} = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{x}{\pi} = 9 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 9\pi$$

Dado que $x > 0$, o valor procurado é 9π

Descritor 6.4

11.1. Para cada x real, seja P o ponto do gráfico cuja abscissa é x . Tem-se $P(x, -x^2 + 4x)$

$$g(x) = \overline{AP} = \sqrt{(x-1)^2 + (-x^2 + 4x - 0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (-x^2 + 4x)^2} = \\ = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^4 - 8x^3 + 16x^2} = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$$

11.2. Imediatamente se reconhece que um dos pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A é a origem do referencial, cuja abscissa é zero.

A abscissa do outro ponto será a solução não nula da equação:

$$\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1 = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x^3 - 8x^2 + 17x - 2) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 - 8x^2 + 17x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a solução não nula da equação $\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = 1$ é a solução da equação $x^3 - 8x^2 + 17x - 2 = 0$

Definindo, na calculadora, $y_1 = x^3 - 8x^2 + 17x - 2$ e utilizando o procedimento que permite obter um valor aproximado de um zero de uma função, obtemos $x \approx 0,1$

11.3. Tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x^2 + 4x = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (-x^2 + 4x)^2 &= \left(\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 &= x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Verifiquemos que 1 é solução da equação inicial.

Tem-se: $f(1) = g(1) \Leftrightarrow 3 = \sqrt{9}$, o que é verdade. Portanto, 1 é solução da equação $f(x) = g(x)$.

Interpretação geométrica:

$$\underbrace{\text{distância do ponto } A(1,0) \text{ ao ponto } (1, f(1))}_{g(1)} = f(1)$$

De facto, como os pontos de coordenadas $(1,0)$ e $(1, f(1))$ têm a mesma abscissa e como $f(1) > 0$, a distância entre estes dois pontos é $f(1) - 0 = f(1)$

Descritor 6.5

1.1. $D_f = [0, 4]$ $D_g = [0, 6]$

1.2. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, 4] \cap [0, 6] = [0, 4]$

$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = 3 + 1 = 4$

1.3. $D_{fg} = D_f \cap D_g = [0, 4]$

$(fg)(0) = f(0) \times g(0) = 2 \times 3 = 6$

2.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 9 - 2x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -2x \geq -9\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{9}{2}\} =]-\infty, \frac{9}{2}]$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 3x \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -\frac{1}{3}\} = [-\frac{1}{3}, +\infty[$

2.2. $D_h = D_{f-g} = D_f \cap D_g =]-\infty, \frac{9}{2}] \cap [-\frac{1}{3}, +\infty[= [-\frac{1}{3}, \frac{9}{2}]$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + 2 = \sqrt{9-2x} \Rightarrow (\sqrt{3x+1} + 2)^2 = (\sqrt{9-2x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 1 + 4\sqrt{3x+1} + 4 = 9 - 2x \Leftrightarrow 4\sqrt{3x+1} = 9 - 2x - 3x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x+1} = 4 - 5x \Rightarrow (4\sqrt{3x+1})^2 = (4 - 5x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16(3x+1) = 16 - 40x + 25x^2 \Leftrightarrow 48x + 16 = 16 - 40x + 25x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 88x = 0 \Leftrightarrow x(25x - 88) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{88}{25}$

Verifiquemos as soluções:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{3 \times 0 + 1} + 2 = \sqrt{9 - 2 \times 0} \Leftrightarrow 1 + 2 = 3$, o que é verdade, pelo que 0 é solução.

$x = \frac{88}{25} \rightarrow \sqrt{3 \times \frac{88}{25} + 1} + 2 = \sqrt{9 - 2 \times \frac{88}{25}} \Leftrightarrow \frac{17}{5} + 2 = \frac{7}{5}$, o que é falso, pelo que $\frac{88}{25}$ não é solução.

A função h tem apenas um zero, que é 0.

