

Resoluções dos exercícios

do **Manual** e do **Caderno de Exercícios**

MAT 10 MATEMÁTICA A
10.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**



Texto

Propostas de resolução dos exercícios do MANUAL

Tema 1 – Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Atividades «Será que...?»	2
Exercícios propostos	4
+Exercícios propostos	20

Tema 2 – Álgebra

Atividades «Será que...?»	31
Exercícios propostos	37
+Exercícios propostos	72

Tema 3 – Geometria Analítica

Atividades «Será que...?»	86
Exercícios propostos	94
+Exercícios propostos	154

Tema 4 – Funções Reais de Variável Real

Atividades «Será que...?»	185
Exercícios propostos	187
+Exercícios propostos	258

Tema 5 – Estatística

Atividades «Será que...?»	289
Exercícios propostos	290
+Exercícios propostos	297

Propostas de resolução dos exercícios do CADERNO DE EXERCÍCIOS

Tema 1 – Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos	304
Tema 2 – Álgebra	319
Tema 3 – Geometria Analítica	345
Tema 4 – Funções Reais de Variável Real	389
Tema 5 – Estatística	367

Tema 1 | Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Atividades «Será que...?»

Pág. 10

SERÁ QUE...? Por onde seguiu a Alice?

Dever-se-á ouvir as conjeturas e argumentações dos alunos e voltar ao problema depois de estudar as várias operações com proposições.

Basicamente, designando por a a afirmação «O melhor caminho é o da direita.», o gato aponta o caminho da direita e afirma que:

$$(a \Rightarrow \sim a) \wedge (\sim a \Rightarrow a)$$

Construindo a tabela de verdade relativa a esta proposição, conclui-se que o gato está a mentir e, portanto, o melhor caminho é o da esquerda e é por esse caminho que a Alice deve ter seguido.

a	$\sim a$	$a \Rightarrow \sim a$	$\sim a \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow \sim a) \wedge (\sim a \Rightarrow a)$
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F

Pág. 39

SERÁ QUE...? Papiro de Rhind

Designemos por x a parte que restará ao camponês. Então, a quantidade de milho que dá ao Faraó é $\frac{1}{5}x$.

A equação $\frac{1}{5}x + x = 21$ traduz o problema e tem-se:

$$\frac{1}{5}x + x = 21 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} \Leftrightarrow x = 17,5$$

O camponês fica com 17 unidades e meia, tendo dado 3 unidades e meia ao Faraó.

Poder-se-á recordar o conceito de equação e de inequação. Os alunos poderão eventualmente conhecer o termo condição, e devem ser incentivados a apresentar exemplos de condições.

Pág. 49

SERÁ QUE...? Negação de proposições que envolvem quantificador

1. A negação da proposição «Todos os números reais são positivos.» é «Existe pelo menos um número real que não é positivo.»

Opção (C)

2. A negação da proposição «Existe pelo menos um homem que é imortal.» é «Todos os homens são mortais.»

Opção (B)

3. A conjectura correta será:

$$\sim(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim p(x) \text{ e } \sim(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$$

É natural que alguns alunos sejam tentados a dizer que a negação de «Todos os números reais são positivos.» é «Todos os números reais são negativos.» e que a negação da proposição «Existe pelo menos um homem que é imortal.» é «Existe pelo menos um homem que é mortal.». De um modo geral, este é um assunto em que os alunos se sentem à vontade para defenderem as suas opções. É uma boa oportunidade para exporem as suas argumentações.

Pág. 50

SERÁ QUE...?	Contraexemplos
--------------	----------------

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$

2. a) As proposições $2^2 > 2$, $3^2 > 3$, $\left(\frac{10}{3}\right)^2 > \frac{10}{3}$, $\left(-\frac{7}{2}\right)^2 > -\frac{7}{2}$ e $(-4)^2 > -4$ são todas verdadeiras e, portanto, 2, 3, $\frac{10}{3}$, $-\frac{7}{2}$ e -4 são soluções da condição $x^2 > x$.

b) Não. O facto de termos verificado que cinco números reais são solução da condição não nos permite garantir que todos os números reais sejam solução da condição.

c) A proposição $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ e é, portanto, uma proposição falsa. Conclui-se, então, que $\frac{1}{2}$ não é solução da condição $x^2 > x$.

d) Sim, o facto de existir um número real que não é solução da condição $x^2 > x$ permite concluir que a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ é falsa.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Proposições

Pág. 15

1. Tabela de verdade da conjunção:

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Pág. 16

2. Tabela de verdade da disjunção:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.

- a) A proposição $7 \leq 7$ é verdadeira porque equivale a $7 < 7 \vee 7 = 7$ e a proposição $7 = 7$ é verdadeira.
b) A proposição $7 \leq 9$ é verdadeira porque equivale a $7 < 9 \vee 7 = 9$ e a proposição $7 < 9$ é verdadeira.
c) A proposição $7 \leq 5$ é falsa porque equivale a $7 < 5 \vee 7 = 5$ e nem a proposição $7 < 5$ nem a proposição $7 = 5$ são verdadeiras.

Pág. 17

4.

- a) A proposição é falsa porque equivale à conjunção da proposição « $\sqrt{49}$ é um número irracional.» com a proposição « π é um número irracional.» e a primeira destas proposições é falsa.
b) A proposição é verdadeira porque equivale à conjunção da proposição «70 é múltiplo de 7.» com a proposição «70 é múltiplo de 5.» e ambas as proposições são verdadeiras.
c) A proposição é falsa porque equivale à conjunção da proposição « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional.» com a proposição « $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número maior do que 1.» e a primeira destas proposições é falsa.
d) A proposição é verdadeira porque equivale à conjunção da proposição «102 não é um número ímpar.» com a proposição « $\sqrt{11}$ não é um número racional.» e ambas as proposições são verdadeiras.

5.

- a) A proposição é verdadeira porque equivale à disjunção da proposição «28 é múltiplo de 7.» com a proposição «28 é múltiplo de 8.» e a primeira destas proposições é verdadeira.
b) A proposição é falsa porque equivale à disjunção da proposição « π é igual a 3,14.» com a proposição « π é igual a 3,1416.» e ambas as proposições são falsas.

Pág. 19

6. Tabela de verificação da associatividade da disjunção:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Pág. 20

7. Tabela de verificação da equivalência $p \wedge f \Leftrightarrow f$:

p	f	$p \wedge f$
V	F	F
F	F	F

Pág. 21

8. Tabelas de verificação das equivalências $p \vee v \Leftrightarrow v$ e $p \vee f \Leftrightarrow p$:

p	v	$p \vee v$
V	V	V
F	V	V

p	f	$p \vee f$
V	F	V
F	F	F

Pág. 22

9. Tabela de verificação da distributividade da disjunção em relação à conjunção. Como a conjunção e a disjunção são comutativas, basta provar que $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, quaisquer que sejam as proposições p , q e r .

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Pág. 23

10. Tabela de verificação da propriedade relativa à negação da disjunção:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Pág. 25

11.

- a) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- b) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- c) Dado que o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente é falso, a implicação é falsa.
- d) Dado que o antecedente da implicação é falso, a implicação é verdadeira.
- e) Dado que o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente é falso, a implicação é falsa.

Pág. 27

12.

- a) $v \Rightarrow a$. Para que esta proposição seja verdadeira, a tem de ter o valor lógico V.
- b) $a \Rightarrow v$. Esta proposição é verdadeira, qualquer que seja o valor lógico de a .
- c) $a \Rightarrow \sim v$. Para que esta proposição seja verdadeira, a tem de ter o valor lógico F.

Pág. 29

13.

- a) «Vou ao cinema e ao teatro.»
- b) «Não estou doente e não vou à escola.»
- c) «Não estudo e passo de ano.»

Pág. 30

14.

- a) «Passo de ano ou vou para o Minho.»
- b) «Não me porto bem ou não sou castigado.»
- c) «Não vou à escola ou não vou ao ginásio.»

15.

- a) $(\sim a \Rightarrow b) \Leftrightarrow [\sim (\sim a) \vee b] \Leftrightarrow (a \vee b)$
- b) $(a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$

16.

- a) É proposição.
- b) Não é proposição.
- c) Não é proposição.
- d) É proposição.
- e) Não é proposição.

17.

- a) F b) F c) F d) V
- e) V f) V g) F

18.

- a) $\sim p \Leftrightarrow \sim v \Leftrightarrow f$
- b) $p \wedge q \Leftrightarrow v \wedge f \Leftrightarrow f$
- c) $\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim v \vee f \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$
- d) $(\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim v \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow (f \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow v$

19.

- a) $\sim a \wedge b$ é uma proposição verdadeira se e só se ambas as proposições $\sim a$ e b forem verdadeiras, pelo que se conclui que a é falsa e b é verdadeira, ou seja, $a \Leftrightarrow f$ e $b \Leftrightarrow v$.
- b) $\sim a \vee \sim b$ é uma proposição falsa se e só se ambas as proposições $\sim a$ e $\sim b$ forem falsas, pelo que se conclui que a e b são ambas verdadeiras, ou seja, $a \Leftrightarrow v$ e $b \Leftrightarrow v$.

20.

$\sim(a \vee b) \wedge (b \vee c)$ é verdadeira, pelo que
 $\sim(a \vee b)$ é verdadeira e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 $a \vee b$ é falsa e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e $b \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e $f \vee c$ é verdadeira, pelo que
 a é falsa, b é falsa e c é verdadeira.
 De entre aquelas três línguas, a Leonor só estuda alemão.

21.

- a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- c) $(p \wedge v) \Leftrightarrow p$
- d) $(f \vee r) \Leftrightarrow r$
- e) $[\sim(p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Propriedade comutativa da conjunção.

Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção.

A conjunção de uma qualquer proposição p com uma proposição verdadeira é equivalente a p .

A disjunção de uma proposição falsa com uma qualquer proposição r é equivalente a r .

Leis de De Morgan e propriedade da dupla negação.

22.

a) $2 \geq -1$

b) Sejam p e c as proposições:

p : «As retas r e s são paralelas.»

c : «As retas r e s são concorrentes.»

Pretende-se negar a proposição $p \vee c$.

Tem-se $\sim(p \vee c) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim c$.

A negação da proposição enunciada é, por isso, «As retas r e s não são paralelas nem concorrentes.»

c) Sejam r e i as proposições:

r : «O triângulo $[ABC]$ é retângulo.»

i : «O triângulo $[ABC]$ é isósceles.»

Pretende-se negar a proposição $\sim r \wedge i$.

Tem-se $\sim(\sim r \wedge i) \Leftrightarrow r \vee \sim i$.

A negação da proposição enunciada é, por isso, «O triângulo $[ABC]$ é retângulo ou não é isósceles.»

d) $\sim(0 \leq 2 < 1) \Leftrightarrow \sim(0 \leq 2 \wedge 2 < 1) \Leftrightarrow \sim(0 \leq 2) \vee \sim(2 < 1) \Leftrightarrow 0 > 2 \vee 2 \geq 1$

23.

a) $\sim(a \vee \sim b) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim(\sim b) \Leftrightarrow \sim a \wedge b$

b) $\sim[\sim(a \wedge b) \wedge c] \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee \sim c$

c) $\sim[a \wedge (\sim b \vee c)] \Leftrightarrow \sim a \vee \sim(\sim b \vee c) \Leftrightarrow \sim a \vee (b \wedge \sim c)$

24.

a) $\sim(\sim p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge q \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge f \Leftrightarrow f$

b) Dado que $\sim p \wedge q$ é a negação de $p \vee \sim q$, a proposição enunciada é a disjunção de uma proposição com a sua negação, pelo que, pelo princípio do terceiro excluído, é verdadeira.

De outro modo:

$$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \vee \sim p] \wedge [(p \vee \sim q) \vee q] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \vee \sim q] \wedge [p \vee (\sim q \vee q)] \Leftrightarrow [v \vee \sim q] \wedge [p \vee v] \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$$

c) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [f \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge v \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)$

Pág. 38

25.

a) $(2 + 2 = 5 \Rightarrow 1 > 1) \Leftrightarrow (f \Rightarrow f) \Leftrightarrow v$

b) $(7 = 8 \Rightarrow 7 \neq 8) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$

c) $[-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2] \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$

26. Como a proposição $\sim a \vee b$ é uma proposição falsa, $\sim a$ é falsa e b é falsa, pelo que se pode concluir que a proposição a é verdadeira e que a proposição b é falsa.

a) $a \Leftrightarrow v$

b) $a \vee b \Leftrightarrow v \vee f \Leftrightarrow v$

c) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$

d) $(b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$

27.

a) $\sim a \Rightarrow \sim b$ é uma proposição falsa, pelo que

$\sim a$ é uma proposição verdadeira e $\sim b$ é uma proposição falsa, pelo que a é uma proposição falsa e b é uma proposição verdadeira.

b) $a \Rightarrow \sim a \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que

a é uma proposição verdadeira e $\sim a \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que a é uma proposição verdadeira e $f \vee b$ é uma proposição falsa, pelo que a é uma proposição verdadeira e b é uma proposição falsa.

28.

a) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \sim a \vee b$

b) $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Leftrightarrow \sim a \vee (b \Rightarrow c) \Leftrightarrow \sim a \vee (\sim b \vee c)$

29. Sejam e e m as proposições:

e : «Este rapaz é estudante.»

m : «Este rapaz mente.»

a) A proposição enunciada pode ser traduzida por $e \Rightarrow \sim m$.

Tem-se $(e \Rightarrow \sim m) \Leftrightarrow \sim e \vee \sim m$.

Esta proposição pode traduzir-se por «Este rapaz não é estudante ou não mente.»

b) $\sim(e \Rightarrow \sim m) \Leftrightarrow e \wedge \sim(\sim m) \Leftrightarrow e \wedge m$

Esta proposição pode traduzir-se por «Este rapaz é estudante e mente.»

30.

a) Sejam p e i as proposições:

p : «2 é um número primo.»

i : «2 é um número ímpar.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $\sim p \Rightarrow i$.

Tem-se $\sim(\sim p \Rightarrow i) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim i$.

Esta proposição pode traduzir-se por «2 não é um número primo nem ímpar.»

b) Sejam q e u as proposições:

q : «3 é maior do que 4.»

u : «3 é maior do que 1.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $q \Rightarrow u$.

Tem-se $\sim(q \Rightarrow u) \Leftrightarrow q \wedge \sim u$.

Esta proposição pode traduzir-se por «3 é maior do que 4 mas menor ou igual a 1.»

c) Sejam a e m as proposições:

a : «Agrada-me o programa do canal 1.»

m : «Mudo de canal.»

A proposição enunciada pode ser traduzida por $\sim a \Rightarrow m$.

Tem-se $\sim(\sim a \Rightarrow m) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim m$.

Esta proposição pode traduzir-se por «Não me agrada o programa do canal 1, mas não mudo de canal.»

31.

a₁) $p \Rightarrow q$

a₂) $p \wedge \sim q$

a₃) $q \Rightarrow p$

b₁) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A ganha todos os domingos, mas não ganha o campeonato.»

b₂) $\sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim(\sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A não ganha todos os domingos ou ganha o campeonato.»

b₃) $\sim(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \wedge \sim p$

Esta proposição pode traduzir-se por «O clube A ganha o campeonato e não ganha todos os domingos.»

c) Admitir que houve pelo menos um domingo em que o clube A não ganhou, significa considerar que a proposição p é falsa.

c₁) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (f \Rightarrow q) \Leftrightarrow v$

c₂) $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (f \wedge \sim q) \Leftrightarrow f$

c₃) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow f) \Leftrightarrow \sim q \vee f \Leftrightarrow \sim q$

32.

Primeiro processo:

$$[(c \Rightarrow b) \Rightarrow a] \Leftrightarrow \sim(c \Rightarrow b) \vee a \Leftrightarrow (c \wedge \sim b) \vee a \Leftrightarrow a \vee (c \wedge \sim b)$$

Segundo processo:

a	b	c	$\sim b$	$c \wedge \sim b$	$a \vee (c \wedge \sim b)$	$c \Rightarrow b$	$(c \Rightarrow b) \Rightarrow a$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F

Capítulo 2 | Condições e conjuntos

Pág. 41

34.

- a) Não pode, pois só se define o máximo divisor comum de dois ou mais números naturais.
- b) D_x pode ser $\mathbb{R}$, mas o 0 não pode pertencer a D_y .
- c) Não pode, a variável não pode tomar valores inferiores a -3.
- d) Pode, pois a expressão $x^2 + 3$ é positiva para qualquer valor real da variável x .

35.

- a) Não é uma condição. Por exemplo, para $x = 1999$, a expressão converte-se em «A equipa vencedora da Taça de Portugal, em futebol, no ano 1999.», que não é uma proposição, mas sim uma expressão que designa a equipa de futebol do Beira-Mar.
- b) É uma condição. Sempre que se substitui a por um número real, obtém-se uma proposição: falsa, se se substituir a por um número real não positivo; verdadeira, se se substituir a por um número real positivo.
- c) Não é uma condição. Por exemplo, para $y = \sqrt{5}$, a expressão converte-se em «O maior número inteiro inferior a $\sqrt{5}$.», que não é uma proposição, mas sim uma expressão que designa o número 2.
- d) É uma condição. Sempre que se substitui a variável por um número natural, obtém-se uma proposição: verdadeira, se a concretização da variável for um número que tem quatro divisores; falsa, se a concretização da variável for um número que não tem quatro divisores.
- e) É uma condição. Sempre que se substitui a variável por um número real, obtém-se uma proposição: verdadeira, se substituirmos x por -1 ou por 3; falsa, para qualquer outra concretização.
- f) Não é uma condição. Por exemplo, quando se substitui x por 0 obtém-se não uma proposição, mas uma expressão que designa o número -3.

Pág. 42

36.

- a) A proposição $(-1)^5 + (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 0$ é verdadeira.
- b) A proposição $1^5 + 1^3 + 1^2 + 1 = 0$ é falsa.

Pág. 43

37.

$\frac{1}{2} + a = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{17}{6}$, pelo que $\frac{17}{6}$ é o valor de a para o qual $\frac{1}{3}$ é solução da condição $\frac{x}{2} + a = 3$.

Pág. 44

38.

- a) $\sim p(n) \vee q(n)$
- b) Dizer que n é múltiplo de 6 é dizer que é par e é múltiplo de 3. Assim, a condição enunciada pode-se traduzir por $\sim p(n) \wedge q(n)$.
- c) O resto da divisão de um número natural, n , por 3 é 0, 1 ou 2. Se o resto for 0, o número diz-se múltiplo de 3, pelo que o resto da divisão de n por 3 é 1 ou 2 se e só se n não for múltiplo de 3. Assim, condição enunciada pode traduzir-se por $\sim q(n)$.

39.

a) 5 é solução, pois $\sim (5 + 1 \neq 6)$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 4 não é solução, pois $\sim (4 + 1 \neq 6)$ é uma proposição falsa.

b) Por exemplo, 3 é solução, pois $2 \times 3 > 5 \wedge 3 + 1 \leq 9$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 1 não é solução, pois $2 \times 1 > 5 \wedge 1 + 1 \leq 9$ é uma proposição falsa.

c) Por exemplo, 2 é solução, pois $2 = 2 \vee 2 = 3$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 1 não é solução, pois $1 = 2 \vee 1 = 3$ é uma proposição falsa.

d) Por exemplo, 4 é solução, pois $4 > 1 \Rightarrow 4 > 2$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, $\frac{3}{2}$ não é solução, pois $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \frac{3}{2} > 2$ é uma proposição falsa.

e) Por exemplo, 2 é solução, pois $2^2 = -1 \Rightarrow 2 = 5$ é uma proposição verdadeira;
aliás, todos os números reais são solução da condição.

f) Por exemplo, 0 é solução, pois $0 = 5 \Rightarrow 0^2 = -1$ é uma proposição verdadeira.

5 não é solução, pois $5 = 5 \Rightarrow 5^2 = -1$ é uma proposição falsa.

g) Por exemplo, -2 é solução, pois $(-2)^2 = -1 \Leftrightarrow -2 \geq 0$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 2 não é solução, pois $2^2 = -1 \Leftrightarrow 2 \geq 0$ é uma proposição falsa.

h) Por exemplo, -10 é solução, pois $|-10| \geq 0 \Leftrightarrow -10 \leq 0$ é uma proposição verdadeira.

Por exemplo, 10 não é solução, pois $|10| \geq 0 \Leftrightarrow 10 \leq 0$ é uma proposição falsa.

Pág. 45

40.

a) Falso. A soma de qualquer número natural com 3 é sempre maior do que 3 e, portanto, nunca é 1.

b) Verdade. Para $n = 7$, a condição:

$$n > 1 \wedge n \text{ é divisor de } 7$$

converte-se numa proposição verdadeira (7 é solução da condição).

41.

a) Verdade. Todos os números reais negativos são solução da condição $2x < x$.

b) Verdade. Para $x = -3$, a condição:

$$x \neq 3 \wedge x^2 = 9$$

converte-se numa proposição verdadeira (-3 é solução da condição).

42.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3,14 < x < \pi$

b) $\exists n \in \mathbb{N} : 3n = 18$

Pág. 46

43.

a) Falso. Para $n = 1$, a condição:

$$2n > 2$$

converte-se numa proposição falsa.

b) Falso. Por exemplo, para $n = 6$, a condição:

$$n \text{ é múltiplo de } 3 \Rightarrow n \text{ é ímpar}$$

converte-se numa proposição falsa.

44.

a) Verdade. Se a um número real qualquer adicionarmos 1, obtemos sempre um número que é maior do que ele, e, portanto, diferente dele.

b) Falso. Por exemplo, para $x = -2$, a condição $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ converte-se numa proposição falsa.

45.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, m.d.c. $(n, n + 1) = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \times x = x \wedge x \times 1 = x$

Pág. 47

46.

a) Possível ($\sqrt{5}$, por exemplo, é solução), mas não universal (1, por exemplo, não é solução).

b) Possível (-5 , por exemplo, é solução), mas não universal (0, por exemplo, não é solução).

c) Possível (1, por exemplo, é solução), mas não universal (0 não é solução).

d) A condição é universal.

e) A condição dada é equivalente à condição $x^2 = -4$ e é, portanto, uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

f) A condição é universal, pois qualquer valor da variável que transforme $x > 3$ numa proposição verdadeira, também transforma $x^3 > 27$ numa proposição verdadeira, e qualquer valor da variável que transforme $x > 3$ numa proposição falsa, também transforma $x^3 > 27$ numa proposição falsa.

47.

a) Possível (2 é solução), mas não universal (3, por exemplo, não é solução).

b) Impossível. Tem-se $n^2 + n = n(n + 1)$. Qualquer que seja o valor atribuído a n , tem-se que n e $n + 1$ são números naturais consecutivos. Por isso, um deles é necessariamente par. Portanto, o produto $n(n + 1)$ é sempre par.

48.

a) $\Rightarrow$

b) $\Leftarrow$

c) $\Rightarrow$

d) $\Leftarrow$

49.

As condições não são equivalentes, pois a condição $p(n) \Leftrightarrow q(n)$ não é universal em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $p(10)$ é uma proposição verdadeira e $q(10)$ é uma proposição falsa.

Pág. 48

50.

a) A proposição enunciada pode traduzir-se por «Qualquer número real compreendido entre 0 e 1 é maior do que o seu quadrado.», o que é verdade.

b) A proposição enunciada pode traduzir-se por «Pelo menos um dos números 1, 51 e 85 é primo.», o que é falso: 1 não é primo, por definição, 51 não é primo, pois $51 = 3 \times 17$ e 85 não é primo, pois $85 = 5 \times 17$.

51.

Por exemplo:

a) Impossível em $\mathbb{N}$, possível mas não universal em $\mathbb{Z}$, universal em $\{-1\}$.

b) Impossível em $\mathbb{N}$, possível mas não universal em $\mathbb{Z}$, universal em $] -\infty, 1[$.

c) Impossível no conjunto das aves, possível mas não universal no conjunto dos mamíferos, universal no conjunto dos seres humanos.

52.

Como a condição $p(x)$ é possível, existe, no universo U , pelo menos um objeto a tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira, pelo que $\sim p(a)$ é uma proposição falsa. Portanto, a condição $\sim p(x)$ não é universal. Como a condição $p(x)$ não é universal, existe, no universo U , pelo menos um objeto b tal que $p(b)$ é uma proposição falsa, pelo que $\sim p(b)$ é uma proposição verdadeira. Portanto, a condição $\sim p(x)$ é possível.

Pág. 49

53.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sim(\exists x : 2x - 3 = x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x, \sim(2x - 3 = x) \Leftrightarrow \forall x, 2x - 3 \neq x \\ \text{b)} \quad & \sim(\forall x, x < 1 \vee x > 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x : \sim(x < 1 \vee x > 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x : \sim(x < 1) \wedge \sim(x > 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x : x \geq 1 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x : 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

54.

a) «Há pelo menos um número natural que não é ímpar.»

A tradução da proposição inicial em linguagem simbólica pode ajudar a esclarecer a negação da proposição em linguagem corrente:

$$\begin{aligned} & \sim(\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ é ímpar}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \sim(x \text{ é ímpar}) \end{aligned}$$

b) «Todos os colegas da minha turma têm irmãos.»

Recorrendo à tradução da proposição inicial em linguagem simbólica, têm-se:

$$\begin{aligned} & \sim(\exists x \in T : x \text{ não tem irmãos}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x \in T, \sim(x \text{ não tem irmãos}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x \in T, x \text{ tem irmãos} \end{aligned}$$

c) «Existe pelo menos uma pessoa nesta sala que não está a usar um chapéu.»

Em linguagem simbólica, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sim(\forall x \in S, x \text{ está a usar um chapéu}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x \in S : \sim(x \text{ está a usar um chapéu}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x \in S : x \text{ não está a usar um chapéu} \end{aligned}$$

55.

Seja $p(x)$ uma condição. Dizer que a condição $p(x)$ é universal, é dizer que a proposição $\forall x, p(x)$ é uma proposição verdadeira. Atendendo a que as proposições $\forall x, p(x)$ e $\sim[\exists x : \sim p(x)]$ são equivalentes, conclui-se que a proposição $\exists x : \sim p(x)$ é falsa, o que significa que a condição $\sim p(x)$ é uma condição impossível.

Pág. 50

56.

$$\begin{aligned} & \sim[\exists x \in A : p(x)] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sim[\exists x : x \in A \wedge p(x)] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x, \sim[x \in A \wedge p(x)] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x, \sim x \in A \vee \sim p(x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow \sim p(x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall x \in A, \sim p(x) \end{aligned}$$

Pág. 51

57.

A afirmação «Todos os números ímpares são primos.» é falsa pois, por exemplo, 15 é ímpar e não é primo.

Pág. 52

58.

a) $\{1, 4, 9\}$

b) $\{-4, -3, -2, -1\}$

Pág. 53

59.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par} \wedge x < 7\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5 \wedge x \leq 8\}$$

60.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$ b) $\{x \in \mathbb{Z} : x > 5\}$

Pág. 67

61.

a) Não é uma condição porque, para cada concretização da variável, não dá origem a uma proposição.

b) Não é uma condição.

c) É uma condição porque, para cada concretização da variável, dá origem a uma proposição; por exemplo, para $x = 5$, a condição converte-se em $2 \times 5 = 1$.

d) É uma condição.

e) Não é uma condição.

f) É uma condição.

62.

3, por exemplo, é solução da condição porque a proposição «3 é divisor de 12.» é verdadeira. 5, por exemplo, não é solução da condição porque a proposição «5 é divisor de 12.» é falsa. De um modo geral, qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ é solução da condição e qualquer número natural que não esteja neste conjunto não é solução da condição.

63.

-3 não é solução da condição porque a proposição « $(-3)^3 - 3(-3)^2 - (-3) + 3 = 0$ » é falsa.

-1 é solução da condição porque a proposição « $(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3 = 0$ » é verdadeira.

1 é solução da condição porque a proposição « $1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 3 = 0$ » é verdadeira.

3 é solução da condição porque a proposição « $3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 3 = 0$ » é verdadeira.

64.

Para que -2 seja solução da condição é necessário que esta se converta, para $x = -2$, numa proposição verdadeira.

Tem-se:

$$(-2)^3 - k(-2) = 1 \Leftrightarrow -8 + 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$$

Na verdade, a proposição $(-2)^3 - \frac{9}{2}(-2) = 1$ é verdadeira.

65.

Para que -1 e 2 sejam soluções da condição é necessário que esta se converta, para $x = -1$ e para $x = 2$, em proposições verdadeiras.

Tem-se:

$$a \times (-1)^3 < 1 \wedge a \times 2^3 < 1 \Leftrightarrow a > -1 \wedge a < \frac{1}{8} \Leftrightarrow a \in \left] -1, \frac{1}{8} \right[$$

66.

a) Uma solução da condição $x > 2 \vee x \leq \sqrt{2}$ é qualquer número real que seja solução de, pelo menos, uma das condições $p(x)$ e $q(x)$. Por exemplo, 3 e -1 são duas soluções da condição.

Qualquer número real que converta ambas as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições falsas não é solução da condição $x > 2 \vee x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, $1,5$ e 2 não são soluções da condição.

b) $\frac{1}{2} > 2 \vee \frac{1}{2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$, pelo que $\frac{1}{2}$ não é solução da condição.

c) Qualquer número real que converta ambas as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições com o mesmo valor lógico é solução da condição $x > 2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, $1,5$ e 2 são soluções da condição.

Qualquer número real que converta as condições $p(x)$ e $q(x)$ em proposições com diferentes valores lógicos não é solução da condição $x > 2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$. Por exemplo, 3 e -1 não são soluções da condição.

d) 3 é solução da condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ se e só se for verdadeira a proposição $p(3) \Rightarrow q(3)$.

$$p(3) \Rightarrow q(3) \Leftrightarrow (3 > 2 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{2}) \Leftrightarrow (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$$

A proposição « 3 é solução da condição $p(x) \Rightarrow q(x)$.» é falsa.

67. Como $p(a) \vee q(a)$ é uma proposição falsa, podemos concluir que são falsas ambas as proposições $p(a)$ e $q(a)$.

- | | | |
|---|---------------|-------------------------------|
| a) $p(a) \vee \sim q(a) \Leftrightarrow f \vee \sim f \Leftrightarrow f \vee v \Leftrightarrow v$ | $\rightarrow$ | a é solução da condição |
| b) $[p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [f \Rightarrow f] \Leftrightarrow v$ | $\rightarrow$ | a é solução da condição |
| c) $[\sim p(a) \Rightarrow q(a)] \Leftrightarrow [\sim f \Rightarrow f] \Leftrightarrow [v \Rightarrow f] \Leftrightarrow f$ | $\rightarrow$ | a não é solução da condição |
| d) $[p(a) \Leftrightarrow q(a)] \Leftrightarrow [f \Leftrightarrow f] \Leftrightarrow v$ | $\rightarrow$ | a é solução da condição |

68.

a) A proposição «Existe pelo menos um número natural.» é verdadeira; 1 , por exemplo, é um número natural.

b) A proposição «Existe pelo menos um número natural que não é um número inteiro.» é falsa, pois qualquer número natural é inteiro.

c) A proposição «Existe pelo menos um x cujo módulo é igual ao módulo de -4 .» é verdadeira; basta considerar o próprio -4 .

d) A proposição «Existe pelo menos um número racional cujo quadrado é igual a 2 .» é falsa, pois só há dois números cujo quadrado é igual a 2 e são ambos irracionais: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

69.

- a) A proposição $\exists x : p(x)$ é falsa e, portanto, a condição $p(x)$ é uma condição impossível.
b) A proposição $p(a)$ é uma proposição verdadeira; então, a condição $p(x)$ é possível
e a proposição $\exists x : p(x)$ é verdadeira.

70.

- a) A proposição «Existe pelo menos um número natural que é igual ao seu dobro.» é falsa, pois só há um número que é igual ao seu dobro e esse número, o zero, não é natural.
b) A proposição «Qualquer número real é diferente do seu quadrado.» é falsa, pois $1 = 1^2$.
c) A proposição «Existe pelo menos um número real que é maior do que 1 e menor do que 2.» é verdadeira; 1,5, por exemplo, é maior do que 1 e menor do que 2.
d) A proposição «O quadrado de qualquer número real é maior ou igual ao próprio número.» é falsa, pois, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$.
e) A proposição «Existe pelo menos um número real cujo décuplo é menor do que o próprio número.» é verdadeira; tem-se, por exemplo, $10 \times (-1) < -1$.
f) A proposição «Existe pelo menos um número real menor do que 2 cujo quadrado é maior do que 4.» é verdadeira; tem-se, por exemplo, $-3 < 2 \wedge (-3)^2 > 4$.

71.

- a) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x < 2$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $1,5 > 1 \wedge 1,5 < 2$.
b) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$.
c) A condição é possível, pois a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge x^2 = 9$ é verdadeira. Tem-se, por exemplo, $-3 \neq 3 \wedge (-3)^2 = 9$.
d) A condição é impossível, pois é falsa a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 1$ dado que $1 - x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 < 0$ e não existe nenhum número real cujo quadrado seja negativo.
e) A condição é impossível, pois é falsa a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq x$ dado que, para qualquer concretização da variável, a condição $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq x$ se converte numa proposição que é uma implicação cujo antecedente é verdadeiro e cujo consequente é falso.

Pág. 68

72.

A proposição $0 > 1 \Rightarrow 0 < 2$ é verdadeira (recorda que $(f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$) e, portanto, a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow x < 2$ é verdadeira.
A proposição $3 > 1 \Rightarrow 3 < 2$ é falsa (recorda que $(v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f$) e, portanto, a proposição $\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow x < 2$ é falsa.

73.

- a) $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível (não existe qualquer número real compreendido entre -2 e 2 cujo módulo seja maior do que 3).
b) $q(x) \vee r(x)$ é uma condição universal (qualquer concretização da variável converte uma das duas condições, $q(x)$ e $r(x)$, numa proposição verdadeira).

74.

- a) A proposição é falsa porque, por exemplo, para $x = 1$, a condição $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ converte-se na proposição $(1 + 2)^2 = 1^2 + 4$, que é uma proposição falsa.
- b) A proposição é falsa porque, para $x = 0$, a condição $|x| > 0$ converte-se na proposição $|0| > 0$, que é uma proposição falsa.
- c) A proposição é verdadeira porque, para $x = 0$, a condição $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ converte-se na proposição $(0 + 2)^2 = 0^2 + 4$, que é uma proposição verdadeira.
- d) A proposição é falsa porque existe pelo menos um habitante de Almada que não é português (dando este facto como certo para quem não conheça nenhum estrangeiro que habite em Almada).
- e) A proposição é falsa porque, como cada quadrado tem os ângulos todos retos, todos os quadrados são retângulos.

75.

- a) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 = x^2 + 4) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2 \neq x^2 + 4$
- b) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \sim(|x| > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0$
- c) $\sim[\exists x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2 = x^2 + 4] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 \neq x^2 + 4$
- d) Há pelo menos um habitante de Almada que não é português.
- e) Todos os quadrados são retângulos.

76.

- a) A proposição «Há pelo menos um número real maior ou igual do que 2.» é verdadeira.
A negação da proposição é: $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2$.
- b) A proposição «A soma de qualquer número natural com 2 é diferente de 1.» é verdadeira.
A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{N} : x + 2 = 1$.
- c) A proposição «Qualquer número racional é menor do que 2 ou maior do que 3.» é falsa.
A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 3$.
- d) A proposição «Há pelo menos um número inteiro estritamente compreendido entre 2 e 3.» é falsa.
A negação da proposição é: $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 \vee x \geq 3$.
- e) A proposição «Tem-se, para qualquer número real, que, se ele for menor do que 3, então o seu quadrado é menor do que 9.» é falsa.
A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x^2 \geq 9$.
- f) Começamos por analisar a condição $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$: como, para qualquer número real, se tem $x^2 \geq 0$, tem-se sempre $x^2 + 1 \geq 1$, pelo que, por um lado, $\frac{1}{x^2 + 1}$ é sempre positivo e, por outro, é sempre menor ou igual a 1. Então, a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$ é verdadeira.
A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2 + 1} \leq 0 \vee \frac{1}{x^2 + 1} > 1$.
- g) A proposição «Tem-se, para qualquer número real, que, se o seu módulo for igual a 4, então esse número é -4.» é falsa.
A negação da proposição é: $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = 4 \wedge x \neq -4$.

77.

Se a adição fosse distributiva em relação à multiplicação, ter-se-ia, para quaisquer números reais a , b e c :

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Ora, tem-se, por exemplo, $2 + (3 \times 4) = 14$ e $(2 + 3) \times (2 + 4) = 30$, pelo que, para $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ se tem $a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$.

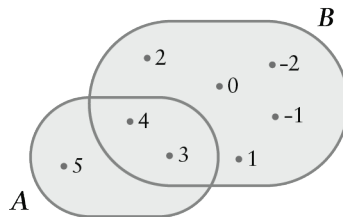
78.

Tem-se: $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) $A \cap B = \{3, 4\}$

b) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

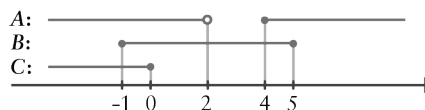
c) $A \setminus B = \{5\}$



79.

Tem-se: $A =] - \infty, 2[\cup [4, +\infty[$, $B = [-1, 5]$ e $C =] - \infty, 0]$

Representemos, na reta real, os conjuntos A , B e C :



Tem-se:

a) $A \cap B \cap C = [-1, 0]$

b) $A \cap B = [-1, 2[\cup [4, 5]$

c) $B \setminus C =]0, 5]$

d) $A \cap \bar{C} =]0, 2[\cup [4, +\infty[$

e) $A \cup \bar{C} = \mathbb{R}$

80.

a) $1 - 2x < 6 \Leftrightarrow -2x < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

Conjunto-solução = $]-\frac{5}{2}, +\infty[$

b) $\frac{x}{3} - \frac{1+x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 - 3x = 6 \Leftrightarrow -x = 9 \Leftrightarrow x = -9$

Conjunto-solução = $\{-9\}$

c) $1 - |x| < 4 \wedge x^2 = 1 \Leftrightarrow -|x| < 3 \wedge (x = -1 \vee x = 1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x| > -3 \wedge (x = -1 \vee x = 1) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Conjunto-solução = $\{-1, 1\}$

Nota: $|x| > -3$ é uma condição universal e a conjunção de uma condição universal com outra condição é esta condição.

d) $1 + x^2 = 0 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = -1 \wedge x^4 - x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Conjunto-solução = $\emptyset$

Nota: $x^2 = -1$ é uma condição impossível e a conjunção de uma condição impossível com outra condição é uma condição impossível.

e) $|x| + x = 0 \vee x - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| = -x \vee x > 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x > 1$

Conjunto-solução = $] - \infty, 0] \cup]1, +\infty[$

+ Exercícios propostos

Pág. 69

81.

Opção (C)

A opção (A) é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

A opção (B) é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras.

A opção (C) é uma proposição falsa, pois é a disjunção de duas proposições falsas.

A opção (D) é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição falsa com uma proposição verdadeira.

82.

Opção (B)

Se a proposição «Encestei pelo menos 10 vezes.» é falsa, então é verdadeira a proposição «Encestei no máximo 9 vezes.», pelo que também se pode concluir que falhei pelo menos 7 vezes. Então, a única afirmação verdadeira é a da opção (B).

83.

Opção (D)

Substituindo a variável sucessivamente pelos valores apresentados em todas as opções, observa-se que só na opção (D) é que a condição se converte em duas proposições verdadeiras.

84.

Opção (C)

$$\sim(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \sim p(x) \wedge \sim q(x) \Leftrightarrow \sim(x > -2) \wedge \sim(x \leq \sqrt{2}) \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x > \sqrt{2}$$

85.

Opção (A)

A proposição a é falsa, pois, por exemplo, um retângulo não quadrado tem os ângulos internos iguais e não é um polígono regular.

A proposição b é verdadeira, pois, por exemplo, um losango tem os lados iguais e os ângulos internos diferentes.

A proposição c é verdadeira, pois, por exemplo, o retângulo com comprimento igual a 1 e largura igual a 2 e o retângulo com comprimento igual a 1 e largura igual a 3 não são semelhantes.

A proposição d é verdadeira, pois, como a hipotenusa, sendo o lado maior, é sempre diferente dos catetos, um triângulo retângulo ou é isósceles, se os catetos forem iguais, ou é escaleno, se os catetos forem diferentes.

86.

Opção (D)

Analisemos as equações das quatro opções.

$$2x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x - 1 = 1 - 2x$ é verdadeira, pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (B):

$$x^2 - 1 = 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Como $-1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 1 = 1 - x^2$ é verdadeira, pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (C):

$$2x - 2 = 2 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Como $1 \in \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x - 2 = 2 - 2x$ é verdadeira, pelo que a condição é possível em $\mathbb{Q}$.

Opção (D):

$$x^2 - 2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 2 - x^2$ é falsa, pelo que a condição é impossível em $\mathbb{Q}$.

87.

Opção (A)

Tem-se $(2 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

O conjunto-solução é o conjunto $\{2\}$.

Analisemos as equações das quatro opções.

Opção (A):

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{2\}$, pelo que esta equação é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (B):

$$4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

O conjunto-solução é o conjunto vazio, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (C):

$$(2 + x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{-2\}$, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Opção (D):

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

O conjunto-solução é o conjunto $\{-2, 2\}$, pelo que esta equação não é equivalente à equação $(2 - x)^2 = 0$.

Pág. 70

88.

Opção (D)

O conjunto apresentado na opção (A) é o conjunto vazio, o conjunto apresentado na opção (B) é o conjunto $[-1, 1]$, o conjunto apresentado na opção (C) é o conjunto $\{0\}$ e o conjunto apresentado na opção (D) é o conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

89.

Opção (D)

O conjunto A é igual à união do conjunto dos números naturais cujo quadrado não é superior a 36 com o conjunto dos números naturais ímpares que não excedem 11.

O conjunto dos números naturais cujo quadrado não é superior a 36 é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

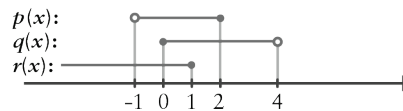
O conjunto dos números naturais ímpares que não excedem 11 é o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Então, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$.

90.

Opção (A)

Representemos, na reta real, os conjuntos definidos pelas condições $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$:

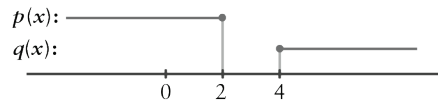


O conjunto definido pela condição $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$ é a interseção dos três conjuntos, ou seja, o conjunto $[0, 1]$.

91.

Opção (C)

Representemos, na reta real, os conjuntos definidos pelas condições $p(x)$ e $q(x)$:



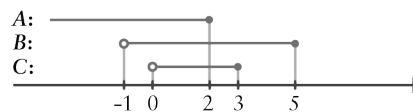
O conjunto definido pela condição $\sim[p(x) \vee q(x)]$ é o complementar da união daqueles dois conjuntos, ou seja, o conjunto $]2, 4[$.

92.

Opção (B)

Tem-se $(A \cap B) \setminus \bar{C} = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

Representemos, na reta real, os conjuntos A , B e C :



Então, $A \cap B \cap C =]0, 2]$.

93.

- | | | | |
|----------------|----------------|-----------|----------------|
| a) Verdadeira. | b) Falsa. | c) Falsa. | d) Verdadeira. |
| e) Falsa. | f) Verdadeira. | g) Falsa. | h) Falsa. |

94.

- a) $p \Leftrightarrow v$
b) $q \Leftrightarrow v$
c) $r \Leftrightarrow f$
d) $(p \wedge q) \wedge \sim r \Leftrightarrow (v \wedge v) \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$
e) $(p \vee r) \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow [(v \vee f) \Rightarrow \sim v] \Leftrightarrow [v \Rightarrow f] \Leftrightarrow f$
f) $[(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(v \wedge \sim f) \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow [(v \wedge v) \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow [v \Leftrightarrow v] \Leftrightarrow v$
g) $(r \Rightarrow p) \wedge \sim (q \wedge r) \Leftrightarrow (f \Rightarrow v) \wedge \sim (v \wedge f) \Leftrightarrow v \wedge \sim f \Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$
h) $(q \Leftrightarrow \sim r) \wedge (r \vee \sim p) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow \sim f) \wedge (f \vee \sim v) \Leftrightarrow (v \Leftrightarrow v) \wedge (f \vee f) \Leftrightarrow v \wedge f \Leftrightarrow f$

95.

- a) «Não está a chover.»
- b) «Não vou ficar em casa.»
- c) «Está a chover e vou ficar em casa.»
- d) «Está a chover, mas não vou ficar em casa.»
- e) «Se estiver a chover, então vou ficar em casa.»

96.

- a) $\sim p$
- b) $p \wedge \sim q$
- c) $\sim p \Rightarrow \sim q$
- d) $q \Leftrightarrow p$

97.

- a) $p \wedge (q \vee r)$
- b) $\sim r \Rightarrow q$
- c) $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$
- d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

98.

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

- b) $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow v$

99.

a)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$	$\sim [\sim p \vee (p \wedge \sim q)]$	$p \wedge q$
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F

- b) $\sim [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow p \wedge \sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow f \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$
- c) «Copio e sou apanhado.»

100.

a) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee f] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee f] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

b) «Dou-te um livro mas não te dou um DVD, ou dou-te um DVD mas não te dou um livro.»

Pág. 72

101.

Dado que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é falsa, pode concluir-se que uma das proposições p e q é verdadeira e a outra é falsa.

a) F, dado que uma das proposições é falsa.

b) V, dado que uma das proposições é verdadeira.

c) V, dado que o antecedente da implicação é uma proposição falsa.

d) V, dado que o consequente da implicação é uma proposição verdadeira.

102.

a) Verdadeira.

Negação: $3 < 2$

b) Falsa.

Negação: $\frac{4 \times 6}{2} \neq 2 \times 3$

c) Falsa.

Negação: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

d) Verdadeira.

Negação: $[0, \sqrt{2}] \cap \left[\frac{7}{5}, 2\right] \neq \left[\frac{7}{5}, \sqrt{2}\right]$

e) Falsa.

Negação: $\sim (1 < \pi < 2) \Leftrightarrow \sim (1 < \pi \wedge \pi < 2) \Leftrightarrow \sim (1 < \pi) \vee \sim (\pi < 2) \Leftrightarrow 1 \geq \pi \vee \pi \geq 2$

f) Falsa.

Negação: $2 + 3 = 5 \wedge 2^2 + 3^2 \neq 5^2$.

103.

a) «O João não joga andebol nem futebol.»

b) «O João joga andebol ou não joga futebol.»

c) «O João joga andebol e joga futebol.»

d) «O João não joga andebol, nem futebol, nem basquetebol.»

e) «O João não joga andebol ou não joga futebol nem basquetebol.»

f) «O João joga andebol e futebol ou não joga andebol nem futebol.»

104. $\sim (q \vee \sim r) \wedge p \Leftrightarrow (\sim q \wedge r) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge r \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow q) \wedge r \Leftrightarrow \sim v \wedge r \Leftrightarrow f \wedge r \Leftrightarrow f$

105.

a) Tem-se $5 - 3x < 9 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$ e $4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$. Ora, o número inteiro -1 é maior do que $-\frac{4}{3}$ e menor do que $-\frac{1}{4}$, pelo que a proposição enunciada é verdadeira.

b) Tem-se $(x - 1)(x + 1) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt{8} \vee x = \sqrt{8}$, donde a condição $(x - 1)(x + 1) = 7$ é impossível em $\mathbb{Q}$, pelo que a proposição enunciada é falsa.

c) A proposição enunciada é verdadeira, pois tem-se $x^2 + 1 \neq 16 \Leftrightarrow x^2 \neq 15$, que é uma condição universal em $\mathbb{Q}$.

d) A proposição enunciada pode traduzir-se por «O quadrado de qualquer número real diferente de 3 é diferente de 9.». Esta proposição é falsa, pois -3 é diferente de 3 mas o seu quadrado é igual a 9.

106.

	Equação...	... equivalente a	Em $\mathbb{N}$	Em $\mathbb{Z}$	Em $\mathbb{Q}$	Em $\mathbb{R}$
a)	$2x + 7 = 5$	$x = -1$	Impossível	Possível	Possível	Possível
b)	$3x \geq 1$	$x \geq \frac{1}{3}$	Universal	Possível	Possível	Possível
c)	$5x - 6 = 3x + 1$	$x = \frac{7}{2}$	Impossível	Impossível	Possível	Possível
d)	$x^2 + 1 = 4x$	$x = 2 \pm \sqrt{3}$	Impossível	Impossível	Impossível	Possível
e)	$ x = x$	$x \geq 0$	Universal	Possível	Possível	Possível
f)	$3x^2 < 1 \wedge x \neq 0$	$x^2 < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0$	Impossível	Impossível	Possível	Possível

107.

a) $[-1, 1]$ (por exemplo) b) $[0, 2]$ (por exemplo) c) $]1, +\infty[$ (por exemplo)

108.

a) $x > 5$ (por exemplo) b) $x > \frac{11}{2}$ (por exemplo) c) $x > 6$ (por exemplo)

Pág. 73

109.

a) «Qualquer número real que seja menor do que 5 é menor do que 2.»

«Qualquer número natural múltiplo de 6 é par.»

«Existe pelo menos um número real entre 3 e 7.»

«Existe pelo menos um número par que é divisor de 75.»

b)

- Falsa. A condição $x < 5 \Rightarrow x < 2$ não é universal em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, o número 4 não é solução da condição, dado que 4 é um número real menor do que 5 e não é menor do que 2.
- Verdadeira. A condição x é múltiplo de 6 $\Rightarrow x$ é par é uma condição universal em $\mathbb{N}$, pois, dado que 6 é um número par, todos os seus múltiplos são números pares.
- Verdadeira. A condição $3 < x < 7$ é possível em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, o número real 5 é solução da condição, pois é maior do que 3 e é menor do que 7.
- Falsa. A condição x é par e x é divisor de 75 é impossível em $\mathbb{N}$, pois os divisores de 75 (1,3,5,15,25 e 75) são todos números ímpares.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x < 5 \wedge x \geq 2$

$\exists x \in \mathbb{N} : x$ é múltiplo de 6 $\wedge x$ é ímpar

$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \vee x \geq 7$

$\forall x \in \mathbb{N}, x$ é ímpar $\vee x$ não é divisor de 75 ou $\forall x \in \mathbb{N}, x$ é divisor de 75 $\Rightarrow x$ é ímpar

«Existe pelo menos um número real inferior a 5 e superior ou igual a 2.»

«Existe pelo menos um múltiplo natural de 6 que é ímpar.»

«Qualquer número real é inferior ou igual a 3 ou superior ou igual a 7.»

«Qualquer divisor natural de 75 é ímpar.»

110.

a)

• $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 > 0$

• $\exists x \in \mathbb{Z} : -\pi < x < -\sqrt{7}$

• $\forall x \in \mathbb{Q}, 2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}$

• $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x < 1 \Rightarrow x < 0$

b) $F(0^2 = 0)$; $V(-\pi < -3 < -\sqrt{7})$; $V(\sqrt{5} < 2,24)$; V (não há números inteiros entre 0 e 1).

c)

• $\sim \forall x \in \mathbb{Q}, x^2 > 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \sim (x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0$

• $\sim \exists x \in \mathbb{Z} : -\pi < x < -\sqrt{7} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (-\pi < x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (x > -\pi \wedge x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim (x > -\pi) \vee \sim (x < -\sqrt{7}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \leq -\pi \vee x \geq -\sqrt{7}$

• $\sim [\forall x \in \mathbb{Q}, 2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \sim (2,24 \leq x \leq 2,25 \Rightarrow x > \sqrt{5}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : 2,24 \leq x \leq 2,25 \wedge \sim (x > \sqrt{5}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : 2,24 \leq x \leq 2,25 \wedge x \leq \sqrt{5}$

• $\sim [\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x < 1 \Rightarrow x < 0] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \sim (x < 1 \Rightarrow x < 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x < 1 \wedge \sim (x < 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x < 1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 0 \leq x < 1$

«Existe pelo menos um número racional cujo quadrado é inferior ou igual a 0.»

«Qualquer número inteiro é inferior ou igual a $-\pi$ ou superior ou igual a $-\sqrt{7}$.»

«Existe pelo menos um número racional superior ou igual a 2,24 e inferior ou igual a 2,25, que é menor ou igual a $\sqrt{5}$.»

«Existe pelo menos um número inteiro não nulo no intervalo $[0, 1[$.»

111.

a₁) A proposição $\forall x \in A, p(x)$ é falsa, pois 4 não é um número primo.

a₂) A proposição $\exists x \in A : q(x)$ é falsa, pois, em A , nenhum número é múltiplo de 6.

b₁) $\sim (\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A : \sim p(x)$

b₂) $\sim (\exists x \in A : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A : \sim q(x)$

c₁) $\exists x \in A : \sim p(x)$; em A , existe pelo menos um número que não é primo.

c₂) $\forall x \in A : \sim q(x)$; em A , nenhum número é múltiplo de 6.

d₁) $p(x)$ é uma condição possível, mas não universal em A .

- d₂)** $q(x)$ é uma condição impossível em A .
d₃) $\sim p(x)$ é uma condição possível, mas não universal em A .
d₄) $\sim q(x)$ é uma condição universal em A .

112.

a) Como a conjunção de uma condição com a sua contrária é uma condição impossível, conclui-se que duas condições contrárias são incompatíveis.

b) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições incompatíveis.

Sejam, respetivamente, P e Q os conjuntos a elas associados.

Como $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível, tem-se $P \cap Q = \emptyset$, pelo que P e Q são conjuntos disjuntos.

c) Tem-se: $2x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -2$ e $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2$.

c₁) As condições $x^2 \neq 4$ e $x \in \{-2, 2\}$ são contrárias.

c₂) As condições $x^2 \neq 4$ e $2x + 5 = 1$ são incompatíveis mas não contrárias.

Pág. 74

113.

$$\text{a)} \frac{2(1-x)}{3} \geq \frac{1}{4} \wedge 3x^4 + 5 > 2 \Leftrightarrow 8(1-x) \geq 3 \wedge 3x^4 > -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 8x \geq 3 \wedge x^4 > -1 \Leftrightarrow -8x \geq -5 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8}$$

$$\text{Conjunto-solução} =]-\infty, \frac{5}{8}]$$

$$\text{b)} (x-2)^2 + 6x = 19 \vee 2(x-1) = 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 6x = 19 \vee 2x - 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \vee -2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{-5, 3\}$$

$$\text{c)} x^2 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge x-3 > 0) \vee (x > 0 \wedge x-3 < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \wedge x > 3) \vee (x > 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee (x > 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

$$\text{Conjunto-solução} =]0, 3[$$

$$\text{d)} (x+4)(x-4) > x^2 - 8x \wedge |x| + 3 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 16 > x^2 - 8x \wedge |x| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 16 > 0 \wedge (x = -4 \vee x = 4) \Leftrightarrow x > 2 \wedge (x = -4 \vee x = 4) \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{4\}$$

114.

a) Verdadeira. Se p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira, podemos concluir que q é verdadeira.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

e) Falsa.

f) Verdadeira.

g) Verdadeira.

115.

$$\text{a)} \sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \wedge q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \wedge q \Leftrightarrow f, \text{ valor lógico F}$$

$$\text{b)} \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v \vee q \Leftrightarrow v, \text{ valor lógico V}$$

$$\text{c)} \sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

d) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge f \Leftrightarrow f$, valor lógico F
e) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [v \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v$, valor lógico V

116.

a) $(p \Rightarrow q) \vee r$ é falsa, pelo que

$p \Rightarrow q$ é falsa e r é falsa, pelo que

p é verdadeira e q é falsa e r é falsa.

b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa, pelo que

p é verdadeira e $q \Rightarrow r$ é falsa, pelo que

p é verdadeira e q é verdadeira e r é falsa.

c) $\sim (p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira, pelo que

$\sim (p \Rightarrow q)$ é verdadeira e r é verdadeira, pelo que

$p \Rightarrow q$ é falsa e r é verdadeira, pelo que

p é verdadeira e q é falsa e r é verdadeira.

d) $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira e $\sim r \Rightarrow q$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, $\sim q$ é verdadeira e $\sim r \Rightarrow q$ é verdadeira, pelo que

p é verdadeira, q é falsa e $\sim r$ é falsa, pelo que

p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira.

117.

$\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$ ou $(a \wedge \sim c) \Rightarrow \sim b$

118.

Tem-se: $E =] - \infty, 4[$, $F =] - \infty, -\sqrt{2}]$ e $G = [-\frac{3}{2}, +\infty[$.

a) $E \cup F =] - \infty, 4[$

b) $F \cup G =] - \infty, +\infty[$

c) $E \cap F =] - \infty, -\sqrt{2}]$

d) $E \cap G = [-\frac{3}{2}, 4[$

e) $E \cap (F \cap G) = E \cap \left(\left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2} \right] \right) = \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2} \right]$

f) $\bar{E} =] - \infty, 4[= [4, +\infty[$

g) $\bar{G} = \overline{[-\frac{3}{2}, +\infty[} =] - \infty, -\frac{3}{2}[$

h) $E \setminus F = E \cap \bar{F} = E \cap] -\sqrt{2}, +\infty[=] -\sqrt{2}, 4[$

i) $E \setminus G = E \cap \bar{G} = E \cap] - \infty, -\frac{3}{2}[=] - \infty, -\frac{3}{2}[$

j) $E \setminus (F \cap G) = E \setminus \left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2} \right] = E \cap \overline{\left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2} \right]} =$
 $= E \cap \left(] - \infty, -\frac{3}{2}[\cup] -\sqrt{2}, +\infty[\right) =] - \infty, -\frac{3}{2}[\cup] -\sqrt{2}, 4[$

119.

P é o conjunto dos números primos menores do que 10; $P = \{2, 3, 5, 7\}$.

Q é o conjunto dos múltiplos de 3 que sejam divisores de 18; $Q = \{3, 6, 9, 18\}$.

R é o conjunto de todos os números naturais que sejam divisores de 18 ou menores do que 10; $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

S é o conjunto de todos os números naturais menores do que 10 que não sejam divisores de 18; $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$.

120.

a) t é retângulo $\Rightarrow \sim(t$ é equilátero)

t é isósceles $\Rightarrow \sim(t$ é retângulo)

t é obtusângulo $\Rightarrow (t$ tem um ângulo externo agudo)

b) Universal

Não é universal, pois existem triângulos isósceles retângulos.

Universal

c) t é equilátero $\Rightarrow \sim(t$ é retângulo)

t é retângulo $\Rightarrow \sim(t$ é isósceles)

$\sim(t$ tem um ângulo externo agudo) $\Rightarrow \sim(t$ é obtusângulo)

Por exemplo:

«Um triângulo não é retângulo quando é equilátero.»

«Um triângulo não é isósceles quando é retângulo.»

«Um triângulo não é obtusângulo quando não tem um ângulo externo agudo.»

121.

Apresentamos duas resoluções.

Resolução I:

Para qualquer número real x , tem-se:

$$x < -5 \Rightarrow x \text{ é negativo}$$

Portanto, multiplicando por x ambos os membros da desigualdade $x < -5$, vem:

$$x \times x > -5 \times x, \text{ ou seja, } x^2 > -5x$$

Adicionando $6x$ a ambos os membros desta desigualdade, vem:

$$x^2 + 6x > -5x + 6x, \text{ ou seja, } x^2 + 6x > x$$

Resolução II:

$$x < -5 \Rightarrow x + 5 < 0 \wedge x < 0 \Rightarrow (x + 5) \times x > 0 \Rightarrow x^2 + 5x > 0 \Rightarrow x^2 + 6x - x > 0 \Rightarrow x^2 + 6x > x$$

122.

Designemos por ' ab ' o número inicial (a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades).

Ao trocarmos a ordem dos dois algarismos, obtemos o número ' ba '. Tem-se:

$$'ab' = 10a + b \text{ e } 'ba' = 10b + a$$

Vem, então:

$$10b + a - (10a + b) = 27 \Rightarrow 10b + a - 10a - b = 27 \Rightarrow 9b - 9a = 27 \Leftrightarrow 9(b - a) = 27 \Rightarrow b - a = 3$$

123.

Seja n um número ímpar, tem-se que $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

Vem:

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$$

Tem-se:

- se $k = 1$, $4(k^2 - k) + 1$ é igual a 1, que é ímpar;
- se $k \neq 1$, $4(k^2 - k)$ é um número múltiplo de 4, pelo que é par, donde $4(k^2 - k) + 1$ é ímpar.

124.

Provar por contrarrecíproco que «Se $n^2 + 2n$ não é múltiplo de 4, então n é ímpar.» é mostrar que:

$$n \text{ par} \Rightarrow n^2 + 2n \text{ é múltiplo de 4}$$

Para qualquer número natural n , tem-se $n^2 + 2n = n(n + 2)$. Vem, então:

n é par $\Rightarrow n + 2$ é par $\Rightarrow n(n + 2)$ é múltiplo de 4, pois o produto de dois números pares é um número múltiplo de 4.

125.

Se a reta r não for paralela ao plano α , então a reta r intersecta o plano α num ponto P .

Seja t a reta contida no plano α que passa por P e é paralela à reta s . As retas t e r não são coincidentes, pois r não está contida no plano α e t está contida no plano α . Como as retas t e r não são coincidentes e o ponto P pertence às retas t e r , as retas t e r são concorrentes.

Porém, tem-se que t é paralela a s e que s é paralela a r , pelo que as retas t e r são paralelas, o que é absurdo, pois tínhamos chegado à conclusão que as retas t e r são concorrentes.

Portanto, a reta r é paralela ao plano α .

126.

Suponhamos que era possível cobrir o tabuleiro (sem as duas casas dos cantos) com as 31 peças de dominó.

Cada peça cobre uma casa branca e uma casa preta. Portanto, no final, o número de casas brancas cobertas seria igual ao número de casas pretas cobertas, o que é absurdo, pois o tabuleiro completo tem igual número de casas brancas e de casas pretas e foram retiradas duas casas pretas.

Tema 2 | Álgebra

Atividades «Será que...?»

Pág. 78

SERÁ QUE...?	Monotonia
--------------	-----------

1.

a) $a = -5$ $b = -3$ $c = 2$ $d = 7$

b) $a = -5$ $b = -3$ $c = 2$ $d = 7$

c) $a = 2$ $b = -3$ $c = -5$ $d = 7$

2. A resposta é não.

Como vamos ver em seguida:

- Para n **ímpar** tem-se:
 - se $a < b$, então $a^n < b^n$
- Para n **par** tem-se:
 - se $0 \leq a < b$, então $0 \leq a^n < b^n$
 - se $a < b \leq 0$, então $a^n > b^n \geq 0$

Pág. 82

SERÁ QUE...?	Quando a e b têm sinais contrários
--------------	--

1.

a) $(-3)^4 = 3^4$

b) $(-3)^4 > 2^4$

c) $(-2)^4 < 3^4$

2.

a) $a^n = b^n$ se e só se $a = b \vee a = -b$, ou seja, se e só se $|a| = |b|$

b) $a^n < b^n$ se e só se $|a| < |b|$

3. Não.

SERÁ QUE...?	Raízes
--------------	--------

1.

a) 4

b) 10

c) $\sqrt{8}$

d) $\sqrt{5}$

2.

a) 10

b) 2

c) $\sqrt[3]{24}$

3. Designo por raiz quadrada de a .
4. Designo por raiz cúbica de a .
5. Poderá designar o número que elevado a 5 é igual a a .

Pág. 85

SERÁ QUE...?	Raízes quadradas e raízes cúbicas
--------------	-----------------------------------

1.

a) F	b) V	c) V
d) F	e) V	f) F

2. Não; é uma proposição falsa.

Pág. 92

SERÁ QUE...?	Potências de expoente fracionário
--------------	-----------------------------------

1. $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$
2. Admitindo que $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8$, tem-se $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$
3. Ter-se-á $\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{6}{3}} = 8^2$ e, portanto, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$
4. Dado que $a^{2,5} = a^{\frac{5}{2}}$, poderá ser, no caso de a não ser negativo, $a^{2,5} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$

Pág. 101

SERÁ QUE...?	Quando $\times$ não é sinal de operação
--------------	---

Trata-se de uma referência ao uso de $\times$ como letra que é usada para representar uma variável.

SERÁ QUE...?	Recordando polinómios
--------------	-----------------------

1.
 - a) Se a aresta da base de maior comprimento mede 4, a outra aresta da base mede 3 e a altura mede 7; então, o volume do prisma é $4 \times 3 \times 7 = 87 \text{ (cm}^3\text{)}$ e a área da superfície é $4 \times 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 4 \times 7 = 122 \text{ (cm}^2\text{)}$

b) Tem-se $x \times (x - 1) \times (x + 3) = (x^2 - x)(x + 3) = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x = x^3 + 2x^2 - 3x$

c) Tem-se $2 \times x \times (x - 1) + 2 \times x \times (x + 3) + 2 \times (x - 1) \times (x + 3) =$
 $= 2x^2 - 2x + 2x^2 + 6x + 2 \times (x^2 - x + 3x - 3) =$
 $= 4x^2 + 4x + 2x^2 + 4x - 6 = 6x^2 + 8x - 6$

2.

a) Dado que $x^3 + 4x = x(x^2 - 4)$, e sendo x a altura do paralelepípedo, a expressão $x^2 - 4$ representa a área da base.

b) Já sabemos que a expressão $x^2 - 4$ representa a área da base.

Dado que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, se uma aresta mede $x - 2$ a outra mede $x + 2$

3. O polinómio $x^3 + 2x^2 - 3x$ é um polinómio de grau 3, o coeficiente do termo de grau 1 é -3 e o termo independente é 0.

O polinómio $6x^2 + 8x - 6$ é um polinómio de grau 2, o coeficiente do termo de grau 1 é 8 e o termo independente é -6 .

O polinómio $x^3 - 4x$ é um polinómio de grau 3, o coeficiente do termo de grau 1 é -4 e o termo independente é 0.

Pág. 103

SERÁ QUE...? Operações com polinómios

1.

a) Qualquer polinómio de grau menor ou igual a 2, desde que, se o polinómio tiver grau 2, o termo do 2.º grau não seja $-3x^2$

b) Qualquer polinómio de grau 3.

c) Qualquer polinómio da forma $-3x^2 + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 2$.

2. É o polinómio

$$B(x) - A(x) = -x + 1 - (3x^2 - 2x - 1) = -x + 1 - 3x^2 + 2x + 1 = -3x^2 + x + 2$$

3.

a) $3x$

b) $\frac{1}{2}x^2$

c) Não existe.

4.

a) Qualquer polinómio de grau 1.

b) Qualquer polinómio de grau 0.

c) Não existe.

5. Os alunos devem refletir acerca do grau do produto de dois polinómios e poderá estabelecer-se uma «ponte» para a divisão inteira de números naturais.

1.

a)

2	2	-3	5
	↓		
2	2	4	2
	2	1	7 = R

b)

-1	2	-3	5
	↓		
-1	2	-2	5
	2	-5	10 = R

2. $P(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 = 7$ e $P(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 5 = 10$

7 é o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 2$ e 10 é o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x + 1$

3.

2	1	-2	0	1
	↓			
2	1	2	0	0
	1	0	0	1 = R

-1	1	-2	0	1
	↓			
-1	1	-1	3	-3
	1	-3	3	-2 = R

$P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 1 = 1$ e $P(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 1 = -2$

1	1	-2	0	1
	↓			
1	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	0 = R

-1/3	1	-2	0	1
	↓			
-1/3	1	-1/3	7/9	-7/27
	1	-7/3	7/9	20/27 = R

$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$ e $P(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 - 2 \times (-\frac{1}{3})^2 + 1 = \frac{20}{27}$

4. Os resultados obtidos sugerem que o resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ seja igual a $P(a)$

Pág. 113

SERÁ QUE...? Fatorização de polinómios 1

1. $P(2) = \frac{1}{2} \times 2^3 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

2. Dado que 2 é raiz do polinómio $P(x)$, já sabemos que $P(x)$ é divisível por $x - 2$; o polinómio $Q(x)$ é o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 2$ e tem grau 2.

3.

2	$\frac{1}{2}$ ↓	0	-5	6
2	$\frac{1}{2}$	1	2	-6
	$\frac{1}{2}$	1	-3	$0 = R$

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$$

4. A resposta é afirmativa e «abre a porta» para o que se segue no manual.

Pág. 121

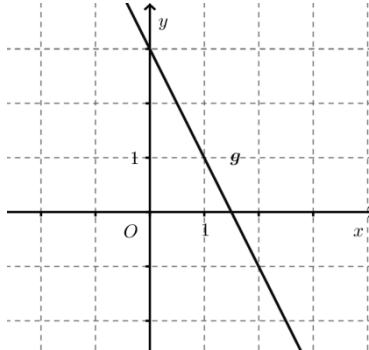
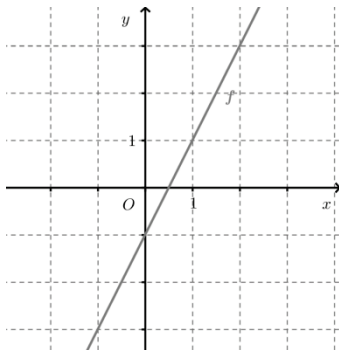
SERÁ QUE...? Polinómios de coeficientes inteiros

O Manuel acertou e, no sentido de ajudar na compreensão da conjectura do António, poderão formular-se outras afirmações análogas, como, por exemplo: sejam a, b, c e d números inteiros, com $a \neq 0$, e seja $P(x)$ o polinómio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 3$; as raízes inteiras do polinómio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 3$, se existirem, só podem ser os números $-3, -1, 1$ e 3 .

Pág. 123

SERÁ QUE...? Gráficos e variação de sinal

1.



2.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) = 2x - 1$	$-$	0	$+$

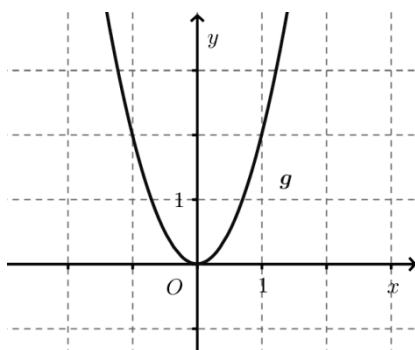
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x) = -2x + 3$	$+$	0	$-$

Os alunos poderão recordar ou ser introduzidos à construção de tabelas de variação de sinal.

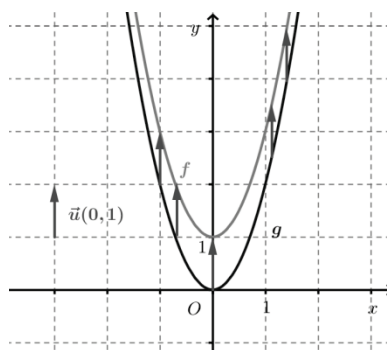
Pág. 125

SERÁ QUE...? Parábolas

1.



2.



3. A observação do gráfico confirma que a função definida por $2x^2 + 1$ só toma valores positivos.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Radicais e potências de expoente racional

Pág. 78

1. $x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ (devido à propriedade da monotonia da adição)

$$\Leftrightarrow (x + 2) + (-2) < 5 + (-2) \Leftrightarrow x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow x < 5 - 2$$

2. Só a inequação $-x < 2$ é equivalente à inequação inicial pois a multiplicação por um número real k só é monótona em $\mathbb{R}^+$

Pág. 80

3.

a) $-2 < 2 \Rightarrow$ (monotonia da adição)

$$\Rightarrow x - 2 < x + 2 \Rightarrow \text{(monotonia da potenciação de expoente ímpar)}$$

$$\Rightarrow (x - 2)^{13} < (x + 2)^{13}$$

b) $0,3 < \frac{1}{3} \Rightarrow$ (monotonia da potenciação de expoente ímpar)

$$\Rightarrow 0,3^5 < \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

c) $-\pi < -3 \Rightarrow$ (monotonia da adição)

$$\Rightarrow 1 - \pi < 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \pi < -2 \Rightarrow \text{(Para } n \text{ par, se } a < b \leq 0, \text{ então } a^n > b^n \geq 0)$$

$$\Rightarrow (1 - \pi)^4 > (-2)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \pi)^4 > 16$$

Pág. 81

4.

Como a e b são números reais positivos tais que $a < b$, tem-se $a^2 < b^2$ donde, como a é positivo, $a \times a^2 < a \times b^2$, ou seja $a^3 < a \times b^2$

Por outro lado, como $a < b$, tem-se $a \times b^2 < b \times b^2$, pois $b^2 > 0$, ou seja $a \times b^2 < b^3$

Tem-se, então $a^3 < a \times b^2$ e $a \times b^2 < b^3$. Portanto, $a^3 < b^3$

Pág. 82

5.

a) $(2^3)^4 = 2^{12}$

b) $5^6 = (5^2)^3$

c) $3^8 = (3^4)^2$

6.

Tem-se, de acordo com a sugestão:

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5})^6 = \left[(\sqrt[3]{5})^3\right]^2 = 5^2 = 25 \quad \text{e} \quad (\sqrt{3})^6 = \left[(\sqrt{3})^2\right]^3 = 3^3 = 27$$

Então, como $(\sqrt[3]{5})^6 < (\sqrt{3})^6$, conclui-se que $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

b) $(\sqrt{2})^6 = [(\sqrt{2})^2]^3 = 2^3 = 8$ e $(\sqrt[3]{3})^6 = [(\sqrt[3]{3})^3]^2 = 3^2 = 9$

Então, como $(\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6$, conclui-se que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

c) $(\sqrt[3]{3})^6 = 9$ (alínea b) e $(\sqrt{\sqrt[3]{9}})^6 = [(\sqrt[3]{9})^2]^3 = (\sqrt[3]{9})^3 = 9$

Então, como $(\sqrt[3]{3})^6 = (\sqrt{\sqrt[3]{9}})^6$, conclui-se que $\sqrt[3]{3} = \sqrt{\sqrt[3]{9}}$

Pág. 83

7.

$\sqrt[5]{3} \approx 1,256$ e $\sqrt[7]{-10} \approx -1,389$

Pág. 84

8.

Por exemplo:

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 = \frac{1}{4}$

c) $x^2 = 3$

9.

As soluções da equação $x^6 = 12$ são $\sqrt[6]{12} \approx 1,513$ e $-\sqrt[6]{12} \approx -1,513$;

as soluções da equação $x^4 - 13 = 0$ são $\sqrt[4]{13} \approx 1,899$ e $-\sqrt[4]{13} \approx -1,899$

Pág. 85

10.

a) $x^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-32} \Leftrightarrow x = -2$

C. S. = $\{-2\}$

b) $x^8 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^8 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{8} \wedge x = -\sqrt[8]{8}$

C. S. = $\{-\sqrt[8]{8}, \sqrt[8]{8}\}$

c) $x^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -4$ que é uma condição impossível

C. S. = $\emptyset$

11.

a) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (6 - 5)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

c) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2}$

Pág. 86

12.

a) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

c) $(-3)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$

13.

$$(\sqrt[n]{a})^{-m} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$$

De outro modo: $(\sqrt[n]{a})^{-m} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^m = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$

14.

Para verificar se um número k é igual à raiz de índice n (com n ímpar) de um número p , basta verificar se $k^n = p$

Tem-se: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$, pelo que está provado que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ é igual à raiz de índice n de $\frac{a}{b}$

15.

a) $\sqrt[5]{5} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{20}$

b) $\frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{15}{3}} = \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

Pág. 87

16.

$$(\sqrt{6} + 1)^2 = 6 + 2\sqrt{6} + 1 = 7 + 2\sqrt{6} \quad \text{e} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Então, como $\sqrt{6} + 1$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ são ambos positivos e $(\sqrt{6} + 1)^2 > (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, tem-se $\sqrt{6} + 1 > \sqrt{2} + \sqrt{3}$

17.

a) $4 \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \times 4^3}$

b) $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2^4}}$

c) $3^2 \times \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{3^{10}} \times \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a \times 3^{10}}$

Pág. 88

18.

$$a^3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a^3 \times 2} = \sqrt[3]{2a^3}$$

Para mostrar que $a^4\sqrt[4]{2}$ não é necessariamente igual a $\sqrt[4]{2a^4}$, basta ver por exemplo que, para $a = -1$, a expressão $a^4\sqrt[4]{2}$ toma o valor $-\sqrt[4]{2}$ ao passo que a expressão $\sqrt[4]{2a^4}$ toma o valor $\sqrt[4]{2}$

19.

a) Tem-se a seguinte decomposição em fatores primos: $648 = 2^3 \times 3^4$. Então, vem:

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3} = 2 \times 3 \times \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}, \text{ pelo que } a = 6$$

b) Tem-se a seguinte decomposição em fatores primos: $216 = 2^3 \times 3^3$. Então, vem:

$$\sqrt{216} = \sqrt{2^3 \times 3^3} = \sqrt{6^3} = \sqrt{6^2 \times 6} = 6\sqrt{6}, \text{ pelo que } a = 6$$

20.

a) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 2]{4^{1 \times 2}} = \sqrt[6]{4^2}$

b) $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6 \cdot 2]{3^{4 \cdot 2}} = \sqrt[12]{3^8} = \sqrt[3]{3^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[9 \cdot 3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[27]{3^9} = \sqrt[3]{3}$

Pág. 89

21.

Vamos igualar os índices dos radicais ao respetivo mínimo múltiplo comum.

Tem-se m.m.c. (2,3,4) = 12

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt[12]{8^6}$$

$$\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[12]{5^9}$$

22.

Para comparar os radicais, podemos começar por igualar os respetivos índices.

Vamos igualar os índices dos radicais ao respetivo mínimo múltiplo comum.

Tem-se m.m.c. (2,3,4) = 12

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[12]{9^4} \qquad \sqrt[4]{9} = \sqrt[12]{9^3} \qquad \sqrt[6]{45} = \sqrt[12]{45^2}$$

Ora

$$\sqrt[6]{45} = \sqrt[12]{45^2} = \sqrt[12]{5^2 \times 9^2} = \sqrt[12]{25 \times 9^2}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{9^2 \times 9^2} = \sqrt[12]{81 \times 9^2}$$

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[12]{9^3} = \sqrt[12]{9 \times 9^2}$$

$$\text{Então } \sqrt[4]{9} < \sqrt[6]{45} < \sqrt[3]{9}$$

Pág. 91

23.

$$\text{a) } \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{4^2}}{3\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{3\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{3 \times 4} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{6} = \frac{\sqrt[3]{16}}{6}$$

$$\text{c) } \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{a} = \sqrt[3]{a}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} &= \frac{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x^2}) \times \sqrt[3]{2^2x}}{\sqrt[3]{2x^2} \times \sqrt[3]{2^2x}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2x} - \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{2^2x}}{\sqrt[3]{2^3x^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{2^3x} - \sqrt[3]{2^2x^3}}{\sqrt[3]{2^3x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{4}}{2x} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{2x} - \frac{x\sqrt[3]{4}}{2x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{aligned}$$

De outro modo:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2x^2}} - \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} - \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{aligned}$$

24.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{b) } \frac{4}{3+2\sqrt{7}} = \frac{4(3-2\sqrt{7})}{(3+2\sqrt{7})(3-2\sqrt{7})} = \frac{4(3-2\sqrt{7})}{3^2 - (2\sqrt{7})^2} = \frac{4(3-2\sqrt{7})}{9-4 \times 7} = \frac{12-8\sqrt{7}}{-19} = \frac{8\sqrt{7}-12}{19}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1-2a}{2\sqrt{a}-\sqrt{2a+1}} &= \frac{(1-2a)(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})}{(2\sqrt{a}-\sqrt{2a+1})(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})} = \frac{(1-2a)(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})}{(2\sqrt{a})^2 - (\sqrt{2a+1})^2} = \frac{(1-2a)(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})}{4a-(2a+1)} = \\ &= \frac{(1-2a)(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})}{4a-2a-1} = \frac{-(2a-1)(2\sqrt{a}+\sqrt{2a+1})}{2a-1} = -(2\sqrt{a} + \sqrt{2a+1}) = -2\sqrt{a} - \sqrt{2a+1} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{1}{3\sqrt{8}+6\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2^3}+6\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2^2 \times 2}+6\sqrt{2}} = \frac{1}{3 \times 2 \times \sqrt{2}+6\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}+6\sqrt{2}} = \frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

Nota que $3\sqrt{8} - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$, pelo que não podemos multiplicar ambos os termos da fração por $3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}$; de qualquer modo, como o denominador se pode escrever na forma $k\sqrt{m}$, esta situação pode ser reduzida ao primeiro caso.

Pág. 93

25.

$$\text{a) } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$\text{c) } 2^{0,2} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$$

26.

a) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$

27.

Se a definição fosse válida para $a < 0$, ter-se-ia:

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ e $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{(2^3)^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$, pelo que se teria $(-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}}$ apesar de $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Pág. 94

28.

a) $3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^4} \times \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^4 \times 3^6} = \sqrt[5]{3^{10}} = 3^{\frac{10}{5}} = 3^2$

b) $\frac{5^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{5^5}}{\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[3]{\frac{5^5}{2^5}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^5} = \sqrt[3]{2,5^5} = 2,5^{\frac{5}{3}}$

Pág. 95

29.

a) $\frac{2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}} = \frac{(2 \times 3)^{\frac{3}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}} = \frac{6^{\frac{3}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}} = 6^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

b) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{46}} : 3^{-\frac{5}{6}} = \frac{2^{\frac{10}{4}}}{46} : \frac{1}{\frac{5}{36}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{46} \times 3^{\frac{5}{6}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{5}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$

30. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}} = \sqrt[12]{2} = \sqrt[24]{2} = 2^{\frac{1}{24}}$

De outro modo: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^{\frac{1}{12}}} = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{24}}$

Pág. 99

31.

Quadrados perfeitos:

1, pois $1 = 1^2$; 64, pois $64 = 8^2$; 400, pois $400 = 20^2$; e a^6 , pois $a^6 = (a^3)^2$

Cubos perfeitos:

1, pois $1 = 1^3$; 8, pois $8 = 2^3$; 64, pois $64 = 4^3$; 1000, pois $1000 = 10^3$ e a^6 , pois $a^6 = (a^2)^3$

32.

a) $2^3 \times 3 \times 5^2 = 2^2 \times 2 \times 3 \times 5^2$; ora, se multiplicarmos este número por 2×3 , ou seja, 6, obtemos $2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2$, que é um quadrado perfeito, e se multiplicarmos $2^3 \times 3 \times 5^2$ por qualquer número natural inferior a 6, não obtemos um quadrado perfeito. Então, a resposta ao problema é 6.

b) Se multiplicarmos o número $2^3 \times 3 \times 5^2$ por $3^2 \times 5$, ou seja, 45, obtemos $2^3 \times 3^3 \times 5^3$, que é um cubo perfeito, e se multiplicarmos $2^3 \times 3 \times 5^2$ por qualquer número natural inferior a 45, não obtemos um quadrado perfeito. Então, a resposta ao problema é 45.

33.

a) Por exemplo: a^2b^2 e b^2c^2

b) $a^6b^3c^3$

34.

a) $\pi > 3$ pelo que $\pi^3 > 3^3$, ou seja, $\pi^3 > 27$

b) $\frac{4}{3} = 1,3$ pelo que $1,3 < \frac{4}{3}$ donde $1,3^4 < \left(\frac{4}{3}\right)^4$

c) $-1,3 > -\frac{4}{3}$ donde $(-1,3)^5 > \left(-\frac{4}{3}\right)^5$

d) $(-1,3)^4 = 1,3^4$ donde (ver alínea b) $(-1,3)^4 < \left(\frac{4}{3}\right)^4$

e) Como os números $1 - \sqrt{5}$ e $\sqrt{5} - 1$ são simétricos, $(1 - \sqrt{5})^{10} = (\sqrt{5} - 1)^{10}$

35.

a) Para qualquer número real a , tem-se $1 - a < 2 - a$, pelo que $(1 - a)^3 < (2 - a)^3$

b) Para qualquer número real a , tem-se que $a - \pi$ e $\pi - a$ representam números reais simétricos, pelo que $(a - \pi)^{10} = (\pi - a)^{10}$

c) Para qualquer número real $a > \pi$, tem-se $a - \pi > 0$ e $\pi - a < 0$, pelo que $(a - \pi)^9 > 0$ e $(\pi - a)^9 < 0$, donde $(a - \pi)^9 > (\pi - a)^9$

d) No caso de $a > 0$, tem-se $\frac{a}{2} > \frac{a}{3}$, pelo que $\left(\frac{a}{2}\right)^5 > \left(\frac{a}{3}\right)^5$; no caso de $a < 0$, tem-se $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$, pelo que $\left(\frac{a}{2}\right)^5 < \left(\frac{a}{3}\right)^5$

e) No caso de $a > 0$, tem-se $\frac{a}{2} > \frac{a}{3} > 0$, pelo que $\left(\frac{a}{2}\right)^6 > \left(\frac{a}{3}\right)^6$; no caso de $a < 0$, tem-se $\frac{a}{2} < \frac{a}{3} < 0$, pelo que $\left(\frac{a}{2}\right)^6 > \left(\frac{a}{3}\right)^6$

Tem-se, então, em qualquer dos casos, $\left(\frac{a}{2}\right)^6 > \left(\frac{a}{3}\right)^6$

36.

a) $\sqrt[3]{a} = 4 \Leftrightarrow 4^3 = a$

b) $\sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = a$

c) $b^3 = 6 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[3]{5} = a \Leftrightarrow a^3 = 5$

e) $\sqrt[4]{a} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = a$

f) $\sqrt[5]{a} = -2 \Leftrightarrow (-2)^5 = a$

g) $\sqrt[7]{128} = b \Leftrightarrow b^7 = 128$

37.

$$\sqrt[10]{59\,049} = 3$$

38.

a) Tem-se, para qualquer número natural n , ímpar: $a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

b) Para que a igualdade se verifique, os números reais a e b têm que ser positivos ou nulos.

c) $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \times 3} = \sqrt[4]{48}$ e $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 3} = \sqrt[3]{-24}$

39.

$$\text{a)} \quad 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$\text{b)} \quad 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{16}$$

$$\text{c)} \quad 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{54}$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \times 4} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

40.

$$\frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 5\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{\frac{12}{3}} = 5\sqrt{4} = 5 \times 2 = 10 \text{ e } 10 \text{ é um número natural;}$$

$$\frac{2\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = 2\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{\frac{72}{8}} = 2\sqrt{9} = 2 \times 3 = 6 \text{ e } 6 \text{ é um número natural;}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \text{ e } 4 \text{ é um número natural}$$

41.

a) Tem-se $(\sqrt{3+2\sqrt{3}})^2 = 3+2\sqrt{3}$ e $(1+\sqrt{3})^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3}$, pelo que, como $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ e $1+\sqrt{3}$ são números reais positivos e $(\sqrt{3+2\sqrt{3}})^2 > (1+\sqrt{3})^2$, se conclui que $\sqrt{3+2\sqrt{3}} > 1+\sqrt{3}$

b) Tem-se $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ e $\sqrt{13}^2 = 13$, pelo que, como $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{13}$ são números reais positivos e $(2\sqrt{3})^2 < \sqrt{13}^2$, pode concluir-se que $2\sqrt{3} < \sqrt{13}$

De outro modo:

Como $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$, pode concluir-se que $2\sqrt{3} < \sqrt{13}$

42.

$$\text{a)} \quad 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (2 - 5 + 6)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{18} &= 4\sqrt{2^3} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2 \times 3^2} = 4\sqrt{2^2 \times 2} - 3\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = \\ &= 4 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = 4 \times 2 \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2} \times 3 = \\ &= 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} &= 2\sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2 \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3} = \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt[3]{3} + 2 \times \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 5\sqrt{12} - 4\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{108} &= 5\sqrt{3 \times 2^2} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2^4 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3^3} = \\ &= 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2^2} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = \\ &= 5 \times \sqrt{3} \times 2 - 4\sqrt{3} + 2 \times 2 \times \sqrt{3} - 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad \frac{5\sqrt{60}-2\sqrt{15}}{\sqrt{27}} = \frac{5\sqrt{4 \times 15}-2\sqrt{15}}{\sqrt{3^2 \times 3}} = \frac{5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{15}-2\sqrt{15}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{15}-2\sqrt{15}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{15}}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{15}{3}} = \frac{8}{3} \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \frac{\sqrt[3]{15 \times 3^9}}{\sqrt[3]{40}} &= \frac{\sqrt[3]{15 \times 9}}{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[3]{\frac{15 \times 9}{40}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 5 \times 3^2}{5 \times 2^3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}; \text{ como queremos escrever o resultado} \\ &\text{na forma } a\sqrt{b}, \text{ podemos escrevê-lo como } \frac{3}{2}\sqrt{1} \end{aligned}$$

43. Para $b \in \mathbb{N}$, a expressão $3b + 1$ designa sempre um número positivo, pelo que se tem:

$$\begin{aligned} \sqrt{75b + 25} + \sqrt{108b + 36} &= a\sqrt{3b + 1} \Leftrightarrow \sqrt{25(3b + 1)} + \sqrt{36(3b + 1)} = a\sqrt{3b + 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{25} \times \sqrt{3b + 1} + \sqrt{36} \times \sqrt{3b + 1} &= a\sqrt{3b + 1} \Leftrightarrow 5\sqrt{3b + 1} + 6\sqrt{3b + 1} = a\sqrt{3b + 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 11\sqrt{3b + 1} &= a\sqrt{3b + 1} \Leftrightarrow a = 11 \end{aligned}$$

44.

$$\text{a) } x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{5} \vee x = -3 + \sqrt{5}$$

$$\text{b) } x^2 = 2x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{2} \vee x = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{c) } x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{52}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{6 + 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{13} \vee x = 3 + \sqrt{13}$$

$$\text{d) } -x^2 - 2x + 17 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 17}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{72}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - 6\sqrt{2}}{-2} \vee x = \frac{2 + 6\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 + 3\sqrt{2} \vee x = 1 - 3\sqrt{2}$$

45.

$$\text{Verificação para } \sqrt{2} - \sqrt{3}: \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 - 2(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 3 - 2 \times 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 5 - 4 - 1 = 0$$

Como esta proposição é verdadeira, está provado o pretendido.

$$\text{Verificação para } \sqrt{2} + \sqrt{3}: \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 - 2(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 3 - 2 \times 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 5 - 4 - 1 = 0$$

Como esta proposição é verdadeira, está provado o pretendido.

46.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{12\sqrt[3]{3^4}}{12\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt[12]{3^{4-3}} = \sqrt[12]{3} ; \text{ de outro modo: } \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$$

$$\text{b) } \left(\sqrt[3]{0,5}\right)^{-1} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{0,5^{-1}} + \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{16} + \sqrt[10]{4} = \sqrt[5]{4 \times 16} + \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[5]{64} + \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[5]{2^6} + \sqrt[5]{2} = 2\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{2} = 3\sqrt[5]{2}$$

47.

$$\text{Verificação para } \sqrt{3}: \quad (\sqrt{3})^6 - 2\sqrt{3} \times (\sqrt{3})^3 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{3^6} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3^3} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^3 - 2\sqrt{3^4} = 9 \Leftrightarrow 27 - 2 \times 3^2 = 9 \Leftrightarrow 27 - 18 = 9$$

Como esta proposição é verdadeira, está provado o pretendido.

Verificação para $-\sqrt[6]{3}$: $(-\sqrt[6]{3})^6 - 2\sqrt{3} \times (-\sqrt[6]{3})^3 = 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{3^6} - 2\sqrt{3} \times (-1) \times \sqrt[6]{3^3} = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 9 \Leftrightarrow 3 + 2 \times 3 = 9$

Como esta proposição é verdadeira, está provado o pretendido.

48.

a) $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{4}{\sqrt[5]{8}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{4 \times \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \times \sqrt[5]{2^2}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{2} = 2\sqrt[5]{4}$

d) $\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1 \times (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2}) \times (3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{6}{3-\sqrt{5}} = \frac{6 \times (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})} = \frac{6(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{6(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3(3+\sqrt{5})}{2} = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}) \times (1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1-2} = \frac{\sqrt{2}+2}{-1} = -2 - \sqrt{2}$

g) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5} \times (\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{5-2} = \frac{3 \times 5 + 3\sqrt{10}}{3} = \frac{3(5+\sqrt{10})}{3} = 5 + \sqrt{10}$

h) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{9}-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-3\sqrt{4}}{3-2} = 2 \times 3 + \sqrt{6} - 3 \times 2 = \sqrt{6}$

i) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3} \times (2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3) \times (2\sqrt{3}+3)} = \frac{2\sqrt{9}+3\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-3^2} = \frac{2 \times 3 + 3\sqrt{3}}{4 \times 3 - 9} = \frac{6+3\sqrt{3}}{3} = 2 + \sqrt{3}$

j) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{(3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2}{9 \times 2 - 4 \times 3} =$
 $= \frac{9 \times 2 - 12\sqrt{6} + 4 \times 3}{6} = \frac{30 - 12\sqrt{6}}{6} = 5 - 2\sqrt{6}$

49.

a) $a^3 b^6 = a^3 (b^2)^3 = (ab^2)^3$

b) $ab^3 = [(ab^3)^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2 b^6)^{\frac{1}{2}}$

c) $\frac{a^2}{b^6} = \frac{a^2}{(b^3)^2} = \left(\frac{a}{b^3}\right)^2 = \left[\left(\frac{a}{b^3}\right)^{-1}\right]^{-2} = \left(\frac{b^3}{a}\right)^{-2}$

50.

a) $\sqrt[4]{3} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}}$

b) $\frac{3^{1,2}}{6^{1,2}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{1,2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,2} = 2^{-1,2}$

c) $\frac{5^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

d) $(\sqrt[3]{2})^{\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{2^2} = \sqrt[9]{4}$

51.

Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado a e cuja diagonal mede d

Tem-se:

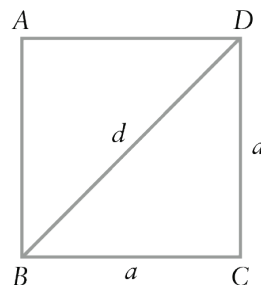
$$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2a^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d = \sqrt{a^2} \times \sqrt{2} \Leftrightarrow d = a\sqrt{2}$$

Diagonal de um quadrado de lado $\sqrt{8}$:

$$d = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

Lado de um quadrado cuja diagonal mede $\sqrt{50}$:

$$\sqrt{50} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{50}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = \sqrt{25} \Leftrightarrow a = 5$$



52.

a) Na figura está representado um cubo e um triângulo cujos vértices são os vértices A , B e D do cubo; este triângulo é retângulo em B , o lado $[BD]$ do triângulo é a diagonal de uma face do cubo e o lado $[AD]$ do triângulo é a diagonal espacial do cubo.

Tem-se:

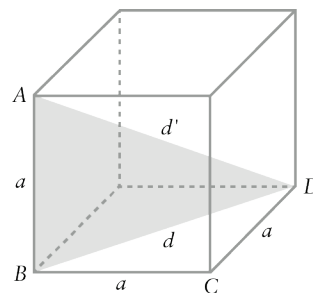
$d = a\sqrt{2}$, como demonstrado no exercício anterior.

$$d'^2 = a^2 + d^2 \Leftrightarrow d'^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d'^2 = a^2 + 2a^2 \Leftrightarrow d'^2 = 3a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d' = \sqrt{3a^2} \Leftrightarrow d' = a\sqrt{3}$$

b) Pretende-se determinar o valor de d , sabendo que $d' = \sqrt{8}$

$$\text{Como } d' = a\sqrt{3}, \text{ tem-se: } \sqrt{8} = a\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\text{Como } d' = a\sqrt{2}, \text{ tem-se: } d = \sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{3} \times 2} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



53.

a) Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado a . O ponto D é o ponto médio do lado $[AC]$, pelo que o segmento $[BD]$ é a altura do triângulo relativa ao lado $[AC]$

Tem-se:

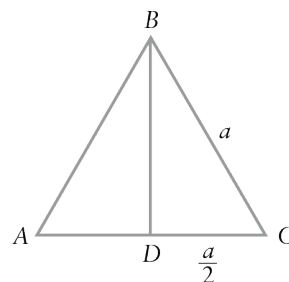
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\overline{BD})^2 \Leftrightarrow (\overline{BD})^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\overline{BD})^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \overline{BD} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Designemos por h a altura do triângulo

b₁) Área de um triângulo equilátero que tem lado $\sqrt{12}$:

$$\text{Como } h = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ tem-se: } h = \sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{12} \times 3}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 3}{2} = 3\sqrt{3}$$



b₂) Área de um triângulo equilátero que tem altura $\sqrt{12}$:

$$\text{Como } h = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ tem-se: } \sqrt{12} = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2 \times \sqrt{12}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = 2 \times \sqrt{\frac{12}{3}} \Leftrightarrow a = 2 \times \sqrt{4} \Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{Área} = \frac{4 \times \sqrt{12}}{2} = 2 \times \sqrt{12} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

54.

Seja a a medida do lado do triângulo e h a da sua altura. Tem-se $a + h = 1$

$$a + h = 1 \Leftrightarrow a + a \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Leftrightarrow a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2 \times (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})} \Leftrightarrow a = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3} \Leftrightarrow a = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

55.

De acordo com a figura, tem-se $x + l + x = 1$ e $l = x\sqrt{2}$,

pelo que $x + x\sqrt{2} + x = 1$

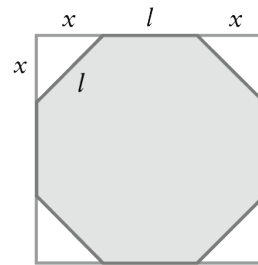
$$x + x\sqrt{2} + x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

Então

$$l = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2} = \sqrt{2} - 1$$



Capítulo 2 | Polinómios

Pág. 102

56.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{8}$$

$$P(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 + 3 \times (-1) - 1 = -(-1) - 1 - 3 - 1 = -4$$

Pág. 103

57.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A(x) - B(x) &= 2x^2 - 3x + 1 - (x - 2x^2) = 2x^2 - 3x + 1 - x + 2x^2 = \\ &= 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad A(x) - C(x) = 2x^2 - 3x + 1 + ax - 3 = 2x^2 + (a - 3)x - 2$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad xA(x) \times B(x) &= x(2x^2 - 3x + 1) \times (x - 2x^2) = (2x^3 - 3x^2 + x) \times (x - 2x^2) = \\ &= 2x^4 - 4x^5 - 3x^3 + 6x^4 + x^2 - 2x^3 = -4x^5 + 8x^4 - 5x^3 + x^2 \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad B(x) \times C(x) = (x - 2x^2) \times (ax - 3) = ax^2 - 3x - 2ax^3 + 6x^2 = -2ax^3 + (a + 6)x^2 - 3x$$

58.

a) O grau da soma de dois polinómios não nulos é menor ou igual ao maior dos graus dos dois polinómios. Exemplificando:

$A(x)$	$B(x)$	$A(x) + B(x)$	Grau de $A(x) + B(x)$
$2x^3 + x - 1$	$x^3 + x^2 + 1$	$4x^3 + x^2 + x$	3
$2x^3 + x - 1$	$-2x^3 + x^2 + 2$	$x^2 + x + 1$	2
$2x^3 + x - 1$	$-2x^3 + 3x + 2$	$4x + 1$	1
$2x^3 + x - 1$	$-2x^3 - x - 9$	-10	0

b) Seja n o grau do polinómio $A(x)$ e seja ax^n o monómio de maior grau de $A(x)$

Seja m o grau do polinómio $B(x)$ e seja bx^m o monómio de maior grau de $B(x)$

Tem-se que $ax^n \times bx^m$ é o monómio de maior grau do polinómio $A(x) \times B(x)$.

Dado que $ax^n \times bx^m = abx^{n+m}$, conclui-se que o grau do polinómio $A(x) \times B(x)$ é $n + m$

Pág. 104

59.

Esquematisando, pretende-se determinar $A(x)$ tal que:

$$\begin{array}{r|l} A(x) & 5 - 2x^2 \\ 2x - 3 & x^2 - 2x \end{array}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} A(x) &= (5 - 2x^2) \times (x^2 - 2x) + (2x - 3) = 5x^2 - 10x - 2x^4 + 4x^3 + 2x - 3 = \\ &= -2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

60.