2.3. $(fg)(4) + \frac{f}{g}(1) = f(4) \times g(4) + \frac{f(1)}{g(1)} = 1 \times (\sqrt{13} + 2) + \frac{\sqrt{7}}{4} =$

$= 2 + \sqrt{13} + \frac{\sqrt{7}}{4}$

3. O domínio da função $\frac{f}{g}$ é $D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\}$

Tem-se: $D_f = [-1, +\infty[$ $\{x \in D_g: g(x) \neq 0\} = [0, +\infty[\setminus \{4\}$

Portanto, o domínio da função $\frac{f}{g}$ é $[0, +\infty[\setminus \{4\}$

Pág. 51

Descritores 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4

1. Uma possível expressão é $3n$ para $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$, pelo que se tem

$$6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = \sum_{i=2}^8 3i$$

De outro modo:

Uma possível expressão é $3n + 3$ para $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, pelo que se tem

$$6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = \sum_{i=1}^7 (3i + 3)$$

$$2. \sum_{i=1}^n (3x_i - 5) = \sum_{i=1}^n (3x_i) - \sum_{i=1}^n 5 = 3 \sum_{i=1}^n x_i - 5n = 3A - 5n$$

Pág. 52

Descritores 2.5 e 2.6

1.1. Como $x_{(1)} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tem-se $x_1 \geq x_{(1)}, x_2 \geq x_{(1)}, \dots, x_n \geq x_{(1)}$, pelo que $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \underbrace{x_{(1)} + x_{(1)} + \dots + x_{(1)}}_{n \text{ parcelas}}$, o que equivale a $\sum_{i=1}^n x_i \geq nx_{(1)}$

Como $x_{(n)} = \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tem-se $x_1 \leq x_{(n)}, x_2 \leq x_{(n)}, \dots, x_n \leq x_{(n)}$, pelo que $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \underbrace{x_{(n)} + x_{(n)} + \dots + x_{(n)}}_{n \text{ parcelas}}$, o que equivale a $\sum_{i=1}^n x_i \leq nx_{(n)}$

1.2. Tem-se:

$$nx_{(1)} \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nx_{(n)} \Leftrightarrow \frac{1}{n}(nx_{(1)}) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{n}(nx_{(n)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{(1)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq x_{(n)} \Leftrightarrow x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)}$$

1.3. Admitamos que se tem $\bar{x} = x_{(1)}$. Vem:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow x_{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow nx_{(1)} = \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow nx_{(1)} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_{(1)} + x_{(1)} + \dots + x_{(1)}}_{n \text{ parcelas}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \Leftrightarrow \quad (\text{dado que } x_{(1)} \leq x_i, \forall 1 \leq i \leq n)$$

$$\Leftrightarrow x_{(1)} = x_1 \wedge x_{(1)} = x_2 \wedge \dots \wedge x_{(1)} = x_n, \text{ pelo que se conclui que a amostra é constante.}$$

Analogamente se mostra que se $\bar{x} = x_{(n)}$ então a amostra é constante.

1.4. Tem-se $[x_{(1)} = \bar{x}] \Rightarrow [x_i = x_{(1)}, \forall 1 \leq i \leq n]$, pelo que $[\exists 1 \leq i \leq n: x_i \neq x_{(1)}] \Rightarrow x_{(1)} \neq \bar{x}$

Como $x_{(1)} \leq \bar{x}$ tem-se que $x_{(1)} \neq \bar{x}$, então $x_{(1)} < \bar{x}$, pelo que só se tem $x_{(1)} \neq \bar{x}$ se a amostra for constante.

Pág. 53

Descritor 3.3

1.1.

Tem-se $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 0$, pelo que:

$$3 + (-2) + 5 + (-1) + 2 + d_6 = 0, \text{ ou seja, } 7 + d_6 = 0, \text{ donde } d_6 = -7$$

1.2.

$$SS_x = 3^2 + (-2)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-7)^2 = 9 + 4 + 25 + 1 + 4 + 49 = 92$$

1.3.

$$\text{Determinemos } \bar{x} : d_1 = x_1 - \bar{x} \Leftrightarrow 3 = 10 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 7$$

Daqui vem:

$$d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow -2 = x_2 - 7 \Leftrightarrow x_2 = 5$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow 5 = x_3 - 7 \Leftrightarrow x_3 = 12$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow -1 = x_4 - 7 \Leftrightarrow x_4 = 6$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} \Leftrightarrow 2 = x_5 - 7 \Leftrightarrow x_5 = 9$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} \Leftrightarrow -7 = x_6 - 7 \Leftrightarrow x_6 = 0$$

Portanto, $\underline{x} = (10, 5, 12, 6, 9, 0)$ e $\bar{x} = 7$

2. $SS_x =$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

(definição de SS_x)

(desenvolvimento do quadrado de uma diferença e propriedades generalizadas da adição e da multiplicação)