Seja n o grau do polinómio $A(x)$ e seja m o grau do polinómio $B(x)$; tem-se, de acordo com o enunciado, $n < m$.
 Seja p o grau do quociente, $Q(x)$, da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ e seja $R(x)$ o resto desta divisão.
 Dado que n terá que ser igual a $m + p$, p não pode tomar qualquer valor natural nem zero.

Resta-nos estudar o caso em que o quociente seja o polinómio nulo:

Se $Q(x) = 0$, $A(x) = 0 \times B(x) + A(x)$

Então, no caso em que o grau de $A(x)$ é menor do que o grau de $B(x)$, o quociente é o polinómio nulo e o resto é $A(x)$; note-se que, assim, se tem que o grau do resto, $A(x)$, é menor do que o grau do divisor, $B(x)$.

Pág. 105

61.

$3x^4$	$-x^3$	$+0x^2$	$+0x$	$+12$	$x^2 + 1$
$-3x^4$		$-3x^2$			$3x^2 - x - 3$
0	$-x^3$	$-3x^2$	$+0x$	$+12$	
	$+x^3$		$+x$		
	0	$-3x^2$	$+x$	$+12$	
		$+3x^2$		$+3$	
		0	$+x$	$+15$	

Então: $Q(x) = 3x^2 - x - 3$ e $R(x) = x + 15$

62.

a)

x^3	$-3x^2$	$+8x$	-1	$x^2 - 1$
$-x^3$		$+x$		$x - 3$
0	$-3x^2$	$+9x$	-1	
	$+3x^2$		-3	
	0	$+9x$	-4	

Então: $Q(x) = x - 3$ e $R(x) = 9x - 4$

b)

$2x^3$	$-3x^2$	$+6x$	-5	$2x - 3$
$-2x^3$	$+3x^2$			$x^2 + 3$
0	0	$+6x$	-5	
		$-6x$	$+9$	
		0	$+4$	

Então: $Q(x) = x^2 + 3$ e $R = 4$

c)

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad +0x^4 \quad -4x^3 \quad +0x^2 \quad +0x \quad +1 \\
 \underline{-x^5} \\
 0 \quad 0 \quad +2x^3 \quad +0x^2 \quad +0x \quad +1 \\
 \underline{-2x^3} \\
 0 \quad 0 \quad +12x \quad +1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - 6 \\ x^3 + 2x \end{array} \right.$$

Então: $Q(x) = x^3 + 2x$ e $R(x) = 12x + 1$

d)

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad +0x^2 \quad +0x \quad -1 \\
 \underline{-x^3} \\
 0 \quad -x^2 \quad -x \quad -1 \\
 \underline{+x^2} \\
 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ x - 1 \end{array} \right.$$

Então: $Q(x) = x - 1$ e $R = 0$

Pág. 106

63.

a) Trata-se de determinar o único polinómio $B(x)$ tal que

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{3})^2(x - 1) = 4(x - 1) \times B(x). \quad \text{Portanto, } B(x) = \frac{1}{8}(x + \sqrt{3})^2$$

b) Trata-se de determinar o único polinómio $B(x)$ tal que

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{3})^2(x - 1) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}) \times B(x). \quad \text{Portanto, } B(x) = (x + \sqrt{3})(x - 1)$$

64.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \quad +0x^2 \quad +kx \quad +7 \\
 \underline{-2x^3} \quad \underline{-4x^2} \\
 0 \quad -4x^2 \quad +kx \quad +7 \\
 \underline{+4x^2} \\
 0 \quad +(k+8)x \quad +7 \\
 \underline{-(k+8)x} \quad \underline{-2k} \quad \underline{-16} \\
 0 \quad -2k \quad -9
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} \frac{1}{2}x + 1 \\ 4x^2 - 8x + 2k + 16 \end{array} \right.$$

Para que o resto seja 2, vem $k = -\frac{11}{2}$ e, neste caso, o polinómio quociente é o polinómio $4x^2 - 8x + 2 \times \left(-\frac{11}{2}\right) + 16$, ou seja, $4x^2 - 8x + 5$

65.

$2x^4$	$+0x^3$	$-ax^2$	$-3x$	$+1$	$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ 2x^2 + 2x - a \end{array}$
$-2x^4$	$+2x^3$	$-2x^2$			
0	$+2x^3$	$-(a+2)x^2$	$-3x$	$+1$	
	$-2x^3$	$+2x^2$	$-2x$		
	0	$-ax^2$	$-5x$	$+1$	
		$+ax^2$	$-ax$	$+a$	
		0	$-(5+a)x$	$+1+a$	

Para que o resto seja um polinómio de grau zero, tem que ser $-(5+a) = 0$, ou seja, $a = -5$ e, neste caso, o polinómio quociente é o polinómio $2x^2 + 2x + 5$ e o resto é -4 .

66. O polinómio quociente é um polinómio de grau 2 e o polinómio resto ou é o polinómio nulo ou é de grau 1 ou 0, ou seja, $Q(x) = ax^2 + bx + c$ e $R(x) = dx + e$ com a, b, c, d, e números reais e $a \neq 0$

Então:

$$\begin{aligned}
 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5 &= (x^2 + 2) \times (ax^2 + bx + c) + (dx + e) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5 &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2ax^2 + 2bx + 2c + dx + e \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5 &= ax^4 + bx^3 + (c + 2a)x^2 + (2b + d)x + 2c + e \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 1 \wedge c + 2a &= 3 \wedge 2b + d = 0 \wedge 2c + e = -5 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 1 \wedge c + 4 &= 3 \wedge 2 + d = 0 \wedge 2c + e = -5 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 1 \wedge c &= -1 \wedge d = -2 \wedge e = -3
 \end{aligned}$$

Então, $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ e $R(x) = -2x - 3$

67.

a)

	1	-3	3	1
1	1	-2	1	1
	1	-2	1	2 = R

Então: $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $R = 2$

b)

	4	0	-5	0	8
0,5	2	1	-2	-1	-1
	4	2	-4	-2	7 = R

Então: $Q(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$ e $R = 7$

c)

	1	0	-5	4
3		3	9	12
	1	3	4	$16 = R$

Então: $Q(x) = x^2 + 3x + 4$ e $R = 16$

d)

	3	0	-5	4	0
$-\frac{2}{3}$		-2	$\frac{4}{3}$	$\frac{22}{9}$	$-\frac{116}{27}$
	3	-2	$-\frac{11}{3}$	$\frac{58}{9}$	$-\frac{116}{27} = R$

Então: $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{58}{9}$ e $R = -\frac{116}{27}$

68.

a) $3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$; tem-se: $k = 3$ e $\alpha = \frac{5}{3}$

b) $2x + 4 = 2(x + 2) = 2[x - (-2)]$; tem-se: $k = 2$ e $\alpha = -2$

c) $-x + \sqrt{5} = -1(x - \sqrt{5})$; tem-se: $k = -1$ e $\alpha = \sqrt{5}$

d) $\frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$; tem-se: $k = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 6$

69.

a) Tem-se: $2x + 4 = 2(x + 2) = 2[x - (-2)]$

	4	0	-6	15
-2		-8	16	-20
	4	-8	10	$-5 = R$

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $4x^3 - 6x + 15$ por $x + 2$ são, respectivamente, $4x^2 - 8x + 10$ e -5 , pelo que o quociente e o resto da divisão inteira de $4x^3 - 6x + 15$ por $2x + 4$ são, respectivamente, $2x^3 - 4x + 5$ e -5

b) Tem-se: $\frac{x}{3} - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$

	-1	6	0
3		-3	9
	-1	3	$9 = R$

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $-x^2 + 6x$ por $x - 3$ são, respectivamente, $-x + 3$ e 9 , pelo que o quociente e o resto da divisão inteira de $-x^2 + 6x$ por $\frac{x}{3} - 1$ são, respectivamente, $-3x + 9$ e 9

Pág. 111

70.

Utilizando o teorema do resto, tem-se:

a) $R = P(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 6 = 27 - 27 - 12 + 6 = -6$

b) $x + 1 = x - (-1)$; $R = P(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 6 = -1 - 3 + 4 + 6 = 6$

c) $R = P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 6 = 1 - 3 - 4 + 6 = 0$

d) $2x - 2 = 2(x - 1)$; $R = P(1) = 0$

71.

a) $P(x)$ é divisível por $x + 2$ se e só se $P(-2) = 0$

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 - k \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow -8 - 4k + 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow -4k = 8 \Leftrightarrow k = -2$$

b) O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ é 2 se e só se $P(1) = 2$

$$P(1) = 2 \Leftrightarrow 1^3 - k \times 1^2 - 2 \times 1 - 4 = 2 \Leftrightarrow 1 - k - 2 - 4 = 2 \Leftrightarrow -k - 5 = 2 \Leftrightarrow k = -7$$

Pág. 112

72.

a) $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; a única raiz do polinómio é $\frac{1}{2}$

b) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$; as raízes do polinómio são -2 e 2

c) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$; o polinómio não tem raízes.

d) $2x^2 + \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow x \left(2x + \frac{1}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{6}$; as raízes do polinómio são $-\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{6}$

e) $2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-10}{4} \vee x = \frac{4}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = 1$; as raízes do polinómio são $-\frac{5}{2}$ e 1

f) $2x(x - 5)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 5 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee x = -1$; as raízes do polinómio são -1 , 0 e 5

73.

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = 12 \neq 0,$$

pelo que -1 não é raiz do polinómio.

$$P(0) = 0^3 - 3 \times 0 - 4 \times 0 + 12 = 12 \neq 0, \text{ pelo que } 0 \text{ não é raiz do polinómio.}$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0, \text{ pelo que } 2 \text{ é raiz do polinómio.}$$

Pág. 113

74.

a) $6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$

b) $x^3 - 8x^2 + 16x = x(x^2 - 8x + 16) = x(x - 4)^2$

c) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

d) $8 - 2x^2 = 2(4 - x^2) = 2(2 - x)(2 + x)$

e) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; o fator $x^2 + 4$ não tem raízes.

75. A regra de Ruffini apresentada sugere que $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

76.

$P(-1) = 3 \times (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \times (-1) - 2 = 3 - (-1) - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$, pelo que -1 é raiz de $P(x)$
Para determinar $Q(x)$, basta efetuar a divisão inteira de $P(x)$ por $x + 1$. Para tal, vamos utilizar a regra de Ruffini:

	3	-1	0	2	-2
-1		-3	4	-4	2
	3	-4	4	-2	0 = R

Então: $Q(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 2$

77.

Se existe um polinómio $Q(x)$ para o qual $P(x) = (x - 2) \times Q(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e, nesse caso, $Q(x)$ é o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 2$

	2	-3	0	-4
2		4	2	4
	2	1	2	0 = R

Então: $Q(x) = 2x^2 + x + 2$

Pág. 114

78.

Se existe um polinómio $Q(x)$ para o qual $P(x) = (x + 1) \times (x - 1) \times Q(x)$, então $P(x)$ é divisível por $(x + 1) \times (x - 1)$, o seja, por $x^2 - 1$ e, nesse caso, $Q(x)$ é o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x^2 - 1$

Tem-se:

$2x^3$	$+3x^2$	$-2x$	-3	$x^2 - 1$
$-2x^3$		$+2x$		$2x + 3$
0	$+3x^2$	$+0x$	-3	
	$-3x^2$		$+3$	
	0	0	0	

Então: $Q(x) = 2x + 3$

Pág. 115

79.

Tem-se:

	2	4	-1	-6	-3
-1		-2	-2	3	3
	2	2	-3	-3	$0 = R$
-1		-2	0	3	
	2	0	-3	$0 = R$	
-1		-2	2		
	2	-2	$-1 = R$		

Então, a multiplicidade da raiz -1 é 2.

Pág. 116

80.

Tem-se:

	8	4	-10	-1	4	-1
$\frac{1}{2}$		4	4	-3	-2	1
	8	8	-6	-4	2	$0 = R$
$\frac{1}{2}$		4	6	0	-2	
	8	12	0	-4	$0 = R$	
$\frac{1}{2}$		4	8	4		
	8	16	8	$0 = R$		
$\frac{1}{2}$		4	10			
	8	20	$18 = R$			

Então, a multiplicidade da raiz $\frac{1}{2}$ é 3, e tem-se

$$\begin{aligned}
 8x^5 + 4x^4 - 10x^3 - x^2 + 4x - 1 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (8x^2 + 16x + 8) = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \times 8(x^2 + 2x + 1) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x + 1)^2
 \end{aligned}$$

Pág. 117

81.

Polinómio $A(x)$

Como $x + 1$ tem grau 1, $(x - 2)^4$ tem grau 4 e $x^2 + 1$ tem grau 2, $A(x)$ tem grau 7

Como o fator $x^2 + 1$ não tem raízes, as únicas raízes de $A(x)$ são -1 e 2

A raiz -1 tem multiplicidade 1 e a raiz 2 tem multiplicidade 4

Polinómio $B(x)$

Como $2x^3$ tem grau 3, $x + 1$ tem grau 1 e $x^2 - 4$ tem grau 2, $B(x)$ tem grau 6

$$B(x) = 2x^3(x + 1)(x^2 - 4) = 2x^3(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

As raízes de $B(x)$ são 0 , -1 , 2 e -2

A raiz 0 tem multiplicidade 3 e as raízes -1 , 2 e -2 têm multiplicidade 1

Polinómio $C(x)$

Como $\frac{1}{2}x$ tem grau 1, $x + 2$ tem grau 1 e $x^2 + 2x$ tem grau 2, $C(x)$ tem grau 4

$$C(x) = \frac{1}{2}x(x + 2)(x^2 + 2x) = \frac{1}{2}x(x + 2)x(x + 2) = \frac{1}{2}x^2(x + 2)^2$$

As raízes de $C(x)$ são 0 e -2

Ambas as raízes têm multiplicidade 2.

82.

Trata-se do caso em que o número de raízes coincide com o grau do polinómio. Então, as raízes indicadas são raízes simples e, como o coeficiente do termo de maior grau é 2, tem-se:

$$2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (x + 2)(2x + 1)(x - 2)$$

Pág. 118

83.

Em todos os casos, trata-se de um polinómio do 2º grau, pelo que começaremos, em cada caso, por determinar as suas raízes.

$$\text{a) } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \vee x = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

$$\text{Então: } 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x - 1)(x - 2)$$

$$\text{b) } 3x^2 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-10)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 11}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{10}{6} \vee x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 2$$

$$\text{Então: } 3x^2 - x - 10 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) = (3x + 5)(x - 2)$$

$$\text{c) } 3x - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-1) \times 4}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-2} \vee x = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

$$\text{Então: } 3x - x^2 + 4 = -(x - 4)(x + 1)$$

84.

Apliquemos o algoritmo da divisão inteira de polinómios para dividir $P(x)$ por $x^2 + 3$

$$\begin{array}{ccccc|c} x^4 & +0x^3 & +2x^2 & +0x & -k & x^2+3 \\ -x^4 & & -3x^2 & & & x^2-1 \\ \hline 0 & 0 & -x^2 & +0x & -k & \\ & & +x^2 & & +3 & \\ \hline & & 0 & 0 & -k+3 & \end{array}$$

Como $P(x)$ é divisível por $x^2 + 3$, podemos concluir que $-k + 3 = 0$, ou seja, que $k = 3$.

Tem-se: $P(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 1) = (x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

Pág. 119

85.

$$P(x) = -3x^3 + 8x^2 + 3x = -x(3x^2 - 8x - 3)$$

Vejam os se o polinómio $3x^2 - 8x - 3$ tem raízes.

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{6} \vee x = \frac{18}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 3$$

Então, tem-se: $P(x) = -x(3x^2 - 8x - 3) = -x \times 3 \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3) = -x(3x + 1)(x - 3)$

86.

Começamos por utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $(x + 1)(x - 2)$

Tem-se:

	2	-5	0	5	-2
-1		-2	7	-7	2
	2	-7	7	-2	0 = R
2		4	-6	2	
	2	-3	1	0 = R	

Então: $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = (x + 1)(x - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

Vejamos se o polinómio $2x^2 - 3x + 1$ tem raízes.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \vee x = \frac{4}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 &= (x+1)(x-2)(2x^2 - 3x + 1) = (x+1)(x-2) \times 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = \\ &= 2(x+1)(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) \end{aligned}$$

87.

Dado que o polinómio é de grau 4 e só tem três raízes, uma delas tem que ser raiz dupla.

Então, podemos concluir que $P(x)$ é um dos seguintes polinómios:

$$x^2(x-1)(x-3), \quad x(x-1)^2(x-3) \quad \text{ou} \quad x(x-1)(x-3)^2$$

Destes, só no terceiro é que se tem $P(2) > 0$

Então, $P(x) = x(x - 1)(x - 3)^2$

Pág. 120

88.

Seja $P(x)$ o polinómio que se pretende determinar e seja a o coeficiente do termo de grau 3 desse polinómio.

Tem-se
$$P(x) = a(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

De acordo com o teorema do resto, sabemos que $P(1) = 2$

$$P(1) = 2 \Leftrightarrow a \times 2 \times \frac{3}{2} \times (-1) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Então,
$$P(x) = -\frac{2}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

89. Tem-se:
$$2x + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

	2	3	-9	-10
$-\frac{5}{2}$		-5	5	10
	2	-2	-4	<u>0 = R</u>

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ por $x + \frac{5}{2}$ são, respetivamente,

$2x^2 - 2x - 4$ e 0, pelo que o quociente e o resto da divisão inteira de

$2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ por $2x + 5$ são, respetivamente, $x^2 - x - 2$ e 0, pelo que

$$P(x) = (x^2 - x - 2)(2x + 5)$$

Vejam-se o polinómio $x^2 - x - 2$ tem raízes.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Então, tem-se:

As raízes de $P(x)$ são $-\frac{5}{2}$, -1 e 2 e
$$P(x) = (x^2 - x - 2)(2x + 5) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x+1)(x-2)$$

Pág. 121

90.

Polinómio $A(x)$

O termo independente, ou seja, 1, é múltiplo inteiro de qualquer raiz de $A(x)$, pelo que as raízes deste polinómio só podem ser -1 e 1

$$A(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0; -1 \text{ é raiz de } A(x)$$

$$A(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8; 1 \text{ não é raiz de } A(x)$$

Polinómio $B(x)$

O termo independente, ou seja, 3, é múltiplo inteiro de qualquer raiz de $B(x)$, pelo que as raízes deste polinómio só podem ser -3 , -1 , 1 e 3

$$B(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 - (-3) + 3 = -27 - 27 + 3 + 3 = -48; -3 \text{ não é raiz de } B(x)$$

$$B(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0; -1 \text{ é raiz de } B(x)$$

$$B(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0; 1 \text{ é raiz de } B(x)$$

$$B(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0; 3 \text{ é raiz de } B(x)$$

Pág. 122

91.

-2 é raiz de $P(x)$ se e só se $P(-2) = 0$. Tem-se $P(-2) = 0 \Leftrightarrow -2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-3x + 6$	$+$	0	$-$

Pág. 124

92.

Polinómio $A(x)$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Polinómio $B(x)$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$3(x + 1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$B(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

93.

Polinómio $A(x)$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = 1, \text{ pelo}$$

$$\text{que } A(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 1)(2x + 5)$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Polinómio $B(x)$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 8}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{-2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2, \text{ pelo}$$

$$\text{que } B(x) = -(x - 2)(x + 4) = (2 - x)(x + 4)$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal.

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$2 - x$	+	+	+	0	−
$x + 4$	−	0	+	+	+
$B(x)$	−	0	+	0	−

94.

Uma expressão analítica é, por exemplo, $(x - 2)^2$, bem como qualquer outra da forma $a(x - 2)^2$, em que $a > 0$

Pág. 125

95.

Uma função definida por um polinómio do 2.º grau tem sempre o mesmo sinal em $\mathbb{R}$ se e só se o polinómio não tiver raízes.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$C(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$D(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

Portanto, dos seis polinómios apresentados, somente $C(x)$ e $D(x)$ não têm raízes.

$C(x)$ é sempre positivo pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2 \geq 0$ pelo que $3x^2 + 5$ só toma valores positivos.

$D(x)$ é sempre negativo pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$ pelo que $-x^2 - 5$ só toma valores negativos.

Pág. 127

96. Tem-se

	-1	2	5	-6
-2		2	-8	6
	-1	4	-3	$0 = R$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(-x^2 + 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$$

$$\text{Então } P(x) = -(x + 3)(x - 1)(x + 2) = (-x + 3)(x - 1)(x + 2)$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $P(x)$

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$x + 2$	−	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	0	+	+	+
$-x + 3$	+	+	+	+	+	0	−
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−

97.

a) $P(x)$ é um polinómio de coeficientes inteiros. Sabemos que, neste caso, o termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz do polinómio. Como o termo independente de $P(x)$ é -1 e -1 só é múltiplo inteiro de -1 e de 1 , só estes dois números podem ser raízes de $P(x)$

Tem-se

$$P(-1) = 4 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 - (-1) - 1 = -4 + 4 + 1 - 1 = 0; -1 \text{ é raiz de } P(x)$$

$$P(1) = 4 \times 1^3 + 4 \times 1^2 - 1 - 1 = 4 + 4 - 1 - 1 = 6; 1 \text{ não é raiz de } P(x)$$

b)

Tem-se

	4	4	-1	-1
-1		-4	0	1
	4	0	-1	<u>0 = R</u>

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 4x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } P(x) = 4(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $P(x)$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4(x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$x+\frac{1}{2}$	-	-	-	0	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Pág. 128

98.

Polinómio $A(x)$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal para a função definida por $A(x)$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	0	+	+	+
$3-x$	+	+	+	0	-
$A(x)$	-	0	+	0	-

Polinómio $B(x)$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal para a função definida por $B(x)$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
x^3	-	-	-	0	+
$B(x)$	-	0	-	0	+

99.

$$2x^6 - 7x^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow \quad (\text{fazendo } y = x^3)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2 \times 2} \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = 3 \Leftrightarrow \quad (\text{dado que } y = x^3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \vee x^3 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt[3]{3}$$

Pág. 129

100.

a) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2 \times 1}$; $P(x) = 0$ é impossível, pelo que $P(x)$ não tem raízes.

b) $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 5 - 4 = (x+2)^2 + 1$, pelo que se tem $a = -2$ e $b = 1$

De outro modo:

$$x^2 + 4x + 5 = (x-a)^2 + b \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = x^2 - 2ax + a^2 + b \Leftrightarrow 4 = -2a \wedge 5 = a^2 + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \wedge 5 = 4 + b \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = 1$$

c) Como $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 \geq 0$, podemos concluir que $(x+2)^2 + 1$ só toma valores positivos, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal para a função definida por $A(x)$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3 - 2x$	+	0	-
$P(x)$	+	+	+
$A(x)$	+	0	-

Pág. 134

101.

$$\text{a) } (x^2 - 4x + 3) + (x - 2x^3 + 5x^2) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 3$$

$$\text{b) } (x^2 - 4x + 3) - (x - 2x^3 + 5x^2) = x^2 - 4x + 3 - x + 2x^3 - 5x^2 = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$$

$$\text{c) } (x^2 - 4x + 3)(3x - 1) = 3x^3 - x^2 - 12x^2 + 4x + 9x - 3 = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$$

$$\text{d) } (x^2 - 4x + 3)(3x - 1)^2 = (3x^3 - 13x^2 + 13x - 3)(3x - 1) = 9x^4 - 3x^3 - 39x^3 + 13x^2 + 39x^2 - 13x - 9x + 3 = 9x^4 - 42x^3 + 52x^2 - 22x + 3$$

102.

O polinómio é do 2.º grau se e só se $k^2 - 4 = 0$, ou seja, se e só se $k = -2$ ou $k = 2$

Tem-se $P_{-2}(x) = 3x^2 + 4x + 1$ e $P_2(x) = 3x^2 + 1$, pelo que o polinómio desta família, que é do 2.º grau e é completo, é $P_{-2}(x)$

103.

$$P(-3) = 4 \Leftrightarrow a \times (-3)^2 - 3 \times (-3) + 1 = 4 \Leftrightarrow 9a + 9 + 1 = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

104.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow a \times a^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow a^3 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{5}$$

105.

$$\text{a) } A(x) = B(x) \Leftrightarrow ax^3 + 2x^2 - 1 = 2x^2 + 3 - b \Leftrightarrow a = 0 \wedge -1 = 3 - b \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 4$$

$$\text{b) } A(x) = B(x) \Leftrightarrow 2x^3 + ax^2 + 1 + bx^2 = 2x^3 + 2x^2 - b \Leftrightarrow a + b = 2 \wedge -1 = b \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a - 1 = 2 \wedge b = -1 \Leftrightarrow a = 3 \wedge b = -1$$

$$\text{c) } A(x) = B(x) \Leftrightarrow 3x^2 - bx - 3(x - 1) = ax^2 + (2 - x)^2 - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 - bx - 3x + 3 = ax^2 + 4 - 4x + x^2 - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - (b + 3)x + 3 = (a + 1)x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 = a + 1 \wedge -(b + 3) = -4 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 1$$

106.

a) Determinemos o valor de x para o caso em que a área da base é 6.

$$2x^2 + 3x + 1 = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-3-7}{4} \vee x = \frac{-3+7}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = 1$$

Como x é positivo, vem $x = 1$ e, neste caso, o volume do paralelepípedo é igual a

$$2 \times 1^3 + 7 \times 1^2 + 7 \times 1 + 2 = 2 + 7 + 7 + 2 = 18$$

A medida da altura de um paralelepípedo é igual ao quociente entre a medida do volume e a medida da área da base do paralelepípedo, pelo que, neste caso, a altura do paralelepípedo é igual a $\frac{18}{6} = 3$

b) A expressão que representa a altura é o quociente entre a expressão que representa o volume e a expressão que representa a área da base dos paralelepípedos.

Tem-se:

$2x^3$	$+7x^2$	$+7x$	$+2$	$2x^2 + 3x + 1$
$-2x^3$	$-3x^2$	$-x$		$x + 2$
0	$+4x^2$	$+6x$	$+2$	
	$-4x^2$	$-6x$	-2	
	0	0	0	

A altura dos paralelepípedos desta família é representada pela expressão $x + 2$

107.

Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 2x^4 & +0x^3 & +3x^2 & +0x & +1 \\
 -2x^4 & +2x^3 & -6x^2 & & \\
 \hline
 0 & +2x^3 & -3x^2 & +0x & +1 \\
 & -2x^3 & +2x^2 & -6x & \\
 & \hline
 & 0 & -x^2 & -6x & +1 \\
 & & +x^2 & -x & +3 \\
 & & \hline
 & & 0 & -7x & +4
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 3 \\ 2x^2 + 2x - 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados:

Sabemos que o quociente é um polinómio de 2.º grau e que o resto é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= B(x) \times (ax^2 + bx + c) + (dx + e) \Leftrightarrow \\
 2x^4 + 3x^2 + 1 &= (x^2 - x + 3) \times (ax^2 + bx + c) + (dx + e) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx + 3ax^2 + 3bx + 3c + dx + e \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 &= ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + 3a)x^2 + (-c + 3b + d)x + 3c + e \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b - a = 0 \wedge c - b + 3a &= 3 \wedge -c + 3b + d = 0 \wedge 3c + e = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 2 \wedge c - 2 + 6 &= 3 \wedge -c + 6 + d = 0 \wedge 3c + e = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 2 \wedge c = -1 \wedge 1 + 6 + d &= 0 \wedge -3 + e = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 2 \wedge c = -1 \wedge d = -7 \wedge e &= 4
 \end{aligned}$$

Então, $Q(x) = 2x^2 + 2x - 1$ e $R(x) = -7x + 4$

108.

Como o polinómio divisor é de grau 2, o polinómio resto, $R(x)$, é de grau menor ou igual a 1

Seja $R(x) = mx + n$. Tem-se

$$\begin{aligned}
 2x^3 - ax^2 - 3 &= (x^2 + x + 1)(2x + 1) + mx + n \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^3 - ax^2 - 3 &= 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x + 2x + 1 + mx + n \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^3 - ax^2 - 3 &= 2x^3 + 3x^2 + (3 + m)x + 1 + n \Leftrightarrow -a = 3 \wedge 3 + m = 0 \wedge -3 = 1 + n \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a = -3 \wedge m &= -3 \wedge n = -4
 \end{aligned}$$

Então, tem-se $a = -3$ e o polinómio resto é $-3x - 4$

109.

Apresenta-se o algoritmo já completo e, ao lado, indica-se a ordem pela qual foram sendo preenchidas as células vazias do original.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrr}
 2x^3 & +x^2 & -x & -1 \\
 -2x^3 & -6x^2 & +2x & \\
 \hline
 0 & -5x^2 & +x & -1 \\
 & +5x^2 & +15x & -5 \\
 & \hline
 & 0 & +16x & -6
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{l} x^2 + 3x + (-1) \\ 2x - 5 \end{array} \right.
 & \begin{array}{rrrr}
 \underline{2.^\circ} & +x^2 & -x & \underline{13.^\circ} \\
 \underline{1.^\circ} & \underline{3.^\circ} & \underline{5.^\circ} & \\
 \hline
 0 & -5x^2 & +x & \underline{12.^\circ} \\
 & \underline{7.^\circ} & \underline{9.^\circ} & \underline{11.^\circ} \\
 & \hline
 & 0 & \underline{10.^\circ} & -6
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{l} x^2 + \underline{4.^\circ} + \underline{6.^\circ} \\ 2x - \underline{8.^\circ} \end{array} \right.
 \end{array}$$

110.

Tem-se:

	2	1	0	-3
-2		-4	6	-12
	2	-3	6	-15 = R

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $2x^3 + x^2 - 3$ por $x + 2$ são, respetivamente, $2x^2 - 3x + 6$ e -15

Como $2x + 4 = 2(x + 2)$, podemos concluir que o quociente e o resto da divisão inteira de $2x^3 + x^2 - 3$ por $2x + 4$ são, respetivamente, $x^2 - \frac{3}{2}x + 3$ e -15

111.

$P(x)$ é divisível por $x + 3$ se e só se $P(-3) = 0$

Tem-se: $P(-3) = 0 \Leftrightarrow (-3)^3 + a \times (-3)^2 + 3 \times (-3) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9a - 45 = 0 \Leftrightarrow a = 5$

Sendo $a = 5$, tem-se $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$, caso em que

$P(1) = 1^3 + 5 \times 1^2 + 3 \times 1 - 9 = 1 + 5 + 3 - 9 = 0$, pelo que $P(x)$ é divisível por $x - 1$

112.

Apresenta-se o algoritmo relativo à regra de Ruffini já completo e, abaixo, indica-se a ordem pela qual foram sendo preenchidas as células vazias do original.

	3	4	0	3
-1		-3	-1	1
	3	1	-1	4 = R
	2.º	4.º	7.º	8.º
-1		3.º	5.º	1
	3	1	6.º	1.º

Então, $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3$ e $Q(x) = 3x^2 + x - 1$

113.

A única raiz do polinómio $A(x)$ é -1 , pelo que nos resta confirmar que -1 é raiz de $B(x)$ e de $C(x)$.

Na verdade, $B(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$ e $C(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

Pág. 135

114.

a) $\frac{3x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

A raiz é $\frac{1}{3}$

b) $6 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

As raízes são $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

c) $\frac{x^2}{3} - 2x = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{x}{3} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

As raízes são 0 e 6

d) $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

As raízes são -2 e 1

e) $2(x + 3)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

As raízes são -3 e 1

115.

a) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$

b) $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x[x^2 - (\sqrt{2})^2] = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

c) $16 - 8x + x^2 = (4 - x)^2 = (x - 4)^2$

d) $x^4 + 2x^2 + 1 =$ (fazendo $y = x^2$)
 $= y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 = (x^2 + 1)^2$

e) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x + 1)(x - 1)]^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$

De outro modo, mostrar que -1 e 1 são raízes do polinómio, dividir o polinómio por

$(x + 1)(x - 1)$, obter o quociente $x^2 - 1$ e fatorizar o polinómio:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1)(x - 1) = (x + 1)^2(x - 1)^2$$

116.

Tem-se $A(-2) = (-2)^4 + 6 \times (-2) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$, pelo que -2 é uma raiz de $A(x)$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x + 2$

	1	0	0	6	-4
-2		-2	4	-8	4
	1	-2	4	-2	0 = R

Então, $x^4 + 6x - 4 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 2)$

117.

Tem-se $A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{8} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2} = 0$, pelo que $\frac{1}{2}$ é uma raiz de $A(x)$

e $A(1) = 2 \times 1^3 - \frac{7}{2} \times 1 + \frac{3}{2} = 2 - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 0$, pelo que 1 é uma raiz de $A(x)$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

Tem-se:

	2	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
	2	1	-3	0 = R
1		2	3	
	2	3	0 = R	

Então, $2x^3 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 3)$

118.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$

Então, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

$$\text{b) } 2x - 3x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3) \times 5}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{-6} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{3}$$

$$\text{Então, } 2x - 3x^2 + 5 = -3(x + 1) \left(x - \frac{5}{3}\right) = (x + 1)(-3x + 5)$$

$$\text{c) } 2x^3 + x^2 - 3x = x(2x^2 + x - 3)$$

$$\text{Ora, } 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$$

$$\text{Então, } 2x^3 + x^2 - 3x = x(2x^2 + x - 3) = x \times 2 \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1) = x(2x + 3)(x - 1)$$

119.

a) A afirmação é verdadeira pois $Q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$, que é um polinómio de grau 4, por $(x - 1)(x + 1)$, que é um polinómio de grau 2, e $Q(x)$ não pode ter zeros pois, se tivesse zeros, também seriam zeros de $P(x)$ e -1 ou 1 não seriam raízes simples de $P(x)$ ou o polinómio $P(x)$ teria outras raízes além de -1 e 1 .

b) Tem-se:

	2	0	3	0	-5
-1		-2	2	-5	5
	2	-2	5	-5	<u>0 = R</u>
1		2	0	5	
	2	0	5	<u>0 = R</u>	

$$Q(x) = 2x^2 + 5$$

120.

Se $A(x)$ é divisível por $2x + 1$, então $A\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x + \frac{1}{2}$

Tem-se:

	2	15	-9	-8
$-\frac{1}{2}$		-1	-7	8
	2	14	-16	<u>0 = R</u>

$$\text{Então, tem-se } A(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 14x - 16) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \times 2(x^2 + 7x - 8) = (2x + 1)(x^2 + 7x - 8)$$

$$\text{Ora, } x^2 + 7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 9}{2} \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 1, \text{ pelo que}$$

$$A(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 14x - 16) = (2x + 1)(x^2 + 7x - 8) = (2x + 1)(x + 8)(x - 1)$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

121.

Se $P(x)$ é do 3.º grau e $P(-1) = P(2) = P(3) = 0$, então $P(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$, sendo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $P(1) = -2$, vem $a \times 2 \times (-1)(-2) = -2$, pelo que $a = -\frac{1}{2}$

Então,
$$P(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)$$

122.

Se $A(x)$ é divisível por $1-2x$, então $A\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x - \frac{1}{2}$

Tem-se:

	-2	-1	5	-2
$\frac{1}{2}$		-1	-1	2
	-2	-2	4	$0 = R$

Então, tem-se
$$A(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x^2 - 2x + 4) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \times (-2)(x^2 + x - 2) = (-2x + 1)(x^2 + x - 2)$$

Ora, $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$, pelo que as raízes de $A(x)$ são -2 , $\frac{1}{2}$ e 1

$$A(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x^2 - 2x + 4) = (-2x + 1)(x^2 + x - 2) = (-2x + 1)(x + 2)(x - 1)$$

123.

Tem-se:

	1	5	-3	-17	-10	
-1		-1	-4	7	10	
	1	4	-7	-10	$0 = R$	Logo, -1 é raiz de $P(x)$
-1		-1	-3	10		
	1	3	-10	$0 = R$		
-1		-1	-2			
	1	2	$-12 = R$			

Então, a multiplicidade da raiz -1 é 2.

Então, tem-se
$$P(x) = (x + 1)^2(x^2 + 3x - 10)$$

Ora, $x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$, pelo que $P(x) = (x + 1)^2(x^2 + 3x - 10) = (x + 1)^2(x + 5)(x - 2)$

124.

Polinómio $A(x)$:

O grau é 3 porque $x - 1$ é de grau 1 e $(x + 3)^2$ é de grau 2.

As raízes são -3 e 1 pois $A(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

A multiplicidade de -3 é 2 e a multiplicidade de 1 é 1.

Polinómio $B(x)$:

O grau é 5 porque $0,2x$ é de grau 1 e $(4 - x^2)^2$ é de grau 4.

As raízes são 0 , -2 e 2 pois $B(x) = 0 \Leftrightarrow 0,2x = 0 \vee 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

Tem-se $B(x) = 0,2x(4 - x^2)^2 = 0,2x[(2 - x)(2 + x)]^2 = 0,2x(2 - x)^2(2 + x)^2$,

pelo que a multiplicidade de 0 é 1, a multiplicidade de 2 é 2 e a multiplicidade de -2 é 2.

125.

Se $P(x)$ é do 3.º grau e -1 é uma raiz dupla e 2 é outra raiz, então

$P(x) = a(x + 1)^2(x - 2)$, sendo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $2x - 1$ é 1, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Tem-se:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2\left(\frac{1}{2} - 2\right) = 1 \Leftrightarrow a \times \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow a \times \left(-\frac{27}{8}\right) = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{27}$$

Então, $P(x) = -\frac{8}{27}(x + 1)^2(x - 2)$

126.

Para 3 ser raiz de $P(x)$, atendendo a que os coeficientes de $P(x)$ são números inteiros, era necessário que 3 fosse um dos divisores de -2 , o que não acontece.

127.

a) Por exemplo $A(x) = -[x - (-3)] = -(x + 3) = -x - 3$

b) Pode ser, por exemplo, $D(x) = x - 0,5$ e $E(x) = -(x + 1) = -x - 1$, pelo que, neste caso, se poderá ter $B(x) = (x - 0,5)(-x - 1) = -x^2 - 0,5x + 0,5$

128.

a) Tem-se

	1	0	-3	-2
2		2	4	2
	1	2	1	0 = R

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $P(x)$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	0	+
$(x + 1)^2$	+	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	-	0	+

b) Para fatorizarmos $B(x)$, comecemos por fatorizar $x^3 - 8$

Tem-se

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	$0 = R$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}, \text{ pelo que } x^2 + 2x + 4 \text{ não tem raízes.}$$

$$\text{Então, } B(x) = (1 - x^2)(x^3 - 8) = (1 - x)(1 + x)(x - 2)(x^2 + 3x + 4)$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $P(x)$

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$1 - x$	+	+	+	0	-	0	-
$1 + x$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x^2 + 3x + 4$	+	+	+	+	+	+	+
$B(x)$	+	0	-	0	+	0	-

129.

a) $A(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2$

C.S. = $] -\infty, -2[$

b) $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

C.S. = $[-2, 1]$

c) Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $A(x) \times B(x)$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$A(x)$	+	0	-	-	-
$B(x)$	-	0	+	0	-
$A(x) \times B(x)$	-	0	-	0	+

$$A(x) \times B(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \wedge x \neq -2$$

C.S. = $] -\infty, 1[\setminus \{-2\}$

d) $[A(x)]^2 > 0 \Leftrightarrow A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

e) $[B(x)]^3$ é positivo quando $B(x)$ é positivo, é negativo quando $B(x)$ é negativo e é nulo quando $B(x)$ é nulo, pelo que se tem

$$A(x) \times [B(x)]^3 \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \times B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x = -2$$

C.S. = $[1, +\infty[\cup \{-2\}$

130. Dado que -2 e 1 são as raízes do polinómio $P(x)$ e que $P(x) < 0$ se e só se $x < -2$, tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $P(x)$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

a) $P(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x \neq 1$

C.S. $=]-2, +\infty[\setminus \{1\}$

b) Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $(x-1)^2 P(x)$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$(x-1)^2 P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Então, $(x-1)^2 P(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x \neq 1$

C.S. $=]-2, +\infty[\setminus \{1\}$

c) Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função definida por $(x^2-4)P(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2-4)P(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Então, $(x^2-4)P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

C.S. $= [2, +\infty[\cup \{-2, 1\}$

+ Exercícios propostos

Pág. 136

131.

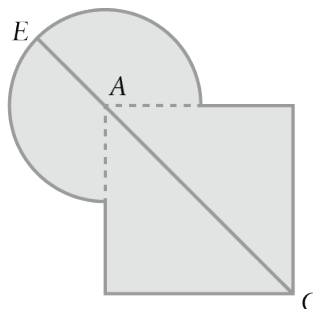
Opção (D)

Tem-se, de acordo com a figura:

$$\overline{EC} = \overline{EA} + \overline{AC} = 3 + \overline{AC}$$

Ora, $\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{72}$ pelo

que $\overline{AC} = 3 + \sqrt{72} \approx 11,5\text{m}$



132.

Opção (D)

Como $2 - x$ e $x - 2$ são expressões simétricas, os seus quadrados são expressões equivalentes.

133.

Opção (C)

Opção (A): $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ não são números irracionais

Opção (B): $(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2) = 2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ não é um número irracional

Opção (C): $(2 - \sqrt{6}) + (2 + \sqrt{6}) = 4$ e $(2 - \sqrt{6}) \times (2 + \sqrt{6}) = 4 - 6 = -2$

Opção (D): $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$ não é um número irracional

134.

Opção (A)

Um produto de números primos só é um quadrado perfeito se cada um desses números primos ocorrer, no produto, um número par de vezes, o que não se pode verificar na opção (A) quaisquer que sejam os números primos a , b e c .

De outro modo:

Opção (B): $(abc)^2$ é um quadrado perfeito

Opção (C): $a^2b^4c^6 = (ab^2c^3)^2$ é um quadrado perfeito

Opção (D): $(a^2b^4c^6)^3 = [(ab^2c^3)^2]^3 = [(ab^2c^3)^3]^2$ é um quadrado perfeito

135.

Opção (B)

Opção (A): Tem-se $a < 0 \Rightarrow 2a < a < 0 \Rightarrow (2a)^2 > a^2$ pelo que a afirmação é verdadeira

Opção (B): Tem-se $a < 0 \Rightarrow 2a < a < 0 \Rightarrow (2a)^3 < a^3$ pelo que a afirmação é falsa

Opção (C): Tem-se $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow 0 < 1 - a < 2 - a \Rightarrow (1 - a)^2 < (2 - a)^2$
pelo que a afirmação é verdadeira

Opção (D): Tem-se $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow 0 < 1 - a < 2 - a \Rightarrow (1 - a)^3 < (2 - a)^3$
pelo que a afirmação é verdadeira

136.

Opção (B)

Opção (A): A afirmação é falsa pois $\sqrt{3}$ é uma dízima infinita não periódica.

Opção (C): A afirmação é falsa pois $2 \times \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12} \neq \sqrt{6}$

Opção (D): A afirmação é falsa pois $(\sqrt{3})^2 = 3 \neq 9$

137.

Opção (A)

Tem-se $(\sqrt{2})^3 + 2 \times (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 2 \times 2 - 2\sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ pelo que $\sqrt{2}$ é solução da equação.

138.

Opção (D)

Tem-se $c = 3a = 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$ e $d = 2b = 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{40}$

139.

Opção (C)

Seja d a diagonal de um quadrado de lado l ; tem-se $d = \sqrt{2} l$

$\sqrt{3} = \sqrt{2} l \Leftrightarrow l = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{3}{2}}$ pelo que a área do quadrado é $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$

Pág. 137

140.

Opção (B)

Seja h a altura de um triângulo equilátero de lado l ; tem-se $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{9} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{9}}{2} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \times 9^2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \times 3^4}}{2} = \frac{\sqrt[6]{3^7}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{3}}{2}$$

141.

Opção (A)

Seja h a altura de um triângulo equilátero de lado l ; tem-se $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \Leftrightarrow l = 2$$

$$\text{Área} = \frac{l \times h}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

142.

Opção (C)

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2 \times 3^2} + \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^3} = \\ &= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

143.

Opção (D)

Opção (A): A afirmação é falsa pois o polinómio $A(x) + B(x)$ tem grau menor ou igual a 3

Opção (B): A afirmação não é necessariamente verdadeira porque, por exemplo, para $A(x) = x^3 + x$ e $B(x) = -x^3 + x^2$ o polinómio $A(x) + B(x)$ tem grau 2

Opção (C): A afirmação é falsa pois o polinómio $A(x) + C(x)$ tem grau 3

144.

Opção (A)

O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a $P(-2)$

Tem-se $P(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2) + 3 = -8 + 6 + 3 = 1$

145.

Opção (C)

$P(x)$ é divisível por $x - 1$ se e só se $P(1) = 0$

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - k + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

146.

Opção (C)

Como $2x + 6 = 2(x + 3)$, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $2x + 6$ é igual ao resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x + 3$, ou seja, $A(-3)$

147.

Três números podem ser as medidas dos lados de um triângulo se e só se o maior deles for menor do que a soma dos outros dois. Vamos, então, mostrar que $a\sqrt{12} < a\sqrt{6} + a\sqrt{3}$

$a\sqrt{12} < a\sqrt{6} + a\sqrt{3} \Leftrightarrow a\sqrt{12} < a(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \Leftrightarrow \sqrt{12} < \sqrt{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{12})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 12 < 9 + 2\sqrt{18} \Leftrightarrow 3 < 2 \times 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 2\sqrt{2}$, o que é verdade.

148.

Se o triângulo é retângulo em Q , então os catetos são os lados $[QP]$ e $[QR]$.

Área = $\frac{\overline{QP} \times \overline{QR}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\overline{QP} \times (\sqrt{a}-1)}{2} \Leftrightarrow \overline{QP} = \frac{2a}{\sqrt{a}-1}$

Pág. 138

149.

A aresta do cubo maior é $\sqrt[3]{54}$ dm e a aresta do cubo menor é $\sqrt[3]{16}$ dm

Tem-se $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$, pelo que o comprimento do fio azul na caixa maior é $4 \times 3\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2}$ e o comprimento do fio azul na caixa menor é $4 \times 2\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$

O que se gasta a mais na maior das caixas é $12\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

Ora, a aresta de um cubo com volume igual a 2 dm^3 é $\sqrt[3]{2}$ dm, pelo que $4\sqrt[3]{2}$ dm de fita azul permitem debruar a tampa de uma caixa cúbica com 2 dm^3 de volume.

150.

Seja d a diagonal de um quadrado de lado l ; tem-se $d = \sqrt{2} l$

$$d = \sqrt{2} l \Leftrightarrow l + 5 = \sqrt{2} l \Leftrightarrow \sqrt{2} l - l = 5 \Leftrightarrow l(\sqrt{2} - 1) = 5 \Leftrightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-1} = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 5\sqrt{2} + 5 \approx 12,07 \text{ cm}$$

De outro modo:

Seja x a medida do lado do quadrado. Tem-se $d = x + 5$, pelo que aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se $(x + 5)^2 = x^2 + x^2$

$$(x + 5)^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+100}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 - 5\sqrt{2} \vee x = 5 + 5\sqrt{2}$$

Como $x > 0$, tem que ser $= 5 + 5\sqrt{2} \approx 12,07 \text{ cm}$

151.

3º: O sólido é o tetraedro regular cuja aresta tem comprimento igual à diagonal facial do cubo.

4º: Volume do cubo $= 5^3 \text{ cm}^3$

$$\text{Volume de cada pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 5}{2} \times 5 = \frac{5^3}{6} \text{ cm}^3$$

O volume de cada pirâmide é a sexta parte do volume do cubo.

$$\text{Volume do tetraedro} = \text{volume do cubo} - \text{volume de quatro pirâmides} = 5^3 - 4 \times \frac{5^3}{6} =$$

$$= 5^3 - \frac{2 \times 5^3}{3} = \frac{5^3}{3} \text{ cm}^3$$

O volume do tetraedro é a terça parte do volume do cubo.

5º: Como a aresta do tetraedro é a diagonal facial do cubo, sendo a a aresta do tetraedro e sendo c a aresta do cubo, tem-se $a = \sqrt{2}c$, pelo que $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$\text{Então, o volume do cubo é igual a } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}a^3}{2^3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$$

Como o volume do tetraedro é igual à terça parte do volume do cubo, é igual a $\frac{\sqrt{2}a^3}{4} \div 3 = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Pág. 139

152.

$$\text{a) } \text{Área} = \frac{(x+2)+(x-3)}{2} \times x = \frac{2x-1}{2} \times x = \left(-\frac{1}{2}\right) \times x = x^2 - \frac{1}{2}x$$

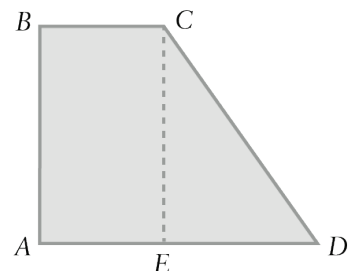
b) Para $x = 7$, tem-se:

$$\overline{AB} = 7, \overline{BC} = 4 \text{ e } \overline{AD} = 9$$

De acordo com a figura, tem-se $\overline{CE} = 7$

e $\overline{ED} = 5$, pelo que $\overline{CD}^2 = 7^2 + 5^2$, ou seja, $\overline{CD} = \sqrt{74}$

O perímetro do trapézio é igual a $7 + 9 + \sqrt{74} + 4 = 29 + \sqrt{74}$



153.

a) O comprimento de cada semicircunferência é igual a $\frac{400-2 \times 120}{2} = 80 \text{ m}$

Seja r o raio das semicircunferências menores. Tem-se $\frac{1}{2} \times 2\pi r = 80 \Leftrightarrow r = \frac{80}{\pi} \approx 25,5 \text{ m}$

b) Área da pista = (área de dois retângulos de comprimento igual a 120 e largura igual a x) + (área de uma coroa circular limitada por uma circunferência de raio $\frac{80}{\pi}$ e outra de raio $\frac{80}{\pi} + x$)

$$\begin{aligned}\text{Área da pista} &= 2 \times (120 \times x) + \left[\pi \left(\frac{80}{\pi} + x \right)^2 - \pi \left(\frac{80}{\pi} \right)^2 \right] = \\ &= 240x + \left[\pi \left(\frac{80^2}{\pi^2} + \frac{160}{\pi}x + x^2 \right) - \pi \times \frac{80^2}{\pi^2} \right] = 240x + \frac{80^2}{\pi} + 160x + \pi x^2 - \frac{80^2}{\pi} = 400x + \pi x^2\end{aligned}$$

154.

a₁) $\frac{500}{x}$

a₂) Receita = Despesa + Lucro = $500 + 1,75x$

b) $\frac{500}{x}$

155.

Tem-se:	Número de micas finas:	x
	Número de micas espessas:	$30 - x$
	Gasto em cêntimos:	$x \times 10 + (30 - x) \times 15 = 450 - 5x$
	Gasto em euros:	$\frac{450 - 5x}{100} = 4,5 - 0,05x$

156.

Seja x o número de bilhetes vendidos do tipo C. O número de bilhetes vendidos do tipo B é $4x$ e o número de bilhetes vendidos do tipo A é $12x$

a) Receita = $12x \times 15 + 4x \times 25 + x \times 35 = 315x$

b) $315x = 45675 \Leftrightarrow x = 145$, pelo que foram vendidos 315×145 , ou seja, 2465 bilhetes.

Pág. 140

157.

a) Vamos mostrar que $x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 = (2x^2 - x - 4) \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right) + \frac{13}{2}x + 4$

$$\begin{aligned}\text{Tem-se} \quad & (2x^2 - x - 4) \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right) + \frac{13}{2}x + 4 = \\ & = 2x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right) - x \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right) - 4 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right) + \frac{13}{2}x + 4 = \\ & = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x - 2x^2 - 4x - 6 + \frac{13}{2}x + 4 = x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2\end{aligned}$$

b)

x^4	$+\frac{3}{2}x^3$	$+0x^2$	$+x$	-2	$2x^2 - x - 4$
$-x^4$	$+\frac{1}{2}x^3$	$+2x^2$			$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
0	$+2x^3$	$+2x^2$	$+x$	-2	
	$-2x^3$	$+x^2$	$+4x$		
	0	$+3x^2$	$+5x$	-2	
		$-3x^2$	$+\frac{3}{2}x$	$+6$	
		0	$+\frac{13}{2}x$	$+4$	

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 &= (2x^2 - x - 4)(ax^2 + bx + c) + dx + e \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 &= 2x^2(ax^2 + bx + c) - x(ax^2 + bx + c) - 4(ax^2 + bx + c) + dx + e \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 &= 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - \\
&\quad - 4ax^2 - 4bx - 4c + dx + e \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 &= 2ax^4 + (2b-a)x^3 + (2c-b-4a)x^2 + (-c-4b+d)x - 4c + e \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 2a &= 1 \wedge 2b - a = \frac{3}{2} \wedge 2c - b - 4a = 0 \wedge -c - 4b + d = 1 \wedge -4c + e = -2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \wedge 2b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \wedge 2c - b - 2 = 0 \wedge -c - 4b + d = 1 \wedge -4c + e = -2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \wedge b = 1 \wedge 2c - 1 - 2 = 0 \wedge -c - 4 + d = 1 \wedge -4c + e = -2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \wedge b = 1 \wedge c = \frac{3}{2} \wedge -\frac{3}{2} + d = 5 \wedge -6 + e = -2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \wedge b = 1 \wedge c = \frac{3}{2} \wedge d = \frac{13}{2} \wedge e = 4 \\
\text{Então, } x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x - 2 &= (2x^2 - x - 4) \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\right)}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{13}{2}x + 4}_{R(x)}
\end{aligned}$$

158.

a) O quociente da divisão exata de $A(x)$ por $2(x+1)$ é $(x+1)(x-\sqrt{2})$, pelo que, como $4(x+1) = 2[2(x+1)]$, o quociente da divisão exata de $A(x)$ por $4(x+1)$ é $\frac{(x+1)(x-\sqrt{2})}{2}$

b) O quociente da divisão exata de $A(x)$ por $(x-\sqrt{2})$ é $2(x+1)^2$, pelo que o quociente da divisão exata de $A(x)$ por $\frac{1}{4}(x-\sqrt{2})$ é $8(x+1)^2$

159.

a) «... é igual a 1.»

b) «... então $P(-\alpha) = 2$.»

c) «... $P(x) - 1$ é divisível por $x - \alpha$.»

160.

Tem-se:

	2	0	-3	1	0
1	2	2	2	-1	0
	2	2	-1	0	0 = R

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $2x^4 - 3x^2 + x$ por $x - 1$ são, respetivamente, $2x^3 + 2x^2 - x$ e 0

161.

a) Como $2x - 4 = 2(x - 2)$, tem-se que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $2x - 4$ é igual ao resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 2$, ou seja, -2

b) $P(2) = -2 \Leftrightarrow a \times 2^3 + 2^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow 8a = -8 \Leftrightarrow a = -1$. Então, $P(x) = -x^3 + x^2 + 2$

Tem-se:

	-1	1	0	2
-1		1	-2	2
	-1	2	-2	4 = R

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $-x^3 + x^2 + 2$ por $x + 1$ são, respetivamente, $-x^2 + 2x - 2$ e 4

162.

Como $A(-1) = 4$, vem, de acordo com o teorema do resto, que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x + 1$ é 4 , pelo que, como $2x + 2 = 2(x + 1)$, o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $2x + 2$ é 4 .

163.

a) Tem-se:

	1	0	0	-27
3		3	9	27
	1	3	9	0 = R

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $x^3 - 27$ por $x - 3$ são, respetivamente, $x^2 + 3x + 9$ e 0
Então, podemos afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$

b) Tem-se:

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	0 = R

Então, o quociente e o resto da divisão inteira de $x^3 + 27$ por $x + 3$ são, respetivamente, $x^2 - 3x + 9$ e 0 .
Então, podemos afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 27 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$

164.

a) Tem-se:

	1	0	-13	0	36
2		2	4	-18	-36
	1	2	-9	-18	0 = R
3		3	15	18	
	1	5	6	0 = R	

Seja $P(a) = a^4 - 13a^2 + 36$

Então, $P(a) = (a - 2)(a - 3)(a^2 + 5a + 6)$

$a^4 - 13a^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a - 3)(a^2 + 5a + 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - 2 = 0 \vee a - 3 = 0 \vee a^2 + 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 3 \vee a = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2 \vee a = 3 \vee a = \frac{-5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 3 \vee a = -2 \vee a = -3$

b) $a^4 - 13a^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow$ (substituindo a^2 por x) $x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 9 \Leftrightarrow$ (substituindo x por a^2)
 $\Leftrightarrow a^2 = 4 \vee a^2 = 9 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = 2 \vee a = -3 \vee a = 3$

Pág. 141

165.

a) $x^2 + 8x \neq 0 \Leftrightarrow \sim(x^2 + 8x = 0) \Leftrightarrow \sim[x(x + 8) = 0] \Leftrightarrow \sim(x = 0 \vee x = -8) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -8$ C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{-8, 0\}$
b) $x^4 - 16x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \sim(x^4 - 16x^2 = 0) \Leftrightarrow \sim[x^2(x^2 - 16) = 0] \Leftrightarrow \sim[x^2 = 0 \vee x^2 - 16 = 0] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim(x = 0 \vee x = -4 \vee x = 4) \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -4 \wedge x \neq 4$ C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$
c) $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \sim[(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim(x - 3 = 0 \vee x^2 - 3x + 2 = 0) \Leftrightarrow \sim(x = 3 \vee x = 1 \vee x = 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2$ C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

166.

a) Tem-se:

	2	-a	0	2b	-8
1	2	-a + 2	-a + 2	-a + 2	2b - a + 2
	2	-a + 2	-a + 2	2b - a + 2	2b - a - 6 = R
1	2	-a + 4	-2a + 6	-2a + 6	
	2	-a + 4	-2a + 6	2b - 3a + 8 = R	

1 é uma raiz dupla de $P_{a,b}(x)$ se e só se $2b - a - 6 = 0$ e $2b - 3a + 8 = 0$
 $\begin{cases} 2b - a - 6 = 0 \\ 2b - 3a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 6 \\ 2b - 3a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 6 \\ a + 6 - 3a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 6 \\ -2a = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 6 \\ a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 13 \\ a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{2} \\ a = 7 \end{cases}$

b) Como, da alínea anterior, se tem

$2x^4 - ax^3 + 2bx - 8 = (x - 1)^2 \cdot [2x^2 + (-a + 4)x - 2a + 6] \wedge a = 7 \wedge b = \frac{13}{2},$
vem $P_{a,b}(x) = 2x^4 - 7x^3 + 13x - 8 = (x - 1)^2 \cdot (2x^2 - 3x - 8)$

c) Tem-se:

	2	-a	0	2b	-8
-2	-4	2a + 8	-4a - 16	-4b + 8a + 32	
	2	-a - 4	2a + 8	2b - 4a + 16	-4b + 8a + 24 = R

$P_{a,b}(x)$ é divisível por $x + 2$ se e só se $-4b + 8a + 24 = 0$

Como $-4b + 8a + 24 = 0 \Leftrightarrow 2a - b + 6 = 0$, a relação entre a e b pode ser representada pela igualdade $2a - b + 6 = 0$

167.

a) $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 36 = 8 - 16 + 2 + 36 = 30$

b) Como $P(2) = 30$, podemos concluir que o polinómio $P(x) - 30 = x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível por $x - 2$
Tem-se:

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0 = R

Então, tem-se $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$

$$P(x) = 30 \Leftrightarrow P(x) - 30 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \vee x = 3$$

As soluções são -1 , 2 e 3

168.

a) Seja $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

De acordo com a propriedade enunciada na página 121, podemos concluir que os únicos números inteiros candidatos a raízes da equação $P(x) = 0$ são -1 e 1 .

$$P(-1) = 6 \times (-1)^3 - 11 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) - 1 = -6 - 11 - 6 - 1 = -24; -1 \text{ não é solução.}$$

$$P(1) = 6 \times 1^3 - 11 \times 1^2 + 6 \times 1 - 1 = 6 - 11 + 6 - 1 = 0; 1 \text{ é solução}$$

Tem-se:

	6	-11	6	-1
1		6	-5	1
	6	-5	1	0 = R

$$\text{Então, } P(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(6x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2 \times 6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$$

As soluções são $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e 1

b) Seja $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Tem-se $x^3 + 2x^2 = x + 2 \Leftrightarrow P(x) = 0$

De acordo com a propriedade enunciada na página 121, podemos concluir que os únicos números inteiros candidatos a raízes da equação $P(x) = 0$ são -2 , -1 , 1 e 2

$$P(-2) = (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - (-2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0; -2 \text{ é solução}$$

Tem-se:

	1	2	-1	-2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0 = R

$$\text{Então, } P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \quad \text{As soluções são } -2, -1 \text{ e } 1$$

c) Seja $P(t) = t^3 + 3t^2 - 4t - 12$

De acordo com a propriedade enunciada na página 121, podemos concluir que os únicos números inteiros candidatos a raízes da equação $P(t) = 0$ são -12 , -6 , -4 , -3 , -2 , -1 , 1 , 2 , 3 , 4 , 6 e 12

$$P(-12) = (-12)^3 + 3 \times (-12)^2 - 4 \times (-12) - 12 = -1260; -12 \text{ não é solução}$$

$$P(-6) = (-6)^3 + 3 \times (-6)^2 - 4 \times (-6) - 12 = -96; -6 \text{ não é solução}$$

$$P(-4) = (-4)^3 + 3 \times (-4)^2 - 4 \times (-4) - 12 = -12; -4 \text{ não é solução}$$

$$P(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) - 12 = -27 + 27 + 12 - 12 = 0; -3 \text{ é solução}$$

Tem-se:

	1	3	-4	-12
-3		-3	0	12
	1	0	-4	0 = R

Então, $P(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t + 3 = 0 \vee t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = -2 \vee t = 2$ As soluções são -3 , -2 e 2 .

169.

a) Quando $x = 2$, as dimensões do prisma são 3 , 4 e 5 , pelo que o seu volume é igual a $3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ m}^3$

b) Para investigar o enunciado, basta resolver a equação $(x + 1)(x + 2)(2x + 1) = 60$

$$(x + 1)(x + 2)(2x + 1) = 60 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x^2 + 7x - 58 = 0$$

Como 2 é solução da equação $(x + 1)(x + 2)(2x + 1) = 60$, então é um zero do polinómio $2x^3 + 7x^2 + 7x - 58$

Tem-se:

	2	7	7	-58
2		4	22	58
	2	11	29	0 = R

Então, $2x^3 + 7x^2 + 7x - 58 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + 11x + 29) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee 2x^2 + 11x + 29 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 232}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-11 \pm \sqrt{-111}}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2$ eq. impossível

Não há outros valores de x , além de 2 m , para os quais o volume do prisma seja 60 m^3 .

170.

a) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + k = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8k}}{4}$

$P(x)$ tem duas raízes reais distintas se e só se $36 - 8k > 0$

$$36 - 8k > 0 \Leftrightarrow -8k > -36 \Leftrightarrow k < \frac{9}{2}$$

b) Para $a = 0$:

Tem-se $A(x) = 2x - k$ pelo que, para $k = -4$, $A(x)$ admite a raiz -2 (e só ela por ser um polinómio do $1.^\circ$ grau).

Para $a \neq 0$:

O polinómio $A(x)$ admite apenas a raiz -2 se e só se $A(-2) = 0$ e o polinómio quociente da divisão inteira de $A(x)$ por $x - 2$ não admitir qualquer raiz.

Tem-se:

	a	0	2	-k
-2		-2a	4a	-4 - 8a
	a	-2a	2 + 4a	-k - 4 - 8a = R

$$A(-2) = 0 \Leftrightarrow -k - 4 - 8a = 0 \Leftrightarrow k = -8a - 4$$

O polinómio $ax^2 - 2ax + (2 + 4a)$ não admite qualquer raiz se e só se

$$(-2a)^2 - 4 \times a \times (2 + 4a) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } (-2a)^2 - 4 \times a \times (2 + 4a) < 0 &\Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 16a^2 < 0 \Leftrightarrow -12a^2 - 8a < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3a^2 + 2a > 0 \Leftrightarrow a(3a + 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 3a + 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ 3a + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ a < -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a > 0 \vee a < -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Então, o polinómio $A(x)$ admite apenas a raiz -2 se e só se

$$(a = 0 \wedge k = -4) \vee \left[\left(a > 0 \vee a < -\frac{2}{3} \right) \wedge k = -8a - 4 \right]$$

171.

a) De acordo com a propriedade enunciada na página 121, podemos concluir que os únicos números inteiros candidatos a raízes inteiras de $P(x) = 0$ são -3 , -1 , 1 e 3 .

$$P(-3) = (-3)^4 + 2 \times (-3)^3 - 4 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) + 3 = 0; \quad -3 \text{ é solução}$$

$$P(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 = 0; \quad -1 \text{ é solução}$$

Tem-se:

	1	2	-4	-2	3
-3		-3	3	3	-3
	1	-1	-1	1	<u>$0 = R$</u>
-1		-1	2	-1	
	1	-2	1	<u>$0 = R$</u>	

$$\text{Então, } P(x) = (x + 3)(x + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)^2$$

$$\mathbf{b)} \quad P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$$

c)

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	+

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$$

Pág. 142

172.

Polinómio de grau 1:

Qualquer polinómio de grau 1 define, em $\mathbb{R}$, uma função afim cujo gráfico é uma reta de declive não nulo, pelo que tem um zero.

Polinómio de grau 2:

$x^2 = -1$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, pelo que $x^2 + 1 = 0$ também é impossível. Logo, o polinómio $x^2 + 1$ não tem raízes.

Polinómio de grau 3:

De acordo com a propriedade enunciada na margem da página 126, qualquer polinómio de grau 3 tem pelo menos uma raiz.

Polinómio de grau 4:

$x^4 = -1$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, pelo que $x^4 + 1 = 0$ também é impossível. Logo, o polinómio $x^4 + 1$ não tem raízes.

173.

a) Tem-se:

	2	6	1	-9
1		2	8	9
	2	8	9	0 = R

$$\text{Então, } P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 8x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee 2x^2 + 8x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 72}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{-8}}{4} \Leftrightarrow x = 1$$

eq. impossível

$$\text{b) } (x - 1)B(x) = A(x) \Leftrightarrow (x - 1)[a(x - b)^2 + c] = 2x^3 + 6x^2 + x - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(ax^2 - 2abx + ab^2 + c) = 2x^3 + 6x^2 + x - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^3 - 2abx^2 + (ab^2 + c)x - ax^2 + 2abx - ab^2 - c = 2x^3 + 6x^2 + x - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (-2ab - a)x^2 + (ab^2 + c + 2ab)x + (-ab^2 - c) = 2x^3 + 6x^2 + x - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -2ab - a = 6 \\ ab^2 + c + 2ab = 1 \\ -ab^2 - c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ 8 + c - 8 = 1 \\ -8 - c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Então, } B(x) = 2(x + 2)^2 + 1$$

$$\text{Ora, } \forall x \in \mathbb{R}, 2(x + 2)^2 \geq 0, \text{ pelo que } \forall x \in \mathbb{R}, B(x) \geq 1$$

174.

$$E = \frac{\sqrt{x^k} \sqrt[3]{y}}{n\sqrt{x}y^2} = \frac{6n\sqrt{x^{3nk}} \sqrt[6]{y^{2n}}}{6n\sqrt{x^6}y^{12}} = \frac{6n\sqrt{x^{3nk}y^{2n}}}{\sqrt{x^6y^{12}}} = \frac{6n\sqrt{x^{3nk-6}y^{2n-12}}}{1}$$

Então, para se ter $E = \sqrt[3]{x}$, sejam quais forem os valores de x e de y , tem que ser $y^{2n-12} = 1$, ou seja, $n = 6$

$$\text{Para } n = 6, \text{ vem } E = \sqrt[36]{x^{18k-6}}$$

$$\text{Tem-se } \sqrt[36]{x^{18k-6}} = \sqrt[3]{x} \text{ se e só se } 18k - 6 = 12 \text{ ou seja } k = 1$$

175.

Para $a = 0$:

$$a^n < b^n \Rightarrow 0 < b^n \Rightarrow 0 \times b < b^n \times b \Rightarrow 0 < b^{n+1} \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

Para $a > 0$:

$$a^n < b^n \Rightarrow a^n \times a < b^n \times a \Rightarrow a^{n+1} < b^n \times a < b^n \times b \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

176.

a) Tem-se, para qualquer número real positivo, $P(a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1$ e

$$P(-a) = (-a)^{2n+1} - (-a)^{2n} - (-a) + 1 = -a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1, \text{ pelo que}$$

$$P(a) + P(-a) = a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 - a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1 = -2a^{2n} + 2$$

$$\text{b) } (x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1) = (x - 1)[(x^n)^2 - 1^2] = (x - 1)(x^{2n} - 1) = x^{2n+1} - x^{2n} - x + 1$$

$$\text{Está provado que } P(x) = (x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1)$$

$$P(-1) = (-1 - 1)[(-1)^{2n} - 1] = -2 \times 0 = 0, \text{ pelo que } -1 \text{ é raiz de } P(x)$$

$$P(1) = (1 - 1)(1^{2n} - 1) = 0 \times 0 = 0, \text{ pelo que } 1 \text{ é raiz de } P(x)$$

Está provado que -1 e 1 são raízes de $P(x)$

Estudemos a multiplicidade de cada uma das raízes. Consideremos o polinómio representado na forma

$$(x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1)$$

Se n é par:

1 é raiz simples de $x - 1$;

1 é raiz simples de $x^n - 1$;

-1 é raiz simples de $x^n - 1$ e

$x^n + 1$ não tem raízes

Se n é ímpar:

1 é raiz simples de $x - 1$;

1 é raiz simples de $x^n - 1$ e $x^n - 1$ não se anula para $x = -1$

-1 é raiz simples de $x^n - 1$ e $x^n + 1$ não se anula para $x = 1$

Está provado que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, a raiz -1 tem multiplicidade 1 e a raiz 1 tem multiplicidade 2.

177.

$$\begin{aligned} \text{a)} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 \end{aligned}$$

$$\text{b)} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \left[(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right] = (\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4}) = 4 - 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^4} + 2 + \sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{4}}}{2}$$

178.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{2(\sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{5}))}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{5}))} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 - (3 + 2\sqrt{15} + 5)} = \\ &= \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})}{-6 - 2\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{15}} = -\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})(3 - \sqrt{15})}{(3 + \sqrt{15})(3 - \sqrt{15})} = -\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{30} - 3\sqrt{3} + \sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{75}}{9 - 15} = \\ &= -\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{30} + 2\sqrt{3}}{-6} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{30} + \sqrt{12}}{6} \end{aligned}$$

Pág. 143

179.

Seja r o raio da circunferência, seja q o lado do quadrado e seja l o lado do triângulo.

Tem-se $l = q + 15$

Como o quadrado está inscrito na circunferência, a diagonal do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência, pelo que $2r = \sqrt{2}q$ ou seja $q = \sqrt{2}r$

Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro

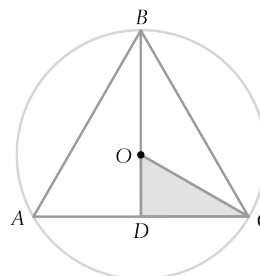
O e um triângulo equilátero $[ABC]$ inscrito na circunferência.

O ponto D é o ponto médio do lado $[AC]$

Tem-se $\overline{OC} = r$, $\overline{DC} = \frac{l}{2}$ e $\angle OCD = 30^\circ$

$$\cos \angle OCD = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \cos 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{r} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2r} \Leftrightarrow l = \sqrt{3}r$$

Como $l = q + 15$ e $q = \sqrt{2}r$, tem-se $l = \sqrt{2}r + 15$



$$\Leftrightarrow r = \frac{15(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \Leftrightarrow r = \frac{15(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} \Leftrightarrow r = 15(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \approx 47,19 \text{ mm}$$

b) Por exemplo, o polinómio $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ tem mais zeros do que o polinómio $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ e não tem grau superior ao dele.

$$x^5 + x^4 - 16x - 16 = x^4(x + 1) - 16(x + 1) = (x + 1)(x^4 - 16)$$

Logo, α é uma raiz dupla de $P(x)$

a₂) Considerando a fórmula resolvente da equação do segundo grau, parece imediato admitir que, permutando somente o coeficiente do monómio de grau 2 com o termo constante (não havendo, neste caso, alteração do valor do numerador da fórmula), se vão obter raízes cujos valores serão $\frac{a}{c} \times$ os valores das raízes do polinómio inicial.

$$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c} \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}}_{=\beta \times \frac{a}{c}} \vee x = \underbrace{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}}_{=\alpha \times \frac{a}{c}}$$

Tem-se $2x + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(3x + 1)$, pelo que o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $2x + \frac{2}{3}$ é igual a $Q(x) \div \frac{2}{3}$ ou seja $\frac{3}{2}Q(x)$

Tema 3 | Geometria Analítica

Atividades «Será que...?»

Pág. 146

SERÁ QUE...? Localizar o Titanic

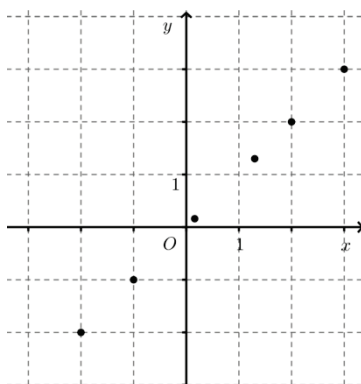
Alguns alunos poderão recordar a utilização de referenciais cartesianos.

Pág. 148

SERÁ QUE...? Lugares geométricos

1. O lugar geométrico a assinalar é a circunferência de centro no ponto C e raio igual a 3 (tomando o lado da quadrícula para unidade).
2. O lugar geométrico a assinalar é a reta perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ que passa no ponto médio do segmento de reta, e é designado por mediatriz de $[AB]$.
Os alunos podem ser incentivados a fazer uma construção geométrica rigorosa da mediatriz.

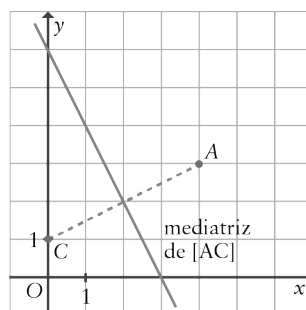
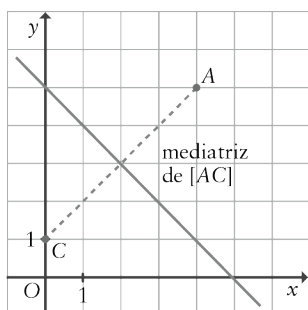
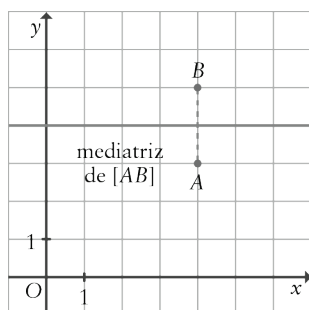
3.



Os pontos do plano que têm as coordenadas iguais constituem a reta que contém as bissetrizes do 1.º e do 3.º quadrantes.

4. Nesta altura, estamos em crer que os alunos apenas poderão recordar (no âmbito de lugares geométricos no plano) o conceito de círculo.
«Abre-se a porta» para o que se segue...

1.



2. A mediatriz de $[AB]$ é definida por $y = 4$

3. $d(D, C) = |1 - 5| = |-4| = 4$ e $d(D, B) = |4 - 0| = 4$

As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (2, 3)$; designemos esse ponto por M .

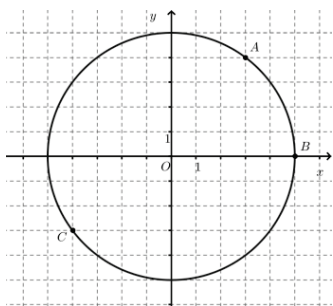
Tem-se $\overrightarrow{MD} = D - M$ e, portanto, as coordenadas de $\overrightarrow{MD}$ são $(0 - 2, 5 - 3) = (-2, 2)$.

Então, o declive da reta MD é $m_{MD} = \frac{2}{-2} = -1$ e a equação reduzida da reta MD é $y = -x + 5$.

Como cada um dos pontos D e M está à mesma distância de B e de C , a reta MD é a mediatriz de $[BC]$ e, portanto, a equação $y = -x + 5$ é a equação reduzida da mediatriz de $[BC]$.

5. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow -6y + 2y = 8x + 1 - 25 \Leftrightarrow -4y = 8x - 24 \Leftrightarrow y = -2x + 6$

1.



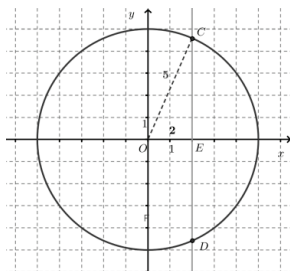
$$d(O, A) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$d(O, C) = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Dado que os pontos A e C estão à distância de 5 unidades da origem do referencial, pertencem ambos à circunferência de centro em O e raio 5.

2. Recorrendo a reflexões centrais e axiais, podem ser referidos os pontos de coordenadas $(-5, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$, $(3, -4)$, $(-3, 4)$, $(-4, 3)$, $(4, -3)$, $(-3, -4)$ e $(4, 3)$.

3.



Por aplicação do teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{CE} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Portanto, as ordenadas dos pontos da circunferência que têm abscissa 2 são $\sqrt{21}$ e $-\sqrt{21}$.

4. Os alunos devem reconhecer que a primeira equação define a circunferência de centro na origem do referencial e raio 3 e a segunda equação define a circunferência de centro no ponto de coordenadas (1,2) e raio 3.

Pág. 166

SERÁ QUE...? A elipse

1. O desenrolar desta tarefa depende do desempenho dos alunos. Neste ponto, devem verificar experimentalmente que a soma das distâncias de qualquer ponto da linha que traçaram aos pioneses deve ser (aproximadamente) igual a 16 cm e perceber que isso acontece porque a soma das distâncias corresponde ao comprimento do fio.

2. Os alunos devem verificar que a soma das distâncias de qualquer ponto das linhas que traçaram aos pioneses deve ser (aproximadamente) igual ao comprimento do fio e também que a «forma» da linha depende da distância entre os pioneses e do comprimento do fio.

3. Uma condição que caracterize os pontos P de uma linha com esta definição pode ser $d(P, A) + d(P, B) = k$, designando por A e B os pontos onde estão os pioneses e sendo k o comprimento do fio.

Pág. 174

SERÁ QUE...? Círculos

A representação pode iludir os alunos. Esta proposta destina-se a introduzir a inequação reduzida do círculo, dadas as coordenadas do centro e o raio, mas pode ser útil para os alertar para a segurança proporcionada pelos processos analíticos.

Pág. 189

SERÁ QUE...? Vetores

1. As possibilidades de resposta são vastíssimas: quaisquer segmentos orientados com igual direção, sentido e comprimento, como, por exemplo, $[A, K]$ e $[I, H]$, e $[B, I]$ e $[F, D]$.

2. Também aqui há numerosas possibilidades: por exemplo, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IG}$ e $\overrightarrow{CH}$ são vetores colineares e $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{FL}$ são vetores não colineares.

3. Os vetores $\overrightarrow{AK}$ e $\overrightarrow{CL}$ e os vetores $\overrightarrow{BI}$ e $\overrightarrow{DF}$ são exemplos de vetores simétricos.

4.

$$L + \overrightarrow{LJ} = J$$

$$L + \overrightarrow{AK} = C$$

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EJ}$$

$$\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$$

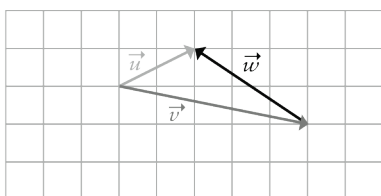
$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{IC}$$

5. Por exemplo, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}$ e $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GK}$

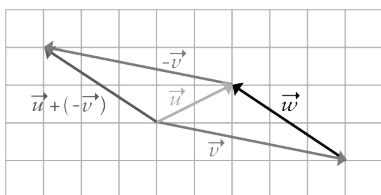
Pág. 192

SERÁ QUE...? Diferença de vetores

1.



2.



$$3. (\vec{u} + (-\vec{v})) + \vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} + (-\vec{v} + \vec{v}) = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Substituímos $\vec{w}$ por $\vec{u} + (-\vec{v})$ na equação $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$ e obtivemos uma afirmação verdadeira;

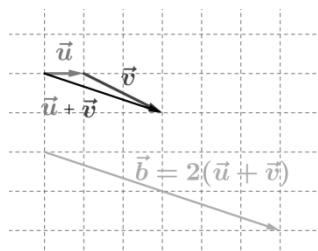
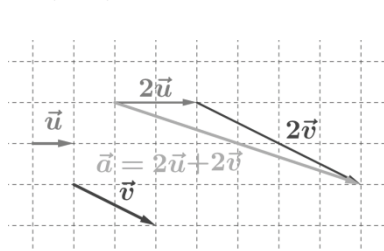
portanto $\vec{u} + (-\vec{v})$ é solução da equação $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$.

A última questão está tratada na página 193 do manual.

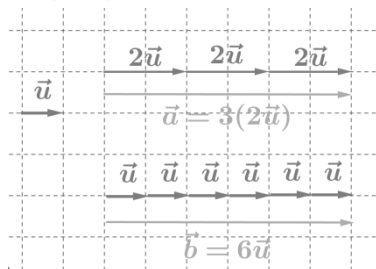
Pág. 193

SERÁ QUE...? Mais propriedades

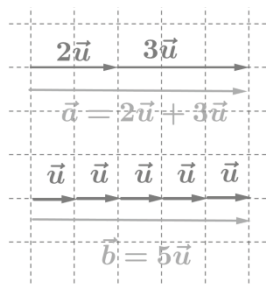
1. a) e b)



2. a) e b)



3. a) e b)

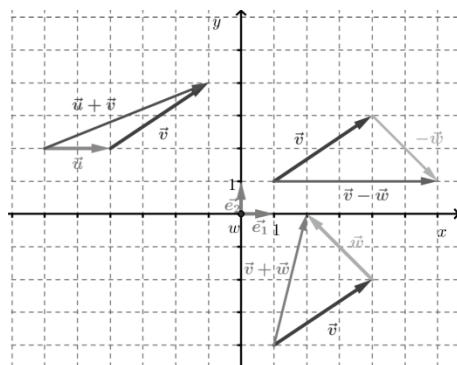


Pág. 199

SERÁ QUE...? Operações com coordenadas

1. $\vec{u}(2,0)$ $\vec{v}(3,2)$ $\vec{w}(-2,2)$

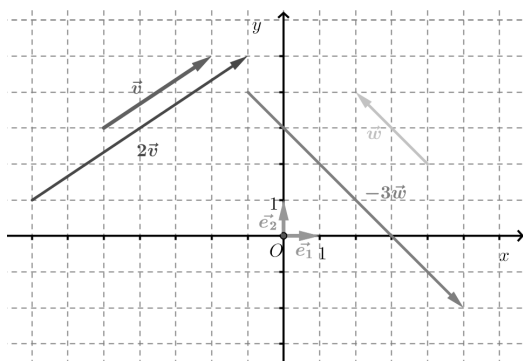
2.



$\vec{u} + \vec{v}(5,2)$ $\vec{v} + \vec{w}(1,4)$ $\vec{v} - \vec{w}(5,0)$

As coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ e de $\vec{v} + \vec{w}$ são iguais às que resultam de adicionar, ordenadamente, as coordenadas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ e as coordenadas de $\vec{v}$ e de $\vec{w}$, respetivamente. As coordenadas de $\vec{v} - \vec{w}$ são iguais às que resultam de subtrair, ordenadamente, as coordenadas de $\vec{v}$ e de $\vec{w}$.

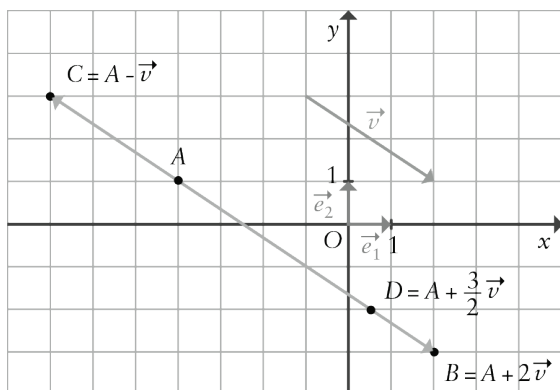
3. As coordenadas de $2\vec{v}$ são iguais às que se obtêm multiplicando as coordenadas de $\vec{v}$ por 2 e as coordenadas de $-3\vec{w}$ são as que se obtêm multiplicando as coordenadas $\vec{w}$ de por -3 .



4. Esta questão está tratada nas páginas 199 e 200 do manual.

Pág. 211

SERÁ QUE...? Lugar geométrico



É a reta que tem a direção do vetor $\vec{v}$ e passa no ponto A.

Pág. 230

SERÁ QUE...? A diferentes níveis

Tal como a ilustração sugere, estavam em pisos diferentes.

Pág. 239

SERÁ QUE...? Distância entre dois pontos

A medida da diagonal espacial da caixa é $\sqrt{35^2 + 20^2 + 15^2}$, ou seja, a diagonal espacial da caixa tem, aproximadamente, 43 cm de comprimento.

Portanto, a baqueta cabe na caixa.

1.

a) $y = 2,5$ b) $x = 2$ c) $z = 1,5$

2.

a) O plano mediador de um segmento de reta é paralelo a um dos planos coordenados se e só se o segmento de reta é paralelo a um dos eixos coordenados, o que não é o caso.

b₁) $d(R, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$d(S, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$

Dado que $d(R, C) = d(S, C)$, conclui-se que C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[RS]$

b₂) $d(R, D) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-1))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$

$d(S, D) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19}$

Dado que $d(R, D) \neq d(S, D)$, conclui-se que D não pertence ao plano mediador do segmento de reta $[RS]$

c) Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano mediador do segmento de reta $[RS]$ se e só se $d(R, P) = d(S, P)$.

$d(R, P) = d(S, P) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x + 2y + 2y - 6z + 2z = -14 + 2 \Leftrightarrow -4x + 4y - 4z = -12 \Leftrightarrow x - y + z = 3$

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

b) Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A$ e $\overrightarrow{AM} = M - A$ e, portanto, as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-2, 2, 6)$ e as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ são $(m_1 - 2, m_2 - 3, m_3 + 4)$.

c) $(m_1 - 2, m_2 - 3, m_3 + 4) = \frac{1}{2}(-2, 2, 6) \Leftrightarrow (m_1 - 2, m_2 - 3, m_3 + 4) = (-1, 1, 3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - 2 = -1 \\ m_2 - 3 = 1 \\ m_3 + 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 4 \\ m_3 = -1 \end{cases}$$

Portanto, $M(1, 4, -1)$

d) Sejam $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ dois pontos e seja $M(m_1, m_2, m_3)$ o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ e as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AM}$

são $(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3)$. Tem-se $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e, portanto,

$$(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Resolvendo:

$$(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}, \frac{b_3 - a_3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} \\ m_2 - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{2} \\ m_3 - a_3 = \frac{b_3 - a_3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{b_1 - a_1 + 2a_1}{2} \\ m_2 = \frac{b_2 - a_2 + 2a_2}{2} \\ m_3 = \frac{b_3 - a_3 + 2a_3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} \\ m_2 = \frac{b_2 + a_2}{2} \\ m_3 = \frac{b_3 + a_3}{2} \end{cases}$$

Portanto, $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Geometria analítica no plano

Pág. 147

1.



Pág. 148

2.

a₁) Por exemplo, $(-1,0)$

a₂) Por exemplo, $(-2,2)$

a₃) Por exemplo, $(2,-2)$

a₄) Por exemplo, $(0,1)$

b₁) Por exemplo, $A(-1,0)$ e $B(-1,2)$

b₂) Por exemplo, $A(-1,2)$ e $B(0,-2)$

b₃) Por exemplo, $A(-2,1)$ e $B(2,-1)$

3.

a) $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$ e $C(1,0)$; $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $G\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Tem-se: $\overline{KH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OK}^2 \Leftrightarrow 1 = 2 \times \overline{OH}^2 \Leftrightarrow \overline{OH} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pelo que

$H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $I\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $J\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $K\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Tem-se: $\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 \Leftrightarrow 2^2 = 2 \times \overline{OC}^2 \Leftrightarrow \overline{OC} = \sqrt{2}$ pelo que

$O(0,0)$, $A(0, \sqrt{2})$; $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $C(\sqrt{2}, 0)$

Tem-se: $\overline{FE} = \sqrt{2}$ pelo que $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$H(1,0)$, $I(0,-1)$; $J(-1,0)$ e $K(0,1)$

4.

a) P pertence ao eixo Oy se e só se a sua abcissa for nula: $1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$

b) Q pertence ao 4.º quadrante se e só se a sua abcissa for positiva e a sua ordenada for negativa:

$$1 - a > 0 \wedge a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \wedge a < -3 \Leftrightarrow a < -3$$

c) P pertence ao eixo Ox se e só se a sua ordenada for nula: $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = 2$

d) P pertence ao 3.º quadrante se e só se a sua abcissa for negativa e a sua ordenada for negativa:

$$1 + a < 0 \wedge a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a < -1 \wedge a^2 < 4 \Leftrightarrow a < -1 \wedge -2 < a < 2 \Leftrightarrow a \in]-2, -1[$$

Pág. 149

5.

Tem-se:

« $1 + 2 \times 2 = 4$ » é uma proposição falsa, pelo que o par $(1,2)$ não é solução da equação;

« $2 + 2 \times 1 = 4$ » é uma proposição verdadeira, pelo que o par $(2,1)$ é solução da equação;

« $6 + 2 \times (-1) = 4$ » é uma proposição verdadeira, pelo que o par $(6,-1)$ é solução da equação.

6.

A equação reduzida da reta é $y = -3x + 1$

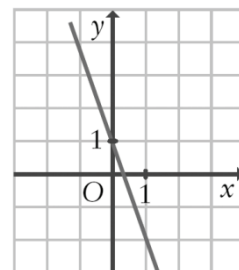
Como a ordenada na origem é igual a 1, a reta passa no ponto de coordenadas (0,1)

Determinemos a abscissa do ponto da reta que pertence ao eixo das abscissas:

$$0 = -3x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

A reta passa pelo ponto de coordenadas $(\frac{1}{3}, 0)$

Na figura ao lado está a representação da reta num referencial do plano.



Pág. 150

7.

a) $m = \frac{2-(-1)}{4-0} = \frac{3}{4}$

b) $m = \frac{5-(-1)}{-4-4} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$

c) $m = \frac{-3-(-3)}{4-2} = \frac{0}{2} = 0$

8.

a) $2x + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$

b) $y = -\frac{2}{3} \times 2 + 2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$

c) $12 = -\frac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = 10 \Leftrightarrow x = -15$

d) Como a reta é paralela à reta r , a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-6, 2)$, tem-se $2 = -\frac{2}{3} \times (-6) + b$, pelo que $b = -2$.

A equação reduzida de s é $y = -\frac{2}{3}x - 2$

Pág. 151

9.

$$d(P, Q) = \left| -\frac{5}{4} - 2 \right| = \left| -\frac{13}{4} \right| = \frac{13}{4}$$

$$d(R, P) = \left| 2 - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| = \left| \frac{7}{2} \right| = \frac{7}{2}$$

$$d(Q, R) = \left| -\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{4} \right) \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

10.

a) Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ dois quaisquer pontos num plano em que está instalado um referencial o.n.

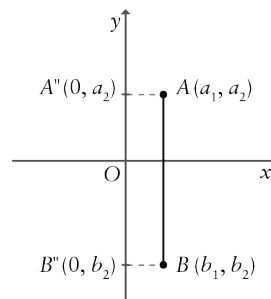
Tem-se: $a_1 = b_1 \Rightarrow d(A, B) = |b_2 - a_2|$

b) Na figura ao lado, estão representados os pontos A e B , de abscissas iguais, de um plano em que está instalado um referencial o.n.

Sejam A'' e B'' as projeções ortogonais de A e de B sobre o eixo das ordenadas.

A distância entre A e B é igual à distância entre A'' e B''

Portanto, $d(A, B) = d(A'', B'') = |b_2 - a_2|$



Pág. 152

11.

Na figura ao lado, estão representados os retângulos referidos nas duas alíneas:
o da alínea a) é o retângulo $[ABCD]$ e o da alínea b) é o retângulo $[PQRS]$

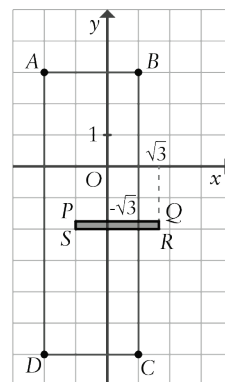
a) Tem-se $\overline{AB} = d(A, B) = |1 - (-2)| = 3$ e

$\overline{CB} = d(C, B) = |3 - (-6)| = 9$; área = 27

b) Tem-se $\overline{SR} = d(S, R) = |\sqrt{3} - (-1)| = 1 + \sqrt{3}$

e $\overline{RQ} = d(R, Q) = |-2 - (-\sqrt{3})| = |-2 + \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ (pois $-2 + \sqrt{3} < 0$);

área = $(1 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - 3 = \sqrt{3} - 1$



12.

A proposição « $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^3 = x^3$ » é falsa pois a condição $|x|^3 = x^3$ não é universal em $\mathbb{R}$
(tem-se, por exemplo, $|-1|^3 \neq (-1)^3$)

Pág. 153

13.

a) $\overline{AB} = \sqrt{(-8 - 0)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64 + 0} = 8$

b) $\overline{AB} = \sqrt{[0 - (-8)]^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$

c) $\overline{AB} = \sqrt{[0 - (-10)]^2 + [8 - (-2)]^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

d) $\overline{AB} = \sqrt{[(\sqrt{5} - 1) - (-1)]^2 + [0 - (-2)]^2} = \sqrt{5 + 4} = 3$

14.

Comecemos por determinar a medida do comprimento de cada lado do triângulo:

$\overline{AB} = \sqrt{[7 - (-3)]^2 + [-4 - (-2)]^2} = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104}$

$\overline{AC} = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + [7 - (-2)]^2} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$

$\overline{BC} = \sqrt{(4 - 7)^2 + [7 - (-4)]^2} = \sqrt{9 + 121} = \sqrt{130}$

O triângulo é isósceles pois tem dois lados iguais.

15.

Sejam $A(-4, 6)$, $B(6, 10)$, $C(10, 0)$ e $D(0, -4)$ os vértices do quadrilátero.

Comecemos por determinar a medida do comprimento de cada lado do quadrilátero:

$\overline{AB} = \sqrt{[6 - (-4)]^2 + (10 - 6)^2} = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116}$

$\overline{BC} = \sqrt{(10 - 6)^2 + (0 - 10)^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$

$\overline{CD} = \sqrt{(0 - 10)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116}$

$\overline{DA} = \sqrt{(-4 - 0)^2 + [6 - (-4)]^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$

Está provado que os quatro pontos são vértices de um losango.

16.

Seja $P(a, 0)$ o ponto do eixo das abscissas que está à mesma distância de A e de B .

Uma condição que traduz o problema é $\overline{PA} = \overline{PB}$

Tem-se $\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(5-a)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-3-a)^2 + (6-0)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (5-a)^2 + (2-0)^2 = (-3-a)^2 + (6-0)^2 \Leftrightarrow 25 - 10a + a^2 + 4 = 9 + 6a + a^2 + 36 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -16a + 29 = 45 \Leftrightarrow a = -1$
 O ponto P é o ponto de coordenadas $(-1,0)$

Pág. 154

17.

- a) O ponto médio de $[AB]$ tem abscissa igual a $\frac{-16+(-2)}{2} = -9$
 b) Seja x a abscissa de C . Tem-se $\frac{-16+x}{2} = -2$ pelo que $x = 12$

Pág. 155

18.

- a) Os triângulos são semelhantes porque são triângulos retângulos com um ângulo agudo em comum.
 b) Dado que os triângulos são semelhantes, os lados homólogos tem comprimentos diretamente proporcionais:

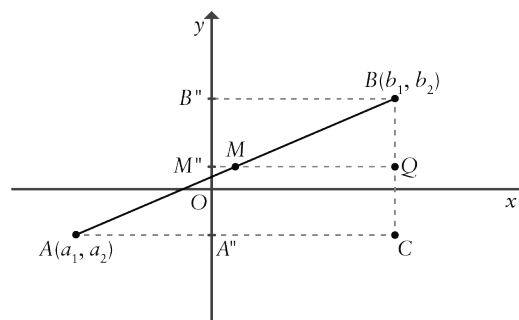
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = 2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\overline{AN} \text{ pelo que } N \text{ é o ponto médio de } [AC]$$

Pág. 156

19.

Tem-se, de acordo com a figura:

Sendo A'' , B'' e M'' , respetivamente, as projeções ortogonais de A , B e M no eixo Oy e sendo Q a projeção ortogonal de M sobre BC , tem-se que os triângulos $[ABC]$ e $[MBQ]$ são semelhantes; como M é o ponto médio de $[AB]$, também Q é o ponto médio de $[BC]$. Ora, a ordenada de Q é igual à ordenada de M'' , que é o ponto médio de $[B''A'']$ e tem ordenada $\frac{b_2+a_2}{2}$



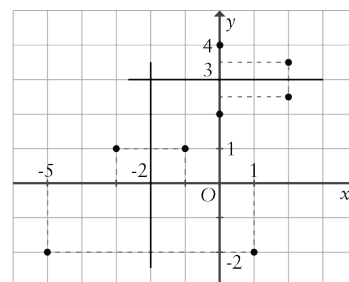
20.

- a) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-5+(-3)}{2}\right) = (-1, -4)$
 b) Seja C o ponto de coordenadas (c_1, c_2)
 Tem-se $\left(\frac{-3+c_1}{2}, \frac{-5+c_2}{2}\right) = (1, -3)$ pelo que $c_1 = 5$ e $c_2 = -1$
 O ponto C é o ponto de coordenadas $(5, -1)$

Pág. 157

21.

- a) Por exemplo, conforme ilustrado na figura ao lado, os pontos de coordenadas $(-5, -2)$ e $(3, -2)$ ou os pontos de coordenadas $(-3, 1)$ e $(-1, 1)$
 b) Por exemplo, conforme ilustrado na figura, os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(0, 4)$ ou os pontos de coordenadas $(2; 2,5)$ e $(2; 3,5)$



22.

Como o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox , e a reta definida pela equação $x = 1$ é perpendicular ao eixo Ox , basta provar que esta reta passa no ponto médio do segmento $[AB]$

Tem-se que o ponto médio do segmento $[AB]$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{4+(-2)}{2}, -5\right)$, ou seja, o ponto de coordenadas $(1, -5)$, pelo que pertence à reta definida pela equação $x = 1$

Pág. 158

23.

a) $(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 2y - 4y = -6x + 9 + 4 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2y = -6x + 12 \Leftrightarrow y = 3x - 6$$

b) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 5)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y - 2y = -10x + 8x + 25 + 1 - 16 - 9 \Leftrightarrow -8y = -2x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

24.

a) M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{2-3}{2}, \frac{-5-2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

b) Basta indicar qualquer ponto da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, diferente do ponto M

Determinemos a equação da mediatriz de $[AB]$: $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = (x + 3)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 6y = 10x - 16 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$$

Então, um ponto diferente de M que está à mesma distância de A e de B é, por exemplo, $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$

Pág. 159

25.

Sejam, em cada caso, C e r , respetivamente o centro e o raio da circunferência.

a) $x^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{10})^2 \rightarrow C(0,0) \text{ e } r = \sqrt{10}$

b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + [y - (-2)]^2 = 5^2 \rightarrow C(1, -2) \text{ e } r = 5$

c) $(x + 3)^2 + y^2 = 8 \Leftrightarrow [x - (-3)]^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{8})^2 \rightarrow C(-3,0) \text{ e } r = \sqrt{8}$

Pág. 160

26.

a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$

b) $(x - 1)^2 + [y - (-3)]^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$

c) O raio da circunferência é a distância entre o centro e a origem do referencial.

Tem-se $r = d(C, O) = \sqrt{(0 + 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{5}$

A equação reduzida da circunferência é, então

$$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

d) O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, ou seja, o ponto de coordenadas $\left(\frac{0-2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)$, e o raio da circunferência é a distância entre o centro e, por exemplo, o ponto A .

Tem-se
$$r = d(C, A) = \sqrt{(0+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

A equação reduzida da circunferência é, então

$$[x - (-1)]^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

27.

$$c_1 : \text{Centro em } A(-2, 1) \text{ e } r = \overline{AB} = 3 \quad \rightarrow \quad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$c_2 : \text{Centro em } C(1, -1) \text{ e } r = \overline{CB} = 2 \quad \rightarrow \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$c_3 : \text{Centro em } D(3, 2) \text{ e } r = \overline{DB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Pág. 161

28.

$$\text{a)} \quad x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + y^2 = 12 + 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 16$$

$$\text{b)} \quad x^2 + y^2 - 12y = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 12y + 36) = 4 + 36 \Leftrightarrow x^2 + (y - 6)^2 = 40$$

$$\text{c)} \quad x^2 + 5x + 0,5 = 9y - y^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 - 9y + \frac{81}{4}\right) = \frac{25}{4} + \frac{81}{4} - 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = 26$$

Pág. 163

29.

Tal como ilustrado na figura ao lado, o centro da circunferência é o ponto de interseção das retas s e t mediatrizes, respetivamente, dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$

Equação da reta s :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2y = -4x - 5 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$$

Equação da reta t :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 0)^2 \Leftrightarrow$$

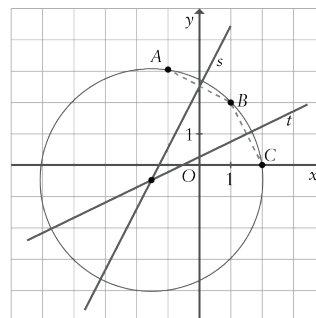
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow -4y = -2x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Determinemos o ponto de interseção das retas s e t :

$$\begin{cases} y = 2x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 2x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Então, o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e o raio da circunferência é a distância entre o centro e, por exemplo, o ponto A .

Tem-se
$$r = \sqrt{\left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$



A equação reduzida da circunferência é, então

$$\left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Pág. 168

30.

a) $(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

b) $(5 - \sqrt{3 + a^2})^2 = 25 - 10\sqrt{3 + a^2} + 3 + a^2 = 28 - 10\sqrt{3 + a^2} + a^2$

Pág. 169

31.

Tem-se: $x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

e $x^2 + 8y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1/4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

32.

Seja c a semidistância entre os focos.

Tem-se, para a elipse de equação $\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$, $c = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$, pelo que os focos desta elipse são os pontos de coordenadas $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$

Pág. 171

33.

Os semieixos desta elipse são 4 e 3.

Seja c a semidistância entre os focos. Tem-se $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

Então, a distância entre os focos é igual a $2\sqrt{7}$

Pág. 172

34.

De acordo com a figura do enunciado, os semieixos da elipse são 4 e 2, pelo que a equação reduzida

da elipse é $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Seja c a semidistância entre os focos. Tem-se $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$, pelo que os focos desta elipse são os pontos de coordenadas $(-\sqrt{12}, 0)$ e $(\sqrt{12}, 0)$

35.

a) Sejam a e b , respetivamente, o semieixo maior e o semieixo menor da elipse e seja c a semidistância entre os focos.

O eixo maior da elipse é dado por $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$, sendo, portanto, 8, pelo que $a = 4$

Como $\overline{F_1F_2} = 6$, tem-se $c = 3$, pelo que $3 = \sqrt{4^2 - b^2}$

$$3 = \sqrt{4^2 - b^2} \Leftrightarrow 9 = 16 - b^2 \Leftrightarrow b^2 = 7 \Leftrightarrow b = \sqrt{7}$$

Então, os vértices da elipse são os pontos de coordenadas $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -\sqrt{7})$ e $(0, \sqrt{7})$

b) A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

c) Seja P o ponto de coordenadas $(x_0, \sqrt{6})$, $x_0 < 0$

$$\frac{x_0^2}{16} + \frac{(\sqrt{6})^2}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} = 1 - \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{16}{7} \Leftrightarrow x_0 = -\sqrt{\frac{16}{7}} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{4}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

Pág. 174

36.

O ponto da reta r que tem abscissa igual a -1 tem ordenada igual a -7

Como $-7 < -6$, concluímos que, dos dois semiplanos determinados pela reta r , aquele a que pertence o ponto de coordenadas $(-1, -6)$ é o semiplano superior em relação à reta, pelo que a inequação que define esse semiplano aberto é $y > 2x - 5$

De outro modo:

Das inequações $y < 2x - 5$ e $y > 2x - 5$, aquela que se transforma numa proposição verdadeira quando $y = -6 \wedge x = -1$ é a segunda, pelo que é esta que define o semiplano determinado pela reta r a que pertence o ponto de coordenadas $(-1, -6)$

37.

Os dois semiplanos fechados determinados pela reta r são os semiplanos definidos pelas inequações $y \leq -2x - 5$ e $y \geq -2x - 5$

Tem-se que « $190 \leq -2 \times (-100) - 5$ » é uma proposição verdadeira, pelo que o ponto A pertence ao semiplano inferior em relação à reta e « $90 \leq -2 \times (-50) - 5$ » é uma proposição verdadeira, pelo que o ponto B também pertence ao semiplano inferior em relação à reta.

Ao pontos A e B pertencem ao mesmo semiplano.

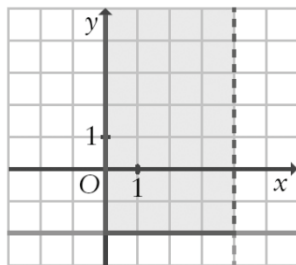
Pág. 175

38.

a) Tem-se $x < 4 \wedge y + 2 \geq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x < 4 \wedge y \geq -2 \wedge x \geq 0$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de três semiplanos:

- O semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x = 4$ (definido por $x < 4$)
- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = -2$ (definido por $y \geq -2$)
- O semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 0$ (definido por $x \geq 0$)

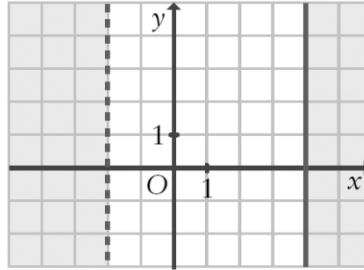
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



b) Tem-se $\sim (x < 4 \wedge x \geq -2) \Leftrightarrow \sim (x < 4) \vee \sim (x \geq -2) \Leftrightarrow x \geq 4 \vee x < -2$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a reunião de dois semiplanos:

- O semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 4$ (definido por $x \geq 4$)
- O semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x = -2$ (definido por $x < -2$)

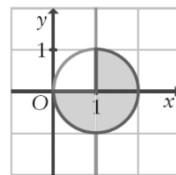
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



c) Tem-se $(1 - x \leq 0 \vee y \leq 0) \wedge (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x \geq 1 \vee y \leq 0) \wedge (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- A reunião do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 1$ com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(1,0)$ e raio igual a 1

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



Pág. 176

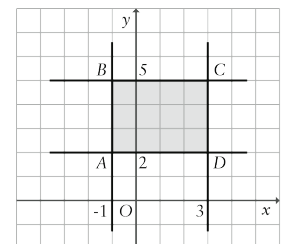
39.

a) O polígono definido pela condição é o retângulo $[ABCD]$ representado na figura ao lado.

A sua área é dada por $\overline{AD} \times \overline{AB}$

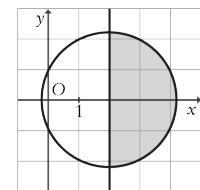
Tem-se:

$$\overline{AD} \times \overline{AB} = 4 \times 3 = 12 \text{ unidades de área.}$$



b) A região definida pela condição é o semicírculo de centro no ponto de coordenadas $(2,0)$ e raio igual a $\sqrt{5}$ contido no semiplano fechado à direita da reta definida por $x = 2$, e está representado na figura ao lado.

A sua área é dada por $\frac{1}{2} \times \pi \times (\sqrt{5})^2$, ou seja, $\frac{5\pi}{2}$ unidades de área.

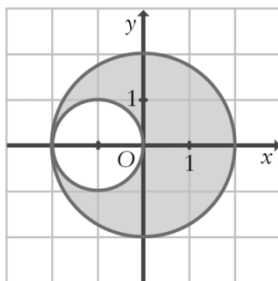


40.

a) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(0,0)$ e raio 2 (definido por $x^2 + y^2 \leq 4$)
- O exterior do círculo, incluindo a circunferência, de centro no ponto de coordenadas $(-1,0)$ e raio 1 (definido por $(x + 1)^2 + y^2 \geq 1$)

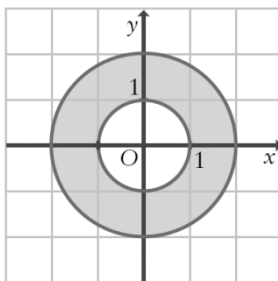
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



b) Tem-se $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O exterior do círculo, incluindo a circunferência, de centro na origem do referencial e raio 1 (definido por $x^2 + y^2 \geq 1$)
- O círculo de centro na origem do referencial e raio 2 (definido por $x^2 + y^2 \leq 4$)

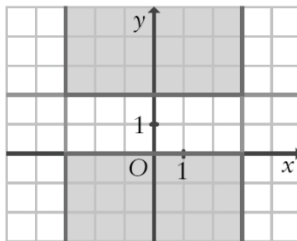
A representação deste conjunto de pontos, designado por «coroa circular», num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



c) Tem-se $|x| \leq 3 \wedge |y - 1| \geq 1 \Leftrightarrow (x \geq -3 \wedge x \leq 3) \wedge (y \geq 2 \vee y \leq 0)$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- A interseção do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -3$ com o semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 3$
- A reunião do semiplano fechado superior à reta de equação $y = 2$ com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



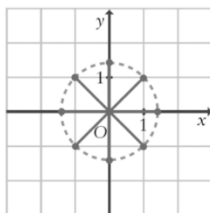
d) Tem-se

$$x^2 + y^2 \leq 2 \wedge (xy = 0 \vee x^2 = y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2 \wedge (x = 0 \vee y = 0 \vee y = x \vee y = -x)$$

pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{2}$ (definido por $x^2 + y^2 \leq 2$)
- A reunião das seguintes quatro retas: o eixo das ordenadas, o eixo das abscissas, a bissetriz dos quadrantes ímpares e a bissetriz dos quadrantes pares.

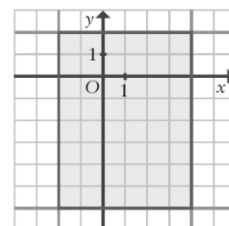
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



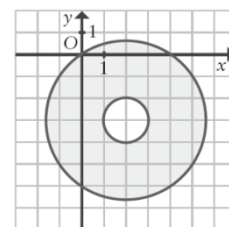
Pág. 177

41.

a) Tem-se $|x - 1| \leq 3 \wedge |y + 2| \leq 4 \Leftrightarrow (x \geq -2 \wedge x \leq 4) \wedge (y \geq -6 \wedge y \leq 2)$, pelo que a representação do conjunto de pontos definido por esta condição, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , é o retângulo que se apresenta na figura ao lado e cuja área é igual a $6 \times 8 = 48$ unidades de área.



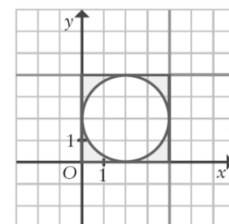
b) Tem-se $1 \leq (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 13 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \geq 1 \wedge (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 13$, pelo que a representação do conjunto de pontos definido por esta condição, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , é a coroa circular que se apresenta na figura ao lado e cuja área é igual à diferença entre a área do círculo exterior e a área do círculo interior, ou seja $\pi \times (\sqrt{13})^2 - \pi \times 1^2 = 12\pi$ unidades de área.



c) Tem-se

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \wedge |x - 2| \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4$$

pelo que a representação do conjunto de pontos definido por esta condição, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , é a que se apresenta na figura ao lado e cuja área é igual à diferença entre a área de um quadrado de lado igual a 4 e a área do círculo nele inscrito, ou seja, $4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi$ unidades de área.



Pág. 178

42.

a) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de dois semiplanos:

- O semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -1$ (definido por $x \geq -1$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 2$ (definido por $y \leq 2$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição $x \geq -1 \wedge y \leq 2$

b) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a união de dois semiplanos:

- O semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -1$ (definido por $x \geq -1$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 2$ (definido por $y \leq 2$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição $x \geq -1 \vee y \leq 2$

c) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado superior à a reta de equação $y = -x$ (definido por $y \geq -x$)
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(0,1)$ e raio 2 (definido por $x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$y \geq -x \wedge x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$$

43.

a) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O exterior do círculo, incluindo a circunferência, de centro na origem do referencial e raio 1 (definido por $x^2 + y^2 \geq 1$)
- O círculo de centro na origem do referencial e raio 3 (definido por $x^2 + y^2 \leq 9$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

b) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- A parte que pertence ao segundo quadrante da coroa circular apresentada na alínea anterior (definida por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0$)
- A parte que pertence ao quarto quadrante da coroa circular apresentada na alínea anterior (definida por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$(1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0) \vee (1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0)$$

44.

Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas (3,3) e raio 3 (definido por $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9$)
- O exterior do retângulo de vértices nos pontos de coordenadas (1,2), (5,2), (5,4) e (1,4) (definido por $y \leq 2 \vee x \geq 5 \vee y \geq 4 \vee x \leq 1$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \wedge (y \leq 2 \vee x \geq 5 \vee y \geq 4 \vee x \leq 1)$$

45.

Tem-se $A(-1,3)$, $B(-4,0)$, $C(2,2)$, $D(-2,-1)$ e $E(0,2)$

A abscissa do ponto F é igual a $\overline{OC} = 2\sqrt{2}$, pelo que se tem $F(2\sqrt{2}, 0)$

A abscissa do ponto H é igual a $\overline{OD} = \sqrt{5}$, pelo que se tem $H(\sqrt{5}, 0)$

A abscissa do ponto G é simétrica da abscissa do ponto H , pelo que se tem $G(-\sqrt{5}, 0)$

46.

Tem-se $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$ e $D(0,-1)$

Seja x ($x > 0$) a abscissa do ponto F . Tem-se $x^2 + x^2 = 1^2$

$$x^2 + x^2 = 1^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pelo que se tem } F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

47.

Seja r o raio da circunferência, seja l o lado do triângulo e seja h a altura do triângulo.

Tem-se $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ e tem-se, também, $l = \sqrt{3}r$ (igualdade demonstrada, por exemplo, na resolução do exercício 179 do Tema 2). Seja M o ponto médio do lado $[AC]$

a) Tem-se $r = 2$, pelo que $l = 2\sqrt{3}$ e $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$

Então, $\overline{MC} = \frac{l}{2} = \sqrt{3}$ e $\overline{OM} = \overline{BM} - \overline{BO} = 3 - 2 = 1$, pelo que se tem $A(-\sqrt{3}, -1)$, $B(0, 2)$ e $C(\sqrt{3}, -1)$

b) Tem-se $l = 3$, pelo que $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Então, $\overline{MC} = \frac{3}{2}$ e $\overline{OM} = \overline{BM} - \overline{BO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pelo que se tem $A(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(0, \sqrt{3})$ e $C(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

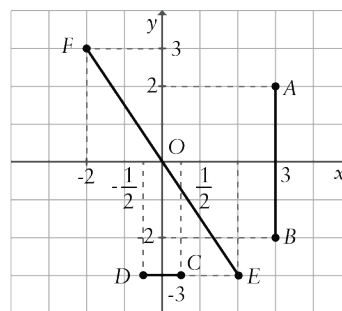
48.

Na figura ao lado estão representados os exemplos apresentados para cada alínea.

a) $A(3, 2)$ e $B(3, -2)$

b) $C(\frac{1}{2}, -3)$ e $D(-\frac{1}{2}, -3)$

c) $E(2, -3)$ e $F(-2, 3)$



49.

a) Dois pontos são simétricos em relação ao eixo das abcissas se e só se têm a mesma abcissa e ordenadas simétricas. Então, o ponto B tem coordenadas $(a, -b)$

b) ao eixo das ordenadas

c) Dois pontos são simétricos em relação à origem do referencial se e só se têm abcissas simétricas e ordenadas simétricas. Então, o ponto referido tem coordenadas $(-a, -b)$

50.

a) Se $a = -1$, o ponto A tem coordenadas $(-3, 1)$, pelo que pertence ao 2.º quadrante.

b) O ponto A pertence ao 3.º quadrante se e só se $a - 2 < 0 \wedge 3 - 2a < 0$

$$\begin{cases} a - 2 < 0 \\ 3 - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a > \frac{3}{2} \end{cases} \quad a \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$$

c) Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo das ordenadas se e só se têm abcissas simétricas e ordenadas iguais, ou seja, se e só se $a - 2 = 4 \wedge 3 - 2a = b$

$$\begin{cases} a - 2 = 4 \\ 3 - 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -9 \end{cases} \quad a = 6 \text{ e } b = -9$$

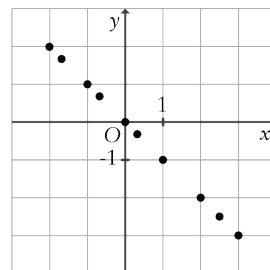
51. Na figura estão representados alguns pontos nas condições enunciadas. O lugar geométrico é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares.

52.

a) A reta r é definida pela equação $y = -x + 1$, pelo que o declive é -1 e a ordenada na origem é 1 .

A reta s é definida pela equação $y = \frac{1}{2}x + 0$, pelo que o declive é $\frac{1}{2}$ e a ordenada na origem é 0 .

A reta t é definida pela equação $y = 0x - 3$, pelo que o declive é 0 e a ordenada na origem é -3 .



b) Tem-se $0 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1$, pelo que o ponto de interseção com o eixo das abcissas tem coordenadas $(1,0)$

Tem-se $y = -0 + 1 \Leftrightarrow y = 1$, pelo que o ponto de interseção com o eixo das ordenadas tem coordenadas $(0,1)$

c) A reta é paralela à reta s , pelo que o seu declive é igual a $\frac{1}{2}$.

Então, a reta é definida por uma equação da forma $y = \frac{1}{2}x + b$

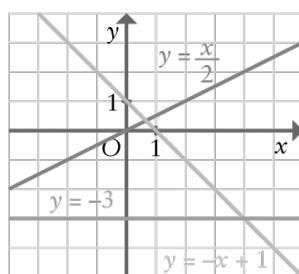
Como o ponto de coordenadas $(-3,2)$ pertence à reta, tem-se $2 = \frac{1}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$

Então, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

d) A reta t é paralela ao eixo das abcissas, pelo que qualquer reta perpendicular a ela é paralela ao eixo das ordenadas sendo, por isso, definida por uma equação do tipo $x = k$

Como a reta passa num ponto cuja abcissa é 2, a reta é definida pela equação $x = 2$

e)



53.

Reta AB : a reta AB é paralela ao eixo das ordenadas, pelo que é definida por uma equação do tipo $x = k$

Como a reta passa, por exemplo, pelo ponto de coordenadas $(-2,0)$, é definida pela equação $x = -2$

Reta AC : a reta AC é paralela ao eixo das abcissas, pelo que é definida por uma equação do tipo $y = k$

Como a reta passa, por exemplo, pelo ponto de coordenadas $(0,-1)$, é definida pela equação $y = -1$

Reta BC : Os pontos B e C são os pontos de coordenadas, respetivamente, $(-2,5)$ e $(3,-1)$,

pelo que o declive da reta BC é igual a $\frac{-1-5}{3-(-2)} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$

Então, a reta BC é definida por uma equação da forma $y = -\frac{6}{5}x + b$

Como o ponto B pertence à reta, tem-se $5 = -\frac{6}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 5 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = \frac{13}{5}$

Então, a equação reduzida da reta BC é $y = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5}$

Pág. 184

54.

a) O segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos da reta AB cujas abcissas estão compreendidas entre -3 e 1 , incluindo estes valores.

A reta AB é definida pela equação $y = 2$, pelo que uma condição que define o segmento de reta $[AB]$ é

$$y = 2 \wedge -3 \leq x \leq 1$$

b) O segmento de reta $[CD]$ é o conjunto de pontos da reta CD cujas ordenadas estão compreendidas entre -2 e 4 , incluindo estes valores.

A reta CD é definida pela equação $x = 3$, pelo que uma condição que define o segmento de reta $[CD]$ é

$$x = 3 \wedge -2 \leq y \leq 4$$

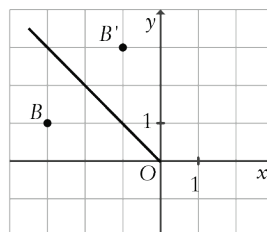
c) A semirreta $\vec{EF}$ é o conjunto de pontos da reta EF cujas abscissas são maiores ou iguais a -2 .
A reta EF é definida pela equação $y = x$, pelo que uma condição que define a semirreta $\vec{EF}$ é $y = x \wedge x \geq -2$. De modo semelhante se deduz que a semirreta pode ser definida pela condição $y = x \wedge y \geq -2$

55.

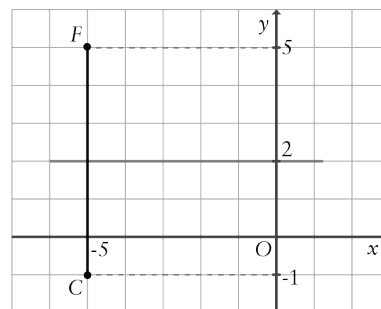
a) Tem-se $A(1,1)$, $B(-3,1)$, $C(-5,-1)$, $D(0,3)$ e $E(3,-2)$

b) Dois pontos são simétricos em relação ao eixo Ox se e só se têm a mesma abscissa e ordenadas simétricas. Então, o ponto E' tem coordenadas $(3,2)$

c) Na figura está representada, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , a bissetriz do segundo quadrante e os pontos B e B' .
O ponto B' tem coordenadas $(-1,3)$



d) Na figura está representada, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , a reta de equação $y = 2$ e os pontos C e F .
O ponto F tem coordenadas $(-5,5)$



e) A reta que passa em E e é paralela ao eixo Ox é definida por uma equação do tipo $y = k$; como o ponto E tem ordenada -2 , uma equação da reta é $y = -2$

A mediatriz do segmento $[AB]$ é uma reta paralela ao eixo Oy , pelo que é definida por uma equação do tipo $x = k$; como passa no ponto médio de $[AB]$ e este ponto tem abscissa -1 , uma equação da mediatriz é $x = -1$

A reta AO é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares, reta definida pela equação $y = x$

f) Tem-se: $\overline{AB} = |-3 - 1| = 4$, $\overline{AC} = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$ e

$$\overline{BC} = \sqrt{[-5 - (-3)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Então, tem-se:

$$\text{Perímetro} = 4 + \sqrt{40} + \sqrt{8} = 4 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

A altura do triângulo relativa ao lado $[AB]$ é igual a 2 (distância entre C e a projeção ortogonal de C sobre a reta AB , que é o ponto de coordenadas $(-5,1)$).

$$\text{Então, tem-se: } \text{área} = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = \overline{AB} = 4 \text{ unidades de área.}$$

56.

Sejam (q_1, q_2) as coordenadas do ponto Q . Tem-se $d(P, Q) = \sqrt{(a - q_1)^2 + (b - q_2)^2}$

Ora, $\sqrt{(a - q_1)^2 + (b - q_2)^2} = \sqrt{(a - 2)^2 + (b + 3)^2}$ para quaisquer valores de a e de b se e só se $q_1 = 2$ e $q_2 = -3$. Q é o ponto de coordenadas $(2, -3)$

57.

O ponto médio de $[PQ]$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{-5+2}{2}, \frac{2-1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Vejamos se o ponto pertence a r : $\frac{1}{2} = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0$

Como « $\frac{1}{2} = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3$ » é uma proposição falsa, o ponto não pertence a r

58.

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow -10y = -6x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$$

b) Qualquer ponto da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ está à mesma distância de A e de B , pelo que basta encontrar dois pontos pertencentes à referida mediatriz. Esses pontos são, por exemplo, os pontos de coordenadas $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ e $\left(1, \frac{7}{5}\right)$

59.

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow -8y = -12x + 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

b) $4 = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 = 4$; como « $4 = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2}$ » é uma proposição verdadeira, o ponto pertence à reta

c) Como o ponto C pertence à mediatriz do segmento $[AB]$, a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[AB]$ é igual à distância entre C e o ponto médio de $[AB]$

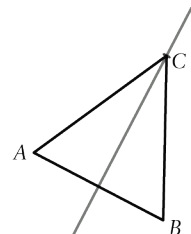
O ponto médio de $[AB]$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (1, 1)$,

pelo que a altura do triângulo relativa ao lado $[AB]$ é igual a $\sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2}$

ou seja $\sqrt{13}$

$$\overline{AB} = \sqrt{[4 - (-2)]^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{52} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ unidades de área}$$



60.

a) Começemos por determinar o raio, r , da circunferência:

$$r = \overline{RS} = \sqrt{[2 - (-5)]^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

A equação reduzida da circunferência é $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 50$

b) Dado que P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, as suas coordenadas são iguais.

Designemos por (p, p) as coordenadas de P

Tem-se $\overline{RP} = \overline{SP} \Leftrightarrow \sqrt{(p+5)^2 + (p-1)^2} = \sqrt{(p-2)^2 + (p-0)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p^2 + 10p + 25 + p^2 - 2p + 1 = p^2 - 4p + 4 + p^2 \Leftrightarrow 12p = -22 \Leftrightarrow p = -\frac{11}{6}$$

P é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{11}{6}, -\frac{11}{6}\right)$

61.

O centro da circunferência C_1 é o ponto de coordenadas $(1, -3)$

Tem-se $1^2 - 4 \times 1 + (-3)^2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$; como « $1^2 - 4 \times 1 + (-3)^2 = 6$ » é uma proposição verdadeira, está provado que o centro da circunferência C_1 pertence à circunferência C_2

Tem-se $x^2 - 4x + y^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 6 + 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 10$, pelo que o centro da circunferência C_2 é o ponto de coordenadas $(2,0)$

Tem-se $(2 - 1)^2 + (0 + 3)^2 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$; como « $(2 - 1)^2 + (0 + 3)^2 = 10$ » é uma proposição verdadeira, está provado que o centro da circunferência C_2 pertence à circunferência C_1

62.

A equação reduzida da circunferência é $x^2 + y^2 = 6$

Determinação das coordenadas de A e de B .

$2^2 + y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2}$; como A pertence ao 1.º quadrante, os pontos A e B têm coordenadas, respetivamente, $(2, \sqrt{2})$ e $(2, -\sqrt{2})$

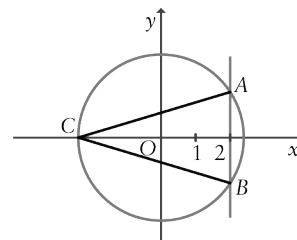
Determinação da área do triângulo $[ABC]$

O ponto C é o ponto de coordenadas $(-\sqrt{6}, 0)$

Seja M o ponto médio de $[AB]$; o ponto M é o ponto de coordenadas $(2,0)$

$$\text{Área} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2} = \frac{|\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| \times |2 - (-\sqrt{6})|}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times (2 + \sqrt{6})}{2} = \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{6})$$

Metade da área = $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{6}) = 3,14626\dots$ que é um valor aproximado de π com erro inferior a 0,01, dado que $\pi = 3,14159\dots$



63.

a) Conjunto dos pontos P do plano cuja distância até A é igual a 5, ou seja, a circunferência de centro no ponto A e raio 5.

b) Conjunto dos pontos P do plano cuja distância até A é menor ou igual do que a distância entre A e B , ou seja, o círculo de centro no ponto A e raio $\overline{AB}$

c) Conjunto dos pontos P do plano cuja distância até A é igual à distância até B , ou seja, a mediatriz do segmento de reta $[AB]$

d) Conjunto dos pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 8$, ou seja, a elipse de focos A e B e eixo maior 8.

Pág. 185

64.

$$4x^2 + 18y^2 = 72 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{72} + \frac{18y^2}{72} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Como o semieixo maior da elipse é igual a $\sqrt{18}$, tem-se $\overline{AB} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$, e como o semieixo menor da elipse é igual a 2, tem-se $\overline{AD} = 4$

Então, a área do retângulo é igual a $4 \times 6\sqrt{2}$, ou seja, $24\sqrt{2}$ unidades de área.

65.

Tem-se que o raio da circunferência é 3, pelo que os focos da elipse são os pontos de coordenadas $(-3,0)$ e $(3,0)$ e, portanto, a semidistância entre os focos, c , é igual a 3

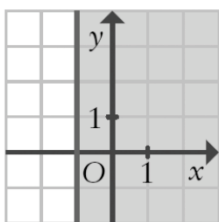
Os pontos de coordenadas $(0, -3)$ e $(0, 3)$ são dois vértices da elipse e a distância entre eles, 6, é o eixo menor e, portanto, o semieixo menor, b , é igual a 3

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $a^2 = 9 + 9 = 18$

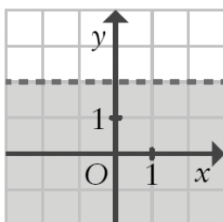
A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

66.

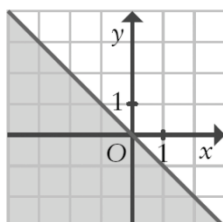
a)



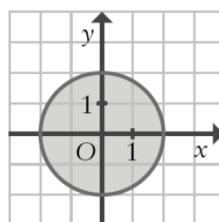
b)



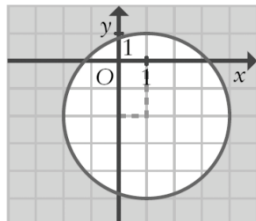
c)



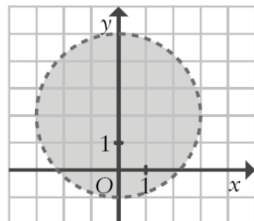
d)



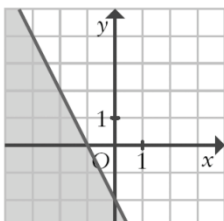
e)



$$f) x^2 + y^2 - 4y < 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 < 5 + 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 < 9$$



g)



67.

a) $y > -2$

b) $y \leq x$

c) $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$

d) O raio da circunferência representada é a distância entre o centro, o ponto de coordenadas $(2, -1)$, e a origem do referencial, ou seja, $\sqrt{5}$

Então, a inequação pedida é $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 5$

68.

A é o semiplano aberto inferior em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

a) Na figura ao lado estão representados o conjunto A (a sombreado) e exemplos das retas r , s e t . As retas r e s têm necessariamente declive igual 1

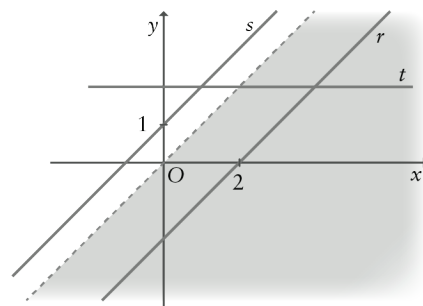
$$r \rightarrow y = x - 2$$

$$s \rightarrow y = x + 1$$

$$t \rightarrow y = 2$$

b) Um ponto do plano não pertence a A se e só se as suas coordenadas satisfizerem a condição $y \geq 3$

$$\text{Tem-se } 6 - k \geq k \Leftrightarrow -2k \geq -6 \Leftrightarrow k \leq 3 \Leftrightarrow k \in]-\infty, 3]$$

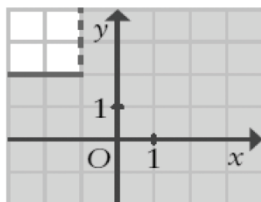


69.

a) O conjunto de pontos definido por esta condição é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = 2$ (definido por $y \leq 2$)
- O semiplano aberto à direita da reta de equação $x = -1$ (definido por $x > -1$)

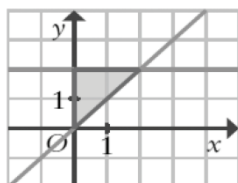
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



b) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado à direita do eixo das ordenadas (definido por $x \geq 0$)
- O semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = x$ (definido por $y \geq x$)
- O semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = 2$ (definido por $y \leq 2$)

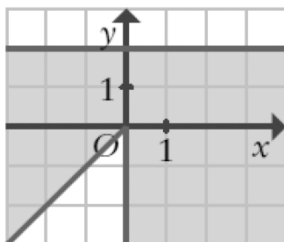
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



c) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- A reunião dos dois seguintes semiplanos: o semiplano fechado à direita do eixo das ordenadas (definido por $x \geq 0$) e o semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = x$ (definido por $y \geq x$)
- O semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = 2$ (definido por $y \leq 2$)

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:

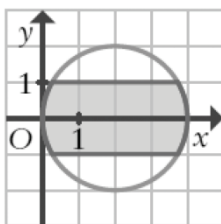


d) Tem-se $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge |y| \leq 1 \Leftrightarrow ((x - 2)^2 + y^2 \leq 4) \wedge (y \geq -1 \wedge y \leq 1) \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq -1 \wedge y \leq 1$

peço que o conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(2,0)$ e raio 2 (definido por $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$)
- O semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = -1$ (definido por $y \geq -1$)
- O semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = 1$ (definido por $y \leq 1$)

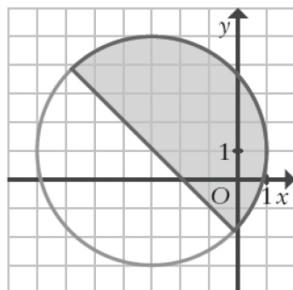
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



e) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(-3,1)$ e raio 4 (definido por $(x+3)^2 + (y-1)^2 \leq 16$)
- O semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = -x - 2$ (definido por $y \geq -x - 2$)

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



70.

a) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro na origem do referencial e raio 1 (definido por $x^2 + y^2 \leq 1$)
- O exterior do círculo, incluindo a circunferência, de centro na origem do referencial e raio 2 (definido por $x^2 + y^2 \geq 4$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição $x^2 + y^2 \leq 1 \vee x^2 + y^2 \geq 4$

b) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a reunião de três conjuntos de pontos:

- O círculo de centro na origem do referencial e raio 2 (definido por $x^2 + y^2 \leq 4$)
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, -2)$ e raio $\sqrt{2}$ (definido por $(x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 2$)
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(3, -3)$ e raio 1 (definido por $(x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 1$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

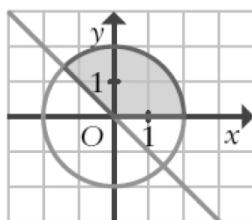
$$x^2 + y^2 \leq 4 \vee (x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 2 \vee (x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 1$$

71.

A região do plano definida por esta condição é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O círculo de centro na origem do referencial e raio 2 (definido por $x^2 + y^2 \leq 4$)
- O semiplano fechado superior em relação ao eixo das abcissas (definido por $y \geq 0$)
- O semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = -x$ (definido por $y \geq -x$)

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:

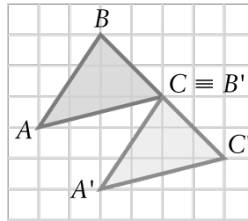


A área desta região é igual a $\frac{3}{4}$ da área de um semicírculo de raio 2, ou seja,

$$\frac{3}{4} \times \frac{\pi \times 2^2}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ unidades de área.}$$

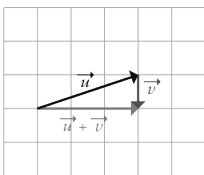
Pág. 187

72. Por exemplo:

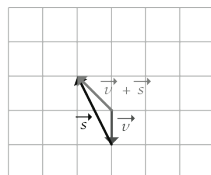


73.

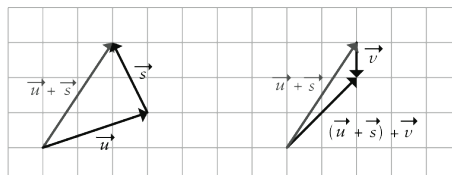
a) $\vec{u} + \vec{v}$:



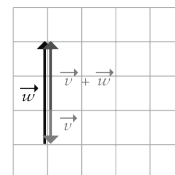
$\vec{v} + \vec{s}$:



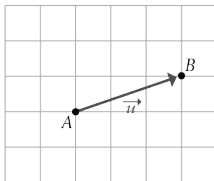
$(\vec{u} + \vec{s}) + \vec{v}$:



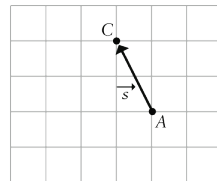
$\vec{v} + \vec{w}$:



b) $B = A + \vec{u}$:



$C = A + \vec{s}$:



Pág. 188

74.

$$\overrightarrow{D} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{A}; \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED}; \quad \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$$

Pág. 189

75.

$$B + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF} = B + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = E + \overrightarrow{CF} = E + \overrightarrow{ED} = D$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$$

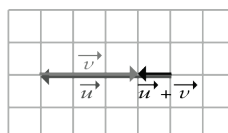
$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FA}$$

$$B + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BA} = B + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FC} = A + \overrightarrow{FC} = A + \overrightarrow{AF} = F$$

76.

$$\|\vec{u}\| = 4; \quad \|\vec{v}\| = 3; \quad \|\vec{w}\| = 5 \text{ (pois tem-se } \|\vec{w}\|^2 = 4^2 + 3^2)$$

Na figura seguinte estão representantes de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ e de $\vec{u} + \vec{v}$. Tem-se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 1$



77.

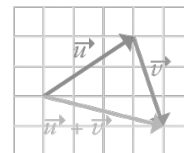
Quaisquer que sejam os vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a norma do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ tem valor máximo no caso de os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem colineares e com o mesmo sentido, tendo-se, neste caso, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, e tem valor mínimo no caso de os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem colineares e terem sentidos opostos, tendo-se, neste caso, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = ||\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$

Então, o maior valor que $\|\vec{w}\|$ pode tomar é 7 e o menor é 3.

78.

a) Na figura estão representados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} + \vec{v}$ não é colinear com qualquer um deles.

b) Para que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ seja colinear com o vetor $\vec{u}$, basta que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.



79.

$$a) \|3\vec{u}\| = |3| \times \|\vec{u}\| = 3 \times 2 = 6; \quad \left\| -\frac{5}{2} \vec{u} \right\| = \left| -\frac{5}{2} \right| \times \|\vec{u}\| = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

$$\|\sqrt{2}\vec{u}\| = |\sqrt{2}| \times \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

b) Pretendemos determinar o número real negativo k , tal que $\vec{v} = k\vec{u}$

Tem-se $|k| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{7}{2}$, pelo que $k = -\frac{7}{2}$ e, então, $\vec{v} = -\frac{7}{2}\vec{u}$

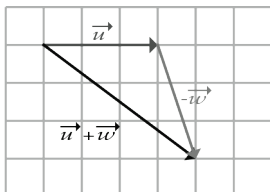
80.

$$\left\| \frac{1}{k} \vec{u} \right\| = \left| \frac{1}{k} \right| \times \|\vec{u}\| = \frac{1}{k} \times k = 1; \text{ note-se que, como } k \text{ é a norma de um vetor não nulo, é positivo,}$$

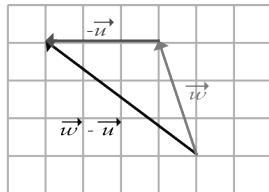
pelo que também $\frac{1}{k}$ é positivo e, então, $\left| \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}$

81.

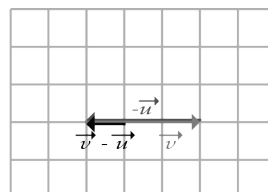
$$\vec{u} - \vec{w} = \vec{u} + (-\vec{w}) :$$



$$\vec{w} - \vec{u} = \vec{w} + (-\vec{u}) :$$



$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}) :$$



Pág. 194

82.

a) $\lambda(3\lambda\vec{u}) = 27\vec{u} \Leftrightarrow (\lambda \times 3\lambda)\vec{u} = 27\vec{u} \Leftrightarrow (3\lambda^2)\vec{u} = 27\vec{u} \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 27 \Leftrightarrow \lambda = -3 \vee \lambda = 3$

b) $6(\lambda\vec{u}) = \left(3 + \frac{1}{2}\right)\vec{u} \Leftrightarrow (6\lambda)\vec{u} = \frac{7}{2}\vec{u} \Leftrightarrow 6\lambda = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{12}$

c) Tem-se: $\frac{2}{3}\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{u} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{v}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{u}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \times \frac{2}{3}\right)\vec{v} = \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right)\vec{u} \Leftrightarrow \frac{8}{9}\vec{v} = \vec{u}$

Então: $\left[\frac{2}{3}\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{u}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{8}{9}\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{u}\right] \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{9}$

Pág. 195

83.

a) Como $\overline{AP} = 2\overline{PC}$ tem-se $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PC}$ e, como $\overline{BQ} = 2\overline{QC}$, tem-se $\overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{CQ}$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são colineares se e só se $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{PQ}$

Ora, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QB}) = 3\overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{CQ} = 3(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}) = 3\overrightarrow{PQ}$

Como $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são colineares.

b) Tem-se $3 = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \Leftrightarrow 3 = \frac{6}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = 2$

Pág. 196

84.

a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + (-3)\vec{e}_2$

b) $\vec{v} = -2\vec{e}_1 + (-2)\vec{e}_2$

Pág. 197

85.

a) $\vec{u}$ tem coordenadas (3,5)

b) $\vec{v} = -5\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, pelo que $\vec{v}$ tem coordenadas (-5,0)

c) $\vec{s}$ tem coordenadas $(\sqrt{2}, -1)$

d) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, pelo que $\vec{w}$ tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

86.

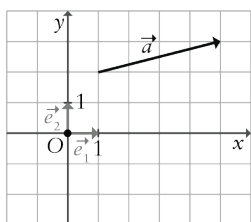
a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, pelo que $\vec{u}$ tem coordenadas (2, -3)

$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, pelo que $\vec{v}$ tem coordenadas (3,0)

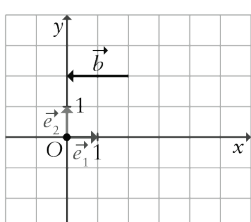
$\vec{w} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, pelo que $\vec{w}$ tem coordenadas (-2, -2)

$\vec{z} = 0\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, pelo que $\vec{z}$ tem coordenadas (0, -1)

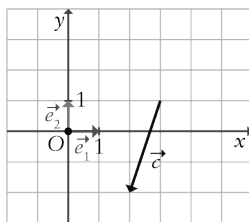
b) $\vec{a}(4,1)$



$\vec{b}(-2,0)$



$\vec{c}(-1,-3)$



87.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Ora, as coordenadas de $\vec{u}$ são (u_1, u_2) e as coordenadas de $\vec{v}$ são (v_1, v_2) , pelo que as coordenadas de $\vec{u} + (-\vec{v})$ são $(u_1 + (-v_1), u_2 + (-v_2))$, ou seja, $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

88.

a) As coordenadas de $\vec{v}$ são $(0, -1)$ e as coordenadas de $2\vec{u}$ são $(2, -4)$

As coordenadas de $3\vec{v}$ são $(0, -3)$ e as coordenadas de $-\frac{1}{2}\vec{u}$ são $(-\frac{1}{2}, 1)$, pelo que as coordenadas de $3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$ são $(0, -3) + (-\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2}, -2)$

b) $\vec{u} - 2\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow -2\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{v} - \vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{v} - \vec{u}\right) \Leftrightarrow \vec{w} = -\frac{1}{6}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$.

Então, as coordenadas de $\vec{w}$ são $\left(-\frac{1}{6} \times 0, -\frac{1}{6} \times (-1)\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1, \frac{1}{2} \times (-2)\right) = \left(0, \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$

89.

a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v_2 = 1$

b) As coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{w}$ são $(2, \sqrt{2}) + (2 \times (-1), 2 \times 2) = (0, 4 + \sqrt{2})$, pelo que o vetor $\vec{u} + 2\vec{w}$ só é colinear com vetores cuja primeira coordenada seja 0.

90.

A condição necessária e suficiente para que, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se tenha $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ é os dois vetores serem colineares e terem o mesmo sentido.

91.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

Tem-se $\vec{u} + \vec{v}(\sqrt{2} + 1, -1 + \sqrt{2})$, pelo que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + (-1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$

b) Tem-se $\|\vec{w}\| = \sqrt{4 + w_2^2}$ e $\|2\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12}$, pelo que

$\|\vec{w}\| = \|2\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{4 + w_2^2} = \sqrt{12} \Leftrightarrow w_2^2 = 8 \Leftrightarrow w_2 = -\sqrt{8} \vee w_2 = \sqrt{8}$

92.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$ são $(-2 - 2, -3 - (-3)) = (-4, 0)$

$\overrightarrow{PR} = R - P$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{PR}$ são $(2 - \sqrt{3} - 2, -1 - (-3)) = (-\sqrt{3}, 2)$

As coordenadas de $Q - R$ são $(-2 - (2 - \sqrt{3}), -3 - (-1)) = (-4 + \sqrt{3}, -2)$

93.

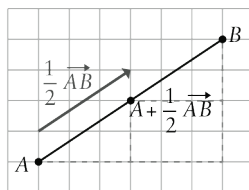
As coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Portanto, as coordenadas de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ são $(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2})$ e as do ponto $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ são

$$(a_1, a_2) + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}\right) = \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2}\right) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

O resultado da adição $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Interpretação geométrica:



Pág. 205

94.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1, a + 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(2a + 1, 6)$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares se e só se $(2a + 1)(a + 1) = 1 \times 6$

$$(2a + 1)(a + 1) = 1 \times 6 \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2} \vee a = 1$$

Para $a = -\frac{5}{2}$, tem-se que $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(1, -\frac{3}{2})$ e que $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(-4, 6)$,

pelo que $\overrightarrow{AC} = -4 \times \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm sentidos opostos.

Para $a = 1$, tem-se que $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(1, 2)$ e que $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(3, 6)$,

pelo que $\overrightarrow{AC} = 3 \times \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm o mesmo sentido.

95.

Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$ nas condições do enunciado.

Como $C = I + \overrightarrow{AI}$, as coordenadas de C são

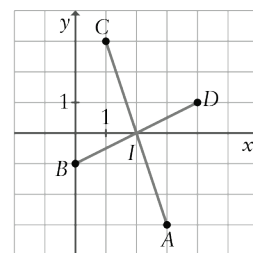
$$(2, 0) + [(2, 0) - (3, -3)] = (2, 0) + (-1, 3) = (1, 3)$$

Como $D = I + \overrightarrow{BI}$, as coordenadas de D são

$$(2, 0) + [(2, 0) - (0, -1)] = (2, 0) + (2, 1) = (4, 1)$$

$$\text{Como } \overrightarrow{AB} = \sqrt{(0 - 3)^2 + [-1 - (-3)]^2} = \sqrt{13} \text{ e}$$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(1 - 0)^2 + [(3 - (-1))]^2} = \sqrt{17}$, tem-se que os lados do paralelogramo não têm todos o mesmo comprimento, pelo que o paralelogramo não é um losango.



Pág. 208

96.

Um vetor diretor da reta r pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, 0)$

97.

Tem-se $\frac{0-(-3)}{-2-1} = -1$, pelo que o declive de AB é igual a -1 . A reta que contém a bissetriz do 2º quadrante também tem declive -1 , pelo que essa reta e a reta AB são paralelas.

Pág. 209

98.

$\vec{u}(3,2)$: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$ é diferente do declive da reta r , pelo que $\vec{u}$ não é um vetor diretor de r

$\vec{v}(-4,-6)$: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-6}{-4}$ e $\frac{-6}{-4}$ é igual ao declive da reta r , pelo que $\vec{v}$ é um vetor diretor de r

$\vec{w}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ e $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ é igual ao declive da reta r , pelo que $\vec{w}$ é um vetor diretor de r

$\vec{s}\left(\frac{3}{2}, 1\right)$: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$ e $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ é diferente do declive da reta r , pelo que $\vec{s}$ não é um vetor diretor de r

99.

a) $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{-1} = -2$, pelo que o declive de r é -2

b) $\frac{v_2}{v_1} = \frac{-6}{-2} = 3$, pelo que o declive de r é 3

c) $\frac{w_2}{w_1} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$, pelo que o declive de r é 0

100.

a) O declive da reta é 3 , pelo que as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(1,3)$

b) $3x - 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, pelo que o declive da reta é $\frac{3}{2}$. Então, as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(2,3)$

c) O declive da reta é $\frac{1}{2}$, pelo que as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(2,1)$

d) $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, pelo que a reta é paralela ao eixo das ordenadas.

Então, as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(0,1)$

Pág. 210

101.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1,1) - (k, k+2) = (1-k, -k-1)$

a) Para que o declive da reta AB seja 2 , tem que ser $-k-1 = 2 \times (1-k)$

$$-k-1 = 2 \times (1-k) \Leftrightarrow -k-1 = 2-2k \Leftrightarrow k=3$$

b) Para que a reta seja paralela ao eixo das ordenadas, a primeira coordenada do vetor diretor tem que ser nula, pelo que k tem que ser 1

102.

O ponto de coordenadas $(2, -1)$ pertence à reta se e só se $a \times 2 + 2 \times (-1) = 3$ for uma proposição verdadeira, o que acontece para $a = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, pelo que o declive da reta é $-\frac{5}{4}$. Então, as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(-4,5)$

103.

O declive da reta é $\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. Como a ordenada na origem da reta é 2, uma equação que define a reta é $y = -\frac{3}{2}x + 2$, pelo que uma condição que define o semiplano colorido é $y \leq -\frac{3}{2}x + 2$

Pág. 211

104.

O declive da reta é -2 , pelo que as coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser $(1, -2)$
Seja $\vec{a}(1, -2)$. Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{r}$, colinear com $\vec{a}$ e cuja norma seja 5,
ou seja, pretende-se determinar $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $|k| = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{a}\|}$ com $\|\vec{r}\| = 5$

$$|k| = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{a}\|} \Leftrightarrow |k| = \frac{5}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |k| = \sqrt{5} \Leftrightarrow k = -\sqrt{5} \vee k = \sqrt{5}$$

Então, $\vec{r} = -\sqrt{5} \times (1, -2) \vee \vec{r} = \sqrt{5} \times (1, -2)$ ou seja $\vec{r} = (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \vee \vec{r} = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

105.

É a semirreta com origem no ponto A , formada pelos pontos P tais que $\overrightarrow{AP}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$

Pág. 212

106.

a₁) $(x, y) = (2, -7) + \lambda(3, 5), \lambda \in \mathbb{R}$

a₂) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1, 2) - (3, -4) = (-2, 6)$

Então, uma equação vetorial de AB é $(x, y) = (3, -4) + \lambda(-2, 6), \lambda \in \mathbb{R}$

a₃) $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$ são $(2, -2) - (-1, 3) = (3, -5)$

Então, uma equação vetorial de AB é $(x, y) = (-1, 3) + \lambda(3, -5), \lambda \in \mathbb{R}$

b) A condição define o segmento de reta cujos extremos são os pontos da reta, definida por

$(x, y) = (-1, 3) + \lambda(3, -5), \lambda \in \mathbb{R}$, que se obtêm para $\lambda = 0$ e para $\lambda = 1$

Para $\lambda = 0$: $(x, y) = (-1, 3) + 0 \times (3, -5) = (-1, 3) \rightarrow$ ponto P

Para $\lambda = 1$: $(x, y) = (-1, 3) + 1 \times (3, -5) = (2, -2) \rightarrow$ ponto Q

A condição define o segmento de reta $[PQ]$

107.

a) A reta definida por $(x, y) = (0, 2) + \lambda(3, -4), \lambda \in \mathbb{R}$ tem a direção do vetor $(3, -4)$, pelo que o seu declive é $-\frac{4}{3}$; a equação reduzida da reta é, então, da forma $y = -\frac{4}{3}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(0, 2)$, vem que a ordenada na origem da reta é 2, pelo que a equação reduzida da reta é $y = -\frac{4}{3}x + 2$

b) A reta definida por $(x, y) = (4, 1) + \lambda(-2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ tem a direção do vetor $(-2, 1)$,

pelo que o seu declive é $-\frac{1}{2}$; a equação reduzida da reta é, então, da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(4, 1)$, tem-se $1 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$, pelo que $b = 3$

Então, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{2}x + 3$

108.

a) A reta de equação $y = -\sqrt{3}x + 1$ tem declive $-\sqrt{3}$, pelo que um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(1, -\sqrt{3})$

Como a ordenada na origem da reta é 1, a reta passa no ponto de coordenadas $(0,1)$

Uma equação vetorial da reta é, então, $(x, y) = (0,1) + \lambda(1, -\sqrt{3}), \lambda \in \mathbb{R}$

b) Tem-se $3x - y = 6 \Leftrightarrow y = 3x - 6$. Então, a reta de equação $3x - y = 6$ tem declive 3, pelo que um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(1,3)$

Como a ordenada na origem da reta é -6 , a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -6)$

Uma equação vetorial da reta é, então, $(x, y) = (0, -6) + \lambda(1,3), \lambda \in \mathbb{R}$

109.

A reta r tem a direção do vetor de coordenadas $(2,0)$, pelo que é paralela ao eixo das abcissas.

a) Qualquer reta paralela à reta r é definida por uma condição da forma $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(4,3)$, é definida por $y = 3$

b) Qualquer reta perpendicular à reta r é definida por uma condição da forma $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(4,3)$, é definida por $x = 4$

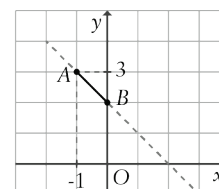
Pág. 213

110.

Na figura, está representado, num plano em que está instalado um referencial o.n., o segmento de reta $[AB]$

a) A reta AB é definida pela equação $y = -x + 2$, pelo que o segmento de reta $[AB]$ é definido pela condição $y = -x + 2 \wedge -1 \leq x \leq 0$

b) $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(1, -1)$, pelo que o segmento de reta $[AB]$ é definido pela condição $(x, y) = (-1,3) + \lambda(1, -1), \lambda \in [0,1]$



111.

Uma equação vetorial é $(x, y) = (-2,3) + k(1, -4), k \in \mathbb{R}$

A reta tem a direção do vetor $(1, -4)$, pelo que o seu declive é -4 ; a equação reduzida da reta é, então, da forma $y = -4x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(-2,3)$, tem-se $3 = -4 \times (-2) + b$, pelo que $b = -5$

Então, a equação reduzida da reta é $y = -4x - 5$

112.

a) $\begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = -1 + 5\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$

b) A reta de equação $y = \frac{2}{3}x - 4$ tem declive $\frac{2}{3}$, pelo que um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(3,2)$

Como a ordenada na origem da reta é -4 , a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -4)$

Um sistema de equações paramétricas da reta é, então, $\begin{cases} x = 3k \\ y = -4 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

c) Tem-se $2x = 10 - 5y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2$. Então, a reta de equação $2x = 10 - 5y$ tem declive $-\frac{2}{5}$, pelo que um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(-5, 2)$

Como a ordenada na origem da reta é 2, a reta passa no ponto de coordenadas $(0, 2)$

Um sistema de equações paramétricas da reta é, então, $\begin{cases} x = -5k \\ y = 2 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

d) Tem-se $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$. Então, a reta de equação $x + 3 = 0$ é paralela ao eixo das ordenadas, pelo que um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(0, 1)$

A reta passa, por exemplo, no ponto de coordenadas $(-3, 0)$

Um sistema de equações paramétricas da reta é, então, $\begin{cases} x = -3 \\ y = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Pág. 214

113.

O ponto de coordenadas $(4, 0)$ é o ponto da reta que pertence ao eixo das abcissas.

Seja b a ordenada do ponto da reta que pertence ao eixo das ordenadas.

Tem-se $(0, b) = (4, 0) + \mu(1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 + \mu \\ b = 0 + 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -4 \\ b = -12 \end{cases}$

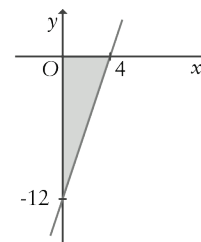
A reta intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas

Área do triângulo $= \frac{4 \times 12}{2} = 24$ unidades de área

Tem-se: $\overline{AB}^2 = 12^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

Perímetro do triângulo $= 12 + 4 + 4\sqrt{10} =$

$= 16 + 4\sqrt{10}$ unidades de comprimento



114.

Uma reta divide uma circunferência em dois arcos de igual comprimento se e só se passar pelo centro da circunferência.

O centro da circunferência é, neste caso, o ponto de coordenadas $(0, -3)$

Como $\ll -3 = 2 \times 0 - 3 \gg$ é uma proposição verdadeira, a reta definida por $y = 2x - 3$ passa pelo centro da circunferência.

Tem-se $(0, -3) = (2, -2) + \lambda(4, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + 4\lambda \\ -3 = -2 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$, pelo que a reta definida

por $(x, y) = (2, -2) + \lambda(4, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ passa pelo centro da circunferência.

Pág. 215

115.

Dois retas (não paralelas ao eixo das ordenadas) são paralelas entre si se e só se tiverem o mesmo declive.

Tem-se $2x + 3y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Então, a reta de equação $2x + 3y = -1$ tem declive $-\frac{2}{3}$

A reta definida por $(x, y) = (0, -3) + k(2, b)$, $k \in \mathbb{R}$ tem a direção do vetor $(2, b)$, pelo que o seu declive é dado, para cada valor de b , por $\frac{b}{2}$

Para que as retas sejam paralelas, tem que se verificar que $\frac{b}{2} = -\frac{2}{3}$ ou seja $b = -\frac{4}{3}$

116.

1º processo:

A reta definida por $(x, y) = (2, 1) + k(3, -1), k \in \mathbb{R}$ tem a direção do vetor $(3, -1)$, pelo que o seu declive é $-\frac{1}{3}$; a equação reduzida da reta é, então, da forma $y = -\frac{1}{3}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1)$, tem-se $1 = -\frac{1}{3} \times 2 + b$, pelo que $b = \frac{5}{3}$

Então, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 3x + 5 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ \frac{10}{3}x = -\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

O ponto I tem coordenadas $(-1, 2)$

2º processo:

As equações paramétricas da reta definida por $(x, y) = (2, 1) + k(3, -1), k \in \mathbb{R}$ são

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}, \text{ pelo que os pontos desta reta são os pontos de coordenadas } (2 + 3k, 1 - k),$$

com $k \in \mathbb{R}$

Determinemos o valor de k para o qual o ponto de coordenadas $(2 + 3k, 1 - k)$ pertence à reta de equação $y = 3x + 5$

$$1 - k = 3(2 + 3k) + 5 \Leftrightarrow 1 - k = 6 + 9k + 5 \Leftrightarrow k = -1$$

Para $k = -1$, tem-se $(2 + 3k, 1 - k) = (-1, 2)$, pelo que o ponto I tem coordenadas $(-1, 2)$

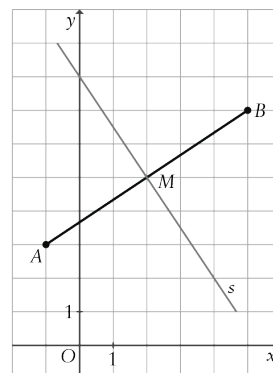
Pág. 216

117.

Na figura estão representados, num plano onde se instalou um referencial o.n. xOy , os pontos A e B , o ponto M , ponto médio do segmento de reta $[AB]$ e a reta s , mediatriz de $[AB]$

O problema consiste em determinar as coordenadas de um ponto C pertencente

a s tal que $\overline{MC} = 2\sqrt{13}$



1º processo (de acordo com a sugestão):

M é o ponto de coordenadas $(2, 5)$

A reta s é definida por $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 5)^2 + (y - 7)^2$

$$\text{Tem-se } (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 5)^2 + (y - 7)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 8$$

Então, s tem declive $-\frac{3}{2}$, pelo que um vetor diretor de s é o vetor $\vec{v}$ de coordenadas $(2, -3)$

cujas norma é $\sqrt{13}$

Então, $C = M + \overrightarrow{MC}$ com $\overrightarrow{MC} = 2\vec{v}$ ou $\overrightarrow{MC} = -2\vec{v}$, pelo que

$$C = (2, 5) + 2(2, -3) = (6, -1) \text{ ou } C = (2, 5) - 2(2, -3) = (-2, 11)$$

2º processo:

M é o ponto de coordenadas $(2, 5)$

A reta s é definida por $y = -\frac{3}{2}x + 8$ (ver 1.º processo) e o ponto C tem coordenadas da forma $(x, -\frac{3}{2}x + 8)$

$$\overrightarrow{MC} = C - M, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{MC} \text{ são da forma } (x - 2, -\frac{3}{2}x + 3)$$

Tem-se

$$\overrightarrow{MC} = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + \left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2} = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 = 52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{5}x^2 - 13x - 39 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$$

Para $x = -2$, as coordenadas de C são $(-2, 11)$ e, para $x = 6$, as coordenadas de C são $(6, -1)$

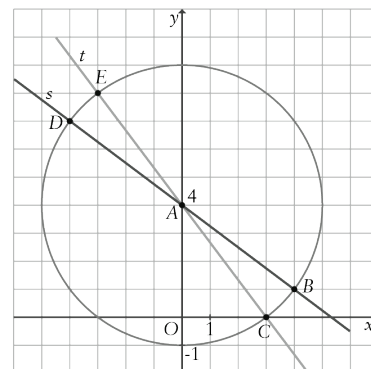
Pág. 218

118.

Na figura ao lado estão representadas, num plano em que se instalou um referencial o.n. xOy , as retas t e s definidas, respetivamente,

por $y = -\frac{4}{3}x + 4$ e $y = -\frac{3}{4}x + 4$

O ponto A de coordenadas $(0, 4)$ é o ponto comum às duas retas, pelo que tem que ser vértice de todos os triângulos nas condições do enunciado. Para cada um dos triângulos, os restantes vértices são pontos que distam 5 unidades do ponto A , estando um deles na reta t e o outro na reta s .



Esses pontos podem ser obtidos geometricamente por, pelo menos, dois processos:

1.º processo:

Os pontos B e D são os pontos comuns à reta s e à circunferência de centro A e raio 5,

ou seja, os pontos que satisfazem a condição $y = -\frac{3}{4}x + 4 \wedge x^2 + (y - 4)^2 = 25$ e os pontos C e E são os pontos comuns à reta t e à circunferência de centro A e raio 5, ou seja, os pontos que satisfazem a condição $y = -\frac{4}{3}x + 4 \wedge x^2 + (y - 4)^2 = 25$

2.º processo:

Os pontos B e D são a soma do ponto A com os vetores diretores da reta s que têm norma 5 e os pontos C e E são a soma do ponto A com os vetores diretores da reta t que têm norma 5.

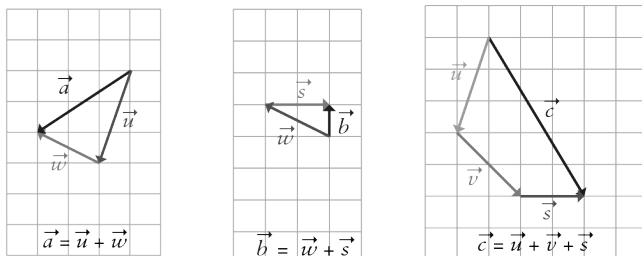
Obtêm-se: $B(4, 1)$, $C(3, 0)$, $D(-4, 7)$ e $E(-3, 8)$

Nas condições enunciadas, os triângulos são $[ABC]$, $[ABE]$, $[AED]$ e $[ACD]$

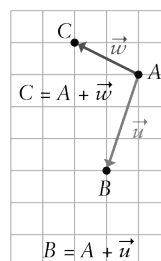
Pág. 226

119.

a)



b)



120.

a) $A + \overrightarrow{CD} = A + \overrightarrow{AF} = F$

b) $O + \overrightarrow{CB} = O + \overrightarrow{OA} = A$

c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE}$

e) $O + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DO} = O + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DO} = O + \vec{0} = O$

121.

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} + \vec{0} = \overrightarrow{DF}$$

122.

a) o centímetro

b) o milímetro

123.

a) $\vec{u} = 2\vec{z} \Rightarrow k = 2$

b) $\vec{w} = -2\vec{u} \Rightarrow k = -2$

c) $\vec{z} = -\frac{1}{4}\vec{w} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

d) $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

e) $\vec{v} = -\frac{3}{4}\vec{w} \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$

124.

a) Seja $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

a₁) Tem-se $|\lambda| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{12}{3} = 4$ pelo que $\lambda = 4$ ou $\lambda = -4$. Tem-se $\vec{v} = -4\vec{u}$ ou $\vec{v} = 4\vec{u}$

a₂) Tem-se $\lambda < 0 \wedge |\lambda| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{3}$ pelo que $\lambda = -\frac{1}{3}$. Tem-se $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}$

a₃) Tem-se $\lambda > 0 \wedge |\lambda| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{5}{3}$ pelo que $\lambda = \frac{5}{3}$. Tem-se $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{u}$

b) $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 3$, $\|2\vec{u}\| = 2 \times \|\vec{u}\| = 6$ e $\|-5\vec{u}\| = |-5| \times \|\vec{u}\| = 5 \times 3 = 15$

125.

a) $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{GJ} = C + \overrightarrow{GO'} = C + \overrightarrow{CD} = D$

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{O'H} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{O'K}$$

$B + \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} = B + \overrightarrow{AO'} = B + \overrightarrow{BH} = H$

$$2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$$

$$2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O'J}) = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}) = 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{IO'} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{ID}) = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EB}$$

b) A afirmação é falsa pois os vetores $\overrightarrow{EI}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares.

Pág. 227

126.

a) $2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - \vec{v} - \sqrt{3}\vec{u} = (2 - \sqrt{3})\vec{u} + (\frac{3}{2} - 1)\vec{v} = (2 - \sqrt{3})\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

b) $2(\frac{3}{4}\vec{u}) - \sqrt{3}\vec{v} + \vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u} + (1 - \sqrt{3})\vec{v}$

127.

a) $2\vec{a} - 3(\vec{u} - \vec{b}) = 4\vec{a} \Leftrightarrow 3(\vec{u} - \vec{b}) = -2\vec{a} \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$

b) $2\vec{b} - \vec{u} = \vec{a} - 2(\vec{b} - 3\vec{u}) \Leftrightarrow 2\vec{b} - \vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 6\vec{u} \Leftrightarrow -7\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$

128.

Tem-se:

$$\vec{w} = 4\vec{u} - 3\left(\frac{2}{3}\vec{v} + \vec{u}\right) = 4\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{u} = \vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{u} + \vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{z} = 2\vec{v} - 2(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} - 2\vec{u} + 2\vec{v} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$$

Então, como $\vec{w} = -2\vec{y}$, os vetores $\vec{w}$ e $\vec{y}$ são colineares e, como $\vec{z} = -2\vec{w}$, os vetores $\vec{z}$ e $\vec{w}$ são colineares.

Então, os vetores $\vec{w}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ são colineares.

129.

a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AH} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \wedge \beta = 2$

b) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = -1$

c) $\overrightarrow{DH} = -2\overrightarrow{FE} + 0 \times \overrightarrow{AH} \Rightarrow \alpha = -2 \wedge \beta = 0$

d) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{FE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FB} \Rightarrow \alpha = -2 \wedge \beta = -\frac{1}{2}$

130.

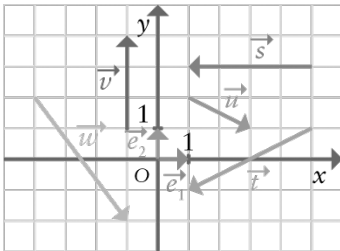
a) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, pelo que as coordenadas de $\vec{a}$ são $(4, -1)$

$\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, pelo que as coordenadas de $\vec{b}$ são $(-3, 5)$

$\vec{c} = 2\vec{e}_1$, pelo que as coordenadas de $\vec{c}$ são $(2, 0)$

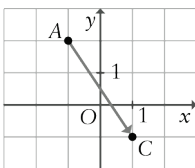
$\vec{d} = 2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$, pelo que as coordenadas de $\vec{d}$ são $(2, 6)$

b)

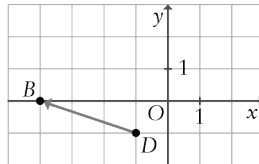


131.

a) O segmento orientado $[A, C]$



b) O segmento orientado $[D, B]$



132.

a) As coordenadas de $3\vec{u}$ são $(12, -9)$ e as coordenadas de $2\vec{v}$ são $(6, 10)$, pelo que as coordenadas de $\vec{w}$ são $(12, -9) - (6, 10) = (6, -19)$

b) As coordenadas de $\frac{3}{5}\vec{v}$ são $(\frac{9}{5}, 3)$, pelo que as coordenadas de $\vec{x}$ são $(\frac{9}{5}, 3) - (4, -3) = (-\frac{11}{5}, 6)$

c) $2\vec{u} = 2\vec{y} - 3(\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow 2\vec{u} = 2\vec{y} - 3\vec{u} - 3\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{y} = 2\vec{u} + 3\vec{u} + 3\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{5}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$.

Então, as coordenadas de $\vec{y}$ são $(\frac{5}{2} \times 4, \frac{5}{2} \times (-3)) + (\frac{3}{2} \times 3, \frac{3}{2} \times 5) = (10, -\frac{15}{2}) + (\frac{9}{2}, \frac{15}{2}) = (\frac{29}{2}, 0)$

d) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{z} + \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{z} = \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{z} = 2\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$.

Então, as coordenadas de $\vec{z}$ são $(8, -6) - (\frac{2}{3} \times 3, \frac{2}{3} \times 5) = (8, -6) - (2, \frac{10}{3}) = (6, -\frac{28}{3})$

133.

a) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $2 \times (-2k) = -1 \times 3$

Ora, $2 \times (-2k) = -1 \times 3 \Leftrightarrow -4k = -3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

Para $k = \frac{3}{4}$, tem-se que $\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(3, -\frac{3}{2})$, pelo que $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$

Então, para $k = \frac{3}{4}$, os vetores têm o mesmo sentido.

b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $(2k - 1) \times k = 1 \times 3$

Ora, $(2k - 1) \times k = 1 \times 3 \Leftrightarrow 2k^2 - k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = \frac{3}{2}$

Para $k = -1$, tem-se que $\vec{u}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 1)$ e que $\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(3, -1)$, pelo que $\vec{v} = -\vec{u}$. Então, os vetores têm o mesmo sentido.

Para $k = \frac{3}{2}$, tem-se que $\vec{u}$ é o vetor de coordenadas $(2, 1)$ e que $\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(3, \frac{3}{2})$, pelo que $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$

Então, para $k = \frac{3}{2}$, os vetores têm o mesmo sentido.

c) Como a primeira coordenada de $\vec{u}$ é nula, para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares é necessário que a primeira coordenada de $\vec{v}$ seja nula, ou seja, $k = 0$

Para $k = 0$, tem-se que $\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(0, -1)$, pelo que $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}$

Então, para $k = 0$, os vetores têm sentidos opostos, pelo que não existe um número real k para o qual os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham o mesmo sentido.

134.

a) $\|\vec{u}\| = 3$

$\|2\vec{v}\| = 2\|\vec{v}\| = 2\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \times \sqrt{4} = 4$

Tem-se que $\vec{u} + 2\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 0) + 2(1, -\sqrt{3}) = (-1, -2\sqrt{3})$,

pelo que $\|\vec{u} + 2\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13}$

b) Seja $\vec{x}$ o vetor nas condições do enunciado.

Tem-se $\vec{x} = \lambda\vec{v}$ com $\lambda < 0$ e $|\lambda| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{6}{2} = 3$

Então, $\lambda = -3$, pelo que, como $\vec{x} = -3\vec{v}$, as coordenadas de $\vec{x}$ são $(-3, 3\sqrt{3})$

135.

$$\text{Tem-se } \|\vec{u}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{7}^2} = \sqrt{2+7} = 3$$

Para cada alínea, $\vec{x}$ designa o(s) vetor(es) nas condições do enunciado.

a) Tem-se $\vec{x} = \lambda \vec{u}$ com $|\lambda| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{6}{3} = 2$

Então, $\lambda = -2$ v $\lambda = 2$ pelo que $\vec{x} = -2\vec{u}$ ou $\vec{x} = 2\vec{u}$

As coordenadas de $\vec{x}$ são $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{7})$ ou $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{7})$

b) Tem-se $\vec{x} = \lambda \vec{u}$ com $\lambda < 0$ e $|\lambda| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{3}$

Então, $\lambda = -\frac{1}{3}$, pelo que, como $\vec{x} = -\frac{1}{3}\vec{u}$, as coordenadas de $\vec{x}$ são $(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{3})$

c) Tem-se $\vec{x} = \lambda \vec{u}$ com $|\lambda| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{4}{3}$

Então, $\lambda = -\frac{4}{3}$ v $\lambda = \frac{4}{3}$, pelo que $\vec{x} = -\frac{4}{3}\vec{u}$ ou $\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{u}$

As coordenadas de $\vec{x}$ são $(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{4\sqrt{7}}{3})$ ou $(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{7}}{3})$

Pág. 228

136.

Tem-se, por observação da figura:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2), \overrightarrow{DC} = (-3, 1), \overrightarrow{AC} = (0, -2), \overrightarrow{ED} = (4, 1), \overrightarrow{CB} = (4, 0) \text{ e } \overrightarrow{BE} = (-5, -2)$$

a₁) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(3 - (-1), 1 - 3) = (4, -2)$

a₂) $\overrightarrow{DC} = C - D$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{DC}$ são $(-1 - 2, 1 - 0) = (-3, 1)$

a₃) $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(-1 - (-1), 1 - 3) = (0, -2)$

a₄) $\overrightarrow{ED} = D - E$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{ED}$ são $(2 - (-2), 0 - (-1)) = (4, 1)$

a₅) $\overrightarrow{CB} = B - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CB}$ são $(3 - (-1), 1 - 1) = (4, 0)$

a₆) $\overrightarrow{BE} = E - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BE}$ são $(-2 - 3, -1 - 1) = (-5, -2)$

b) $\overrightarrow{CD}$ é o vetor de coordenadas $(3, -1)$, pelo que, como $P = A + 5\overrightarrow{CD}$, as coordenadas de P são $(-1, 3) + (15, -5) = (14, -2)$

$\overrightarrow{DE}$ é o vetor de coordenadas $(-4, -1)$, pelo que, como $Q = C + 3\overrightarrow{DE}$, as coordenadas de Q são $(-1, 1) + (-12, -3) = (-13, -2)$

137.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-1 - 2, 3 - a) = (-3, 3 - a)$

Os vetores $\vec{a}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares se e só se $-2 \times (3 - a) = 1 \times (-3)$

Ora, $-2 \times (3 - a) = 1 \times (-3) \Leftrightarrow -6 + 2a = -3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-3)^2 + (3 - a)^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + (3 - a)^2 = 25 \Leftrightarrow 3 - a = -4 \vee 3 - a = 4 \Leftrightarrow a = 7 \vee a = -1$

c) $2\vec{a}$ é o vetor de coordenadas $(-4, 2)$, pelo que, como $P = A - 2\vec{a}$, as coordenadas de P são $(2, a) - (-4, 2) = (6, a - 2)$

Então, P pertence ao eixo das abcissas se e só se $a - 2 = 0$, ou seja, se e só se $a = 2$

d) $\frac{1}{2}\vec{a}$ é o vetor de coordenadas $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, pelo que, como $Q = A + \frac{1}{2}\vec{a}$, as coordenadas de Q são $(2, a) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(1, a + \frac{1}{2}\right)$

Então, Q pertence à bissetriz do 4.º quadrante se e só se $a + \frac{1}{2} = -1$, ou seja, se e só se $a = -\frac{3}{2}$

138.

O quadrilátero é um paralelogramo se e só se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ forem colineares e $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DA}$ forem colineares.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-10 - (-25), 25 - (-20)) = (15, 45)$

$\overrightarrow{CD} = D - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CD}$ são $(20 - 35, -25 - 15) = (-15, -40)$

Como $15 \times (-40) \neq 45 \times (-15)$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não são colineares, pelo que está provado que o quadrilátero não é um paralelogramo.

139.

Tem-se, sucessivamente:

$\overrightarrow{AF} = F - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AF}$ são $(1 - \sqrt{3} - 1, 0 - 1) = (-\sqrt{3}, -1)$

Como $D = C + \overrightarrow{AF}$, as coordenadas de D são $(1 + \sqrt{3}, -2) + (-\sqrt{3}, -1) = (1, -3)$

$\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AD}$ são $(1 - 1, -3 - 1) = (0, -4)$

Como $E = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, as coordenadas de E são $(1 - \sqrt{3}, 0) + (0, -2) = (1 - \sqrt{3}, -2)$

Como $B = C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, as coordenadas de B são $(1 + \sqrt{3}, -2) - (0, -2) = (1 + \sqrt{3}, 0)$

140.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1 - (-3), 3 - (-2)) = (4, 5)$

O declive de AB é igual a $\frac{5}{4}$, pelo que a equação reduzida de AB é da forma $y = \frac{5}{4}x + b$

Como a reta passa pelo ponto $B(1, 3)$, tem-se $3 = \frac{5}{4} \times 1 + b$, ou seja, $b = \frac{7}{4}$

A equação reduzida de AB é, então, $y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$

A reta r passa pelos pontos de coordenadas $(-1, 1)$ e $(0, -1)$, pelo que:

- um vetor diretor de r é o vetor de coordenadas $(0, -1) - (-1, 1) = (1, -2)$, sendo, portanto, o declive de r igual a -2
- a ordenada na origem de r é igual a -1

A equação reduzida de r é, então, $y = -2x - 1$

141.

O triângulo $[ABC]$ é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado inferior em relação à reta AB
- O semiplano fechado superior em relação à reta AC
- O semiplano fechado inferior em relação à reta BC

Determinemos as equações reduzidas das retas AB , AC e BC

Reta AB :

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(3 - (-2), 4 - 2) = (5, 2)$

O declive de AB é igual a $\frac{2}{5}$, pelo que a equação reduzida de AB é da forma $y = \frac{2}{5}x + b$

Como a reta passa pelo ponto $B(3,4)$, tem-se $4 = \frac{2}{5} \times 3 + b$, ou seja, $b = \frac{14}{5}$

A equação reduzida de AB é, então, $y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$

Reta AC :

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(0 - (-2), -2 - 2) = (2, -4)$

O declive de AB é igual a -2 e, como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -2)$, a sua ordenada na origem é igual a -2 , pelo que a equação reduzida de AC é $y = -2x - 2$

Reta BC :

$\overrightarrow{BC} = C - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são $(0 - 3, -2 - 4) = (-3, -6)$

O declive de AB é igual a 2 e, como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -2)$, a sua ordenada na origem é igual a -2 , pelo que a equação reduzida de BC é $y = 2x - 2$

Então, o triângulo $[ABC]$ é definido pela condição:

$$y \leq \frac{2}{5}x + \frac{14}{5} \wedge y \geq -2x - 2 \wedge y \geq 2x - 2$$

142.

Na figura ao lado está representado, num plano onde está instalado um referencial o.n., o quadrilátero $[ABCD]$

O quadrilátero $[ABCD]$ é a interseção de quatro conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado inferior em relação à reta AB
- O semiplano fechado à esquerda em relação à reta BC
- O semiplano fechado superior em relação à reta CD
- O semiplano fechado inferior em relação à reta AD

Determinemos equações das retas AB , BC , CD e AD

Reta AB :

A reta é paralela ao eixo das abscissas e passa no ponto de coordenadas $(0,5)$, pelo que é definida pela equação $y = 5$

Reta BC :

A reta é paralela ao eixo das ordenadas e passa no ponto de coordenadas $(3, -1)$, pelo que é definida pela equação $x = 3$

Reta CD :

$\overrightarrow{CD} = D - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CD}$ são $(-2 - 3, -4 - (-1)) = (-5, -3)$

O declive de CD é igual a $\frac{3}{5}$, pelo que a equação reduzida de CD é da forma $y = \frac{3}{5}x + b$

Como a reta passa pelo ponto $C(3, -1)$, tem-se $-1 = \frac{3}{5} \times 3 + b$, ou seja, $b = -\frac{14}{5}$

A equação reduzida de AB é, então, $y = \frac{3}{5}x - \frac{14}{5}$

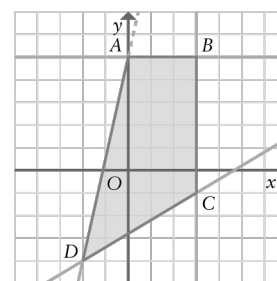
Reta AD :

$\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AD}$ são $(-2 - 0, -4 - 5) = (-2, -9)$

O declive de AD é igual a $\frac{9}{2}$ e, como a reta passa no ponto de coordenadas $(0,5)$, a sua ordenada na origem é igual a 5 , pelo que a equação reduzida de AD é $y = \frac{9}{2}x + 5$

Então, o quadrilátero $[ABCD]$ é definido pela condição:

$$y \leq 5 \wedge x \leq 3 \wedge y \geq \frac{3}{5}x - \frac{14}{5} \wedge y \leq \frac{9}{2}x + 5$$



143.

Reta r :

A ordenada na origem é igual a 4 , pelo que a reta passa pelo ponto de coordenadas (0,4)

O declive da reta é igual a $-\frac{2}{3}$, pelo que o vetor de coordenadas $(-3,2)$ é um vetor diretor da reta.

Então, tem-se:

$$r : (x, y) = (0, 4) + k(-3, 2), \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r : \begin{cases} x = -3k \\ y = 4 + 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Reta s :

O vetor de coordenadas $(2,5)$, é um vetor diretor da reta. Então, o declive de s é igual a $\frac{5}{2}$, pelo que a equação reduzida de s é da forma $y = \frac{5}{2}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(-1,4)$, tem-se $4 = \frac{5}{2} \times (-1) + b$, ou seja, $b = \frac{13}{2}$

Então, tem-se:

$$s : y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 4 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Pág. 229

144.

a) Seja b a ordenada do ponto de r que pertence ao eixo Oy

Tem-se $(0, b) = (4, 1) + k(4, -5) \Leftrightarrow 0 = 4 + 4k \wedge b = 1 - 5k \Leftrightarrow k = -1 \wedge b = 6$

As coordenadas do ponto são $(0, 6)$

b₁) O vetor de coordenadas $(4, -5)$ é um vetor diretor da reta. Então, o declive de r é igual a $-\frac{5}{4}$ e, como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(0, 6)$, a sua ordenada na origem é igual a 6 , pelo que a equação reduzida de r é $y = -\frac{5}{4}x + 6$

b₂) A ordenada na origem é igual a -2 , pelo que a reta passa pelo ponto de coordenadas $(0, -2)$

O declive da reta é igual a $\frac{3}{4}$, pelo que o vetor de coordenadas $(4, 3)$ é um vetor diretor da reta.

Então, tem-se $s : (x, y) = (0, -2) + k(4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

b₃) Sejam $A(a, 0)$ e $B(0, -2)$ os pontos de s que pertencem aos eixos coordenados.

Tem-se $0 = \frac{3}{4} \times a - 2 \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}$

O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$, ou seja, o ponto de coordenadas $\left(\frac{\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = \left(\frac{4}{3}, -1\right)$

O raio da circunferência é igual a $\frac{1}{2}\overline{AB}$

Tem-se $\overline{AB} = \sqrt{\left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$, pelo que o raio é igual a $\frac{5}{3}$

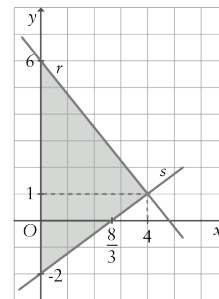
A equação reduzida da circunferência é, então, $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{25}{9}$

c) Na figura ao lado está representado, num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy , o triângulo designado no enunciado.

Determinemos as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s :

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x + 6 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x - 2 = -\frac{5}{4}x + 6 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ unidades de área}$$



145.

Tem-se: $kx - 3y = 3 \Leftrightarrow -3y = -kx + 3 \Leftrightarrow y = \frac{k}{3}x - 1$

Um vetor diretor da reta definida por $\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 \end{cases}$ é o vetor de coordenadas $(-1, 0)$, pelo que esta reta tem declive 0.

Para que a reta, definida por $y = \frac{k}{3}x - 1$, tenha declive 0, tem que ser $k = 0$

146.

Na figura está representada a reta definida pela equação $y = 2x - 3$ e os pontos A e B , extremos do segmento de reta definido por

$$y = 2x - 3 \wedge -1 \leq x \leq 2$$

a) Os extremos do segmento são os pontos $A(-1, -5)$ e $B(2, 1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(2 + 1, 1 + 5) = (3, 6)$

Uma condição vetorial que define o segmento $[AB]$ é

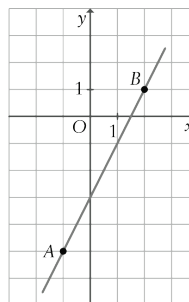
$$(x, y) = (-1, -5) + \lambda(3, 6), \lambda \in [0, 1]$$

b) A semirreta é a interseção da reta AB com o semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -2$, pelo que é definida pela condição

$$y = 2x - 3 \wedge x \geq -2$$

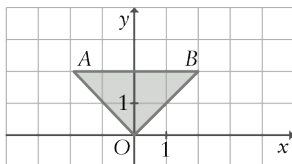
Uma condição vetorial que define a semirreta com origem em S e que passa por T é $P = S + \lambda \overrightarrow{ST}$, $\lambda \geq 0$

Então, a semirreta com origem no ponto de coordenadas $(-2, -7)$ e que passa por A pode ser definida pela condição $(x, y) = (-2, -7) + \lambda(1, 2), \lambda \geq 0$



147.

a)



b) Reta AB : $y = 2$

Reta OA :

É a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares; a sua equação reduzida é $y = -x$

Reta OB :

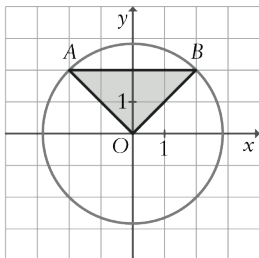
É a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares; a sua equação reduzida é $y = x$

c) O triângulo $[OAB]$ é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado inferior em relação à reta AB
- O semiplano fechado superior em relação à reta OA
- O semiplano fechado superior em relação à reta OB

Então, o triângulo $[ABC]$ é definido pela condição: $y \leq 2 \wedge y \geq -x \wedge y \geq x$

d)



e) Seja C o ponto de coordenadas $(c, -1)$. Tem-se $\overline{AC} = \overline{OC}$, pelo que uma equação que permite determinar c é $\sqrt{[c - (-2)]^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{(c - 0)^2 + (-1 - 0)^2}$
Tem-se:

$$\sqrt{[c - (-2)]^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{(c - 0)^2 + (-1 - 0)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(c + 2)^2 + 9} = \sqrt{c^2 + 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 + 4c + 4 + 9 = c^2 + 1 \Leftrightarrow 4c = -12 \Leftrightarrow c = -3$$

Então, C é o ponto de coordenadas $(-3, -1)$

148.

a) Os pontos A e B têm abscissa nula, pelo que as suas ordenadas são as soluções da equação

$$(0 + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

$$\text{Tem-se } (0 + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 6 \Leftrightarrow y - 3 = -\sqrt{6} \vee y - 3 = \sqrt{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = 3 - \sqrt{6} \vee y = 3 + \sqrt{6}$$

Então, o ponto A tem coordenadas $(0, 3 + \sqrt{6})$ e o ponto B tem coordenadas $(0, 3 - \sqrt{6})$

O ponto C tem ordenada nula, pelo que, de acordo com a figura, a sua abscissa é a menor das soluções da equação $(x + 2)^2 + (0 - 3)^2 = 10$

$$\text{Tem-se } (x + 2)^2 + (0 - 3)^2 = 10 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 2 = -1 \vee x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

Então, o ponto C tem coordenadas $(-3, 0)$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(-2, 3)$

b) Reta AC :

$$\overrightarrow{AC} = C - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AC} \text{ são } (-3 - 0, 0 - (3 + \sqrt{6})) = (-3, -3 - \sqrt{6})$$

O declive de AC é igual a $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ e, como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, 3 + \sqrt{6})$, a sua ordenada na origem é igual a $3 + \sqrt{6}$, pelo que a equação reduzida de AC é $y = \frac{3+\sqrt{6}}{3}x + 3 + \sqrt{6}$

Reta BC :

$$\overrightarrow{BC} = C - B, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{BC} \text{ são } (-3 - 0, 0 - (3 - \sqrt{6})) = (-3, -3 + \sqrt{6})$$

O declive de BC é igual a $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$ e, como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, 3 - \sqrt{6})$,

a sua ordenada na origem é igual a $3 - \sqrt{6}$, pelo que a equação reduzida de BC é $y = \frac{3-\sqrt{6}}{3}x + 3 - \sqrt{6}$

c) O triângulo $[ABC]$ é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado à esquerda da reta AB
- O semiplano fechado inferior em relação à reta AC
- O semiplano fechado superior em relação à reta BC

Então, o triângulo $[ABC]$ é definido pela condição:

$$x \leq 0 \wedge y \leq \frac{3+\sqrt{6}}{3}x + 3 + \sqrt{6} \wedge y \geq \frac{3-\sqrt{6}}{3}x + 3 - \sqrt{6}$$

d) A altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[AB]$ é igual a $\overline{CO}$, pelo que a área do triângulo pode ser dada por $\frac{\overline{AB} \times \overline{CO}}{2}$

Tem-se $\overline{CO} = 3$ e $\overline{AB} = (3 + \sqrt{6}) - (3 - \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$, pelo que a área é $\frac{2\sqrt{6} \times 3}{2}$, ou seja, $3\sqrt{6}$ unidades de área.

149.

Na figura estão representados, num plano onde se instalou um referencial o.n. xOy , os pontos A e B , o ponto M , ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e a reta t , mediatriz de $[AB]$

O problema consiste em determinar as coordenadas de um ponto C pertencente a t , tal que $\overline{MC} = 2\sqrt{10}$

1.º processo (de acordo com a sugestão):

M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (2,4)$

A reta t é definida por $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2$

Tem-se $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow y = -3x + 10$$

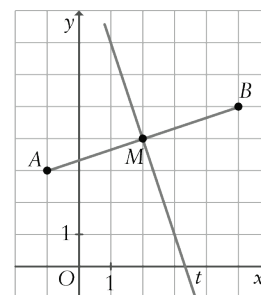
Então, t tem declive -3 , pelo que um vetor diretor de t é o vetor $\vec{v}$ de coordenadas $(1, -3)$,

cujas norma é $\sqrt{1^2 + (-3)^2}$, ou seja, $\sqrt{10}$

Então, $C = M + \overrightarrow{MC}$ com $\overrightarrow{MC} = 2\vec{v}$ ou $\overrightarrow{MC} = -2\vec{v}$, pelo que

$$C = (2,4) + 2(1,-3) = (4,-2) \text{ ou } C = (2,4) - 2(1,-3) = (0,10)$$

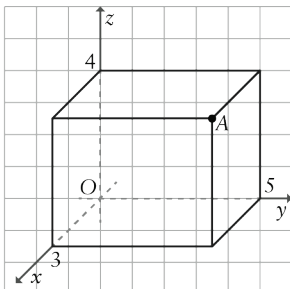
2.º processo: (ver resolução do exercício 117)



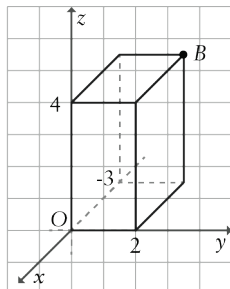
Pág. 231

150.

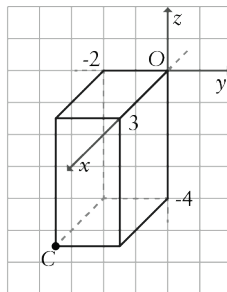
a)



b)



c)



Pág. 232

151.

a) $a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0$

b) $a < 0 \wedge b < 0 \wedge c > 0$

c) $c = 0$

d) $a = 0$

e) $a = 0 \wedge b = 0$

f) $a < 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$

152.

a) O ponto $A(a, 2 - a, a - 1)$ pertence ao 1.º octante se e só se $a > 0 \wedge 2 - a > 0 \wedge a - 1 > 0$

Tem-se: $a > 0 \wedge 2 - a > 0 \wedge a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge a < 2 \wedge a > 1 \Leftrightarrow a \in]1, 2[$

b) O ponto A pertence ao 4.º octante se e só se $a > 0 \wedge 2 - a < 0 \wedge a - 1 > 0$

Tem-se: $a > 0 \wedge 2 - a < 0 \wedge a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge a > 2 \wedge a > 1 \Leftrightarrow a \in]2, +\infty[$

c) O ponto A pertence ao plano xOy se e só se $a - 1 = 0$, ou seja, se e só se $a = 1$

d) O ponto A pertence ao plano yOz se e só se $a = 0$

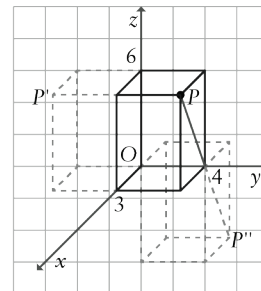
Pág. 233

153.

Na figura estão representadas construções que permitem a visualização dos pontos P' e P'' , pontos simétricos do ponto P em relação ao plano xOz e ao eixo Oy , respectivamente.

a) O ponto P' é o ponto que tem abscissa e cota iguais às de P e ordenada simétrica da ordenada de P . As suas coordenadas são, portanto, $(3, -4, 6)$

b) O ponto P'' tem ordenada igual à de P . A abscissa de P'' é simétrica da abscissa de P e a cota de P'' é simétrica da cota de P . As coordenadas de P'' são, portanto, $(-3, 4, -6)$



Pág. 236

154.

a) As coordenadas dos vértices são: $A(1, -2, 2)$, $C(-1, 2, 2)$, $D(-1, -2, 2)$, $E(-1, -2, 0)$, $F(1, -2, 0)$, $G(1, 2, 0)$ e $H(-1, 2, 0)$

b₁) O plano ABC é o plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, 2)$, pelo que é definido pela equação $z = 2$

b₂) O plano DHC é o plano paralelo ao plano yOz que passa no ponto de coordenadas $(-1, 2, 2)$, pelo que é definido pela equação $x = -1$

b₃) A reta AF é a reta paralela ao eixo Oz que passa no ponto de coordenadas $(1, -2, 2)$, pelo que é definida pela condição $x = 1 \wedge y = -2$

b₄) A reta BC é a reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, 2)$, pelo que é definida pela condição $y = 2 \wedge z = 2$

c₁) A equação $y = -2$ define o plano paralelo ao plano xOz que passa nos pontos de ordenada igual a -2 , ou seja, o plano ADE

c₂) A condição $x = -1 \wedge z = 0$ define a reta paralela ao eixo Oy que passa nos pontos de abcissa igual a -1 e cota nula, ou seja, a reta EH

d) Tem-se: $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 2$ e $\overline{BG} = 2$, pelo que o volume do paralelepípedo é igual a $2 \times 2 \times 4 = 16$ unidades de área.

Pág. 238

155.

a₁) O plano ADE é o plano paralelo ao plano xOz que passa no ponto de coordenadas $(3, -3, 2)$, pelo que é definido pela equação $y = -3$

a₂) A reta BC é a reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto de coordenadas $(3, 3, 2)$, pelo que é definida pela condição $y = 3 \wedge z = 2$

a₃) A face $[ADHE]$ está contida no plano ADH (plano de equação $y = -3$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre 0 e 3 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 2. Uma condição que define esta face é, portanto, $y = -3 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 2$

a₄) A aresta $[BC]$ está contida na reta BC (reta de equação $y = 3 \wedge z = 2$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre 0 e 3. Uma condição que define esta aresta é, portanto, $y = 3 \wedge z = 2 \wedge 0 \leq x \leq 3$

b₁) A condição define a reta paralela ao eixo Ox que passa nos pontos de ordenada igual a -3 e cota nula, ou seja, a reta EH

b₂) A condição define o conjunto de pontos pertencentes ao plano definido pela equação $x = 3$ (o plano ABF) cujas ordenadas estão compreendidas entre -3 e 3 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 2. A condição define, portanto, a face $[ABFE]$

b₃) A condição define o conjunto de pontos pertencentes à reta definida pela condição $x = 3 \wedge z = 0$ (a reta EF) cujas ordenadas estão compreendidas entre -3 e 0 . A condição define, portanto, o segmento de reta $[EM]$

156.

a₁) O plano BCG é o plano paralelo ao plano xOz que passa no ponto de coordenadas $(0, 2, 0)$, pelo que é definido pela equação $y = 2$

a₂) A reta AE é a reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto de coordenadas $(2,0,2)$, pelo que é definida pela condição $y = 0 \wedge z = 2$

a₃) A face $[ABFE]$ está contida no plano ABF (plano de equação $z = 2$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre 0 e 2 e cujas ordenadas estão compreendidas entre 0 e 2. Uma condição que define esta face é, portanto, $z = 2 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2$

a₄) A aresta $[BC]$ está contida na reta BC (reta de equação $x = 2 \wedge y = 2$) e é constituída por todos os pontos cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 2. Uma condição que define esta aresta é, portanto, $x = 2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$

b₁) A condição define a reta paralela ao eixo Oy que passa nos pontos de abcissa igual a 2 e cota igual a 2, ou seja, a reta AB

b₂) A condição define o conjunto de pontos pertencentes ao plano definido pela equação $x = 2$ (o plano ABC) cujas ordenadas estão compreendidas entre 0 e 2 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 2. A condição define, portanto, a face $[ABCD]$

Pág. 240

157.

A reta AB é paralela ao eixo Oy , pelo que $d(A, B) = |2 - 0| = 2$

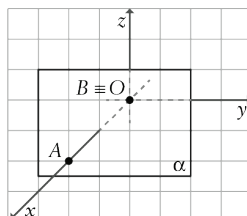
$$d(B, C) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

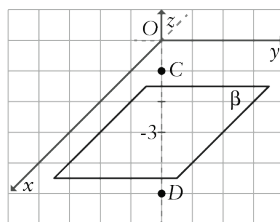
O perímetro do triângulo $[ABC]$ é, portanto, igual a $5 + \sqrt{5}$ unidades de comprimento

158.

Na figura está representado o plano α e dois pontos, $A(2,0,0)$ e $B(0,0,0)$, tais que α é o plano mediador de $[AB]$



Na figura está representado o plano β e dois pontos, $C(0,0,-1)$ e $D(0,0,-5)$, tais que β é o plano mediador de $[CD]$



Pág. 241

159.

Tem-se que A é o ponto de coordenadas $(4,0,0)$ e D é o ponto de coordenadas $(0,5,3)$, pelo que o plano mediador de $[AD]$ é definido pela equação

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2$$

Ora, $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -8x + 16 = -10y + 25 - 6z + 9 \Leftrightarrow -8x + 10y + 6z = 18 \Leftrightarrow -4x + 5y + 3z = 9$
 O plano mediador de $[AD]$ é definido pela equação $-4x + 5y + 3z = 9$

Pág. 243

160.

a) O lugar geométrico referido é a superfície esférica de centro na origem do referencial e raio 2.

Uma equação cartesiana desta superfície esférica é $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) O lugar geométrico referido é a esfera de centro na origem do referencial e raio 4.

Uma equação cartesiana desta esfera é $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$

161.

a) O lugar geométrico definido pela equação é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(2, -1, 0)$ e raio 4.

b) O lugar geométrico definido pela equação é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(0, 1, -2)$ e raio $\sqrt{8}$.

c) O lugar geométrico definido pela condição é a esfera de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0, 0)$ e raio 1.

Pág. 244

162.

Tem-se $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 + (z^2 + 6z + 9) = 6 + 1 + 9 \Leftrightarrow$

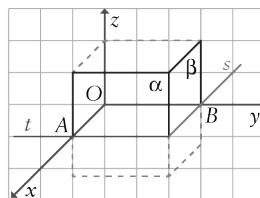
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 16$

Então, o centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $(1, 0, -3)$ e o raio é 4.