(propriedade distributiva generalizada da multiplicação e adição de n parcelas iguais)

$$(2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}^2)$$

Pág. 53

Descritor 3.5

1. Dado que $\underline{x} = (160, 172, 158, 165, 166)$ tem-se $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{821}{5} = 164,2$, pelo que

$$SS_x = (160 - 164,2)^2 + (172 - 164,2)^2 + (158 - 164,2)^2 + (165 - 164,2)^2 + (166 - 164,2)^2 = \\ = 17,64 + 60,84 + 38,44 + 0,64 + 3,24 = 120,8$$

Dado que $\underline{y} = (1,6; 1,72; 1,58; 1,65; 1,66)$ tem-se $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = 1,642$, pelo que

$$SS_y = (1,6 - 1,642)^2 + (1,72 - 1,642)^2 + (1,58 - 1,642)^2 + (1,65 - 1,642)^2 + (1,66 - 1,642)^2 = \\ = 0,001\,764 + 0,006\,084 + 0,003\,844 + 0,000\,064 + 0,000\,324 = 0,012\,008$$

Portanto, $SS_x = 10\,000\,SS_y$

$$\begin{aligned}
2. SS_y &= & (\text{do exercício 2 do descritor 3.3}) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = & (\bar{y} = a\bar{x}) \\
&= \sum_{i=1}^n (ax_i)^2 - n(a\bar{x})^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n a^2 x_i^2 - na^2 \bar{x}^2 = a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a^2(n\bar{x}^2) = a^2(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2) = a^2 SS_x
\end{aligned}$$

3. Dado que $\underline{x} = (210, 182, 205, 198)$ tem-se $\bar{x} = \frac{210+182+205+198}{4} = 198,75$, pelo que

$$\begin{aligned}
SS_x &= \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - 198,75)^2 = \\
&= (210 - 198,75)^2 + (182 - 198,75)^2 + (205 - 198,75)^2 + (198 - 198,75)^2 = \\
&= 126,5625 + 280,5625 + 39,0625 + 0,5625 = 446,75
\end{aligned}$$

Dado que a balança tem um desvio positivo de 5 g em cada pesagem, tal significa que o valor obtido em cada pesagem é superior em 5 g ao valor real, pelo que $\underline{y} = (205, 177, 200, 193)$

Dado que $\underline{y} = (205, 177, 200, 193)$ tem-se $\bar{y} = \frac{205+177+200+193}{4} = 193,75$, pelo que

$$\begin{aligned}
SS_y &= \sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^4 (y_i - 193,75)^2 = \\
&= (205 - 193,75)^2 + (177 - 193,75)^2 + (200 - 193,75)^2 + (193 - 193,75)^2 = \\
&= 126,5625 + 280,5625 + 39,0625 + 0,5625 = 446,75
\end{aligned}$$

Portanto, $SS_x = SS_y$

4. Tem-se $\bar{y} = \bar{x} + h$, pelo que

$$\begin{aligned}
SS_y &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{x} + h)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + h)^2 - n(\bar{x}^2 + 2\bar{x}h + h^2) = \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_ih + h^2) + n\bar{x}^2 + 2\bar{x}nh - nh^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2h \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n h^2 - n\bar{x}^2 - 2\bar{x}nh - nh^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2hn \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + nh^2 - n\bar{x}^2 - 2\bar{x}nh - nh^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2hn\bar{x} - n\bar{x}^2 - 2hn\bar{x} = \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = SS_x
\end{aligned}$$

Pág. 54

Descritor 3.6

1.1. Tem-se $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{36}{15} = 2,4$, pelo que

$$SS_x = \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = (1 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (2 - 2,4)^2 + (3 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (2 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (3 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (1 - 2,4)^2 + (3 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (4 - 2,4)^2 + (5 - 2,4)^2 = 27,6$$

1.2.

$\tilde{x}_j$	n_j
1	6
2	2
3	3
4	3
5	1
Total	15

$$\sum_{j=1}^5 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (1 - 2,4)^2 \times 6 + (2 - 2,4)^2 \times 2 + (3 - 2,4)^2 \times 3 + (4 - 2,4)^2 \times 3 + (5 - 2,4)^2 \times 1 = 1,96 \times 6 + 0,16 \times 2 + 0,36 \times 3 + 2,56 \times 3 + 6,76 \times 1 = 27,6 = SS_x$$

Verifica-se, portanto, que $SS_x = \sum_{j=1}^5 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$