Pág. 249

163.

a) Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β , os pontos $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$ e duas semirretas, t e s .



a₁) Seja α_1 o semiplano que contém o ponto A e que é definido em α pela reta de interseção de α com β . Seja β_1 o semiplano que contém o ponto B e que é definido em β pela reta de interseção de α com β . Os planos α e β são perpendiculares se e só se for reto o ângulo dos semiplanos α_1 e β_1 (GM9, Descritor 6). Ora, a interseção de α_1 com o plano xOy é a semirreta t , paralela ao eixo Oy , e a interseção de β_1 com o plano xOy é a semirreta s , com a mesma origem do que t e paralela ao eixo Ox , sendo, portanto, perpendicular a t .

Então, como o ângulo dos semiplanos α_1 e β_1 é o ângulo das semirretas s e t (GM9, Descritor 6), o ângulo dos semiplanos α_1 e β_1 é reto, pelo que os planos α e β são perpendiculares.

a₂) Os pontos da reta de interseção de α com β têm abscissa igual a a e ordenada igual a b .

a₃) Como o plano γ é perpendicular ao eixo Oz e a reta r é paralela ao eixo Oz , o plano γ é perpendicular a r , pelo que a interseção. O ponto comum é o ponto de coordenadas (a, b, c)

De outro modo:

Como a reta r é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm abscissa igual a a e ordenada igual a b e o plano γ é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm cota igual a c , tem-se que o ponto de coordenadas (a, b, c) pertence a ambos os lugares geométricos, pelo que r e γ se intersectam. Como r não está contida em γ , r e γ não têm mais pontos em comum, pelo que o ponto de coordenadas (a, b, c) é o único ponto comum a r e γ .

b₁) Seja α o plano que passa em P e é perpendicular a Ox . Esse plano interseção o eixo Ox no ponto P' . Suponhamos que o ponto P' não pertence a esse plano. Seja então β o plano que passa em P'' e é paralelo a yOz . Esse plano interseção o eixo Ox num ponto diferente de P' . Então, pelo ponto P passam dois planos paralelos a yOz , o que é absurdo. Então, o plano $PP'P''$ é o plano α .

b₂) Como o eixo Ox é perpendicular ao plano $PP'P''$ e o interseção em P'' , é perpendicular a todas as retas desse plano que passam em P'' . A reta $P'P''$ está contida no plano xOy e, portanto, P'' é a projeção ortogonal de P' em Ox . Assim, a sua abscissa é igual à abscissa de P'' que, por sua vez, é igual à abscissa de P .

b₃) Basta fazer um raciocínio análogo ao realizado em **b₁)** e **b₂)**, relativamente ao eixo Oy .
Conclui-se que as coordenadas de P' no plano xOy são (a, b)

164.

a) Tem-se: $A(4,0,3)$, $C(0,5,3)$, $D(0,0,3)$, $O(0,0,0)$, $F(4,0,0)$, $G(4,5,0)$ e $H(0,5,0)$

b) Tem-se: $A(2,4,-4)$, $B(-2,4,-4)$, $C(-2,4,0)$, $D(2,4,0)$, $E(2,0,0)$, $F(2,0,-4)$, $G(-2,0,-4)$ e $H(-2,0,0)$

c) Tem-se: $A(2,-2,3)$, $C(2,2,0)$, $D(2,-2,0)$, $E(-2,-2,0)$, $F(-2,2,0)$, $G(-2,2,3)$ e $H(-2,-2,3)$

d) Tem-se $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$

Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{AB}^2 = 18$, vem $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2 \times \overline{OA}^2 = 18 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{OA} = 3$

Como a medida do volume da pirâmide é 36, tem-se $\frac{1}{3} \times 18 \times \overline{OP} = 36$ pelo que $\overline{OP} = 6$

Então, as coordenadas dos vértices são: $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(-3,0,0)$, $D(0,-3,0)$, $P(0,0,6)$

165.

a) Como a ordenada de A é positiva, A pertence ao 1.º octante se e só se $3 - k > 0 \wedge k + 4 > 0$

Ora, $3 - k > 0 \wedge k + 4 > 0 \Leftrightarrow k < 3 \wedge k > -4 \Leftrightarrow k \in]-4, 3[$

b) Para que o simétrico de A em relação à origem pertença ao 7.º octante, A tem que pertencer ao 1.º octante, pelo que, como se viu em a), tem que se ter $k \in]-4, 3[$

c) A pertence ao plano yOz se e só se $3 - k = 0$, ou seja, se e só se $k = 3$

d) O simétrico de A em relação ao plano xOy pertence ao 2.º octante se e só se A pertencer ao 6.º octante.

Como a ordenada de A é positiva, A pertence ao 6.º octante se e só se a sua abscissa e a sua cota forem negativas, ou seja, se e só se $3 - k < 0 \wedge k + 4 < 0$

Ora, $3 - k < 0 \wedge k + 4 < 0 \Leftrightarrow k > 3 \wedge k < -4 \Leftrightarrow k \in \emptyset$

166.

a) Como a medida do volume do paralelepípedo é 128, a medida do volume de cada cubo é 64, pelo que a medida do comprimento da aresta de cada cubo é 4.

Então, tem-se: $A(4,0,0)$, $C(4,4,4)$, $I(0,4,0)$, $F(-4,4,4)$

b₁) O plano EFG é o plano paralelo ao plano yOz que passa no ponto de coordenadas $(-4,4,4)$, pelo que é definido pela equação $x = -4$

b₂) O plano CBG é o plano paralelo ao plano xOz que passa no ponto de coordenadas $(4,4,4)$, pelo que é definido pela equação $y = 4$

b₃) A reta LJ é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto de coordenadas $(0,0,4)$, pelo que é definida pela condição $x = 0 \wedge z = 4$

b₄) A face $[DCFE]$ está contida no plano CDE (plano de equação $z = 4$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre -4 e 4 e cujas ordenadas estão compreendidas entre 0 e 4 . Uma condição que define esta face é, portanto, $z = 4 \wedge -4 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4$

b₅) A reta EF é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto de coordenadas $(-4,4,4)$, pelo que é definida pela condição $x = -4 \wedge z = 4$

b₆) O retângulo $[ADEH]$ está contido no plano ADE (plano de equação $y = 0$) e é constituído por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre -4 e 4 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 4 . Uma condição que define esta face é, portanto, $y = 0 \wedge -4 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 4$

b₇) A aresta $[AD]$ está contida na reta AD (reta de equação $x = 4 \wedge y = 0$) e é constituída por todos os pontos cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 4 . Uma condição que define esta aresta é, portanto, $x = 4 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 4$

c₁) A equação $x = 4$ define o plano paralelo ao plano yOz que passa nos pontos de abcissa igual a 4 , ou seja, o plano ABC

c₂) A condição $x = 0 \wedge y = 4$ define a reta paralela ao eixo Oz que passa nos pontos de abcissa nula e ordenada igual a 4 , ou seja, a reta IJ

c₃) A condição define o conjunto de pontos pertencentes à reta definida pela condição $y = 0 \wedge z = 4$ (a reta DE) cujas abcissas estão compreendidas entre -4 e 4 . A condição define, portanto, o segmento de reta $[DE]$

c₄) O conjunto dos pontos do espaço cujas abcissas estão compreendidas entre -4 e 0 e cujas ordenadas e cotas estão compreendidas entre 0 e 4 é o cubo $[EFGHOLJI]$

167.

Como as medidas da área da base da pirâmide e do volume da pirâmide são ambas 16,

tem-se $\frac{1}{3} \times 16 \times \text{altura} = 16$, pelo que a medida da altura da pirâmide é 3.

a) Tem-se: $N(0,-4,0)$, $T(4,0,-4)$, $V(2,-2,3)$

b₁) O plano referido é o plano paralelo ao plano yOz que passa no ponto de coordenadas $(2,-2,3)$, pelo que é definido pela equação $x = 2$

b₂) A face $[OPTS]$ está contida no plano OPT (plano de equação $y = 0$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre 0 e 4 e cujas cotas estão compreendidas entre -4 e 0 . Uma condição que define esta face é, portanto, $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq z \leq 0$

b₃) A reta referida é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto de coordenadas $(2,-2,-2)$ (o centro do cubo), pelo que é definida pela condição $x = 2 \wedge z = -2$

b₄) A altura da pirâmide é o segmento de reta contido na reta paralela ao eixo Oz e que passa por V (reta de equação $x = 2 \wedge y = -2$) e é constituído por todos os pontos cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 3. Uma condição que define esta aresta é, portanto, $x = 2 \wedge y = -2 \wedge 0 \leq z \leq 3$

168.

a) No cubo da Figura 1, tem-se: $A(2,0,-2)$, $B(2,4,-2)$, $C(2,4,2)$, $D(2,0,2)$, $E(-2,0,2)$, $F(-2,4,2)$, $G(-2,4,-2)$ e $H(-2,0,-2)$

No cubo da Figura 2, tem-se: $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{MN}^2$

Como $\overline{ON} = \overline{OM}$ e $\overline{MN} = 4$, vem

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{MN}^2 \Leftrightarrow 2 \times \overline{OM}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Então, tem-se: $A(2\sqrt{2}, 0, -2)$, $B(0, 2\sqrt{2}, -2)$, $C(0, 2\sqrt{2}, 2)$, $D(2\sqrt{2}, 0, 2)$, $E(0, -2\sqrt{2}, 2)$, $F(-2\sqrt{2}, 0, 2)$, $G(-2\sqrt{2}, 0, -2)$ e $H(0, -2\sqrt{2}, -2)$

b) O simétrico de F em relação ao plano xOy é o ponto $G(-2,4,-2)$

c) Seja S o ponto simétrico de C em relação ao plano EFG . Tem-se $S = F + \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{CF} = F - C$, pelo que as coordenadas $\overrightarrow{CF}$ são $(-4,0,0)$

Então, as coordenadas de S são $(-2,4,2) + (-4,0,0) = (-6,4,2)$

d)

- O plano ABC é o plano paralelo ao plano yOz que passa no ponto de coordenadas $(2,0,-2)$, pelo que é definido pela equação $x = 2$
- A reta BC é a reta paralela ao eixo Oz que passa no ponto de coordenadas $(2,4,-2)$, pelo que é definida pela condição $x = 2 \wedge y = 4$
- A face $[DCEF]$ está contida no plano DCF (plano de equação $z = 2$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre -2 e 2 e cujas ordenadas estão compreendidas entre 0 e 4 . Uma condição que define esta face é, portanto, $z = 2 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4$
- A aresta $[CF]$ está contida na reta CF (reta de equação $y = 4 \wedge z = 2$) e é constituída por todos os pontos cujas abcissas estão compreendidas entre -2 e 2 . Uma condição que define esta aresta é, portanto, $y = 4 \wedge z = 2 \wedge -2 \leq x \leq 2$

e)

- A equação $z = -2$ define o plano paralelo ao plano xOy que passa nos pontos de cota igual a -2 , ou seja, o plano ABG
- A condição $x = 2 \wedge y = 0$ define a reta paralela ao eixo Oz que passa nos pontos de abcissa igual a 2 e ordenada nula, ou seja, a reta AD
- A condição define o conjunto de pontos pertencentes à reta definida pela condição $x = -2 \wedge z = 2$ (a reta EF) cujas ordenadas estão compreendidas entre 0 e 4 . A condição define, portanto, a aresta $[EF]$

Pág. 251

169.

a) A superfície esférica tem centro no centro do octaedro, o ponto de coordenadas $(1,1,1)$, e tem diâmetro $\overline{AF}$, pelo que o raio é 1 .

A equação reduzida da superfície esférica é, então, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

b) Tem-se que A é o ponto de coordenadas $(1,1,2)$ e B é o ponto de coordenadas $(1,0,1)$, pelo que o plano mediador de $[AB]$ é definido pela equação

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2$$

Ora, $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 - 2y + 1 - 4z + 4 = -2x + 1 - 2z + 1 \Leftrightarrow -2y - 2z = -4 \Leftrightarrow y + z = 2$$

O plano mediador de $[AB]$ é, portanto, definido pela equação $y + z = 2$

Determinemos as coordenadas do ponto médio de $[FD]$

F é o ponto de coordenadas $(1,1,0)$ e D é o ponto de coordenadas $(1,2,1)$, pelo que o ponto médio de $[AD]$

é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ora, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$, pelo que o ponto pertence ao plano definido por $y + z = 2$

c) Tem-se $d(A, B) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$, pelo que o perímetro de qualquer face do octaedro é igual a $3\sqrt{2}$ (unidades de comprimento)

d) A altura da pirâmide $[ABCDE]$ é igual a 1 e a área da base da pirâmide é $(\sqrt{2})^2$, ou seja, 2, pelo que o volume da pirâmide $[ABCDE]$ é igual a $\frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$

Então, o volume do octaedro é $\frac{4}{3}$ (unidades de volume)

e) O ponto A descreve a circunferência que passa nos pontos C , F e E , ou seja, a circunferência que tem centro no centro do octaedro, que tem raio igual a 1 e que está contida no plano que passa em A e é paralelo ao plano xOz

Essa circunferência é a interseção da superfície esférica de raio 1 e centro no centro do octaedro com o plano de equação $y = 1$, pelo que uma condição que define essa circunferência é

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \wedge y = 1$$

Tem-se

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \wedge y = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \wedge y = 1$$

170.

a) Tem-se, de acordo com a figura: $\overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2$

Como $\overline{AE} = 1$ e $\overline{AG} = \sqrt{11}$ (por ser o raio da superfície esférica definida por $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11$), vem

$$\overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2 \Leftrightarrow 1 + \overline{EG}^2 = 11 \Leftrightarrow \overline{EG}^2 = 10$$

Como também se tem $\overline{GH}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{EG}^2$, vem

$$\overline{GH}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{EG}^2 \Leftrightarrow 1 + \overline{EH}^2 = 10 \Leftrightarrow \overline{EH}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{EH} = 3$$

Então, as coordenadas de H são $(1, -2, 0)$

b) Como V' pertence ao plano xOy , tem cota nula, pelo que o plano de equação $z = \frac{5}{4}$ é o plano mediador de $[VV']$ se e só se a cota de V for $2 \times \frac{5}{4}$, ou seja, $\frac{5}{2}$. Então, a altura da pirâmide é igual a $\frac{5}{2} - 1$, ou seja, $\frac{3}{2}$

Volume do sólido = volume do paralelepípedo + volume da pirâmide =

$$= \overline{EH} \times \overline{EF} \times \overline{AE} + \frac{1}{3} \times \overline{AD} \times \overline{AB} \times \frac{3}{2} = 3 \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times 3 \times 1 \times \frac{3}{2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (unidades de volume)}$$

171.

a) B é o ponto de coordenadas $(3,6,0)$ e tem-se $\overline{BF} = 6\sqrt{2}$

A equação reduzida da superfície esférica é, então, $(x-3)^2 + (y-6)^2 + z^2 = (6\sqrt{2})^2$

ou seja $(x-3)^2 + (y-6)^2 + z^2 = 72$

Os vértices do cubo que pertencem à superfície esférica são F , D e H ,

pois são aqueles cuja distância até B é igual a $\overline{BF}$

b) A equação define o plano mediador do segmento cujos extremos são os pontos de coordenadas $(3,0,6)$ e $(-3,6,6)$, ou seja, os pontos D e F , respectivamente.

Os vértices do cubo que pertencem a este plano são B , C , E e H , pois são os equidistantes de D e F

c) Tem-se:

- $\overline{FE} = 6$
- As coordenadas dos vértices do triângulo $[EMF]$ são $E(-3,0,6)$, $F(-3,6,6)$ e $M(0,6,0)$
- O triângulo $[EMF]$ é retângulo em F

Então:

$$\overline{FM} = \sqrt{(0+3)^2 + (6-6)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{9+0+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{EM} = \sqrt{(0+3)^2 + (6-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Área do triângulo } [EMF] = \frac{6 \times 3\sqrt{5}}{2} = 9\sqrt{5} \text{ unidades de área}$$

$$\text{Perímetro do triângulo } [EMF] = 6 + 3\sqrt{5} + 9 = 15 + 3\sqrt{5} \text{ unidades de comprimento}$$

Pág. 252

172.

a) $A + \overrightarrow{CD} = A + \overrightarrow{AF} = F$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AI} = \vec{0}$

d) Seja S o centro da base superior do prisma. Tem-se:

$$C + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IJ} = C + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SD} = S + \overrightarrow{SD} = D$$

e) $\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC}$

f) $\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

Pág. 254

173.

a) $3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

b) $4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD}$

c) $3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OG}$

d) $4\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EC}$

e) $3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF}$

174.

a) As coordenadas de $\vec{a} + \vec{b}$ são

$$(-1, 2, 3) + (2, 3, -1) = (1, 5, 2)$$

As coordenadas de $2\vec{a} - 3\vec{b}$ são

$$2(-1, 2, 3) - 3(2, 3, -1) = (-2, 4, 6) - (6, 9, -3) = (-8, -5, 9)$$

As coordenadas de $\vec{a} - 2\vec{e_1} + 3\vec{e_3}$ são

$$(-1, 2, 3) - 2(1, 0, 0) + 3(0, 0, 1) = (-1, 2, 3) - (2, 0, 0) + (0, 0, 3) = (-3, 2, 6)$$

b) $\vec{a} - 2\vec{w} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

Então, as coordenadas de $\vec{w}$ são

$$\frac{1}{2}(-1, 2, 3) - \frac{1}{2}(2, 3, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) - \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$$

Pág. 255

175.

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares pois $\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-1}$

$\vec{a}$ e $\vec{c}$ não são colineares pois $\frac{-4}{2} \neq \frac{2}{1}$

$\vec{a}$ e $\vec{d}$ não são colineares pois $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{-1/\sqrt{2}}{1}$

$\vec{b}$ e $\vec{c}$ são colineares pois $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1}$; $\vec{b}$ e $\vec{c}$ têm sentidos opostos pois $\vec{c} = -2\vec{b}$
 $\vec{b}$ e $\vec{d}$ são colineares pois $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-1/\sqrt{2}}{-1} = \frac{\sqrt{2}/2}{1}$; $\vec{b}$ e $\vec{d}$ têm o mesmo sentido pois $\vec{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$
 Das relações existentes entre $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e entre $\vec{b}$ e $\vec{d}$, conclui-se que $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são colineares e têm sentidos opostos.

Pág. 256

176.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são

$$(0, -1, 3) - (1, a, -2) = (-1, -1 - a, 5)$$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares se e só se $u_3 \neq 0 \wedge \frac{-1}{3} = \frac{-1-a}{2} = \frac{5}{u_3}$

$$\text{Ora, } \frac{-1}{3} = \frac{-1-a}{2} \Leftrightarrow -2 - 3a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ e } \frac{-1}{3} = \frac{5}{u_3} \Leftrightarrow u_3 = -15$$

b) Os pontos A , B e C são colineares se e só se forem colineares, por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC} = C - B, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{BC} \text{ são } (2, 1, c) - (0, -1, 3) = (2, 2, c - 3)$$

Então, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares se e só se $c - 3 \neq 0 \wedge \frac{-1}{2} = \frac{-1-a}{2} = \frac{5}{c-3}$

$$\text{Ora, } \frac{-1}{2} = \frac{-1-a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } \frac{-1}{2} = \frac{5}{c-3} \Leftrightarrow c - 3 = -10 \Leftrightarrow c = -7$$

177.

a) Para que quatro ou mais pontos sejam vértices de um polígono, é necessário que sejam coplanares.

Ora, os pontos A , B e C definem o plano de equação $x = 1$ e o ponto D não pertence a este plano, pelo que os quatro pontos não podem ser os vértices de um polígono.

b) Para que $[ABCE]$ seja um paralelogramo, $E = C + \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA} = A - B, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{BA} \text{ são } (1, 3, -2) - (1, -1, 3) = (0, 4, -5)$$

$$\text{Então, as coordenadas de } E \text{ são } (1, 1, 0) + (0, 4, -5) = (1, 5, -5)$$

178. Tal como a figura pretende ilustrar, os pontos C e D são os pontos

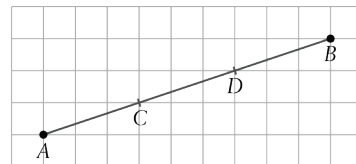
$$\text{que satisfazem as igualdades } C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ e } D = C + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AB}$$

$$\text{são } (2, -1, -3) - (-1, 2, 3) = (3, -3, -6)$$

$$\text{Então, as coordenadas de } C \text{ são } (-1, 2, 3) + \frac{1}{3}(3, -3, -6) = (-1, 2, 3) + (1, -1, -2) = (0, 1, 1)$$

$$\text{e as coordenadas de } D \text{ são } (0, 1, 1) + \frac{1}{3}(3, -3, -6) = (0, 1, 1) + (1, -1, -2) = (1, 0, -1)$$



Pág. 257

179. $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ se e só se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares e tiverem o mesmo sentido ou se pelo menos um deles for o vetor nulo.

180.

$$\text{a) } \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

O vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(2, -\sqrt{2}, 1) + (1, 1, \sqrt{2}) = (3, -\sqrt{2} + 1, 1 + \sqrt{2})$, pelo que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{2} + 1)^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{15}$$

$$\text{b) } \|\vec{w}\| = 2\|\vec{u}\| \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + 1^2 + (w_3)^2} = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{10 + (w_3)^2} = \sqrt{7 \times 4} \Leftrightarrow 10 + (w_3)^2 = 28 \Leftrightarrow (w_3)^2 = 18 \Leftrightarrow w_3 = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow w_3 = \pm 3\sqrt{2}$$

Pág. 258

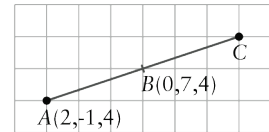
181.

a) As coordenadas de $M_{[AB]}$ são $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (1, 3, 4)$

b) Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar, $C = B + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(0, 7, 4) - (2, -1, 4) = (-2, 8, 0)$

Então, as coordenadas de C são $(0, 7, 4) + (-2, 8, 0) = (-2, 15, 4)$



Pág. 259

182. Seja r o raio da superfície esférica.

$$\text{Tem-se } r = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(-1+3)^2 + (-6-0)^2 + (0-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+36+4} = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \sqrt{\frac{1}{4} \times 44} = \sqrt{11}$$

As coordenadas do centro da superfície esférica, $M_{[AB]}$, são $\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-2, -3, 1)$

Então, a equação reduzida da superfície esférica é $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 11$

183. Um plano divide uma esfera em dois sólidos com igual volume se e só se passa no centro da esfera.

As coordenadas do centro da superfície esférica, $M_{[AB]}$, são $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-3+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0, 1\right)$

Ora, este ponto pertence ao plano de equação $y = 0$, ou seja, ao plano xOz , pelo que está provado que o plano divide a esfera em dois sólidos com igual volume.

Pág. 261

184.

a) Por exemplo, $(x, y, z) = (0, 2, -1) + k(2, 3, -1), k \in \mathbb{R}$

b) O ponto de r pertencente ao plano yOz é o ponto $A(0, 2, -1)$

Ponto de r pertencente ao plano xOy :

$$(x, y, 0) = (0, 2, -1) + k(2, 3, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = 2 + 3k \\ 0 = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $(-2, -1, 0)$

Ponto de r pertencente ao plano xOz :

$$(x, 0, z) = (0, 2, -1) + k(2, 3, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k \\ 0 = 2 + 3k \\ z = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ k = -\frac{2}{3} \\ z = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $\left(-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$

c) Um vetor diretor da reta s é $\vec{v}(-4, -6, 2)$ e, dado que $\vec{v} = -2\vec{u}$, as retas r e s têm a mesma direção. Como, por exemplo, o ponto A pertence à reta s $\left(A = (-6, -7, 2) - \frac{3}{2}(-4, -6, 2)\right)$, conclui-se que as retas são coincidentes.

185. Uma reta contém um diâmetro de uma superfície esférica se e só se passar no centro dessa superfície esférica. Tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3z = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 + \left(z^2 + 3z + \frac{9}{4}\right) = 4 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Então, o centro da superfície esférica é o ponto $C\left(2, 0, -\frac{3}{2}\right)$

A reta AB passa no centro da superfície esférica se os pontos A , B e C forem colineares.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(3, -2, -2) - (1, 2, -1) = (2, -4, -1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $\left(2, 0, -\frac{3}{2}\right) - (1, 2, -1) = \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$

Como $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares, pelo que os pontos A , B e C são colineares.

Então, a reta AB passa no centro da superfície esférica, pelo que contém um diâmetro da superfície esférica.

Pág. 262

186.

a) As coordenadas dos extremos do segmento são as que se obtêm para $k = -1$ e para $k = 3$

Para $k = -1$: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + (-1) \times (1, -1, 2) = (2, -1, 3) + (-1, 1, -2) = (1, 0, 1)$

Para $k = 3$: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + 3 \times (1, -1, 2) = (2, -1, 3) + (3, -3, 6) = (5, -4, 9)$

b) Um ponto que pertença à reta e não pertença ao segmento é qualquer um cujas coordenadas se obtêm para $k \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Tem-se, por exemplo, para $k = 4$: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + 4 \times (1, -1, 2) = (6, -5, 11)$

c) Basta adicionar ao ponto de coordenadas $(2, -1, 3)$ um vetor que não seja colinear com o vetor $(1, -1, 2)$

Por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, -1, 3) + (1, 0, 0) = (3, -1, 3)$

Pág. 263

187.

a) O raio da superfície esférica é igual a $\sqrt{3}$, pelo que a sua equação reduzida é

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

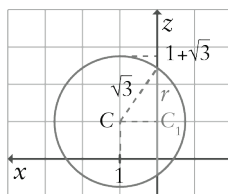
Os pontos que têm abcissa, ordenada e cota iguais entre si, têm coordenadas da forma (a, a, a)

Tem-se: $(a - 1)^2 + (a - 1)^2 + (a - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow 3(a - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a - 1 = -1 \vee a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$$

Os pontos da superfície esférica que têm abcissa, ordenada e cota iguais entre si são os pontos de coordenadas $(0, 0, 0)$ e $(2, 2, 2)$

b) A figura pretende ilustrar a situação descrita.



Seja r o raio da circunferência e C_1 o respetivo centro. C_1 é o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$

Tem-se $\sqrt{3}^2 = r^2 + 1^2 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$

Então, o comprimento da circunferência é igual a $2\sqrt{2}\pi$

c) A diagonal espacial, d , do cubo, é igual ao diâmetro da superfície esférica. Então, $d = 2\sqrt{3}$

Seja a a aresta do cubo. Tem-se $d = \sqrt{3}a$, pelo que $a = 2$

O volume do cubo é igual a 8 (unidades de volume).

Pág. 269

188.

a) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{FJ}$

$E + \overrightarrow{CH} = E + \overrightarrow{EJ} = J$

$F - \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} = F + \overrightarrow{FK} = K$

Seja M o centro do quadrado $[EFGH]$:

$\frac{1}{2}\overrightarrow{JB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JI}$

$\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{JI}$

$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{JB}$

$\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{JE} = \overrightarrow{KG} + 2\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{FL}$

$2\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{KF}$

b₁) $\overrightarrow{FH} + 2\vec{x} = \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{FH} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{HF} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{AF}$

O segmento orientado que representa o vetor $\vec{x}$ é $[A, F]$

b₂) Seja M o centro do quadrado $[EFGH]$:

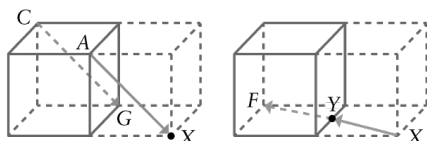
$2\vec{x} - \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{FH} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{FB}$

O segmento orientado que representa o vetor $\vec{x}$ é $[F, B]$

189.

a) Ponto X :

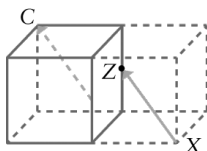
Ponto Y :



Ponto Z :

Seja Q o ponto médio da aresta $[AH]$

$\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MD}$ pelo que $\vec{u} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QC}$



b) B é o ponto de coordenadas $(-1, 1, 1)$

$X = A + \overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{CG} = G - C$ pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CG}$ são $(-1, 1, -1) - (-1, -1, 1) = (0, 2, -2)$

Então, as coordenadas de X são $(1, 1, 1) + (0, 2, -2) = (1, 3, -1)$

Seja W o ponto de coordenadas (x, y, z)

X pertence ao plano mediador de $[BW]$ se e só se $\overrightarrow{XW} = \overrightarrow{XB}$

$\overrightarrow{XW} = \overrightarrow{XB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2 + (1+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{4+4+4} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 12$

O lugar geométrico dos pontos W tais que $\overline{XW} = \overline{XB}$ é a superfície esférica com centro no ponto X e que passa por B .

190.

a) $-3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 = \vec{OE} + \vec{OA} = \vec{OF}$

b) $6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{OA} + \vec{CO} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$

c) $3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{EO} + \vec{OA} + \vec{CO} = \vec{EA} + \vec{CO} = \vec{DB} + \vec{BA} = \vec{DA}$

d) $-3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{OE} + \vec{OA} + \vec{CO} = \vec{OF} + \vec{CO} = \vec{CO} + \vec{OF} = \vec{CF}$

191.

a) As coordenadas de $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$ são

$$\frac{1}{2}(2, -1, 3) - 2(-1, 3, -3) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - (-1, 6, -6) = \left(2, -\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

b) $A + \vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(2, -1, c) + (2, -1, 3) = (4, -2, c + 3)$

O ponto de coordenadas $(4, -2, c + 3)$ pertence ao plano xOy se e só se tiver cota nula, ou seja, se $c = -3$

c) $3\vec{z} - 2\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow 3\vec{z} = \vec{u} + 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{z} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

Então, as coordenadas de $\vec{z}$ são

$$\frac{1}{3}(2, -1, 3) + \frac{2}{3}(-1, 3, -3) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + \left(-\frac{2}{3}, 2, -2\right) = \left(0, \frac{5}{3}, -1\right)$$

d₁) $\vec{w}$ é colinear com $\vec{u}$ se e só se $\frac{2}{2} = \frac{w_2}{-1} = \frac{w_3}{3}$, ou seja, se e só se $w_2 = -1$ e $w_3 = 3$

d₂) $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(2, -1, 3) + (-1, 3, -3) = (1, 2, 0)$

$\vec{w}$ é colinear com $\vec{u} + \vec{v}$ se e só se $w_3 = 0 \wedge \frac{2}{1} = \frac{w_2}{2}$, ou seja, se e só se $w_2 = 4$ e $w_3 = 0$

Pág. 270

192.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 1, 0) - 3(0, -1, 2) = (-3, 4, -6)$

Seja B o ponto de coordenadas (b_1, b_2, b_3)

$\vec{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\vec{AB}$ são

$$(b_1, b_2, b_3) - (2, -2, 1) = (b_1 - 2, b_2 + 2, b_3 - 1)$$

$$\text{Então, } \vec{AB} = \vec{u} - 3\vec{v} \Leftrightarrow (b_1 - 2, b_2 + 2, b_3 - 1) = (-3, 4, -6) \Leftrightarrow b_1 = -1 \wedge b_2 = 2 \wedge b_3 = -5$$

B é o ponto de coordenadas $(-1, 2, -5)$

b) $\frac{1}{2}\vec{x} - \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{2}{3}\vec{u} + 2\vec{v}$

Então, as coordenadas de $\vec{x}$ são

$$\frac{2}{3}(-3, 1, 0) + 2(0, -1, 2) = \left(-2, \frac{2}{3}, 0\right) + (0, -2, 4) = \left(-2, -\frac{4}{3}, 4\right)$$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 1, 0) + (0, -1, 2) = (-3, 0, 2)$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

d) Tem-se $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{w}\| = 10$

Então, para que $\vec{w}$ seja colinear com $\vec{v}$ e tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$, $\vec{w} = -\frac{10}{\sqrt{5}}\vec{v}$

As coordenadas de $\vec{w}$ são $-\frac{10}{\sqrt{5}}(0, -1, 2) = \left(0, \frac{10}{\sqrt{5}}, -\frac{20}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, \frac{10\sqrt{5}}{5}, -\frac{20\sqrt{5}}{5}\right) = (0, 2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$

193. Os pontos A , B e C são colineares se e só se forem colineares, por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-2, b, 0) - (a, -1, 2) = (-2 - a, b + 1, -2)$
 $\overrightarrow{BC} = C - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são $(-2, -3, 1) - (-2, b, 0) = (0, -3 - b, 1)$
 Então, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares se e só se
 $-2 - a = 0 \wedge \frac{b+1}{-3-b} = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow a = -2 \wedge b + 1 = 6 + 2b \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = -5$

194.

a) O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $(0,0,2)$ e o raio, r , é igual a metade da diagonal espacial do cubo.

Seja a a aresta do cubo. Tem-se $d = \sqrt{3}a$ pelo que $d = 4\sqrt{3}$ e $r = 2\sqrt{3}$

A equação reduzida da superfície esférica é $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 12$

b) $\overrightarrow{CH} = H - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CH}$ são $(2, -2, 4) - (-2, -2, 0) = (4, 0, 4)$

O vetor $\vec{u}(k^2 - 2k, k^2 - 1, 3)$ é colinear com o vetor $\overrightarrow{CH}$ se e só se $k^2 - 1 = 0 \wedge \frac{k^2 - 2k}{4} = \frac{3}{4}$

Tem-se

$$k^2 - 1 = 0 \wedge \frac{k^2 - 2k}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k^2 = 1 \wedge k^2 - 2k = 3 \Leftrightarrow (k = -1 \vee k = 1) \wedge k^2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (k = -1 \vee k = 1) \wedge (k = -1 \vee k = 3) \Leftrightarrow k = -1$$

Pode dar-se conta de que, para $k = -1$, o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas $(3, 0, 3)$,

pelo que é colinear com $\overrightarrow{CH}$ $(4, 0, 4)$

c) Na figura está ilustrada a situação descrita.

Nela estão assinalados os pontos M , N e P .

M é o ponto de coordenadas $(0, 2, 0)$

N é o ponto de coordenadas $(0, 2, 4)$

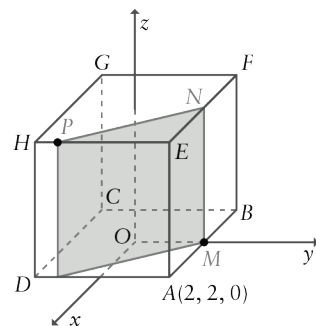
Seja P o ponto de coordenadas $(2, p_2, 4)$, $(-2 \leq p_2 \leq 2)$, tal que a secção produzida no cubo pelo plano MNP seja um quadrado.

A referida secção é um quadrado se e só se $d(N, P) = 4$

$$d(N, P) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2 - 0)^2 + (p_2 - 2)^2 + (4 - 4)^2} = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{4 + (p_2 - 2)^2} = 4 \Leftrightarrow 4 + (p_2 - 2)^2 = 16 \Leftrightarrow (p_2 - 2)^2 = 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_2 - 2 = -\sqrt{12} \vee p_2 - 2 = \sqrt{12} \Leftrightarrow p_2 = 2 - \sqrt{12} \vee p_2 = 2 + \sqrt{12}$$

Dado que $2 + \sqrt{12} > 2$, somente $2 - \sqrt{12}$ pode ser a ordenada do ponto P .

As coordenadas do ponto P são $(2, 2 - \sqrt{12}, 4)$.



195.

a) Tem-se:

$$(x, 0, z) = (-1, 2, 3) + k(3, -1, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3k \\ 0 = 2 - k \\ z = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3k \\ k = 2 \\ z = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 6 \\ k = 2 \\ z = 3 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

O ponto de r que tem ordenada 0 é o ponto de coordenadas $(5, 0, 11)$

b) O ponto pertence à reta se e só se existir um escalar k que satisfaça a condição

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1, 2, 3) + k(3, -1, 4)$$

$$\text{Ora, } \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1, 2, 3) + k(3, -1, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} = -1 + 3k \\ \frac{5}{2} = 2 - k \\ \frac{1}{2} = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} = -1 + 3k \\ \frac{5}{2} = 2 - k \\ \frac{1}{2} = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

Então, o ponto não pertence à reta.

c) O plano paralelo ao plano yOz e que passa no ponto $A(5, -4, 1)$ é o plano definido pela equação $x = 5$. Então, o ponto de interseção da reta com este plano tem abscissa igual a 5. O ponto da reta que tem abscissa igual a 5 é o ponto obtido na alínea a), ou seja, o ponto de coordenadas $(5, 0, 11)$

d) A reta s é uma reta paralela ao eixo Oy , pelo que um vetor diretor de s é o vetor de coordenadas $(0, 1, 0)$. Um ponto pertencente a s é, por exemplo, o ponto de coordenadas $(3, 0, -4)$. Então, uma equação vetorial de s é $(x, y, z) = (3, 0, -4) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

196.

a) $\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 1 \\ z = 1 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(0, -1, 0) - (2, -1, 4) = (-2, 0, -4)$

Então, o segmento de reta $[AB]$ pode ser definido pela condição

$$(x, y, z) = (2, -1, 4) + \lambda(-2, 0, -4), \lambda \in [0, 1]$$

c) Como os vetores de coordenadas $(2, 0, 4)$ e $(-2, 0, -4)$ são colineares e, por exemplo, o ponto A não pertence à reta r , conclui-se que as retas são estritamente paralelas, pelo que definem um plano.

d) O plano yOz é o plano definido pela equação $x = 0$. Então, o ponto de interseção da reta com este plano tem abscissa igual a 0.

Tem-se:

$$(0, y, z) = (-2, 1, 1) + k(2, 0, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2 + 2k \\ y = 1 \\ z = 1 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

O ponto em que a reta r interseja o plano yOz é o ponto de coordenadas $(0, 1, 5)$

e) A reta r é definida pelo sistema $\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 1 \\ z = 1 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$, pelo que todos os seus pontos têm ordenada

igual a 1. Como todos os pontos do plano xOz têm ordenada nula, conclui-se que a reta r e o plano xOz não têm pontos comuns.

A reta r é paralela ao plano xOy

f) A reta AB é definida pelo sistema $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 \\ z = 4 - 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$, pelo que todos os seus pontos têm ordenada

igual a -1 . Como todos os pontos do eixo Oz têm ordenada nula, conclui-se que a reta AB e o eixo Oz não têm pontos comuns, pelo que a reta AB não interseja o eixo Oz

O vetor de coordenadas $(-2, 0, -4)$ é um vetor diretor da reta AB e não é colinear com o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$, pelo que a reta AB não é paralela ao eixo Oz

197.

a₁) Reta UT

a₂) Para $k = 0$, a condição $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(1, 1, -2)$ define o ponto de coordenadas $(0, 0, 2)$, ou seja, o ponto V e, para $k = 1$, a condição $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(1, 1, -2)$ define o ponto de coordenadas $(1, 1, 0)$, ou seja, o ponto S

Então, a condição $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(1, 1, -2)$, $k \in [0, 1]$ define o segmento de reta $[VS]$

b) U é o ponto de coordenadas $(-1, -1, 0)$

Dois planos nas condições do enunciado são, por exemplos, os planos definidos pelas equações $x = -1$ e $y = -1$

Uma equação vetorial da reta que é a interseção destes dois planos é

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0) + k(0, 0, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

c) O raio da superfície esférica é igual a $\overline{VS}$

$$\text{Tem-se: } \overline{VS} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\text{Então, uma condição que define a superfície esférica é } x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$$

Pág. 271

198.

a) Seja A o ponto de coordenadas $(a, 0, 0)$. Tem-se:

$$(a, 0, 0) = (-2, 2, 12) + k(3, -1, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + 3k \\ 0 = 2 - k \\ 0 = 12 - 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + 3k \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Então, o ponto A é o ponto de coordenadas $(4, 0, 0)$

Seja V o ponto de coordenadas $(v_1, v_2, 6)$. Tem-se:

$$(v_1, v_2, 6) = (-2, 2, 12) + k(3, -1, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2 + 3k \\ v_2 = 2 - k \\ 6 = 12 - 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2 + 3k \\ v_2 = 2 - k \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Então, o ponto V é o ponto de coordenadas $(1, 1, 6)$

$$\text{b) } \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times 6 = 20 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OB} = 20 \Leftrightarrow 4 \times \overline{OB} = 20 \Leftrightarrow \overline{OB} = 5$$

Então, o ponto B é o ponto de coordenadas $(0, 5, 0)$

c₁) $\overrightarrow{BV} = V - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BV}$ são $(1, 1, 6) - (0, 5, 0) = (1, -4, 6)$

Então, a reta BV pode ser definida pela condição $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(1, -4, 6)$, $k \in \mathbb{R}$

O plano xOz é o plano definido pela equação $y = 0$. Então, o ponto de interseção da reta BV com este plano tem ordenada igual a 0.

Tem-se:

$$(x, 0, z) = (0, 5, 0) + k(1, -4, 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k \\ 0 = 5 - 4k \\ z = 0 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ k = \frac{5}{4} \\ z = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ k = \frac{5}{4} \\ z = \frac{15}{2} \end{cases}$$

O ponto em que a reta AB intersesta o plano xOz é o ponto de coordenadas $(\frac{5}{4}, 0, \frac{15}{2})$

c₂) O plano mediador de $[AB]$ é definido pela equação $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 5)^2 + z^2$

Tem-se:

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 5)^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8x + 16 = -10y + 25 \Leftrightarrow 8x - 10y + 9 = 0$$

c₃) O raio da superfície esférica é igual a $\overline{AV}$

Tem-se: $\overline{AV} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46}$

Então, uma condição que define a superfície esférica é $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 46$

Como $\overline{VB} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (5 - 1)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{1 + 16 + 36} = \sqrt{53}$, tem-se que $\overline{VB}$

é maior do que o raio da superfície esférica, pelo que o ponto B é exterior à superfície esférica.

199.

M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, -1\right)$

Seja D o ponto de coordenadas (d_1, d_2, d_3)

Se M é o ponto médio de $[BD]$ então $\left(0, \frac{3}{2}, -1\right) = \left(\frac{0+d_1}{2}, \frac{1+d_2}{2}, \frac{2+d_3}{2}\right)$

Ora, $\left(0, \frac{3}{2}, -1\right) = \left(\frac{0+d_1}{2}, \frac{1+d_2}{2}, \frac{2+d_3}{2}\right) \Leftrightarrow d_1 = 0 \wedge d_2 = 2 \wedge d_3 = -4$, pelo que, se M é o ponto médio de $[BD]$, então D é o ponto de coordenadas $(0, 2, -4)$

Tem-se, então:

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(0, 1, 2) - (1, 2, -1) = (-1, -1, 3)$ e

$\overrightarrow{DC} = C - D$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{DC}$ são $(-1, 1, -1) - (0, 2, -4) = (-1, -1, 3)$, pelo que, como se tem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, fica provado que, neste caso, o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

200.

Seja A o ponto de coordenadas (a_1, a_2, a_3) , seja B o ponto de coordenadas (b_1, b_2, b_3) e seja C o ponto de coordenadas (c_1, c_2, c_3)

M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right)$

Se M é o ponto médio de $[BD]$, então $D = M + \overrightarrow{BM}$

Tem-se: $\overrightarrow{BM} = M - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BM}$ são

$$\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right) - (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{a_1+c_1-2b_1}{2}, \frac{a_2+c_2-2b_2}{2}, \frac{a_3+c_3-2b_3}{2}\right)$$

Como $D = M + \overrightarrow{BM}$, D é o ponto de coordenadas $\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right) + \left(\frac{a_1+c_1-2b_1}{2}, \frac{a_2+c_2-2b_2}{2}, \frac{a_3+c_3-2b_3}{2}\right) =$
 $= \left(\frac{2a_1+2c_1-2b_1}{2}, \frac{2a_2+2c_2-2b_2}{2}, \frac{2a_3+2c_3-2b_3}{2}\right) = (a_1 + c_1 - b_1, a_2 + c_2 - b_2, a_3 + c_3 - b_3)$

Tem-se, então:

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são

$$(b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

e $\overrightarrow{DC} = C - D$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{DC}$ são

$$(c_1, c_2, c_3) - (a_1 + c_1 - b_1, a_2 + c_2 - b_2, a_3 + c_3 - b_3) =$$

$$= (c_1 - a_1 - c_1 + b_1, c_2 - a_2 - c_2 + b_2, c_3 - a_3 - c_3 + b_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

pelo que, como se tem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, fica provado que, neste caso, o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

+ Exercícios propostos

Pág. 272

201.

Opção (D)

A abscissa do ponto P é 0; isto exclui (B) e (C). A ordenada do ponto P é menor do que o lado do quadrado; isto exclui (A).

Outro processo:

Se o lado do quadrado é igual a 1, a diagonal é igual a $\sqrt{2}$, pelo que a ordenada de P é $\frac{\sqrt{2}}{2}$

202.

Opção (A)

O simétrico de um ponto em relação ao eixo Ox é o ponto que tem igual abscissa e ordenada simétrica.

203.

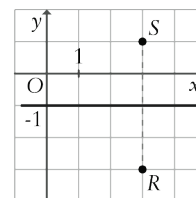
Opção (B)

Como os pontos P e Q têm a mesma ordenada, a reta PQ é paralela ao eixo das abscissas, pelo que é definida por uma equação da forma $y = k$ com $k \in \mathbb{R}$

204.

Opção (B)

O problema está ilustrado na figura ao lado.



205.

Opção (B)

Uma reta perpendicular à reta de equação $y = 3$ é paralela ao eixo das ordenadas, pelo que é definida por uma equação da forma $x = k$ com $k \in \mathbb{R}$. Como, além disso, a reta passa num ponto de abscissa igual a 5, é definida por $x = 5$

206.

Opção (C)

Como o ponto A pertence às retas definidas pelas equações $y = 5$ e $x = -1$, A é o ponto de coordenadas $(-1, 5)$; isto exclui (A) e (B).

Como o ponto C pertence às retas definidas pelas equações $x = -1$ e $y = x$, C é o ponto de coordenadas $(-1, -1)$

207.

Opção (B)

Trata-se do círculo de centro A e raio três unidades.

208.

Opção (D)

Trata-se do semiplano aberto definido pela mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e que contém o ponto B .

Pág. 273

209.

Opção (C)

Tem-se: $d(A, B) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

210.

Opção (B)

Analisando, graficamente, as diversas opções, excluimos (A), (C) e (D) e verificamos que os pontos apresentados em (B) são simétricos em relação à reta de equação $y = -x$ (reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares).

211.

Opção (A)

O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo das ordenadas, pelo que a sua mediatriz, sendo paralela ao eixo das abcissas, é definida por uma equação da forma $y = k$ com $k \in \mathbb{R}$, sendo, portanto, paralela a qualquer reta definida por uma equação da mesma forma.

212.

Opção (C)

O raio da circunferência é igual a $\overline{OC}$

Tem-se: $\overline{OC} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

A equação reduzida da circunferência é, portanto, $(x - 2)^2 + (y - (-2))^2 = (\sqrt{8})^2$

213.

Opção (B)

Tem-se $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 16$, pelo que, como $\overline{BF_1} = \overline{BF_2}$, vem $\overline{BF_2} = 8$

214.

Opção (D)

Tem-se $a = 10$ e $c = 6$, pelo que $10^2 = b^2 + 6^2$ donde $b = 8$

215.

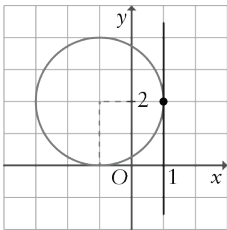
Opção (C)

Trata-se do círculo de centro A e raio duas unidades.

216.

Opção (D)

O problema está ilustrado na figura.



A condição define a interseção da circunferência de centro $(-1, 2)$ e raio 2 com a reta de equação $x = 1$

217.

Opção (C)

O produto das coordenadas dos pontos que pertencem a E é positivo; isto exclui (B) e (D).

Vejam se o ponto A pertence a E :

$(-1)^2 + (-1 - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 5 \leq 4$, pelo que o ponto A não pertence a E ; isto exclui (A).

Pág. 274

218.

Opção (D)

Para que um ponto não pertença ao conjunto definido pela condição, as suas coordenadas não podem verificar qualquer das condições $|x| \leq 2$ e $y \geq x$

O módulo das abcissas dos pontos P e Q é 1; isto exclui (A) e (B).

A ordenada de R é maior do que a abcissa de R ; isto exclui (C).

219.

Opção (B)

O conjunto de pontos representado é a interseção de dois semiplanos:

- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = 1$ (definido por $y \geq 1$)
- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$ (definido por $y \geq x$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição $y \geq 1 \wedge y \geq x$

220.

Opção (D)

O conjunto de pontos definido pela condição $x \leq 1 \wedge y \leq 3$ é a interseção de dois semiplanos:

- O semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 1$ (definido por $x \leq 1$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 3$ (definido por $y \leq 3$)

221.

Opção (B)

Existem pontos na região representada a azul na figura cuja abcissa tem módulo menor do que 1; isto exclui (A).

O ponto de coordenadas $(0, 2)$, por exemplo, pertence à região definida pela condição da opção (C), mas não pertence à região representada a azul na figura; isto exclui (C).

A condição da opção (D) é uma condição impossível, pelo que define o conjunto vazio; isto exclui (D).

222.

Opção (A)

A reta de equação $y = 2$ passa no centro do círculo definido pela condição $x^2 + (y - 2)^2 \leq 6$, pelo que o divide em dois semicírculos de raio igual a $\sqrt{6}$

A condição $x^2 + (y - 2)^2 \leq 6 \wedge y \geq 2$ define um desses semicírculos.

A área desse semicírculo é igual a $\frac{1}{2} \times \pi \times (\sqrt{6})^2$ ou seja 3π

Pág. 275

223.

Opção (C)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$$

224.

Opção (C)

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(0, -1) - (1, -3) = (-1, 2)$

225.

Opção (C)

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-1, 2) - (3, 0) = (-4, 2)$

Então, como $P' = P + \overrightarrow{AB}$, P' é o ponto de coordenadas $(-2, 1) + (-4, 2) = (-6, 3)$

226.

Opção (C)

As coordenadas de $\vec{u} - 2\vec{v}$ são $(1, 2) - (-6, 2) = (7, 0)$

Seja Q o ponto de coordenadas (a, b)

As coordenadas de $\overrightarrow{QR}$ são $(1, -2) - (a, b) = (1 - a, -2 - b)$

Então, $\overrightarrow{QR} = \vec{u} - 2\vec{v}$ se e só se $1 - a = 7$ e $-2 - b = 0$, ou seja, se $a = -6$ e $b = -2$

227.

Opção (A)

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $k(k - 1) = -2 \times (-6)$

Ora, $k(k - 1) = -2 \times (-6) \Leftrightarrow k^2 - k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 4$

Portanto, se $k = 4$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

228.

Opção (D)

O declive da reta de equação $kx - 2y = 3$ é igual a $\frac{k}{2}$

O declive da reta de equação $(x, y) = (-4, 1) + \lambda(1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é igual a $\frac{-2}{1} = -2$

As duas retas são paralelas se e só se os declives forem iguais.

$$\frac{k}{2} = -2 \Leftrightarrow k = -4$$

229.

Opção (D)

A reta passa nos pontos de coordenadas $(3,0)$ e $(-2,2)$, pelo que as coordenadas de um vetor diretor da reta são $(-2,2) - (3,0) = (-5,2)$

230.

Opção (D)

A reta intersesta o eixo das abcissas no ponto de abscissa 2 se e só se o ponto de coordenadas $(2,0)$ pertencer à reta.

$$\text{Tem-se: } (2,0) = (1,-2) + k(3,\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 3k \\ 0 = -2 + k\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ 2 = \frac{1}{3}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ \alpha = 6 \end{cases}$$

231.

Opção (A)

$$\text{Tem-se: } m = \frac{5-2}{0-1} = -3$$

232.

Opção (D)

Das quatro opções, só as coordenadas do ponto D satisfazem a condição $y = -2x + 3$

233.

Opção (C)

Das quatro opções, só o vetor da opção (C) satisfaz a condição $3 = \frac{u_2}{u_1}$, pelo que só ele pode ser vetor diretor da reta de equação $y = 3x - 2$

Pág. 276

234.

Opção (D)

A reta definida por $(x,y) = (0,5) + k(-2,5)$, $k \in \mathbb{R}$, tem declive $-\frac{5}{2}$; isto exclui (A).

A reta definida por $(x,y) = (0,5) + k(-5,2)$, $k \in \mathbb{R}$, tem declive $-\frac{2}{5}$; isto exclui (B).

A reta definida por $(x,y) = (5,0) + k(-2,1)$, $k \in \mathbb{R}$, tem declive $-\frac{1}{2}$; isto exclui (C).

235.

Opção (C)

O declive de PQ é negativo; isto exclui (A) e (B).

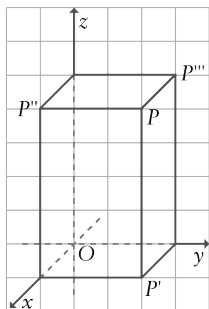
A ordenada na origem de PQ é positiva; isto exclui (D).

236.

Opção (B)

Na figura, P'' é a projeção ortogonal do ponto P no plano xOz

Dois pontos têm a mesma projeção ortogonal no plano xOz se e só se tiverem abscissas iguais e cotas iguais.



237.

Opção (C)

O ponto A e o seu simétrico em relação ao plano yOz têm a mesma projeção ortogonal nesse plano, pelo que têm ordenadas iguais e cotas iguais.

238.

Opção (D)

Um ponto pertence ao plano xOy se e só se a sua cota for nula. Tem-se: $2 - k = 0 \Leftrightarrow k = 2$

239.

Opção (A)

Um plano paralelo ao plano yOz é definido por uma equação da forma $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$; isto exclui (B), (C) e (D).

240.

Opção (B)

Um plano perpendicular ao eixo Oy é definido por uma equação da forma $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$; isto exclui (A), (C) e (D).

241.

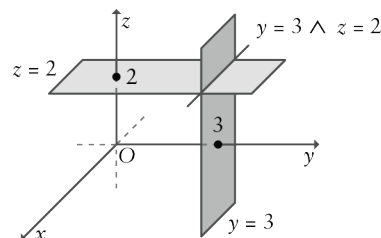
Opção (B)

Uma reta perpendicular ao plano xOz é definida por uma condição da forma $x = k \wedge z = c$, com $k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$; isto exclui (A), (C) e (D).

242.

Opção (D)

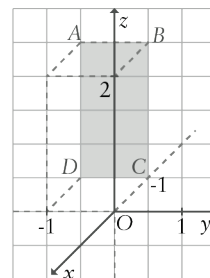
Na figura está representado o conjunto de pontos definido pela condição $y = 3 \wedge z = 2$: a reta perpendicular ao plano yOz que é a interseção dos planos definidos pelas equações $y = 3$ e $z = 2$



243.

Opção (A)

Tal como a figura pretende ilustrar, a condição define o conjunto dos pontos pertencentes ao plano de equação $x = -1$ cujas ordenadas estão compreendidas entre -1 e 0 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 2 , ou seja, o retângulo $[ABCD]$



Pág. 277

244.

a) Opção (D)

Uma condição do tipo $x = k \wedge z = c$, com $k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ define uma reta perpendicular ao plano xOz ; isto exclui (B) e (C).

Os pontos da reta têm abcissa -2 ; isto exclui (A).

De outro modo:

A condição define o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja abcissa é -2 e cuja cota é 4 , ou seja, a reta DC

b) Opção (D)

A face $[ADEF]$ é o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas abcissas estão compreendidas entre -2 e 2 , cujas ordenadas são -3 e cujas cotas estão compreendidas entre 0 e 4 .

245.

Opção (D)

$$\text{Tem-se: } \overline{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (1+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{0+4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

246.

Opção (B)

O plano de equação $y = -2$ é paralelo ao plano xOz . Para que aquele plano seja o plano mediador do segmento de reta $[AB]$, é necessário que este segmento seja paralelo ao eixo Oy ; isto exclui (A) e (C).

O ponto médio do segmento tem que pertencer ao plano mediador; isto exclui (D).

247.

Opção (A)

$$\text{Tem-se: } \overline{AP} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\text{e } \overline{AQ} = \sqrt{(0-1)^2 + (4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Como o ponto A é equidistante dos pontos P e Q , pertence ao plano mediador de $[PQ]$

248.

Opção (B)

Seja $C(2,3,4)$ o centro da esfera. Tem-se $B = C + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = C - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AC} \text{ são } (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$$

Então, B é o ponto de coordenadas $(2,3,4) + (1,2,3) = (3,5,7)$

249.

Opção (B)

O centro da superfície esférica é o ponto médio do segmento $[AB]$, ou seja, o ponto de coordenadas

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-1, 1, 1); \text{ isto exclui (A) e (C).}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}, \text{ pelo que o raio da superfície esférica é igual a } \sqrt{11}; \text{ isto exclui (D).}$$

250.

Opção (A)

A superfície esférica definida pela condição da opção (A) tem centro no ponto de coordenadas $(2, 2, 0)$ e tem raio 2, sendo, portanto, tangente aos planos de equações $x = 4$ e $y = 0$

Pág. 278

251.

Opção (D)

Como as duas superfícies esféricas têm raios iguais, não são concêntricas e o centro de uma pertence ao interior da outra; a interseção de ambas é uma circunferência.

252.

Opção (A)

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AB} \text{ são } (0, 2, -1) - (-1, 2, -3) = (1, 0, 2)$$

253.

Opção (B)

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AB} \text{ são } (3, -1, 2) - (1, -2, 1) = (2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AC} \text{ são } (-1, -3, 0) - (1, -2, 1) = (-2, -1, -1)$$

Como $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares, pelo que os três pontos A , B e C são colineares. Então, pelos pontos A , B e C passa uma infinidade de planos.

254.

Opção (C)

Seja A o ponto de coordenadas $(a, -2, 0)$. As coordenadas de $\overrightarrow{OA}$, vetor de posição do ponto A , são também $(a, -2, 0)$

$$\text{Como } \vec{u} \text{ e } \overrightarrow{OA} \text{ são colineares, tem-se } \frac{a}{9} = \frac{-2}{-6}, \text{ pelo que } a = 3$$

255.

Opção (C)

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{PQ} \text{ são } (1, 3, 2) - (-1, -3, 2) = (2, 6, 0)$$

Os vetores apresentados nas condições das opções (A), (B) e (D) não são colineares com $\overrightarrow{PQ}$; isto exclui (A), (B) e (D).

256.

Opção (B)

Se um vetor diretor da reta r é o vetor de coordenadas $(1,0,0)$, então qualquer reta paralela a ela é paralela ao eixo Ox , pelo que é definida por uma condição tipo $y = k \wedge z = c$, com $k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$; isto exclui (A) e (D).

O ponto de coordenadas $(-1,3,4)$ pertence a r , pelo que a condição apresentada na opção (C) é a que define a reta r e não uma reta estritamente paralela a ela; isto exclui (C).

257.

Opção (A)

O ponto de coordenadas $(2,0,2)$ é o ponto F , pelo que a reta r é a reta FA

A reta FA intersesta o plano OGD no ponto A (o plano OGD é o plano que contém a reta GD e o eixo Ox)

258.

Opção (B)

Uma condição do tipo $x = k \wedge y = c$, com $k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, define uma reta perpendicular ao plano xOy ; isto exclui (A) e (C).

Os pontos da reta têm abcissa -2 ; isto exclui (D).

Pág. 279

259.

Opção (A)

A reta de interseção dos dois planos é definida pela condição $x = 1 \wedge y = 2$

Ora, uma condição do tipo $x = k \wedge y = c$, com $k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, define uma reta perpendicular ao plano xOy ; isto exclui (B) e (D).

Os pontos da reta têm ordenada 2; isto exclui (C).

260.

Opção (C)

O sistema das duas equações define a interseção de dois planos não paralelos.

261.

Opção (C)

O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(1,2,3)$, pelo que a reta passa no centro da esfera.

Então, a interseção da reta com a esfera é um diâmetro da esfera.

Como o raio da esfera é igual a 6, o diâmetro é 12.

262.

Opção (C)

A reta de equação $(x,y,z) = (2,-2,2) + k(0,-4,0)$, $k \in \mathbb{R}$ é a reta que passa no ponto simétrico do vértice G em relação ao plano xOz e que é paralela ao eixo Oy , ou seja, a reta FG

263.

a) O ponto Q pertence a Oy se e só se a sua abcissa for nula.

$$2 - k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

$$k \in \{2\}$$

b) O ponto P pertence a Ox se e só se a sua ordenada for nula.

$$k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = -\sqrt{3} \vee k = \sqrt{3}$$

$$k \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

c) O ponto Q pertence a Oy se e só se a sua abcissa for positiva e a sua ordenada for negativa.

$$\begin{cases} 2 - k > 0 \\ 3k + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 2 \\ k < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3}$$

$$k \in]-\infty, -\frac{1}{3}[$$

d) O ponto P pertence à bissetriz do 3.º quadrante se e só se a sua abcissa for negativa e igual à sua ordenada.

$$\begin{cases} 2k < 0 \\ 2k = k^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k^2 - 2k - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k = -1 \vee k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1 \quad k \in \{-1\}$$

e) O ponto P pertence à reta de equação $x = -5$ se e só se a sua abcissa for igual a -5 .

$$2k = -5 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{2}$$

$$k \in \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

264.

Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o quadrilátero $[ABCD]$

O quadrilátero pode decompor-se nos triângulos $[ABO]$, $[BCO]$ e $[CDO]$

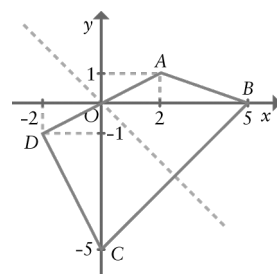
Tem-se:

$$\text{Área do triângulo } [ABO] = \frac{5 \times 1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{Área do triângulo } [BCO] = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$\text{Área do triângulo } [CDO] = \frac{5 \times 2}{2} = 5$$

Então, tem-se: área do quadrilátero $[ABCD] = 20$ (unidades de área)



Pág. 280

265.

a) Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

b) Ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$,
ou seja, o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$

c) Círculo de centro em A e raio 3.

d) Segmento de reta $[AB]$

e) Circunferência de diâmetro $[AB]$, sem os pontos A e B .

266.

a) $y = 5$

b) Trata-se do exterior do círculo de centro em A e raio 3.

Uma condição cartesiana é $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 > 9$

c) O raio da circunferência é igual a $\overline{AB}$. Tem-se $\overline{AB} = \sqrt{(1 + 3)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

Uma condição cartesiana é $(x - 1)^2 + y^2 = 41$

d) Trata-se da mediatriz do segmento de reta $[AB]$

Uma condição cartesiana é $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 1)^2 + y^2$

Tem-se

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x + 9 - 10y + 25 = -2x + 1 \Leftrightarrow -10y = -8x - 33 \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{33}{10}$$

e) Seja m o declive da reta AB . Tem-se $m = \frac{0-5}{1+3} = -\frac{5}{4}$, pelo que a equação reduzida da reta AB é da forma $y = -\frac{5}{4}x + b$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(1,0)$, tem-se $0 = -\frac{5}{4} \times 1 + b$, pelo que $b = \frac{5}{4}$

A equação reduzida de AB é $y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$

f) $y > -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$

267.

Seja, em cada caso, C o centro e r o raio da circunferência.

a) $C(-3,1)$ e $r = \sqrt{8}$

b) $x^2 + 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4$

$C(-2,0)$ e $r = 2$

c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 1 + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 13$

$C(1,-3)$ e $r = \sqrt{13}$

d) $x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y^2 + y + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

$C(0, -\frac{1}{2})$ e $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $2x^2 + 3x = 8y - 2y^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2y^2 - 8y = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 - 4y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) + (y^2 - 4y + 4) = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} + 4 \Leftrightarrow (x + \frac{3}{4})^2 + (y - 2)^2 = \frac{81}{16}$

$C(-\frac{3}{4}, 2)$ e $r = \frac{9}{4}$

f) $x(x-4) = (2-y)y \Leftrightarrow x^2 - 4x = 2y - y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 4 + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

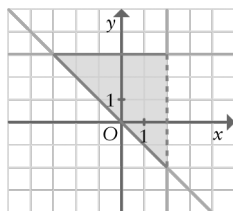
$C(2,1)$ e $r = \sqrt{5}$

268.

a) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de três semiplanos:

- O semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x = 2$ (definido por $x < 2$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 3$ (definido por $y \leq 3$)
- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = -x$ (definido por $y \geq -x$)

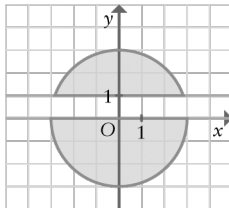
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



b) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro na origem do referencial e raio 3 (definido por $x^2 + y^2 \leq 9$)
- A reunião do semiplano fechado superior à reta de equação $y = 1$ (definido por $y \geq 1$) com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$ (definido por $y \leq 0$)

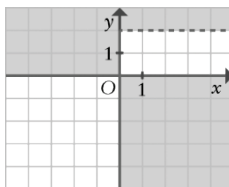
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



c) Tem-se $xy \leq 0 \vee y > 2 \Leftrightarrow (x \leq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee y > 2$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a reunião de três conjuntos de pontos:

- A interseção do semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 0$ (definido por $x \leq 0$) com o semiplano fechado superior à reta de equação $y = 0$ (definido por $y \geq 0$)
- A interseção do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 0$ (definido por $x \geq 0$) com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$ (definido por $y \leq 0$)
- O semiplano aberto superior à reta de equação $y = 2$ (definido por $y > 2$)

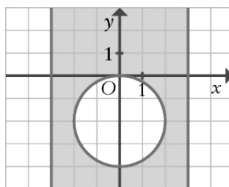
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



d) Tem-se $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \wedge |x| \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \wedge -3 \leq x \leq 3$, pelo que o conjunto de pontos definido por esta condição é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- O exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, -2)$ e raio 2, incluindo a circunferência (definido por $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4$)
- A interseção do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -3$ (definido por $x \geq -3$) com o semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 3$ (definido por $x \leq 3$)

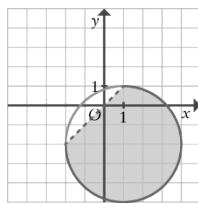
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



e) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- O semiplano aberto inferior à reta de equação $y = x$ (definido por $y < x$)
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -2)$ e raio igual a 3 (definido por $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 9$)

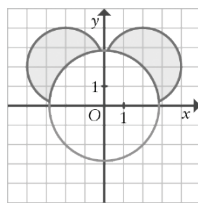
A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



f) O conjunto de pontos definido por esta condição é a interseção de dois conjuntos de pontos:

- A reunião do círculo de centro no ponto de coordenadas $(-2, 2)$ e raio 2 (definido por $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$) com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, 2)$ e raio 2 (definido por $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$)
- O exterior do círculo de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{8}$, incluindo a circunferência (definido por $x^2 + y^2 \geq 8$)

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



269.

a) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(-2, 2)$ e raio 2 (definido por $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$)
- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, 2)$ e raio 1 (definido por $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \vee (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$$

b) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de três conjuntos de pontos:

- A coroa circular definida pelas circunferências com centros na origem do referencial e raios iguais a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ (definida por $2 \leq x^2 + y^2 \leq 8$)
- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = -x$ (definido por $y \geq -x$)
- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$ (definido por $y \geq x$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$2 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \wedge y \geq -x \wedge y \geq x$$

c) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- A interseção do semiplano fechado inferior à reta de equação $y = -1$ (definido por $y \leq -1$) com o semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = -1$ (definido por $x \leq -1$)
- A reunião do semiplano fechado superior à reta de equação $y = 1$ (definido por $y \geq 1$) com o semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 2$ (definido por $x \geq 2$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$(y \leq -1 \wedge x \leq -1) \vee (y \geq 1 \vee x \geq 2)$$

d) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de cinco conjuntos de pontos:

- O exterior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1, incluindo a circunferência (definido por $x^2 + y^2 \geq 1$)
- O semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -2$ (definido por $x \geq -2$)
- O semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 2$ (definido por $x \leq 2$)
- O semiplano aberto superior à reta de equação $y = -2$ (definido por $y > -2$)
- O semiplano aberto inferior à reta de equação $y = 2$ (definido por $y < 2$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x \geq -2 \wedge x \leq 2 \wedge y > -2 \wedge y < 2$$

condição esta equivalente a $x^2 + y^2 \geq 1 \wedge |x| \leq 2 \wedge |y| < 2$

Pág. 281

270.

$$a_1) \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EA}$$

$$a_2) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

$$a_3) \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EB}$$

$$a_4) \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EB}$$

$$b) \|\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{EB}\| = 3 \text{ cm}$$

271.

$X = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, pelo que o ponto X é o ponto médio do segmento de reta $[BD]$

$Y = C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = C + \overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = C + \overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = E + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = E + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$, pelo que o ponto Y é o ponto médio do segmento de reta $[ED]$

$$Z = A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}\right) = A - 2\overrightarrow{CF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DF} = A + 2\overrightarrow{FC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} = A + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$$

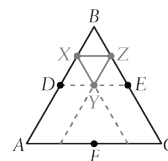
, pelo que o ponto Z é o ponto médio do segmento de reta $[EB]$

Na figura ao lado está representada a figura apresentada no enunciado, onde se assinalaram os pontos X , Y e Z .

Como $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ e o triângulo $[BXZ]$ é equilátero e congruente com o triângulo $[XYZ]$, tem-se que o triângulo $[XYZ]$ é o transformado do triângulo $[ABC]$

por meio de uma semelhança de razão $\frac{1}{4}$, pelo que o quociente entre as respectivas áreas é igual a $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Então, a área do triângulo $[XYZ]$ é igual a 1 (unidade de área)



272.

a) No caso de $k = 2$, B é o ponto de coordenadas $(2,1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2,1) - (-1,3) = (3,-2)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

b) Tem-se $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = 6$, pelo que o vetor $\frac{1}{6}\vec{u}$ é um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{u}$ e cuja norma é igual a 1. O vetor $\frac{1}{6}\vec{u}$

é o vetor de coordenadas $\frac{1}{6} \times (-4, 2\sqrt{5}) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

Então, as coordenadas de $\vec{b}$ são $-9 \times \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = (6, -3\sqrt{5})$ ou $9 \times \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = (-6, 3\sqrt{5})$

c) Os pontos A , B e C são colineares se e só se forem colineares, por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$
 $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(k+1, -2)$
 $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(1, -1)$
 $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares se e só se $-1 \times (k+1) = 1 \times (-2)$
 $-1 \times (k+1) = 1 \times (-2) \Leftrightarrow k+1 = 2 \Leftrightarrow k = 1$

273.

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{HD} + 2\overrightarrow{DG} = 2(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG}) = 2\overrightarrow{HG}$

Como as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(4,0)$ e $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, as coordenadas de $\overrightarrow{HG}$ são $(2,0)$

b) Tem-se $H + \overrightarrow{HG} = G$, pelo que as coordenadas de G são $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + (2,0) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$

De modo análogo ao utilizado para justificar a igualdade da alínea anterior, se justifica que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{FG}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{FG}$ são $(-1, -2)$

Tem-se $G + \overrightarrow{GF} = F$, pelo que as coordenadas de F são $\left(\frac{7}{2}, 2\right) + (1,2) = \left(\frac{9}{2}, 4\right)$

Tem-se $H + \overrightarrow{GF} = E$, pelo que as coordenadas de E são $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + (1,2) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$

c) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EG} = G - E$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{EG}$ são $\left(\frac{7}{2}, 2\right) - \left(\frac{5}{2}, 4\right) = (1, -2)$

e as coordenadas de $\overrightarrow{FC}$ são $\frac{1}{2} \times (1, -2) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Tem-se $F + \overrightarrow{FC} = C$, pelo que as coordenadas de C são $\left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = (5,3)$

Tem-se $F + \overrightarrow{CF} = B$, pelo que as coordenadas de B são $\left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (4,5)$

Tem-se $H + \overrightarrow{FC} = D$, pelo que as coordenadas de D são $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = (2,1)$

Tem-se $H + \overrightarrow{CF} = A$, pelo que as coordenadas de A são $\left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (1,3)$

274.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(3, -6)$. Então, o declive da reta AB

é igual a $-\frac{6}{3} = -2$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(-1,3)$, tem-se $3 = -2 \times (-1) + b$, ou seja, $b = 1$, pelo que a equação reduzida da reta AB é $y = -2x + 1$

A ordenada na origem da reta s é igual a $\frac{1}{3}$, pelo que a reta passa pelo ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

O declive da reta é igual a $-\frac{3}{2}$, pelo que o vetor de coordenadas $(2, -3)$ é um vetor diretor da reta.

Então, tem-se $s: (x, y) = \left(0, \frac{1}{3}\right) + k(2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

b) $0 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \geq 0 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x \geq -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2}x \leq \frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{9} \\ x \geq -\frac{34}{9} \end{cases} \quad x \in \left[-\frac{34}{9}, \frac{2}{9}\right]$

c) $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

O ponto tem coordenadas $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

275.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(-3, 2-a)$. Então, o declive da reta AB é dado por $\frac{2-a}{-3}$

Tem-se $\frac{2-a}{-3} > 0 \Leftrightarrow 2-a < 0 \Leftrightarrow a > 2$ $a \in]2, +\infty[$

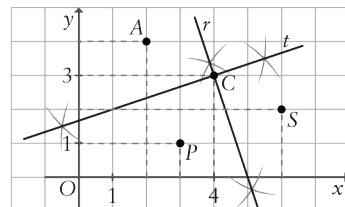
Pág. 282

276.

Na figura está representada a construção que permitiu determinar a localização do ponto C , que é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AP]$, $[PS]$ e $[AS]$

Foram assinalados, e/ou construídos, sucessivamente:

- Os pontos A , P e S num plano onde se instalou um referencial ortonormado xOy
- A reta r , mediatriz do segmento de reta $[PS]$
- A reta t , mediatriz do segmento de reta $[AP]$
- O ponto $C(4,3)$, ponto de interseção das retas t e r



Processo algébrico:

Seja $C(c_1, c_2)$ o ponto onde se deve localizar o candeeiro. O ponto C é o que satisfaz a condição

$\overline{AC} = \overline{PC} = \overline{SC}$, pelo que se trata do ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AP]$ e $[PS]$

$$\begin{cases} (c_1 - 2)^2 + (c_2 - 4)^2 = (c_1 - 3)^2 + (c_2 - 1)^2 \\ (c_1 - 3)^2 + (c_2 - 1)^2 = (c_1 - 6)^2 + (c_2 - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1^2 - 4c_1 + 4 + c_2^2 - 8c_2 + 16 = c_1^2 - 6c_1 + 9 + c_2^2 - 2c_2 + 1 \\ c_1^2 - 6c_1 + 9 + c_2^2 - 2c_2 + 1 = c_1^2 - 12c_1 + 36 + c_2^2 - 4c_2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4c_1 + 4 - 8c_2 + 16 = -6c_1 + 9 - 2c_2 + 1 \\ -6c_1 + 9 - 2c_2 + 1 = -12c_1 + 36 - 4c_2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 - 6c_2 = -10 \\ 6c_1 + 2c_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + 3c_2 \\ 6(-5 + 3c_2) + 2c_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + 3c_2 \\ 6(-5 + 3c_2) + 2c_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + 3c_2 \\ -30 + 18c_2 + 2c_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + 3c_2 \\ 20c_2 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + 3c_2 \\ c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 3 \end{cases} \quad C \text{ é o ponto de coordenadas } (4,3)$$

277.

a) Tem-se que $(0-3)^2 + (0-1)^2 = 10$ é uma proposição verdadeira, pelo que o ponto de coordenadas $(0,0)$ pertence à circunferência.

Tem-se:

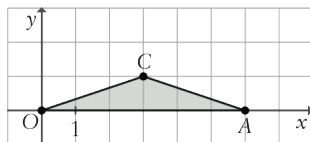
$$(x-3)^2 + (0-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x-3 = -3 \vee x-3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

O outro ponto da circunferência que pertence ao eixo das abcissas tem abcissa igual a 6.

b) $\overrightarrow{OC}$ é o vetor de coordenadas $(3,1)$. Então, o declive da reta OC é igual a $\frac{1}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{3}x$

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(3,1) - (6,0) = (-3,1)$. Então, o declive da reta AC é igual a $-\frac{1}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{3}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(6,0)$, tem-se $0 = -\frac{1}{3} \times 6 + b$, ou seja, $b = 2$,
pelo que a equação reduzida da reta AC é $y = -\frac{1}{3}x + 2$



Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado superior à reta de equação $y = 0$ (definido por $y \geq 0$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = \frac{1}{3}x$ (definido por $y \leq \frac{1}{3}x$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = -\frac{1}{3}x + 2$ (definido por $y \leq -\frac{1}{3}x + 2$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$y \geq 0 \wedge y \leq \frac{1}{3}x \wedge y \leq -\frac{1}{3}x + 2$$

278.

a) Tem-se: $(-1 - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + (y + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y + 1 = -3 \vee y + 1 = 3 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 2$

Como o ponto A tem ordenada negativa, as suas coordenadas são $(-1, -4)$ e C é o centro da circunferência, pelo que as suas coordenadas são $(3, -1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(3, -1) - (-1, -4) = (4, 3)$. Então, o declive da reta AC é igual a $\frac{3}{4}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(3, -1)$, tem-se $-1 = \frac{3}{4} \times 3 + b$, ou seja, $b = -\frac{13}{4}$,
pelo que a equação reduzida da reta AC é $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$

b) Tem-se que o conjunto de pontos representado é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O círculo de centro no ponto de coordenadas $(3, -1)$ e raio 5
(definido por $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 25$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$ (definido por $y \leq 0$)
- O semiplano fechado inferior à reta de equação $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$ (definido por $y \leq \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$)

Então, esse conjunto de pontos é definido analiticamente pela condição

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 25 \wedge y \leq 0 \wedge y \leq \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$$

c) Tem-se $B = C + \overrightarrow{AC}$, pelo que as coordenadas de B são $(3, -1) + (4, 3) = (7, 2)$

Seja D o ponto de coordenadas $(0, d_2)$, com $d_2 > 0$. Como o ponto D pertence à circunferência, tem-se $(0 - 3)^2 + (d_2 + 1)^2 = 25$

$(0 - 3)^2 + (d_2 + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (d_2 + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow d_2 + 1 = -4 \vee d_2 + 1 = 4 \Leftrightarrow d_2 = -5 \vee d_2 = 3$
Como $d_2 > 0$, as coordenadas de D são $(0, 3)$

$$\overline{DA} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{50} \quad \text{e} \quad \overline{DB} = \sqrt{(7 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{50}$$

Então, como $\overline{DA} = \overline{DB}$, D pertence à mediatriz de $\overline{AB}$

279.

a) Um ponto de partida para a formulação da conjectura pode ser dar conta de que a condição

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 \geq (x - 3)^2 + (y + 1)^2$$

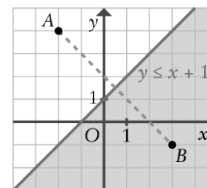
é equivalente a

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 4)^2} \geq \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2}$$

b) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 \geq (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \geq x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10y \geq -10x - 10 \Leftrightarrow y \leq x + 1$$



c) A condição define o semiplano fechado inferior em relação à mediatriz do segmento de reta $[AB]$

280.

O ponto A é o ponto de coordenadas $(1,1)$ e o ponto B é o ponto de coordenadas $(3,3)$

a) Seja P o ponto de coordenadas $(p_1, 2p_1)$. P pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ se e só se $\overline{PA} = \overline{PB}$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(1 - p_1)^2 + (1 - 2p_1)^2} = \sqrt{(3 - p_1)^2 + (3 - 2p_1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - p_1)^2 + (1 - 2p_1)^2 = (3 - p_1)^2 + (3 - 2p_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2p_1 + p_1^2 + 1 - 4p_1 + 4p_1^2 = 9 - 6p_1 + p_1^2 + 9 - 12p_1 + 4p_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2p_1 + 1 - 4p_1 = 9 - 6p_1 + 9 - 12p_1 \Leftrightarrow 12p_1 = 16 \Leftrightarrow p_1 = \frac{4}{3}$$

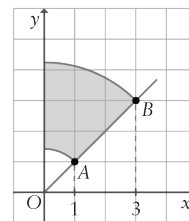
P é o ponto de coordenadas $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

b) Pretende-se determinar a área da região do plano representada na figura.

$$\text{Área da região} = \frac{1}{8} \times (\text{área do círculo de raio } [OB] - \text{área do círculo de raio } [OA]) =$$

$$= \frac{1}{8} \times (\pi \times \overline{OB}^2 - \pi \times \overline{OA}^2) =$$

$$= \frac{1}{8} \times (\pi \times (3\sqrt{2})^2 - \pi \times (1\sqrt{2})^2) = \frac{1}{8} (18\pi - 2\pi) = 2\pi \text{ (unidades de área)}$$



281.

a) $\overline{AB} = \sqrt{(3 + 5)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

O triângulo $[ABC]$ é escaleno.

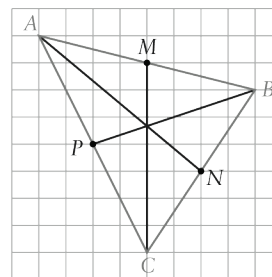
b) Sejam M , N e P , os pontos médios, respetivamente, dos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$ do triângulo $[ABC]$

Esta relação está ilustrada na figura ao lado onde se representaram, igualmente, as três medianas do triângulo.

O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (-1, 2)$

O ponto N tem coordenadas $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{1-5}{2}\right) = (1, -2)$

O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{-5-1}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (-3, -1)$



$\overrightarrow{AN} = N - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AN}$ são $(1, -2) - (-5, 3) = (6, -5)$. Então, o declive da reta AN é igual a $-\frac{5}{6}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{5}{6}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(-5, 3)$, tem-se $3 = -\frac{5}{6} \times (-5) + b$, ou seja, $b = -\frac{7}{6}$, pelo que a equação reduzida da reta AN é $y = -\frac{5}{6}x - \frac{7}{6}$

$\overrightarrow{BP} = P - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BP}$ são $(-3, -1) - (3, 1) = (-6, -2)$

Então, o declive da reta BP é igual a $\frac{1}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{1}{3}x + b$

Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $(3, 1)$, tem-se $1 = \frac{1}{3} \times 3 + b$, ou seja, $b = 0$,

pelo que a equação reduzida da reta BP é $y = \frac{1}{3}x$

As medianas de um triângulo interseitam-se no baricentro e o ponto de interseção é o ponto comum às retas que as contêm. Determinemos esse ponto:

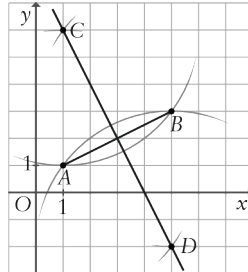
$$\begin{cases} y = -\frac{5}{6}x - \frac{7}{6} \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x = -\frac{5}{6}x - \frac{7}{6} \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -5x - 7 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

O baricentro do triângulo tem coordenadas $(-1, -\frac{1}{3})$

Pág. 283

282.

Tal como a figura pretende ilustrar, os pontos C e D são os pontos da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ cujas distâncias a A e a B são iguais a 5.



$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= (x - 5)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y &= -8x + 32 \Leftrightarrow y = -2x + 8 \end{aligned}$$

pelo que uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = -2x + 8$

Então, os pontos C e D são os pontos cujas coordenadas satisfazem a condição

$$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tem-se: } & \begin{cases} y = -2x + 8 \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ (x-1)^2 + (-2x+8-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ (x-1)^2 + (-2x+7)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 28x + 49 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ 5x^2 - 30x + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ x = 1 \vee x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

As coordenadas dos centros das circunferências são $(1,6)$ e $(5,-2)$

As equações reduzidas das circunferências são

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \text{e} \quad (x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$$

283. Tem-se: $P(0,2,2)$, $Q(1,1,2)$, $R(2,1,1)$ e $S(0,3,1)$

284. Tem-se: $A(0,0,2)$, $B(2,2,0)$, $C(2,-1,1)$, $D(-2,0,1)$, $E(0,-1,2)$, $F(-2,2,1)$, $G(1,2,-1)$, $H(-1,-1,1)$, $I(-2,1,2)$ e $J(1,3,1)$

285.

a₁) Tem-se: $H(6,0,-6)$, $C(3,3,0)$ e $V(0,3,12)$

a₂) BFE é o plano paralelo ao plano xOz que passa no ponto $B(6,6,0)$, pelo que é definido pela equação $y = 6$

a₃) HE é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto $H(6,0,-6)$, pelo que é definida pela condição $x = 6 \wedge z = -6$

a₄) A condição define o conjunto de pontos pertencentes à reta definida por $x = 6 \wedge y = 0$ (a reta AH) cujas cotas estão compreendidas entre -6 e 0 . A condição define, portanto, a aresta $[AH]$

a₅) O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(3,3,-3)$ e o raio é igual a 3 , pelo que uma condição que define a esfera é $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \leq 9$

a₆) Descrição da construção que permitiu representar, na figura, a interseção do plano VHE com o cubo:

1. Traçou-se a reta r que é a interseção do plano VHE com o plano yOz
2. Prolongou-se a aresta $[FD]$ que intersectou a reta r no ponto M
3. Traçou-se o segmento de reta $[EM]$ que intersectou a aresta $[BD]$ no ponto N
4. Traçou-se o segmento de reta $[NP]$ (segmento paralelo a $[EH]$ e que passa por H)
5. Traçou-se o segmento de reta $[PH]$

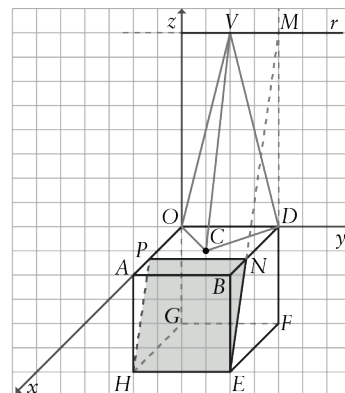
Cálculo da área da secção obtida

Tem-se:

$$\frac{MF}{MD} = \frac{EF}{ND} \Leftrightarrow \frac{18}{12} = \frac{6}{ND} \Leftrightarrow \overline{ND} = 4 \text{ pelo que } \overline{BN} = 2$$

$$\overline{NE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BN}^2 \Leftrightarrow \overline{NE}^2 = 36 + 4 \Leftrightarrow \overline{NE} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Área} = \overline{BN} \times \overline{NE} = 6 \times 2\sqrt{10} = 12\sqrt{10} \text{ (unidades de área)}$$



b) Seja a a aresta do cubo. Tem-se $\overline{AD} = \sqrt{2}a$ pelo que $\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$\text{Então: Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} \times 2a = \frac{1}{3} \times \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{2} \times 2a = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{2}a^2}{2} \times 2a = \frac{1}{6}a^3$$

pelo que Volume da pirâmide = $\frac{1}{6}$ do volume da cubo

Pág. 284

286.

a) Os extremos do segmento de reta são os pontos do eixo Ox que pertencem à superfície esférica definida por $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$

$$\text{Tem-se: } (x+3)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2 = 25 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = -\sqrt{20} \vee x+3 = \sqrt{20} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{20} \vee x+3 = -3 + \sqrt{20}$$

Os extremos do segmento são os pontos do eixo Ox cujas coordenadas são $(-3 - \sqrt{20}, 0, 0)$ e $(-3 + \sqrt{20}, 0, 0)$, pelo que o comprimento do segmento de reta por eles definido é igual a

$$|-3 - \sqrt{20} - (-3 + \sqrt{20})| = 2\sqrt{20}$$

b) Na figura ao lado está representada, na sua projeção ortogonal sobre o plano yOz , a situação descrita. Tal como a figura pretende ilustrar, a interseção da esfera E com o plano de equação $y = -2$ é o círculo de centro no ponto $A(-3, -2, 1)$ e raio $\overline{AP}$ e que está contido no plano de equação $y = -2$

Tem-se:

$$\overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CP}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow \overline{AP} = 3$$

Uma condição que define o círculo é, então,

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \leq 9 \wedge y = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (z-1)^2 \leq 9 \wedge y = -2$$

c) Como o centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-3, 2, 1)$ e o raio da esfera é 5, o diâmetro da esfera que é paralelo ao eixo Ox tem extremos nos pontos de coordenadas $(-8, 2, 1)$ e $(2, 2, 1)$

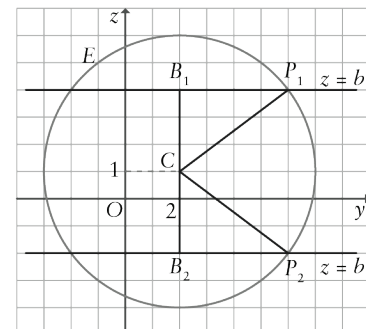
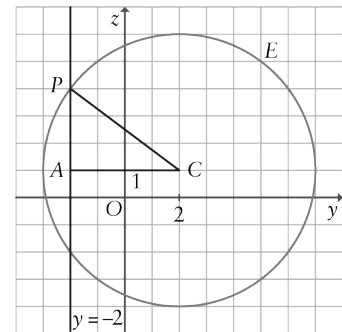
Então, para $a < -8$, bem como para $a > 2$, qualquer plano de equação $x = a$ não tem pontos comuns com a esfera.

d) Na figura ao lado está representada, na sua projeção ortogonal sobre o plano yOz , a situação descrita. Tal como a figura pretende ilustrar, as interseções da esfera E com os planos de equação $z = b$ são os círculos de centros nos pontos B_1 e B_2 e cujo raio é 4 (pois têm área igual a 16π) e que estão contidos nos planos de equação $z = b$

Tem-se:

$$\overline{B_1C}^2 + \overline{B_1P_1}^2 = \overline{CP_1}^2 \Leftrightarrow \overline{B_1C}^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow \overline{B_1C} = 3$$

$$\text{Então, } b = 1 - 3 \vee b = 1 + 3 \Leftrightarrow b = -2 \vee b = 4$$



287.

a) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $(b+2)^2 = 0 \wedge \frac{a^2-1}{1} = \frac{3}{1}$

$$\text{Ora, } (b+2)^2 = 0 \wedge \frac{a^2-1}{1} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow b = -2 \wedge a^2 = 4 \Leftrightarrow b = -2 \wedge (a = -2 \vee a = 2)$$

b) Para $a = 2$, $\vec{u}$ é o vetor de coordenadas $(3,0,3)$

Seja A o ponto de coordenadas (a_1, a_2, a_3) ; $A + \vec{u}$ o ponto de coordenadas $(a_1 + 3, a_2, a_3 + 3)$

Este ponto pertence ao semieixo negativo das cotas se e só se $a_1 + 3 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 + 3 < 0$,
ou seja, se e só se $a_1 = -3 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 < -3$

As coordenadas de A podem ser, por exemplo, $(-3, 0, -4)$

288.

a) Começamos por determinar a aresta do cubo.

$$\overline{DA} = \sqrt{(3+3)^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

O volume do cubo é igual a 343 unidades de volume.

$$\mathbf{b)} \quad H = E + \overrightarrow{EH} = E + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{AD} \text{ são } (-3, 3, 6) - (3, 5, 3) = (-6, -2, 3)$$

$$\text{Então, as coordenadas de } H \text{ são } (1, 2, -3) + (-6, -2, 3) = (-5, 0, 0)$$

A afirmação é verdadeira, pois o ponto de coordenadas $(-5, 0, 0)$ pertence ao eixo das abcissas.

$$\mathbf{c)} \quad (x, y, z) = (3, 5, 3) + k(-6, -2, 3), k \in \mathbb{R}$$

d) GBA é o plano mediador do segmento de reta $[DE]$, pelo que é definido pela condição

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2$$

Tem-se:

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 12z + 36 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 9 - 6y + 9 - 12z + 36 = -2x + 1 - 4y + 4 + 6z + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 2y - 18z = -40 \Leftrightarrow -4x + y + 9z = 20 \Leftrightarrow$$

e) O raio da superfície esférica é igual a $\overline{DF}$, ou seja, é igual à diagonal espacial do cubo.

Como a aresta do cubo é igual a 7, a diagonal espacial do cubo é igual a $7\sqrt{3}$

A equação reduzida da superfície esférica é $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = (7\sqrt{3})^2$

ou seja $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 147$

289.

a) A abscissa de B é 2 e a cota de B é 4.

$$\text{Área de } [ABCD] = 21 \Leftrightarrow \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} = 21 \Leftrightarrow \frac{6 + \overline{AB}}{2} \times 4 = 21 \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{9}{2}, \text{ pelo que a ordenada de } B$$

é igual a $\frac{9}{2}$. Então, B é o ponto de coordenadas $(2, \frac{9}{2}, 4)$

A face $[ABFE]$ é definida pela condição $z = 4 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{9}{2}$

$$\overrightarrow{BC} = C - B, \text{ pelo que as coordenadas de } \overrightarrow{BC} \text{ são } (2, 6, 0) - (2, \frac{9}{2}, 4) = (0, \frac{3}{2}, -4)$$

Sendo assim, a aresta $[BC]$ é definida pela condição $(x, y, z) = (2, \frac{9}{2}, 4) + k(0, \frac{3}{2}, -4), k \in [0, 1]$

b) G é o ponto de coordenadas $(-2, 6, 0)$; um vetor diretor da reta GF é o vetor $\overrightarrow{BC}$

Então, a reta GF é definida pela condição $(x, y, z) = (-2, 6, 0) + k(0, \frac{3}{2}, -4), k \in \mathbb{R}$

Sejam $(a, 0, c)$ as coordenadas do ponto em que a reta GF interseja o plano xOz

$$\text{Tem-se} \quad (a, 0, c) = (-2, 6, 0) + k(0, \frac{3}{2}, -4) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 0 = 6 + \frac{3}{2}k \\ c = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ k = -4 \\ z = 16 \end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $(-2, 0, 16)$

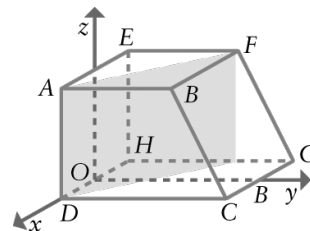
c) A interseção do sólido com o plano DAF é o retângulo $[DAFP]$

Tem-se:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = \frac{81}{4} + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF}^2 = \frac{145}{4} \Leftrightarrow \overline{AF} = \sqrt{\frac{145}{4}} \Leftrightarrow \overline{AF} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\text{Área de } [DAFP] = \overline{AD} \times \overline{AF} = 4 \times \frac{\sqrt{145}}{2} = 2\sqrt{145} \text{ cm}^2$$



Pág. 285

290.

a) Como $a = 3$ e $a + b = 1$, conclui-se que $b = -2$, pelo que se tem: $F(3, -2, 0)$, $E(3, -2, -2)$ e $C(-3, 3, -2)$

A é o ponto de coordenadas $(3, 3, 0)$

Seja c a cota do ponto I ; I é o ponto de coordenadas $(3, 0, c)$, com $c > 0$

Tem-se:

$$\overline{AI} = \overline{AF} \Leftrightarrow \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2 + (c-0)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{9+c^2} = 5 \Leftrightarrow 9+c^2 = 25 \Leftrightarrow c = 4$$

Então, I é o ponto de coordenadas $(3, 0, 4)$

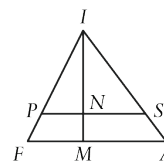
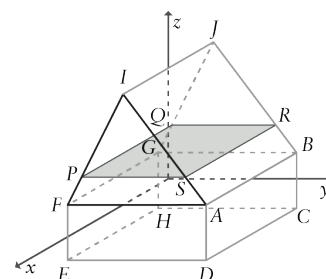
b) Na figura ao lado está representada, a sombreada, a interseção do sólido com o plano de equação $z = 1$. Trata-se do retângulo $[PQRS]$, constituído pelos pontos do espaço contidos no plano de equação $z = 1$, cujas abcissas estão compreendidas entre -3 e 3 e cujas ordenadas estão compreendidas entre -2 e 3

Cálculo da área do retângulo $[PQRS]$

Os triângulos $[IFA]$ e $[IPS]$ são semelhantes, pelo que

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{IN}}{\overline{IM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PS}}{5} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \overline{PS} = \frac{15}{4}$$

$$\text{Área} = \overline{PS} \times \overline{SR} = \frac{15}{4} \times 6 = 22,5 \text{ unidades de área}$$



c) A é o ponto de coordenadas $(3, 3, 0)$; J é o ponto de coordenadas $(-3, 0, 4)$; um vetor diretor da reta AJ é o vetor $\overrightarrow{JA}$

$\overrightarrow{JA} = A - J$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{JA}$ são $(3, 3, 0) - (-3, 0, 4) = (6, 3, -4)$, pelo que a reta AJ é definida pela condição $(x, y, z) = (3, 3, 0) + k(6, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

Sejam $(0, b, c)$ as coordenadas do ponto em que a reta AJ intersecta o plano yOz

$$\text{Tem-se } (0, b, c) = (3, 3, 0) + k(6, 3, -4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + 6k \\ b = 3 + 3k \\ c = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $(0, \frac{3}{2}, 2)$

d) $x = 3 \wedge y = 0$

e) Volume = área do triângulo $[IFA] \times \overline{IJ} = \frac{5 \times 4}{2} \times 6 = 60$ unidades de volume.

291.

Seja $P(x, y)$ um ponto do plano.

Uma condição que traduz o problema é $\overline{PD} = 2 \overline{PE}$

Vamos traduzir esta condição utilizando as coordenadas dos pontos P , D e E .

$$\overline{PD} = 2 \overline{PE} \Leftrightarrow \sqrt{(x - (-5))^2 + (y - 4)^2} = 2 \times \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x + 5)^2 + (y - 4)^2} \right)^2 = \left(2 \times \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 4 \times [(x - 1)^2 + (y - 4)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 4 \times [x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 32y + 64 \Leftrightarrow$$

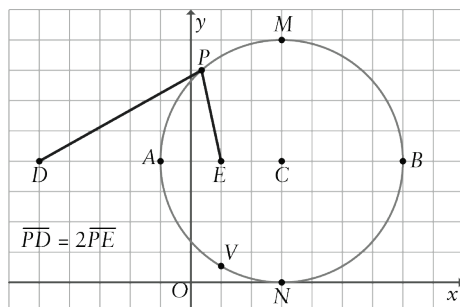
$$\Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 3y^2 + 24y = 27 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y = -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 - 8y) = 9 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 - 9 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$$

Então, o conjunto de pontos cuja medida da distância ao ponto $D(-5, 4)$ é o dobro da medida da distância ao ponto $E(1, 4)$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(3, 4)$ e cujo raio é igual a 4.

A figura abaixo ilustra a situação descrita.



292.

Como $x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$, podemos concluir que cada um dos pontos, $P(a, b)$, da reta definida por esta equação, tem coordenadas $(a, 5 - a)$

Como H é o ponto de coordenadas $(1, 3)$, para cada um dos pontos $P(a, 5 - a)$, o ponto médio, M , do segmento de reta $[PH]$ é o ponto de coordenadas $M\left(\frac{a+1}{2}, \frac{5-a+3}{2}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{8-a}{2}\right)$

Determinemos uma relação entre as coordenadas do ponto M :

Como $x = \frac{a+1}{2}$, tem-se $a = 2x - 1$, pelo que, como $y = \frac{8-a}{2}$, vem $y = \frac{8-(2x-1)}{2}$ ou seja $y = -x + \frac{9}{2}$

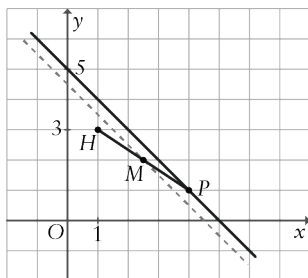
Então, como, para cada ponto P da reta definida por $x + y = 5$, o ponto médio, M , do segmento de reta $[PH]$

satisfaz a condição $y = -x + \frac{9}{2}$, podemos concluir que o conjunto dos pontos médios dos segmentos

de reta cujos extremos são o ponto $H(1, 3)$ e cada um dos pontos da reta definida por $x + y = 5$

é a reta definida pela equação $y = -x + \frac{9}{2}$

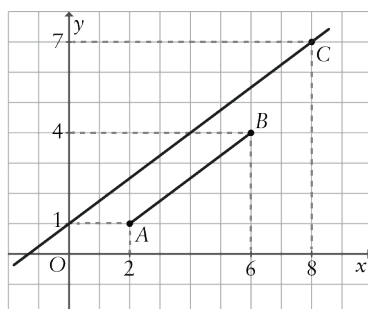
A figura abaixo ilustra a situação descrita.



293.

a) Dado que as bases do trapézio são os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$, o vértice D pertence à reta, DC , paralela a $[AB]$ e que passa por C .

A figura abaixo pretende ilustrar a situação:



Determinemos a equação dessa reta:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 4) - (2, 1) = (4, 3)$$

Como $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta DC , o declive desta reta é igual a $\frac{3}{4}$, pelo que se tem $y = \frac{3}{4}x + b$

Como o ponto C pertence à reta, vem $7 = \frac{3}{4} \times 8 + b \Leftrightarrow b = 1$

Então, uma equação da reta DC é $y = \frac{3}{4}x + 1$

Seja a a abcissa do ponto D . Como D pertence à reta de equação $y = \frac{3}{4}x + 1$, tem-se que as coordenadas do ponto D são $(a, \frac{3}{4}a + 1)$

Procuramos, então, os valores de a para os quais se tem $\overline{CD} = 2\overline{AB}$:

Como $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, vamos procurar os valores de a para os quais se tem $\overline{CD} = 10$

$$\overline{CD} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(a - 8)^2 + (\frac{3}{4}a + 1 - 7)^2} = 10 \Leftrightarrow (a - 8)^2 + (\frac{3}{4}a - 6)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

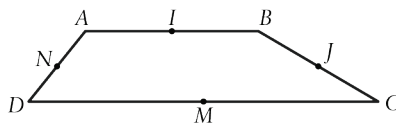
$$\Leftrightarrow a^2 - 16a + 64 + \frac{9}{16}a^2 - 9a + 36 = 100 \Leftrightarrow \frac{25}{16}a^2 - 25a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(\frac{25}{16}a - 25) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{25}{16}a - 25 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 16$$

Então, como D tem coordenadas $(a, \frac{3}{4}a + 1)$, podemos concluir que:

- se $a = 0$, o vértice D tem coordenadas $(0, 1)$
- se $a = 16$, o vértice D tem coordenadas $(16, 13)$

b) Na figura está desenhado o trapézio $[ABCD]$ e, nele assinalados, os pontos I, J, M e N , pontos médios dos lados $[AB], [BC], [CD]$ e $[DA]$, respectivamente.



Para mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos I, J, M e N é um paralelogramo, basta mostrar que $\overrightarrow{NI}$ é colinear a $\overrightarrow{MJ}$ e que $\overrightarrow{IJ}$ é colinear a $\overrightarrow{NM}$

Determinemos as coordenadas dos pontos I, J, M e N :

$$I\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(4, \frac{5}{2}\right); J\left(\frac{6+8}{2}, \frac{7+4}{2}\right) = \left(7, \frac{11}{2}\right); M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = (4, 4); N\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1, 1)$$

Então, tem-se:

$$\overrightarrow{NI} = I - N = \left(4, \frac{5}{2}\right) - (1, 1) = \left(3, \frac{3}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{MJ} = J - M = \left(7, \frac{11}{2}\right) - (4, 4) = \left(3, \frac{3}{2}\right), \quad \text{pelo que } \overrightarrow{NI} \text{ é colinear a } \overrightarrow{MJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(7, \frac{11}{2}\right) - \left(4, \frac{5}{2}\right) = (3, 3) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{NM} = M - N = (4, 4) - (1, 1) = (3, 3) \quad \text{pelo que } \overrightarrow{IJ} \text{ é colinear a } \overrightarrow{NM}$$

Está provado que o quadrilátero $[IJMN]$ é um paralelogramo.

294.

Na figura está representado, num plano em que se instalou um referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 10$, o ponto $P(0, -10)$ e as retas t e s , retas que passam por P e são tangentes à circunferência nos pontos A e B , respectivamente. Na figura está igualmente representado o segmento de reta $[BM]$, altura do triângulo $[OPB]$ relativa à hipotenusa. Seja B o ponto de coordenadas (b_1, b_2) com $b_1 > 0$ e $b_2 < 0$

O triângulo $[OBP]$ é retângulo em B .

Ora, a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa decompõe o triângulo em dois triângulos semelhantes a ele, pelo que se tem, da relação de semelhança entre os triângulos $[OPB]$ e $[OBM]$, $\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$

$$\text{Tem-se: } \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OM}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \overline{OM} = 1 \text{ pelo que } b_2 = -1$$

Como o ponto B pertence à circunferência, tem-se $(b_1)^2 + (-1)^2 = 10$, pelo que, como $b_1 > 0$, $b_1 = 3$

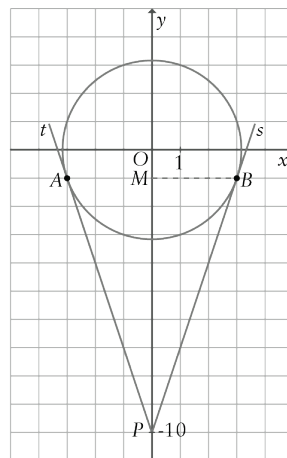
Então, o ponto B é o ponto de coordenadas $(3, -1)$

$$\text{Seja } m \text{ o declive da reta } s. \text{ Tem-se } m = \frac{-1 - (-10)}{3 - 0} = 3$$

Como a reta s passa no ponto P , a sua ordenada na origem é -10 .

Então, a equação reduzida de s é $y = 3x - 10$

De modo análogo se mostra que a equação reduzida de t é $y = -3x - 10$



295.

a) O tetraedro é regular porque as suas arestas, sendo diagonais faciais do cubo, são iguais.

b) Ponto C :

Tem-se $C = B + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AD}$ são $(-3, 1, 0)$

Então, as coordenadas de C são $(4, 3, 2) + (-3, 1, 0) = (1, 4, 2)$

Ponto F :

Tem-se $F = E + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1, 3, 0)$

Então, as coordenadas de F são $(3, 0, 2 + \sqrt{10}) + (1, 3, 0) = (4, 3, 2 + \sqrt{10})$

Ponto G :

Tem-se $G = F + \overrightarrow{AD}$

Então, as coordenadas de G são $(4, 3, 2 + \sqrt{10}) + (-3, 1, 0) = (1, 4, 2 + \sqrt{10})$

Ponto H :

Tem-se $H = E + \overrightarrow{AD}$

Então, as coordenadas de H são $(3, 0, 2 + \sqrt{10}) + (-3, 1, 0) = (0, 1, 2 + \sqrt{10})$

c) $\overrightarrow{CE} = E - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CE}$ são $(3, 0, 2 + \sqrt{10}) - (1, 4, 2) = (2, -4, \sqrt{10})$

Então, as equações paramétricas da reta EC são, por exemplo,
$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 4k \\ z = 2 + \sqrt{10}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

d) $\overrightarrow{GE} = E - G$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{GE}$ são $(3, 0, 2 + \sqrt{10}) - (1, 4, 2 + \sqrt{10}) = (2, -4, 0)$

Então, o segmento de reta $[EG]$ pode ser definido pela condição

$$(x, y, z) = (1, 4, 2 + \sqrt{10}) + k(2, -4, 0), k \in [0, 1]$$

Pág. 286

296.

a) Ponto H :

$\overrightarrow{VF} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{EF}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{VF}$ são $(1, -1, -3) + (0, 2, 0) = (1, 1, -3)$

Tem-se $F = V + \overrightarrow{VF}$

Então, as coordenadas de F são $(1, 1, 10) + (1, 1, -3) = (2, 2, 7)$

Ponto G :

Tem-se $G = V + \overrightarrow{VG}$

Então, as coordenadas de G são $(1, 1, 10) + (-1, 1, -3) = (0, 2, 7)$

Vetor $\overrightarrow{VH}$:

Tem-se $\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{VG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{VG} + \overrightarrow{FE}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{VH}$ são $(-1, 1, -3) + (0, -2, 0) = (-1, -1, -3)$

b) Vetor $\overrightarrow{VB}$:

Tem-se $\overrightarrow{EF} = 2$ e $\overrightarrow{AB} = 6$, pelo que o triângulo $[VAB]$ é o transformado do triângulo $[VEF]$ por meio de uma semelhança de razão 3. Então, $\overrightarrow{VB} = 3 \times \overrightarrow{VF}$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{VB}$ são $(3, 3, -9)$

Ponto D :

Tem-se $D = V + 3 \times \overrightarrow{VH}$

Então, as coordenadas de D são $(1, 1, 10) + 3 \times (-1, -1, -3) = (-2, -2, 1)$

297.

Tem-se, de acordo com a figura ao lado:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} \text{ e } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$$

Adicionando, membro a membro, obtém-se:

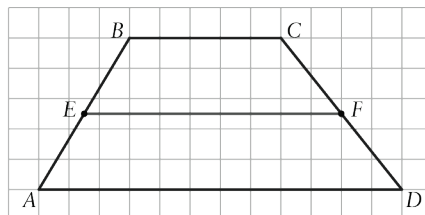
$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF} = \\ = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0} \text{ e, portanto}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

Como os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, o vetor $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ e, portanto, o vetor

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

é colinear quer com $\overrightarrow{AD}$ quer com $\overrightarrow{BC}$. Por outro lado, como $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares e com o mesmo sentido, tem-se: $\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{EF}\| = \left\| \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \right\| = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AD}\| + \|\overrightarrow{BC}\|) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$



298.

Na figura, está representado, em referencial cartesiano, o segmento de reta $[AB]$ e a reta s , reta que passa por A e é perpendicular a $[AB]$. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A , o ponto C pertence a s .

Como $\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ e o triângulo tem área 15, tem-se:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = 15 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} \times \overline{AC} = 30 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{15}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\sqrt{5}$$

Determinação de um vetor colinear com $\overrightarrow{AC}$

A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é definida por $(x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+3)^2$

Tem-se:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8y = 4x + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Então, o declive da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é igual a $-\frac{1}{2}$, pelo que um vetor diretor de s é, por exemplo, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(2, -1)$

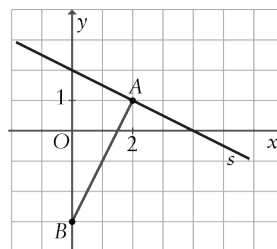
Então, como $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\overrightarrow{AC}$ é um vetor colinear com $\vec{u}$ tal que $\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5}$, tem-se $\overrightarrow{AC} = 3\vec{u}$

ou $\overrightarrow{AC} = -3\vec{u}$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(6, -3)$ ou $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(-6, 3)$

Tem-se $C = A + \overrightarrow{AC}$, pelo que as coordenadas de C são $(2, 1) + (6, -3) = (8, -2)$

ou são $(2, 1) + (-6, 3) = (-4, 4)$

Como a abcissa de C é negativa, C é o ponto de coordenadas $(-4, 4)$



299.

a) Ponto D :

$$\text{Tem-se } D = C + \overrightarrow{BA}$$

$\overrightarrow{BA} = A - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BA}$ são $(3, -4)$

Então, as coordenadas de D são $(8, 10) + (3, -4) = (11, 6)$

Ponto F :

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(9,12)$. Então, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

Então, como $\|\overrightarrow{AF}\| = 10$ e $\overrightarrow{AF}$ é um vetor colinear e com o mesmo sentido de $\overrightarrow{AC}$, tem-se $\overrightarrow{AF} = \frac{10}{15}\overrightarrow{AC}$, pelo que $\overrightarrow{AF}$ tem coordenadas $(9 \times \frac{2}{3}, 12 \times \frac{2}{3}) = (6,8)$

Tem-se $F = A + \overrightarrow{AF}$

Então, as coordenadas de F são $(-1, -2) + (6,8) = (5,6)$

b) O triângulo $[ABC]$ é a interseção de três conjuntos de pontos:

- O semiplano fechado superior em relação à reta AB
- O semiplano fechado inferior em relação à reta BC
- O semiplano fechado superior em relação à reta AC

Equação da reta AB :

$\overrightarrow{BA}$ é o vetor de coordenadas $(3, -4)$. Então, o declive da reta AB é igual a $-\frac{4}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{4}{3}x + b$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, -2)$, tem-se $-2 = -\frac{4}{3} \times (-1) + b$, pelo que $b = -\frac{10}{3}$.

A equação reduzida de AB é $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

Equação da reta BC :

$\overrightarrow{BC} = C - B$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são $(12,8)$. Então, o declive da reta BC é igual a $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{2}{3}x + b$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-4,2)$, tem-se $2 = \frac{2}{3} \times (-4) + b$, pelo que $b = \frac{14}{3}$

A equação reduzida de BC é $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

Equação da reta AC :

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(9,12)$. Então, o declive da reta AC é igual a $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{4}{3}x + b$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, -2)$, tem-se $-2 = \frac{4}{3} \times (-1) + b$, pelo que $b = -\frac{2}{3}$

A equação reduzida de AC é $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

Uma condição que define o triângulo é, então

$$y \geq -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \wedge y \leq \frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \wedge y \geq \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

c) Cinco minutos depois de iniciarem o seu deslocamento, os pontos P e Q estão à distância de cinco centímetros do ponto A . Seja P_0 o ponto da semirreta $\overrightarrow{AB}$ cuja distância até A é igual a cinco.

Seja Q_0 o ponto da semirreta $\overrightarrow{AC}$ cuja distância até A é igual a cinco.

Determinemos as coordenadas dos pontos P_0 e Q_0 .

Ponto P_0 :

$\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(-3,4)$. Então, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, pelo que o ponto P_0 coincide com B .

Então, as coordenadas de P_0 são $(-4,2)$

Ponto Q_0 :

$\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(9,12)$. Então, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

Então, como $\|\overrightarrow{AQ_0}\| = 5$ e $\overrightarrow{AQ_0}$ é um vetor colinear e com o mesmo sentido de $\overrightarrow{AC}$, tem-se $\overrightarrow{AQ_0} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, pelo que $\overrightarrow{AF}$ tem coordenadas $(9 \times \frac{1}{3}, 12 \times \frac{1}{3}) = (3, 4)$

Tem-se $Q_0 = A + \overrightarrow{AQ_0}$

Então, as coordenadas de Q_0 são $(-1, -2) + (3, 4) = (2, 2)$

Tem-se, então $d(P_0, Q_0) = \sqrt{(2+4)^2 + (2-2)^2} = 6 \text{ cm}$

300.

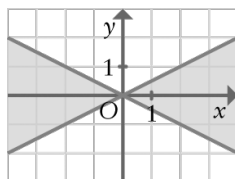
$$x^2 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x \\ y \geq -\frac{1}{2}x \end{cases} \vee \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x \\ y \leq -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

O conjunto de pontos definido por esta condição é a reunião de dois conjuntos de pontos:

- A interseção do semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ com o semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x$ (definido por $y \leq \frac{1}{2}x \wedge y \geq -\frac{1}{2}x$)
- A interseção do semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ com o semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x$ (definido por $y \geq \frac{1}{2}x \wedge y \leq -\frac{1}{2}x$)

A representação deste conjunto de pontos num plano onde está instalado um referencial o.n. xOy é:



301.

Coordenadas de A :

O ponto A é a interseção da reta EA com o plano ABC , pelo que as suas coordenadas são a solução da condição $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1), k \in \mathbb{R} \wedge x - 2y - 2z + 2 = 0$

Tem-se: $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1), k \in \mathbb{R} \wedge x - 2y - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -3 + k \wedge y = 3 - 5k \wedge z = 1 + k \wedge x - 2y - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + k \wedge y = 3 - 5k \wedge z = 1 + k \wedge -3 + k - 2(3 - 5k) - 2(1 + k) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + k \wedge y = 3 - 5k \wedge z = 1 + k \wedge -3 + k - 6 + 10k - 2 - 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + k \wedge y = 3 - 5k \wedge z = 1 + k \wedge 9k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + k \wedge y = 3 - 5k \wedge z = 1 + k \wedge k = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -3 + 1 \wedge y = 3 - 5 \wedge z = 1 + 1 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = -2 \wedge z = 2$$

As coordenadas de A são $(-2, -2, 2)$

Área da base da pirâmide:

$$\overline{AF} = \sqrt{(-2+2)^2 + (1+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 18 + 18 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36$$

Área da base da pirâmide = 36 unidades de área

Altura da pirâmide:

Tem-se $\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{EF} \Leftrightarrow 36 = \frac{1}{3} \times 36 \times \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{EF} = 3$

A altura da pirâmide é igual a 3 unidades de comprimento

Comprimento de $[AE]$:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 18 + 9 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 27 \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Coordenadas do ponto E :

Um vetor diretor da reta AE é, por exemplo, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(1, -5, 1)$

Então, como $\|\vec{u}\| = \sqrt{27}$ e $\overrightarrow{AE}$ é um vetor colinear com $\vec{u}$ tal que $\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{27}$, tem-se $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$

ou $\overrightarrow{AE} = -\vec{u}$, pelo que $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(1, -5, 1)$ ou $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(-1, 5, -1)$

Tem-se $E = A + \overrightarrow{AE}$, pelo que as coordenadas de E são $(-2, -2, 2) + (-1, 5, -1) = (-3, 3, 1)$

ou são $(-2, -2, 2) + (1, -5, 1) = (-1, -7, 3)$

Como a ordenada de E é positiva, E é o ponto de coordenadas $(-3, 3, 1)$

Tema 4 | Funções Reais de Variável Real

Atividades «Será que...?»

Pág. 9

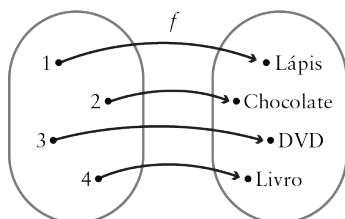
SERÁ QUE...? Relação entre duas variáveis

1. A venda de todos os bilhetes permite obter 2400 euros (4×600). Como a realização do espetáculo envolve 1200 euros de despesas, o lucro obtido no caso de se venderem todos os bilhetes é 1200 euros ($2400 - 1200$).
2. Para não haver prejuízo, a organização tem de obter pelo menos 1200 euros com a venda dos bilhetes. Como cada bilhete é vendido a 4 euros e $1200 : 4 = 300$, têm de ser vendidos, no mínimo, 300 bilhetes de modo a não haver prejuízo.
3. O lucro obtido é a diferença entre a quantia realizada com a venda dos bilhetes e a totalidade de despesas. A venda de n bilhetes a 4 euros permite obter $4n$ euros e, portanto, o lucro correspondente é dado, em euros, por $4n - 1200$

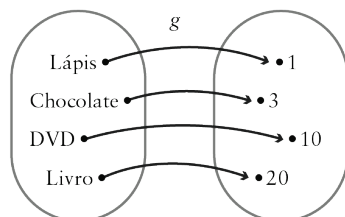
Pág. 19

SERÁ QUE...? Tiro ao alvo

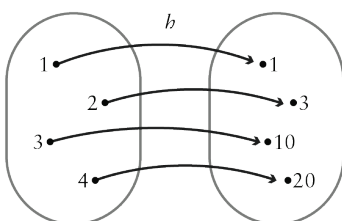
1.



2.



3.



Pág. 69

SERÁ QUE...? Função decrescente

Seja f uma função real de variável real e seja A um conjunto contido em D_f .

Diz-se que f é (estritamente) **decrescente** em A se dados dois quaisquer objetos a e b , pertencentes a A , se b é maior do que a , então a imagem de b é menor do que a imagem de a .

Simbolicamente: $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) < f(a)$

Diz-se que f é decrescente em sentido lato em A se dados dois quaisquer objetos a e b , pertencentes a A , se b é maior do que a , então a imagem de b é menor ou igual que a imagem de a .

Simbolicamente: $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

Pág. 71

SERÁ QUE...? Máximos e maximizantes

Seja f uma função e seja a um valor pertencente ao domínio de f .

Diz-se que f atinge um máximo relativo (ou local) em a se existir uma vizinhança de a tal que a imagem de a é a maior das imagens, considerando todos os objetos pertencentes a essa vizinhança.

Portanto, f atinge um máximo relativo em a se existir um número real positivo r tal que

$$\forall x \in V_r(a) \cap D_f, f(a) \geq f(x).$$

Diz-se que $f(a)$ é um máximo relativo (ou local) da função f e que a é um maximizante de f .

Seja f uma função real de variável real e seja $a \in D_f$. Diz-se que $f(a)$ é o máximo absoluto da função se $f(a)$ for a maior das imagens.

Portanto, $f(a)$ é o máximo absoluto da função f se $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$.

Pág. 85

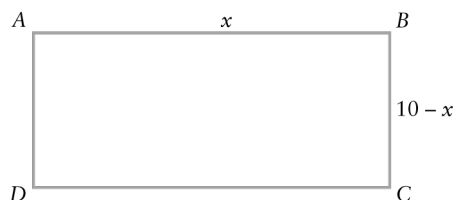
SERÁ QUE...? Função quadrática

Tal como a figura ao lado sugere, a solução deste problema é $A = x(10 - x)$.

Tem-se:

$$x(10 - x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$$

Portanto, $A = -x^2 + 10x$.



Exercícios propostos

Capítulo 1 | Generalidades acerca de funções

Pág. 9

1.

a) $\{(1,0), (1,-1), (2,0), (2,-1), (3,0), (3,-1)\}$

b) $\{(2,0), (3,-1)\}$

c) $\{(0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1)\}$

Pág. 13

2.

Por exemplo, $\{(1,0), (2,-1), (3,0)\}$

3.

Tem-se: $f(1) = 1$, pois 1 não é um número primo

$f(2) = 1$, pois 2 é um número primo

$f(3) = 1$, pois 3 é um número primo

$f(4) = 4$, pois 4 não é um número primo

Então, $D'_f = \{1,4\}$

Pág. 15

4.

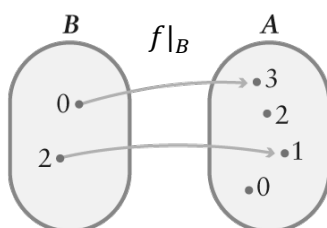
As funções f e g não são iguais porque, apesar de terem o mesmo domínio (A) e a mesma regra de transformação, não têm o mesmo conjunto de chegada.

5.

a)

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0

b)



Tem-se $D'_{f|B} = \{1,3\}$

Pág. 19

6.

a₁) Por exemplo:

x	1	2	3
$f(x)$	4	5	6

a₂) Por exemplo:

x	1	2	3
$f(x)$	5	5	6

b) Para que a função seja injetiva, não pode haver dois objetos com a mesma imagem, pelo que uma das imagens tem que ser 4, outra tem que ser 5 e a outra tem que ser 6. Então, o contradomínio tem que ser igual ao conjunto de chegada, pelo que a função tem que ser sobrejetiva.

Pág. 20

7.

Tem-se:

$$D_{f \circ g} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(1) = 2$$

$$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(3) = 4$$

$$(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f(1) = 2$$

$$(f \circ g)(4) = f[g(4)] = f(3) = 4$$

$$D_{g \circ g} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(g \circ g)(1) = g[g(1)] = g(1) = 1$$

$$(g \circ g)(2) = g[g(2)] = g(3) = 1$$

$$(g \circ g)(3) = g[g(3)] = g(1) = 1$$

$$(g \circ g)(4) = g[g(4)] = g(3) = 1$$

x	1	2	3	4
$(f \circ g)(x)$	2	4	2	4

x	1	2	3	4
$(g \circ g)(x)$	1	1	1	1

Pág. 21

8.

Tem-se:

x	-2	0	1
$Id_A(x)$	-2	0	1

e:

x	a	b	c
$Id_B(x)$	a	b	c

As funções não são iguais porque não têm, sequer, o mesmo domínio.

Pág. 23

9.

a) Tem-se: $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$, $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ e $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$

Então, o gráfico de f é $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$

b) Como f é uma função bijetiva, f admite inversa. A função f^{-1} , inversa de f , tem domínio igual a B , conjunto de chegada A e o seu gráfico é $\{(3, 1), (5, 2), (7, 3)\}$

10.

a) Tem-se:

x	1	2	3	4	5
$f^{-1}(x)$	5	1	2	3	4

e:

x	1	2	3	4	5
$g^{-1}(x)$	5	4	1	2	3

Tem-se:

$$D_{g^{-1} \circ f^{-1}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(1) = g^{-1}[f^{-1}(1)] = g^{-1}(5) = 3$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}[f^{-1}(2)] = g^{-1}(1) = 5$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}[f^{-1}(3)] = g^{-1}(2) = 4$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(4) = g^{-1}[f^{-1}(4)] = g^{-1}(3) = 1$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}[f^{-1}(5)] = g^{-1}(4) = 2$$

x	1	2	3	4	5
$(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$	3	5	4	1	2

b) Tem-se:

$$D_{f \circ g} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(3) = 4$$

$$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(4) = 5$$

$$(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f(5) = 1$$

$$(f \circ g)(4) = f[g(4)] = f(2) = 3$$

$$(f \circ g)(5) = f[g(5)] = f(1) = 2$$

x	1	2	3	4	5
$(f \circ g)(x)$	4	5	1	3	2

Tem-se:

x	1	2	3	4	5
$(f \circ g)^{-1}(x)$	3	5	4	1	2

c) As funções $g^{-1} \circ f^{-1}$ e $f \circ g$ são iguais porque têm o mesmo domínio (A), o mesmo conjunto de chegada (A) e a mesma regra de transformação.

11.

a) Uma palavra é uma sequência: a palavra 'alma' é diferente da palavra 'lama' e diferente da sequência 'aaml'.

b) Um número natural é representado por uma sequência de algarismos: $15223 \neq 52213$

c) As dez cartas constituem um conjunto pois a ordem pela qual o jogador as recebe é irrelevante para o desenrolar do jogo.

d) Uma fila de espera é uma sequência de pessoas: as pessoas são atendidas pela ordem em que se encontram na fila.

e) Para tocar uma melodia é necessário premir uma sequência de teclas: é a que corresponde à sequência de notas que constituem a melodia.

12.

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

13.

$$a_1) A \times B = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), (0, \sqrt{2}), (0, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right), (2, \sqrt{2}), (2, 2) \right\}$$

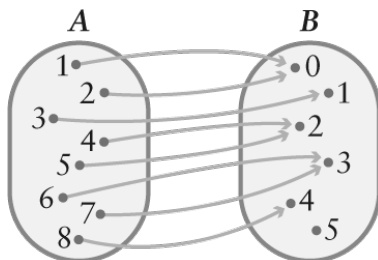
$$a_2) A \times C = \{(0, u), (2, u)\}$$

a₃) $C \times D = \{(u, Aveiro), (u, Braga), (u, Coimbra), (u, Évora)\}$

a₄) $A^2 = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$

b) O conjunto E é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados de $E \times A$, pelo que $E = \{x, y, z\}$

14.

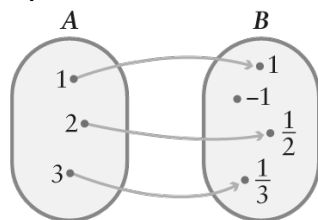


15.

$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$

16.

a₁)



a₂)

x	1	2	3
$h(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

a₃) h é a função que faz corresponder a cada elemento de A o seu inverso.

b) $D_h = \{1, 2, 3\}$, Conjunto de chegada = $\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e $D'_h = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$

c) $G_h = \{(1,1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3})\}$

d) $h(2) = \frac{1}{2}$

e) O valor de x cuja imagem é $\frac{1}{3}$ é 3.

f) $h(x) = -1$ é uma condição impossível pois não existe, no domínio de h , nenhum elemento cuja imagem seja -1 .

g₁) « $\frac{1}{2}$ é a imagem de 2.»

g₂) «3 é o objeto cuja imagem é $\frac{1}{3}$.»

17.

a) Tem-se:

$f(-1) = -3$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 3$, pelo que se tem $D'_f = \{-3, 0, 3\}$

$g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, pelo que se tem $D'_g = \{0, 1\}$

$h(-1) = 0$, $h(0) = 1$ e $h(1) = 2$, pelo que se tem $D'_f = \{0,1,2\}$

Nenhum dos contradomínios é igual ao conjunto de chegada da respetiva função.

b) Tem-se, por exemplo: $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2$ (ou $g(x) = |x|$) e $h(x) = x + 1$

c) Apenas na função g existem objetos diferentes com a mesma imagem: são eles -1 e 1

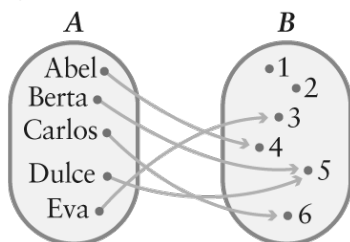
d) O objeto cujas imagens por meio das funções f e g são iguais é 0 ; $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$

O conjunto-solução da equação é $\{0\}$

Pág. 31

18.

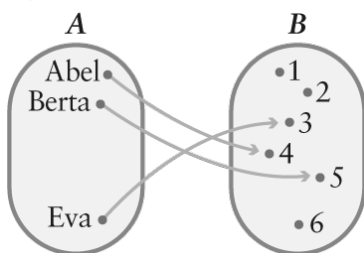
a)



b₁) $D_{f|_C} = D_f \cap C = \{\text{Abel, Berta, Eva}\}$

Tem-se $f|_C(\text{Abel}) = f(\text{Abel}) = 4$, $f|_C(\text{Berta}) = f(\text{Berta}) = 5$ e $f|_C(\text{Eva}) = f(\text{Eva}) = 3$, pelo que $D'_{f|_C} = \{4,5,3\}$

b₂)



19.

a) Os divisores de 2 são 1 e 2, pelo que $g(2) = 1 + 2 = 3$

Os divisores de 4 são 1, 2 e 4, pelo que $g(4) = 1 + 2 + 4 = 7$

Os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6, pelo que $g(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

Os divisores de 8 são 1, 2, 4 e 8, pelo que $g(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Os divisores de 10 são 1, 2, 5 e 10, pelo que $g(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$

Então, tem-se

x	2	4	6	8	10
$g(x)$	3	7	12	15	18

b₁) $D_{g|_J} = D_g \cap J = H \cap \{2,6,10\} = \{2,6,10\}$

$g|_J(2) = g(2) = 3$, $g|_J(6) = g(6) = 12$ e $g|_J(10) = g(10) = 18$ pelo que $D'_{g|_J} = \{3,12,18\}$

Conjunto de chegada de $g|_J$ = Conjunto de chegada de $g = I$

b₂) $G_{g|_J} = \{(2,3), (6,12), (10,18)\}$

20.

$$D_f = A = \{2, 3, 5, 7\}$$

a) $f(2) = 2 - 1 = 1$, $f(3) = 3 - 1 = 2$, $f(5) = 5 - 1 = 4$ e $f(7) = 7 - 1 = 6$,
pelo que se tem a seguinte tabela para a função f :

x	2	3	5	7
$f(x)$	1	2	4	6

b) $C = \{2, 3\}$

$f(2) = 1$ e $f(3) = 2$ pelo que $f(C) = \{1, 2\}$

21.

a) $D_{g|_A} = D_g \cap A = \mathbb{N} \cap A = \{9, 16, 25, 36\}$

$$g|_A(9) = g(9) = \sqrt{9} = 3$$

$$g|_A(16) = g(16) = \sqrt{16} = 4$$

$$g|_A(25) = g(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$g|_A(36) = g(36) = \sqrt{36} = 6$$

Então, tem-se $G_{g|_A} = \{(9, 3), (16, 4), (25, 5), (36, 6)\}$

b) $G(A) = \{3, 4, 5, 6\}$

22.

Para que a função f seja injetiva é necessário que y seja diferente de 1, de 2 e de 5.

Como, por outro lado, y pertence ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, y tem que tomar o valor 3.

23.

a) $f(-2) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ e $f(3) = -3$, pelo que se tem a seguinte tabela para a função f :

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	2	1	0	-1	-3

$g(-2) = 2$, $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(3) = 3$, pelo que se tem a seguinte tabela para a função g :

x	-2	-1	0	1	3
$g(x)$	2	1	0	1	3

$h(-2) = -8$, $h(-1) = -1$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ e $h(3) = 27$, pelo que se tem a seguinte tabela para a função h :

x	-2	-1	0	1	3
$h(x)$	-8	-1	0	1	27

$j(-2) = -4 + 4 = 0$, $j(-1) = -2 + 1 = -1$, $j(0) = 0$, $j(1) = 2 + 1 = 3$ e $j(3) = 6 + 9 = 15$,
pelo que se tem a seguinte tabela para a função j :

x	-2	-1	0	1	3
$j(x)$	0	-1	0	3	15

b) Destas funções, as injetivas são f e h ; g não é injetiva pois $g(-1) = g(1)$ e j não é injetiva pois $j(-2) = j(0)$

24.

Os múltiplos de 2 inferiores a 19 são: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18, pelo que $f(2) = 9$

Os múltiplos de 3 inferiores a 19 são: 3, 6, 9, 12, 15 e 18, pelo que $f(3) = 6$

Os múltiplos de 4 inferiores a 19 são: 4, 8, 12 e 16, pelo que $f(4) = 4$

Os múltiplos de 5 inferiores a 19 são: 5, 10 e 15, pelo que $f(5) = 3$

Os múltiplos de 6 inferiores a 19 são: 6, 12 e 18, pelo que $f(6) = 3$

Como há dois objetos (5 e 6) com a mesma imagem, f não é uma função injetiva.

25.

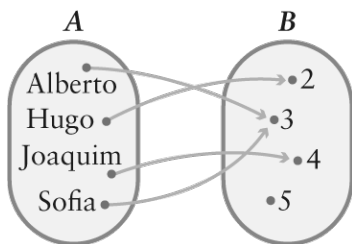
a) $f(-2) = |-2 - 1| = 3$, $f(0) = |0 - 1| = 1$, $f(1) = |1 - 1| = 0$ e $f(2) = |2 - 1| = 1$, pelo que se tem a seguinte tabela para a função f :

x	-2	0	1	2
$f(x)$	3	1	0	1

b) $D'_f = \{0,1,3\}$ e o conjunto de chegada de $f = B = \{0,1,2,3\}$, pelo que, como os dois conjuntos não são iguais, f não é sobrejetiva.

26.

a) Tem-se:



b) $D'_g = \{2,3,4\}$ e o conjunto de chegada de $g = B = \{2,3,4,5\}$, pelo que, como os dois conjuntos não coincidem, g não é sobrejetiva.

Pág. 32

27.

a) Tem-se $f(a) = f(o)$, pelo que a função f não é injetiva. Não sendo injetiva, f não é bijetiva.

b) $D'_g = \{1,2,3,4,5\}$ e o conjunto de chegada de $g = C = \{1,2,3,4,5,6\}$, pelo que, como os dois conjuntos não coincidem, g não é sobrejetiva. Não sendo sobrejetiva, g não é bijetiva.

28.

Tem-se $h(-2) = \frac{1}{-2+1} = -1$, $h(0) = \frac{1}{0+1} = 1$, $h(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ e $h(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

A função é injetiva porque não há dois objetos diferentes com a mesma imagem.

A função é sobrejetiva pois o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Então, como h é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

29.

Tem-se:

$a \notin D_{g \circ f}$ pois $f(a) = 1$ e $1 \notin D_g$

$D_{g \circ f} = \{e, i, o, u\}$

Conjunto de chegada de $g \circ f = D = \{p, q, r, s\}$

$(g \circ f)(e) = g[f(e)] = g(3) = q$

$(g \circ f)(i) = g[f(i)] = g(3) = q$

$(g \circ f)(o) = g[f(o)] = g(4) = r$

$(g \circ f)(u) = g[f(u)] = g(4) = r$

x	e	i	o	u
$(g \circ f)(x)$	q	q	r	r

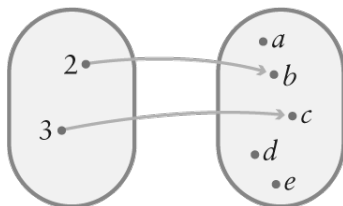
30.

Tem-se:

$1 \notin D_{j \circ h}$ pois $h(1) = 6$ e $6 \notin D_j$ e $4 \notin D_{j \circ h}$ pois $h(4) = 5$ e $5 \notin D_j$

$D_{j \circ h} = \{2, 3\}$

$(j \circ h)(2) = j[h(2)] = j(7) = b$ e $(j \circ h)(3) = j[h(3)] = j(8) = c$, pelo que se tem o seguinte diagrama de setas para a função $j \circ h$:



31.

Tem-se:

$f(-2) = 2^{-(-2)} = 4$, $f(-1) = 2^{-(-1)} = 2$, $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ e $f(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ $1 \notin D_{g \circ f}$

pois $f(1) = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \notin D_g$ e $2 \notin D_{g \circ f}$ pois $f(2) = \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} \notin D_g$

Então, $D_{g \circ f} = \{-2, -1, 0\}$

Conjunto de chegada de $g \circ f = \mathbb{Z}$

$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(4) = 4 \times 4^2 - 4 = 60$

$(g \circ f)(-1) = g[f(-1)] = g(2) = 4 \times 2^2 - 2 = 14$

$(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(1) = 4 \times 1^2 - 1 = 3$

Então, $G_{g \circ f} = \{(-2, 60), (-1, 14), (0, 3)\}$

32.

a) Tem-se:

$f(1) = 4 - 1 = 3$, $f(2) = 4 - 2 = 2$ e $f(3) = 4 - 3 = 1$,

pelo que se tem a seguinte tabela para a função f :

x	1	2	3
$f(x)$	3	2	1

b) $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(4 - x) = 4 - (4 - x) = 4 - 4 + x = x$

Então, $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ pelo que $f \circ f = Id_A$

De outro modo:

$$(f \circ f)(1) = f[f(1)] = f(3) = 1$$

$$(f \circ f)(2) = f[f(2)] = f(2) = 2 \quad \text{e}$$

$$(f \circ f)(3) = f[f(3)] = f(1) = 3$$

Então, $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ pelo que $f \circ f = Id_A$

33.

x	3	5	7	9
$f^{-1}(x)$	5	2	3	4

34.

Tem-se:

$$g(1) = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{pelo que} \quad g^{-1}(2) = 1$$

$$g(6) = \sqrt{6+3} = 3 \quad \text{pelo que} \quad g^{-1}(3) = 6$$

$$g(13) = \sqrt{13+3} = 4 \quad \text{pelo que} \quad g^{-1}(4) = 13 \quad \text{e}$$

$$g(22) = \sqrt{22+3} = 5 \quad \text{pelo que} \quad g^{-1}(5) = 22$$

$$\text{Então,} \quad G_{g^{-1}} = \{(2,1), (3,6), (4,13), (5,22)\}$$

35.

Dado que $h(1) = 5$, tem-se $h^{-1}(5) = 1$

Ora, $p(5) = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $q(5) = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$, pelo que somente a função q pode ser a função h^{-1}

36.

a) f é uma função bijetiva, se e só se, para cada $y \in \mathbb{R}$, existir um e um só $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$

$$\text{Ora, } y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3}$$

Está provado que, para cada valor real de y , existe um e um só número real x tal que $y = f(x)$

Então, f é uma função bijetiva.

b) Como $y = 3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3}$, tem-se $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

$$\text{Então, tem-se: } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

37.

a) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 6 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Conjunto de chegada de $f \circ g = \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x - 6) = \frac{3x-6}{3} + 2 = x - 2 + 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{3} + 2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$$

Conjunto de chegada de $g \circ f = \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{x}{3} + 2\right) = 3\left(\frac{x}{3} + 2\right) - 6 = x + 6 - 6 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

b) Como $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = Id_{\mathbb{R}}$, pode concluir-se que $g = f^{-1}$

Capítulo 2 | Generalidades acerca de funções reais de variável real

Pág. 36

38.

- a) $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
- b) $D_f = \mathbb{R}$, porque, para qualquer número real x , a expressão $f(x)$ designa um número real.
- c) $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- d) $x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$
- e) $D_f = \mathbb{R}$, porque, para qualquer número real x , $x^2 + 1 \neq 0$

39.

- a) $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ pelo que $D_f = [-1, +\infty[$
- b) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ pelo que $D_f =]-1, +\infty[$
- c) $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ pelo que $D_f = [-1, +\infty[$
- d) $x + 1 \geq 0 \wedge \sqrt{x+1} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge \sqrt{x+1} \neq 2 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x + 1 \neq 4 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \neq 3$ pelo que $D_f = [-1, +\infty[\setminus \{3\}$
- e) $D_f = \mathbb{R}$, porque, para qualquer número real x , a expressão $f(x)$ designa um número real.
- f) $\sqrt[3]{x+1} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- g) $x \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \wedge 2 - \sqrt{5-x} \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 5 \wedge \sqrt{5-x} \neq 2 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 5 \wedge 5 - x \neq 4 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 5 \wedge x \neq 1$ pelo que $D_f = [0, 5] \setminus \{1\}$

40.

- a) $\frac{1}{2x-1}$
- b) x
- c) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$
- d) $\frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$

Pág. 38

41.

- a) Não é gráfico de função.
- b) É gráfico de função não injetiva (há objetos diferentes com a mesma imagem).
- c) É gráfico de função não injetiva (há objetos diferentes com a mesma imagem).
- d) Não é gráfico de função.
- e) Não é gráfico de função.

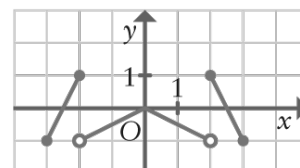
Pág. 40

42.

- a) Tem-se: $\forall x \in D_f, f(-x) = 1 - 3(-x)^2 = 1 - 3x^2 = f(x)$, pelo que f é uma função par.
- b) Seja $a = 1$. Tem-se:
 $g(-1) = -1 - 3(-1)^2 = -1 - 3 = -4$ e $g(1) = 1 - 3 \times 1^2 = 1 - 3 = -2$
Então, como $g(-1) \neq g(1)$, g não é uma função par.

43. Como f é uma função par, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

Então, o gráfico de f é o que se apresenta ao lado.



Pág. 42

44.

a) Tem-se: $\forall x \in D_f, f(-x) = -x - 3(-x)^3 = -x + 3x^3 = -(x - 3x^3) = -f(x)$, pelo que f é uma função ímpar.

b) Seja $a = 1$. Tem-se:

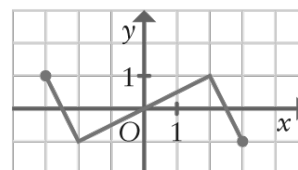
$$g(-1) = 1 - 3(-1)^3 = 1 + 3 = 4 \quad \text{e} \quad -g(1) = -(1 - 3 \times 1^3) = -(-2) = 2$$

Então, como $g(-1) \neq -g(1)$, g não é uma função ímpar.

Pág. 43

45.

Como f é uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial. Então, o gráfico de f é o que se apresenta ao lado.



Pág. 44

46.

a) Como f é uma função ímpar e o ponto de coordenadas $(-3, 2)$ pertence ao gráfico de f , o ponto de coordenadas $(3, -2)$ também pertence ao gráfico de f .

Então, os pontos de coordenadas $(2, -3)$ e $(-2, 3)$ pertencem ao gráfico de f^{-1} .

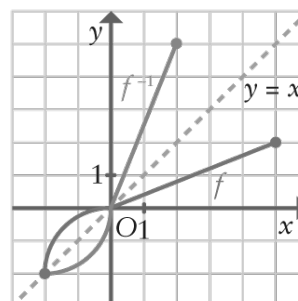
b) Como os pontos de coordenadas $(2, -3)$ e $(-2, 3)$ pertencem ao gráfico de f^{-1} , qualquer ponto diferente destes cuja abcissa seja igual a 2 ou igual a -2 não pertence ao gráfico de f^{-1} .

Pág. 45

47.

O gráfico da função inversa da f é simétrico do gráfico de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de f^{-1} no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



48.

Tem-se $f(-2) = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$ e $f(4) = \frac{3-8}{4} = -\frac{5}{4}$, pelo que o gráfico da função f é um segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(-2, \frac{7}{4})$ e $(4, -\frac{5}{4})$

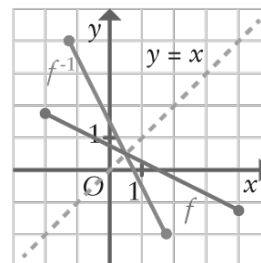
$$\text{Então:} \quad D_{f^{-1}} = D'_f = \left[-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right] \quad \text{e} \quad D'_{f^{-1}} = D_f = [-2, 4]$$

Determinação da expressão analítica da função f^{-1} :

$$y = \frac{3-2x}{4} \Leftrightarrow 4y = 3 - 2x \Leftrightarrow 2x = 3 - 4y \Leftrightarrow x = \frac{3-4y}{2}$$

$$\text{Então, tem-se:} \quad f^{-1}: \left[-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right] \rightarrow [-2, 4] \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{2}$$

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de f^{-1} no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.

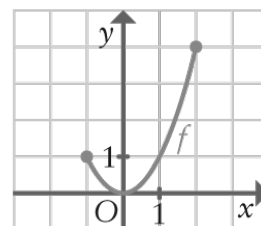


Pág. 46

49.

Tem-se $g(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 1$, pelo que o gráfico de f é a imagem do gráfico de g pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0,1)$

Então, o gráfico de f é o que se apresenta ao lado.

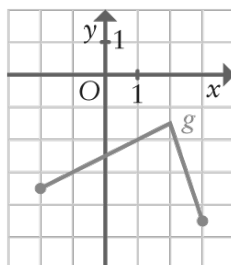


50.

a) Tem-se $g(x) = f(x) + k$, pelo que, como $g(1) = -2$ e $f(1) = \frac{1}{2}$, se tem $-2 = \frac{1}{2} + k$, donde $k = -\frac{5}{2}$

b) $D_f = [-2,3]$ e $D'_f = [-2,1]$ pelo que $D_g = D_f = [-2,3]$ e $D'_g = \left[-2 - \frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right] = \left[-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

c) O gráfico de g é:



Pág. 47

51.

Tem-se $f(x) = g(x + 2)$, pelo que o gráfico de f é a imagem do gráfico de g pela translação associada ao vetor $\vec{u}(-2,0)$

Então, o gráfico de f é o que está representado a vermelho.

52.

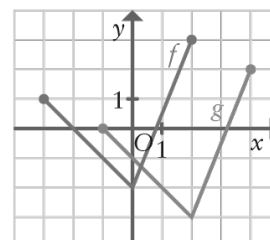
Tem-se $g(x) = f(x - 1)$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(1,0)$

Então, $D_g = [-2 + 1, 3 + 1] = [-1,4]$ e $D'_g = D'_f = [0,5]$

53.

Tem-se $g(x) = f(x - 2) - 1$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(2,-1)$

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de g no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



54.

Tem-se $g(x) = f(x - a) + b$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(a, b)$

Ora, da representação do gráfico de f e do gráfico de g no mesmo referencial, conclui-se que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(-1, 2)$

Então, $a = -1$ e $b = 2$

55.

Tem-se $g(x) = f(x - 3) - 1$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(3, -1)$

Como $D_f = [-2, 3]$ e $D'_f = [0, 5]$, pode concluir-se

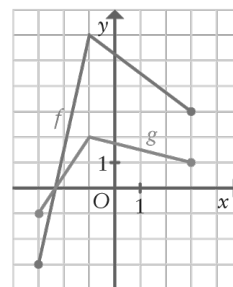
que $D_g = [-2 + 3, 3 + 3] = [1, 6]$ e $D'_g = [0 - 1, 5 - 1] = [-1, 4]$

Pág. 48

56.

Tem-se $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de g no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



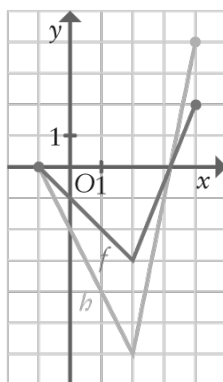
57.

Como o gráfico de g se pode obter do gráfico de f por meio de uma contração vertical

e $f(4) = 2$ e $g(4) = 1$, tem-se $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$, pelo que se pode concluir-se que o coeficiente, k , da contração é igual a $\frac{1}{2}$

Tem-se $\frac{1}{k} = 2$, pelo que $h(x) = 2f(x)$, donde o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 2.

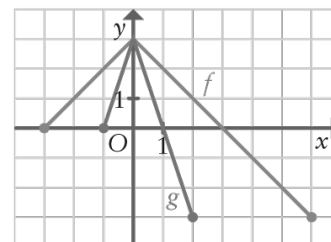
Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de h no mesmo referencial é:



58.

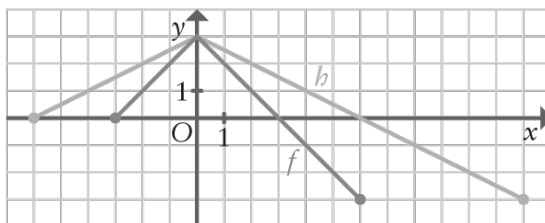
Tem-se $g(x) = f(3x)$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$.

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de g no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



Tem-se $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, pelo que o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente 2.

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de h no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



59.

Como $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente 3, pelo que $g(9) = f(3) = 15$. Então, basta considerar $a = 9$

De outro modo:

Como $g(a) = f(3)$ e $g(a) = f\left(\frac{a}{3}\right)$, tem-se $f\left(\frac{a}{3}\right) = f(3)$, pelo que basta considerar $a = 9$

60.

a) $D_f = [-3, 4]$ e $D'_f = [-1, 2]$

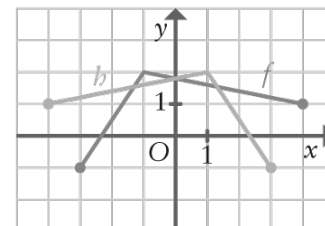
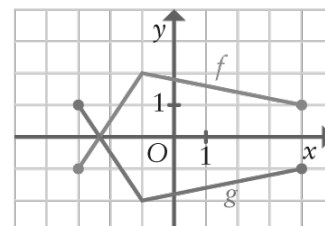
b) Como $g(x) = -f(x)$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f por meio de uma reflexão de eixo Ox

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de g no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.

Como $h(x) = f(-x)$, o gráfico de h é a imagem do gráfico de f por meio de uma reflexão de eixo Oy

Então, a representação do gráfico de f e do gráfico de h no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.

c) $D_g = [-3, 4]$ e $D'_g = [-2, 1]$ e $D_h = [-4, 3]$ e $D'_h = [-1, 2]$



61.

Como o ponto $A(-5, 3)$ pertence ao gráfico de f , podemos concluir que $f(-5) = 3$

Como, para todo o valor real de x , $g(x) = -f(x)$, tem-se que $g(-5) = -f(-5) = -3$

Relativamente ao valor de $g(5)$ nada se pode concluir, para além de que é igual a $-f(5)$

Como, para todo o valor real de x , $h(x) = f(-x)$, tem-se que $h(5) = f(-5) = 3$

Relativamente ao valor de $h(-5)$ nada se pode concluir, para além de que é igual a $f(5)$

62.

$$D_f = [-6, 12] \text{ e } D'_f = [4, 8]$$

a) $g(x) = 2f(x + 1)$

f	$D_f = [-6, 12]$	$D'_f = [4, 8]$
$g_1(x) = f(x + 1)$	$D_{g_1} = [-7, 11]$	$D'_{g_1} = [4, 8]$
$g(x) = 2f(x + 1)$	$D_g = [-7, 11]$	$D'_g = [8, 16]$

b) $h(x) = \frac{1}{2}f(x - 2) + 3$

f	$D_f = [-6, 12]$	$D'_f = [4, 8]$
$h_1(x) = f(x - 2)$	$D_{h_1} = [-4, 14]$	$D'_{h_1} = [4, 8]$
$h_2(x) = \frac{1}{2}f(x - 2)$	$D_{h_2} = [-4, 14]$	$D'_{h_2} = [2, 4]$
$h(x) = \frac{1}{2}f(x - 2) + 3$	$D_h = [-4, 14]$	$D'_h = [5, 7]$

c) $i(x) = 3 - 2f(x)$

f	$D_f = [-6, 12]$	$D'_f = [4, 8]$
$i_1(x) = 2f(x)$	$D_{i_1} = [-6, 12]$	$D'_{i_1} = [8, 16]$
$i_2(x) = -2f(x)$	$D_{i_2} = [-6, 12]$	$D'_{i_2} = [-16, -8]$
$i(x) = 3 - 2f(x)$	$D_i = [-6, 12]$	$D'_i = [-13, -5]$

d) $j(x) = f(-x) + 1$

f	$D_f = [-6, 12]$	$D'_f = [4, 8]$
$j_1(x) = f(-x)$	$D_{j_1} = [-12, 6]$	$D'_{j_1} = [4, 8]$
$j(x) = f(-x) + 1$	$D_j = [-12, 6]$	$D'_j = [5, 9]$

e) $k(x) = 1 - f\left(\frac{x}{2}\right)$

f	$D_f = [-6, 12]$	$D'_f = [4, 8]$
$k_1(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$	$D_{i_1} = [-12, 24]$	$D'_{i_1} = [4, 8]$
$k_2(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$	$D_{i_2} = [-12, 24]$	$D'_{i_2} = [-8, -4]$
$i(x) = 1 - 2f(x)$	$D_i = [-12, 24]$	$D'_i = [-7, -3]$

63.

f não é uma função real de variável real porque o seu domínio não está contido em $\mathbb{R}$

g não é uma função real de variável real porque o seu conjunto de chegada não está contido em $\mathbb{R}$

h é uma função real de variável real porque o seu domínio e o seu conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$

64.

Designemos por f a função definida, em cada caso, pela expressão indicada.

a) $D_f = \mathbb{R}$ porque, para qualquer número real x , a expressão $1 - x$ designa um número real.

b) $\pi + x = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$

c) $2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$
pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

d) $(2 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

e) $(2x + 3)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -3 \vee x = 2$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{3}{2}, 2\}$

f) $x = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$ pelo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$

65.

a) $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ pelo que $D_f =]-\infty, 2]$

b) $x - 1 \geq 0 \wedge 5 - \sqrt{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \neq 5 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x - 1 \neq 25 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \neq 26$
pelo que $D_f = [1, +\infty[\setminus \{26\}$

c) $D_f = \mathbb{R}$ porque, para qualquer número real x , a expressão $\sqrt[5]{x^3 + x + 1}$ designa um número real.

d) $3x + 5 \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge x \neq 1$ pelo que $D_f = [-\frac{5}{3}, +\infty[\setminus \{1\}$

e) $x - 1 \geq 0 \wedge 2 - \sqrt[3]{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \sqrt[3]{x} \neq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \neq 8$ pelo que $D_f = [1, +\infty[\setminus \{8\}$

66.

Tem-se:

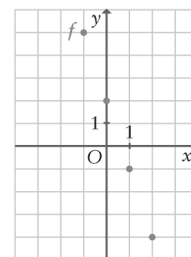
$$f(-1) = 5$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = -1$$

$$f(2) = -4$$

O gráfico de f é o que se apresenta ao lado.



Tem-se:

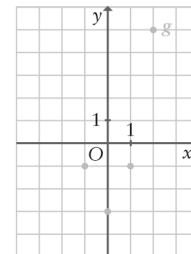
$$g(-1) = -1$$

$$g(0) = -3$$

$$g(1) = -1$$

$$g(2) = 5$$

O gráfico de g é o que se apresenta ao lado.



Tem-se:

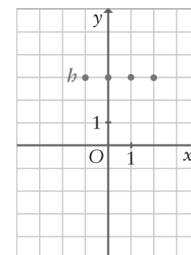
$$h(-1) = 3$$

$$h(0) = 3$$

$$h(1) = 3$$

$$h(2) = 3$$

O gráfico de h é o que se apresenta ao lado.



Tem-se:

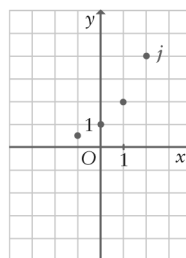
$$j(-1) = \frac{1}{2}$$

$$j(0) = 1$$

$$j(1) = 2$$

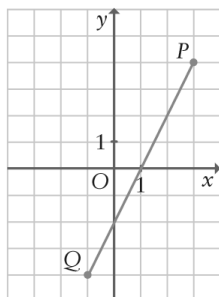
$$j(2) = 4$$

O gráfico de j é o que se apresenta ao lado.



67.

a)



b₁) $D_f = [-1, 3]$

b₂) $D'_f = [-4, 4]$

b₃) Determinemos a equação reduzida da reta PQ :

$$m = \frac{-4-4}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2 ; \text{ então, a equação reduzida de } PQ \text{ é da forma } y = 2x + b$$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(3, 4)$, tem-se $4 = 2 \times 3 + b$, pelo que $b = -2$

A equação reduzida de PQ é $y = 2x - 2$

Então, tem-se $f(x) = 2x - 2$

b₄) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} - 2 = 1$

b₅) $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2x - 2 = -3 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

68.

O ponto de coordenadas $(a, 6)$ pertence ao gráfico da função f se e só se $f(a) = 6$

$$\text{Ora, } f(a) = 6 \Leftrightarrow 2a^3 - 10 = 6 \Leftrightarrow 2a^3 = 16 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

69.

Aplicando o teste da reta vertical, conclui-se que somente as opções (A) e (C) representam gráficos de funções.

70.

Se a reta de equação $x = 3$, que é uma reta vertical, é a mediatriz do segmento de reta $[PQ]$, então este segmento de reta é horizontal, pelo que os pontos P e Q têm a mesma ordenada. Como P e Q são pontos do gráfico de f , às abscissas de P e Q correspondem imagens iguais, pelo que f não é injetiva.

71.

$f(-1) \neq f(1)$, pelo que f não é uma função par.

$g(-3) = g(3)$, $g(-2) = g(2)$ e $g(-1) = g(1)$, pelo que se tem $\forall x \in D_g$, $g(-x) = g(x)$

Então, g é uma função par.

Pág. 59

72.

a) Tem-se $D_f = \mathbb{R}$ e $f(-x) = 3(-x)^2 - 5|-x| + 7 = 3x^2 - 5|x| + 7$

Então, $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$, pelo que f é uma função par.

b) Tem-se $D_g = \mathbb{R}$ e $g(-x) = (-x)^4 + 4(-x) = x^4 - 4x$

Então, a proposição $\forall x \in D_g$, $g(-x) = g(x)$ não é verdadeira, pelo que g não é uma função par.

c) Tem-se $D_h = \mathbb{R}$ e $h(-x) = -x \sqrt[3]{-x} = -x \sqrt[3]{(-1) \times x} = -x \times \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{x} =$
 $= -x \times (-1) \times \sqrt[3]{x} = x \sqrt[3]{x}$

Então, $\forall x \in D_h$, $h(-x) = h(x)$, pelo que h é uma função par.

d) Tem-se $D_i = \mathbb{R}$ e $i(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} + \sqrt{(-x)^3} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{(-1) \times x^3} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$

Então, a proposição $\forall x \in D_i$, $i(-x) = i(x)$ não é verdadeira. pelo que i não é uma função par.

73.

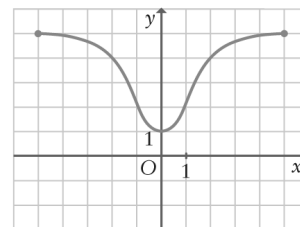
Tem-se $D_g = \mathbb{R}$ e

$g(-x) = g[(-1) \times x] =$ (pois $g(kx) = k^2 g(x)$, para qualquer número real k)

$= (-1)^2 \times g(x) = g(x)$, $\forall x \in D_g$, pelo que g é uma função par.

74.

Como f é uma função par, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas. Então, o gráfico de f é o que se apresenta ao lado.



75.

Como f é uma função par de domínio $\mathbb{R}$, tem-se, por exemplo, $f(-1) = f(1)$, o que é suficiente para garantir que f não é injetiva.

76.

$0 \in D_f$ e $f(0) \neq 0$, pelo que f não é uma função ímpar.

$g(-3) \neq -g(3)$, pelo que g não é uma função ímpar.

$h(-3) = -h(3)$, $h(-2) = -h(2)$, $h(-1) = -h(1)$ e $h(0) = 0$, pelo que se tem

$\forall x \in D_h$, $h(-x) = -h(x)$. Então, h é uma função ímpar.

$i(-3) = -i(3)$, $i(-2) = -i(2)$, $i(-1) = -i(1)$ e $i(0) = 0$, pelo que se tem

$\forall x \in D_i$, $i(-x) = -i(x)$. Então, i é uma função ímpar.

77.

a) $0 \in D_f$ e $f(0) = -1 \neq 0$, pelo que f não é uma função ímpar.

b) Tem-se $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $g(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right)$

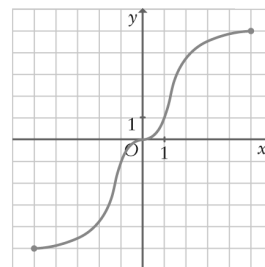
Então, $\forall x \in D_g, g(-x) = -g(x)$, pelo que g é uma função ímpar.

c) Tem-se $D_h = \mathbb{R}$ e $h(-x) = 2(-x)^5 - 4(-x)^3 + 6(-x) = -2x^5 + 4x^3 - 6x = -(2x^5 - 4x^3 + 6x)$

Então, $\forall x \in D_h, h(-x) = -h(x)$, pelo que h é uma função ímpar.

d) Tem-se $D_i = \mathbb{R}_0^+$, pelo que não é verdade que, para todo o x pertencente a D_i , $-x$ também pertença a D_i . Então, i não é uma função ímpar.

78. Como f é uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial. Então, o gráfico de f é o que se apresenta ao lado.



79.

Tem-se $D_h = \mathbb{R}$ e

$h(-x) = (-x)^3 g(-x) = -x^3 g(-x) =$ (pois g é uma função par)

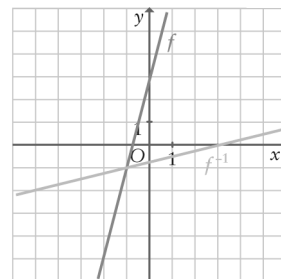
$= -x^3 g(x) = -[x^3 g(x)] = -h(x), \forall x \in D_h$, pelo que h é uma função ímpar.

80.

a) $y = 4x + 3 \Leftrightarrow 4x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{4}$

Tem-se, então, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}$

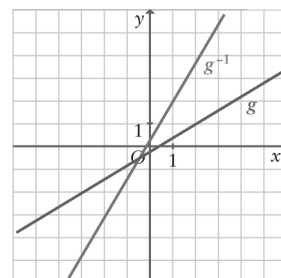
A representação do gráfico de f e do gráfico de f^{-1} no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



b) $y = \frac{3x-1}{5} \Leftrightarrow 3x - 1 = 5y \Leftrightarrow x = \frac{5y+1}{3}$

Tem-se, então, $g^{-1}(x) = \frac{5x+1}{3}$

A representação do gráfico de g e do gráfico de g^{-1} no mesmo referencial é a que se apresenta ao lado.



81.

a) O ponto de coordenadas (2,8) pertence ao gráfico da função f se e só se o ponto de coordenadas (8,2) pertence ao gráfico da função f^{-1} .

Então, B é o ponto de coordenadas (8,2), pelo que a sua ordenada é 2.

b) A figura ao lado ilustra a situação descrita.

$M(5,5)$ é o ponto médio do lado $[AB]$

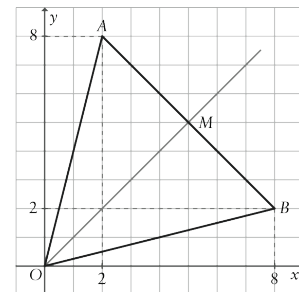
Como os pontos A e B são simétricos relativamente à bissetriz do 1.º quadrante, esta semirreta é perpendicular ao segmento de reta $[AB]$, pelo que $[OM]$ é a altura do triângulo relativa ao lado $[AB]$

Tem-se:

$$AB = \sqrt{(8-2)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

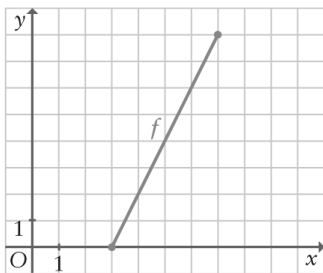
$$OM = \sqrt{(5-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{6\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}}{2} = 30 \text{ unidades de área}$$



82.

a)



b) De acordo com o teste da reta horizontal, a função f é injetiva porque nenhuma reta horizontal intersesta o gráfico de f em mais do que um ponto.

Observando o gráfico, verifica-se que o contradomínio de f é $[0,8]$, pelo que, como o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, f é sobrejetiva.

Então, como f é injetiva e sobrejetiva, f é bijetiva.

c) O gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f relativamente à bissetriz do 1.º quadrante.

A representação do gráfico de f e do gráfico de f^{-1} , num referencial em que também se desenhou a bissetriz do 1.º quadrante, é a que se apresenta ao lado.

d) $y = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x = y + 6 \Leftrightarrow x = \frac{y+6}{2}$

Tem-se, então, que f^{-1} é a função de domínio $[0,8]$ e conjunto de chegada $[3,7]$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$

e) Como $P(a, b)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se $b = f(a)$ ou seja

$$b = 2a - 6$$

Então, P é o ponto de coordenadas $(a, 2a - 6)$ e Q é o ponto de coordenadas $(2a - 6, a)$

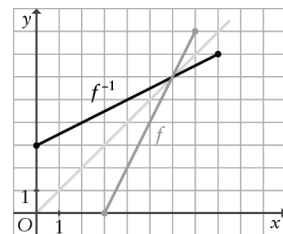
$$\text{Tem-se } PQ = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2a - 6 - a)^2 + [a - (2a - 6)]^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 6)^2 + (-a + 6)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 6)^2 + (a - 6)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(a - 6)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(a - 6)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 6)^2} = 2 \Leftrightarrow |a - 6| = 2 \Leftrightarrow a - 6 = -2 \vee a - 6 = 2 \Leftrightarrow$$

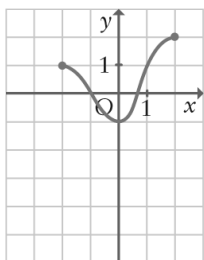
$$\Leftrightarrow a = 4 \vee a = 8$$

Como $8 \notin D_f$, tem-se $a = 4$, pelo que P é o ponto de coordenadas $(4, 2)$



83.

Seja f a função cujo gráfico é o seguinte:

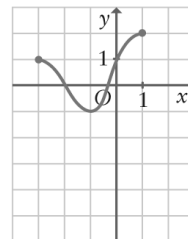


Tem-se $l(x) = -\frac{1}{2}f(2x + 1) - 4$

Seja $l_1(x) = f(x + 1)$

O gráfico de l_1 é a imagem do gráfico de f por meio de uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}(-1, 0)$

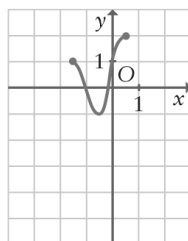
Então, a representação do gráfico de l_1 é a que se apresenta ao lado.



Seja $l_2(x) = l_1(2x) = f(2x + 1)$

O gráfico de l_2 é a imagem do gráfico de l_1 por meio de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$

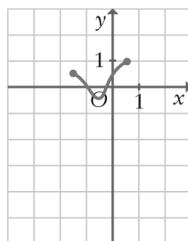
Então, a representação do gráfico de l_2 é a que se apresenta ao lado.



Seja $l_3(x) = \frac{1}{2}l_2(x) = \frac{1}{2}f(2x + 1)$

O gráfico de l_3 é a imagem do gráfico de l_2 por meio de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$

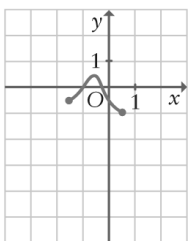
Então, a representação do gráfico de l_3 é a que se apresenta ao lado.



Seja $l_4(x) = -l_3(x) = -\frac{1}{2}f(2x + 1)$

O gráfico de l_4 é a imagem do gráfico de l_3 por meio de uma reflexão de eixo Ox

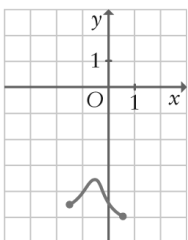
Então, a representação do gráfico de l_4 é a que se apresenta ao lado.



Seja $l(x) = l_4(x) - 4 = -\frac{1}{2}f(2x + 1) - 4$

O gráfico de l é a imagem do gráfico de l_4 por meio de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{u}(0, -4)$

Então, a representação do gráfico de l é a que se apresenta ao lado.



Pág. 63

84.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$; o zero de f é $\frac{2}{3}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$; os zeros de g são 0 e 2.

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{2}{3}[$

85.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$; os zeros de f são -1 e 2 .

O conjunto-solução da condição $f(x) > 0$ é $[-3, -1[\cup]2, 5[$

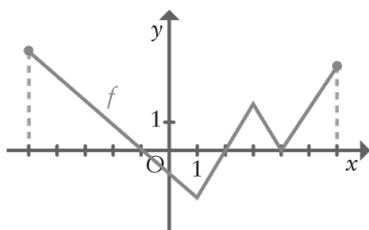
b)

x	-3		-1		2		5
$f(x)$	+	+	0	-	0	+	n.d.

(n.d. – não definida)

Pág. 64

86.



a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$; o conjunto-solução da condição $f(x) = 0$ é $\{-1, 2, 4\}$

b) $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$; o conjunto-solução da condição $f(x) < 0$ é $] -1, 2[$

c) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 \vee x = 4$; o conjunto-solução da condição $f(x) \leq 0$ é $[-1, 2] \cup \{4\}$

d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \vee 2 < x < 4 \vee x > 4$;

o conjunto-solução da condição $f(x) > 0$ é $[-5, -1[\cup]2, 4[\cup]4, 6] = [-5, -1[\cup]2, 6] \setminus \{4\}$

Pág. 66

87.

a) Definindo f por meio de uma tabela, tem-se

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	$\frac{11}{4}$	2	5	$\frac{35}{4}$	14

Então, $D'_f = \left\{2, \frac{11}{4}, 5, \frac{35}{4}, 14\right\}$

b) Qualquer número real maior ou igual a 14 é um majorante de f e qualquer número real menor ou igual a 2 é um minorante de f .

c) A função f é limitada porque é minorada e majorada. Tem-se: $\forall x \in D_f, 2 \leq f(x) \leq 14$

88.

Como $\forall x \in D_f, f(x) \leq 5$, f é majorada.

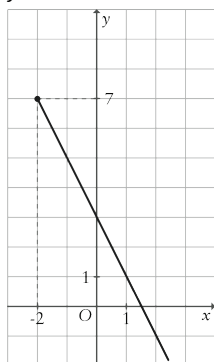
Como o conjunto de chegada é $\mathbb{R}^+$, tem-se $\forall x \in D_f, f(x) > 0$, pelo que f é minorada.

Então, como a função f é minorada e majorada, é limitada, e tem-se: $\forall x \in D_f, 0 \leq f(x) \leq 2$

89.

Na figura abaixo está uma representação de parte do gráfico de cada uma das funções f , g e h .

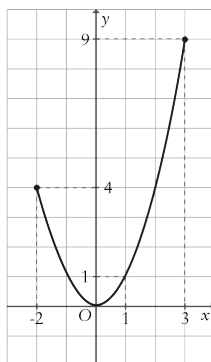
f :



g :



h :



a) A função f é majorada, e tem-se: $\forall x \in D_f, f(x) \leq 7$

A função g não é majorada: $g(x)$ toma valores tão grandes quanto se queira.

A função h é majorada, e tem-se: $\forall x \in D_h, h(x) \leq 9$

b) A função f não é minorada: $f(x)$ toma valores tão grandes e negativos quanto se queira.

A função g é minorada, e tem-se: $\forall x \in D_g, g(x) \geq 0$

A função h é minorada, e tem-se: $\forall x \in D_h, h(x) \geq 0$

Pág. 69

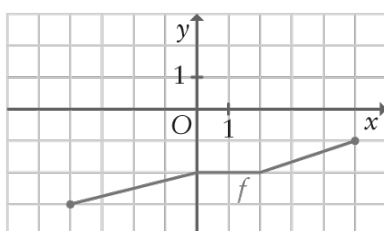
90.

a) A função f é crescente em qualquer intervalo contido em $[0, 4]$ e é decrescente em qualquer intervalo contido em $[-3, 0]$ e em qualquer intervalo contido em $[4, 5]$

b) A função f é crescente e negativa em qualquer intervalo contido em $[0, 2]$

c) A função f é decrescente e positiva em qualquer intervalo contido em $[-3, -1]$ e em qualquer intervalo contido em $[4, 5]$

91.



92.

- a) $V_{0,5}(2,5) =]2,5 - 0,5; 2,5 + 0,5[=]2,3[$
 b) $V_{0,1}(0) =]0 - 0,1; 0 + 0,1[=] - 0,1; 0,1[$
 c) $V_{0,5}(-4) =] - 4 - 0,5; -4 + 0,5[=] - 4,5; -3,5[$
 d) $V_{0,2}(-3) =] - 3 - 0,2; -3 + 0,2[=] - 3,2; -2,8[$

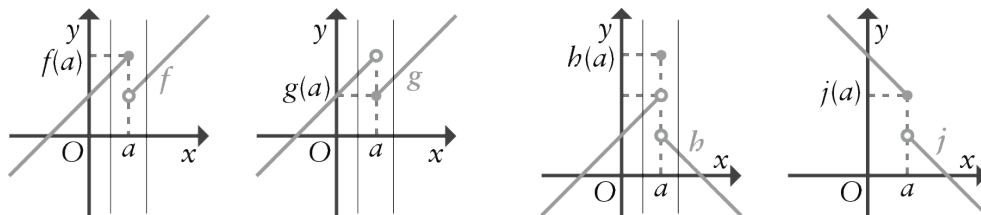
93

- a) $[-2,3] \cap V_2(1) = [-2,3] \cap] - 1,3[=] - 1,3[$
 b) $\mathbb{R}^+ \cap V_{0,1}(0) =]0, +\infty[\cap] - 0,1; 0,1[=]0; 0,1[$
 c) $] - 1,0[\cap V_{0,1}(-1) =] - 1,0[\cap] - 1,1; -0,9[=] - 1; -0,9[$

Pág. 71

94.

Na figura está representada, para cada uma das funções f , g , h e j , parte do seu gráfico e, no caso das funções f , g e h , assinalou-se uma vizinhança de a .



Pode, então, observar-se que:

Existe uma vizinhança de a tal que $f(a)$ é a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $f(a)$ é um máximo relativo.

Existe uma vizinhança de a tal que $g(a)$ é a menor das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $g(a)$ é um mínimo relativo.

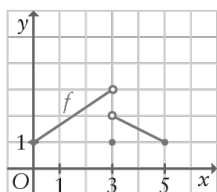
Existe uma vizinhança de a tal que $h(a)$ é a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $h(a)$ é um máximo relativo.

Não existe qualquer vizinhança de a tal que $j(a)$ seja quer a maior quer a menor das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $j(a)$ não é um extremo relativo.

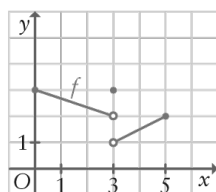
Pág. 72

95.

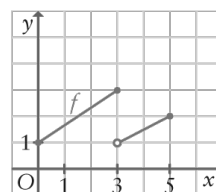
a)



b)



c)



Pág. 73

96.

a) Tem-se, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a > b \Rightarrow$$

(a função f é crescente)

$$\Rightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow$$

($x > y \Rightarrow -x < -y$ para quaisquer x e y)

$$\Rightarrow -f(a) < -f(b) \Rightarrow$$

($-f(x) = g(x)$)

$$\Rightarrow g(a) < g(b)$$

Então, $\forall a, b \in D_g, a > b \Rightarrow g(a) < g(b)$, ou seja, g é decrescente.

b) Tem-se, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a > b \Rightarrow$$

(a função f é crescente)

$$\Rightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow$$

(a função g é decrescente)

$$\Rightarrow g[f(a)] < g[f(b)] \Rightarrow$$

($g[f(x)] = (g \circ f)(x)$)

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) < (g \circ f)(b)$$

Então, $\forall a, b \in D_{g \circ f}, a > b \Rightarrow (g \circ f)(a) < (g \circ f)(b)$, ou seja, $g \circ f$ é decrescente.

Pág. 77

97.

a) Tem-se $f(-3) = 27$ e $f(-1) = 3$, pelo que A e B são os pontos de coordenadas $(-3, 27)$ e $(-1, 3)$, respectivamente.

O declive da reta AB é, então, igual a $\frac{3-27}{-1+3}$ ou seja -12 .

b) Tem-se $f(a) = 3a^2$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(a, 3a^2)$, e $f(b) = 3b^2$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(b, 3b^2)$

$$\text{Tem-se, então: } m_{AB} = \frac{3b^2 - 3a^2}{b - a} = \frac{3(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{3(b - a)(b + a)}{b - a} = 3(b + a) = 3a + 3b$$

c) Tem-se: $P(p, 3p^2)$, $Q(q, 3q^2)$ e $R(r, 3r^2)$ com $p < q < r$

Então:

$$m_{PQ} = \frac{3q^2 - 3p^2}{q - p} = \frac{3(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{3(q - p)(q + p)}{q - p} = 3(q + p)$$

$$\text{e } m_{QR} = \frac{3r^2 - 3q^2}{r - q} = \frac{3(r^2 - q^2)}{r - q} = \frac{3(r - q)(r + q)}{r - q} = 3(r + q)$$

Como $p < r$, tem-se $p + q < r + q$, pelo que $3(p + q) < 3(r + q)$ ou seja $m_{PQ} < m_{QR}$

Pág. 82

98.

$$\text{a) } f(0) = 0^3 - 11 \times 0 + \frac{6}{0-2} = -3$$

$$\text{b) } f(3) = 3^3 - 11 \times 3 + \frac{6}{3-2} = 27 - 33 + 6 = 0, \text{ pelo que } 3 \text{ é zero de } f.$$

$$f(4) = 4^3 - 11 \times 4 + \frac{6}{4-2} = 64 - 44 + 3 = 23 \neq 0, \text{ pelo que } 4 \text{ não é zero de } f.$$

99.

$$\text{a) } a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 10; \text{ o zero de } a \text{ é } 10.$$

$$\text{b) } b(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2; \text{ os zeros de } b \text{ são } -3 \text{ e } 2$$

$$\text{c) } c(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1; \text{ } c \text{ não tem zeros.}$$

- d) $d(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$; os zeros de d são 0 e 4.
- e) $e(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$; os zeros de e são -1, 0 e 1.
- f) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$; os zeros de e são 0, 1 e 2.

100.

a) $f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 11 \times 0 - 6 = -6$

b) $f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, pelo que 1 é zero de f .

c) Como 1 é zero de f , podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x - 1$ e, podemos, em seguida, fatorizá-lo.

Tem-se:

1	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0 = R

Então, tem-se $f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$

Ora, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$,
 pelo que os outros zeros de f são 2 e 3.

101.

$f(0) = 18 \Leftrightarrow a \times (0 - 3) \times (0 + 2) = 18 \Leftrightarrow -6a = 18 \Leftrightarrow a = -3$

102.

$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2p + q = 0 \\ 16 + 4p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -4 - 2p \\ 16 + 4p + (-4 - 2p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -4 - 2p \\ 12 + 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} q = -4 - 2p \\ p = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 8 \\ p = -6 \end{cases}$

103.

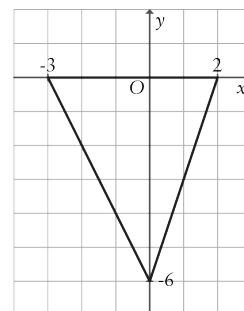
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6$, pelo que o gráfico de f interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -6)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$, pelo que o gráfico de f interseca o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(2, 0)$.

Na figura ao lado está representado o triângulo cujos vértices são estes três pontos.

Tem-se: área do triângulo $= \frac{5 \times 6}{2} = 15$ unidades de área



104.

$f(0) = -1$, pelo que o ponto P é o ponto de coordenadas $(0, -1)$

A circunferência de centro na origem e que passa por P interseca o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Como o gráfico de f passa por estes dois pontos, -1 e 1 são zeros de f ,

pelo que podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $f(x)$ por $(x + 1)(x - 1)$ e, podemos, em seguida, fatorizá-lo.

Tem-se:

	1	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-1
-1		-1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1
	1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	-1	$0 = R$
1		1	$-\frac{5}{2}$	1	
	1	$-\frac{5}{2}$	1	$0 = R$	

Então, tem-se $f(x) = (x + 1)(x - 1)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)$

Ora, $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$,

pelo que os quatro zeros de f são -1 , $\frac{1}{2}$, 1 e 2 .

105.

a)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

c)

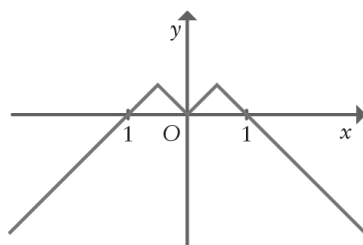
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

d)

x	$-\infty$	$+\infty$
$i(x)$	+	

106.

a) O gráfico de f pode ser, por exemplo:



b₁) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$; o conjunto-solução da condição $f(x) = 0$ é $\{-1, 0, 1\}$

b₂) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$; o conjunto-solução da condição $f(x) > 0$ é $] -1, 0[\cup] 0, 1[=] -1, 1[\setminus \{0\}$
b₃) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$; o conjunto-solução da condição $f(x) \geq 0$ é $[-1, 1]$
b₄) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$; o conjunto-solução da condição $f(x) < 0$ é $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$
b₅) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x = 0 \vee x \geq 1$; o conjunto-solução da condição $f(x) \leq 0$ é $] -\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$

107.

a) f não é majorada:

Se existisse um número real M que fosse um majorante de f , ter-se-ia $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \sqrt{x} \leq M$

Ora, para qualquer número real positivo M , a proposição $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \sqrt{x} \leq M$ é falsa pois,

para, por exemplo, $x = (M + 1)^2$, tem-se $\sqrt{x} = \sqrt{(M + 1)^2} = M + 1 > M$

g é majorada:

Para $x > 0$, tem-se $-\frac{1}{x} < 0$, pelo que $1 - \frac{1}{x} < 1$; 1 é um majorante de g .

h é majorada:

Para qualquer número real x , tem-se $-x^2 \leq 0$, pelo que $4 - x^2 \leq 4$; 4 é um majorante de h .

i não é majorada:

O gráfico de i , num plano onde se instalou um referencial cartesiano, é a semirreta definida

por $y = 2x + 4 \wedge x \geq -2$, pelo que, para qualquer número real M ,

existe pelo menos um número real x tal que $i(x) > M$

b) f é minorada:

Para qualquer número real não negativo x , tem-se $\sqrt{x} \geq 0$; 0 é um minorante de h .

g não é minorada:

Seja g_1 a função de domínio $]0, +\infty[$, definida por $g_1(x) = \frac{1}{x}$ (recorda o gráfico desta função)

O gráfico de g é a imagem do gráfico de g_1 por meio da reflexão de eixo Ox seguida da translação vertical associada ao vetor $(1, 0)$, pelo que o contradomínio de g é o intervalo $] -\infty, 1[$. Portanto, não existe m para o qual $m \leq g(x), \forall x \in D_g$

h não é minorada:

Seja h_1 a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h_1(x) = x^2$ (recorda o gráfico desta função)

O gráfico de h é a imagem do gráfico de h_1 por meio da reflexão de eixo Ox seguida da translação vertical associada ao vetor $(4, 0)$, pelo que o contradomínio de h é o intervalo $] -\infty, 4]$. Portanto, não existe m para o qual $m \leq h(x), \forall x \in D_h$

i é minorada:

O gráfico de i , num plano onde se instalou um referencial cartesiano, é a semirreta

definida por $y = 2x + 4 \wedge x \geq -2$. A origem desta semirreta é o ponto de coordenadas $(-2, 0)$,

pelo que $\forall x \in D_i, i(x) \geq 0$; 0 é um minorante de i .

Pág. 83

108.

f não é limitada:

Se existisse um número real M que fosse um majorante de f , ter-se-ia $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \leq M$

Ora, para qualquer número real M , a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \leq M$ é falsa pois, para, por exemplo, $x = \sqrt[3]{M+1}$, tem-se $x^3 = (\sqrt[3]{M+1})^3 = M+1 > M$; logo, f não é majorada. De modo análogo, provar-se-ia que f não é minorada.

g é limitada:

Para qualquer número real x , tem-se $|x| + 2 \geq 2$ pelo que $0 < \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{2}$ e, então,

$0 < \frac{6}{|x|+2} \leq 3$; 0 é um minorante de g e 3 é um majorante de g .

h é limitada:

O gráfico de h , num plano onde se instalou um referencial cartesiano, é o segmento de reta definido por $y = 2 - 2x \wedge -3 \leq x \leq 2$. Os extremos deste segmento de reta são os pontos de coordenadas $(-3, 8)$ e $(2, -2)$ pelo que $\forall x \in D_h, -2 \leq h(x) \leq 8$; -2 é um minorante de h e 8 é um majorante de h .

i não é limitada:

O gráfico de i , num plano onde se instalou um referencial cartesiano, é a reta definida por $y = \frac{1}{2}x + 2$, pelo que i não é minorada nem majorada.

109.

Como D'_f está contido no intervalo $[-3, 6]$, tem-se $\forall x \in D_f, -3 \leq f(x) \leq 6$, pelo que f é limitada.

110.

Como g é limitada, existem m e M tais que $\forall x \in D_g, m \leq g(x) \leq M$

Como o contradomínio de f está contido no contradomínio de g , D'_f está contido no intervalo $[m, M]$, pelo que, como $\forall x \in D_f, m \leq f(x) \leq M$, f é limitada.

111.

Como o domínio de f é um conjunto com um número finito de elementos, também o contradomínio de f é um conjunto com um número finito de elementos.

Se todas as imagens por meio de f forem iguais, o contradomínio é um conjunto constituído por um único elemento, pelo que f é limitada.

Caso contrário, designemos por a a menor das imagens e por b a maior das imagens por meio de f .

Tem-se, então $\forall x \in D_f, a \leq f(x) \leq b$, pelo que f é limitada.

112.

Tem-se:

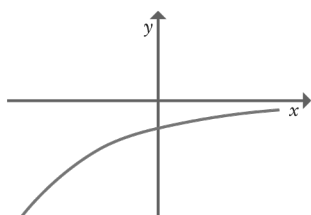
$-7 < f(x) \leq 8 \Leftrightarrow -7 < f(3x-1) \leq 8 \Leftrightarrow -14 < 2f(3x-1) \leq 16 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -16 \leq -2f(3x-1) < 14 \Leftrightarrow -11 \leq -2f(3x-1) + 5 < 19 \Leftrightarrow -11 \leq g(x) < 19$
 -11 é um minorante de g e 19 é um majorante de g .

113.

Para que f seja crescente, como se tem $4 < 5 < 6$, tem que ter-se $f(4) < f(5) < f(6)$ ou seja $-3 < y < 0$. Como $y \in A$, tem que ser $y = -1$

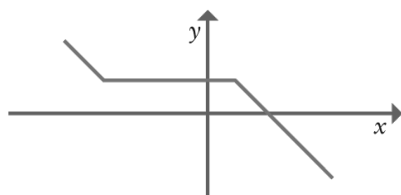
114.

Por exemplo:



115.

Por exemplo:

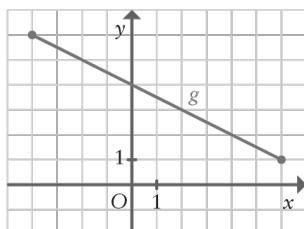


116.

a) O gráfico de g , num plano onde se instalou um referencial cartesiano, é o segmento de reta definido por

$$y = -\frac{1}{2}x + 4 \wedge -4 \leq x \leq 6$$

Os extremos deste segmento de reta são os pontos de coordenadas $(-4,6)$ e $(6,1)$, pelo que a representação gráfica de g é a seguinte.



b) $D'_g = [1,6]$

c) O mínimo absoluto de g é 1 e o máximo absoluto de g é 6.

117.

Tem-se, quaisquer que sejam os números reais a e b :

$b > a \Rightarrow -2b < -2a \Rightarrow -2b + 3 < -2a + 3 \Rightarrow f(b) < f(a)$, pelo que f é decrescente.

118.

Tem-se, quaisquer que sejam os números reais a e b pertencentes a $] - \infty, 2]$:

$b > a \Rightarrow b - 2 > a - 2 \Rightarrow$ (pois $b - 2 \leq 0 \wedge a - 2 < 0$)

$\Rightarrow (b - 2)^2 < (a - 2)^2 \Rightarrow -3(b - 2)^2 > -3(a - 2)^2 \Rightarrow -3(b - 2)^2 + 5 > -3(a - 2)^2 + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(b) > f(a)$ pelo que f é crescente em $] - \infty, 2]$

Tem-se, quaisquer que sejam os números reais a e b pertencentes a $[2, +\infty[$:

$b > a \Rightarrow b - 2 > a - 2 \Rightarrow$ (pois $a - 2 \geq 0 \wedge b - 2 > 0$)

$\Rightarrow (b - 2)^2 > (a - 2)^2 \Rightarrow -3(b - 2)^2 < -3(a - 2)^2 \Rightarrow -3(b - 2)^2 + 5 < -3(a - 2)^2 + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(b) < f(a)$ pelo que f é decrescente em $[2, +\infty[$

119.

- a) $V_2(5) =]5 - 2,5 + 2[=]3,7[$ c) $V_{\frac{1}{3}}(0) =]0 - \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{3}[=]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$
b) $V_1(1) =]1 - 1,1 + 1[=]0,2[$ d) $V_{0,01}(-3) =]-3 - 0,01; -3 + 0,01[=]-3,01; -2,99[$

120.

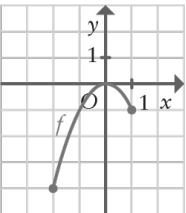
- a) $[-3,5] \cap V_2(4) = [-3,5] \cap]2,6[=]2,5]$
b) $[-2,1[\cap V_1(-1) = [-2,1[\cap]-2,0[=]-2,0[$
c) $] - 4, +\infty[\cap V_2(-4) =] - 4, +\infty[\cap] - 6, -2[=] - 4, -2[$

Pág. 84

121.

- a) Por exemplo, em $] - 3, -1]$, em $[0,2]$ e em $[3,5]$
b) Por exemplo, em $[-5, -3]$, em $[-1,0]$ e em $[2,3]$
c) O mínimo absoluto de f é -5 e o máximo absoluto de f é 3 .
d) Um mínimo relativo de f é -4 , sendo, neste caso, 0 o minimizante; o raio, r , de uma vizinhança de 0 para a qual se tem que a imagem de 0 é a menor das imagens, é, por exemplo, $0,5$.
O outro mínimo relativo de f é -5 , sendo, neste caso, 3 o minimizante; o raio, r , de uma vizinhança de 3 para a qual se tem que a imagem de 3 é a menor das imagens, é, por exemplo, $0,5$.
e) Um máximo relativo de f é 3 , sendo, neste caso, -5 o maximizante; o raio, r , de uma vizinhança de -5 para a qual se tem que a imagem de -5 é a maior das imagens, é, por exemplo, $0,5$.
Outro máximo relativo de f é -3 , sendo, neste caso, -1 e 5 os maximizantes; o raio, r , de uma vizinhança de -1 para a qual se tem que a imagem de -1 é a maior das imagens, é, por exemplo, $0,5$; o raio, r , de uma vizinhança de 5 para a qual se tem que a imagem de 5 é a maior das imagens, é, por exemplo, 2 .
O outro máximo relativo de f é -2 , sendo, neste caso, 2 o maximizante; o raio, r , de uma vizinhança de 2 para a qual se tem que a imagem de 2 é a maior das imagens, é, por exemplo, 1 .

122.

- a)  b) O mínimo absoluto de f é -4 e o máximo absoluto de f é 0 .
c) Um mínimo relativo de f é -4 , sendo, neste caso, -2 o minimizante; o raio, r , de uma vizinhança de -2 para a qual se tem que a imagem de -2 é a menor das imagens, é, por exemplo, 1 .
O outro mínimo relativo de f é -1 , sendo, neste caso, 1 o minimizante; o raio, r , de uma vizinhança de 1 para a qual se tem que a imagem de 1 é a menor das imagens, é, por exemplo, 1 .

123.

- a) Tem-se, quaisquer que sejam os números reais a e b :
 $b > a \Rightarrow$ (pois f é decrescente)
 $\Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow -f(b) > -f(a) \Rightarrow g(b) > g(a)$, pelo que g é crescente.
b) Tem-se, quaisquer que sejam os números reais a e b :
 $b > a \Rightarrow -b < -a \Rightarrow$ (pois f é decrescente)
 $\Rightarrow f(-b) > f(-a) \Rightarrow h(b) > h(a)$, pelo que h é crescente.

124.

a) Tem-se, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a > b \Rightarrow (f \text{ é decrescente})$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow (f \text{ é decrescente})$$

$$\Rightarrow f[f(a)] > f[f(b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(a) > (f \circ f)(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(a) > g(b)$$

Então, $\forall a, b \in D_g, a > b \Rightarrow g(a) > g(b)$, pelo que g é crescente.

b) Tem-se, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a > b \Rightarrow (f \text{ é decrescente})$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow (h \text{ é crescente})$$

$$\Rightarrow h[f(a)] < h[f(b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h \circ f)(a) < (h \circ f)(b)$$

Então, $\forall a, b \in D_{h \circ f}, a > b \Rightarrow (h \circ f)(a) < (h \circ f)(b)$, pelo que $h \circ f$ é decrescente.

125.

a) Tem-se $f(a) = -6a^2$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(a, -6a^2)$, e $f(b) = -6b^2$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(b, -6b^2)$

Então, o declive da reta AB é dado por

$$m_{AB} = \frac{-6b^2 - (-6a^2)}{b-a} = \frac{-6b^2 + 6a^2}{b-a} = \frac{-6(b^2 - a^2)}{b-a} = \frac{-6(b-a)(b+a)}{b-a} = -6(b+a) = -6b - 6a$$

b) Tem-se: $P(p, -6p^2)$, $Q(q, -6q^2)$ e $R(r, -6r^2)$, com $p < q < r$

Então, de modo análogo ao da alínea anterior se mostra que

$$m_{PQ} = -6q - 6p = -6(q+p) \quad \text{e} \quad m_{QR} = -6r - 6q = -6(r+q)$$

Como $p < r$, tem-se $p+q < r+q$, pelo que $-6(p+q) > -6(r+q)$ ou seja $m_{PQ} > m_{QR}$

Pode concluir-se que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

126.

a) Tem-se $f(a) = 4a^2 + 3a + 2$, pelo que A é o ponto de coordenadas

$(a, 4a^2 + 3a + 2)$, e $f(b) = 4b^2 + 3b + 2$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(b, 4b^2 + 3b + 2)$

Então, o declive da reta AB é dado por

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{4b^2 + 3b + 2 - (4a^2 + 3a + 2)}{b-a} = \frac{4b^2 + 3b + 2 - 4a^2 - 3a - 2}{b-a} = \frac{4b^2 - 4a^2 + 3b - 3a}{b-a} \\ &= \frac{4(b^2 - a^2) + 3(b-a)}{b-a} = \\ &= \frac{4(b-a)(b+a) + 3(b-a)}{b-a} = 4(b+a) + 3 = 4b + 4a + 3 \end{aligned}$$

b) Tem-se: $P(p, 4p^2 + 3p + 2)$, $Q(q, 4q^2 + 3q + 2)$ e $R(r, 4r^2 + 3r + 2)$, com $p < q < r$

Então, de modo análogo ao da alínea anterior se mostra que

$$m_{PQ} = 4q + 4p + 3 = 4(q+p) + 3 \quad \text{e} \quad m_{QR} = 4r + 4q + 3 = 4(r+q) + 3$$

Como $p < r$, tem-se $p+q < r+q$, pelo que $4(p+q) + 3 < 4(r+q) + 3$ ou

seja $m_{PQ} < m_{QR}$

Pode concluir-se que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Pág. 85

127.

a) A expressão $\frac{1}{x^2+1}$ não define uma função quadrática.

b) Tem-se $\frac{(x-1)(4-x)}{2} = \frac{4x-x^2-4+x}{2} = \frac{-x^2+5x-4}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$, pelo que a expressão $\frac{(x-1)(4-x)}{2}$ define uma função quadrática e tem-se $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ e $c = -2$

c) Tem-se $(x+2)^2 - (4-x)^2 = x^2 + 4x + 4 - (16 - 8x + x^2) = x^2 + 4x + 4 - 16 + 8x - x^2 = 12x - 12$, pelo que a expressão $(x+2)^2 - (4-x)^2$ não define uma função quadrática.

d) Tem-se $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = x^2 - 2$, pelo que a expressão $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ define uma função quadrática, e tem-se $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$

Pág. 87

128.

O gráfico verde passa no ponto de coordenadas (1,1). Então, tem-se: gráfico verde $\rightarrow f$

O gráfico laranja pode ser obtido, a partir do gráfico da função f , por meio de uma dilatação vertical.

Então, tem-se: gráfico laranja $\rightarrow g$

Os gráficos roxo e vermelho podem ser obtidos, cada um, a partir do gráfico da função f ,

por meio de uma contração vertical. Como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, tem-se: gráfico vermelho $\rightarrow h$ e gráfico roxo $\rightarrow i$

O gráfico da função j , o gráfico amarelo, pode ser obtido, a partir do gráfico da função i ,

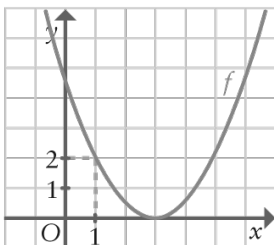
por meio de uma reflexão de eixo Ox , pelo que se tem $j(x) = -i(x) = -\frac{1}{2}x^2$

129

a) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 2, para o qual 3 é raiz de multiplicidade 2, $f(x)$ é da forma $a(x-3)^2$, com $a \neq 0$

Como $f(1) = 2$, tem-se $a(1-3)^2 = 2$, pelo que $a = \frac{1}{2}$. Então, $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$

Gráfico de f :

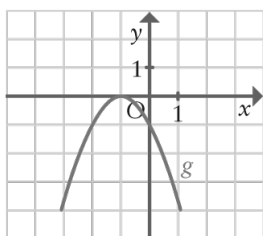


O vértice da parábola é o ponto de coordenadas (3,0)

b) Como $g(x)$ é um polinómio de grau 2, para o qual -1 é raiz de multiplicidade 2, $g(x)$ é da forma $a(x+1)^2$, com $a \neq 0$

Como $g(0) = -1$, tem-se $a(0 + 1)^2 = -1$, pelo que $a = -1$. Então, $g(x) = -(x + 1)^2$

Gráfico de g :



O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$

Pág. 88

130.

a) $f(x) = 2x^2 + 1 = 2(x - 0)^2 + 1$; o vértice tem coordenadas $(0, 1)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = 0$

$g(x) = -(x - 1)^2 = -(x - 1)^2 + 0$; o vértice tem coordenadas $(1, 0)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = 1$

$j(x) = 2(x - 2)^2 - 3$; o vértice tem coordenadas $(2, -3)$ e o eixo de simetria é definido

pela equação $x = 2$ $s(x) = 4 - \frac{(x+1)^2}{2} = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$; o vértice tem coordenadas $(-1, 4)$

e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -1$

b) Como o vértice da parábola que é o gráfico de f tem ordenada igual a 1 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, tem-se $D'_f = [1, +\infty[$

Como o vértice da parábola que é o gráfico de g tem ordenada igual a 0 e a parábola tem a concavidade voltada para baixo, tem-se $D'_g =]-\infty, 0]$

Como o vértice da parábola que é o gráfico de j tem ordenada igual a -3 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, tem-se $D'_j = [-3, +\infty[$

Como o vértice da parábola que é o gráfico de s tem ordenada igual a 4 e a parábola tem a concavidade voltada para baixo, tem-se $D'_s =]-\infty, 4]$

131.

a) $x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x - 2)^2 - 4$; $a = 1$, $h = 2$ e $k = -4$

b) $x^2 + 6x + 4 = (x^2 + 6x + 9) + 4 - 9 = (x + 3)^2 - 5$; $a = 1$, $h = -3$ e $k = -5$

c) $2(x - 2)(4 - x) = 2(4x - x^2 - 8 + 2x) = 2(-x^2 + 6x - 8) = -2(x^2 - 6x + 8) = -2(x^2 - 6x + 9 - 9 + 8) = -2(x^2 - 6x + 9 - 1) = -2(x^2 - 6x + 9) + 2 = -2(x - 3)^2 + 2$; $a = -2$, $h = 3$ e $k = 2$

d) $3x - x^2 = -(x^2 - 3x) = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$; $a = -1$, $h = \frac{3}{2}$ e $k = \frac{9}{4}$

e) $3 - x^2 = -(x - 0)^2 + 3$; $a = -1$, $h = 0$ e $k = 3$

f) $\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(1 - x)^2 = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 0$; $a = \frac{1}{2}$, $h = 1$ e $k = 0$

132.