2. Seja n_j a frequência absoluta associada a $\tilde{x}_j$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \\ &= \underbrace{(\tilde{x}_1 - \bar{x})^2 + (\tilde{x}_1 - \bar{x})^2 + \dots + (\tilde{x}_1 - \bar{x})^2}_{n_1 \text{ vezes}} + \underbrace{(\tilde{x}_2 - \bar{x})^2 + (\tilde{x}_2 - \bar{x})^2 + \dots + (\tilde{x}_2 - \bar{x})^2}_{n_2 \text{ vezes}} + \dots \\ &\dots + \underbrace{(\tilde{x}_m - \bar{x})^2 + (\tilde{x}_m - \bar{x})^2 + \dots + (\tilde{x}_m - \bar{x})^2}_{n_m \text{ vezes}} = \\ &= n_1(\tilde{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\tilde{x}_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(\tilde{x}_m - \bar{x})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^m (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j \end{aligned}$$

Pág. 55

Descritor 3.11

1.1. Tem-se que $x \in [\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s] \Leftrightarrow |x - \bar{x}| \leq 2s$

Então, $x_i \notin [\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s] \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| > 2s$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pelo que $(x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

1.2. Como, da alínea anterior, $(x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ então

$$\sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > \sum_{i=1}^r 4s^2 = 4rs^2$$

$$1.3. \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 + \underbrace{\sum_{i=r+1}^n (x_i - \bar{x})^2}_{\geq 0} > 4rs^2 + \sum_{i=r+1}^n (x_i - \bar{x})^2 \geq 4rs^2$$

Portanto, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2$

1.4. Tem-se, para o cálculo da variância: $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$

Como, por outro lado, se tem $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, temos $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, pelo que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s_x^2 (n-1)$$

Como, da alínea anterior, se tem $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2$, conclui-se que $(n-1)s_x^2 > 4rs^2$, donde, dado que $ns^2 > (n-1)s_x^2$, vem $ns^2 > 4rs^2$, o que é equivalente, para $s \neq 0$, a $r < 0,25n$

1.5. Tem-se:

$x_1, \dots, x_r$: unidades estatísticas que estão fora do intervalo $[\bar{x} - ks, \bar{x} + ks]$

Tem-se:

$$x_i \notin [\bar{x} - ks, \bar{x} + ks] \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| > ks \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}|^2 > (ks)^2 \Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2 > k^2 s^2$$

$$\text{Portanto, } \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > \sum_{i=1}^r k^2 s^2$$

Vem então:

$$\sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > \sum_{i=1}^r k^2 s^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > rk^2 s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > rk^2 s^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} > \frac{rk^2 s^2}{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 > \frac{rk^2 s^2}{n-1} \Rightarrow (n-1)s^2 > rk^2 s^2 \Rightarrow (n-1) > rk^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > rk^2 \Rightarrow rk^2 < n \Rightarrow r < \frac{1}{k^2} n$$

Pág. 58

Descritor 5.1

1.

$$\bar{x} = \frac{17 \times 3 + 18 \times 22 + 19 \times 44 + 20 \times 42 + 21 \times 22 + 22 \times 10 + 23 \times 6 + 24 \times 1}{3 + 22 + 44 + 42 + 22 + 10 + 6 + 1} = \frac{2967}{150} = 19,78$$

$$SS_x = (17 - 19,78)^2 \times 3 + (18 - 19,78)^2 \times 22 + (19 - 19,78)^2 \times 44 + (20 - 19,78)^2 \times 42 + (21 - 19,78)^2 \times 22 + (22 - 19,78)^2 \times 10 + (23 - 19,78)^2 \times 6 + (24 - 19,78)^2 \times 1 = 283,74$$

$$s_x^2 = \frac{283,74}{149} \approx 1,904 \quad s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 1,38$$

2.1. Tem-se $\bar{x} = \frac{7,5+8,7+9,2+9,8+10,9+11,1+11,2+12,8+13,5}{9} = \frac{94,7}{9}$ e

$$\bar{y} = \frac{8,7+13,2+13,8+14,7+15,5+16,2+16,2+17,8}{9} = \frac{116,1}{8} \text{ pelo que}$$

$$\bar{z} = \frac{9 \times \frac{94,7}{9} + 8 \times \frac{116,1}{8}}{17} = \frac{94,7+116,1}{17} = \frac{210,8}{17} = 12,4$$

2.2. $SS_x = \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 \approx 29,7156$ e tem $9 - 1 = 8$ graus de liberdade

$SS_y = \sum_{j=1}^8 (y_j - \bar{y})^2 \approx 53,52875$ e tem $8 - 1 = 7$ graus de liberdade

$SS_z = \sum_{k=1}^{17} (z_k - \bar{z})^2 = 150,68$ e tem $17 - 1 = 16$ graus de liberdade

Tem-se

$$\begin{aligned} SS_x + SS_y + n_x(\bar{x} - \bar{z})^2 + n_y(\bar{y} - \bar{z})^2 &= \\ &= 29,7156 + 53,5288 + 9 \times (94,7/9 - 12,4)^2 + 8 \times (116,1/8 - 12,4)^2 = \\ &= 83,2444 + 31,7344 + 35,7013 \approx 150,68 = SS_z \end{aligned}$$

2.3.