Função f :

O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(-2,0)$ e a parábola tem a concavidade voltada para cima, pelo que $f(x)$ é da forma $a(x+2)^2$, com $a > 0$. Como $f(0) = 2$, tem-se $a(0+2)^2 = 2$, pelo que $a = \frac{1}{2}$. Então, $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$

Função g :

O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(2,1)$ e a parábola tem a concavidade voltada para baixo, pelo que $g(x)$ é da forma $a(x-2)^2 + 1$, com $a < 0$. Como $g(3) = -1$, tem-se $a(3-2)^2 + 1 = -1$, pelo que $a = -2$. Então, $g(x) = -2(x-2)^2 + 1$

133.

a) Como $f(x) = 2x^2 - 4 = 2(x-0)^2 - 4$, o vértice tem coordenadas $(0, -4)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = 0$

Como o vértice da parábola tem ordenada igual a -4 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, tem-se $D'_f = [-4, +\infty[$ e a parábola interseca o eixo Ox em dois pontos, pelo que a função tem dois zeros. Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o eixo de simetria é definido pela equação $x = 0$, f é decrescente em $] -\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$

b) Como $g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$, o vértice tem coordenadas $(-1, -3)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -1$

Como o vértice da parábola tem ordenada igual a -3 e a parábola tem a concavidade voltada para baixo, tem-se $D'_g =] -\infty, -3]$, pelo que a função não tem zeros.

Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -1$, g é crescente em $] -\infty, -1]$ e é decrescente em $[-1, +\infty[$

c) Como $h(x) = (x+1)^2 + 4$, o vértice tem coordenadas $(-1, 4)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -1$

Como o vértice da parábola tem ordenada igual a 4 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, tem-se $D'_h = [4, +\infty[$, pelo que a função não tem zeros.

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -1$, h é decrescente em $] -\infty, -1]$ e é crescente em $[-1, +\infty[$

d) Como $j(x) = 2(x+3)^2$, o vértice tem coordenadas $(-3, 0)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -3$

Como o vértice da parábola tem ordenada igual a 0 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, tem-se $D'_j = [0, +\infty[$ e a parábola interseca o eixo Ox num único ponto, pelo que a função tem um zero.

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -3$, j é decrescente em $] -\infty, -3]$ e é crescente em $[-3, +\infty[$

Pág. 90

134.

Se $k = 0$, f é a função definida por $f(x) = -3x - 1$. Se $k \neq 0$, f é uma função quadrática.

a) A função tem dois zeros se e só se $k \neq 0 \wedge \Delta > 0$. Tem-se:

$$k \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge (-3)^2 - 4 \times k \times (-1) > 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge 9 + 4k > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k > -\frac{9}{4} \Leftrightarrow k \in]-\frac{9}{4}, +\infty[\setminus \{0\}$$

b) A função é sempre positiva se e só se $k > 0 \wedge \Delta < 0$. Tem-se:

$$k > 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow k > 0 \wedge k < -\frac{9}{4} \Leftrightarrow k \in \emptyset$$

$$\text{c) Tem-se: } f(x) = kx^2 - 3x - 1 = k\left(x^2 - \frac{3}{k}x\right) - 1 = k\left(x^2 - \frac{3}{k}x + \frac{9}{4k^2} - \frac{9}{4k^2}\right) - 1 = \\ = k\left(x^2 - \frac{3}{k}x + \frac{9}{4k^2}\right) - \frac{9}{4k} - 1 = k\left(x - \frac{3}{2k}\right)^2 + \left(-\frac{9}{4k} - 1\right)$$

O vértice da parábola tem coordenadas $\left(\frac{3}{2k}, -\frac{9}{4k} - 1\right)$

A função tem contradomínio $] -\infty, 2]$ se e só se $k < 0 \wedge -\frac{9}{4k} - 1 = 2$. Tem-se:

$$k < 0 \wedge -\frac{9}{4k} - 1 = 2 \Leftrightarrow k < 0 \wedge -\frac{9}{4k} = 3 \Leftrightarrow k < 0 \wedge 4k = -3 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Pág. 91

135.

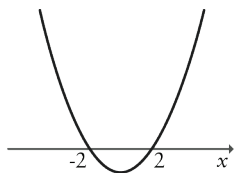
$$\text{a) Tem-se: } x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 4$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$; conjunto-solução = $[-2, 2]$

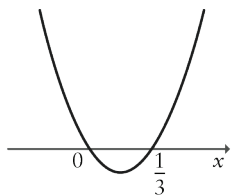
$$\text{b) Tem-se: } x \leq 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x \geq 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 3x^2 - x$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $3x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{3}$; conjunto-solução = $] -\infty, 0] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[$

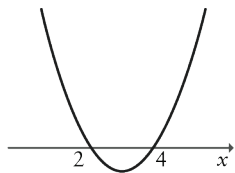
c) Tem-se: $x^2 + 8 > 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Um esboço do gráfico de f é:



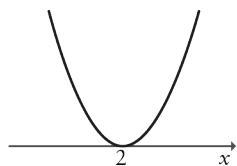
Então, $x^2 - 6x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 4$; conjunto-solução = $] -\infty, 2] \cup [4, +\infty[$

d) Tem-se: $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \leq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = (x - 2)^2$

O gráfico de f pode ser obtido, a partir do gráfico da função definida pela expressão x^2 , por meio de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(2,0)$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $(x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{2\}$; conjunto-solução = $\{2\}$

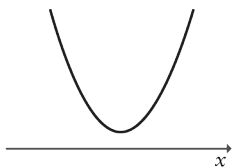
e) Tem-se: $3x - 6 \leq 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 6 \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 48}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-39}}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset; f \text{ não tem zeros.}$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $2x^2 - 3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; conjunto-solução = $\mathbb{R}$

136.

Para que f possa ter domínio $\mathbb{R}$ é necessário que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + 4 \neq 0$

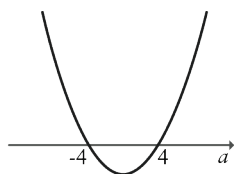
Ora, o polinômio $x^2 + ax + 4$ não se anula se e só se $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 < 0$$

Consideremos a função quadrática, h , definida por $h(a) = a^2 - 16$

$$h(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 4$$

Um esboço do gráfico de h é:



Então, $a^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow a \in] -4, 4[$

137.

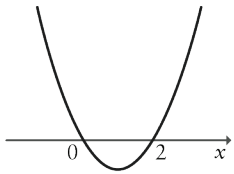
Resolução analítica:

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 \leq 3x - x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x \leq 0$$

Consideremos a função quadrática, h , definida por $h(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Um esboço do gráfico de h é:



$$\text{Então, } \frac{3}{2}x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$$

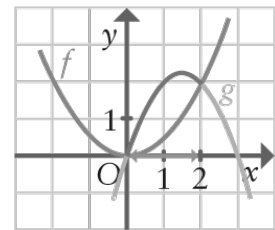
Resolução gráfica:

Representaram-se, no mesmo referencial, os gráficos das funções f e g e

identificaram-se os pontos de interseção dos gráficos (pontos cujas abscissas são 0 e 2).

As soluções da inequação $f(x) \leq g(x)$ são os valores de x para os quais o gráfico de f se encontra abaixo ou sobreposto ao gráfico de g .

Então, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [0, 2]$



Pág. 92

138.

Para que g seja negativa para qualquer x real é necessário e suficiente que não tenha zeros.

Ora, o polinómio $-2x^2 + bx + 6$ não tem zeros se e só se $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4 \times (-2) \times 6 < 0 \Leftrightarrow b^2 + 48 < 0$$

Ora, $b^2 + 48 < 0$ é uma condição impossível, pelo que o conjunto-solução é o conjunto vazio.

139.

A função h é positiva para qualquer x real se e só se $k + 3 > 0 \wedge \Delta < 0$. Tem-se:

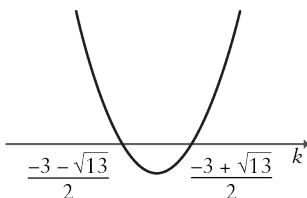
$$k + 3 > 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow k > -3 \wedge 4 - 4 \times (k + 3) \times k < 0 \Leftrightarrow k > -3 \wedge -4k^2 - 12k + 4 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k > -3 \wedge k^2 + 3k - 1 > 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(k) = k^2 + 3k - 1$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(k) = 0 \Leftrightarrow k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (-4)}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \vee k = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Um esboço do gráfico de f é:



$$\text{Então, } k^2 + 3k - 1 > 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty[$$

Portanto,

$$k > -3 \wedge k^2 + 3k - 1 > 0 \Leftrightarrow k > -3 \wedge k \in]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty[\Leftrightarrow k \in]\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty[$$

140.

A função j tem dois zeros e é negativa entre eles se e só se $2m - 1 > 0 \wedge \Delta > 0$. Tem-se:

$$2m - 1 > 0 \wedge 9m^2 - 4 \times (2m - 1) \times (m + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2m > 1 \wedge 9m^2 - 4 \times (2m^2 + m - 1) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \wedge 9m^2 - 8m^2 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \wedge m^2 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \wedge (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \wedge m \neq 2 \Leftrightarrow m \in]\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{2\}$$

Pág. 93

141.

Qualquer reta paralela à reta de equação $y = -x + 4$ é da forma $y = -x + b$

A reta interseca a parábola de equação $y = -x^2 + 3$ num único ponto se e só se a condição

$-x^2 + 3 = -x + b$ tiver uma e uma só solução.

$$-x^2 + 3 = -x + b \Leftrightarrow -x^2 + x + 3 - b = 0$$

$-x^2 + x + 3 - b = 0$ tem uma e uma só solução se e só se $1^2 - 4 \times (-1) \times (3 - b) = 0$

$$1^2 - 4 \times (-1) \times (3 - b) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4(3 - b) = 0 \Leftrightarrow 13 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{13}{4}$$

Então, a equação da reta é $y = -x + \frac{13}{4}$

142.

Os valores de b para os quais as retas não intersetem a parábola são aqueles para os quais a condição

$x^2 - 3x = 3x + b$ é impossível.

$$x^2 - 3x = 3x + b \Leftrightarrow x^2 - 6x - b = 0$$

$x^2 - 6x - b = 0$ é impossível se e só se $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-b) < 0 \Leftrightarrow 36 + 4b < 0 \Leftrightarrow b < -9 \Leftrightarrow b \in]-\infty, -9[$$

Pág. 94

143.

$$\text{a)} f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

Como a abcissa do vértice é a média aritmética dos zeros, é igual a $\frac{0+6}{2} = 3$

A ordenada do vértice da parábola é a imagem da abcissa do vértice: $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 = -9$

b₁) Tem-se $g(x) = x^2 - 6x + 2 = f(x) + 2$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0,2)$

Então, o vértice da parábola que é gráfico de g é o ponto de coordenadas $(3, -9) + (0,2) = (3, -7)$

b₂) Tem-se $h(x) = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -f(x)$, pelo que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox

Então, o vértice da parábola que é gráfico de h é o ponto de coordenadas $(3,9)$

b₃) Tem-se $h(x) = f(x - 2) + 1$, pelo que o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(2,1)$

Então, o vértice da parábola que é gráfico de g é o ponto de coordenadas $(3, -9) + (2,1) = (5, -8)$

144.

a) Como o gráfico de g é uma parábola, g é uma função quadrática.

Como -3 e 2 são zeros de g , o polinómio $g(x)$ é da forma $a(x + 3)(x - 2)$, com $a \neq 0$

Como o ponto de coordenadas $(0,3)$ pertence ao gráfico de g , tem-se $a \times (0 + 3) \times (0 - 2) = 3$, pelo que $a = -\frac{1}{2}$

Então, tem-se $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 2) = -\frac{1}{2}(x^2 + x - 6) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

b) Como a abscissa do vértice da parábola é a média aritmética dos zeros, é igual a $\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

A ordenada do vértice é a imagem da abscissa do vértice:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3 = \frac{25}{8}$$

c) Como as coordenadas do vértice da parábola são $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$, tem-se

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

Pág. 95

145.

a) $d(0) = -0,5 \times 0^2 + 0 + 1,5 = 1,5$ metros

b) a representa o tempo que decorre até o projétil atingir o solo.

$$d(a) = 0 \Leftrightarrow -0,5a^2 + a + 1,5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-0,5) \times 1,5}}{2 \times (-0,5)} \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{-1} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 3$$

Como $a > 0$, $a = 3$

c) A abscissa do vértice da parábola que é gráfico de d é igual a $-\frac{1}{2 \times (-0,5)}$, ou seja, 1, pelo que o projétil atinge a altura máxima ao fim de 1 segundo.

$$d(1) = -0,5 + 1 + 1,5 = 2, \text{ pelo que a altura máxima atingida pelo projétil é 2 metros.}$$

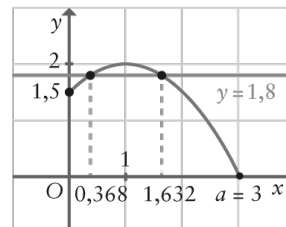
d) Tem-se, tal como ilustrado na figura ao lado:

$$-0,5t^2 + t + 1,5 = 1,8 \Leftrightarrow -0,5t^2 + t - 0,3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-0,5) \times (-0,3)}}{2 \times (-0,5)} \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 0,6}}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1 - \sqrt{0,4} \approx 0,368 \vee t = 1 + \sqrt{0,4} \approx 1,623$$

Então, o projétil esteve a uma altura superior a 18 decímetros entre os instantes $t = 0,368$ e $t = 1,623$, ou seja, durante $1,623 - 0,368 \approx 1,3$ segundos.



Pág. 96

146.

a) Para que, relativamente a uma função quadrática f , se tenha $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 4]$, os zeros de f têm que ser -1 e 4 e a concavidade da parábola que é gráfico de f tem que estar voltada para baixo. Então, pode ser, por exemplo, $f(x) = -(x + 1)(x - 4)$

b) Para que uma função quadrática f tenha contradomínio $]-\infty, -2]$, a concavidade da parábola que é gráfico de f tem que estar voltada para baixo e a ordenada do vértice tem que ser igual a -2 .

Então, pode ser, por exemplo, $f(x) = -(x - 1)^2 - 2$

147.

a) Para que, relativamente a uma função quadrática f , se tenha $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$, os zeros de f têm que ser 1 e 5 e a concavidade da parábola que é gráfico de f tem que estar voltada para cima.

Então, $f(x)$ é uma expressão da forma $a(x - 1)(x - 5)$, com $a > 0$

Para que o mínimo da função seja igual a -2 , a ordenada do vértice tem que ser igual a -2 .

Como a abscissa do vértice é igual a $\frac{1+5}{2} = 3$, o vértice é o ponto de coordenadas $(3, -2)$

Então, tem-se: $a \times (3 - 1) \times (3 - 5) = -2$ pelo que $a = \frac{1}{2}$

Então, $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$

b) Para que uma função quadrática f seja crescente em $] -\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, +\infty[$, a concavidade da parábola que é gráfico de f tem que estar voltada para baixo e a abscissa do vértice tem que ser igual a -1 . Para que o extremo seja igual a 2 , a ordenada do vértice tem que ser igual a 2 .

Então, $f(x)$ é uma expressão da forma $a(x + 1)^2 + 2$, com $a < 0$

Como o gráfico de f passa na origem do referencial, tem-se: $a \times (0 + 1)^2 + 2 = 0$ pelo que $a = -2$

Então, $f(x) = -2(x + 1)^2 + 2$, com $a < 0$

148.

a) Para $x = 3$, tem-se $\overline{AP} = 3$ e $\overline{PB} = 3$ pelo que $f(3) = 3^2 + \frac{3 \times 3}{2} = 13,5$ unidades de área

b) $f(x) = \overline{AP}^2 + \frac{\overline{PB} \times \overline{PB}}{2} = x^2 + \frac{(6-x)^2}{2} = x^2 + \frac{36-12x+x^2}{2} = x^2 + 18 - 6x + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 18$

No contexto do problema, x pode tomar todos os valores do intervalo $]0, 6[$

c) O valor de x para o qual $f(x)$ é mínima é a abscissa do vértice da parábola.

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times (\frac{3}{2})} = 2$

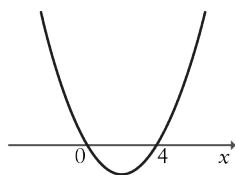
d) $f(x) \geq 18 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x + 18 \geq 18 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x \geq 0$

Consideremos a função quadrática, g , definida por $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$

Determinemos, se existirem, os zeros de g :

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(\frac{1}{2}x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Um esboço do gráfico de g é:



Então, $\frac{3}{2}x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

Como $D_f =]0, 6[$, tem-se $f(x) \geq 18 \Leftrightarrow x \in (]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[) \cap]0, 6[= [4, 6[$

149.

a) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são -1 , 2 e 3 , $f(x)$ é da forma $a(x+1)(x-2)(x-3)$, com $a \neq 0$

Como $f(0) = 1$, tem-se $a \times (0+1) \times (0-2) \times (0-3) = 1$, pelo que $a = \frac{1}{6}$

Então, $f(x) = \frac{1}{6}(x+1)(x-2)(x-3)$

b) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são 1 (com multiplicidade 2) e -3 , $f(x)$ é da forma $a(x-1)^2(x+3)$, com $a \neq 0$

Como $f(0) = 2$, tem-se $a(0-1)^2(0+3) = 2$ pelo que $a = \frac{2}{3}$

Então, $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^2(x+3)$

150.

a) $f(-1) = 0 \Leftrightarrow a \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

b₁) Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x+1$

Tem-se:

	-2	-3	0	1
-1		2	1	-1
	-2	-1	1	0 = R

Então, tem-se $f(x) = (x+1)(-2x^2 - x + 1)$

Ora, $-2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times 1}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{-4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

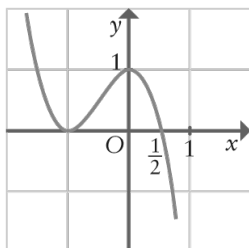
Então, tem-se:

$f(x) = (x+1)(-2x^2 - x + 1) = (x+1) \times (-2) \times (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+1)^2(-2x+1)$

b₂) Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função f .

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
$-2x+1$	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	+	0	-

b₃)



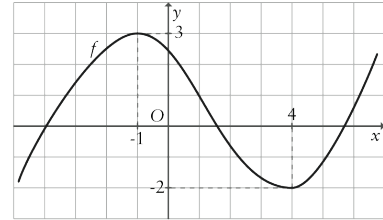
151.

Na figura ao lado está representado o esboço do gráfico de uma função cúbica f nas condições do enunciado.

O gráfico da função g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $(-2, -1)$

Então, tem-se:

- g é crescente em $] -\infty, -3]$ e em $[2, +\infty[$
- g é decrescente em $[-3, 2]$
- O máximo relativo de g é 2 e o mínimo relativo de g é -3



Pág. 99

152.

Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

Então, A é o ponto do gráfico de f de abscissa 6, pelo que se tem $x \in]0, 6[$

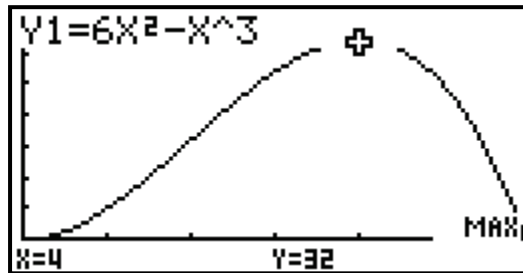
Para cada posição do ponto P , a área do retângulo é igual ao produto das coordenadas do ponto P , pois a base do retângulo é igual à abscissa do ponto P e a altura do retângulo é igual à ordenada.

Ora, para cada x , a ordenada de P é dada por $6x - x^2$

O produto das coordenadas de P é dado por $6x^2 - x^3$

A função que dá a área do retângulo é a função a , de domínio $]0, 6[$, tal que $a(x) = 6x^2 - x^3$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico de a e o valor de x para o qual é máximo:



A área é máxima para $x = 4$

153.

a) $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0$

Tem-se: $x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinais:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x^2(x - 1)$	-	0	-	0	+

Então, $x^2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty, 1[\setminus\{0\}$; conjunto-solução = $] -\infty, 1[\setminus\{0\}$

b) $(x^2 - 9)(x + 2) \leq 0$

Tem-se: $(x^2 - 9)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -2$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	-3		-2		3	$+\infty$
$x^2 - 9$	+	0	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 9)(x + 2)$	-	0	+	0	-	0	+

Então, $(x^2 - 9)(x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty, -3] \cup [-2, 3]$; conjunto-solução = $] - \infty, -3] \cup [-2, 3]$

c) $(x - 1)^3 - 2(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2[(x - 1) - 2] \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

Tem-se: $(x - 1)^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinais:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$(x - 1)^2(x - 3)$	-	0	-	0	+

Então, $(x - 1)^2(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{1\} \cup [3, +\infty[$; conjunto-solução = $\{1\} \cup [3, +\infty[$

d) Como o polinómio tem coeficientes inteiros e as raízes do polinómio são inteiras, então -12

é um múltiplo inteiro de cada uma delas, pelo que todas as raízes do polinómio

pertencem ao conjunto $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Seja $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Tem-se:

$P(-12) = -1260 \rightarrow -12$ não é raiz de $P(x)$

$P(-6) = -96 \rightarrow -6$ não é raiz de $P(x)$

$P(-4) = -12 \rightarrow -4$ não é raiz de $P(x)$

$P(-3) = 0 \rightarrow -3$ é raiz de $P(x)$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $P(x)$ por $x + 3$

Tem-se:

	1	3	-4	-12
-3		-3	0	12
	1	0	-4	0 = R

Então, tem-se $P(x) = (x + 3)(x^2 - 4)$

Nota que a fatorização do polinómio $P(x)$ poderia, neste caso, ter sido obtida do seguinte modo:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4)$$

Tem-se: $(x + 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2 \vee x = 2$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinais:

x	$-\infty$	-3		-2		2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x + 3)(x^2 - 4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Então, $(x + 3)(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow x \in] - 3 - 2[\cup] 2, +\infty[$; conjunto-solução = $] - 3 - 2[\cup] 2, +\infty[$

Pág. 103

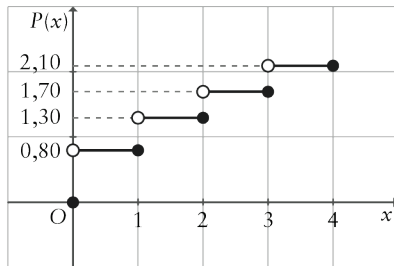
154.

a) O automobilista que deixou o carro no parque durante 1 h e 40 min pagou 0,80 € pela primeira hora e 0,50 € pelos restantes 40 min, ou seja, um total de 1,30 €.

O automobilista que deixou o carro no parque durante 10 horas pagou 0,80 € pela primeira hora, 0,50 € pela segunda hora e 0,40 € por cada uma das restantes oito horas, ou seja, um total de

$$0,80 + 0,50 + 8 \times 0,40 = 4,50 \text{ €}$$

b)



Tem-se:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 0,80 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1,30 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1,70 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 2,10 & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

155.

$$a) f(1) = 3 \times 1 - 1^2 = 2; f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5; f(3) = 3 \times 3 - 3^2 = 0;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \text{ e } f(10) = 10^2 - 4 = 96$$

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow [x^2 - 4 = 0 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 3)] \vee (3x - x^2 = 0 \wedge 0 < x \leq 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x = -2 \vee x = 2) \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 3)] \vee [x(x - 3) = 0 \wedge 0 < x \leq 3] \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{-2, 3\}$$

Pág. 104

156.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1 \\ x - 3 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{Tem-se, por observação do gráfico: } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0 \vee 3 \leq x \leq 5$$

$$\text{Conjunto-solução} = [-2, 0] \cup [3, 5]$$

157.

Tem-se:

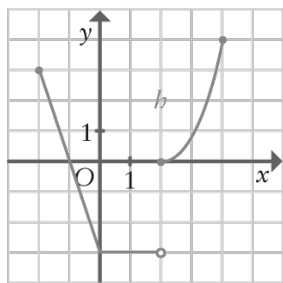
$$\text{Para } -2 \leq x \leq 0:$$

$$h(-2) = -3 \times (-2) - 3 = 6 - 3 = 3 \text{ e } h(0) = -3 \times 0 - 3 = -3$$

O gráfico de h é o segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenada $(-2,3)$ e $(0,-3)$

Para $0 < x < 2$: o gráfico de h está contido na reta de equação $y = -3$

Para $2 \leq x \leq 4$: o gráfico de h está contido na parábola de equação $y = (x - 2)^2$



Tem-se: $D'_h = [-3, 4]$ e $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Pág. 105

158.

Função f : o vértice tem coordenadas $(0,0)$ e $a = 2$, pelo que se tem $f(x) = 2|x|$

Função g : o vértice tem coordenadas $(-1,2)$ e $a = -1$, pelo que se tem $g(x) = -|x + 1| + 2$

Função j : o vértice tem coordenadas $(2,-1)$ e $a = \frac{1}{2}$, pelo que se tem $j(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 1$

a) $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$; conjunto-solução = $\{-2, 0\}$

b) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; conjunto-solução = $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

c) $j(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-2, 6]$; conjunto-solução = $[-2, 6]$

Pág. 107

159.

a) $|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$; conjunto-solução = $\{-4, 4\}$

b) A condição $|2x| = -1$ é impossível; conjunto-solução = $\emptyset$

c) $|x - 3| = 7 \Leftrightarrow x - 3 = -7 \vee x - 3 = 7 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 10$; conjunto-solução = $\{-4, 10\}$

d) $|1 - 2x| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \wedge (1 - 2x = -x + 1 \vee 1 - 2x = x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge (x = 0 \vee x = \frac{2}{3}) \Leftrightarrow x \in \emptyset$; conjunto-solução = $\emptyset$

e) $|x - 3| = |1 - 5x| \Leftrightarrow x - 3 = -1 + 5x \vee x - 3 = 1 - 5x \Leftrightarrow -4x = 2 \vee 6x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{2}{3}$; conjunto-solução = $\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$

160.

a) $|7 - x| < 1 \Leftrightarrow 7 - x > -1 \wedge 7 - x < 1 \Leftrightarrow -x > -8 \wedge -x < -6 \Leftrightarrow x < 8 \wedge x > 6$;

conjunto-solução = $]6, 8[$

b) $|2x - 3| < 5 \Leftrightarrow 2x - 3 > -5 \wedge 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow 2x > -2 \wedge 2x < 8 \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 4$;

conjunto-solução = $] -1, 4[$

c) $1 + |1 - x| > 3 \Leftrightarrow |1 - x| > 2 \Leftrightarrow 1 - x < -2 \vee 1 - x > 2 \Leftrightarrow -x < -3 \vee -x > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 3 \vee x < -1$; conjunto-solução = $] -\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

d) $|-3x| \leq 5 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \wedge -3x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3} \wedge x \geq -\frac{5}{3}$; conjunto-solução = $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$

e) $|8 - 2x| \geq 4 \Leftrightarrow 8 - 2x \leq -4 \vee 8 - 2x \geq 4 \Leftrightarrow -2x \leq -12 \vee -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq 6 \vee x \leq 2$;

conjunto-solução = $] -\infty, 2] \cup [6, +\infty[$

f) $6 - |1 - 2x| \geq 1 \Leftrightarrow -|1 - 2x| \geq -5 \Leftrightarrow |1 - 2x| \leq 5 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq -5 \wedge 1 - 2x \leq 5 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \wedge -2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 3 \wedge x \geq -2$; conjunto-solução = $[-2, 3]$

Pág. 108

161.

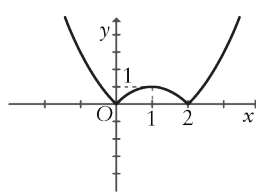
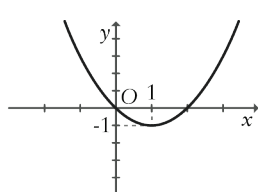
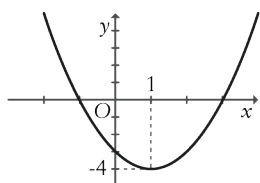
a) A abscissa do vértice é igual a $-\frac{-2}{2 \times 1} = 1$, pelo que a ordenada do vértice é igual a $f(1)$.

Tem-se $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4$

O vértice é, então, o ponto de coordenadas $(1, -4)$

O eixo de simetria é definido pela equação $x = 1$

b) f : $g_1: g_1(x) = f(x) + 3$ $g: g(x) = |f(x) + 3|$



Tem-se o seguinte quadro de monotonia e de extremos relativos da função g :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
g		Mín.		Máx.		Mín.	

Tem-se: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(2) = 0$

c) Os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $g(x) = k$ tem quatro soluções são aqueles para os quais as retas de equação $y = k$ intersectem o gráfico de g em exatamente quatro pontos. Tal acontece para $k \in]0, 1[$

d) Tem-se:

$$g(2+h) = |f(2+h) + 3| = |(2+h)^2 - 2(2+h) - 3 + 3| = |4 + 4h + h^2 - 4 - 2h| = |h^2 + 2h|$$

$$g(2) = 0$$

Então, $\frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{|h^2 + 2h|}{h} = \frac{|h(h+2)|}{h} = \frac{|h| \cdot |h+2|}{h} =$ ($|h| = h$ pois $h > 0$)

$$= \frac{h \cdot |h+2|}{h} = |h+2| = h+2$$
 ($|h+2| = h+2$ pois $h > 0$)

162.

O gráfico da função f é a imagem do gráfico representado a azul pela translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}(-2, 0)$. Então, tem-se $f(x) = \sqrt{x-2}$

O gráfico da função g é a imagem do gráfico representado a azul pela reflexão de eixo Ox seguida da translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0, 1)$. Então, tem-se $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

163.

Função f^{-1} :

Tem-se, para $x \in D_f$:

- $\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 \geq -2$, pelo que o contradomínio de f é o intervalo $[-2, +\infty[$
- $y = \sqrt{x+1} - 2 \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow (y+2)^2 = x+1 \Leftrightarrow x = (y+2)^2 - 1$

Então, tem-se: $f^{-1}(x) = (x + 2)^2 - 1$, $D_{f^{-1}} = [-2, +\infty[$

Função g^{-1} :

Tem-se, para $x \in D_g$:

• $\sqrt{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3-x} \leq 2$, pelo que o contradomínio de g é o intervalo $] -\infty, 2]$

• $y = 2 - \sqrt{3-x} \Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 2 - y = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow (2-y)^2 = 3-x \Leftrightarrow x = 3 - (2-y)^2$

Então, tem-se: $g^{-1}(x) = 3 - (2-x)^2$, $D_{g^{-1}} =] -\infty, 2]$

Função h^{-1} :

Tem-se, para $x \in D_h$:

• $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2$, pelo que o contradomínio de h é o intervalo $[2, +\infty[$

• $y = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{y-2}$ pois, como $D_h =] -\infty, 0]$, $x \leq 0$

Então, tem-se: $h^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$, $D_{h^{-1}} = [2, +\infty[$

Pág. 110

164.

a) $\sqrt{x+1} + 1 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2x - 1 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(4x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{4}$

Vejamos se 0 é solução da equação inicial:

$\sqrt{0+1} + 1 = 2 \times 0 \Leftrightarrow 2 = 0$, o que é falso. Portanto, 0 não é solução da equação inicial.

Vejamos se $\frac{5}{4}$ é solução da equação inicial:

$\sqrt{\frac{5}{4}+1} + 1 = 2 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}} + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, o que é verdade. Portanto, $\frac{5}{4}$ é solução da equação inicial.

Conjunto-solução = $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

b) $x + \sqrt{2x-3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 3-x \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (3-x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3 = 9-6x+x^2 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6$

Vejamos se 2 é solução da equação inicial:

$2 + \sqrt{2 \times 2 - 3} = 3 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3$, o que é verdade. Portanto, 2 é solução da equação inicial.

Vejamos se 6 é solução da equação inicial:

$6 + \sqrt{2 \times 6 - 3} = 3 \Leftrightarrow 6 + 3 = 3$, o que é falso. Portanto, 6 não é solução da equação inicial.

Conjunto-solução = $\{2\}$

c) $\sqrt{x+2} - x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2+x \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (2+x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2 = 4+4x+x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-1$

Vejamos se -2 é solução da equação inicial:

$\sqrt{-2+2} - (-2) = 2 \Leftrightarrow 0 + 2 = 2$, o que é verdade. Portanto, -2 é solução da equação inicial.

Vejamos se -1 é solução da equação inicial:

$\sqrt{-1+2} - (-1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$, o que é verdade. Portanto, -1 é solução da equação inicial.

Conjunto-solução = $\{-2, -1\}$

165.

a) Tem-se $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in] - \infty, \frac{1}{2}]$

Em $] - \infty, \frac{1}{2}]$ tem-se: $\sqrt{1 - 2x} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 2x} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 1 - 2x < 9 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > -4$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $] - 4, \frac{1}{2}]$

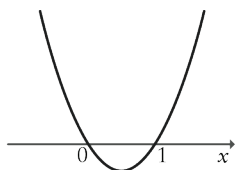
b) Tem-se $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[$ e $x^2 + 1$ é positivo para qualquer número real x

Em $[-1, +\infty[$ tem-se: $\sqrt{x + 1} < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x + 1 < x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - x > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - x$

Determinemos, se existirem, os zeros de f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, em $[-1, +\infty[$ tem-se: $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \vee x > 1$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[-1, 0[\cup]1, +\infty[$

166.

Para que f possa ter domínio $\mathbb{R}$, é necessário que $\forall x \in \mathbb{R}, kx^2 + 4x + 5 - k \geq 0$

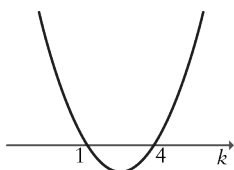
Ora, o polinômio $kx^2 + 4x + 5 - k$ é sempre não negativo se e só se $k > 0 \wedge \Delta \leq 0$

$k > 0 \wedge \Delta \leq 0 \Leftrightarrow k > 0 \wedge 16 - 4k(5 - k) \leq 0 \Leftrightarrow k > 0 \wedge 4k^2 - 20k + 16 \leq 0$

Consideremos a função quadrática, h , definida por $h(k) = 4k^2 - 20k + 16$

Determinemos, se existirem, os zeros de h : $h(k) = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 20k + 16 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 4$

Um esboço do gráfico de h é:



Então, $k > 0 \wedge 4k^2 - 20k + 16 \leq 0 \Leftrightarrow k \in [1, 4]$

167.

a) $\overline{OA} = x$ e $\overline{AP} = \sqrt{x}$, pelo que a área do triângulo $[OAP]$ é dada pela expressão $\frac{x\sqrt{x}}{2}$

Tem-se, para $x \geq 0$: $\frac{x\sqrt{x}}{2} = 4 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow (x\sqrt{x})^2 = 8^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot x = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4$

Então, P é o ponto de coordenadas $(4, 2)$

b) Tem-se, para $x > 0$:

$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = x^2 + (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = x^2 + x \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{x^2 + x}$

Então, a função que, a cada valor de $x > 0$, faz corresponder o perímetro do triângulo $[OAP]$

é definida por $x + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + x}$

Pág. 113

168.

$$\text{a)} D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in]-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} =]-\infty, 1]$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x$$

$$\text{Então, tem-se: } (g \circ f)(x) = 1-x, D_{g \circ f} =]-\infty, 1]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Então, tem-se: } (f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}, D_{f \circ g} = [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{b)} D_{f \circ f} &= \{x \in D_f : f(x) \in D_f\} = \{x \in]-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \leq 1\} = \\ &= \{x \in]-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \leq \sqrt{1}\} = \{x \in]-\infty, 1] : 1-x \leq 1\} = \\ &= \{x \in]-\infty, 1] : x \geq 0\} = [0, 1] \end{aligned}$$

Pág. 114

169.

$$\text{a)} D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D'_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$$

$$y = 8x^3 - 1 \Leftrightarrow 8x^3 = y + 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{y+1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{8}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y+1}}{2}$$

$$\text{Então, tem-se: } f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ e } D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\text{b)} D_g = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D'_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 - \sqrt[3]{1-x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 2-y \Leftrightarrow 1-x = (2-y)^3 \Leftrightarrow 1-x = (2-y)^2(2-y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-x = (4-4y+y^2)(2-y) \Leftrightarrow 1-x = 8-4y-8y+4y^2+2y^2-y^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x = -y^3+6y^2-12y+7 \Leftrightarrow x = y^3-6y^2+12y-7 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } g^{-1}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7, \text{ pelo que se tem}$$

$$g^{-1}(x) = h(x), D_h = D'_g \text{ e } D'_h = D_g$$

Pág. 115

170.

a) O reservatório fica vazio quando a altura da água for zero.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t} = 2 \Leftrightarrow t = 8$$

Como $12 + 8 = 20$, conclui-se que o reservatório fica vazio às 20 horas do dia em que começou a ser esvaziado.

b) A altura da água, no reservatório, às 16 horas desse dia é igual a $h(4)$.

$$h(4) = 2 - \sqrt[3]{4} \approx 0,413 \text{ metros}$$

Como o reservatório é cúbico, a aresta é igual à altura da água quando ele está cheio, ou seja,

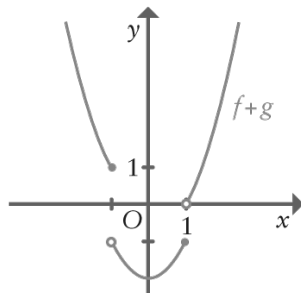
$$\text{quando } t = 0 \quad h(0) = 2 - \sqrt[3]{0} = 2 \text{ metros}$$

Então, o volume de água, às 16 horas desse dia, é igual a $2 \times 2 \times 0,413 \approx 1,65$ metros cúbicos

171.

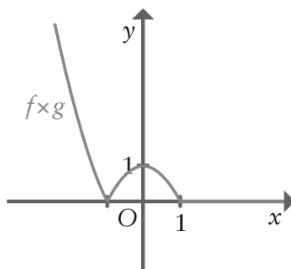
$$\text{a) } (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} f(x) + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ f(x) - 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ f(x) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Então, tem-se a seguinte representação gráfica para $f + g$



$$\text{b) } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq -1 \\ -f(x) & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Então, tem-se a seguinte representação gráfica para $f \times g$



172.

g é uma função afim tal que $(f + g)(0) = 0$

Tem-se $(f + g)(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) + g(0) = 0 \Leftrightarrow (2 \times 0^2 + 0 - 3) + g(0) = 0 \Leftrightarrow -3 + g(0) = 3 \Leftrightarrow g(0) = 3$

Então, g pode ser, por exemplo, a função definida por $g(x) = x + 3$

173.

$$\text{a) } D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \cap]-\infty, 2] =]-\infty, 2[\setminus \{-1\}$$

$$\text{b) } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \cap]-\infty, 2[\setminus \{-3, -1\} =]-\infty, 2[\setminus \{-3, -1\}$$

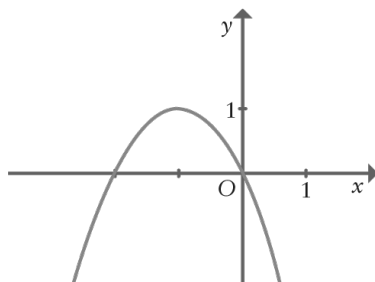
$$\text{c) } D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} =]-\infty, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2, 3\} =]-\infty, 2[\setminus \{-2, -1\}$$

$$\text{d) } D_{\frac{g}{g}} = D_g \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} =]-\infty, 2[\setminus \{-3\}$$

174.

g tem que ser uma função quadrática, cujos zeros sejam -2 e 0 e que seja positiva para $x \in]-2, 0[$ (para que, neste intervalo, h tenha o mesmo sinal do que f).

Então, um possível gráfico de g é:



175.

a) Tem-se $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$ e $f(x) = |2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, pelo que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 - x + x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ x - 2 + x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Então, $(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, $D_{f+g} = \mathbb{R}$

b) $(f + g)(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2 = 0 \wedge x < 2) \vee (x^2 + x - 6 = 0 \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [(x = -1 \vee x = 2) \wedge x < 2] \vee [(x = -3 \vee x = 2) \wedge x \geq 2] \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Pág. 118

176.

Tem-se: $g(x) = f^{\frac{1}{2}}(x) = [f(x)]^{\frac{1}{2}} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - 1}$ e $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

Então, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

177.

Tem-se: $g(x) = f^{-\frac{1}{2}}(x) = [f(x)]^{-\frac{1}{2}} = |x + 2|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|x + 2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{|x + 2|}}$ e $|x + 2| > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

Então, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x + 2|}}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

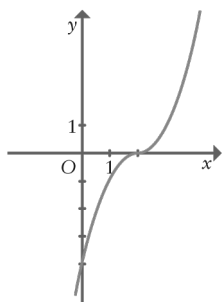
178.

Função g : Tem-se $D_{f \times |f|} = D_f \cap D_{|f|} = \mathbb{R}$ e $|f(x)| = |x - 2| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

pelo que $g(x) = (f \times |f|)(x) = f(x) \times |f(x)| = \begin{cases} (x - 2)(2 - x) & \text{se } x < 2 \\ (x - 2)(x - 2) & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x - 2)^2 & \text{se } x < 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Então, $g(x) = \begin{cases} -(x - 2)^2 & \text{se } x < 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, $D_g = \mathbb{R}$

A representação gráfica de g é:

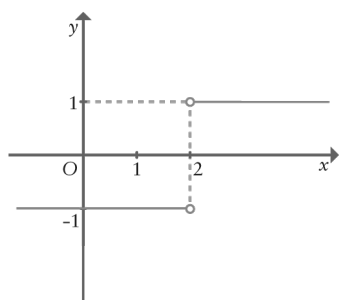


Função h :

Tem-se $D_{\frac{f}{|f|}} = D_f \cap \{x \in D_{|f|} : |f| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$h(x) = \frac{f}{|f|}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} \frac{x-2}{2-x} & \text{se } x < 2 \\ \frac{x-2}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

A representação gráfica de h é:



Pág. 119

179.

a) O vértice tem coordenadas $(-3, -2)$ e $a = 1$, pelo que se tem $h(x) = |x + 3| - 2$

b₁) $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + 1 = 4$, $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 3 \times 1 = 3$

$(f \circ h)(-3) = f[h(-3)] = f(-2) = 3$, $g^3(-1) = [g(-1)]^3 = (-2)^3 = -8$

$$h^{\frac{1}{2}}(1) = [h(1)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h(1)} = \sqrt{2}$$

b₂) Tem-se $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -1$$

b₃) Tem-se $D'_f = [-1, +\infty[$ e $[-1, +\infty[\subset D_h$ pelo que $D'_{h \circ f} = h([-1, +\infty[)$

Ora, $h([-1, +\infty[) = [0, +\infty[$ pelo que $D'_{h \circ f} = [0, +\infty[$

b₄) Função r :

O domínio da função r é o conjunto dos números reais x para os quais $h(x)$ é positivo ou nulo.

Tem-se $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -5 \vee x \geq -1$ pelo que $D_r =]-\infty, -5] \cup [-1, +\infty[$

Função s :

Tem-se $(g - f)(x) = g(x) - f(x) = x - 1 - (x^2 - 1) = x - x^2$ e $D_{g-f} = \mathbb{R}$

O domínio da função s é o conjunto dos números reais x para os quais $(g - f)(x)$ é positivo ou nulo.

Tem-se $x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ pelo que $D_s = [0, 1]$

180.

- a) A expressão $4x^2 + 5x - 3$ define uma função quadrática e tem-se $a = 4$, $b = 5$ e $c = -3$
- b) A expressão $-8x + 1$ não define uma função quadrática.
- c) A expressão $10x - 2x^2$ define uma função quadrática e tem-se $a = -2$, $b = 10$ e $c = 0$
- d) A expressão $x^2 + 3$ define uma função quadrática e tem-se $a = 1$, $b = 0$ e $c = 3$
- e) A expressão $\pi x^2 - (2 + \pi)x$ define uma função quadrática e tem-se $a = \pi$, $b = -(2 + \pi)$ e $c = 0$
- f) A expressão $\frac{1}{4x^2 - x + 2}$ não define uma função quadrática.
- g) Tem-se $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4}$, pelo que a expressão $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ define uma função quadrática e tem-se $a = 5$, $b = -5$ e $c = \frac{5}{4}$
- h) Tem-se $(x + 8)^2 - (2 + x)^2 = x^2 + 16x + 64 - (4 + 4x + x^2) = x^2 + 16x + 64 - 4 - 4x - x^2 = 12x + 60$, pelo que a expressão $(x + 8)^2 - (2 + x)^2$ não define uma função quadrática.
- i) Tem-se $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, pelo que a expressão $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^2$ não define uma função quadrática.

181.

a) Função f

- Ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy
 $f(0) = -5$. É o ponto de coordenadas $(0, -5)$

- Pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox

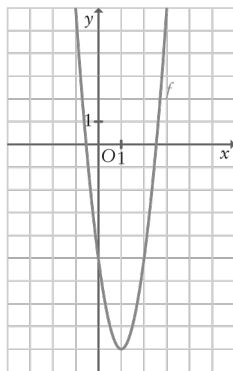
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - (-80)}}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

São os pontos de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

- Escrita de $f(x)$ na forma $a(x - h)^2 + k$

$$4x^2 - 8x - 5 = 4(x^2 - 2x) - 5 = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 = 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 5 = 4(x - 1)^2 - 9$$

- Esboço do gráfico



- Monotonia e extremos

f é decrescente em $] -\infty, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$

O mínimo da função é -9 e o minimizante é 1 ; a função não tem máximo.

- Contradomínio

$$D_f = [-9, +\infty[$$

b) Função g

- Ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy

$g(0) = 0$. É o ponto de coordenadas $(0,0)$

- Pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox

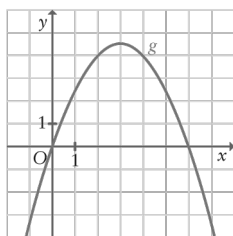
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x \left(3 - \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

São os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(6,0)$

- Escrita de $g(x)$ na forma $a(x - h)^2 + k$

$$-\frac{x^2}{2} + 3x = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{9}{2}$$

- Esboço do gráfico



- Monotonia e extremos

g é crescente em $] -\infty, 3]$ e é decrescente em $[3, +\infty[$

O máximo da função é $\frac{9}{2}$ e o maximizante é 3 ; a função não tem mínimo.

- Contradomínio

$$D_f =] -\infty, \frac{9}{2}]$$

c) Função h

- Ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy

$h(0) = -12$. É o ponto de coordenadas $(0, -12)$

- Pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox

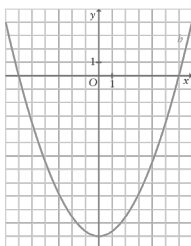
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 6$$

São os pontos de coordenadas $(-6,0)$ e $(6,0)$

- Escrita de $h(x)$ na forma $a(x - h)^2 + k$

$$\frac{x^2}{3} - 12 = \frac{1}{3}x^2 - 12 = \frac{1}{3}(x - 0)^2 - 12$$

- Esboço do gráfico



- Monotonia e extremos

h é decrescente em $] -\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$

O mínimo da função é -12 e o minimizante é 0 ; a função não tem máximo.

- Contradomínio

$$D_f = [-12, +\infty[$$

182.

a) Função a : $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0 \rightarrow$ a função tem dois zeros

Função b : $\Delta = 10 - 4 \times \frac{5}{2} \times 1 = 0 \rightarrow$ a função tem um único zero

Função c : $\Delta = 25 - 4 \times 2 \times 4 = -7 < 0 \rightarrow$ a função não tem zeros

Função d : $\Delta = 36 - 4 \times (-3) \times 0 = 36 > 0 \rightarrow$ a função tem dois zeros

Função e : $\Delta = 144 - 4 \times (-3) \times (-12) = 0 \rightarrow$ a função tem um único zero

Função f : $\Delta = 0 - 4 \times (-2) \times (-7) = -56 < 0 \rightarrow$ a função não tem zeros

b) Função a :

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 2$$

Como o gráfico de a tem a concavidade voltada para cima, tem-se:

$$a(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]2, +\infty[\quad \text{e} \quad a(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{3}, 2[$$

Função b :

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2 - \sqrt{10}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{0}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Como o gráfico de b tem a concavidade voltada para cima, tem-se:

$$b(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{10}}{5} \right\}$$

Função c :

Como a função não tem zeros e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, tem-se:

$$c(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Função d :

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como o gráfico de d tem a concavidade voltada para baixo, tem-se:

$$d(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2[\quad \text{e} \quad d(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

Função e :

$$e(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{-6} \Leftrightarrow x = -2$$

Como o gráfico de e tem a concavidade voltada para baixo, tem-se:

$$e(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Função f :

Como a função não tem zeros e o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo, tem-se:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

183.

Se $a = 0$, f é a função definida por $f(x) = -8x - 2$. Se $a \neq 0$, f é uma função quadrática.

A função tem dois zeros se e só se $a \neq 0 \wedge \Delta > 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} a \neq 0 \wedge \Delta > 0 &\Leftrightarrow a \neq 0 \wedge (-8)^2 - 4 \times a \times (-2) > 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge 64 + 8a > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a > -8 \Leftrightarrow a \in]-8, +\infty[\setminus \{0\} \end{aligned}$$

184.

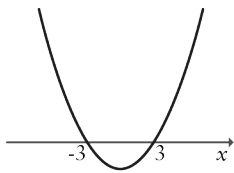
a) Tem-se: $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 9$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

Um esboço do gráfico de f é:



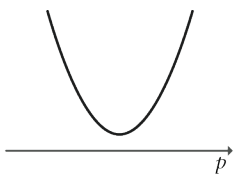
Então, $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3$; conjunto-solução = $] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

b) Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(p) = 5p^2 - 7p + \sqrt{7}$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow 5p^2 - 7p + \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 20\sqrt{7}}}{10} \Leftrightarrow p \in \emptyset; f \text{ não tem zeros.}$$

Um esboço do gráfico de f é:



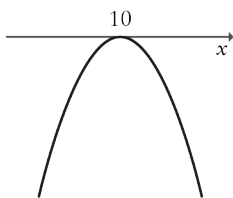
Então, $5p^2 - 7p + \sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow p \in \mathbb{R}$; conjunto-solução = $\mathbb{R}$

c) Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 25}}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 10$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 < 0 \Leftrightarrow x \neq 10$; conjunto-solução = $\mathbb{R} \setminus \{10\}$

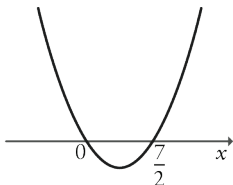
d) Tem-se: $x^2 + \frac{3x-1}{2} > 5x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 > 10x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 2x^2 - 7x$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{7}{2}$$

Um esboço do gráfico de f é:



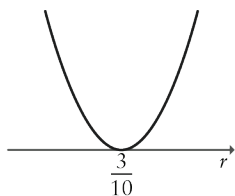
Então, $2x^2 - 7x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{7}{2}$; conjunto-solução = $] -\infty, 0[\cup] \frac{7}{2}, +\infty[$

e) Tem-se: $(4r - 3)^2 + 6r(3 - r) > 8,1 \Leftrightarrow 16r^2 - 24r + 9 + 18r - 6r^2 > 8,1 \Leftrightarrow 10r^2 - 6r + 0,9 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(r) = 10r^2 - 6r + 0,9$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(r) = 0 \Leftrightarrow 10r^2 - 6r + 0,9 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 10 \times 0,9}}{20} \Leftrightarrow r = \frac{6}{20} \Leftrightarrow r = \frac{3}{10}$$



Então, $10r^2 - 6r + 0,9 > 0 \Leftrightarrow r \neq \frac{3}{10}$; conjunto-solução = $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{10} \right\}$

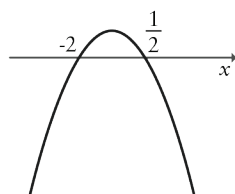
f) Tem-se: $-x \left(x + \frac{3}{2} \right) + 1 < 0 \Leftrightarrow -x^2 - \frac{3}{2}x + 1 < 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $-x^2 - \frac{3}{2}x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > \frac{1}{2}$; conjunto-solução = $] -\infty, -2[\cup] \frac{1}{2}, +\infty[$

185.

Como B pertence ao gráfico de f e tem abscissa 2, B é o ponto de coordenadas $(2, 4)$, pelo que se tem $\overline{AB} = 2$ e $\overline{OA} = 4$

Então, a área do triângulo $[ABO]$ é igual a $\frac{2 \times 4}{2} = 4$ unidades de área.

186.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2(x - 1)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = 2(x^2 - 2x + 1) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = \\ & = 2(x^2 - 2x + 1) + 2x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 - 4x + 2 + 2x^2 + x = 4x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad s(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{8} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Como a função não tem zeros e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, tem-se que s é positiva em $\mathbb{R}$.

c) A abscissa do vértice da parábola que é gráfico de s é igual a $-\frac{-3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$

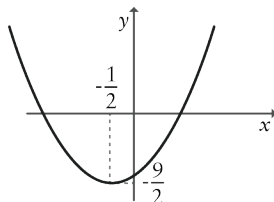
Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, $\frac{3}{8}$ é o minimizante de s , pelo que s é decrescente em $] -\infty, \frac{3}{8}]$ e é crescente em $[\frac{3}{8}, +\infty[$

187.

a) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2} = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = 2x^2 + 2x - 4$

b) O vértice é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ e o eixo de simetria é definido por $x = -\frac{1}{2}$

Um esboço do gráfico de h é:



c) Determinemos os zeros de h :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-4)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

Então, $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$; conjunto-solução = $[-2, 1]$

188.

a) A parábola que é o gráfico de m tem a concavidade voltada para baixo.

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$ e $m(2) = -2^2 + 4 \times 2 = 4$, pelo que o vértice é o ponto de coordenadas $(2, 4)$

b) Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, m é crescente em $] - \infty, 2]$ e é decrescente em $[2, +\infty[$; 4 é o máximo de m e 2 é o maximizante.

189.

a) Como o contradomínio é $] - \infty, 3]$, a parábola que é o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

b) A ordenada do vértice é 3 e a abscissa é a média aritmética dos zeros, ou seja, $\frac{-2+4}{2} = 1$, pelo que o vértice é o ponto de coordenadas $(1, 3)$

c) Como a função tem dois zeros, -2 e 4 , e a parábola que é o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, tem-se que as imagens são positivas para $x \in] - 2, 4[$

190.

a) $D'_f =] - \infty, 4]$

b) O vértice é o ponto de coordenadas $(2, 4)$ e o ponto de abscissa 1,5 é o ponto de coordenadas $(1, 5; 3)$

A distância entre ambos é igual a $\sqrt{(1,5 - 2)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{0,25 + 1} = \sqrt{1,25} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $f(x) < 3 \Leftrightarrow x < 1,5 \vee x > 2,5$; conjunto-solução = $] - \infty; 1,5[\cup]2,5; +\infty[$

d) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 2 cujas raízes são 1 e 3, $f(x)$ é da forma $a(x - 1)(x - 3)$, com $a \neq 0$

Como $f(2) = 4$, tem-se $a(2 - 1)(2 - 3) = 4$ pelo que $a = -4$

Então, $f(x) = -4(x - 1)(x - 3) = -4(x^2 - 4x + 3) = -4x^2 + 16x - 12$

191.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = 0 &\Leftrightarrow -0,3x^2 - 0,3x + 3,6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0,3 \pm \sqrt{0,09 - 4 \times (-0,3) \times 3,6}}{-0,6} \Leftrightarrow x = \frac{0,3 \pm \sqrt{4,41}}{-0,6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{0,3 \pm 2,1}{-0,6} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Então, a abscissa de A é igual a 3, pelo que se tem $x \in]0,3[$

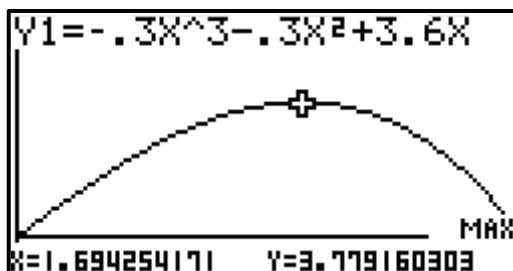
Tem-se, para cada $x \in]0,3[$, $\overline{PQ} = f(x) = -0,3x^2 - 0,3x + 3,6$

Então, como a área do retângulo $[OPQR]$ é igual a $\overline{OP} \times \overline{PQ}$, tem-se

$g(x) = x \times (-0,3x^2 - 0,3x + 3,6) = -0,3x^3 - 0,3x^2 + 3,6x$, pelo que

$g :]0,3[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -0,3x^3 - 0,3x^2 + 3,6x$

b) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico e o máximo de g :



O máximo de g , arredondado às centésimas, é 3,78.

192.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$. Então, a abscissa de P é igual a 4, pelo que $\overline{OP} = 4$

$f(0) = 8$, pelo que $\overline{OR} = 8$

A abscissa de Q é o valor positivo de x tal que $f(x) = 8$

$f(x) = 8 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 8 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Então, a abscissa de Q é igual a 2, pelo que $\overline{RQ} = 2$

Então, área do trapézio $= \frac{\overline{OP} + \overline{RQ}}{2} \times \overline{OR} = \frac{4+2}{2} \times 8 = 24$ unidades de área

Pág. 129

193.

a) Tem-se, para cada $x \in]0,2[$: D é o ponto de coordenadas $(x, 0)$, C é o ponto de coordenadas $(2, 0)$ e A é o ponto de coordenadas (x, x^2)

Então, $P(x) = 2 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{AD} = 2 \times (2 - x) + 2 \times x^2 = 4 - 2x + 2x^2$

b) Como o gráfico de P é uma parábola com a concavidade voltada para cima, o minimizante de P é a abscissa do vértice da parábola, ou seja, $-\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$

Então, para $x = \frac{1}{2}$, tem-se $\overline{DC} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e $\overline{AD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ unidades de comprimento

194.

a) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são -1 , 0 e 2 , $f(x)$

é da forma $a x (x + 1)(x - 2)$, com $a \neq 0$

Como $f(1) = -2$, tem-se $a \times 1 \times (1 + 1) \times (1 - 2) = -2$, pelo que $a = 1$

Então, $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$

b) Como $g(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são 1 (com multiplicidade 2) e -2 , $g(x)$ é da forma $a(x - 1)^2(x + 2)$, com $a \neq 0$

Como $g(-1) = -2$, tem-se $a(-1 - 1)^2(-1 + 2) = -2$ pelo que $a = -\frac{1}{2}$

Então, $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2(x + 2)$

195.

Zeros de a :

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{2} \vee x = 2; \text{ os zeros são } -\frac{5}{2}, 0 \text{ e } 2$$

Zeros de b :

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$$

Como o polinómio $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ tem coeficientes inteiros e as raízes do polinómio são inteiras, então -16 é um múltiplo inteiro de cada uma delas, pelo que todas as raízes

do polinómio pertencem ao conjunto $\{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$

$$\text{Seja } P(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$$

Tem-se:

$$P(-16) = -3024 \rightarrow -16 \text{ não é raiz do polinómio}$$

$$P(-8) = -240 \rightarrow -8 \text{ não é raiz do polinómio}$$

$$P(-4) = 0 \rightarrow -4 \text{ é raiz do polinómio}$$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $P(x)$ por $x + 4$

Tem-se:

	1	4	-4	-16
-4		-4	0	16
	1	0	-4	0 = R

$$\text{Então, tem-se } x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = (x + 4)(x^2 - 4)$$

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -2 \vee x = 2;$$

os zeros são -4 , -2 e 2

196.

$$\text{a) } x^3 > x \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) > 0$$

$$\text{Tem-se: } x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x(x^2 - 1)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Então, } x(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1; \text{ conjunto-solução } =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

b) $x^3 + 2x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2(x+2) - (x+2) \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) \leq 0$

Tem-se: $(x+2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	+	0	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
$(x+2)(x^2-1)$	-	0	+	0	-	0	+

Então, $(x+2)(x^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee -1 \leq x \leq 1$; conjunto-solução = $] -\infty, -2] \cup [-1, 1]$

c) $(x-2)(x-3)(x+5) < 0$

Tem-se: $(x-2)(x-3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \vee x = -5$

x	$-\infty$	-5		2		3	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 5$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-2)(x-3)(x+5)$	-	0	+	0	-	0	+

Então,

$(x-2)(x-3)(x+5) < 0 \Leftrightarrow x < -5 \vee 2 \leq x \leq 3$; conjunto-solução = $] -\infty, -5[\cup [2, 3]$

d) $\frac{x^2+6}{2} \leq -x^3 + 3 \Leftrightarrow x^2 + 6 \leq -2x^3 + 6 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+1) \leq 0$

Tem-se: $x^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	$-1/2$		0	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+
$2x + 1$	-	0	+	+	+
$x^2(2x+1)$	-	0	+	0	+

Então, $x^2(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 0$; conjunto-solução = $] -\infty, -\frac{1}{2}] \cup \{0\}$

197.

a) O polinómio $A(x)$ é o quociente da divisão inteira de $f(x)$ por $x+1$

Vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $f(x)$ por $x+1$

Tem-se:

	1	0	2	3
-1		-1	1	-3
	1	-1	3	0 = R

Então, tem-se $f(x) = (x^2 - x + 3)(x+1)$ pelo que $A(x) = x^2 - x + 3$

b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x+1) \leq 0$

Tem-se: $(x^2 - x + 3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x + 3 = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Tem-se, para todo o número real x , $x^2 - x + 3 > 0$, pelo que

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$; conjunto-solução = $] -\infty, -1]$

198.

A aresta da base do prisma é igual a 2 e a altura é igual a 6

Seja x o valor de que se aumentou cada dimensão do prisma.

Então, o volume do novo prisma vai ser dado por $(2+x)(2+x)(6+x)$

Queremos, então, encontrar x tal que $(2+x)(2+x)(6+x) = 360$

Uma possível estratégia é tentar decompor 360 em três fatores, dos quais dois sejam iguais e o terceiro exceda estes em quatro unidades.

Ora, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, pelo que temos as seguintes decomposições em três fatores dos quais dois são iguais:

$360 = 2 \times 2 \times 90 \rightarrow 90$ não excede 2 em quatro unidades;

$360 = 3 \times 3 \times 40 \rightarrow 40$ não excede 3 em quatro unidades;

$360 = 6 \times 6 \times 10 \rightarrow 10$ excede 6 em quatro unidades.

Então, a aresta da base do novo prisma pode ser 6 e a altura 10, pelo que $x = 4$ é uma solução do problema.

Vejamos se o problema tem outras soluções:

$$\text{Volume} = 360 \Leftrightarrow (2+x)^2(6+x) = 360 \Leftrightarrow (4+4x+x^2)(6+x) = 360 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 10x^2 + 28x + 24 = 360 \Leftrightarrow x^3 + 10x^2 + 28x - 336 = 0$$

Como sabemos que 4 é uma solução desta equação, vamos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $x^3 + 10x^2 + 28x - 336$ por $x - 4$

Tem-se:

	1	10	28	-336
4		4	56	336
	1	14	84	0 = R

Então, tem-se $x^3 + 10x^2 + 28x - 336 = (x-4)(x^2 + 14x + 84)$ pelo que

$$x^3 + 10x^2 + 28x - 336 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 14x + 84) \Leftrightarrow x-4 = 0 \vee \underbrace{x^2 + 14x + 84 = 0}_{\text{eq. impossível}} \Leftrightarrow x = 4$$

Então, $x = 4$ é a única solução do problema.

199.

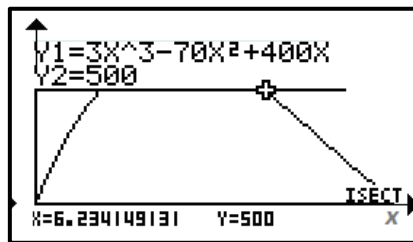
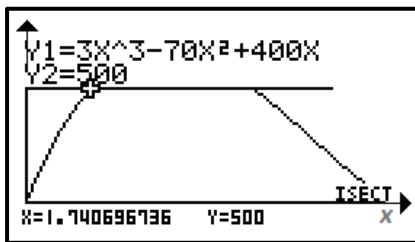
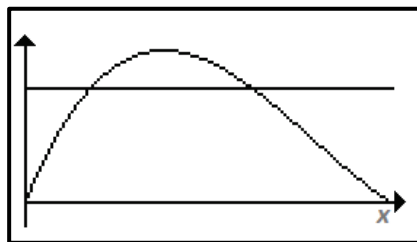
a) Volume = área da base $\times$ altura = $(20-2x) \times \frac{40-3x}{2} \times x = 2(10-x) \times \frac{40-3x}{2} \times x =$

$$= x(10-x)(40-3x) = x(3x^2 - 70x + 400) = 3x^3 - 70x^2 + 400x$$

b) Tem-se, no contexto da situação descrita:

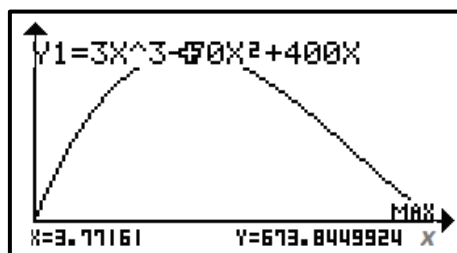
$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x < 20 \\ 3x < 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \\ x < \frac{40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10; \text{ o domínio da função é }]0,10[$$

c₁) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico da função que dá o volume da caixa, a reta de equação $y = 500$ e as abscissas dos pontos da respetiva interseção:



Os valores de x , arredondados às décimas, para os quais o volume é 500 cm^3 são 1,7 e 6,2.

c₂) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico da função que dá o volume da caixa, o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e o valor desse volume:



O valor de x , arredondado às décimas, para o qual o volume da caixa é máximo é 3,8 e o volume máximo, arredondado às décimas, é igual a 673,8 unidades de volume.

Pág. 130

200.

a) $f(-2) = -(-2) - 2 = 0$

b) $f(1) = 1^2 = 1$

c) $f(-4) = -(-4) - 2 = 2$

d) $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$

e) $f(5) \times f(\sqrt{2}) + f(-3) = 7 \times 2 + 1 = 15$

201.

a₁) $g(-2) = 1$

a₂) $g(-1) = 2$

a₃) $g(0) = -2$

a₄) $g(2) = -2$

b₁) $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2$; conjunto-solução = $\{-2\}$

b₂) $g(x) = 3$ é uma condição impossível; conjunto-solução = $\emptyset$

b₃) $g(x) = -2 \Leftrightarrow x = -5 \vee -1 < x \leq 2 \vee x = 5$; conjunto-solução = $\{-5, 5\} \cup]-1, 2]$

c) $g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq -1 \\ -2 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ -x+3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

202.

a) Para $-10 \leq x \leq 0$:

O gráfico de f é o segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(-10, -6)$ e $(0, -1)$

Para $0 < x \leq 10$:

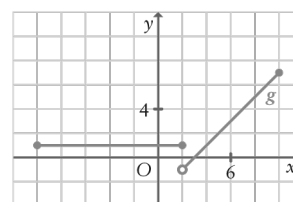
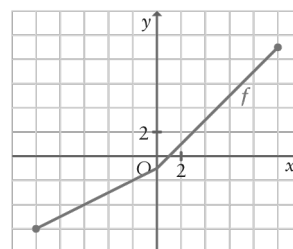
O gráfico de f é o segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(10, 9)$ e $(0, -1)$, extremo $(0, -1)$ não incluído.

b) Para $-10 \leq x \leq 2$:

O gráfico de f é o segmento de reta paralelo ao eixo Ox cujos extremos são os pontos de coordenadas $(-10, 1)$ e $(2, 1)$

Para $2 < x \leq 10$:

O gráfico de f é o segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(2, -1)$ e $(10, 7)$, extremo $(2, -1)$ não incluído.



203.

a) $f(x) = 3 \Leftrightarrow (-1 = 3 \wedge x < 2) \vee (x = 3 \wedge x > 2) \Leftrightarrow x = 3$; conjunto-solução = $\{3\}$

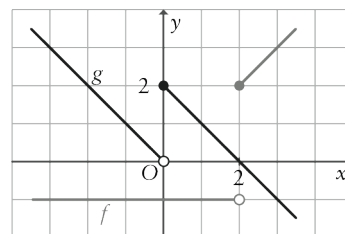
b) $g(x) = 2 \Leftrightarrow (-x = 2 \wedge x < 0) \vee x = 0 \vee (-x + 2 = 2 \wedge x > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = -2 \wedge x < 0) \vee x = 0 \vee (x = 0 \wedge x > 0) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$; conjunto-solução = $\{-2, 0\}$

c) Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n. xOy , partes dos gráficos das funções f e g .

Tem-se:

Os gráficos de f e g não têm qualquer ponto comum, pelo que $f(x) = g(x)$ é uma condição impossível.

Conjunto-solução = $\emptyset$



204.

Tem-se:

- $|-2 - 3| + |-2 + 2| = 5 \Leftrightarrow |-5| = 5$. Ora, $|-5| = 5$ é uma proposição verdadeira, pelo que -2 é solução da condição $|x - 3| + |x + 2| = 5$
- $|0 - 3| + |0 + 2| = 5 \Leftrightarrow |3| + |2| = 5$. Ora, $|3| + |2| = 5$ é uma proposição verdadeira, pelo que 0 é solução da condição $|x - 3| + |x + 2| = 5$
- $|2 - 3| + |2 + 2| = 5 \Leftrightarrow |-1| + |4| = 5$. Ora, $|-1| + |4| = 5$ é uma proposição verdadeira, pelo que 2 é solução da condição $|x - 3| + |x + 2| = 5$

Então, a condição $|x - 3| + |x + 2| = 5$ é universal em $\{-2, 0, 2\}$

205.

a) $4|3x - 2| - 5 = 15 \Leftrightarrow |3x - 2| = 5 \Leftrightarrow 3x - 2 = -5 \vee 3x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{7}{3}$;

conjunto-solução = $\{-1, \frac{7}{3}\}$

b) $3 - \frac{|x|+1}{3} = \frac{3+|x|}{2} \Leftrightarrow 18 - 2|x| - 2 = 9 + 3|x| \Leftrightarrow -5|x| = -7 \Leftrightarrow |x| = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5} \vee x = \frac{7}{5}$;

conjunto-solução = $\{-\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\}$

c) $13 - 5\left|\frac{x^2}{2} - x - 2\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{x^2}{2} - x - 2\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x - 2 = -2 \vee \frac{x^2}{2} - x - 2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x = 0 \vee x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = 4$; conjunto-solução = $\{-2, 0, 2, 4\}$

206.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\left|\frac{2x}{3} - 6\right| - 8 = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{3} - 6\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - 6 = -2 \vee \frac{2x}{3} - 6 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 4 \vee \frac{2x}{3} = 8 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 12$

b) $f(3x) = f(x + 9) \Leftrightarrow 4\left|\frac{2 \times (3x)}{3} - 6\right| - 8 = 4\left|\frac{2(x+9)}{3} - 6\right| - 8 \Leftrightarrow |2x - 6| = \left|\frac{2}{3}x + 6 - 6\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x - 6| = \left|\frac{2}{3}x\right| \Leftrightarrow 2x - 6 = -\frac{2}{3}x \vee 2x - 6 = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{8}{3}x = 6 \vee \frac{4}{3}x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \vee x = \frac{9}{2}$

207.

a) $2|x| - 5 < 7 \Leftrightarrow |x| < 6 \Leftrightarrow -6 < x < 6$; conjunto-solução $=]-6, 6[$

b) $|x^2 - 3x - 1| > 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 < -3 \vee x^2 - 3x - 1 > 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \vee x^2 - 3x - 4 > 0$

Vamos resolver, separadamente, cada uma destas inequações:

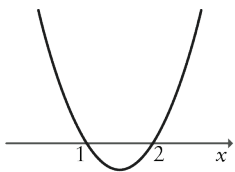
• $x^2 - 3x + 2 < 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

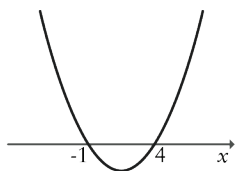
• $x^2 - 3x - 4 > 0$

Consideremos a função quadrática, g , definida por $g(x) = x^2 - 3x - 4$

Determinemos, se existirem, os zeros de g :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$

Um esboço do gráfico de g é:



Então, $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 4$

Retomemos, então, a condição inicial

$$|x^2 - 3x - 1| > 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \vee x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow (1 < x < 2) \vee (x < -1 \vee x > 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < -1 \vee 1 < x < 2 \vee x > 4; \text{ conjunto-solução } =]-\infty, -1[\cup]1, 2[\cup]4, +\infty[$$

c) $|3x + 1| \leq |x - 3| \Leftrightarrow |3x + 1|^2 \leq |x - 3|^2 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 \leq (x - 3)^2 \Leftrightarrow$

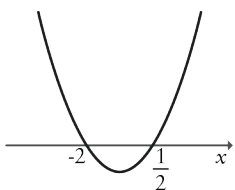
$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 \leq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x^2 + 12x - 8 \leq 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 8x^2 + 12x - 8$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

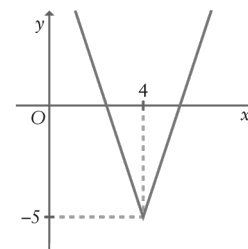
Um esboço do gráfico de f é:



Então, $8x^2 + 12x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$; conjunto-solução $= \left[-2, \frac{1}{2}\right]$

208.

a) O vértice do gráfico de f é o ponto de coordenadas $(4, -5)$ e tem-se $f(0) = 7$



Um esboço do gráfico de f está representado ao lado.

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow 3|x-4| - 5 = 0 \Leftrightarrow |x-4| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x-4 = -\frac{5}{3} \vee x-4 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \vee x = \frac{17}{3}$$

Os zeros de f são $\frac{7}{3}$ e $\frac{17}{3}$, pelo que a base do triângulo é $\frac{10}{3}$

Então, tem-se: Área do triângulo $= \frac{\frac{10}{3} \times 5}{2} = \frac{25}{3}$ unidades de área

c₁) Seja x a abscissa do ponto P

Como $\overline{PQ} = 10$ e a abscissa de Q é maior do que a abscissa de P , a abscissa de Q é $x + 10$

Dado que P e Q têm a mesma ordenada, tem-se $f(x) = f(x + 10)$

$$f(x) = f(x + 10) \Leftrightarrow 3|x-4| - 5 = 3|(x+10)-4| - 5 \Leftrightarrow |x-4| = |(x+10)-4| \Leftrightarrow$$

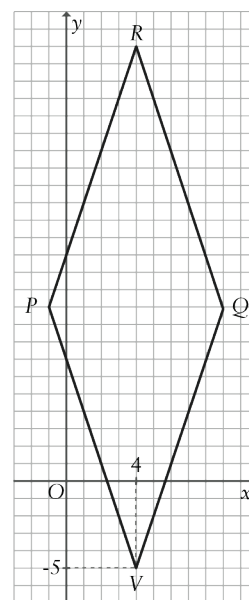
$$\Leftrightarrow |x-4| = |x+6| \Leftrightarrow x-4 = x+6 \vee x-4 = -x-6 \Leftrightarrow -4 = +6 \vee 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

Como $f(-1) = 3|-1-4| - 5 = 10$, P tem coordenadas $(-1, 10)$

c₂) Na figura ao lado, está representado, num plano em que se instalou um referencial o.n., o losango $[VPRQ]$

Tem-se: $V(4, -5)$, $P(-1, 10)$, $Q(9, 10)$

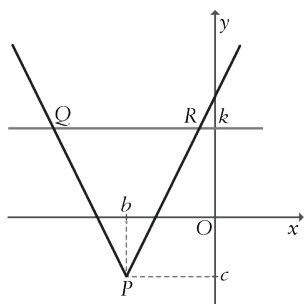
Como $R = P + \overrightarrow{VQ}$ e dado que $\overrightarrow{VQ}$ é o vetor de coordenadas $(5, 15)$, as coordenadas de R são $(-1, 10) + (5, 15) = (4, 25)$



Pág. 131

209.

Na figura seguinte, está ilustrada a situação descrita.



Começemos por determinar as abscissas de R e de Q

$$f(x) = k \Leftrightarrow a|x-b| + c = k \Leftrightarrow |x-b| = \frac{k-c}{a} \Leftrightarrow$$

(pois, como $a > 0$ e $k > c$, $\frac{k-c}{a}$ é positivo)

$$\Leftrightarrow x-b = -\frac{k-c}{a} \vee x-b = \frac{k-c}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = b - \frac{k-c}{a} \vee x = b + \frac{k-c}{a}$$

Como $\frac{k-c}{a}$ é positivo, tem-se $b + \frac{k-c}{a} > b - \frac{k-c}{a}$

Então, a abscissa de Q é $b - \frac{k-c}{a}$ e a de R é $b + \frac{k-c}{a}$: $\overline{QR} = \left(b + \frac{k-c}{a}\right) - \left(b - \frac{k-c}{a}\right) = \frac{2(k-c)}{a}$

Como $k > c$, a altura do triângulo é igual a $k - c$

Então, tem-se: Área do triângulo $[PQR] = \frac{\frac{2(k-c)}{a} \times (k-c)}{2} = \frac{(k-c)^2}{a}$

210.

a) $\sqrt{3x+4} = 5 \Leftrightarrow 3x+4 = 25 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$; conjunto-solução = $\{7\}$

b) $2 + \sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = x-2 \Rightarrow (\sqrt{2x-1})^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

Vejam se 1 é solução da equação inicial:

$2 + \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1 \Leftrightarrow 2 + 1 = 1$, o que é falso. Portanto, 1 não é solução da equação inicial.

Vejam se 5 é solução da equação inicial:

$2 + \sqrt{2 \times 5 - 1} = 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5$, o que é verdade. Portanto, 5 é solução da equação inicial.

Conjunto-solução = $\{5\}$

c) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x+4})^2 = (1 + \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

Vejam se 5 é solução da equação inicial:

$\sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = 1 \Leftrightarrow 3 - 2 = 1$, o que é verdade. Portanto, 5 é solução da equação inicial.

Conjunto-solução = $\{5\}$

d) $\sqrt{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = -2 \vee x+1 = 2 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Conjunto-solução = $\{-3, 1\}$

211.

a) Tem-se $4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{4}, +\infty[$

Em $[-\frac{1}{4}, +\infty[$ tem-se:

$2\sqrt{4x+1} - 3 \leq 7 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} \leq 5 \Leftrightarrow 4x+1 \leq 25 \Leftrightarrow x \leq 6$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[-\frac{1}{4}, 6]$

b) Tem-se $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

Em $] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ tem-se:

$\sqrt{x^2-9} > 4 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 16 \Leftrightarrow x^2 > 25 \Leftrightarrow x < -5 \vee x > 5$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $] -\infty, -5[\cup]5, +\infty[$

c) Tem-se $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$

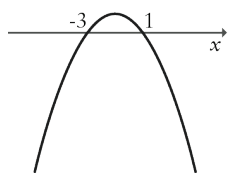
Para $x \leq 0$, a condição é universal.

Para $x > 0$:

$\sqrt{3-2x} \geq x \Leftrightarrow 3-2x \geq x^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Determinemos, se existirem, os zeros de f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$



Então, em $]0, +\infty[$ tem-se: $-x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$

Portanto, $\sqrt{3-2x} \geq x \Leftrightarrow x \leq 0 \vee 0 < x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$; conjunto-solução = $] -\infty, 1]$

d) Começemos por determinar os valores de x para os quais a expressão $\sqrt{\sqrt{18x} - x}$ tem significado.

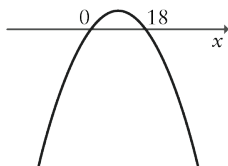
$$18x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Para } x \geq 0, \text{ tem-se } \sqrt{18x} - x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{18x} \geq x \Leftrightarrow 18x \geq x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 18x \geq 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -x^2 + 18x$

$$\text{Determinemos, se existirem, os zeros de } f: f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 18$$

Um esboço do gráfico de f é:



$$\text{Então, em } [0, +\infty[\text{ tem-se: } -x^2 + 18x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 18$$

O conjunto dos valores de x para os quais a expressão $\sqrt{\sqrt{18x} - x}$ tem significado é $[0, 18]$

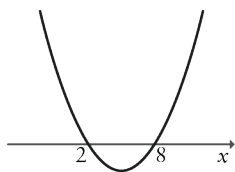
Em $[0, 18]$ tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{18x} - x} < 2 &\Leftrightarrow \sqrt{18x} - x < 4 \Leftrightarrow \sqrt{18x} < x + 4 \Leftrightarrow 18x < x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 > 0 \end{aligned}$$

Consideremos a função quadrática, g , definida por $g(x) = x^2 - 10x + 16$

$$\text{Determinemos, se existirem, os zeros de } g: g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 8$$

Um esboço do gráfico de g é:



$$\text{Então, em } [0, 18] \text{ tem-se: } x^2 - 10x + 16 > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2 \vee 8 < x \leq 18$$

Portanto, o conjunto-solução da condição é $[0, 2[\cup]8, 18]$

212.

a) Em $[2, +\infty[$ tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{5} &\Leftrightarrow \sqrt{3x-6} - 2 = \frac{x}{5} \Leftrightarrow \sqrt{3x-6} = \frac{x}{5} + 2 \Rightarrow 3x - 6 = \left(\frac{x}{5} + 2\right)^2 \Leftrightarrow 3x - 6 = \frac{x^2}{25} + \frac{4}{5}x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{11}{5}x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 55x + 250 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 50 \end{aligned}$$

Vejam se 5 é solução da equação inicial:

$$\sqrt{15-6} - 2 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow 3 - 2 = 1, \text{ o que é verdade. Portanto, } 5 \text{ é solução da equação inicial.}$$

Vejam se 50 é solução da equação inicial:

$$\sqrt{150-6} - 2 = \frac{50}{5} \Leftrightarrow 12 - 2 = 10, \text{ o que é verdade. Portanto, } 50 \text{ é solução da equação inicial.}$$

As coordenadas dos pontos do gráfico cuja ordenada é igual à quinta parte da abscissa são (5,1) e (50,10)

b) Tem-se, para quaisquer $x_1, x_2 \in [2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{3x_1-6} - 2 = \sqrt{3x_2-6} - 2 \Rightarrow \sqrt{3x_1-6} = \sqrt{3x_2-6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x_1 - 6 = 3x_2 - 6 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ pelo que a função } f \text{ é injetiva.} \end{aligned}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3x-6} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-6} = y + 2 \Leftrightarrow 3x - 6 = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 + 4y + 10}{3}$$

$$D'_{f^{-1}} = D_f = [2, +\infty[$$

$$D_{f^{-1}} = D'_f = [-2, +\infty[$$

$$\text{Então, tem-se: } f^{-1}: [-2, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[\text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 4x + 10}{3}$$

213.

a) $4\sqrt[3]{5x+2} + 3 = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{5x+2} = 3 \Leftrightarrow 5x+2 = 27 \Leftrightarrow x = 5$; conjunto-solução = $\{5\}$

b) $|\sqrt[3]{9x+1} - 1| = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{9x+1} - 1 = -3 \vee \sqrt[3]{9x+1} - 1 = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt[3]{9x+1} = -2 \vee \sqrt[3]{9x+1} = 4 \Leftrightarrow 9x+1 = -8 \vee 9x+1 = 64 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 7$;
 conjunto-solução = $\{-1, 7\}$

c) $x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6x + 8} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6x + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 6x + 8 = x^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -2$; conjunto-solução = $\{-4, -2\}$

214.

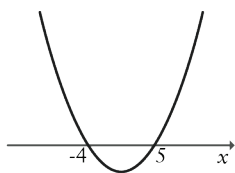
a) $12 + 5\sqrt[3]{3x+4} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+4} < -2 \Leftrightarrow 3x+4 < -8 \Leftrightarrow x < -4$;
 conjunto-solução = $] -\infty, -4[$

b) $\sqrt[3]{3x^2 - 3x + 4} \geq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 4 \geq 64 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - x - 20$

Determinemos, se existirem, os zeros de f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 5$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 5$; conjunto-solução = $] -\infty, -4] \cup [5, +\infty[$

c) Para que ambos os membros da condição tenham significado, tem que ser $x \geq 0$

Para $x \geq 0$, tem-se:

$\sqrt[3]{\sqrt{x^3} + x^2 - 9} \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^3} + x^2 - 9 \leq (\sqrt{x})^3 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} + x^2 - 9 \leq \sqrt{x^3} \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$
 $-3 \leq x \leq 3 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$; conjunto-solução = $[0, 3]$

215.

$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = 4 \\ \sqrt[3]{a-b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 64 \\ a-b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \end{cases}$, pelo que $\vec{v}$ é o vetor de coordenadas $(36, 28)$

A reta r tem declive igual a $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$, pelo que é definida por uma equação da forma $y = \frac{7}{9}x + b$

A reta r e a reta de equação $y = 2x - 1$ interseitam-se no ponto de coordenadas $(14, 27)$

Tem-se, então, $27 = \frac{7}{9} \times 14 + b$ pelo que $b = \frac{145}{9}$

216.

Volume da esfera = $\frac{4}{3} \times \pi R^3$ e Volume do cilindro = $\pi r^2 \times h = \pi r^2 \times (4r) = 4\pi r^3$

Vol. esf. = Vol. cil. $\Leftrightarrow \frac{4}{3} \times \pi R^3 = 4\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{R^3}{3} = r^3 \Leftrightarrow r = \frac{R}{\sqrt[3]{3}}$

$R + r = 2\sqrt[3]{3} + 2 \Leftrightarrow R + \frac{R}{\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{3} + 2 \Leftrightarrow R \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 2\sqrt[3]{3} + 2 \Leftrightarrow R \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 2(\sqrt[3]{3} + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = 2(\sqrt[3]{3} + 1) \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+1} \Leftrightarrow R = 2\sqrt[3]{3}$

Então, tem-se: Volume da esfera = $\frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (2\sqrt[3]{3})^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 24 = 32\pi$ unidades de volume

217.

Tem-se $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = [-3, +\infty[$

Função $f + g$:

- $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-3, +\infty[$
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4x + \sqrt{2x + 6} - 3$

Então, tem-se: $f + g : [-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = x^2 - 4x + \sqrt{2x + 6} - 3$

Função fg :

- $D_{fg} = D_f \cap D_g = [-3, +\infty[$
- $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 - 4x)(\sqrt{2x + 6} - 3)$

Então, tem-se: $fg : [-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(fg)(x) = (x^2 - 4x)(\sqrt{2x + 6} - 3)$

Função $\frac{f}{g}$:

- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap [-3, +\infty[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} = [-3, +\infty[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{2x + 6} - 3}$

Então, tem-se: $\frac{f}{g} : [-3, +\infty[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{2x + 6} - 3}$

Função $\frac{g}{f}$:

- $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = [-3, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{0, 4\} = [-3, +\infty[\setminus \{0, 4\}$
- $\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{2x + 6} - 3}{x^2 - 4x}$

Então, tem-se: $\frac{g}{f} : [-3, +\infty[\setminus \{0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{2x + 6} - 3}{x^2 - 4x}$

Função $4g$:

- $D_{4g} = D_g = [-3, +\infty[$
- $(4g)(x) = 4 \times g(x) = 4(\sqrt{2x + 6} - 3) = 4\sqrt{2x + 6} - 12$

Então, tem-se: $4g : [-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(4g)(x) = 4\sqrt{2x + 6} - 12$

Função $f^{\frac{1}{4}}$:

- $D_{f^{\frac{1}{4}}} = \{x \in D_f : f(x) \geq 0\} = \{x \in D_f : x^2 - 4x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$
- $f^{\frac{1}{4}}(x) = (x^2 - 4x)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^2 - 4x}$

Então, tem-se: $f^{\frac{1}{4}} :]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{\frac{1}{4}}(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4x}$

218.

a) $(fg)(4) = f(4) \times g(4) = 3 \times (3\sqrt{16 - 12} + 1) = 21$

b) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 5] \cap [3, +\infty[= [3, 5]$

No intervalo $[3, 5]$, tem-se:

$$f(x) = x - 1$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 1 + 3\sqrt{4x - 12} + 1 = x + 3\sqrt{4x - 12}$$

Então, tem-se: $f + g : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = x + 3\sqrt{4x - 12}$

+ Exercícios propostos

Pág. 132

219.

Opção (B)

1 não pertence a A , pelo que $(1, a)$ não pertence ao produto cartesiano $A \times B$

220.

Opção (D)

A opção (D) é a única em que não existem objetos diferentes com a mesma imagem.

221.

Opção (C)

Como f é sobrejetiva, $D'_f = A$

Ora, o resto da divisão inteira de um número natural por 2 é 0 ou 1, pelo que $D'_f = \{0, 1\}$

Então, $A = \{0, 1\}$

222.

Opção (B)

$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(3) = 2$; isto exclui (A), (C) e (D)

223.

Opção (D)

$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$, pelo que se tem $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

224.

Opção (B)

Em cada uma das restantes opções tem-se uma correspondência em que existe pelo menos um objeto a que corresponde mais do que uma imagem.

Pág. 133

225.

Opção (A)

Seja M o ponto médio de $[AB]$

A função d toma todos os valores compreendidos entre $\overline{OM}$ e $\overline{OA}$, incluindo ambos.

Tem-se:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{OM}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = 1$$

226.

Opção (C)

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \text{ pelo que } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

227.

Opção (C)

$$4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4 \text{ pelo que } D_f =] - \infty, 4[$$

228.

Opção (C)

Como f é uma função par, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas, pelo que, como o ponto $A(-2, 1)$ pertence ao seu gráfico, também o ponto de coordenadas $(2, 1)$ tem que pertencer ao gráfico. Então, o ponto de coordenadas $(2, -1)$ não pode pertencer ao gráfico de f .

229.

Opção (D)

Como f é uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial, pelo que, como o ponto $A(-2, 1)$ pertence ao seu gráfico, também o ponto de coordenadas $(2, -1)$ tem que pertencer ao gráfico. Então, o ponto de coordenadas $(2, 1)$ não pode pertencer ao gráfico de f .

230.

Opção (B)

Em nenhuma das restantes opções pode estar parte de um gráfico simétrico do gráfico de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Pág. 134

231.

Opção (B)

$$(g \circ f^{-1})(2) = g[f^{-1}(2)] = g(0) = 0 + 1 = 1$$

232.

Opção (C)

Como f é uma função ímpar e $f(-3) = 1$, tem-se $f(3) = -1$ pelo que $f^{-1}(-1) = 3$

233.

Opção (B)

f	$D_f = [-1, 5]$	$D'_f = [-2, 4]$
$g_1(x) = f(x + 2)$	$D_{g_1} = [-3, 3]$	$D'_{g_1} = [-2, 4]$
$g(x) = -f(x + 2)$	$D_g = [-3, 3]$	$D'_g = [-4, 2]$

Pág. 135

234.

Opção (A)

O gráfico da função g é a imagem do gráfico de f por meio de uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação vertical associada ao vetor $(0,7)$

235.

Opção (B)

f	$D_f = [0,4]$	$D'_f = [0,4]$
$g_1(x) = f(x - 2)$	$D_{g_1} = [2,6]$	$D'_{g_1} = [0,4]$
$g(x) = 2f(x - 2)$	$D_g = [2,6]$	$D'_g = [0,8]$

236.

Opção (A)

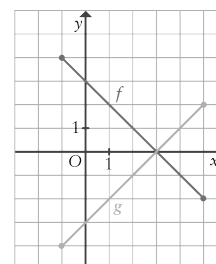
f	$D_f = [2,4]$	$D'_f = [2,4]$
$g_1(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$	$D_{g_1} = [4,8]$	$D'_{g_1} = [2,4]$
$g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$	$D_g = [4,8]$	$D'_g = [3,5]$

237.

Opção (C)

Na figura ao lado estão representadas graficamente as funções f e g .

Tem-se $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]3,5]$



238.

Opção (B)

Se o contradomínio da função é $\mathbb{R}$, a função tem zeros; se a função é injetiva, não pode ter mais do que um zero. Então, a função tem um e um só zero.

Pág. 136

239.

Opção (D)

Como $f(0) = -2$, as opções (B) e (C) estão excluídas.

Como $f(3) = 0$, a opção (A) está excluída.

Na verdade, a opção (D) verifica ambas as igualdades.

240.

Opção (C)

Como g é decrescente, as opções (A) e (B) estão excluídas.

Como $g(2) = 0$, a opção (D) está excluída.

Na verdade, a opção (C) verifica ambas as igualdades.

241.

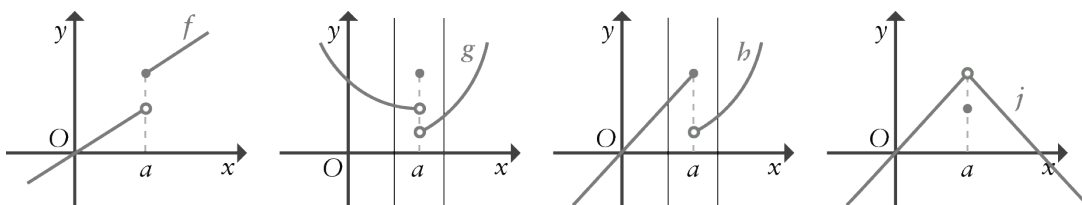
Opção (D)

h é uma função estritamente crescente se e só se $1 - a > 0$, ou seja, se e só se $a < 1$

242.

Opção (B)

Na figura está representada, para cada uma das funções f , g , h e j , parte do seu gráfico e, no caso das funções g e h , assinalou-se uma vizinhança de a .



Pode, então, observar-se que:

Não existe qualquer vizinhança de a tal que $f(a)$ seja a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $f(a)$ não é um máximo relativo.

Existe uma vizinhança de a tal que $g(a)$ é a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $g(a)$ é um máximo relativo.

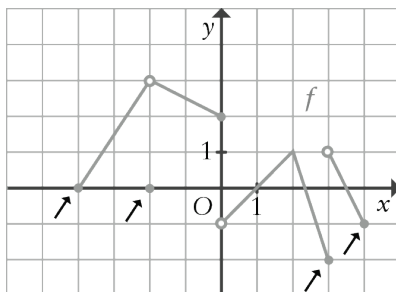
Existe uma vizinhança de a tal que $h(a)$ é a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $h(a)$ é um máximo relativo.

Não existe qualquer vizinhança de a tal que $j(a)$ seja a maior das imagens de todos os objetos que pertencem a essa vizinhança, pelo que $j(a)$ não é um máximo relativo.

243.

Opção (B)

Na figura estão assinalados os pontos do gráfico de f correspondentes aos mínimos relativos da função. f tem quatro mínimos relativos.



244.

Opção (C)

Se o perímetro do retângulo é 60 cm, o semiperímetro é 30 cm, pelo que, se o comprimento, em centímetros, de um dos lados é x , o comprimento, em centímetros, de outro lado, diferente deste, é $30 - x$.
Então, a área do retângulo, em centímetros quadrados, é representada por $x(30 - x)$

245.

Opção (B)

O gráfico da função f passa no ponto $A(-1,2)$ se e só se $f(-1) = 2$

Tem-se: $f(-1) = 2 \Leftrightarrow a \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = 2 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$

246.

Opção (B)

O gráfico da função f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 3 se e só se $f(0) = 3$

Tem-se: $f(0) = 3 \Leftrightarrow -(0 - 1)^2 + k = 3 \Leftrightarrow k = 4$

Pág. 137

247.

Opção (D)

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(-1, -3)$. Então, a função tem dois zeros.

248.

Opção (D)

249.

Opção (A)

Tem-se: $y = (2 - x)^2 + 1 \Leftrightarrow y = (x - 2)^2 + 1$, pelo que a parábola tem vértice no ponto de coordenadas $(2,1)$

250.

Opção (C)

A parábola tem vértice no ponto de coordenadas $(2,4)$, pelo que o seu eixo de simetria é a reta de equação $x = 2$

251.

Opção (D)

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(-2,3)$. Então, o contradomínio da função é $] - \infty, 3]$

252.

Opção (C)

O gráfico da função g é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(1,0)$. Então, a função tem um único zero e esse zero é 1.

253.

Opção (A)

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(5,0)$. Então, o contradomínio da função é $] - \infty, 0]$

254.

Opção (C)

A reta r é definida pela equação $x = -\frac{-2}{2 \times 1}$ ou seja $x = 1$

Das parábolas definidas nas quatro opções, apenas a parábola definida na opção (C) tem, como eixo de simetria, a reta definida pela equação $x = 1$

As parábolas definidas nas opções (A) e (B) têm, como eixo de simetria, a reta definida pela equação $x = 0$ e a parábola definida na opção (D) tem, como eixo de simetria, a reta definida pela equação $x = -1$

Pág. 138

255.

Opção (B)

Como $D'_{f^{-1}} = [-2, 3]$ e $D_g = \mathbb{R}$, tem-se $D'_{f^{-1}} \subset D_g$ pelo que $D'_{g \circ f^{-1}} = g([-2, 3]) = [0, 9]$

256.

Opção (B)

O gráfico da função f tem vértice no ponto de coordenadas $(1, 3)$

257.

Opção (D)

O gráfico da função f é a reunião de duas semirretas com declives -2 e 2 ; isto exclui as opções (A) e (B).

O vértice do gráfico da função f é o ponto de coordenadas $(1, -3)$

258.

Opção (C)

O vértice do gráfico da função definida na opção (A) é o ponto de coordenadas $(3, -1)$

O vértice do gráfico da função definida na opção (B) é o ponto de coordenadas $(-3, -1)$

O vértice do gráfico da função definida na opção (C) é o ponto de coordenadas $(3, 1)$

O vértice do gráfico da função definida na opção (D) é o ponto de coordenadas $(-3, 1)$

Só o vértice do gráfico da função definida na opção (C) pertence ao 1.º quadrante.

259.

Opção (D)

O vértice do gráfico da função f é a reunião de duas semirretas que apontam para cima e com origem comum no ponto de coordenadas $(0, 3)$

Então, as equações das opções (A) e (B) são impossíveis e a da opção (C) tem uma única solução.

260.

Opção (D)

f	$D'_f = [-2, 3]$
$h_1(x) = f(x) $	$D'_{h_1} = [0, 3]$
$h(x) = f(x) + 1$	$D'_h = [1, 4]$

261.

Opção (D)

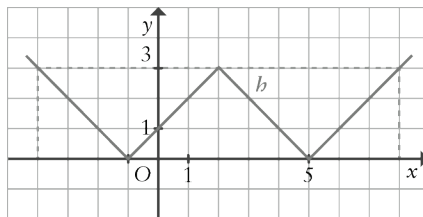
$$|2 - x| > 5 \Leftrightarrow 2 - x < -5 \vee 2 - x > 5 \Leftrightarrow -x < -7 \vee -x > 3 \Leftrightarrow x > 7 \vee x < -3$$

Pág. 139

262.

Opção (D)

Na figura está representada graficamente a função h tal que $h(x) = |f(x)|$



Para $k > 3$, $h(x) = k$ tem exatamente duas soluções; isto exclui a opção (A).

Para $k = 3$, $h(x) = k$ tem exatamente três soluções; isto exclui as opções (B) e (C).

Na verdade, para $k \in]0,3[$, $h(x) = k$ tem exatamente quatro soluções.

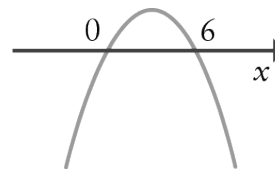
263.

Opção (C)

Na figura ao lado está um esboço da parábola que é o gráfico de g .

A abscissa do vértice é a média aritmética dos zeros de g , ou seja, 3.

O contradomínio de g é $] -\infty, g(3)]$



264.

Opção (A)

O vértice do gráfico da função f é o ponto de coordenadas (a, b)

Como este ponto pertence ao 1.º quadrante, tem-se $a > 0$ e $b > 0$

265.

Opção (C)

Se o perímetro do quadrado é P , o comprimento do lado pode ser representado por $\frac{P}{4}$, pelo que a área

do quadrado pode ser expressa, em função de P , por $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ ou seja $\frac{P^2}{16}$

266.