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n_x-1}} \approx \sqrt{\frac{29,7156}{8}} \approx 1,9273 \text{ e } s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n_y-1}} \approx \sqrt{\frac{53,52875}{7}} \approx 2,7653$$

Como $s_y > s_x$, podemos concluir que para a passadeira rolante foi observada uma maior variabilidade nos tempos até ao consumo máximo do oxigénio.

4. De acordo com o teorema de Chebycheff, dada uma amostra de dimensão $n > 1$, de média $\bar{x}$ e desvio padrão s_x , a proporção de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x]$ é inferior a $\frac{1}{k^2}$

Neste caso, tem-se $[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x] = [10 - 3k, 10 + 3k]$

$$\text{Ora, } 10 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{10}{3}$$

Portanto, a proporção de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[0, 20]$ é inferior a $\frac{1}{(\frac{10}{3})^2}$

$$\text{Ora, } \frac{1}{(\frac{10}{3})^2} = \frac{9}{100} = 9\%$$

Assim, a temperatura mínima foi inferior a 0° em menos de 9% dos dias.

Pág. 60

Descritor 5.2

1.1. Ordenando os dados, obtém-se:

5	6	7	7	8	9	11	12	12	13	15	16	17	18	18	19
20	21	22	23	29	32	35	36	37	41	44	44	45	49	62	65

O percentil 50 é a mediana, que é a média de $x_{(16)}$ e $x_{(17)}$, ou seja, é a média de 19 e 20, que é 19,5

Como $\frac{25 \times 32}{100} = 8$, o percentil 25 é a média de $x_{(8)}$ e $x_{(9)}$, ou seja, é a média de 12 e 12, que é 12

Como $\frac{75 \times 32}{100} = 24$, o percentil 75 é a média de $x_{(24)}$ e $x_{(25)}$, ou seja, é a média de 36 e 37, que é 36,5

1.2. Como 70% de 32 é $\frac{70}{100} \times 32 = 22,4$ então $P_{70} = x_{(23)} = 35$

Dos 30% dos percursos com maior duração, aquele que tem a menor é o de 35 min.

2.1. Ordenando os dados, obtém-se:

8,1	8,3	8,9	9,1	9,2	9,5	9,6
9,9	9,9	10,1	10,2	10,3	10,4	10,9
11,4	11,6	11,6	11,9	12,1	12,1	12,6
12,7	12,9	13,0	14,4	14,5	14,7	14,8
15,0	15,1	15,1	15,3	15,7	15,7	16,2

Mínimo: 8,1

Máximo: 16,2

$16,2 - 8,1 = 8,1$

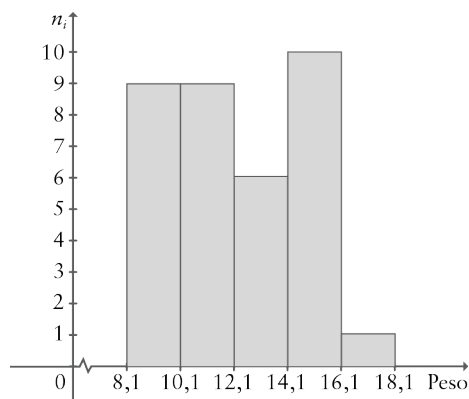
$8,1 : 2 = 4,05$

É, pois, necessário formar 5 classes de amplitude 2

Agrupando os dados em classes de amplitude 2, obtém-se:

Peso	[8,1; 10,1[	[10,1; 12,1[	[12,1; 14,1[	[14,1; 16,1[	[16,1; 18,1[
Número de crianças	9	9	6	10	1

2.2.



2.3. A área do histograma é a soma das áreas dos retângulos:

$$2 \times 9 + 2 \times 9 + 2 \times 6 + 2 \times 10 + 2 \times 1 = 18 + 18 + 12 + 20 + 2 = 70$$

Percentil de ordem 10 :

Como 10% de 70 é 7, o percentil de ordem 10 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 7.

O retângulo correspondente à classe $[8,1; 10,1[$ tem área igual a 18, pelo que o percentil de ordem 10 é o valor de x tal que $(x - 8,1) \times 9 = 7$

$$\text{Tem-se: } (x - 8,1) \times 9 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{9} + 8,1 \Leftrightarrow x \approx 8,88$$

Portanto, $P_{10} \approx 8,88$

Percentil de ordem 15 :

Como 15% de 70 é 10,5 , o percentil de ordem 15 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 10,5 .

O retângulo correspondente à classe $[8,1; 10,1[$ tem área igual a 18 , pelo que o percentil de ordem 15 é o valor de x tal que $(x - 8,1) \times 9 = 10,5$

$$\text{Tem-se: } (x - 8,1) \times 9 = 10,5 \Leftrightarrow x = \frac{10,5}{9} + 8,1 \Leftrightarrow x \approx 9,27$$

Portanto, $P_{15} \approx 9,27$

Percentil de ordem 50 :

Como 50% de 70 é 35 , o percentil de ordem 50 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 35 .

A soma das áreas dos retângulos correspondentes às classes $[8,1; 10,1[$ e $[10,1; 12,1[$ é igual a 36 , pelo que o percentil de ordem 50 é o valor de x pertencente ao intervalo $[10,1; 12,1[$ tal que $(x - 10,1) \times 9 = 17$

$$\text{Tem-se: } (x - 10,1) \times 9 = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{9} + 10,1 \Leftrightarrow x \approx 11,99$$

Portanto, $P_{50} \approx 11,99$

Percentil de ordem 75 :

Como 75% de 70 é 52,5 , o percentil de ordem 75 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 52,5 .

A soma das áreas dos retângulos correspondentes às classes $[8,1; 10,1[$, $[10,1; 12,1[$ e $[12,1; 14,1[$ é igual a 48 , pelo que o percentil de ordem 75 é o valor de x pertencente ao intervalo $[14,1; 16,1[$ tal que $(x - 14,1) \times 10 = 4,5$

$$\text{Tem-se: } (x - 14,1) \times 10 = 4,5 \Leftrightarrow x = \frac{4,5}{10} + 14,1 \Leftrightarrow x = 14,55$$

Portanto, $P_{75} = 14,55$

Percentil de ordem 85 :

Como 85% de 70 é 59,5 , o percentil de ordem 85 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 59,5 .

A soma das áreas dos retângulos correspondentes às classes $[8,1; 10,1[$, $[10,1; 12,1[$ e $[12,1; 14,1[$ é igual a 48 , pelo que o percentil de ordem 85 é o valor de x pertencente ao intervalo $[14,1; 16,1[$ tal que $(x - 14,1) \times 10 = 11,5$

$$\text{Tem-se: } (x - 14,1) \times 10 = 11,5 \Leftrightarrow x = \frac{11,5}{10} + 14,1 \Leftrightarrow x = 15,25$$

Portanto, $P_{85} = 15,25$

2.5. Dado que $P_{75} = 14,55$, o número de crianças que têm peso inferior a P_{75} é o número de crianças cujo peso é inferior a 14,55 .

Neste estudo, há 26 crianças que têm peso inferior ao percentil 75 .

2.6. Determinemos o percentil de ordem 20 :

Como 20% de 70 é 14 , o percentil de ordem 20 é o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é igual a 14 .

O retângulo correspondente à classe $[8,1; 10,1[$ tem área igual a 18 , pelo que o percentil de ordem 20 é o valor de x tal que $(x - 8,1) \times 9 = 14$

$$\text{Tem-se: } (x - 8,1) \times 9 = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{9} + 8,1 \Leftrightarrow x \approx 9,66$$

Portanto, $P_{20} \approx 9,66$

Então, 9,6 é o maior valor inferior a P_{20} , ou seja, 9,6 kg é o peso da criança mais pesada de entre as que têm os pesos 20% mais leves.

Título
MVT10
Resoluções dos Exercícios do Caderno de Apoio
(Metas Curriculares)
Matemática A – 10.º Ano

Autores
Cristina Viegas
Sérgio Valente
Colaboração
Pedro Girão
Sandra Martins
Editor
Texto Editores, Lda.
Coordenação Editorial
Nuno Martins

Design da Capa
Ideias com Peso
Arte Final da Capa
César Marreiros
Infografia
Fernanda Rocha

©2015
Texto Editores, Lda.
Lisboa, 2015 · 1.ª Edição