Opção (C)

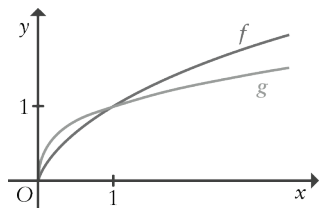
O gráfico da função f interseja o eixo Oy no ponto de ordenada 2 se e só se $f(0) = 2$

Tem-se: $f(0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{0+a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$

267.

Opção (D)

Os gráficos de f e g interseam-se nos pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(1,1)$

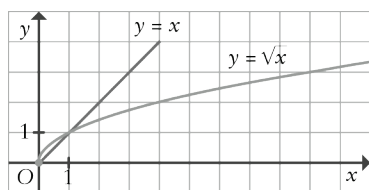


Tem-se $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x \geq 1$

268.

Opção (C)

A semiparábola definida por $y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0$ e a semirreta definida por $y = x \wedge x \geq 0$ interseam-se nos pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(1,1)$



Tem-se $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Pág. 140

269.

Opção (A)

O ponto A é o ponto de coordenadas $(10, \sqrt{10})$ pelo que $\overline{AB} = \sqrt{10}$

Então: Área do quadrado $= \sqrt{10}^2 = 10$

270.

Opção (C)

Tem-se $D_g =] - \infty, 1]$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq 1\} =]0, 2]$

271.

Opção (A)

Tem-se $D_g = [2, +\infty[$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 2\} =] - \infty, 0]$

Pág. 141

272.

Opção (C)

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por meio da translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, -2)$

273.

Opção (A)

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinais:

x	$-\infty$	-4		-2		4	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	+	+	0	−
$g(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x) \times g(x)$	+	0	−	0	+	0	+

274.

Opção (A)

Como $h(-1) = 0$, tem-se que -1 também pertence ao conjunto-solução da condição $h(x) \geq 0$

275.

Opção (B)

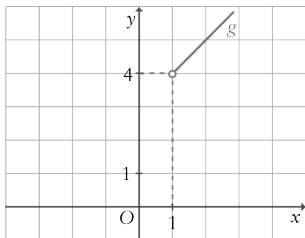
Tem-se $f(0) = 3 \times 0 + 1 = 1$; isto exclui a opção (A)

Tem-se $f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$

276.

Opção (C)

Na figura está representada parte do gráfico da função g para $x > 1$



A função g é estritamente crescente se e só se $g(1) \leq 4$

$$g(1) \leq 4 \Leftrightarrow 2 \times 1 + k \leq 4 \Leftrightarrow k \leq 2$$

277.

Opção (C)

$$\text{Tem-se } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4 = 0 \wedge x \leq 0) \vee (\underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{eq. impossível}} \wedge x > 0) \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Pág. 142

278.

a) O vértice é o ponto de coordenadas $(-3, -4)$ e o eixo de simetria é definido pela equação $x = -3$

b) Como a parábola que é gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e o vértice tem ordenada -4 , $D'_f = [-4, +\infty[$

c) Como a parábola que é gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e o vértice tem abscissa -3 , a função é decrescente em $] -\infty, -3]$ e é crescente em $[-3, +\infty[$

O mínimo absoluto da função é igual a -4 .

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 2 \Leftrightarrow x+3 = -\sqrt{2} \vee x+3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{2} \vee x = -3 + \sqrt{2}$; os zeros são $-3 - \sqrt{2}$ e $-3 + \sqrt{2}$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal da função f .

x	$-\infty$	$-3 - \sqrt{2}$		$-3 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

279.

a) O vértice é o ponto de coordenadas $(1,3)$ e quaisquer dois pontos da parábola cujas abscissas sejam da forma $1-k$ e $1+k$, com $k > 0$, têm a mesma ordenada, como, por exemplo, os pontos da parábola cujas abscissas são 0 e 2 ou $0,9$ e $1,1$.

b) Como a parábola que é gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e o vértice tem ordenada 3 , tem-se $D'_f = [3, +\infty[$

Como a parábola que é gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e o vértice tem abscissa 1 , a função é decrescente em $] -\infty, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$

O mínimo absoluto da função é igual a 3

280.

a) $h(x) = x^2 - 2x - 2 = (x^2 - 2x + 1) - 2 - 1 = (x-1)^2 - 3$

Como a parábola que é gráfico de h tem a concavidade voltada para cima e o vértice tem ordenada -3 , tem-se $D'_h = [-3, +\infty[$

b) Para cada valor de c , o gráfico da função f é a imagem do gráfico de h pela translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, c)$

A função f não tem zeros se e só se $c > 3$; o conjunto dos valores de c é $]3, +\infty[$

281.

a) Tem-se, para qualquer número real x :

• $f(1-x) = 5(1-x)^2 - 10(1-x) - 1 = 5(1-2x+x^2) - 10 + 10x - 1 =$
 $= 5 - 10x + 5x^2 - 11 + 10x = 5x^2 - 6$

• $f(1+x) = 5(1+x)^2 - 10(1+x) - 1 = 5(1+2x+x^2) - 10 - 10x - 1 =$
 $= 5 + 10x + 5x^2 - 11 - 10x = 5x^2 - 6$

b) $f(x) = 5x^2 - 10x - 1 = 5(x^2 - 2x) - 1 = 5(x^2 - 2x + 1) - 1 - 5 = 5(x-1)^2 - 6$

O vértice é o ponto de coordenadas $(1, -6)$

c) $f(1-x) = f(1+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ significa que a reta de equação $x = 1$ é o eixo de simetria da parábola que é gráfico de f .

282.

Tem-se $g(x) = f(-x) = 2 \times (-x)^2 + 3 \times (-x) - 1 = 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 1 =$
 $= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - 1 - \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$

283.

Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Os zeros de f são 1 e 3.

Para cada valor de a , o gráfico da função g é a imagem do gráfico de f pela translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(a, 0)$, pelo que...:

a) A função g tem dois zeros negativos se e só se $a < -3$

O conjunto dos valores de a é $] -\infty, -3[$

b) A função g tem um zero negativo e um zero positivo se e só se $-3 < a < -1$

O conjunto dos valores de a é $] -3, -1[$

Pág. 143

284.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 6$; conjunto-solução = $\{1, 6\}$

b) $9 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3$; conjunto-solução = $] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

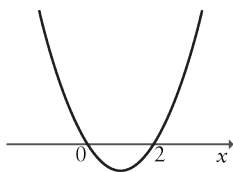
c) Tem-se: $2x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 2x$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$; conjunto-solução = $[0, 2]$

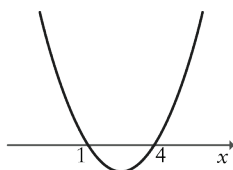
d) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 4$; conjunto-solução = $] -\infty, -1] \cup [4, +\infty[$

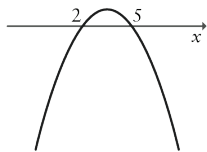
e) Tem-se: $-x^2 + 7x - 7 > 3 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 10 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -x^2 + 7x - 10$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$-x^2 + 7x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $-x^2 + 7x - 10 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$; conjunto-solução $=]2, 5[$

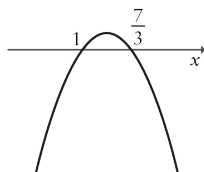
f) Tem-se: $3x - \frac{x^2+1}{5} - 1 > 2x - \frac{5-x^2}{10} \Leftrightarrow 30x - 2x^2 - 2 - 10 > 20x - 5 + x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3x^2 + 10x - 7 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -3x^2 + 10x - 7$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$-3x^2 + 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{7}{3}$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $-3x^2 + 10x - 7 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{3}$; conjunto-solução $=]1, \frac{7}{3}[$

285.

a₁) O ponto de coordenadas $(-1, 3)$ pertence ao gráfico de f se e só se $f(-1) = 3$

Tem-se: $f(-1) = 3 \Leftrightarrow (3 - 2a) \times (-1) - 2 = 3 \Leftrightarrow -3 + 2a = 5 \Leftrightarrow a = 4$

O conjunto dos valores de a é $\{4\}$

a₂) A função f é decrescente se e só se $3 - 2a < 0$

Tem-se: $3 - 2a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$

O conjunto dos valores de a é $]\frac{3}{2}, +\infty[$

a₃) A reta de equação $2x + y = 5$ tem declive igual a -2 , pelo que o gráfico de f é uma reta paralela à reta de equação $2x + y = 5$ se e só se $3 - 2a = -2$

Tem-se: $3 - 2a = -2 \Leftrightarrow a = 5/2$

O conjunto dos valores de a é $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

b) A função g é crescente se e só se $k^2 - 4 > 0$

Tem-se: $k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow k^2 > 4 \Leftrightarrow -2 < k \vee k > 2$

O conjunto dos valores de a é $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

286.

a) Como $\overline{DH} = x$, tem-se $\overline{AH} = 5 - x$

Então, tem-se: $f(x) = 4 \times \frac{\overline{AE} \times \overline{AH}}{2} = 2 \times [x(5 - x)] = 2(5x - x^2) = 10x - 2x^2$

De outro modo:

$f(x) = \overline{AB}^2 - \overline{EH}^2$, pelo que, como $\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = x^2 + (5 - x)^2 = x^2 + 25 - 10x + x^2 =$
 $= 2x^2 - 10x + 25$, vem $f(x) = \overline{AB}^2 - \overline{EH}^2 = 25 - (2x^2 - 10x + 25) = 10x - 2x^2$

$$\text{b)} f\left(\frac{5}{2}\right) = 10 \times \frac{5}{2} - 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

Para $x = \frac{5}{2}$, os pontos E , F , G e H são os pontos médios dos lados a que pertencem,

pelo que, nesse caso, a área da superfície é dada, nas respectivas unidades, por $4 \times \frac{\frac{5}{2} \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{2}$,

ou seja, metade da área do quadrado $[ABCD]$

287.

Seja x a medida da largura da moldura ($0 < x < 20$)

A área da peça metálica é igual a 40×60 , ou seja, 2400 cm^2 .

A área do retângulo interior que se retirou é dada, em função de x , por $(60 - 2x)(40 - 2x)$

A área da moldura é dada, em função de x , por $2400 - (60 - 2x)(40 - 2x)$, pelo que, uma condição que traduz o problema é:

$$2400 - (60 - 2x)(40 - 2x) = \frac{(60 - 2x)(40 - 2x)}{2}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} 2400 - (60 - 2x)(40 - 2x) &= \frac{(60 - 2x)(40 - 2x)}{2} \Leftrightarrow 2400 - (2400 - 200x + 4x^2) = \frac{2400 - 200x + 4x^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 200x - 4x^2 &= 1200 - 100x + 2x^2 \Leftrightarrow -6x^2 + 300x - 1200 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 50x + 200 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{50 \pm \sqrt{1700}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm 10\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = 25 \pm 5\sqrt{17} \Leftrightarrow x \approx 4,4 \vee x \approx 45,6 \end{aligned}$$

Como se tem $0 < x < 20$, o valor da largura da moldura, arredondado às décimas, é 4,4 cm.

De outro modo se pode equacionar o problema:

A área da moldura é igual a metade da área do retângulo interior que se retirou se e só se a área

deste retângulo for igual a $\frac{2}{3}$ da área da peça metálica inicial, pelo que uma condição que traduz o problema é:

$$(60 - 2x)(40 - 2x) = \frac{2}{3} \times 2400$$

Pág. 144

288.

a) Quando $\overline{DA} = 4$ tem-se $\overline{CD} = 4$ e $\overline{AB} = 2$, pelo que:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ unidades de área}$$

b) Quando $\overline{AB} = x$, com $0 < x < 6$, tem-se $\overline{DA} = \overline{CD} = 6 - x$, pelo que:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{x(6-x)}{2} = \frac{-x^2 + 6x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

c) Seja A a função definida por $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, $0 < x < 6$

Se o vértice da parábola definida por $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ pertencer ao gráfico de A , a sua abcissa é o valor de x para o qual a função A é máxima, pois a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times (-\frac{1}{2})} = 3$. Então, 3 é o valor de x para o qual a função A é máxima.

O valor da área máxima é $A(3)$ ou seja $-\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}$ unidades de área.

d) Sendo $\overline{DB} = k$, com $k > 0$, e $\overline{AB} = x$, com $0 < x < k$, tem-se $\overline{DA} = \overline{CD} = k - x$, pelo que:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{x(k-x)}{2} = \frac{-x^2 + kx}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{2}x$$

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{k/2}{2 \times (-\frac{1}{2})} = \frac{k}{2}$; ora, para $x = \frac{k}{2}$, A é o ponto médio de $[DB]$

289.

a) Quando $x = 4,5$, tem-se $\overline{QD} = 1,5$ e $\overline{PC} = 3,5$, pelo que:

$$\text{Área do triângulo } [PQC] = \frac{\overline{PC} \times \overline{QD}}{2} = \frac{3,5 \times 1,5}{2} = 2,625 \text{ unidades de área}$$

b) Tem-se $\overline{QD} = 6 - x$ e $\overline{PC} = 8 - x$ pelo que $a(x) = \frac{\overline{PC} \times \overline{QD}}{2} = \frac{(8-x) \times (6-x)}{2} = \frac{x^2 - 14x + 48}{2}$

$D_f = [0,6[$, pois Q pode coincidir com B (caso em que $x = 0$) e não pode coincidir com D .

$D'_f =]0,24]$, pois a área será máxima quando Q coincidir com B , e, à medida que Q se aproxima de D , a área aproxima-se, tanto quanto se queira, de 0.

c) A área do triângulo $[ABC]$ é 24.

A área do triângulo $[PQC]$ é dada, em função de x , por $\frac{x^2 - 14x + 48}{2}$, pelo que uma condição que traduz

o problema é: $\frac{x^2 - 14x + 48}{2} < 12$, com $0 \leq x < 6$

Tem-se:

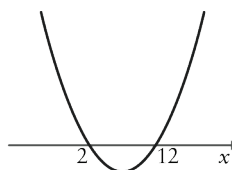
$$\frac{x^2 - 14x + 48}{2} < 12 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 < 24 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 < 0$$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 14x + 24$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 12$$

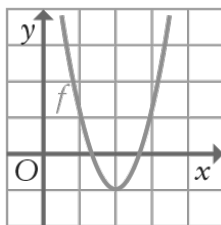
Um esboço do gráfico de f é:



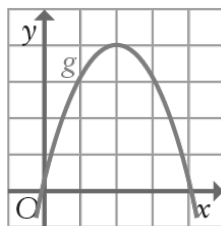
Então, para $0 \leq x < 6$, $x^2 - 14x + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 6$; conjunto-solução = $]2,6[$

290.

a) O vértice da parábola tem que ser o ponto de coordenadas $(2, -1)$:



b) Os zeros de g têm que ser 0 e 4:



c) Função f :

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(2, -1)$, $f(x)$ é da forma $a(x - 2)^2 - 1$, com $a > 0$

Como $f(1) = 1$, tem-se $a(1 - 2)^2 - 1 = 1$ ou seja $a = 2$

Então, f é a função definida por $f(x) = 2(x - 2)^2 - 1$

Função g :

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o vértice da parábola

é o ponto de coordenadas $(2, 4)$, $g(x)$ é da forma $a(x - 2)^2 + 4$, com $a < 0$

Como $g(0) = 0$, tem-se $a(0 - 2)^2 + 4 = 0$ ou seja $a = -1$

Então, g é a função definida por $g(x) = -(x - 2)^2 + 4$

Pág. 145

291.

a) Tem-se $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 900 + 1600 \Leftrightarrow \overline{AC} = 50$ e $\overline{EC} = 40 - x$

Como os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$ são semelhantes, tem-se $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{x}{40} = \frac{\overline{DE}}{50} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{5}{4}x$

Como os triângulos $[ABC]$ e $[EFC]$ são semelhantes, tem-se

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{30} = \frac{40-x}{50} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{3}{5}(40-x) \Leftrightarrow \overline{EF} = 24 - \frac{3}{5}x$$

$$\text{Então, } r(x) = \overline{DE} \times \overline{EF} = \frac{5}{4}x \left(24 - \frac{3}{5}x \right) = 30x - 0,75x^2$$

b) A abscissa do vértice da parábola que é gráfico de r é igual a $-\frac{30}{2 \times (-0,75)}$, ou seja, 20, pelo que, como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, a área do retângulo é máxima para $x = 20$; essa área é $r(20) = 30 \times 20 - 0,75 \times 20^2 = 300 \text{ cm}^2$

Como a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 600 cm^2 , a área do retângulo é igual à área da região não colorida.

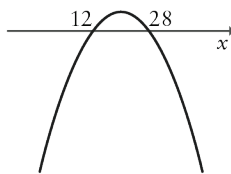
c) $r(x) > 252 \Leftrightarrow 30x - 0,75x^2 > 252 \Leftrightarrow -0,75x^2 + 30x - 252 > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = -0,75x^2 + 30x - 252$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$-0,75x^2 + 30x - 252 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 756}}{2 \times (-0,75)} \Leftrightarrow x = 12 \vee x = 28$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $-0,75x^2 + 30x - 252 > 0 \Leftrightarrow 12 < x < 28$; o conjunto dos valores de x é $]12, 28[$

d) Tem-se, para $x = 20$:

• Equação reduzida da reta AC

A é o ponto de coordenadas $(0, 30)$ e C é o ponto de coordenadas $(40, 0)$

$$m_{AC} = \frac{0-30}{40-0} = -\frac{3}{4}$$

A reta AC é definida pela equação $y = -\frac{3}{4}x + 30$

- Equação reduzida da reta DE

$$\text{Tem-se } \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{20}{40} = \frac{\overline{DB}}{30} \Leftrightarrow \overline{DB} = 15$$

E é o ponto de coordenadas $(20,0)$ e D é o ponto de coordenadas $(0,15)$

$$m_{DE} = m_{AC} = -\frac{3}{4}$$

A reta DE é definida pela equação $y = -\frac{3}{4}x + 15$

- Coordenadas do ponto F

$$\overline{EC} = 40 - 20 = 20$$

$$\overline{EF} = 24 - \frac{3}{5} \times 20 = 12$$

$$\text{Tem-se } \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EH}}{12} = \frac{12}{20} \Leftrightarrow \overline{EH} = 7,2$$

A abscissa de F é igual a $27,2$.

A ordenada de F é igual a $-\frac{3}{4} \times 27,2 + 30 = 9,6$

- Equação reduzida da reta EF

E é o ponto de coordenadas $(20,0)$ e F é o ponto de coordenadas $(27,2; 9,6)$

$$m_{EF} = \frac{9,6-0}{27,2-20} = \frac{9,6}{7,2} = \frac{4}{3}$$

A reta EF é definida por uma equação da forma $y = \frac{4}{3}x + b$

Como o ponto E pertence à reta, tem-se $0 = \frac{4}{3} \times 20 + b$ ou seja $b = -\frac{80}{3}$

A reta EF é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x - \frac{80}{3}$

- Equação reduzida da reta DG

D é o ponto de coordenadas $(0,15)$

$$m_{DG} = m_{EF} = \frac{4}{3}$$

A reta DG é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x + 15$

- Definição analítica do retângulo

$$y \leq \frac{4}{3}x + 15 \wedge y \geq \frac{4}{3}x - \frac{80}{3} \wedge y \leq -\frac{3}{4}x + 30 \wedge y \geq -\frac{3}{4}x + 15$$

292.

a) C é o ponto de coordenadas $(0,10)$

Determinemos as coordenadas do ponto B : $0 = -2x + 10 \Leftrightarrow x = 5$,

pelo que B é o ponto de coordenadas $(5,0)$

Então, x pode tomar todos os valores do intervalo $]0,5[$

Para cada valor de x , a ordenada do ponto P é dada por $-2x + 10$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Área da região colorida} &= \text{área do triângulo } [OBC] - \text{área do triângulo } [OAP] = \frac{10 \times 5}{2} - \frac{x \times (-2x + 10)}{2} = \\ &= x^2 - 5x + 25 \end{aligned}$$

b) Se o vértice da parábola definida por $y = x^2 - 5x + 25$ pertencer ao gráfico de a , a sua abscissa é o valor de x para o qual a função a é mínima, pois a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \times 1} = \frac{5}{2}$. Então, $\frac{5}{2}$ é o valor de x para o qual a função a é máxima.

O valor da área máxima é $a\left(\frac{5}{2}\right)$ ou seja $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{2} + 25 = \frac{75}{4} = 18,75$ unidades de área.

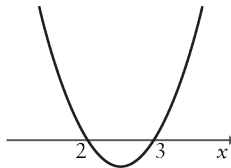
c) $a(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 25 > 19 \wedge 0 < x < 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \wedge 0 < x < 5$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, para $0 < x < 5$, $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \vee 3 < x < 5$;

conjunto-solução $=]0,2[\cup]3,5[$

Pág. 146

293.

a) $h(0) = \frac{(0-2)^2}{4} + 3 = 4$ metros

b) $h(x) = 12 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + 3 = 12 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 36 \Leftrightarrow x-2 = -6 \vee x-2 = 6 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 8$

Como $x > 0$, a distância entre os dois postes é 8 metros.

c) A altura máxima da camioneta é determinada pela sua passagem tangente ao poste da direita.

Essa altura é a do ponto do cabo a que é tangente, nessa passagem, a aresta superior esquerda do contentor que, nessa passagem, está a 5 metros do poste da esquerda.

$$h(5) = \frac{(5-2)^2}{4} + 3 = \frac{21}{4} = 5,25 \text{ metros}$$

294.

A interseção do gráfico de g com a reta de equação $y = -2x + 7$ é definida pelo sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 7 = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

pelo que a reta intersesta a parábola num único ponto; como a reta não é paralela

ao eixo de simetria da parábola (por não ser uma reta paralela ao eixo Oy), a reta é tangente à parábola.

O ponto de tangência é o ponto de coordenadas (2,3)

295.

a) A abscissa de A é o ponto de coordenadas (0,10)

A abscissa de A é igual a $-\frac{-6}{2} = 3$

A ordenada de A é igual a $f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$

A é o ponto de coordenadas (3,2)

• Equação reduzida da reta r :

$m_r = 1$, pelo que a reta r é definida por uma equação da forma $y = x + b$

Como o ponto A pertence à reta, tem-se $2 = 3 + b$ ou seja $b = -1$

Então, a reta r é definida pela equação $y = x - 1$

- Coordenadas do ponto B :

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = x^2 - 6x + 11 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Então, o ponto B tem coordenadas $(4,3)$

- Equação reduzida da reta t :

$m_t = -2$, pelo que a reta t é definida por uma equação da forma $y = -2x + b$

Como o ponto A pertence à reta, tem-se $2 = -6 + b$ ou seja $b = 8$

Então, a reta t é definida pela equação $y = -2x + 8$

- Coordenadas do ponto C :

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 8 = x^2 - 6x + 11 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 3 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Então, o ponto C tem coordenadas $(1,6)$

- Então, tem-se:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Ora, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 20 = 2 + 18$, pelo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

b) Na figura ao lado está representada, sobre o referencial xOy

do enunciado, a construção que permite obter, geometricamente, o ponto D .

D é o ponto de abscissa 3 que pertence à reta CB

Determinemos a equação reduzida da reta CB

B é o ponto de coordenadas $(4,3)$ e C é o ponto de coordenadas $(1,6)$

$$m_{CB} = \frac{6-3}{1-4} = -1, \text{ pelo que a reta } CB \text{ é definida por uma equação da forma}$$

$$y = -x + b$$

Como o ponto B pertence à reta, tem-se $3 = -4 + b$ ou seja $b = 7$

A reta CB é definida pela equação $y = -x + 7$

Como D pertence à reta CB , tem-se $y = -3 + 7 = 4$, pelo que D é o ponto de coordenadas $(3,4)$

A altura do triângulo $[ACD]$ relativa ao lado $[CD]$ é $\overline{AB}$, pelo que a área do triângulo $[ACD]$

é dada por $\frac{\overline{CD} \times \overline{AB}}{2}$

$$\text{Ora, } \overline{AB} = \sqrt{2} \text{ e } \overline{CD} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \text{ pelo que}$$

$$\text{Área do triângulo } [ACD] = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 2 \text{ unidades de área}$$

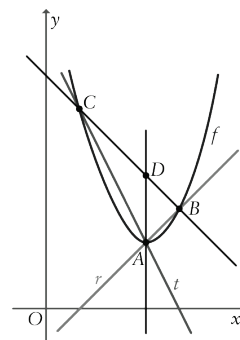
c) Como A é o ponto de coordenadas $(3,2)$, a imagem de A pela reflexão de eixo de equação $y = 2$ é o próprio ponto A ; então, o vértice da parábola que é gráfico de h é o ponto de coordenadas $(3,2)$

Então, $h(x) = a(x-3)^2 + 2$, com $a < 0$

Como B é o ponto de coordenadas $(4,3)$, a imagem de B pela reflexão de eixo de equação $y = 2$

é o ponto de coordenadas $(4,1)$; então, a parábola que é gráfico de h passa no ponto de coordenadas $(4,1)$

$$\text{Então: } h(4) = 1 \Leftrightarrow a(4-3)^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \text{ pelo que } h(x) = -(x-3)^2 + 2$$



296.

a) $g(x) = f(x) + 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 + 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x = 2x \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \right) = 2x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 2)$

Tem-se: $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$

b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Tem-se $f(-1) = 0$, pelo que podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir $f(x)$ por $x + 1$

Tem-se:

	2	3	-2	-3
-1		-2	-1	3
	2	1	-3	0 = R

Então, tem-se $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(2x^2 + x - 3)$

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 + x - 3) \leq 0$

Tem-se: $(x + 1)(2x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -1 \vee x = 1$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1	$+\infty$
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 + x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Então, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2} \vee -1 \leq x \leq 1$; conjunto-solução = $] -\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, 1]$

De outro modo:

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (2x^3 - 2x) + (3x^2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x + 3) \leq 0$

Tem-se: $(x^2 - 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -1 \vee x = 1$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1	$+\infty$
$2x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Então, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2} \vee -1 \leq x \leq 1$; conjunto-solução = $] -\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, 1]$

c) Sejam A e B os pontos do gráfico de f de abscissas -2 e -1 , respetivamente, e seja P o outro ponto do gráfico de f que pertence à reta AB

Determinemos a equação reduzida da reta AB

Tem-se $f(-2) = -3$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-2, -3)$

Tem-se $f(-1) = 0$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$

$m_{AB} = \frac{0+3}{-1+2} = 3$, pelo que a reta AB é definida por uma equação da forma $y = 3x + b$

Como o ponto B pertence à reta, tem-se $0 = -3 + b$ ou seja $b = 3$

A reta AB é definida pela equação $y = 3x + 3$

Determinação das coordenadas do ponto P

1. Processo analítico

$$\begin{aligned} f(x) = 3x + 3 &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x + 3) = 3(x + 1) \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(2x + 3) - 3(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + 1)[(x - 1)(2x + 3) - 3] = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee 2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2 \vee x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

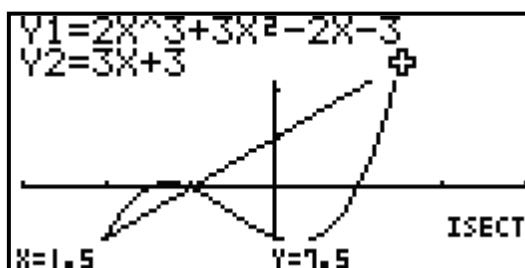
Como -2 e -1 são, respetivamente, as abcissas dos pontos A e B , a abcissa de P é $\frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{2}; \text{ a ordenada de } P \text{ é igual a } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}$$

P é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right) = (1,5; 7,5)$

2. Utilizando uma calculadora gráfica

Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se, sobrepostos, o gráfico de f e a reta de equação $y = 3x + 3$, bem como as coordenadas do ponto P :



P é o ponto de coordenadas $(1,5; 7,5)$

297.

a) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee 2 \leq x \leq 3$; conjunto-solução = $] -\infty, -1] \cup [2, 3]$

b) O resto da divisão é $f(1) = 2$

c) Como o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação horizontal associada ao vetor $(-a, 0)$, tem que ser $2 < a \leq 3$; o conjunto dos valores de a é o intervalo $]2, 3]$

d) Tem-se: $(3 - x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \vee f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \vee x = 2$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$3 - x$	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$(3 - x) \cdot f(x)$	-	0	+	0	-	0	-

Então, $(3 - x) \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow (x < -1 \vee x > 2) \wedge x \neq 3$;

conjunto-solução = $(] -\infty, -1[\cup]2, +\infty[) \setminus \{3\}$

e) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são -1 , 2 e 3 , $f(x)$ é da forma $a(x + 1)(x - 2)(x - 3)$, com $a \neq 0$

Como $f(1) = 2$, tem-se $a \times (1 + 1) \times (1 - 2) \times (1 - 3) = 2$ pelo que $a = \frac{1}{2}$

Então, $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

f) Tem-se:

A é o ponto de coordenadas $(1,2)$

D é o ponto de coordenadas $(2,0)$

C é o ponto de coordenadas $(3,0)$

B é o ponto de maior abscissa do gráfico de f cuja ordenada é 2.

Determinação da abscissa de B :

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3) = 2 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x-3) = 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$$

Como sabemos que $f(1) = 2$, sabemos que 1 é solução da equação $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$, pelo que podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $x^3 - 4x^2 + x + 2$ por $x - 1$

Tem-se:

	1	-4	1	2
1		1	-3	-2
	1	-3	-2	0 = R

Então, tem-se

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x \approx -0,562 \vee x \approx 3,562$$

B é o ponto de coordenadas $(3,562; 2)$

Então, tem-se:

$$\overline{AB} \approx 3,562 - 1 = 2,562$$

$$\overline{DC} = 1$$

Altura do trapézio = 2

$$\text{Área do trapézio} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times 2 \approx 3,56 \text{ unidades de área}$$

298.

Como sabemos que $f(-1) = 0$, podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $f(x)$ por $x + 1$

Tem-se:

	0,2	-1,1	0,2	1,5
-1		-0,2	1,3	-1,5
	0,2	-1,3	1,5	0 = R

Então, tem-se

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(0,2x^2 - 1,3x + 1,5) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 0,2x^2 - 1,3x + 1,5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = 5$$

Então, a abscissa de B é $\frac{3}{2}$ e a abscissa de C é 5.

A altura do triângulo $[BCD]$ relativa ao lado $[BC]$ é $\overline{OD}$, pelo que a área do triângulo $[BCD]$

é dada por $\frac{\overline{BC} \times \overline{OD}}{2}$

Ora, $\overline{BC} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$ e $\overline{OD} = f(0) = 1,5$, pelo que:

$$\text{Área do triângulo } [BCD] = \frac{3,5 \times 1,5}{2} = 2,625 \text{ unidades de área}$$

299.

a) $h(0) = 3,5$; a altura do reservatório é 3,5 metros.

b) O depósito começa a receber água antes de terminar a rega, pelo que, como a rega começa às 8 horas e termina às 10 horas, basta considerar $t \in [0,2]$

Como a altura do reservatório é 3,5 metros, tem-se $h(t) \in [0; 3,5]$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se, na janela de visualização definida por $x \in [0,2]$ e $y \in [0; 3,5]$, o gráfico e o mínimo de h .



O depósito começou a receber água quando a altura da água era 0,44 m, ou seja, 44 cm.

c) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se, por exemplo na janela de visualização definida por $x \in [0,3]$ e $y \in [0; 4]$, o gráfico de h e o valor positivo de x para o qual $h(x) = 3,5$



O enchimento do depósito termina ao fim de aproximadamente 2,15 horas, ou seja, 2 horas e 9 minutos. O processo está terminado às 10 horas e 9 minutos.

300.

a) Tem-se: $(4 - x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x = 0 \vee f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	-1		0		4	$+\infty$
$4 - x$	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$(4 - x) \cdot f(x)$	+	0	-	0	+	0	+

Então, $(4 - x) \cdot f(x) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \vee 0 < x < 4 \vee x > 4) \wedge x \neq 4$;

conjunto-solução = $]-\infty, -1[\cup]0, 4[\cup]4, +\infty[$

b) Como $f(3) = 2$, podemos concluir, de acordo com o teorema do resto, que o resto da divisão inteira do polinómio $f(x)$ por $x - 3$ é igual a 2.

c) Como $f(x)$ é um polinómio de grau 3, cujas raízes são -1 , 0 e 4 , $f(x)$ é da forma $a x(x + 1)(x - 4)$, com $a \neq 0$

Como $f(3) = 2$, tem-se $a \times 3 \times (3 + 1) \times (3 - 4) = 2$ pelo que $a = -\frac{1}{6}$

$$\text{Então, } f(x) = -\frac{1}{6}x(x+1)(x-4) = -\frac{x^3-3x^2-4x}{6} = \frac{3x^2+4x-x^3}{6}$$

$$\text{d) } f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2+4x-x^3}{6} = 2 \Leftrightarrow 3x^2+4x-x^3 = 12 \Leftrightarrow -x^3+3x^2+4x-12 = 0$$

Como sabemos que $f(3) = 2$, sabemos que 3 é solução da equação $-x^3+3x^2+4x-12 = 0$, pelo que podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $-x^3+3x^2+4x-12 = 0$ por $x-3$
Tem-se:

	-1	3	4	-12
3		-3	0	12
	-1	0	4	0 = R

Então, tem-se

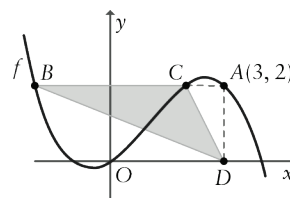
$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -x^3+3x^2+4x-12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(-x^2+4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2 \vee x = 2$$

pelo que, de acordo com a figura ao lado, tem-se:

B é o ponto de coordenadas $(-2,2)$

C é o ponto de coordenadas $(2,2)$

D é o ponto de coordenadas $(3,0)$



A altura do triângulo $[BCD]$ relativa ao lado $[BC]$ é $\overline{AD}$, pelo que a área do triângulo $[BCD]$ é dada por $\frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$ unidades de área.

301.

Determinação da equação reduzida da reta RS

$$f(-3) = \frac{3 \times (-3)^2 + 4 \times (-3) - (-3)^3}{6} = 7, \text{ pelo que } R \text{ é o ponto de coordenadas } (-3, 7)$$

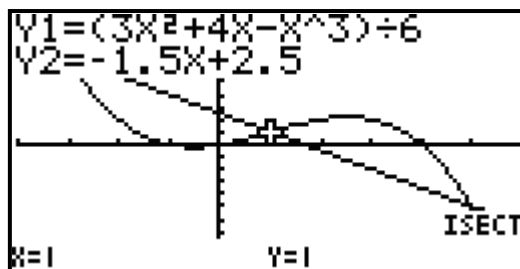
$$f(5) = \frac{3 \times 5^2 + 4 \times 5 - 5^3}{6} = -5, \text{ pelo que } S \text{ é o ponto de coordenadas } (5, -5)$$

$$m_{RS} = \frac{-5-7}{5+3} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}, \text{ pelo que a reta } RS \text{ é definida por uma equação da forma } y = -\frac{3}{2}x + b$$

Como o ponto R pertence à reta, tem-se $7 = -\frac{3}{2} \times (-3) + b$ ou seja $b = \frac{5}{2}$

A reta RS é definida pela equação $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

a) Recorrendo a uma calculadora gráfica, podem obter-se, sobrepostos, o gráfico de f e a reta de equação $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, bem como as coordenadas do outro ponto comum:



O outro ponto tem coordenadas $(1,1)$

$$\text{b)} \frac{3x^2+4x-x^3}{6} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - x^3 = -9x + 15 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 + 13x - 15 = 0$$

Como -3 é solução da equação $\frac{3x^2+4x-x^3}{6} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, pode concluir-se que -3 é raiz do polinómio $-x^3 + 3x^2 + 13x - 15$, pelo que podemos utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio por $x + 3$. Tem-se:

	-1	3	13	-15
-3		3	-18	15
	-1	6	-5	0 = R

Então, tem-se

$$\frac{3x^2+4x-x^3}{6} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 + 13x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(-x^2 + 6x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = 5$$

Então, a abcissa do outro ponto comum é 1 e a ordenada é $f(1) = 1$

O outro ponto tem coordenadas $(1,1)$

Pág. 149

302.

a) O quadrilátero $[OABC]$ é um retângulo se e só se o ponto B tiver a mesma ordenada de C . O ponto C tem coordenadas $(0,5)$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 = 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

O quadrilátero $[OABC]$ é um retângulo se e só se B for o ponto de coordenadas $(8,5)$

A abcissa do ponto A tem que ser igual a 8 .

b₁) x pode tomar todos os valores reais maiores do que 0 e menores do que a abcissa de P , que é a raiz positiva do polinómio $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$

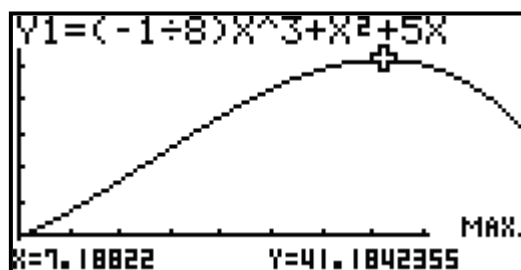
$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 10$$

A abcissa de P é 10 , pelo que $D_T =]0,10[$

b₂) Para cada posição do ponto A , o quadrilátero $[OABC]$ é um trapézio cujas bases são $\overline{OC}$ e $\overline{AB}$ e cuja altura é $\overline{OA}$

$$T(x) = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{OA} = \frac{5 + (-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5)}{2} \times x = \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 5\right) \times x = -\frac{1}{8}x^3 + x^2 + 5x$$

c) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico de T e o valor procurado, que é o maximizante de T :



O maximizante de T , arredondado às décimas, é $7,2$.

303.

a) O retângulo $[OPQR]$ é um quadrado se e só se $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Seja a a abscissa do ponto Q .

$$\overline{OP} = \overline{PQ} \Leftrightarrow a = 4 - (a - 1)^2 \Leftrightarrow -a^2 + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-2} \Leftrightarrow a = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \vee a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

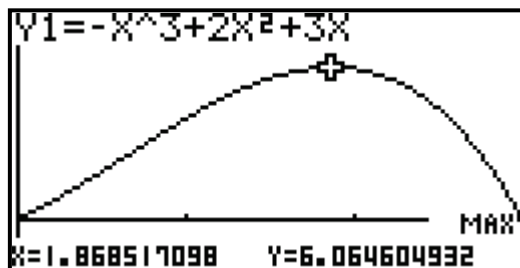
Como a abscissa de Q é positiva, tem-se $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

O ponto Q tem, neste caso, coordenadas $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

b) Tem-se, para qualquer $b \in]0,3[$:

$$A(b) = \overline{OP} \times \overline{PQ} = b \times [4 - (b - 1)^2] = b \times (-b^2 + 2b + 3) = -b^3 + 2b^2 + 3b$$

c) Recorrendo a uma calculadora gráfica, pode obter-se o gráfico de A e a abscissa procurada, que é o maximizante de A :



Um valor arredondado do maximizante de A , com quatro casas decimais, é 1,8685.

$$\text{Tem-se } f(1,8685) = 4 - (1,8685 - 1)^2 \approx 3,25$$

O ponto Q tem, neste caso, coordenadas (1,87; 3,25)

d) Seja B o ponto de coordenadas (3,0) e seja C o ponto de coordenadas (0,3)

Determinação da ordenada de D :

$$f(\phi) = 4 - (\phi - 1)^2 = 4 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2 = 4 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4}$$

O ponto D é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{10+2\sqrt{5}}{4}\right)$

Então, tem-se:

$$\overline{BD} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{15}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Ora, $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 18 = 15 + 3$, pelo que o triângulo $[BCD]$ é retângulo.

Pág. 150

304.

a) $(x^2 - 2x)^3 = [x(x - 2)]^3 = x^3 \cdot (x - 2)^3$

As raízes do polinómio são 0 e 2, sendo ambas de multiplicidade 3.

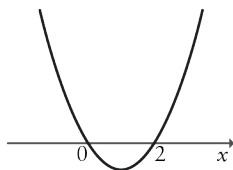
b) Tem-se: $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 2x$

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$; conjunto-solução = $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

De outro modo:

Tem-se: $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x - 2)^3 > 0$

$$x^3 \cdot (x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^3	-	0	+	+	+
$(x - 2)^3$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

Então, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$; conjunto-solução = $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

c) Por exemplo:

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2 - 2x$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x^3$

Na verdade, vem $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^3 = f(x)$

305.

a) O vértice é o ponto de coordenadas (2,1) e o eixo de simetria é definido pela equação $x = 2$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = -1 \vee x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Os zeros de g são 1 e 3.

$g(0) = -(0 - 2)^2 + 1 = -3$; o gráfico interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas (0, -3)

c) Tem-se:

g	$D'_g =] -\infty, 1]$
$f_1(x) = g(x + 3)$	$D'_{f_1} =] -\infty, 1]$
$f_2(x) = -g(x + 3)$	$D'_{f_2} = [-1, +\infty[$
$f(x) = 2 - g(x + 3)$	$D'_f = [1, +\infty[$

$$D'_f = [1, +\infty[$$

Uma equação que traduz o problema é $f(x) = f(-20)$

$$f(x) = f(-20) \Leftrightarrow 2 - g(x + 3) = 2 - g(-17) \Leftrightarrow g(x + 3) = g(-17) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x + 1)^2 + 1 = -(-19)^2 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = (-19)^2 \Leftrightarrow x + 1 = -19 \vee x + 1 = 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -20 \vee x = 18$$

O valor procurado é 18.

d) O vértice do gráfico da função f é o ponto de coordenadas (2, -2), pelo que $h(x)$

é da forma $a|x - 2| - 2$, com $a > 0$

Os zeros de h são iguais aos zeros de g , pelo que o gráfico de h passa, por exemplo, no ponto de coordenadas $(1,0)$

Então, tem-se $a|1 - 2| - 2 = 0$ ou seja $a = 2$, pelo que $h(x) = 2|x - 2| - 2$

$h(x) > 10 \Leftrightarrow 2|x - 2| - 2 > 10 \Leftrightarrow |x - 2| > 6 \Leftrightarrow x - 2 < -6 \vee x - 2 > 6 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 8$;

conjunto-solução = $] - \infty, -4[\cup]8, +\infty[$

306.

a) $d(0) = |10 - 2 \times 0| = 10$ e $d(15) = |10 - 2 \times 15| = 20$

Logo, o sensor está a 10 metros do início e a 20 metros do fim da pista.

b) A pista tem 30 metros de comprimento. O atleta percorreu esses 30 metros em 15 segundos, ou seja, à velocidade média de 2 metros por segundo.

c) Tem-se, para $0 \leq t \leq 15$:

$$d(t) = 5 \Leftrightarrow |10 - 2t| = 5 \Leftrightarrow 10 - 2t = -5 \vee 10 - 2t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} \vee t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 7,5 \vee t = 2,5$$

A distância é igual a 5 metros nos instantes 2,5 segundos e 7,5 segundos.

d) Tem-se, para $0 \leq t \leq 15$:

$$d(t) > 6 \Leftrightarrow |10 - 2t| > 6 \Leftrightarrow 10 - 2t < -6 \vee 10 - 2t > 6 \Leftrightarrow -2t < -16 \vee -2t > -4 \Leftrightarrow t > 8 \vee t < 2$$

Então, o atleta encontra-se a uma distância do sensor superior a 6 m entre os instantes 0 s e 2 s

e entre os instantes 8 s e 15 s, ou seja, durante um tempo total de 9 s.

Pág. 151

307.

a) O ponto B , vértice do gráfico da função f , é o ponto de coordenadas $(6,8)$

Então, $D_h = [0,6[$

b) Tem-se

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}(-x + 6) + 8 & \text{se } x < 6 \\ -\frac{2}{3}(x - 6) + 8 & \text{se } x \geq 6 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 4 & \text{se } x < 6 \\ -\frac{2}{3}x + 12 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-x + 6) & \text{se } x < 6 \\ \frac{1}{3}(x - 6) & \text{se } x \geq 6 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2 & \text{se } x < 6 \\ \frac{1}{3}x - 2 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

Para cada valor de $x \in [0,6[$, tem-se:

P é o ponto de coordenadas $(x, \frac{2}{3}x + 4)$ e, então, a ordenada de Q é igual a $\frac{2}{3}x + 4$

S é o ponto de coordenadas $(x, -\frac{1}{3}x + 2)$ e, então, a ordenada de R é igual a $-\frac{1}{3}x + 2$

Determinação da abcissa dos pontos R e Q :

Seja a a abcissa do ponto R . Tem-se $g(a) = -\frac{1}{3}x + 2$

$$g(a) = -\frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a - 2 = -\frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow a = -x + 12$$

Então:

R é o ponto de coordenadas $(-x + 12, -\frac{1}{3}x + 2)$ e

Q é o ponto de coordenadas $(-x + 12, \frac{2}{3}x + 4)$

Determinação da área do retângulo $[PQRS]$:

$$\overline{SR} = x_R - x_S = -x + 12 - x = -2x + 12$$

$$\overline{SP} = y_p - y_s = \frac{2}{3}x + 4 - \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) = x + 2$$

$$h(x) = \overline{SR} \times \overline{SP} = (-2x + 12) \times (x + 2) = -2x^2 + 8x + 24$$

c) Se o vértice da parábola definida por $y = -2x^2 + 8x + 24$ pertencer ao gráfico de h , a sua abscissa é o valor de x para o qual a função h é máxima, pois a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times (-2)} = 2$. Então, 2 é o valor de x para o qual a função h é máxima.

Para $x = 2$, tem-se: $\overline{SR} = -2 \times 2 + 12 = 8$ e $\overline{SP} = 2 + 2 = 4$

O retângulo que tem maior área tem comprimento igual a 8 e largura igual a 4.

308.

Gráfico de g :

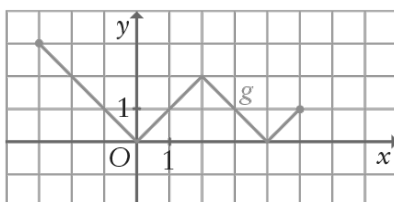
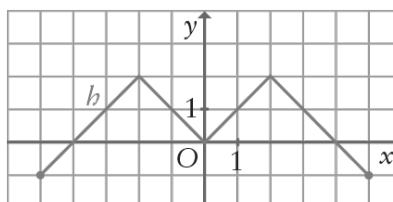


Gráfico de h :

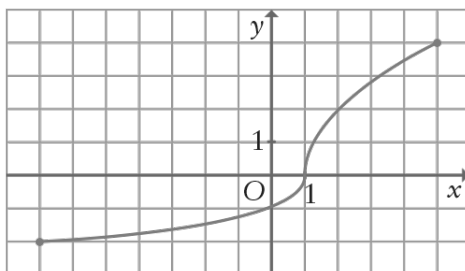


Pág. 152

309.

O gráfico da função definida por $\sqrt[3]{x-1}$ é a imagem do gráfico da função definida por $\sqrt[3]{x}$ por uma translação horizontal associada ao vetor $(1,0)$; desse gráfico, devemos conservar, para o traçado do gráfico da função f , a porção respeitante ao intervalo $[-7,1]$

Procedendo de modo semelhante para o intervalo $]1,5]$, obtemos o seguinte gráfico para f :



310.

a) Para cada valor de $x > 0$, tem-se:

P é o ponto de coordenadas $(3,4)$

Q é o ponto de coordenadas $(x,0)$

Determinação do perímetro do triângulo $[OPQ]$:

$$\overline{OQ} = x$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$\text{Então, } f(x) = \overline{OQ} + \overline{OP} + \overline{PQ} = x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

b) Para $x > 0$, tem-se:

$$f(x) = 16 \Leftrightarrow x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 25} = 11 - x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 25 = (11 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 25 = 121 - 22x + x^2 \Leftrightarrow 16x = 96 \Leftrightarrow x = 6$$

Vejam se 6 é solução da equação inicial:

$$6 + 5 + \sqrt{6^2 - 6 \times 6 + 25} = 16 \Leftrightarrow 11 + 5 = 16, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 6 é solução da equação $x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25} = 16$

Como $6 \in D_f$, 6 é a solução do problema.

311.

Pretende-se provar que: $\forall x, y \in \mathbb{R}, y > x \Rightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(x)$

Façamos a demonstração por contrarrecíproco, ou seja, provemos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x) \Rightarrow y \leq x$$

Sejam então x e y números reais. Tem-se:

- $f^{-1}(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow y = x$ pois f^{-1} é bijetiva (a inversa de uma função bijetiva também é bijetiva)
- $f^{-1}(y) < f^{-1}(x) \Rightarrow f[f^{-1}(y)] < f[f^{-1}(x)] \Rightarrow y < x$

Portanto, $\forall x, y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x) \Rightarrow y \leq x$

312.

Função $f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in [-5, 5] : g(x) \in \mathbb{R}\} = [-5, 5]$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \begin{cases} f(x-1) & \text{se } -5 \leq x \leq 0 \\ f(x+1) & \text{se } 0 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 2(x-1)+1 & \text{se } -5 \leq x \leq 0 \\ 2(x+1)+1 & \text{se } 0 < x \leq 5 \end{cases} = \\ = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } -5 \leq x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{se } 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

Então, tem-se:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } -5 \leq x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{se } 0 < x \leq 5 \end{cases} \text{ e } D_{f \circ g} = [-5, 5]$$

Função $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 2x+1 \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 2\} = [-3, 2]$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \begin{cases} (2x+1)-1 & \text{se } -5 \leq 2x+1 \leq 0 \\ (2x+1)+1 & \text{se } 0 < 2x+1 \leq 5 \end{cases} = \\ = \begin{cases} 2x & \text{se } -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x+2 & \text{se } -\frac{1}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

Então, tem-se:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x+2 & \text{se } -\frac{1}{2} < x \leq 2 \end{cases} \text{ e } D_{g \circ f} = [-3, 2]$$

313.

a) A é o ponto de coordenadas $(h - \frac{l}{2}, k)$ e B é o ponto de coordenadas $(h - \frac{l}{2}, k + l)$

Como o ponto B pertence à parábola, $f(h - \frac{l}{2}) = k + l$

$$f(h - \frac{l}{2}) = k + l \Leftrightarrow a[(h - \frac{l}{2}) - h]^2 + k = k + l \Leftrightarrow a(-\frac{l}{2})^2 = l \Leftrightarrow a\frac{l^2}{4} = l \Leftrightarrow al^2 - 4l = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow l(al - 4) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \vee l = \frac{4}{a} \Leftrightarrow l = \frac{4}{a} \text{ (pois } l > 0)$$

b) Tem-se $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 4} = 1$ e $f(1) = 4 - 8 + 7 = 3$, pelo que o vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(1, 3)$

Como $a = 4$, o lado do quadrado é igual a 1.

Então, tem-se:

A é o ponto de coordenadas $\left(1 - \frac{1}{2}, 3\right) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

D é o ponto de coordenadas $\left(1 + \frac{1}{2}, 3\right) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

B é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 3 + 1\right) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$

C é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

c) A abscissa do vértice é a média aritmética das abscissas dos pontos A e C , ou seja, 0, e a ordenada do vértice é igual à ordenada do ponto A . Então, o vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(0, -1)$,

pelo que $f(x)$ é uma expressão da forma $ax^2 - 1$

Como, por outro lado, se tem $l = 4$, vem $a = 1$, pelo que $f(x) = x^2 - 1$

Pág. 153

314.

a) P é o ponto de coordenadas $(a, 2a - 4)$ e Q é o ponto de coordenadas $(a, -a + 2)$

$$\overline{PQ} = d(a) = |2a - 4 - (-a + 2)| = |2a - 4 + a - 2| = |3a - 6|$$

b) $\overline{PQ} = 3 \Leftrightarrow |3a - 6| = 3 \Leftrightarrow 3a - 6 = -3 \vee 3a - 6 = 3 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 3$

Tem-se:

Para $a = 1 \rightarrow P(1, -2)$ e $Q(1, 1)$

Para $a = 3 \rightarrow P(3, 2)$ e $Q(3, -1)$

c) Uma condição que traduz o problema é: $\pi \times \overline{PQ} > 12\pi$

$$\pi \times \overline{PQ} > 12\pi \Leftrightarrow \pi \times |3a - 6| > 12\pi \Leftrightarrow |3a - 6| > 12 \Leftrightarrow 3a - 6 < -12 \vee 3a - 6 > 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a < -2 \vee a > 6; \text{ o conjunto dos valores de } a \text{ é }]-\infty, -2[\cup]6, +\infty[$$

d) I é o ponto de coordenadas $(2, 0)$, pelo que, para cada posição do ponto P , a altura do triângulo $[PQI]$ relativa ao lado $[PQ]$ é igual a $|a - 2|$

$$\text{Área do triângulo } [PQI] = \frac{\overline{PQ} \times |a - 2|}{2} = \frac{|3a - 6| \times |a - 2|}{2} = \frac{3|a - 2| \times |a - 2|}{2} = \frac{3|a - 2|^2}{2} = \frac{3}{2}(a - 2)^2$$

e₁) Seja t a abscissa do ponto T .

Como T pertence à reta s , a sua ordenada é dada por $-t + 2$

Como, por outro lado, T tem ordenada igual à ordenada de P , a sua ordenada é $2a - 4$

Então, $-t + 2 = 2a - 4$ pelo que $t = -2a + 6$

T é o ponto de coordenadas $(-2a + 6, 2a - 4)$

e₂) O triângulo $[PQT]$ é retângulo em P , pelo que a sua área é dada por $\frac{\overline{PQ} \times \overline{PT}}{2}$

$$\overline{PT} = |a - (-2a + 6)| = |3a - 6|$$

$$\text{Área do triângulo } [PQT] = \frac{\overline{PQ} \times \overline{PT}}{2} = \frac{|3a - 6| \times |3a - 6|}{2} = \frac{3|a - 2| \times 3|a - 2|}{2} = \frac{9|a - 2|^2}{2} = 3 \times \left[\frac{3}{2}(a - 2)^2\right] =$$

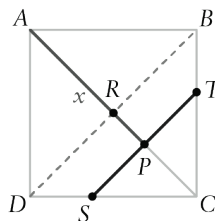
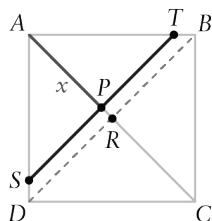
$$= 3 \times \text{Área do triângulo } [PQI]$$

315.

a) Nas figuras abaixo está representada a base superior do prisma, cujo centro se designou por R .

Na figura da esquerda, o ponto P move-se sobre $[AR]$ e, na da direita, move-se sobre $[RC]$

O segmento $[ST]$ é, em ambos os casos, a interseção da base superior do prisma com o plano que passa em P e é perpendicular a $[AC]$



Para cada posição do ponto P , a secção é um retângulo de comprimento igual à altura do prisma e largura igual a $\overline{ST}$, pelo que a sua área é igual a $2 \times \overline{ST}$

- A figura da esquerda é a que ilustra os casos em que $0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Tem-se $\overline{PS} = \overline{AP} = x$ donde $\overline{ST} = 2x$

Então, a área da secção é igual a $4x$

Como $x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se:

$$\left(\sqrt{2} - 2 \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right) \times 2 = 2\sqrt{2} - 4 \left(-x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 4x - 2\sqrt{2} = 4x$$

- A figura da direita é a que ilustra os casos em que $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{2}$:

Tem-se $\overline{PS} = \overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = \sqrt{2} - x$ donde $\overline{ST} = 2\sqrt{2} - 2x$

Então, a área da secção é igual a $4\sqrt{2} - 4x$

Como $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se:

$$\left(\sqrt{2} - 2 \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right) \times 2 = 2\sqrt{2} - 4 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 4x + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4x$$

Está provado que, para qualquer $x \in]0, \sqrt{2}[$ se tem que a área da secção é

dada por $\left(\sqrt{2} - 2 \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right) \times 2$

$$\text{b) } \left(\sqrt{2} - 2 \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right) \times 2 > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 4 \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x - \frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4} \wedge x < -\frac{1}{4} + \sqrt{2}$$

Então, tem-se $S > 1 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{4}, \sqrt{2} - \frac{1}{4}[$

Atividades «Será que...?»

Pág. 161

SERÁ QUE...?	Revisões
--------------	----------

Os alunos conhecem os termos estatísticos referidos no texto (média, valor médio, etc.), e devem recordar outros, como, por exemplo: população, amostra, dados, moda, mediana, gráficos, histograma, frequência absoluta e frequência relativa, e distribuição estatística.

Pág. 168

SERÁ QUE...?	O que acontece à média
--------------	------------------------

Não é necessário voltar a medir as crianças, basta subtrair 2 cm à média anteriormente obtida.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Características amostrais

Pág. 157

1.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \sum_{p=1}^9 p$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \sum_{p=5}^{12} p = \sum_{p=1}^8 (p + 4)$$
$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = \sum_{j=1}^6 (3j)$$

2.

a) $\sum_{p=1}^5 2^p = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$

b) $\sum_{k=3}^8 \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{341}{280}$

c) $\sum_{k=4}^{10} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 + (-1)^9 + (-1)^{10} = 1$

d) $\sum_{k=4}^9 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$

3.

a) $\sum_{p=1}^{50} (6p)$

b) $\sum_{i=1}^{20} 3^i$

c) Qualquer sequência de números ímpares consecutivos é da forma $2n + k$, $n \in \mathbb{N}$, em que k é um número inteiro ímpar. A soma indicada pode ser escrita, por exemplo, nas seguintes formas:

$$\sum_{p=5}^{24} (2p - 5) \text{ ou } \sum_{p=1}^{20} (2p + 3)$$

d) $9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 = \sum_{i=3}^{11} i^2$

Pág. 158

4.

$$\text{a)} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\text{b)} x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = \sum_{i=7}^{10} x_i$$

Pág. 159

5.

$$\text{a)} \sum_{j=1}^{20} x_j = \sum_{j=1}^6 x_j + \sum_{i=7}^{20} x_j$$

$$\text{b)} \sum_{j=1}^{15} x_j = \sum_{j=1}^{11} x_j + \sum_{i=7}^{20} x_j$$

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{10} (2k) = \sum_{k=1}^9 (2k) + 20$$

6.

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20^2 + 20}{2} = 210$$

$$\text{b)} \sum_{i=1}^{20} (2i) = 2 \sum_{i=1}^{20} i = 2 \times \frac{20^2 + 20}{2} = 420$$

$$\text{c)} \sum_{i=1}^{20} \frac{i}{4} = \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{4} \times i \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{20} i = \frac{1}{4} \times \frac{20^2 + 20}{2} = 52,5$$

Pág. 160

7.

Tem-se

$$\sum_{p=1}^4 p^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$e \left(\sum_{p=1}^4 p \right)^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$$

Logo,

$$\sum_{p=1}^4 p^2 \neq \left(\sum_{p=1}^4 p \right)^2$$

8.

$$\text{a)} \sum_{j=1}^{20} (x_j - 3) = \sum_{j=1}^{20} x_j - \sum_{j=1}^{20} 3 = A - 20 \times 3 = A - 60$$

$$\text{b)} \sum_{j=1}^{20} (2 - 3x_j) = \sum_{j=1}^{20} 2 - \sum_{j=1}^{20} (3x_j) = 20 \times 2 - 3 \sum_{j=1}^{20} x_j = 40 - 3A$$

9.

Tem-se

$$\sum_{p=1}^n (4p - 3) = 2n^2 - n$$

pelo que

$$\sum_{p=1}^{50} (4p - 3) = 2 \times 50^2 - 50 = 4950$$

10.

$$\text{a)} \sum_{p=1}^n (2p + 1) = \sum_{p=1}^n [(2p - 1) + 2] = \sum_{p=1}^n (2p - 1) + \sum_{p=1}^n 2 = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sum_{p=1}^n (3p) &= \sum_{p=1}^n \left[(2p - 1) + \frac{1}{2}(2p - 1) + \frac{3}{2} \right] = \sum_{p=1}^n (2p - 1) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n (2p - 1) + \sum_{p=1}^n \frac{3}{2} = \\ &= n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3n^2 + 3n}{2} \end{aligned}$$

Pág. 162

11.

	População	Unidade estatística	Atributo em estudo
a)	Conjunto dos automóveis estacionados no parque naquele determinado instante	Cada um destes automóveis	O ano de matrícula
b)	Conjunto dos espetadores do jogo	Cada um dos espetadores do jogo	O género
c)	A turma	Cada aluno da turma	O tipo de sangue

Pág. 163

12.

$$\text{a)} \tilde{x} = \{1, 2, 3, 4\}$$

b)

$\tilde{x}_i$	1	2	3	4
n_i	6	3	2	2

Pág. 165

13.

a) Como a dimensão da amostra é 12, tem que ser $n_4 = 2$

$$\bar{x} = 1,5 \Leftrightarrow \frac{2 \times (a-1) + 3 \times a + 5 \times (a+1) + 2 \times (a+2)}{12} = 1,5 \Leftrightarrow 12a + 7 = 18 \Leftrightarrow a = \frac{11}{12}$$

$$\text{b) } \tilde{x}_1 = a - 1 = \frac{11}{12} - 1 = -\frac{1}{12}; \quad \tilde{x}_2 = a = \frac{11}{12};$$

$$\tilde{x}_3 = a + 1 = \frac{11}{12} + 1 = \frac{23}{12}; \quad \tilde{x}_4 = a + 2 = \frac{11}{12} + 2 = \frac{35}{12}$$

$$\text{Então, tem-se } \tilde{x} = \left\{ -\frac{1}{12}, \frac{11}{12}, \frac{23}{12}, \frac{35}{12} \right\}$$

Pág. 167

14.

$$\text{a) Tem-se } 4 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i \text{ pelo que } \sum_{i=1}^9 x_i = 36$$

Então, a média da nova amostra é igual a $\frac{36+5}{10} = 4,1$

b) O maior valor que a pode tomar é aquele em que todos os restantes valores da amostra são iguais a 1.

$$\text{Tem-se, nesse caso, } \frac{a+8 \times 1}{9} = 4 \Leftrightarrow a = 28$$

c) Para que o valor exato da média seja igual ao maior valor da amostra, tem que se ter $\tilde{x} = \{\bar{x}\}$

Neste caso, todos os valores da amostra são 4.

Pág. 169

15.

Tem-se:

$$\tilde{x}_1 = 5003 = 3 \times 1 + 5000$$

$$\tilde{x}_2 = 5009 = 3 \times 3 + 5000$$

$$\tilde{x}_3 = 5012 = 3 \times 4 + 5000$$

$$\tilde{x}_4 = 5018 = 3 \times 6 + 5000$$

Seja $\tilde{y} = \{1, 3, 4, 6\}$ com $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $n_3 = 6$ e $n_4 = 2$

$$\text{Tem-se } \bar{y} = \frac{10 \times 1 + 12 \times 3 + 6 \times 4 + 2 \times 6}{30} = \frac{10 + 36 + 24 + 12}{30} = \frac{82}{30}$$

$$\text{Então, } \bar{x} = 3 \times \bar{y} + 5000 = 3 \times \frac{82}{30} + 5000 = 8,2 + 5000 = 5008,2$$

Pág. 171

16.

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 7 + 10 + 16 + 8}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Tem-se:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 2 - 8 = -6, \quad d_2 = x_2 - \bar{x} = 5 - 8 = -3, \quad d_3 = x_3 - \bar{x} = 7 - 8 = -1,$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 10 - 8 = 2, \quad d_5 = x_5 - \bar{x} = 16 - 8 = 8 \text{ e } d_6 = x_6 - \bar{x} = 8 - 8 = 0$$

17.

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}) + (x_n - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow 16 + (18 - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 34$$

Pág. 172

18.

$$\bar{x} = \frac{-2 - 1 + 3 + 8 + 2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Tem-se:

$$d_1 = -2 - 2 = -4, \quad d_2 = -1 - 2 = -3, \quad d_3 = 3 - 2 = 1, \quad d_4 = 8 - 2 = 6 \quad \text{e} \quad d_5 = 2 - 2 = 0$$

$$SS_x = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + 1^2 + 6^2 + 0^2 = 62$$

Pág. 173

19.

Tem-se

$$SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \Leftrightarrow 50 = 140 - n \times 9 \Leftrightarrow n = 10$$

20.

Dado que $SS_x = 0$, tem-se $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x} = 3$

Pág. 174

21.

$$y_i = 3x_i + 2 \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{3}(y_i - 2)$$

$$\text{Seja } \tilde{z} = y - 2. \text{ Tem-se } \tilde{x} = \frac{1}{3}\tilde{z}$$

$$\text{Como } SS_z = SS_y = 27 \text{ e } SS_x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 SS_z, \text{ tem-se } SS_x = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

22.

$$\bar{x} = \frac{16 \times 3 + 16 \times 4 + 24 \times 5 + 20 \times 6 + 14 \times 7}{90} = \frac{450}{90} = 5$$

$$SS_x = 16 \times (3 - 5)^2 + 16 \times (4 - 5)^2 + 24 \times (5 - 5)^2 + 20 \times (6 - 5)^2 + 14 \times (7 - 5)^2 = 16 \times (-2)^2 + 16 \times (-1)^2 + 24 \times (-0)^2 + 20 \times 1^2 + 14 \times 2^2 = 156$$

Pág. 176

23.

Tem-se:

$\tilde{x}_i$	3	4	9	5	6
n_i	1	1	2	1	4

$$\bar{x} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 9 + 1 \times 5 + 4 \times 6}{9} = 6$$

$$SS_x = 1 \times (3 - 6)^2 + 1 \times (4 - 6)^2 + 2 \times (9 - 6)^2 + 1 \times (5 - 6)^2 + 4 \times (6 - 6)^2 = 32$$

$$s_x^2 = \frac{32}{9-1} = 4 \quad \text{e} \quad s_x = \sqrt{4} = 2$$

24.

a) Tem-se $\tilde{y} = \tilde{x} + 6$ pelo que $s_y = s_x = 4$

b) Tem-se $\tilde{y} = -5\tilde{x} + 6$ pelo que $s_y = |-5| \cdot s_x = 15$

Pág. 180

25.

Tem-se

$$\bar{x} = 12,5$$

$$s_x^2 = 0,25 \Leftrightarrow s_x = 0,5$$

$$[10,15] = [12,5 - 2,5; 12,5 + 2,5] = [12,5 - 5 \times 0,5; 12,5 + 5 \times 0,5] = [\bar{x} - 5s_x, \bar{x} + 5s_x]$$

Então, a proporção de elementos da amostra que não pertencem a $[10,15]$ é inferior a $\frac{1}{25}$

Como a amostra tem 150 elementos, o número de elementos da amostra que não pertencem a $[10,15]$ é inferior a $150 \times \frac{1}{25} = 6$, ou seja, é, no máximo, 5.

Então, o número mínimo de elementos da amostra que pertencem a $[10,15]$ é 145.

26.

A amostra $\tilde{x}$ ordenada é a sequência (1, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 7, 9, 12)

27.

A amostra $\tilde{x}$ ordenada é a sequência (1, 2, 3, 5, 7, 9, 12); tem-se $x_{(4)} = 5$

28.

a) A amostra está ordenada e, como tem dimensão 17, a mediana é o elemento central.

O elemento central é $x_{(9)} = 3$

b) A correspondente amostra ordenada é a sequência (1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8)

Como a amostra tem dimensão 10, a mediana é a média dos dois elementos centrais da amostra ordenada.

Os dois elementos centrais são $x_{(5)}$ e $x_{(6)}$, pelo que a mediana é igual a $\frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$

c) A correspondente amostra ordenada é a sequência (1, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 12, 12)

Como a amostra tem dimensão 15, a mediana é o elemento central da amostra ordenada.

O elemento central é $x_{(8)} = 7$

Pág. 182

29.

a) $[7] = 7$

b) $\left[\frac{9}{4}\right] = [2,25] = 2$

c) $[-5,32] = -6$

Pág. 183

30.

Valor de P_1 :

Tem-se $\frac{1 \times 20}{100} = 0,2$, que não é um número natural.

Como $[0,2] + 1 = 1$, vem $P_1 = x_{(1)} = 2$

Valor de P_{60} :

Tem-se $\frac{60 \times 20}{100} = 12$, que é um número natural.

Portanto, $P_{60} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{23 + 25}{2} = 24$

Valor de P_{83} :

Tem-se $\frac{83 \times 20}{100} = 16,6$, que não é um número natural.

Como $[16,6] + 1 = 17$, vem $P_{83} = x_{(17)} = 36$

Pág. 187

31.

Tem-se 34% de 300 é 102.

Pretende-se determinar o valor de x tal que a área da região do histograma à esquerda da reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(x, 0)$ é 102.

Como a área da região do histograma correspondente ao intervalo $[0, 6]$ é igual a 66 e a área da região do histograma correspondente ao intervalo $[0, 8]$ é igual a 106, x terá de pertencer ao intervalo $]6, 8[$ e terá de ser tal que $66 + (x - 6) \times 20 = 102$

Tem-se $66 + (x - 6) \times 20 = 102 \Leftrightarrow x = 7,8$

Portanto, $P_{34} = 7,8$

Pág. 189

32.

Tem-se: $k = 40$, $h = 2$, $n = 150$ e $m = 10$

Daqui vem $\frac{kn}{100} = 60$, pelo que L é o maior inteiro tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq 60$

Ora, $6 + 12 + 15 + 20 = 53$ e $6 + 12 + 15 + 20 + 18 = 71$ pelo que $L - 1 = 4$ ou seja $L = 5$

Então, $a_L = a_5 = 8$ e $n_L = n_5 = 18$

Assim, P_{40} é o valor x tal que: $2 \sum_{i=1}^4 n_i + (x - 8) \times 18 = \frac{40 \times 2 \times 150}{100}$

Tem-se: $2 \sum_{i=1}^4 n_i + (x - 8) \times 18 = \frac{40 \times 2 \times 150}{100} \Leftrightarrow 2(6 + 12 + 15 + 20) + (x - 8) \times 18 = 120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 106 + 18x - 144 = 120 \Leftrightarrow x = \frac{79}{9} \approx 8,8$

Este valor significa que aproximadamente 40% dos alunos obtiveram uma classificação inferior ou igual a 8,8 valores.

+ Exercícios propostos

Pág. 196

33.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sum_{k=1}^4 \frac{24}{k} + \sum_{j=1}^5 (2^j - j^2) &= 24 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^5 2^j - \sum_{j=1}^5 j^2 = \\ &= (24 + 12 + 8 + 6) + (2 + 4 + 8 + 16 + 32) - (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 57 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \sum_{i=4}^7 (2i + 3) = 2 \sum_{i=4}^7 i + \sum_{i=4}^7 3 = 2 \times (4 + 5 + 6 + 7) + 4 \times 3 = 56$$

$$\text{c)} \sum_{j=1}^4 (2^j \times 3^{4-j}) = (2 \times 27) + (4 \times 9) + (8 \times 3) + (16 \times 1) = 130$$

34.

$$\text{a)} 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{k=1}^5 k^3$$

$$\text{b)} \frac{7}{4} + \frac{7}{5} + \frac{7}{6} = \sum_{k=4}^6 \frac{7}{k}$$

35.

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

36.

$$a + a + a + a + a + a = \sum_{k=1}^6 a$$

37.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} 5(x_i + y_i) &= 5 \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) = 5 \left(\sum_{i=1}^{12} x_i + \sum_{i=1}^{12} y_i \right) = 5 \left(\sum_{i=1}^{12} x_i + \sum_{i=1}^7 y_i + \sum_{i=8}^{12} y_i \right) = \\ &= 5 \times (15 + 6 + 3) = 120 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (nx_i + 2) &= 340 \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 2 = 340 \Leftrightarrow n \times 32 + n \times 2 = 340 \Leftrightarrow 34n = 340 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = 10 \end{aligned}$$

39.

O total dos pesos das raparigas é $18 \times 50 = 900$ kg

O total dos pesos dos rapazes é $12 \times 60 = 720$ kg

O total dos pesos dos trinta alunos é 1620 kg

A média dos pesos dos alunos da turma é $\frac{1620}{30} = 54$ kg

40.

O total da duração dos vinte filmes que a Joana tem é $20 \times 1 \text{ h } 45 \text{ min} = 20 \times 1,75 \text{ h} = 35 \text{ h}$

O total da duração dos vinte e um filmes é $21 \times 1 \text{ h } 48 \text{ min} = 21 \times 1,8 \text{ h} = 37,8 \text{ h}$

A duração do filme que a Joana vai comprar é $37,8 \text{ h} - 35 \text{ h} = 2,8 \text{ h}$, ou seja, 2 h 48 min

41.

a) Tem-se $\bar{y} = 3\bar{x} - 4$

Então, $\bar{y} = 3 \times \bar{x} - 4 = 3 \times 20 - 4 = 56$

b) $\sum_{i=1}^n x_i = 20n \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \sum_{i=3}^n x_i = 20n \Leftrightarrow 3 + 3 + 234 = 20n \Leftrightarrow n = 12$

42.

a) Tem-se: $\frac{5 \times 8 + 3 \times 9 + 6 \times 10 + 3 \times 11 + 4 \times 12 + 2 \times 13 + 3 \times 14 + 2 \times 15 + 1 \times 16 + 1 \times 17}{30} = \frac{339}{30} = 11,3$

A média das classificações é 11,3.

b) Dado que três alunos ficaram com mais um valor cada um, a soma das trinta classificações passou a ser 342, pelo que a média das classificações passou a ser $\frac{342}{30} = 11,4$

43.

a) A soma dos desvios referentes aos nove primeiros dias é 0,2.

Então, como a soma de todos os desvios é nula, o desvio referente ao 10.º dia é $-0,2$.

b) Seja x a variável «temperatura da água da piscina nos dez dias».

Para a determinação da média, vamos utilizar a propriedade $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$

Tem-se: $SS_x = 0,5^2 + (-0,6)^2 + (-1,0)^2 + 0,8^2 + (-0,2)^2 + 1^2 + 0,4^2 + (-0,8)^2 + 0,1^2 = 4,14$

Então:

$$SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \Leftrightarrow 4,14 = 9004,14 - 10 \times \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 900 \Leftrightarrow \bar{x} = -30 \vee \bar{x} = 30$$

Como, no contexto da situação descrita, a média das temperaturas não pode ser -30°C , conclui-se que é 30°C .

44.

a) Organizemos os dados da amostra numa tabela de frequências absolutas:

$\tilde{x}_i$	39	40	41	42	43	45	46
n_i	3	3	2	1	1	1	1

Cálculo da média:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 39 + 3 \times 40 + 2 \times 41 + 42 + 43 + 45 + 46}{12} = \frac{495}{12} = 41,25 \text{ min}$$

Cálculo dos quadrados dos desvios em relação à média:

$\tilde{x}_i$	39	40	41	42	43	45	46
d_i	-2,25	-1,25	-0,25	0,75	1,75	3,75	4,75
d_i^2	5,0625	1,5625	0,0625	0,5625	3,0625	14,0625	22,5625

$$SS_x = 3 \times 5,0625 + 3 \times 1,5625 + 2 \times 0,0625 + 3,0625 + 14,0625 + 22,5625 = 60,25 \text{ min}^2$$

Cálculo da variância:

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{60,25}{11} \approx 5,48 \text{ min}^2$$

Cálculo do desvio padrão:

$$s_x = \sqrt{5,48} \approx 2,34 \text{ min}$$

$$\text{b) } \bar{x} = 41,25 \text{ min} = \frac{41,25}{60} \text{ h} = 0,6875 \text{ h} \quad s_x = 2,34 \text{ min} = \frac{2,34}{60} \text{ h} = 0,039 \text{ h}$$

45.

Tem-se $n = 50$ e $\bar{x} = 2$, pelo que $n\bar{x}^2 = 50 \times 4 = 200$ e

$$\frac{SS_y}{50-1} = s_y^2 \Leftrightarrow \frac{SS_y}{49} = 36 \Leftrightarrow SS_y = 1764$$

Ora, como $y_i = 3x_i + 5$, vem $\tilde{x} = \frac{1}{3}\tilde{y} - \frac{5}{3}$, pelo que $SS_x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 SS_y = \frac{1}{9} \times 1764 = 196$

Então, de acordo com a propriedade, $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$

$$\text{tem-se } 196 = \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - 200 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 396$$

46.

Seja x a variável «peso das maçãs». Tem-se $\bar{x} = 145 \text{ g}$ e $s_x = 2 \text{ g}$

$$[139, 151] = [145 - 6; 145 + 6] = [145 - 3 \times 2; 145 + 3 \times 2] = [\bar{x} - 3s_x, \bar{x} + 3s_x]$$

Então, a proporção de elementos da amostra que não pertencem a $[139, 145]$ é inferior a $\frac{1}{9}$

Como a amostra tem 1000 maçãs, o número de maçãs que não pertencem a $[139, 145]$ é inferior a $1000 \times \frac{1}{9} = 111, (1)$, ou seja, é, no máximo, 111.

Então, o número mínimo de maçãs cujo peso está entre 139 e 145 é 889.

47.

$$\begin{aligned} \text{a) } 1,4 &= \frac{34 \times 0 + a \times 1 + 50 \times 2 + 30 \times 3 + 10 \times 4}{124 + a} \Leftrightarrow 1,4(124 + a) = a + 230 \Leftrightarrow 173,6 + 1,4a = a + 230 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,4a = 56,4 \Leftrightarrow a = 141 \end{aligned}$$

b)

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4
n_i	34	141	50	30	10
d_i	-1,4	-0,4	0,6	1,6	2,6
d_i^2	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76

$$SS_x = 34 \times 1,96 + 141 \times 0,16 + 50 \times 0,36 + 30 \times 2,56 + 10 \times 6,76 = 251,6$$

$$s_x^2 = \frac{251,6}{265-1} = \frac{251,6}{264} \approx 0,953$$

$$s_x = \sqrt{0,953} \approx 0,98$$

c) $n = 265$

Quando a amostra tem um número considerável de efetivos, e, como tal, a amostra ordenada não pode ser elaborada, é usual utilizar uma tabela de frequências absolutas acumuladas:

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4
n_i	34	141	50	30	10
$\sum_{k=1}^i n_k$	34	175	225	255	265

P_{50} :

Como 265 é ímpar, P_{50} é o elemento central da amostra ordenada, ou seja, neste caso, $x_{(133)}$

Tem-se, tal como se pode observar na tabela anterior, $x_{(133)} = 1$

P_{25} :

$\frac{25 \times 265}{100} = 66,25$, pelo que, como 66,25 não é um número natural e $[66,25] + 1 = 67$, $P_{25} = x_{(67)}$

Tem-se, tal como se pode observar na tabela anterior, $x_{(67)} = 1$

P_{75} :

$\frac{75 \times 265}{100} = 198,75$, pelo que, como 198,75 não é um número natural e $[198,75] + 1 = 199$, $P_{75} = x_{(199)}$

Tem-se, tal como se pode observar na tabela anterior, $x_{(199)} = 2$

Então, tem-se: o 1.º quartil é 1, o 2.º quartil é 1 e o 3.º quartil é 2.

48.

a) Começemos por ordenar os dados:

8,1	8,3	8,9	9,1	9,2	9,5	9,6
9,9	9,9	10,1	10,2	10,3	10,4	10,9
11,4	11,6	11,6	11,9	12,1	12,1	12,6
12,7	12,9	13,0	14,4	14,5	14,7	14,8
15,0	15,1	15,1	15,3	15,7	15,7	16,2

P_{10} :

$\frac{10 \times 35}{100} = 3,5$, pelo que, como 3,5 não é um número natural e $[3,5] + 1 = 4$, $P_{10} = x_{(4)} = 9,1$ kg

P_{50} :

Como 35 é ímpar, P_{50} é o elemento central da amostra ordenada, ou seja, neste caso,

$P_{50} = x_{(18)} = 11,9$ kg

P_{75} :

$\frac{75 \times 35}{100} = 26,25$, pelo que, como 26,25 não é um número natural e $[26,25] + 1 = 27$,

$P_{75} = x_{(27)} = 14,7$ kg

P_{80} :

$$\frac{80 \times 35}{100} = 28, \text{ pelo que, como 28 é um número natural, } P_{10} = \frac{x_{(28)} + x_{(29)}}{2} = \frac{14,8 + 15,0}{2} = 14,9 \text{ kg}$$

b) $P_{75} = x_{(27)}$, pelo que há 26 crianças com peso inferior ao percentil 75.

c) Determinemos P_{20} :

$$\frac{20 \times 35}{100} = 7, \text{ pelo que, como 7 é um número natural, } P_{20} = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{9,6 + 9,9}{2} = 9,75 \text{ kg}$$

Então, a criança mais pesada das que têm os pesos 20% mais baixos pesa 9,6 kg.

49.

A área total do histograma é:

$$1 \times 5 + 1 \times 18 + 1 \times 49 + 1 \times 81 + 1 \times 76 + 1 \times 47 + 1 \times 20 + 1 \times 4 = 300$$

Determinação da mediana.

$$\frac{300}{2} = 150$$

Tem-se

$5 + 18 + 49 = 72$ e $5 + 18 + 49 + 81 = 153$, pelo que x terá que pertencer ao intervalo $]203,204[$ e terá que ser tal que $72 + (x - 3) \times 81 = 150$

$$\text{Daqui vem } 72 + (x - 3) \times 81 = 150 \Leftrightarrow x - 3 = \frac{78}{81} \Leftrightarrow x = \frac{78}{81} + 3 \approx 3,96 \text{ mg}$$

Portanto, a mediana é $200 + 3,96 = 203,96 \text{ mg}$

No contexto do problema, isto significa que cerca de metade dos iogurtes tem um teor de cálcio inferior a 203,96 mg.

Determinação de P_{90}

90% de 300 é 270

Tem-se:

$5 + 18 + 49 + 81 + 76 = 229$ e $5 + 18 + 49 + 81 + 76 + 47 = 276$, pelo que x terá que pertencer ao intervalo $]205,206[$ e terá que ser tal que $229 + (x - 5) \times 47 = 270$

$$\text{Daqui vem } 229 + (x - 5) \times 47 = 270 \Leftrightarrow x - 5 = \frac{41}{47} \Leftrightarrow x = \frac{41}{47} + 5 \approx 5,87 \text{ mg}$$

Portanto, $P_{90} = 200 + 5,87 = 205,87 \text{ mg}$

No contexto do problema, isto significa que cerca de 90% dos iogurtes tem um teor de cálcio inferior a 205,87 mg.

Pág. 198

50.

A amostra $\tilde{x}' = \tilde{x} + a$ tem média $\bar{x}' = \bar{x} + a$

$$\text{Ora, } \bar{x}' = \bar{x} + a \Leftrightarrow 17,25 = 7,25 + a \Leftrightarrow a = 10$$

Então, como $a = 10$, tem-se

$$\bar{x} = 7,25 \Leftrightarrow \frac{5 \times 4 + b \times 7 + 2 \times 8 + 6 \times 10}{b + 13} = 7,25 \Leftrightarrow 7b + 96 = 7,25b + 94,25 \Leftrightarrow -0,25b = -1,75 \Leftrightarrow b = 7$$

Então, $a = 10$ e $b = 7$

51.

Seja $\tilde{x}_J = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ a lista dos números recebida pelo João.

Seja $\tilde{x}_M = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 5)$ a lista dos números recebida pela Maria.

Seja $\tilde{x}_N = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 15)$ a lista dos números recebida pelo Nuno.

Tem-se: $\bar{x}_J = 20$, $\bar{x}_M = 22$ e $\bar{x}_N = 23$ pelo que

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n = 20n \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 5 = 22n \quad (2) \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 15 = 23n \quad (3)$$

Das igualdades (2) e (3) resulta $n = 10$ e $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = 215$

Então, de (1) vem $215 + a_n = 200$ pelo que $a_n = -15$

Então, havia dez números em cada papel e o número modificado foi -15 .

52.

a) Se cada um dos amigos transportasse mais 1 kg ter-se-ia $\tilde{x} = (x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_6 + 1)$,

pelo que se manteria $SS_{\tilde{x}}$, ou seja, ter-se-ia $SS_{\tilde{x}} = 4$

b) Se o peso de cada mochila fosse reduzido em 10% ter-se-ia $\tilde{x} = (0,9x_1; 0,9x_2; \dots; 0,9x_6)$,

pelo que se teria $SS_{\tilde{x}} = 0,9^2 \times 4 = 3,24$

c) Seja a o peso transportado pela Ana e pela Flávia.

Seja b o peso transportado pelo Gonçalo e pelo Francisco.

Tem-se $\tilde{x} = (a, a, b, b, 21, 21)$, com $b > a$ e $\bar{x} = 20$

Ora, $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{2a+2b+42}{6} = 20 \Leftrightarrow 2a + 2b + 42 = 120 \Leftrightarrow a + b = 39 \Leftrightarrow b = 39 - a$, pelo que

$$SS_{\tilde{x}} = 4 \Leftrightarrow 2 \times (a - 20)^2 + 2 \times (39 - a - 20)^2 + 2 \times (21 - 20)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 20)^2 + (19 - a)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow a^2 - 40a + 400 + 361 - 38a + a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 78a + 760 = 0 \Leftrightarrow a = 19 \vee a = 20$$

Como $a = 19 \Rightarrow b = 20$ e $a = 20 \Rightarrow b = 19$, conclui-se que a Ana transporta 19 kg.

53.

Seja I o intervalo $[\bar{x} - \sqrt{n} s_x, \bar{x} + \sqrt{n} s_x]$

De acordo com o teorema de Chebycheff, a proporção de elementos da amostra que não pertencem a I é

inferior a $\frac{1}{(\sqrt{n})^2}$, ou seja, é inferior a $\frac{1}{n}$

Ora, a proporção $\frac{1}{n}$ de n elementos é 1. Portanto, o número de elementos da amostra que não pertencem a I é inferior a 1, ou seja, é zero, pelo que todos os elementos da amostra pertencem a I .

54.

a) Vamos mostrar que $\bar{x} \geq x_{(1)}$

Tem-se, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \geq x_{(1)}$ pelo que $\sum_{i=1}^n x_i \geq n x_{(1)}$

E, portanto, $\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{1}{n} \times (n x_{(1)})$ ou seja $\bar{x} \geq x_{(1)}$

De modo idêntico se mostra a desigualdade $\bar{x} \leq x_{(n)}$

b)

1. Vamos mostrar que:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \Rightarrow x_{(1)} = \bar{x}$$

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_n &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i = x_{(1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n x_{(1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{1}{n} \times (n x_{(1)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{x} = x_{(1)} \end{aligned}$$

2. Vamos mostrar que:

$$x_{(1)} = \bar{x} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Façamos a demonstração por contrarrecíproco, ou seja, provemos que:

$$\sim (x_1 = x_2 = \dots = x_n) \Rightarrow x_{(1)} \neq \bar{x}$$

Negar que todos os elementos da amostra são iguais é equivalente a afirmar que existe pelo menos um deles (designemo-lo por x_j) que é maior do que $x_{(1)}$

$$\begin{aligned} \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}, x_j > x_{(1)} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i > n x_{(1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n x_i > \frac{1}{n} \times (n x_{(1)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{x} > x_{(1)} \Rightarrow x_{(1)} \neq \bar{x} \end{aligned}$$

55.

Consideremos a amostra $\tilde{x}$ ordenada $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ cujos elementos são todos distintos.

Como n é múltiplo de 100, $\exists p \in \mathbb{N}: n = 100p$

Tem-se $\frac{kn}{100} = \frac{k \times 100p}{100} = kp$

Como kp é um número natural, $P_k = \frac{x_{(kp)} + x_{(kp+1)}}{2}$, pelo que P_k é um número real estritamente compreendido entre $x_{(kp)}$ e $x_{(kp+1)}$

Então, $x_{(kp)}$ é o maior dos elementos da amostra que são inferiores a P_k , pelo que existem exatamente kp elementos da amostra que são inferiores a P_k

Ora, a percentagem de kp elementos numa amostra de dimensão n é igual a

$$\frac{kp}{n} \times 100 = \frac{k \times \frac{n}{100}}{n} \times 100 = \frac{k \times n \times 100}{100 \times n} = k$$

Tema 1 | Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

Capítulo 1 | Proposições

Págs. 4 a 12

1. «O rio Douro nasce na serra da Estrela.»

«O menor número primo é par.»

2.

a) F

b) F

c) V

d) F

e) F

f) F

g) V

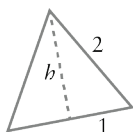
h) F

i) V

j) V, pois $3l = 6 \Leftrightarrow l = 2$

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{3}$$

A área do triângulo é $\frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



3. Os valores lógicos de p , q , r e s são respetivamente V, F, F e V.

a) F

b) V

c) V

4. V, pois: $(f \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f \Leftrightarrow f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v$$

5. «D. Dinis não foi o primeiro rei de Portugal.»

6. Todas, exceto «O telemóvel da Inês não é de marca diferente do telemóvel da Catarina.»

7.

a) V, pois $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} \Leftrightarrow \frac{25}{144} = \frac{25}{144}$

b) O valor lógico de $\sim q$ é V; portanto, o de q é F.

8.

a) V

b) «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 90° .»

9. Os valores lógicos de p e de q são diferentes.

a) V

b) $[\sim(\sim q)] \Leftrightarrow p \Leftrightarrow$

c) F

$$\Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

d) V

Assim, o valor lógico da proposição dada é F.

e) F

10.

a) «A Filipa é filha da Joana.» e «A Filipa é filha do Marco.»

b) «18 é múltiplo de 3.» e «18 é múltiplo de 6.»

c) « $1 < 2$ » e « $2 < 3$ »

11.

- a) «A Teresa tem dois irmãos.» e «A Teresa tem três irmãos.»
b) « $\frac{9}{4} < 2,5$ » e « $\frac{9}{4} = 2,5$ »
c) «A minha filha Margarida vai comigo ao cinema esta tarde.»
e «O meu filho Pedro vai comigo ao cinema esta tarde.»

12.

- a) «Não vou comer uma laranja.»
b) «Vou comer uma laranja e uma maçã.»
c) «Vou comer uma laranja, mas não vou comer uma maçã.»
d) «Não vou comer uma laranja, nem uma maçã.»
e) «Vou comer uma laranja ou uma maçã.»
f) «Vou comer uma laranja ou uma maçã, mas não os dois frutos simultaneamente.»

13.

- a₁) $\sim p$ a₂) $q \wedge r$
a₃) $q \vee r$ a₄) $p \wedge r$
a₅) $\sim p \wedge q$ a₆) $r \wedge \sim q$
a₇) $\sim q \wedge \sim r$
b₁) «2 ou 3 pertencem ao conjunto A .»
b₂) «2 não pertence ao conjunto A e 3 não pertence ao conjunto B .»

14.

O valor lógico de $\sim a$ é V e o de $\sim b$ é V ; assim, o valor lógico de a é F e o de b é F .

- a) F , pois $f \wedge \sim f \Leftrightarrow f \wedge v \Leftrightarrow f$ b) V , pois $f \vee \sim f \Leftrightarrow f \vee v \Leftrightarrow v$

15.

p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

- a) $\sim(\sim v \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow \sim(f \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow \sim f \Leftrightarrow v$

$$\sim(\sim f \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow \sim(v \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow \sim f \Leftrightarrow v$$

Assim, o valor lógico da proposição dada é V .

- b) $\sim v \vee v \Leftrightarrow f \vee v \Leftrightarrow v$

$$\sim f \vee f \Leftrightarrow v \vee f \Leftrightarrow v$$

Assim, o valor lógico da proposição dada é V .

- c) $v \wedge \sim v \Leftrightarrow v \wedge f \Leftrightarrow f$

$$f \wedge \sim f \Leftrightarrow f \wedge v \Leftrightarrow f$$

Assim, o valor lógico da proposição dada é F .

16.

- a₁) $\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$ ↓ Dupla negação
 $\Leftrightarrow p \wedge v \Leftrightarrow$ ↓ Princípio do terceiro excluído
 $\Leftrightarrow p$ ↓ Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição

$$a_2) \sim p \wedge (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim (p \vee q)$$

↓
↓
↓
↓
↓

1.^{as} leis de De Morgan

Distributiva da conjunção relativamente à disjunção

Princípio da não contradição

Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

1.^{as} leis de De Morgan

$$a_3) [(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge [\sim (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q \wedge [\sim (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q \wedge p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \wedge q$$

↓
↓
↓
↓
↓
↓
↓

Princípio do terceiro excluído

Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição

1.^{as} leis de De Morgan

Distributiva da conjunção relativamente à disjunção

Princípio da não contradição

Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

Comutatividade da conjunção

$$a_4) p \vee [q \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \vee [(f \vee q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \vee [(f \wedge p) \vee q] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \vee (f \vee q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \vee q$$

↓
↓
↓
↓

Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

Distributiva da disjunção relativamente à conjunção

Conjunção de uma proposição falsa com outra proposição

Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

b₁)

p	q	~p	~(~p)	~q	q ∨ ~q	~(~p) ∧ (q ∨ ~q)
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F

b₂)

p	q	~p	~p ∧ q	~(~p ∧ q)	~p ∧ ~(~p ∧ q)	p ∨ q	~(p ∨ q)
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	V

b₃)

p	q	~p	p ∨ ~p	(p ∨ ~q) ∧ q	~p ∧ q	~(~p ∧ q)	p ∧ q	[(p ∨ ~p) ∧ q] ∧ [~(~p ∧ q)]
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F

b₄)

p	q	p ∨ q	q ∧ (p ∨ q)	p ∨ [q ∧ (p ∨ q)]
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	F

17.

$$\text{a)} [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] \wedge p \Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim p \wedge \sim q] \wedge p \Leftrightarrow [\sim p \wedge (q \vee \sim q)] \wedge p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge v) \wedge p \Leftrightarrow \sim p \wedge p \Leftrightarrow f$$

O valor lógico é F.

$$\text{b)} \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim [f \vee (p \wedge q)] \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow v$$

O valor lógico é V.

$$\text{c)} [((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q] \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow [(p \wedge (q \vee \sim q)) \vee q] \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge v) \vee q] \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow f \vee q \Leftrightarrow q$$

$$\text{18. } p \wedge [q \vee \sim(p \vee q)] \Leftrightarrow p \wedge [q \vee (\sim p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow p \wedge [(q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \wedge [(q \vee \sim p) \wedge v] \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee f \Leftrightarrow p \wedge q \text{ é verdadeira}$$

Então, p e q são ambas verdadeiras. Como o Júlio tem a mesma idade da Inês e da Rita, conclui-se que a Rita e a Inês têm a mesma idade. O valor lógico da proposição é V.

$$\text{19. } (p \vee q) \wedge \sim[(q \wedge r) \vee \sim r] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim[(q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim[(q \vee \sim r) \wedge v] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(q \vee \sim r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \wedge r) \text{ é verdadeira}$$

Então, $p \vee q$ é verdadeira e $\sim q \wedge r$ é verdadeira.

Como $\sim q \wedge r$ é verdadeira, $\sim q$ é verdadeira e r é verdadeira; logo, q é falsa.

Como $p \vee q$ é verdadeira e q é falsa, p é verdadeira.

$$\{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\} \cap \{1, 2, 4\} = \{4\}$$

Conclui-se que apenas a proposição q é falsa e que saiu 4 no lançamento do dado.

20.

a) p : «O Joaquim come a sopa.»

q : «A mãe do Joaquim dá-lhe um doce.»

$$p \Rightarrow q$$

b) p : «Não falto aos treinos.»

q : «Sou chamado para a equipa da escola.»

$$p \Rightarrow q$$

c) p : «Vês Braga por um canudo.»

q : «Vais ao Santuário do Bom Jesus do Monte.»

$$p \Rightarrow q$$

21.

$$\text{a)} V, \text{ pois } (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow v \quad \text{b)} F, \text{ pois } (v \Rightarrow f) \Leftrightarrow f \quad \text{c)} V, \text{ pois } (f \vee v \Rightarrow \sim f) \Leftrightarrow (v \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$$

22.

a) $q \Rightarrow p \wedge r$ é verdadeira e $\sim(r \Rightarrow p)$ é verdadeira

Como $\sim(r \Rightarrow p)$ é verdadeira, $r \Rightarrow p$ é falsa e, portanto, r é verdadeira e p é falsa.

De $q \Rightarrow p \wedge r$ ser verdadeira, resulta $q \Rightarrow f$ ser verdadeira e, consequentemente, q é falsa.

b) r é falsa e $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)$ é verdadeira.

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge f) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee f \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Como $p \wedge \sim q$ é verdadeira, conclui-se que p é verdadeira e q é falsa.

23.

a) $p \wedge q$ é falsa e $f \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow v$, qualquer que seja o valor lógico de q .

Assim, o valor lógico de $p \wedge q \Rightarrow \sim q$ é V .

b) $p \vee q$ é verdadeira, logo, $\sim p \Rightarrow v \Leftrightarrow v$, qualquer que seja o valor lógico de p .

O valor lógico de $\sim p \Rightarrow p \vee q$ é V .

c) Se $p \Rightarrow q$ é verdadeira, $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ é verdadeira, qualquer que seja o valor lógico de $q \Rightarrow p$

Se $p \Rightarrow q$ é falsa, p é verdadeira e q é falsa e, conseqüentemente, $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ é verdadeira, pois $f \vee (f \Rightarrow v) \Leftrightarrow f \vee v \Leftrightarrow v$

Em qualquer dos casos, a proposição dada é v e o seu valor lógico é V .

d) Se p é verdadeira, q é falsa e $(\sim v \Rightarrow f) \Leftrightarrow (f \Rightarrow f) \Leftrightarrow v$

Se p é falsa, q é verdadeira e $(\sim f \Rightarrow v) \Leftrightarrow (v \Rightarrow v) \Leftrightarrow v$

O valor lógico de $\sim p \Rightarrow q$ é V .

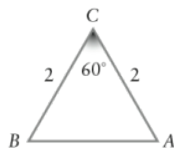
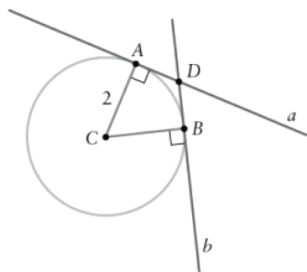
24.

Como a implicação é verdadeira, temos três casos possíveis:

- $p \vee q$ é verdadeira e $p \wedge q$ é verdadeira; e, daí, p e q são ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira;
- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é verdadeira; temos novamente p e q ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira;
- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é falsa; como $p \vee q$ é falsa, p e q são ambas falsas, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

25.

a) Em linguagem corrente, temos:



Se $\widehat{ACB} = 60^\circ$, então o perímetro do triângulo $[ABC]$ é 6.

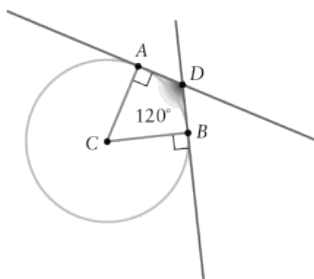
Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$, pois, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Assim, $2\widehat{ABC} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$ e $\widehat{BAC} = 60^\circ$ e o triângulo $[ABC]$ é equilátero,

pelo que o seu perímetro é $3 \times 2 = 6$

O valor lógico da proposição é V .

b) Em linguagem corrente, temos:



Se $\widehat{ADB} = 120^\circ$, então $\widehat{ACB} = 60^\circ$

$$\widehat{ACB} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ$$

O valor lógico da proposição é V .

$$26. \sim (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge p) \wedge (r \vee q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge p \wedge r) \vee (\sim q \wedge p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge p \wedge r) \vee f \Leftrightarrow p \wedge r \wedge \sim q$$

27.

a₁) «Se esta tarde estudar Matemática, então à noite vou ver televisão e jogar no computador.»

a₂) «Se esta tarde estudar Matemática e esta noite não jogar no computador, então esta noite vou ver televisão.»

a₃) «Esta noite vou ver televisão se e só se não jogar no computador.»

b₁) $p \Rightarrow q \vee r$

b₂) $\sim p \Rightarrow \sim q \wedge \sim r$

c₁) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

«Esta tarde vou estudar Matemática, mas à noite não vou ver televisão.»

c₂) $\sim (q \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow q \wedge r$

«Esta noite vou ver televisão e vou jogar no computador.»

28.

$$(p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim r) \text{ é verdadeira}$$

$$\Rightarrow (q \Rightarrow \sim r) \text{ logo } q \Rightarrow \sim r \text{ é verdadeira}$$

29.

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} (r \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r \Leftrightarrow \sim p) \text{ logo } r \Leftrightarrow \sim p \text{ é verdadeira}$$

$$\stackrel{(1)}{(1)} (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p) \text{ e } (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$$

30.

Sejam as seguintes proposições:

a : «O menino está com fome.»

b : «O menino chora.»

$$a \Rightarrow b$$

A. $\sim b \Rightarrow \sim a$ É equivalente.

B. $b \Rightarrow a$ Não é equivalente.

C. $b \Rightarrow a$ Não é equivalente.

D. $a \Rightarrow b$ É equivalente.

E. $a \Rightarrow b$ É equivalente.

Capítulo 2 | Condições e conjuntos

Págs. 13 a 26

31. As 1.^a, 2.^a e 4.^a expressões são condições, ou seja, as expressões A., B. e D.

32. $x|x - 8| = x + 10$

a) $5|5 - 8| = 5 + 10 \wedge -|-1 - 8| \neq -1 + 10 \Leftrightarrow 15 = 15 \wedge -9 \neq 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v \wedge v \Leftrightarrow v$ O valor lógico da proposição é V.

b) $-2|-2 - 8| = -2 + 10 \vee 8|8 - 8| = 8 + 10 \Leftrightarrow -20 = 8 \vee 0 = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f \vee f \Leftrightarrow f$ O valor lógico da proposição é F.

33.

a) Para $x = 2$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = 0$, resulta uma proposição falsa.

b) Para $x = 0$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = 1$, resulta uma proposição falsa.

c) Para $x = 3$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = 0$, resulta uma proposição falsa.

d) Para $x = 2$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = 0$, resulta uma proposição falsa.

e) Para $x = 0$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = -1$, resulta uma proposição falsa.

f) Para $x = -4$, resulta uma proposição verdadeira; para $x = 0$, resulta uma proposição falsa.

34.

a) Substituindo, na condição, a variável (x) por 1, obtemos a proposição $5 \times 1 - 3 = 4 \times 1$.

Como esta proposição é falsa ($5 \times 1 - 3 = 2$ e $4 \times 1 = 4$), concluímos que 1 não é solução da condição.

A proposição $5 \times 2 - 3 = 4 \times 2$ que se obtém substituindo, na condição, x por 2, também é falsa ($5 \times 2 - 3 = 7$ e $4 \times 2 = 8$) e, portanto, 2 não é solução da condição.

A proposição $5 \times 3 - 3 = 4 \times 3$ é verdadeira ($5 \times 3 - 3 = 12$ e $4 \times 3 = 12$) e, portanto, 3 é solução da condição.

No universo $\{1, 2, 3\}$, 3 é solução da condição $5x - 3 = 4x$.

b) A proposição $1^3 + 2 \times 1 = 3 \times 1^2$ é verdadeira ($1^3 + 2 \times 1 = 3$ e $3 \times 1^2 = 3$); portanto, 1 é solução da condição $x^3 + 2x = 3x^2$

2 também é solução da condição, pois $2^3 + 2 \times 2 = 3 \times 2^2$ é uma proposição verdadeira ($2^3 + 2 \times 2 = 12$ e $3 \times 2^2 = 12$).

Dado que $3^3 + 2 \times 3 = 3 \times 3^2$ é uma proposição falsa ($3^3 + 2 \times 3 = 33$ e $3 \times 3^2 = 27$),

3 não é solução da condição.

No universo $\{1, 2, 3\}$, as soluções da condição $x^3 + 2x = 3x^2$ são 1 e 2.

c) A proposição $3 \times 1^2 - 4 \times 1 > 3$ é falsa ($3 \times 1^2 - 4 \times 1 = -1$ e $-1 > 3$ é falso); portanto, 1 não é solução da condição $3x^2 - 4x > 3$

$3 \times 2^2 - 4 \times 2 > 3$ e $3 \times 3^2 - 4 \times 3 > 3$ são proposições verdadeiras e, portanto, 2 e 3 são soluções da condição.

No universo $\{1, 2, 3\}$, as soluções da condição $3x^2 - 4x > 3$ são 2 e 3.

d) As proposições $1^2 + |1 - 5| \leq 11$, $2^2 + |2 - 5| \leq 11$ e $3^2 + |3 - 5| \leq 11$ são verdadeiras.

($1^2 + |1 - 5| = 1 + 4 = 5$, $2^2 + |2 - 5| = 4 + 3 = 7$ e $3^2 + |3 - 5| = 9 + 2 = 11$ e 5, 7 e 11 são menores ou iguais a 11);

portanto, 1, 2 e 3 são soluções da condição $x^2 + |x - 5| \leq 11$

No universo $\{1, 2, 3\}$, as soluções da condição $3^2 + |3 - 5| \leq 11$ são 1, 2 e 3.

35.

- a) É. b) Não é.
c) Não é. d) Não é.
e) É. f) Não é.

36. $p(b) \Rightarrow v \Leftrightarrow v$, qualquer que seja o valor lógico de $p(b)$ é V.

37. $\frac{3-5x}{2} \geq 4 \Leftrightarrow 3 - 5x \geq 8 \Leftrightarrow -5x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -1$; logo, $x \leq -1$ é equivalente a $\sim p(x)$

38. $p(n) \wedge q(n)$

39.

- a) $-3 \leq x \wedge x < 0$
b) $-3 > x \vee x \geq 0$

40.

- a) $x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0$ b) $x - 3 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0$

41. $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$-3x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

- a) 1, por exemplo. b) 0, por exemplo. c) 0, por exemplo. d) -2
e) 0, por exemplo. f) 1, por exemplo. g) 0, por exemplo. h) -1, por exemplo.

42.

- a) $x > -5 \wedge -x > -5$ b) $x = 10 \vee x + 1 = 10$ c) $x \leq 0 \wedge x^3 \leq 0$

43.

- a) $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$; V b) $x|x| < 0 \Leftrightarrow x < 0$; V
c) $x < 3 \Rightarrow x \leq 3$; V d) $x \neq 6 \Leftrightarrow x^2 \neq 36$; F

44.

- a) V, pois $\frac{4}{3}$ é solução da condição « $3x + 1 = 5$ ».
b) F, pois qualquer número real elevado a 4 é sempre não negativo.
c) V, pois 0 é solução da condição « $x^2 \leq 0$ ».

d) F, porque $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$; para $n > 2$, $n + 1 > 0 \wedge n - 1 > 1$; portanto, $n^2 - 1$ admite, além de 1 e de $n^2 - 1$, outros dois divisores. Por isso, $n^2 - 1$ nunca é primo.

e) V, porque, por exemplo, 4 verifica a condição « $2n$ tem n divisores.»

45.

a) $\exists k \in \mathbb{Z} : -5 < k < -3$; V, porque $k = -4$

b) $\exists k \in \mathbb{Z} : k = k^3$; V, porque, por exemplo, 1 é solução da condição $k = 1$

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$; V, porque, por exemplo, $\frac{1}{2}$ é solução da condição $x < \frac{1}{x}$

d) $\exists n \in \mathbb{N} : a$ soma de n e $n + 1$ é um número par

F, porque se um dos números é par, o outro é ímpar, sendo a soma deles ímpar.

46.

$p(n)$ Para $n = 10$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 100 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Para $n = 11$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 121 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Para $n = 12$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 144 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Para $n = 13$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 169 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Para $n = 14$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 196 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Para $n = 15$, resulta a proposição «a soma dos algarismos de 225 não é um quadrado perfeito», que é falsa.

Assim, a condição é impossível em $\mathbb{N}$.

$q(n)$ $(n + 1)(n + 2)$ é um produto de dois números naturais, ambos diferentes de 1.

Logo, $(n + 1)(n + 2)$ admite outros dois divisores, além de 1 e de $(n + 1)(n + 2)$

Assim, a condição é impossível em $\mathbb{N}$.

$r(n)$ Para $n = 4$, resulta a proposição «95 não é um número primo», que é verdadeira.

Assim, a condição é possível em $\mathbb{N}$.

47.

$p(x)$ $x^2 = (x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow 0x = 1$

Portanto, $p(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.

$q(x)$ para $x = -\pi$, resulta a proposição «0 é um número racional», que é verdadeira.

Portanto, $q(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

$r(x)$ $-x > x \Rightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Portanto, $r(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

$s(x)$ Para $x = \frac{1}{2}$, resulta a proposição «existe pelo menos um número natural pertencente ao intervalo $\left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ », que é verdadeira.

Portanto, $s(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

48.

a) $4n^2 - 1$ nem sempre é múltiplo de 3

Se $n = 6$, $4 \times 6^2 - 1 = 143$ e 143 não é múltiplo de 3

O valor lógico da proposição é F.

b) $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

$2n + 1$, designa sempre em número ímpar para cada concretização de n em $\mathbb{N}$.

O valor lógico da proposição é V.

c) $\frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n < n + 1 \Leftrightarrow 0n < 1$

Assim, a proposição tem valor lógico V.

d) $(x - 1)^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$

Portanto, a proposição tem valor lógico F.

e) Se $x \geq 0$, $x \in \{-|x|, |x|\} \Leftrightarrow x \in \{-x, x\}$

Se $x < 0$, $x \in \{-|x|, |x|\} \Leftrightarrow x \in \{x, -x\}$

Portanto, a proposição tem valor lógico V.

49.

a) $n(n + 1)$ é o produto de um número par por um número ímpar, logo $n(n + 1)$ é sempre par.

A condição é universal em $\mathbb{N}$.

b) Para $n = 2$, resulta a proposição «4 e 7 não são números primos entre si», que é falsa.

A condição não é universal em $\mathbb{N}$.

c) $\frac{3n+1}{4} \geq \frac{2n+1}{3} \Leftrightarrow 9n + 3 \geq 8n + 4 \Leftrightarrow n \geq 1$

A condição é universal em $\mathbb{N}$.

d) No conjunto constituído por três números naturais consecutivos, existe sempre um único que é múltiplo de 3.

A condição é universal em $\mathbb{N}$.

e) Pode-se escrever um número ímpar na forma $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}_0$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$4k^2$ e $4k$ são números pares e, portanto, $4k^2 + 4k + 1$ é um número ímpar.

A condição é universal em $\mathbb{N}$.

f) Para $n = 3$, resulta a proposição «m. m. c. (3,6) = 3×6 », que é falsa, pois m. m. c. (3,6) = 6 e não 18.

A condição não é universal em $\mathbb{N}$.

50.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \times (-x) < 0$

F, pois o simétrico de 0 é 0 e $0 \times 0 = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x$

F, pois o dobro de 0 é 0.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, a soma de n , $n + 1$ e $n + 2$ é múltiplo de 3;

$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$, que é múltiplo de 3, pois é a soma de dois múltiplos de 3.

O valor lógico da proposição é V.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\text{m.d.c.}(n, n+1) + \text{m.m.c.}(n, n+1)}{2} \notin \mathbb{N}$

m. d. c. ($n, n + 1$) = 1 e m. m. c. ($n, n + 1$) = $n(n + 1)$

$$\text{Tem-se } \frac{\text{m.d.c.}(n, n+1) + \text{m.m.c.}(n, n+1)}{2} = \frac{1 + n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 1}{2}$$

Se n é par, n^2 é par e $n^2 + n$ é par por ser a soma de dois números pares. Portanto, $n^2 + n + 1$ é ímpar.

Se n é ímpar, n^2 é ímpar e $n^2 + n$ é par por ser a soma de dois números ímpares. Portanto, $n^2 + n + 1$ é ímpar.

Como $n^2 + n + 1$ é sempre ímpar, $\frac{n^2 + n + 1}{2}$ não é um número natural.

O valor lógico da proposição é V.

51.

a) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

A condição é impossível em $\mathbb{R}$.

b) Para $x \geq 0$, $x + |x|$ é sempre não negativa.

Para $x < 0$, $x + |x|$ é sempre zero.

A condição é universal em $\mathbb{R}$.

c) A condição é possível não universal em $\mathbb{R}$, pois, para $x = 1$, resulta uma proposição verdadeira e, para $x = -2$, resulta uma proposição falsa.

d) A condição é possível não universal em $\mathbb{N}$, pois, para $n = 1$, resulta uma proposição falsa e, para $n = 2$, resulta uma proposição verdadeira.

e) $\frac{n^2 - 1}{n + 1} = \frac{(n + 1)(n - 1)}{n + 1} = n - 1$ e $n - 1$ é inteiro para qualquer valor de n .

A condição é universal em $\mathbb{N}$.

52.

a) $(-1)^2 = 2^{-1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}$; $0^2 = 2^0 \Leftrightarrow 0 = 1$; $1^2 = 2^1 \Leftrightarrow 1 = 2$

O valor lógico é F.

b) $3^{-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 1$

O valor lógico é V.

c) $x^5 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

O valor lógico é V.

d) $-1 + |-1| = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

$0 + |0| = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

$1 + |1| = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$

O valor lógico é F.

53. Por exemplo:

a) $[2, +\infty[$, pois, como $x \geq 2$, $x^2 \geq 4$ e $0 < x^2 < 1$

b) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, pois, como $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 4$ e $0 < x^2 < 1$

c) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, pois, como $\frac{1}{2} < x < 1$, $\frac{1}{4} < x^2 < 1$ e $0 < x^2 < 1$

54.

a) F, pois m. d. c. $(4, 30) = 2$ e não 4.

b) V, pois 5, 11, 17, 23 e 29 são números primos.

c) F

d) $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

O valor lógico é V, pois 2 verifica a condição $x^3 - 4x = 0$

55.

$$3a^2 - 10a + a = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 9a = 0 \Leftrightarrow a(3a - 9) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 3a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 3$$

Como $a > 0$, temos $a = 3$

$$3b^2 - 10b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3} \Leftrightarrow b = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \Leftrightarrow b = \frac{10 \pm 8}{6} \Leftrightarrow b = 3 \vee b = \frac{1}{3}$$

Assim, $a = 3$ e $b = 3$ ou $b = \frac{1}{3}$

56. A proposição afirma que uma condição universal num domínio é possível nesse domínio, o que é verdade.

57. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0$

58. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 5$

59.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 > 2x ; \vee (x = 0)$

b) $\forall x \in \mathbb{Z}, 3x + 7 \neq 3 ; \vee$, pois $3x + 7 \neq 3 \Leftrightarrow x \neq -\frac{4}{3}$

c) $\exists n \in \mathbb{N} : 6n + 3$ é par ; F, pois $6n$ é par e $6n + 3$ é ímpar (soma de um número par com um número ímpar)

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N} ; \text{F } (n = 4)$

60.

a) «Há seres humanos que não sabem nadar.»; V

b) «Nenhum número natural é múltiplo de 3.» ou «Todos os números naturais não são múltiplos de 3.»; F

c) «Os números inteiros são todos menores ou iguais a 0 ou maiores ou iguais a 1.»; V

d) «Há números reais que são irracionais.»; V

61.

a) $x = 0$, pois $|0| = 0$ e não é um número positivo.

b) $x = -1$, pois -3 não é menor ou igual a -5 .

c) $n = 15$, $15 \in]1, 19[$, 15 é ímpar, 15 não é quadrado perfeito, mas 15 não é primo.

d) $x = -1, (-1 + 1)^4 > (-1)^4 \Leftrightarrow 0 > 1$, que é uma proposição falsa.

62.

a) $\{-1, 0, 1\}$

b) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

$$x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

$$\{-4, -3, 0, 4\}$$

c) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

63.

- a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{2, 3, 5\}$ c) $\{2, 3, 4, 6\}$ d) $\{2, 3, 4\}$

64.

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$
b) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é múltiplo de } 7 \wedge n < 30\}$
c) $\{n \in \mathbb{N} : n < 17 \wedge n \text{ não é primo}\}$

65.

$\{-3, 0, 3, 6\}$

66.

$[-10, 12[$

67.

- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|----------------|
| a) $\{2\}$ | b) $\{5, 9, 13\}$ | c) $\{2, 5, 8\}$ | d) $\emptyset$ |
| e) $\{2, 5, 7\}$ | f) $\emptyset$ | g) $[3, 5]$ | h) $]2, 5]$ |
| i) $\{6\}$ | j) $\emptyset$ | k) $\mathbb{N}$ | l) $\emptyset$ |

68.

Seja $x \in A \cap C$, então $x \in A \wedge x \in C$.

$x \in A \Rightarrow x \in B$, pois $A \subset B$.

$x \in C \Rightarrow x \in D$, pois $C \subset D$.

Como $x \in B \wedge x \in D$, $x \in B \cap D$; logo, $A \cap C \subset B \cap D$.

69.

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|
| a) $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 16\}$ | b) $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ | c) $[2, 9]$ | d) $]1, 8]$ |
| e) $[-2, 7]$ | f) $]5, 15]$ | g) $\mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Z}$ |

70.

Por exemplo, $C = \{1, 13, 21\}$.

71.

$A \cup B = B$ é necessariamente falsa, pois A contém pelo menos um elemento que não pertence a B uma vez que $p(x)$ é possível mas não universal em A . Portanto, $A \cup B \neq B$.

$A \cap B = B$ não é necessariamente verdadeira nem é necessariamente falsa.

Por exemplo, se $p(x) : x \geq 0$ e $U = \mathbb{R}$ então $B = [0, +\infty[$;

se $A = [-1, 1]$, $A \cap B = [0, 1]$, isto é, $A \cap B \neq B$;

se $A = [-1, +\infty[$, $A \cap B = B$.

$A \cap C = \emptyset$ não é necessariamente verdadeira nem é necessariamente falsa.

Por exemplo, se $p(x) : x \geq 0$ e $U = \mathbb{R}$ então $B = [0, +\infty[$;

se $A = \{-1, 1\}$ e $C = \{-1\}$, $A \cap C = \{-1\}$, isto é, $A \cap C \neq \emptyset$;

se $A = \{-1, 1\}$ e $C = \{-2\}$, $A \cap C = \emptyset$.

$B \cap C = \emptyset$ é necessariamente verdadeira. Pois B é constituído por elementos que verificam $p(x)$, enquanto C é constituído por elementos que não verificam $p(x)$. Portanto, $B \cap C = \emptyset$.

72.

- a) $\{2, 6, 7\}$ b) $\emptyset$ c) $\{2, 3, 5, 7\}$ d) $\{1, 6, 11, 16\}$ e) $\emptyset$
 f) $\{1, 4, 5, 9\}$ g) $[4, 6[$ h) $]0, 5[$ i) $[18, +\infty[$ j) $] - \infty, 4[$

73.

$\{1, 4\}$

74.

- a) $]10, 12]$ b) $[2, 5]$ c) $\{2, 12\}$

75.

- a) $]3, 8[$ b) $]3, 12]$ c) $[-1, 8[$
 d) $[-3, +\infty[$ e) $[-3, 12]$ f) $] - \infty, -3[\cup [8, +\infty[$
 g) $] - \infty, 3]$ h) $[8, +\infty[$ i) $]12, +\infty[$

76.

$p(x)$ $3x + 1 < 5x - 7 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$
 $q(x)$ $x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
 $r(x)$ $|x| < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

- a₁) $]4, +\infty[$ a₂) $\mathbb{R}$ a₃) $\emptyset$
 a₄) $\emptyset$ a₅) $]4, +\infty[$ a₆) $]4, +\infty[$
 a₇) $\mathbb{R}$ a₈) $] - \infty, 4]$ a₉) $]4, +\infty[$
 b₁) $p(x)$ é possível não universal. b₂) $q(x)$ é universal.
 b₃) $r(x)$ é impossível. b₄) $p(x) \wedge r(x)$ é impossível.
 b₅) $p(x) \wedge q(x)$ é possível não universal. b₆) $q(x) \vee r(x)$ é universal.
 b₇) $q(x) \wedge \sim r(x)$ é universal.

77.

$p(x)$ $(|x| - 1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow |x| - 1 = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x| = 1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = -2 ; \{-2, -1, 1, 3\}$
 $q(x)$ $(x + 1)^2 > 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} ; \mathbb{R}$
 $r(x)$ $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset ; \emptyset$
 $s(x)$ $(x - 2)^{10} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \vee x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1 ; \{1, 3\}$
 a) $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} = \{-2, -1, 1, 3\}$
 b) $\{-2, -1, 1, 3\} \cup \emptyset = \{-2, -1, 1, 3\}$
 c) $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} = \{-2, -1\}$

78.

- a) $\sim p(a) \Rightarrow q(a) \Leftrightarrow p(a) \vee q(a)$ é verdadeira; como a verifica $p(x) \vee q(x)$, conclui-se que $a \in P \cup Q$.
 b) $\sim [\sim q(b) \Rightarrow p(b)]$ é verdadeira; portanto $\sim q(b) \wedge \sim p(b)$ é verdadeira; então $b \notin P \wedge b \notin Q$, logo $b \in \overline{P} \wedge b \in \overline{Q}$; portanto, $b \in \overline{P} \cap \overline{Q}$.

79.

Queremos provar que:

t intersesta $r \Rightarrow t$ intersesta s

utilizando o método de demonstração por contrarrecíproco.

Para isso, basta provar que:

t é paralela a $s \Rightarrow t$ é paralela a r

Assim, como t é paralela a s e s é paralela a r (por hipótese), conclui-se (transitividade) que t é paralela a r .

80.

Vamos demonstrar a equivalência por dupla implicação:

$[OACB]$ é um losango $\Rightarrow \hat{AOB} = 90^\circ \wedge \hat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow [OACB]$ é um losango

Provemos a 1.ª implicação:

$\hat{OBC} = \hat{OAC} = 90^\circ$ (as retas tangentes à circunferência são perpendiculares aos raios nos pontos de tangência).

Como $[OACB]$ é losango, $\hat{AOB} = \hat{ACB}$ e:

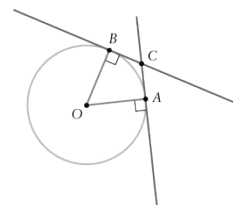
$\hat{OBC} + \hat{OAC} + \hat{AOB} + \hat{ACB} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 90^\circ + 2\hat{AOB} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{AOB} = 90^\circ$

Provemos a 2.ª implicação:

Como $\hat{AOB} = 90^\circ$:

$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \hat{ACB} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{ACB} = 90^\circ$

Assim, $[OACB]$ tem os quatro ângulos iguais, isto é, é um retângulo. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios de uma circunferência), conclui-se que $[OACB]$ é um quadrado e, conseqüentemente, é um losango.



81.

Vamos supor que a soma de um número racional com um número irracional é um número racional.

- a e b designam números racionais
- x designa um número irracional
- $a + x = b$ ⁽¹⁾

a , por ser racional, pode ser escrito na forma de um quociente entre dois números inteiros; assim $a = \frac{n}{m}$, onde n e m designam números inteiros, com $m \neq 0$.

O mesmo acontece com b ; $b = \frac{p}{q}$, onde p e q designam números inteiros, com $q \neq 0$.

Substituindo a e b em ⁽¹⁾ resulta:

$$\frac{n}{m} + x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{q} - \frac{n}{m} \Leftrightarrow x = \frac{mp - nq}{mq}$$

Os números mp , nq e mq são inteiros, pois o produto de dois números inteiros é um número inteiro.

Portanto, $mp - nq$ é um número inteiro, pois a diferença entre dois números inteiros é um número inteiro.

Sendo assim, x é um número racional, pois é o quociente de dois números inteiros.

Esta contradição resulta do facto de termos suposto que a soma de um número racional com um número irracional era um número racional.

Logo, a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Tema 2 | Álgebra

Capítulo 1 | Radicais e potências de expoente racional

Págs. 28 a 34

1.

a) Como $-10 < -3 < 0$ e 8 é par, a proposição $(-10)^8 > (-3)^8$ é uma proposição verdadeira.

b) Como $-\frac{7}{3} < -2 < 0$ e 11 é ímpar, a proposição $(-\frac{7}{3})^{11} < (-2)^{11}$ é uma proposição falsa.

c) Como $(\pi - 1)^{33} = ((\pi - 1)^3)^{11}$, $8 < (\pi - 1)^3$ e 11 é ímpar, a proposição $8^{11} > (\pi - 1)^{33}$ é uma proposição falsa.

2.

a) Como $x < 1$ e 3 é ímpar, então $x^3 < 1^3$, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 < 1$ é uma proposição verdadeira.

b) Vamos mostrar que esta proposição é falsa apresentando um contraexemplo, que pode ser, entre muitos outros, o -4 . Tem-se $-4 < -3$ e, no entanto, $(-4)^2$ não é menor do que 9.

3.

a) Verdade, pois $2n - 1$ designa um número ímpar, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$

b) Falso, pois, por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^2$ é maior do que $(-2)^2$.

c) Falso, pois, por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^3$ é menor do que $(-2)^3$.

d) Verdade, pois $2n$ designa um número par, -3 e -2 são números negativos, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número par, se tem $a < b < 0 \Rightarrow a^k > b^k$

e) Verdade, pois $x \in]-\infty, -2[\Leftrightarrow x < -2$ e 13 é um número ímpar, e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$

f) Verdade, pois, dado que x é menor do que -2 , tem-se $x < -2 < 0$ e, como 8 é um número par, sabemos que $x^8 > (-2)^8$, condição que é equivalente a $x^8 > 2^8$

g) Falso, pois, por exemplo, se $x = -3$, tem-se $-3 \in]-\infty, -2[$, $(-3 + 1)^5 = -32$ e $(-3)^5 = -243$ e, portanto, $(x + 1)^5 > (-3)^5$

4. Seja $a \in]0, 1[$; então, dado que $0 < a < 1$, tem-se $0 < a^n < 1^n$ e, portanto $a^n < 1$

5.

a) $\sqrt[5]{1} - \sqrt[7]{(-1)} + \sqrt[8]{0} = 1 - (-1) + 0 = 2$

b) $\sqrt{49} - \sqrt[3]{-27} - \sqrt[4]{16} = \sqrt{7^2} - \sqrt[3]{(-3)^3} - \sqrt[4]{2^4} = 7 - (-3) - 2 = 8$

c) $\sqrt[3]{-125} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{-32} - \sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[4]{3^4} - \sqrt[5]{(-2)^5} - \sqrt[6]{2^6} = -5 + 3 - (-2) - 2 = -2$

6.

Se $a = \sqrt[5]{4}$ então $a^5 = 4$, pelo que $\frac{a^5}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

7.

a) $x^5 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10}$

b) $x^3 + 6 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 4 - 6 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

c) $5x^9 - 7 = 8 \Leftrightarrow 5x^9 = 15 \Leftrightarrow x^9 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{3}$

d) $3x^4 + 5 = 29 \Leftrightarrow 3x^4 = 24 \Leftrightarrow x^4 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[4]{8} \vee x = \sqrt[4]{8}$

8.

$$(\sqrt[4]{5})^4 - (\sqrt[9]{3})^9 = 5 - 3 = 2$$

9.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144} = 12$

c) $\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2 \times 16} = \sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

d) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

e) $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{32} = 15\sqrt{2 \times 32} = 15\sqrt{64} = 15 \times 8 = 120$

f) $(\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{3})^4 = (\sqrt[4]{5 \times 3})^4 = 15$

10.

a) $\sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{300} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

d) $\sqrt[5]{320} : \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{\frac{320}{10}} = \sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

e) $(10\sqrt{48}) : (5\sqrt{3}) = \frac{10\sqrt{48}}{5\sqrt{3}} = \frac{10}{5} \times \sqrt{\frac{48}{3}} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$

f) $(\sqrt[6]{15} : \sqrt[6]{5})^6 = \left(\sqrt[6]{\frac{15}{5}}\right)^6 = (\sqrt[6]{3})^6 = 3$

11.

$$\text{a) } (\sqrt[3]{2})^4 \times \sqrt[3]{4} = \underbrace{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}}_{\sqrt[3]{4}} \times \underbrace{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}}_{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{4})^3 = 4$$

$$\text{b) } \sqrt{200} : (\sqrt{2})^3 = \sqrt{200} : \sqrt{2^3} = \sqrt{\frac{200}{8}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{c) } \left[\sqrt[5]{84} : (\sqrt[5]{2})^2 \right]^5 = (\sqrt[5]{84} : \sqrt[5]{4})^5 = \left(\sqrt[5]{\frac{84}{4}} \right)^5 = (\sqrt[5]{21})^5 = 21$$

12.

$$\text{a) } 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{40}$$

$$\text{b) } 3\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{27 \times a} = \sqrt[3]{27a}$$

$$\text{c) } 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$

$$\text{d) } a\sqrt{3}, a > 0$$

$$\sqrt{a^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3a^2}$$

$$\text{e) } a b^2 \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{(b^2)^5} \times \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^5 \times b^{10} \times a} = \sqrt[5]{a^6 \times b^{10}}$$

13.

$$\text{a) } \sqrt[5]{7^5} \times 3 = \sqrt[5]{7^5} \times \sqrt[5]{3} = 7\sqrt[5]{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{d) } \sqrt{150} = \sqrt{5^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\text{f) } \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{g) } \sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^5 \times 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{4} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \sqrt[3]{54 a^8 b^4} &= \sqrt[3]{3^2 \times 2 \times a^3 \times a^3 \times a^2 \times b^3 \times b} = \\
 &= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b^3} \times \sqrt[3]{b} = \\
 &= 3 \times \sqrt[3]{2} \times a \times a \times \sqrt[3]{a^2} \times b \times \sqrt[3]{b} = \\
 &= 3a^2b \times \sqrt[3]{2a^2b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 54 & 2 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{i)} \sqrt{27a^2} = \sqrt{3^2 \times 3 \times a^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{a^2} = 3 \times \sqrt{3} \times |a| = 3|a|\sqrt{3}$$

$$\text{j)} \sqrt[4]{32x^4} = \sqrt[4]{2^5 x^4} = \sqrt[4]{2^4 \times 2 \times x^4} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{x^4} = 2|x|\sqrt[4]{2}$$

14.

$$\text{a)} 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = (2 - 7 + 10)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{b)} -5\sqrt[3]{x} + 11\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[3]{x} = (-5 + 11 + 6 - 7)\sqrt[3]{x} = 5\sqrt[3]{x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} 5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} &= 5\sqrt{2} - \sqrt{2^2 \times 2} + 2 \times \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} + 3\sqrt{3^2 \times 2} = \\
 &= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 \times 4\sqrt{2} + 3 \times 3\sqrt{2} = \\
 &= (5 - 2 + 8 + 9)\sqrt{2} = \\
 &= 20\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} 6\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{12} &= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3^2 \times 3} + 3 \times \sqrt{2^2 \times 3} = \\
 &= 6\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} = \\
 &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} 3a^3\sqrt{a} + a^3\sqrt{8a} - 4^3\sqrt{a^4} &= 3a^3\sqrt{a} + a^3\sqrt{2^3 a} - 4^3\sqrt{a^3 \times a} = \\
 &= 3a^3\sqrt{a} + 2a^3\sqrt{a} - 4a^3\sqrt{a} = \\
 &= a^3\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} 3b\sqrt{2a^3b} - a\sqrt{50ab^3} + ab + \sqrt{72ab} \quad (a > 0 \text{ e } b > 0) \\
 &= 3b\sqrt{2 \times a^2 \times ab} - a\sqrt{5^2 \times 2ab \times b^2} + ab + \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2 \times ab} = \\
 &= 3ba\sqrt{2ab} - 5ba\sqrt{2ab} + ab \times 2 \times 3\sqrt{2ab} = \\
 &= 4ba\sqrt{2ab}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

15.

a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}} + \sqrt[6]{4\sqrt{5}} + \sqrt[12]{\sqrt{5}} = \sqrt[24]{5} + \sqrt[24]{5} + \sqrt[24]{5} = 3\sqrt[24]{5}$

b) $\sqrt[4]{3\sqrt{6}} \times \sqrt[6]{\sqrt{2}} = \sqrt[12]{6} \times \sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{12}$

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{20}} = \sqrt[6]{20}$

16.

a) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[4 \times 3]{3^{4 \times 1}} = \sqrt[12]{3^4}$

b) $\sqrt[2]{2} = \sqrt[6 \times 2]{2^{6 \times 1}} = \sqrt[12]{2^6}$

c) $\sqrt[4]{5} = \sqrt[3 \times 4]{5^3} = \sqrt[12]{5^3}$

d) $\sqrt[6]{10} = \sqrt[2 \times 6]{10^2} = \sqrt[12]{10^2}$

e) $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[4 \times 3]{a^{2 \times 4}} = \sqrt[12]{a^8}$

17.

a) $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3 \times 2]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{25} = \sqrt[3 \times 2]{5^2} = \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[4 \times 3]{3^4 \times 3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

d) $\sqrt[15]{a^{10}b^5} = \sqrt[3 \times 5]{a^5 \times a^5 \times b^5} = \sqrt[3]{a^2b}$

e) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[4 \times 3]{2^4} = \sqrt[3]{2}$

18.

a) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[2 \times 3]{5^2} = \sqrt[6]{5^2} \text{ e } \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[4]{3} \text{ e } \sqrt{5} = \sqrt[2 \times 2]{5^2} = \sqrt[4]{5^2}$

c) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 2]{4^2} = \sqrt[6]{4^2} \text{ e } \sqrt{3} = \sqrt[2 \times 3]{3^3} = \sqrt[6]{3^3}$

d) $\sqrt[6]{3} = \sqrt[6 \times 2]{3^2} = \sqrt[12]{3^2} \text{ e } \sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^3} = \sqrt[12]{2^3}$

19.

a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} : \sqrt[6]{12} = \sqrt[3 \times 2]{2^2} \times \sqrt[3 \times 2]{3^3} : \sqrt[6]{12} =$
 $= \sqrt[6]{2^2 \times 3^3} : \sqrt[6]{2^2 \times 3} =$
 $= \sqrt[6]{\frac{2^2 \times 3^3}{2^2 \times 3}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

$$\text{b)} \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} \times \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[12]{8} \times \sqrt[4]{8} =$$

$$= \sqrt[4 \times 3]{2^3} \times \sqrt[4]{8} =$$

$$= \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\text{c)} (\sqrt[7]{4})^3 : \left[\sqrt[14]{4} \times (\sqrt[21]{2})^3 \right] = \sqrt[7]{4^3} : \left[\sqrt[14]{4} \times \sqrt[21]{2^3} \right] =$$

$$= \sqrt[7]{4^3} : \left[\sqrt[2 \times 7]{2^2} \times \sqrt[3 \times 7]{2^3} \right] = \sqrt[7]{(2^2)^3} : (\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{2}) =$$

$$= \sqrt[7]{2^6} : \sqrt[7]{2^2} = \sqrt[7]{\frac{2^6}{2^2}} = \sqrt[7]{2^4} = \sqrt[7]{16}$$

$$\text{d)} (5 + 3\sqrt{6})(4 - \sqrt{6}) = 20 - 5\sqrt{6} + 12\sqrt{6} - 3\sqrt{6^2} =$$

$$= 20 + 7\sqrt{6} - 3 \times 6 = 2 + 7\sqrt{6}$$

$$\text{e)} \sqrt{7 + 3\sqrt{5}} \times \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} = \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})} = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{49 - 9 \times 5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{f)} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 =$$

$$= 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{g)} (4\sqrt{3\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{6} - 2\sqrt{3} \times \sqrt[4]{2}) : \sqrt{\sqrt{162}} =$$

$$= (4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{3^2 \sqrt{2}}}}_{\sqrt[4]{18}} + \underbrace{\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{6}}_{\sqrt[4]{18}} - 2 \underbrace{\sqrt[4]{3^2} \times \sqrt[4]{2}}_{\sqrt[4]{18}}) : \sqrt[4]{162} =$$

$$= (4\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{18} - 2\sqrt[4]{18}) : \sqrt[4]{162} =$$

$$= (3\sqrt[4]{18}) : \sqrt[4]{162} = 3 \sqrt[4]{\frac{18}{162}} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{3^2}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{h)} (\sqrt[3]{56} + \sqrt[7]{49^3 \sqrt{7}})^3 = (\sqrt[3]{56} + \sqrt[7]{7^2 \sqrt[3]{7}})^3 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{56} + \sqrt[7]{\sqrt[3]{(7^2)^3} \times \sqrt[3]{7}} \right)^3 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{56} + \sqrt[7]{\sqrt[3]{7^6 \times 7}} \right)^3 =$$

$$= (\sqrt[3]{56} + \sqrt[3 \times 7]{7^7})^3 =$$

$$= (\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{7})^3 =$$

$$= (\sqrt[3]{2^3 \times 7} + \sqrt[3]{7})^3 =$$

$$= (2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7})^3 = (3\sqrt[3]{7})^3 =$$

$$= 3^3 \times \sqrt[3]{7^3} = 27 \times 7 = 189$$

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$20. \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(\sqrt{c})^2}{(\sqrt[3]{c})^2} = \frac{c}{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt[3]{c} = b$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt[3]{c})^3} = \frac{\sqrt{c^3}}{c} = \sqrt{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt{c} = a$$

21.

$$a) \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b) \frac{7}{2\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{2\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{2 \times 7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{2 \times 3 \sqrt[3]{2^2} \times 3 \times 2 \sqrt[3]{3^3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{4 \times 27}}{3} = \frac{\sqrt[6]{108}}{3}$$

$$d) \frac{15}{\sqrt[3]{5}} = \frac{15 \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{15 \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{15 \sqrt[3]{25}}{5} = 3 \sqrt[3]{25}$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{10} + 2} = \frac{1(\sqrt{10} - 2)}{(\sqrt{10} + 2)(\sqrt{10} - 2)} = \frac{\sqrt{10} - 2}{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{10} - 2}{10 - 4} = \frac{\sqrt{10} - 2}{6}$$

$$f) \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$g) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 + 2 \times \sqrt{3} + 1}{3 - 1} =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$h) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$i) \frac{12}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} = \frac{12(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{(\sqrt{11} - \sqrt{3})(\sqrt{11} + \sqrt{3})} = \frac{12(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{12(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{11 - 3} =$$

$$= \frac{12(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{8} = \frac{3\sqrt{11} + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$j) \frac{10}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} = \frac{10(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})}{(3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})} = \frac{10(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})}{(3\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2} = \frac{30\sqrt{5} - 50\sqrt{3}}{9 \times 5 - 25 \times 3} =$$

$$= \frac{30\sqrt{5} - 50\sqrt{3}}{-30} = \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{3}$$

22.

$$\text{a) } \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}+3}{2+\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{(\sqrt{3})^2-1^2} =$$

$$= \frac{3+4\sqrt{3}+3}{3-1} = \frac{6+4\sqrt{3}}{2} = 3+2\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2} = \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{1^2+2 \times 1 \times \sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} - \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-2^2} =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{2-1} - \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3-4} = 3+2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{-1} = 3+2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{2} = 3+4\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

23.

$$\text{a) } 3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4}$$

$$\text{b) } 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\text{c) } 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32}$$

$$\text{d) } 4^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\text{e) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

24.

$$\text{a) } 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{b) } 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{c) } 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\text{e) } \left(\frac{4}{9}\right)^{-1,5} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

25.

$$\text{a) } \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{\frac{1}{32}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^5}} = \sqrt[4]{2^{-5}} = 2^{-\frac{5}{4}}$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{\frac{1}{4^7}} = \sqrt[3]{4^{-7}} = \sqrt[3]{(2^2)^{-7}} = \sqrt[3]{2^{-14}} = 2^{-\frac{14}{3}}$$

26.

$$\text{a)} 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = (2 \times 5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\text{b)} 6 \times 6^{-\frac{3}{5}} = 6^{1+(-\frac{3}{5})} = 6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^2} = \sqrt[5]{36}$$

$$\text{c)} (\sqrt[9]{3})^4 \times 2^{\frac{4}{9}} = 3^{\frac{4}{9}} \times 2^{\frac{4}{9}} = (3 \times 2)^{\frac{4}{9}} = 6^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{6^4}$$

$$\text{d)} (\sqrt{3})^{\frac{3}{4}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{3^3} = \sqrt[8]{27}$$

$$\text{e)} \frac{15^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[8]{27}} = \frac{15^{\frac{3}{8}}}{3^{\frac{3}{8}}} = \left(\frac{15}{3}\right)^{\frac{3}{8}} = 5^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{5^3} = \sqrt[8]{125}$$

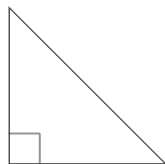
27.

$$\begin{aligned} & \left[(\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{n}} \right]^p : \sqrt[n]{a^{2p-1}} \quad (a \in \mathbb{R}^+ ; n, p \in \mathbb{N}) \\ &= \left[\left(a^{\frac{n}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^p : a^{\frac{2p-1}{n}} = \left[a^{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}} \right]^p : a^{\frac{2p-1}{n}} = \\ &= \left[a^{\frac{1}{n^2}} \right]^p : a^{\frac{2p-1}{n}} = a^{\frac{p}{n^2} \times \frac{2p-1}{n}} = a^{\left(\frac{p}{n^2} - \frac{2p-1}{n} \right)} = a^{\frac{2p-2p+1}{n}} = \\ &= a^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{a^{-1}b^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{a^2b^{-1}}}}{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[3]{a}}} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+) \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^{-1}b^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{a^2b^{-1}}}}{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[3]{a}}} = \frac{\sqrt[6]{a^{-2}b} \times \sqrt[6]{a^6b^{-3}}}{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[3]{a}}} = \\ &= \frac{\sqrt[6]{a^{-2}ba^6b^{-3}}}{\sqrt[9]{b^{-3}a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4b^{-2}}}{\sqrt[9]{b^{-3}a}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2b^{-1}}}{\sqrt[9]{b^{-3}a}} = \frac{\sqrt[9]{a^6b^{-3}}}{\sqrt[9]{b^{-3}a}} = \\ &= \sqrt[9]{\frac{a^6b^{-3}}{b^{-3}a}} = \sqrt[9]{\frac{a^6}{a}} = \sqrt[9]{a^5} \end{aligned}$$

29.



Seja x o comprimento de cada cateto e seja h o comprimento da hipotenusa:

$$h^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 32$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{32}.$$

$$A_{\Delta} = \frac{x \times x}{2} = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16, \text{ logo, } x = 4.$$

$$P_{\Delta} = 4 + 4 + h$$

$$\text{Assim, } P_{\Delta} = 4 + 4 + \sqrt{32} = 8 + \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 8 + 4\sqrt{2}.$$

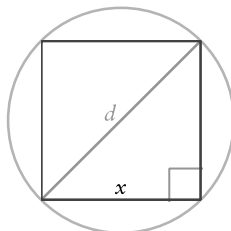
30.

Seja x o lado do quadrado. Tem-se $x^2 = 48$ e, portanto, $x = \sqrt{48}$.

O diâmetro, d , da circunferência é igual à diagonal do quadrado de lado $\sqrt{48}$, de onde se conclui que

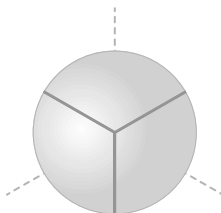
$$d = \sqrt{48} \times \sqrt{2} = \sqrt{16 \times 3 \times 2} = 4\sqrt{6}.$$

Então, o comprimento da circunferência é $4\sqrt{6}\pi$.



31.

a) Seja a a aresta do cubo.



O raio da esfera inscrita no cubo é metade da aresta. Então, $V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^3$.

O diâmetro da esfera circunscrita ao cubo é igual à diagonal espacial do cubo, então o raio é metade da diagonal espacial, ou seja, é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Então, } V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

$$\text{Tem-se, portanto: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{(a\sqrt{3})^3}{a^3} = \frac{a^3(\sqrt{3})^3}{a^3} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = 3\sqrt{3} \\ v_2 - v_1 = 13\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3} v_1 \\ v_2 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3} v_1 \\ 3\sqrt{3} v_1 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3} v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi}{3\sqrt{3} - 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3} v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi(3\sqrt{3} + 1)}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3} v_1 \\ v_1 = \frac{\pi(3\sqrt{3} + 1)}{2} \end{cases}$$

Dado que $v_1 = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{8}$, sendo a a aresta do cubo, tem-se $\frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{8} = \frac{\pi(3\sqrt{3}+1)}{2}$ e, portanto,

$$a^3 = 3(3\sqrt{3} + 1) = 9\sqrt{3} + 3 \text{ e, finalmente, } a = \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 3}.$$

32.

a) Seja a a aresta do cubo truncado. Tem-se:

$$a^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2} - 1$$

b) aresta do cubo truncado = $\sqrt{2} - 1$

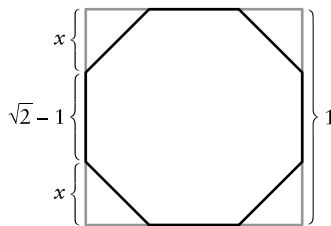
$$V_{\text{cubo truncado}} = V_{\text{cubo}} - 8 \times V_{\text{pirâmide triangular}}$$

Como a aresta do cubo mede 1, sendo x a medida da aresta de cada pirâmide triangular, vem:

$$2x + \sqrt{2} - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$



$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\left(\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} \right)}_{A_{\text{base}}} \times \underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}_{\text{altura}} = \frac{(2-\sqrt{2})^3}{48}$$

$$\begin{aligned}
\text{Portanto, } V_{\text{cubo truncado}} &= 1^3 - 8 \times \frac{(2 - \sqrt{2})^2 \times (2 - \sqrt{2})}{48} = 1 - \frac{(2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2)(2 - \sqrt{2})}{6} = \\
&= \frac{6 - (4 - 4\sqrt{2} + 2)(2 - \sqrt{2})}{6} = \frac{6 - (12 - 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}^2)}{6} = \\
&= \frac{6 - (20 - 14\sqrt{2})}{6} = \frac{-14 + 14\sqrt{2}}{6} = \frac{-7 + 7\sqrt{2}}{3} = \frac{7\sqrt{2} - 7}{3}
\end{aligned}$$

33.

a) Todas são hipotenusas de triângulos retângulos iguais.

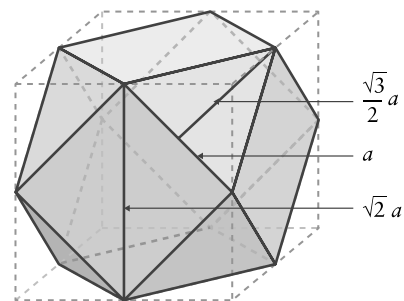
b) Dado que as arestas do cuboctaedro são todas iguais, se designarmos por a a aresta do octaedro, a área da sua superfície é a soma das áreas de seis quadrados de lado a com a área de oito triângulos equiláteros de lado a . Para não sobrecarregar os cálculos, recorda que a altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

A área de cada face quadrada é, portanto, a^2 e a área de cada face

triangular é $\frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Então:

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\text{cuboctaedro}} &= 18 - 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 6a^2 + 8 \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 18 - 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 6a^2 + 2\sqrt{3}a^2 = 18 - 6\sqrt{3} \Leftrightarrow (6 + 2\sqrt{3})a^2 = 18 - 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 = \frac{18 - 6\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2 = \frac{6(3 - \sqrt{3})}{2(3 + \sqrt{3})} \Leftrightarrow a^2 = \frac{3(3 - \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 = \frac{3(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \Leftrightarrow a^2 = \frac{3(3 - \sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



Dado que a aresta do cubo é igual à diagonal das faces quadradas do cuboctaedro, e como a diagonal de um quadrado de lado a é $\sqrt{2}a$ tem-se, neste caso, que a aresta do cubo é $\sqrt{2}a = \sqrt{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3}$.

Capítulo 2 | Polinómios

Págs. 35 a 44

34.

a) Grau: 4

Termos: $-\sqrt{3}x^4$, $3x^3$, $0x^2$, $-\frac{4}{3}x$, $-\pi$

Coeficientes: $-\sqrt{3}$, 3 , 0 , $-\frac{4}{3}$, $-\pi$

b) Grau: 9

Termos: $\frac{t^9}{6}$, $0t^8$, $0t^7$, $0t^6$, t^5 , $0t^4$, $0t^3$, $-\sqrt{2}t^2$, $0t$, 10^{20}

Coeficientes: $\frac{1}{6}$, 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , $-\sqrt{2}$, 0 , 10^{20}

c) Grau: 0

Único termo: 10

Único coeficiente: 10

35.

a) $7x^3$

b) $-3y^2$

c) $\frac{16a^4}{5}$

d) $\frac{-5b^7}{6}$

36.

a) $x^5 - 6x^4 + 8x^3 + x^2 - 6$

b) $-5c^6 + \frac{2}{9}c^5 - 0,1c^4$

37.

a) $2x^3 - 4x + 5x^4 - 1 - 2x^4 + 2x - 3x^4 = 2x^3 - 2x - 1$

$6x^2 - 1 + 2x^3 - x - 4x^2 - x - 2x^2 = 2x^3 - 2x - 1$

Os dois polinómios são iguais pois admitem a mesma forma reduzida.

b) $3x^3 + 2x^2 - 4x - 2x^3 + 5 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 4x + 5$

$5 - 6x^2 + 2x^3 - 3x - x^3 + 7x^2 - x = x^3 + x^2 - 4x + 5$

Os dois polinómios não são iguais pois não admitem a mesma forma reduzida.

38.

a) $(3x^2 + x - 4) + (-x^2 - 6x + 5) = 3x^2 + x - 4 - x^2 - 6x + 5 = 2x^2 - 5x + 1$

b) $\left(2x^3 + 3x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(-4x^2 - \frac{1}{6}\right) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} - 4x^2 - \frac{1}{6} = 2x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{2}{5}x^3 + 4x^2 - x - \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{9}{10}x^3 - 4x + \frac{7}{6}\right) = \frac{2}{5}x^3 + 4x^2 - x - \frac{2}{9} - \frac{9}{10}x^3 + 4x - \frac{7}{6} =$

$= \frac{4}{10}x^3 - \frac{9}{10}x^3 + 4x^2 - x + 4x - \frac{4}{18} - \frac{21}{18} = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 3x - \frac{25}{18}$

39.

a) $6x - 8$

b) $-6x^3 + 15x^2 + 27x$

c) $(5y - 7)(4y^2 + 6y - 8) = 20y^3 + 30y^2 - 40y - 28y^2 - 42y + 56 = 20y^3 + 2y^2 - 82y + 56$

40.

$P(x) \times Q(x)$ tem grau 7, pois o grau do produto de dois polinômios é igual à soma dos graus dos fatores.

$P(x) + Q(x)$ tem grau 4.

$Q(x) - R(x)$ tem grau 3, pois $-2x^3 - x^2 + ax + b - (2x^3 + cx + d) = -4x^3 - x^2 + (a - c)x + b - d$.

$P(x) + R(x) + Q(x)$ tem grau 7, pois $P(x) \times R(x)$ tem grau 7 e $Q(x)$ tem grau 3.

$Q(x) + R(x)$ tem grau 2, pois $-2x^3 - x^2 + ax + b + (2x^3 + cx + d) = -x^2 + (a + c)x + b + d$.

41.

a) $9 + 30x + 25x^2$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{6x}{5} + 9$

c) $\frac{x^4}{16} + 3x^2 + 36$

d) $2 + \sqrt{2}x^3 + \frac{x^6}{4}$

e) $3 + 12x + 12x^2$

f) $9x^4 + 12x^3 + 4x^2$

g) $64 - 16x + x^2$

h) $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1$

i) $\frac{x^6}{4} - 4x^4 + 16x^2$

j) $4 - 25x^2$

k) $x^4 - 64x^2$

l) $\frac{25x^4}{16} - 7$

42.

a) $(x + 4)^2$

b) $(2x + 5)^2$

c) $(7x + 1)^2$

d) $(x - 10)^2$

e) $(5x - 3)^2$

f) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

43.

a) $(x + 3)(x - 3)$

b) $(5 + x)(5 - x)$

c) $(4 + 7x)(4 - 7x)$

d) $\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right)$

e) $(x^2 + 9)(x^2 - 9)$

f) $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{5}\right)$

44.

a)

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - x - 5 \\ -x^3 - 2x^2 + 3x \\ \hline x^2 + 2x - 5 \\ -x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 \\ \hline x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } x + 1 \\ \text{Resto: } -2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 4x^2 - 6 \\ -4x^3 + 12x^2 \\ \hline 16x^2 - 6 \\ -16x^2 + 48x \\ \hline 48x - 6 \\ -48x + 144 \\ \hline 138 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline 4x^2 + 16x + 48 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } 4x^2 + 16x + 48 \\ \text{Resto: } 138 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 8x^4 - 10x^2 + 2 \\ -8x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 2x \\ \hline -8x^3 - 8x^2 + 2x + 2 \\ 8x^3 + 8x^2 - 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x^3 + 4x^2 - x - 1 \\ \hline 2x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } 2x - 2 \\ \text{Resto: } 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + x \\ -2x^3 - 3x^2 + 6 \\ \hline x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6x^3 + 9x^2 - 18 \\ \hline \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } \frac{1}{3} \\ \text{Resto: } x + 6 \end{array}$$

e) Quociente: 0 Resto: $x^2 + 4x - 8$

45.

Tem-se:

$$\begin{array}{l} M(x) \mid N(x) \\ 2 \quad Q(x) \end{array} \quad \text{donde vem } M(x) = N(x) \times Q(x) + 2$$

Ora, $M(x) = N(x) \times Q(x) + 2 \Leftrightarrow M(x) = 2N(x) \times \frac{1}{2}Q(x) + 2$ pelo que

$$\begin{array}{l} M(x) \mid 2N(x) \\ 2 \quad \frac{1}{2}Q(x) \end{array}$$

Portanto, o quociente é $\frac{Q(x)}{2}$ e o resto é 2.

46.

a)

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 5x - 2 & 3x + 1 \\ -3x^2 - x & x - 2 \\ \hline -6x - 2 & \\ 6x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad 3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

b)

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 3x^2 - 4x + 2 & x^2 - 2x + 2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x & -x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 2 & \\ -x^2 + 2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad -x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 2x + 2)(-x + 1)$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 - 4x - 3 & x^2 - x + 1 \\ -2x^4 + 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x + 3 \\ \hline x^3 + 2x^2 - 4x - 3 & \\ -x^3 + x^2 + x & \\ \hline 3x^2 - 3x - 3 & \\ -3x^2 + 3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad 2x^4 - x^3 - 4x - 3 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + x + 3)$$

47.

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = (x^2 + 2x - x - 2)(x - 3) = (x^2 + x - 2)(x - 3) =$
 $= x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) O quociente seria $(x - 1)(x - 3)$, ou seja, $x^2 - 4x + 3$ e o resto seria 0 (zero).

48.

Como $4 = 1 + 3$, $B(x)$ tem grau 1.

Como o resto não é o polinómio nulo, o resto tem grau 0 (zero), pois o grau do resto é inferior ao grau do divisor.

49.

Seja R o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$.

Tem-se $P(x) = (x - 1) \times Q(x) + R$.

Vem: $P(2) = (2 - 1) \times Q(2) + R \Leftrightarrow P(2) = Q(2) + R \Leftrightarrow P(2) = P(2) + R \Leftrightarrow R = 0$

Portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

50.

O divisor é um polinómio de grau 2. Portanto, o resto pode ser o polinómio nulo, pode ser um polinómio de grau zero ou um polinómio de grau 1. Em qualquer dos casos, o resto é da forma $ax + b$.

Portanto, $P(x) = (x - 2)(x - 3) \times Q(x) + ax + b$.

Tem-se: $P(2) = (2 - 2)(2 - 3) \times Q(2) + 2a + b \Leftrightarrow P(2) = 2a + b$.

Como $P(2) = 7$, vem $2a + b = 7$.

Tem-se: $P(3) = (3 - 2)(3 - 3) \times Q(3) + 3a + b \Leftrightarrow P(3) = 3a + b$.

Como $P(3) = 5$, vem $3a + b = 5$.

Tem-se, portanto, $2a + b = 7 \wedge 3a + b = 5$.

Daqui vem $a = -2$ e $b = 11$, pelo que $R(x) = -2x + 11$.

51.

a)

3	2	-5	-5	7		
		6	3	-6		
	2	1	-2	1		

Quociente: $2x^2 + x - 2$
Resto: 1

b)

-1	-3	0	7	4		
		3	-3	-4		
	-3	3	4	0		

Quociente: $-3x^2 + 3x + 4$
Resto: 0

c)

-2	-4	0	10	0	25		
		8	-16	12	-24		
	-4	8	-6	12	1		

Quociente: $-4x^3 + 8x^2 - 6x + 12$
Resto: 1

d)

1	1	0	0	0	0	1		
		1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	2		

Quociente: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
Resto: 2

52.

a) Resto = $A(3) = -3^3 - 10 \times 3 + 4 = -27 - 30 + 4 = -53$

b) Resto = $A(-2) = (-2)^5 - 5 \times (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 + 10 \times (-2) =$
 $= -32 + 40 - 8 - 20 = -20$

c) Resto = $A(1) = -4 \times 1^7 + 8 \times 1^5 - 5 \times 1^4 + 3 \times 1 + 9 = -4 + 8 - 5 + 3 + 9 = 11$

53.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

$$P(1) = 6 \Leftrightarrow 1 + 3 + a + b = 6 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$P(2) = 25 \Leftrightarrow 8 + 12 + 2a + b = 25 \Leftrightarrow 2a + b = 5$$

$$a + b = 2 \wedge 2a + b = 5 \Leftrightarrow a = 3 \wedge b = -1$$

54.

$$(-3)^3 + (-3)^2 - 6 \times (-3) = -27 + 9 + 18 = 0$$

$$0^3 + 0^2 - 6 \times 0 = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$2^3 + 2^2 - 6 \times 2 = 8 + 4 - 12 = 0$$

55.

$$(-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - (-2) + 3 = -8 - 12 + 2 + 3 = -15. \text{ Logo, } -2 \text{ não é raiz do polinómio.}$$

$$(-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0. \text{ Logo, } -1 \text{ é raiz do polinómio.}$$

$$1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0. \text{ Logo, } 1 \text{ é raiz do polinómio.}$$

$$2^3 - 3 \times 2^2 - 2 + 3 = 8 - 12 - 2 + 3 = -3. \text{ Logo, } 2 \text{ não é raiz do polinómio.}$$

$$3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0. \text{ Logo, } 3 \text{ é raiz do polinómio.}$$

56.

$$\text{Tem-se } 2 \times (-1)^4 - 3 \times (-1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 0. \text{ Logo, } -1 \text{ é raiz do polinómio.}$$

Como -1 é raiz do polinómio, o polinómio é divisível por $x + 1$.

Vamos então efetuar a divisão inteira de $2x^4 - 3x - 5$ por $x + 1$.

Tem-se:

	2	0	0	-3	-5
-1		-2	2	-2	5
	2	-2	2	-5	0

$$\text{Portanto, } 2x^4 - 3x - 5 = (x + 1)(2x^3 - 2x^2 + 2x - 5).$$

57.

Como $A(x) = (x + 5)(x - 2)B(x)$, tem-se que $A(x)$ é divisível por $x + 5$ e por $x - 2$, pelo que -5 e 2 são raízes de $A(x)$.

58.

$$\text{Tem-se } P(x) = (x - \alpha)Q(x).$$

$$\text{Vem: } P(\beta) = (\beta - \alpha)Q(\beta) \Leftrightarrow 0 = (\beta - \alpha)Q(\beta) \Leftrightarrow Q(\beta) = 0$$

Portanto, β é uma raiz de $Q(x)$.

59.

Num polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Como é referido no enunciado que as raízes do polinómio $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ são números inteiros, podemos concluir que 18 é múltiplo inteiro de qualquer raiz deste polinómio. Assim, são candidatos a raízes deste polinómio os números $-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9$ e 18 .

Vejamos se 1 é raiz deste polinómio.

Tem-se: $1^3 - 2 \times 1^2 - 9 \times 1 + 18 = 8$, pelo que 1 não é raiz do polinómio.

Vejamos se 2 é raiz deste polinómio.

Tem-se: $2^3 - 2 \times 2^2 - 9 \times 2 + 18 = 0$, pelo que 2 é raiz do polinómio.

Como 2 é raiz do polinómio, o polinómio é divisível por $x - 2$.

Vamos então efetuar a divisão do polinómio $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ por $x - 2$.

Tem-se:

	1	-2	-9	18
2		2	0	-18
	1	0	-9	0

Portanto, $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$.

Assim, as raízes do polinómio $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ são $-3, 2$ e 3 .

60.

Num polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Assim, o termo independente de $P(x)$ é múltiplo inteiro de 8.

Como o termo independente de $P(x)$ é um número natural inferior a 20, só pode ser 8 ou 16.

61.

Dividindo $4x^3 + 12x^2 - x - 3$ por $x + 3$ obtém-se quociente $4x^2 - 1$ e resto 0.

Portanto, $4x^3 + 12x^2 - x - 3 = (x + 3)(4x^2 - 1)$.

Como -3 não é raiz do polinómio $4x^2 - 1$ tem-se que -3 é uma raiz simples do polinómio

$4x^3 + 12x^2 - x - 3$.

62.

Tem-se $2 \times 1^4 - 3 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 7 \times 1 - 3 = 2 - 3 - 3 + 7 - 3 = 0$, pelo que 1 é uma raiz do polinómio dado.

Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar o quociente da divisão inteira do polinómio por $(x - 1)$.

Tem-se:

1	2	-3	-3	7	-3
		2	-1	-4	3
	2	-1	-4	3	0 = R

Então: $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(2x^3 - x^2 - 4x + 3)$.

Tem-se também: $2 \times 1^3 - 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 2 - 1 - 4 + 3 = 0$, pelo que 1 é uma raiz do polinómio $2x^3 - x^2 - 4x + 3$.

Vamos utilizar novamente a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira de $2x^3 - x^2 - 4x + 3$ por $x - 1$.

1	2	-1	-4	3
		2	1	-3
	2	1	-3	0 = R

Então: $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(2x^2 + x - 3)$ e, portanto, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(x - 1)(2x^2 + x - 3) = (x - 1)^2(2x^2 + x - 3)$

Tem-se ainda: $2 \times 1^2 + 1 - 3 = 0$, pelo que 1 é uma raiz do polinómio $2x^2 + x - 3$.

Vamos utilizar novamente a regra de Ruffini:

1	2	1	-3
		2	3
	2	3	0 = R

Então: $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(2x + 3) = (x - 1)^3(2x + 3)$.

Dado que 1 não é raiz de $2x + 3$, concluímos que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$.

A resolução deste problema pode ainda ser apresentada como se segue:

1	2	-3	-3	7	-3
		2	-1	-4	3
	2	-1	-4	3	0 = R
1		2	1	-3	
	2	1	-3		0 = R
1		2	3		
	2	3			0 = R
1		2			
	2				5 = R

Assim se conclui que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$, pois este polinómio é divisível por $(x - 1)^3$ e não é divisível por $(x - 1)^4$.

63.

a) $70x^2 + 35x = 35x(2x + 1)$

b) $-4x^2 + 100x = 4x(-x + 25)$

c) $100 - x^2 = 10^2 - x^2 = (10 - x)(10 + x)$, usando o caso notável da diferença de quadrados.

d) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$, usando o caso notável do quadrado do binómio.

e) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x + 1)^2 = (3x + 1)(3x + 1)$, usando o caso notável do quadrado do binómio.

f) $2x^3 - 4x^2 + 2x = 2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x - 1)^2 = 2x(x - 1)(x - 1)$, usando o caso notável do quadrado do binómio.

g) $x - x^3 = x(1 - x^2) = x(1 + x)(1 - x)$, usando o caso notável da diferença de quadrados.

h) $x^6 - 25x^4 = x^4(x^2 - 25) = x^4(x + 5)(x - 5)$, usando o caso notável da diferença de quadrados.

64.

Vamos recorrer às raízes de cada um dos polinómios, para os decompor em fatores.

a) $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$

Então: $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$

b) $-5x^2 - 10x + 15 = -5(x^2 + 2x - 3)$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Então: $-5x^2 - 10x + 15 = -5(x + 3)(x - 1)$

c) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$

Então: $2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$

65.

a) Se 1 é raiz de $A(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $x - 1$.

Tem-se:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0 = R

Então, tem-se $A(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Ora, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$, pelo que

$A(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

b) Se -2 é raiz de $B(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $x + 2$.

Tem-se:

	1	-8	5	50
-2		-2	20	-50
	1	-10	25	0 = R

Então, tem-se $B(x) = (x + 2)(x^2 - 10x + 25)$.

Ora, $x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 25}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 0}{2} \Leftrightarrow x = 5$, pelo que 5 é uma raiz dupla e

$$B(x) = (x + 2)(x - 5)(x - 5) = (x + 2)(x - 5)^2.$$

c) Se 2 é raiz de $C(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $x - 2$.

Tem-se:

	2	-3	4	-12
2		4	2	12
	2	1	6	0 = R

Então, tem-se $C(x) = (x - 2)(2x^2 + x + 6)$.

Ora, $2x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times 6}}{2 \times 1}$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$, pelo que

$$C(x) = (x - 2)(2x^2 + x + 6).$$

d) Se 1 é raiz de $D(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $x - 1$.

Tem-se:

	3	6	-21	12
1		3	9	-12
	3	9	-12	0 = R

Então, tem-se $D(x) = (x - 1)(3x^2 + 9x - 12) = 3(x - 1)(x^2 + 3x - 4)$.

Ora, $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$, pelo que

$$D(x) = 3(x - 1)(x + 4)(x - 1) = 3(x - 1)^2(x + 4).$$

66.

a) Se 1 é raiz de $A(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $x - 1$.

Tem-se:

	1	-5	6	-2	0
1		1	-4	2	0
	1	-4	2	0	0 = R

Então, tem-se $A(x) = (x - 1)(x^3 - 4x^2 + 2x) = x(x - 1)(x^2 - 4x + 2)$.

Ora, $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$, pelo que $A(x) = x(x-1)(x-(2-\sqrt{2}))(x-(2+\sqrt{2})) =$
 $= x(x-1)(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$

b) Se -1 e 3 são raízes de $B(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $(x+1)(x-3)$.

Tem-se:

	1	1	-19	11	30
-1		-1	0	19	-30
	1	0	-19	30	0 = R
3		3	9	30	
	1	3	-10	0 = R	

Então, tem-se $B(x) = (x+1)(x-3)(x^2 + 3x - 10)$.

Ora, $x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$, pelo que

$B(x) = (x+1)(x-3)(x+5)(x-2)$.

c) Se 2 é raiz dupla de $C(x)$, vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $(x-2)(x-2)$.

Tem-se:

	1	-4	3	4	-4
2		2	-4	-2	4
	1	-2	-1	2	0 = R
2		2	0	-2	
	1	0	-1	0 = R	

Então, tem-se $C(x) = (x-2)^2(x^2 - 1) = (x-2)^2(x+1)(x-1)$.

d) Num polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Como o termo independente de $D(x)$ é 9 , as raízes inteiras podem ser ± 1 , ± 3 ou ± 9 .

Tem-se $1^4 - 10 \times 1^2 + 9 = 0$, pelo que 1 é uma raiz do polinómio dado.

Vamos utilizar a regra de Ruffini para obter o quociente da divisão inteira do polinómio por $(x-1)$.

Tem-se:

	1	0	-10	0	9
1		1	1	-9	-9
	1	1	-9	-9	0 = R

Então: $x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x^3 + x^2 - 9x - 9)$.

- $1^3 + 1^2 - 9 \times 1 - 9 \neq 0$, pelo que 1 não é uma raiz do polinómio $x^3 + x^2 - 9x - 9$.
- $(-1)^3 + (-1)^2 - 9 \times (-1) - 9 \neq 0$, pelo que -1 é uma raiz do polinómio $x^3 + x^2 - 9x - 9$.
- $3^3 + 3^2 - 9 \times 3 - 9 = 0$, pelo que 3 é uma raiz do polinómio $x^3 + x^2 - 9x - 9$.

Recorrendo, por exemplo, às raízes de 3 e de -1, tem-se:

	1	1	-9	-9
3		3	12	9
	1	4	3	0 = R
-1		-1	-3	
	1	3	0 = R	

Então: $x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 1)(x - 3)(x + 1)(x + 3)$.

Ou seja, $D(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

67.

Se $P(x) = ax^3 + bx^2 - 7x + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$, como $a, b \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x^2 + x - 6$ é o polinómio nulo.

Ora, $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$, logo,

$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Então, o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é $P(2) = 0$, com $P(2) = 8a + 4b - 14 + 6 = 8a + 4b - 8$ e o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 3$ é $P(-3) = 0$, com $P(-3) = -27a + 9b + 21 + 6 = -27a + 9b + 27$.

Assim,

$$\begin{cases} 8a + 4b - 8 = 0 \\ -27a + 9b + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 8 - 8a \\ -27a + ab + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8 - 8a}{4} = 2 - 2a \\ -27a + 9(2 - 2a) + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ -27a + 18 - 18a + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ -45a + 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2 \times 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Tem-se, portanto, $a = 1$ e $b = 0$.

Nesta resolução, tiramos partido do facto de $x^2 + x - 6$ ter duas raízes distintas.

Apresentamos em seguida uma resolução mais geral.

Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r} ax^3 + bx^2 - 7x + 6 \\ \underline{ax^3 - ax^2 + 6ax} \\ (b-a)x^2 + (6a-7)x + 6 \\ \underline{-(b-a)x^2 - (b-a)x + 6(b-a)} \\ (7a-b-7)x + (6+6b-6a) \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ \underline{ax + b - a} \end{array}$$

Como o polinómio $ax^3 + bx^2 - 7x + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$, o polinómio resto é o polinómio nulo, ou seja, $7a - b - 7 = 0$ e $6 + 6b - 6a = 0$.

$$\begin{cases} 7a - b - 7 = 0 \\ 6 + 6b - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - b = 7 \\ b = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - a + 1 = 7 \\ b = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

68.

a) Sejam a , b , c e d as quatro raízes inteiras.

Tem-se $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.

Vem: $p(0) = (-a)(-b)(-c)(-d)$ pelo que $a_4 = abcd$.

b) Pela alínea anterior, o produto das quatro raízes é igual a a_4 .

Se a_4 for uma número primo, não existem quatro números inteiros distintos cujo produto seja a_4 .

Portanto, o polinómio $p(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

69.

Como a é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$ e $q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - a)^m$, m par, vem $p(x) = (x - a)^m \times q(x)$, com m par.

Seja b uma raiz de $p(x) - q(x)$.

Tem-se $p(b) - q(b) = 0 \Leftrightarrow (b - a)^m \times q(b) - q(b) = 0 \Leftrightarrow$

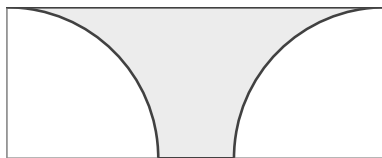
$\Leftrightarrow q(b)((b - a)^m - 1) = 0 \Leftrightarrow q(b) = 0 \vee (b - a)^m = 1$

Como m é par vem:

$$q(b) = 0 \vee b - a = \pm \sqrt[m]{1} \Leftrightarrow q(b) = 0 \vee b - a = -1 \vee b - a = 1$$

Assim, $a - 1$ e $a + 1$ são duas raízes de $p(x) - q(x)$.

70.



O perímetro pedido, $p(x)$, é dado por:

$$\overline{DC} + \overline{EF} + \text{comp. arco } DE + \text{comp. arco } FC$$

com $\overline{DC} = 10$

- $\overline{EF} = 10 - 2x$

- $\text{comp. arco } DE = \text{comp. arco } FC = \frac{2 \times \pi \times x}{4} = \frac{\pi x}{2}$

Então, $p(x) = 10 + 10 - 2x + 2 \times \frac{\pi x}{2} =$

$= 20 - 2x + \pi x =$

$= (\pi - 2)x + 20$

71.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^3 = \\ &= \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^2(2 - 2x) = \\ &= \frac{4}{3}\pi x^3 + (4 - 8x + 4x^2)(2 - 2x) = \\ &= \frac{4\pi}{3}x^3 + 8 - 8x - 16x + 16x^2 + 8x^2 - 8x^3 = \\ &= \frac{4\pi}{3}x^3 - 8x^3 + 24x^2 - 24x + 8 = \\ &= \frac{4\pi}{3}x^3 - \frac{24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8 = \\ &= \frac{4\pi - 24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8 \end{aligned}$$

72.

a) A área da base da pirâmide inicial é $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$, pelo que o seu volume é $\frac{1}{3} \times 72 \times 8 = 192$.

A nova pirâmide é semelhante à inicial, sendo a razão das respetivas alturas igual a $\frac{8-x}{8}$. Portanto, a razão dos volumes é $\left(\frac{8-x}{8}\right)^3$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{8-x}{8}\right)^3 &= \frac{(8-x)^3}{8^3} = \frac{(8-x)^2(8-x)}{512} = \\ &= \frac{(64 - 16x + x^2)(8-x)}{512} = \\ &= \frac{512 - 192x + 24x^2 - x^3}{512} \end{aligned}$$

Portanto, o volume da nova pirâmide é:

$$\begin{aligned} \frac{512 - 192x + 24x^2 - x^3}{512} \times 192 &= \\ &= \frac{192}{512} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) = \\ &= \frac{3}{8} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) = \\ &= -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192 \end{aligned}$$

b) Se o tronco de cone tiver altura zero, a nova pirâmide coincide com a pirâmide inicial. Portanto, o volume da pirâmide inicial é igual a $P(0)$. Assim, o volume da pirâmide inicial coincide com o termo independente de $P(x)$.

Tema 3 | Geometria Analítica

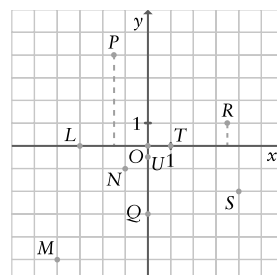
Capítulo 1 | Geometria analítica no plano

Págs. 46 a 58

1.

a) $A(3, 0)$, $B(4, 3)$, $C(2, 2)$, $D(0, 1)$, $E(-1, 4)$, $F(-3, 2)$,
 $G(-4, 0)$, $H(-2, -1)$, $I(-4, -3)$, $J(0, -2)$, $K(2, -4)$ e
 $L(3, -1)$.

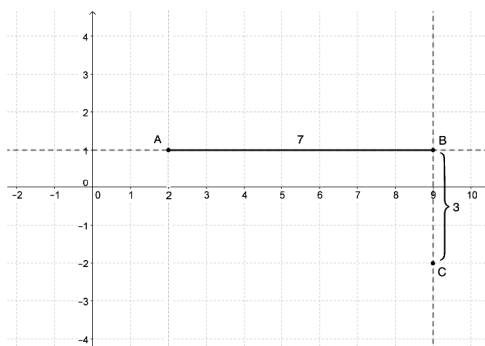
b)



2.

Dado que o retângulo tem os lados paralelos aos eixos do referencial e dado que um dos vértices (que vamos designar por C) tem abscissa 9 e está no 4.º quadrante, conclui-se que o retângulo tem um vértice de coordenadas $(9, 1)$. Seja B esse vértice.

Então, $\overline{AB} = 7$ e, como o perímetro do retângulo é 20, tem-se $\overline{BC} = \frac{20 - 2 \times 7}{2}$, ou seja, $\overline{BC} = 3$. Portanto, a ordenada de C é -2 .



3.

$$\text{a) } d(A, B) = \sqrt{(7 - 2)^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{b) } d(C, D) = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{c) } d(E, F) = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + [1 - (-1)]^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{5}{2}$$

4.

Sejam $A(-3, 2)$, $B(7, 4)$, $C(8, -1)$ e $D(-2, -3)$ os vértices do retângulo.

$$A_{\text{retângulo}} = d(A, B) \times d(A, D)$$

$$d(A, B) = \sqrt{[7 - (-3)]^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$d(A, D) = \sqrt{[-2 - (-3)]^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$A_{\text{retângulo}} = 2\sqrt{26} \times \sqrt{26} = 2 \times 26 = 52 \text{ (u.a.)}$$

5.

a) É um losango porque $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, ou seja, $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(12 - 2)^2 + [4 - (-1)]^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(14 - 12)^2 + (15 - 4)^2} = \sqrt{4 + 121} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$d(C, D) = \sqrt{(4 - 14)^2 + (10 - 15)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$d(D, A) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-1 - 11)^2} = \sqrt{4 + 121} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

b)

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2} = \frac{d(A, C) \times d(B, D)}{2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(14 - 2)^2 + [15 - (-1)]^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

$$d(B, D) = \sqrt{(4 - 12)^2 + (10 - 4)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{Então, } A_{\text{losango}} = \frac{20 \times 10}{2} = 100 \text{ (u.a.)}.$$

6.

a) As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+17}{2}\right)$.

Tem-se $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+17}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{20}{2}\right) = (5, 10)$. Portanto, $M_{[AB]}(5, 10)$.

b) As coordenadas do ponto médio de $[CD]$ são $\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+(-7)}{2}\right)$.

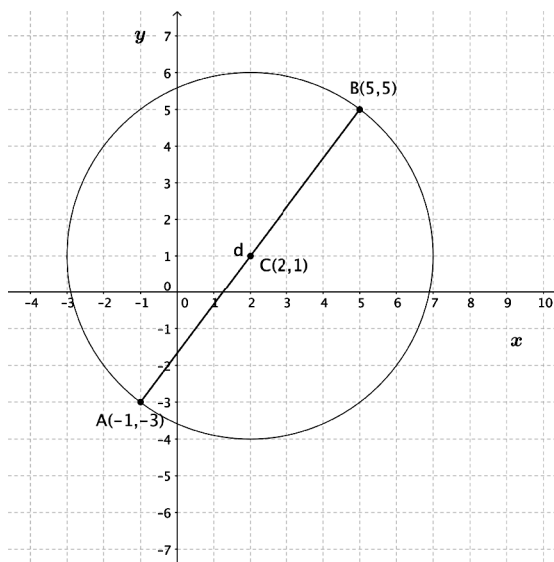
Tem-se $\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+(-7)}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-6}{2}\right) = (-1, -3)$. Portanto, $M_{[CD]}(-1, -3)$.

c) As coordenadas do ponto médio de $[EF]$ são $\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}}{2}\right)$.

Tem-se $\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{8}{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{8}{4}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$. Portanto, $M_{[EF]}(2, \sqrt{2})$.

7.

Como $[AB]$ é um diâmetro do círculo, o seu centro, C , é o ponto médio de $[AB]$.



a) $M_{[AB]} \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+5}{2} \right)$, portanto, $C(2, 1)$.

b) O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.

Tem-se $r = d(A, C) = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Portanto, o comprimento da circunferência é 10π (u.c.).

8.

Seja $A(a, b)$, então as coordenadas de B são $(b, 3a)$. Tem-se, $M_{[AB]} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+3a}{2} \right)$ e, dado que $M_{[AB]}(4, 9)$,

podemos escrever:
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{b+3a}{2} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{b+3a}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 8 \\ b+3a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8-a \\ 8-a+3a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 8-a \\ 2a = 18-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8-a \\ a = \frac{10}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$$

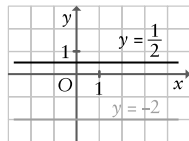
As coordenadas do ponto A são $(5, 3)$.

9.

a) $A(-5, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 2)$ e $D(2, 2)$. A reta s é definida pela equação $y = 2$.

b) $r : y = 4$ e $t : y = -1$.

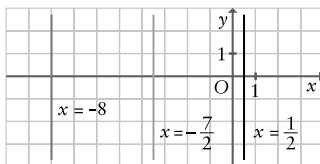
c)



d) $E(3, 4)$, $F(3, 1)$, $G(3, -2)$ e $H(3, -4)$. A reta c é definida pela equação $x = 3$.

e) $d : x = 4$ e $e : x = -1$.

f)



10.

a) Como $m = 2$, então $y = 2x + b$. Dado que o ponto A tem abcissa 0, conclui-se que $b = -1$.

b) Como $m = 3$, então $y = 3x + b$.

Substituindo x e y pelas coordenadas de $B(1, 7)$ na equação $y = 3x + b$:

$$7 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow 7 - 3 = b \Leftrightarrow b = 4$$

A equação reduzida da reta é $y = 3x + 4$.

c) O declive da reta que passa nos pontos $C(1, -3)$ e $D(-4, 2)$ é dado por $\frac{2 - (-3)}{-4 - 1} = \frac{2 + 3}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$, então $m = -1$ e $y = -x + b$.

Recorrendo ao ponto $C(1, -3)$, tem-se: $-3 = -1 + b \Leftrightarrow -3 + 1 = b \Leftrightarrow b = -2$.

A equação reduzida da reta é $y = -x - 2$.

d) Como $b = -1$, tem-se $y = ax - 1$.

Substituindo x e y pelas coordenadas do ponto $E(4, 0)$ na equação $y = ax - 1$:

$$0 = 4 \times a - 1 \Leftrightarrow 1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

A equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{4}x - 1$.

e) Como $b = 0$, tem-se $y = ax$.

Substituindo x e y pelas coordenadas do ponto $F\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ na equação $y = ax$:

$$-2 = \frac{2}{3} \times a \Leftrightarrow -6 = 2a \Leftrightarrow a = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow a = -3$$

A equação reduzida da reta é $y = -3x$.

f) Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares têm a abscissa e a ordenada iguais.

A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$.

g) Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes pares têm a abscissa e a ordenada simétricas.

A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes pares é $y = -x$.

11.

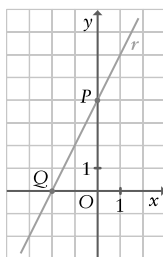
a) O declive é $a = 2$. A ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy é a ordenada do ponto da reta que tem abscissa 0, ou seja, é a ordenada na origem, b . Neste caso, tem-se $b = 4$.

b) Seja Q o ponto de interseção da reta com o eixo Ox , então a ordenada de Q é 0, ou seja $Q(x, 0)$.

Resolvendo a equação $0 = 2x + 4 : 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{-2} = -2$.

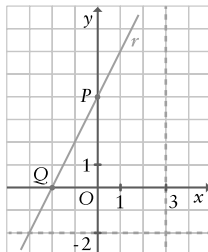
Logo, $Q(-2, 0)$ e, portanto, a abscissa do ponto de interseção da reta r com o eixo Ox é -2 .

c) Recorrendo aos pontos P e Q de interseção da reta r , respetivamente, com os eixos Oy e Ox (determinados nas alíneas anteriores) tem-se:



d₁) Por observação, 10 parece ser a ordenada do ponto da reta r cuja abscissa é 3.

d₂) Por observação, -3 parece ser a abscissa do ponto da reta r cuja ordenada é -2 .



e) A ordenada do ponto da reta r cuja abscissa é 3 é: $y = 2 \times 3 + 4 = 10$.

A abscissa do ponto da reta r cuja ordenada é -2 , é a solução da equação $-2 = 2x + 4$:

$$-2 = 2x + 4 \Leftrightarrow -2x = 4 + 2 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x = -3$$

Estes resultados confirmam os valores observados anteriormente.

12.

a)

x	$y = 3x + 1$	Pontos
$x = 0$	$y = 1$	$A(0, 1)$
$x = 1$	$y = 3 \times 1 + 1 = 3 + 1 = 4$	$B(1, 4)$

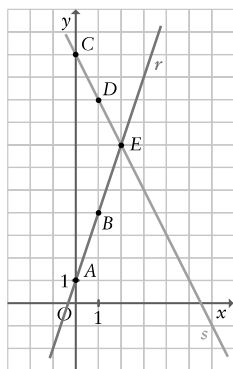
Dois pontos da reta r são, por exemplo, $A(0, 1)$ e $B(1, 4)$.

b)

x	$y = -2x + 11$	Pontos
$x = 0$	$y = 11$	$C(0, 11)$
$x = 1$	$y = -2 \times 1 + 11 = -2 + 11 = 9$	$D(1, 9)$

Dois pontos da reta s são, por exemplo, $C(0, 11)$ e $D(1, 9)$.

c)



d) Por observação do gráfico da alínea anterior, as coordenadas do ponto de interseção, E , das duas retas parecem ser $(2, 7)$.

e) $E(2, 7)$ pertence às duas retas r e s se as suas coordenadas satisfizerem as equações das duas retas.

Para a reta r , $7 = 3 \times 2 + 1 \Leftrightarrow 7 = 7$. Então, o ponto E pertence à reta r .

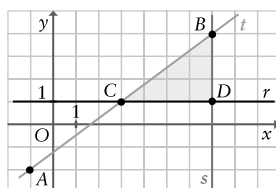
Para a reta s , $7 = -2 \times 2 + 11 \Leftrightarrow 7 = 7$. Então, o ponto E pertence igualmente à reta s .

13.

a) As retas r e s são paralelas, respetivamente, ao eixo Ox e ao eixo Oy .

Para representar a reta t , determinemos as coordenadas de dois pontos.

x	$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$	Pontos
$x = -1$	$y = \frac{3}{4} \times (-1) - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$	$A(-1, -2)$
$x = 7$	$y = \frac{3}{4} \times 7 - \frac{5}{4} = \frac{21}{4} - \frac{5}{4} = \frac{16}{4} = 4$	$B(7, 4)$



b) As coordenadas de D são $(7, 1)$ (D é o ponto de interseção das retas de equações $x = 7$ e $y = 1$). O ponto C resulta da interseção da reta t com a reta r ; como pertence à reta r , a sua ordenada é 1. A abscissa de C resulta da resolução da equação $1 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$:

$$1 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4 = 3x - 5 \Leftrightarrow -3x = -5 - 4 \Leftrightarrow -3x = -9 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{-3} \Leftrightarrow x = 3$$

O ponto B é o ponto de interseção da reta t com a reta s . Dado que pertence à reta s , a abscissa de B é 7.

$$\text{A ordenada de } B \text{ é } y = \frac{3}{4} \times 7 - \frac{5}{4} = \frac{21}{4} - \frac{5}{4} = 4.$$

Os vértices do triângulo são os pontos: $B(7, 4)$, $C(3, 1)$ e $D(7, 1)$.

c) Perímetro = $d(B, C) + d(B, D) + d(C, D)$.

$$d(B, C) = \sqrt{(3 - 7)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \quad d(B, D) = \sqrt{(7 - 7)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ e}$$

$$d(C, D) = \sqrt{(7 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

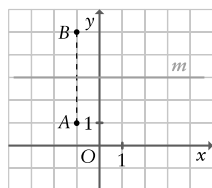
$$P = 5 + 4 + 3 = 12$$

Assim, o perímetro é 12 (u.c.).

$$\text{Como o triângulo é retângulo em } D, \text{ então } \text{Área} = \frac{d(C, D) \times d(B, D)}{2}, \text{ logo, } \text{Área} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ (u.a.)}.$$

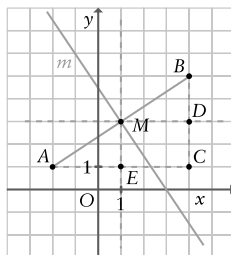
14.

a) Atendendo a que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy , a mediatriz de $[AB]$ é a reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto médio de $[AB]$.



$$\text{A equação reduzida da mediatriz do segmento } [AB] \text{ é } y = \frac{1 + 5}{2} \Leftrightarrow y = 3.$$

b)



A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} \Leftrightarrow$$

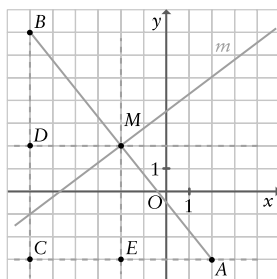
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y + 5 = -8x + 41 - 10y \Leftrightarrow 8y = -12x + 36 \Leftrightarrow 2y = -3x + 9 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

A equação reduzida da mediatriz é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$.

c)



A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-7)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x+6)^2 + (y-7)^2 \Leftrightarrow$$

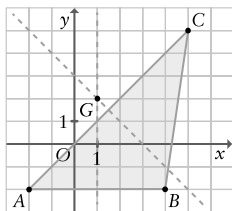
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 12x + 36 + y^2 - 14y + 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y + 14y = 12x + 4x + 85 - 13 \Leftrightarrow 20y = 16x + 72 \Leftrightarrow 5y = 4x + 18 \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}$$

A equação reduzida da mediatriz é $y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}$.

15.

a) e b) Representemos os pontos $A(-2, -2)$, $B(4, -2)$ e $C(5, 5)$ e os segmentos $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, obtendo o triângulo $[ABC]$.



Depois de construir o triângulo $[ABC]$, recorreremos ao compasso para determinar dois pontos equidistantes de A e de C que permitem representar a mediatriz de $[AC]$.

A mediatriz de $[AB]$ pode ser desenhada tendo em consideração que é paralela ao eixo Oy e passa no ponto médio de $[AB]$ que tem coordenadas $(1, -2)$.

Assim, por observação, as coordenadas do ponto G são $(1, 2)$.

c) Estas duas retas, mediatrizes de $[AC]$ e de $[AB]$ interseitam-se no ponto G , que parece ter coordenadas $(1, 2)$. Se construirmos a mediatriz de $[BC]$, verificamos que também passa em G .

Uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $x = 1$.

A mediatriz de $[AC]$ é determinada por $d(A, P) = d(C, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2}$$

$$d(C, P) = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 5)^2}$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 5)^2} \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow 14y = -14x + 42 \Leftrightarrow y = -x + 3$$

A equação reduzida da mediatriz de $[AC]$ é $y = -x + 3$.

Determinemos as coordenadas do ponto em que as mediatrizes de $[AB]$ e de $[AC]$ se interseitam:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Confirma-se, portanto, que as coordenadas de G são $(1, 2)$.

Podemos ainda confirmar que este ponto pertence à mediatriz de $[BC]$ pois

$$d(G, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ e } d(G, C) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

16. A equação reduzida da circunferência de centro $C(c_1, c_2)$ e raio r ($r > 0$) é $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.

a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

d) $x^2 + y^2 = 1$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

f) O centro da circunferência é o ponto médio do segmento $[AB]$ e o raio é determinado pela distância de um dos pontos extremidade do segmento ao centro.

$$C(c_1, c_2) = M_{[AB]} \left(\frac{1+7}{2}, \frac{4+6}{2} \right) \Leftrightarrow C(4, 5)$$

$$\text{O raio da circunferência é: } d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{A equação reduzida é: } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 10.$$

Também podemos obter a equação reduzida da circunferência substituindo na equação $(x-4)^2 + (y-5)^2 = r^2$ x e y pelas coordenadas de A ou de B .

Por exemplo, recorrendo a $A(1, 4)$:

$$(1-4)^2 + (4-5)^2 = r^2 \Leftrightarrow 9 + 1 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 10$$

Portanto, a equação pedida é $(x-4)^2 + (y-5)^2 = r^2$.

17.

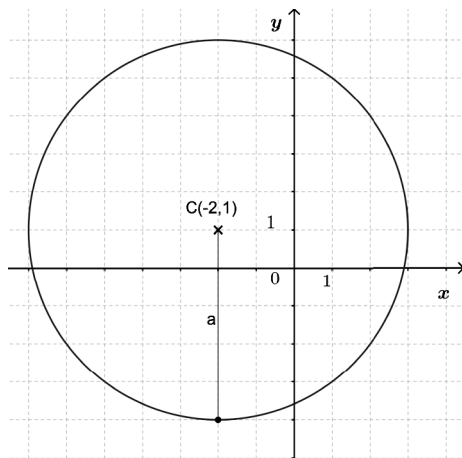
a) O ponto $C(5, -4)$ é o centro e o raio é $\sqrt{36}$, ou seja, $r = 6$.

b) O ponto $C(0, -3)$ é o centro e o raio é $\sqrt{1}$, ou seja, $r = 1$.

c) O ponto $C(-1, 7)$ é o centro e o raio é $\sqrt{12}$, ou seja, $r = \sqrt{12} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3}$.

d) O ponto $C(0, 0)$ é o centro e o raio é $\sqrt{5}$, ou seja, $r = \sqrt{5}$.

18. A equação reduzida da circunferência desenhada é $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$.



$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5^2 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 + 4 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar.

19.

a) Pretende escrever-se a equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Tendo em consideração que $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ e que $(y \pm b)^2 = y^2 \pm 2by + b^2$, escrevemos a equação dada na forma $x^2 - 2 \times 3 \times x + y^2 + 2 \times 2 \times y = 1$.

Acrescentam-se, depois, à equação inicial, os termos em falta para obter os desenvolvimentos dos quadrados dos binômios, tendo em consideração que os termos que se adicionam ao primeiro membro também são adicionados ao segundo membro:

$$x^2 - 2 \times 3 \times x + y^2 + 2 \times 2 \times y = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 + y^2 - 2 \times 2xy + 2^2 - 1 + 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 9 + 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 14$$

A equação reduzida da circunferência é $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{14}^2$, logo $C(3, -2)$ e $r = \sqrt{14}$.

b) Pretende escrever-se a equação na forma $x^2 + y^2 - 2 \times 4 \times y = 0$.

Acrescentam-se, à equação inicial, os termos em falta:

$$x^2 + y^2 - 8y + 4^2 = +4^2 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

A equação reduzida da circunferência é $(x - 0)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$, logo, $C(0, -4)$ e $r = 4$.

20.

A circunferência é definida pela equação $(x + 4)^2 + (y - 10)^2 = (5\sqrt{2})^2$.

$$(x + 4)^2 + (y - 10)^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20y + 100 = 25 \times 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 20y + 100 + 16 - 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 20y + 66 = 0$$

As coordenadas dos pontos de interseção da reta com a circunferência são as soluções do sistema constituído pelas equações da reta e da circunferência:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + y^2 + 8x - 20y + 66 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + (2x + 3)^2 + 8x - 20(2x + 3) + 66 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + 8x - 40x - 60 + 66 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 9 \\ x = 3 \end{cases}$$

Os pontos de interseção são os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(3, 9)$.

21.

a) A equação reduzida da circunferência cujo centro é $C(1, -2)$ e o raio é 3 é: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

b) «A distância de qualquer ponto P do círculo ao ponto C é sempre inferior ou igual a 3.»

22.

a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 36$

b) $x^2 + y^2 \leq 2$

c) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 > 16$

d) $(x - 2)^2 + y^2 < 9$

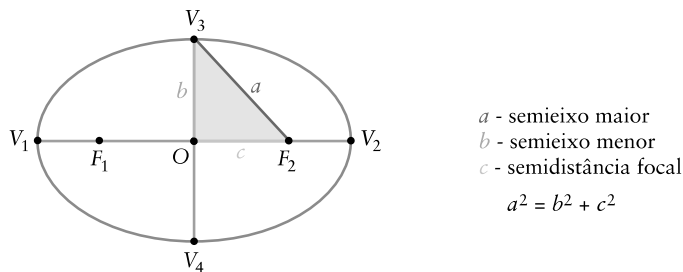
23.

A região do plano definida pela condição $x^2 + (y - 5)^2 \leq 7$ é um círculo de raio $\sqrt{7}$.

Assim, a área dessa região é: $\pi(\sqrt{7})^2 = 7\pi$ (u.a.).

24.

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ define a elipse de semieixos a e b e semidistância focal c , sendo $a^2 = c^2 + b^2$.



a) Tem-se: $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$; então, o semieixo maior é 5 (o eixo maior é 10) e o semieixo menor é 4 (o eixo menor é 8).

Dado que $a^2 = c^2 + b^2$, tem-se $25 = c^2 + 16$.

$$25 = c^2 + 16 \Leftrightarrow c^2 = 9$$

Portanto, $c = 3$.

A distância focal é 6 e as coordenadas dos focos são: $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$.

As coordenadas dos vértices são: $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$, $V_3(0, 4)$ e $V_4(0, -4)$.

b) Tem-se $a^2 = 100$ e $b^2 = 36$; então, o semieixo maior é 10 (o eixo maior é 20) e o semieixo menor é 6 (o eixo menor é 12).

Dado que $a^2 = c^2 + b^2$, tem-se $100 = c^2 + 36$.

$$100 = c^2 + 36 \Leftrightarrow c^2 = 64$$

Portanto, $c = 8$.

A distância focal é 16 e as coordenadas dos focos são: $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$.

As coordenadas dos vértices são: $V_1(-10, 0)$, $V_2(10, 0)$, $V_3(0, 6)$ e $V_4(0, -6)$.

c) Tem-se $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$; então, o semieixo maior é 3 (o eixo maior é 6) e o semieixo menor é 2 (o eixo menor é 4).

Dado que $a^2 = c^2 + b^2$, tem-se $9 = c^2 + 4$.

$$9 = c^2 + 4 \Leftrightarrow c^2 = 5$$

Portanto, $c = \sqrt{5}$.

A distância focal é $2\sqrt{5}$ e as coordenadas dos focos são: $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

As coordenadas dos vértices são: $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(0, 2)$ e $V_4(0, -2)$.

d) Tem-se $a^2 = 49$ e $b^2 = 24$; então, o semieixo maior é 7 (o eixo maior é 14) e o semieixo menor é $2\sqrt{6}$ (o eixo menor é $4\sqrt{6}$).

Dado que $a^2 = c^2 + b^2$, tem-se $49 = c^2 + 24$.

$$49 = c^2 + 24 \Leftrightarrow c^2 = 25$$

Portanto, $c = 5$.

A distância focal é de 10 e as coordenadas dos focos são: $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$.

As coordenadas dos vértices são: $V_1(-7, 0)$, $V_2(7, 0)$, $V_3(0, 2\sqrt{6})$ e $V_4(0, -2\sqrt{6})$.

25.

a) Tem-se $2a = 6$ e $2b = 4$, e, portanto, $a = 3$ e $b = 2$. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Tem-se $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(0, 2)$ e $V_4(0, -2)$, portanto, o centro da elipse é a origem do referencial, $a = 3$ e $b = 2$. Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) Tem-se $c = 12$ e como o vértice conhecido pertence ao eixo Oy e tem ordenada 5, conclui-se que $b = 5$.

Pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow a^2 = 169$.

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

d) Tem-se $c = 5$ e como o vértice conhecido pertence ao eixo Ox e tem abscissa -7 conclui-se que $a = 7$.

Dado que $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $7^2 = b^2 + 5^2$.

$$7^2 = b^2 + 5^2 \Leftrightarrow -b^2 = 25 - 49 \Leftrightarrow b^2 = 24$$

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

e) Tem-se $c = 6$. Designando por F_1 e por F_2 os focos da elipse, tem-se que um ponto P pertence à elipse se e só se: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$d(P, F_1) = \sqrt{(6 - 6)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(P, F_2) = \sqrt{(-6 - 6)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Então, $2a = 5 + 13 = 18$ e $a = 9$; $9^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow b^2 = 45$.

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$.

f) O comprimento e a largura do retângulo correspondem às medidas do eixo maior e menor da elipse. Como o perímetro do retângulo é 36, então: $4a + 4b = 36$.

Por outro lado, $a^2 = b^2 + 3^2$.

$$\begin{cases} 4a + 4b = 36 \\ a^2 = b^2 + 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ a^2 = b^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 - b \\ (9 - b)^2 = b^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 - b \\ 81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 - b \\ -18b = -72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$$

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

g) A equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dado que $a = 2b$, tem-se $a^2 = 4b^2$ e, portanto, a equação da elipse é $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como $P(6, 4)$ pertence à elipse, tem-se $\frac{36}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 25$.

Como $a^2 = 4b^2$, conclui-se que $a = 4 \times 25 = 100$.

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

26.

Seja l o lado do losango; então, $4l = \sqrt{208} \Leftrightarrow l = \sqrt{13}$. Como $l^2 = a^2 + b^2$, então $13 = a^2 + b^2$.

Por outro lado, a área do retângulo é $2a \times 2b$ e, portanto, $2a \times 2b = 24$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a \times 2b = 24 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ \frac{36}{b^2} + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ 36 + b^4 = 13b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ 36 + b^4 = 13b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ b^4 - 13b^2 + 36 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo b^2 por w , obtemos a equação $w^2 - 13w + 36 = 0$.

$$w^2 - 13w + 36 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} \Leftrightarrow w = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow w = 9 \vee w = 4$$

Portanto, $b^4 - 13b^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 9 \vee b^2 = 4$.

Dado que b é um número positivo, tem-se $b = 3$ ou $b = 2$.

Os pares de soluções do sistema são:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

e, se designarmos por a o semieixo maior, conclui-se que $a = 3$ e $b = 2$.

Dado que $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $3^2 = 2^2 + c^2$.

$$3^2 = 2^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 5$$

Portanto, $c = \sqrt{5}$.

A distância focal é $2c = 2\sqrt{5}$.

27.

Os dois vértices em causa pertencem a cada um dos eixos do referencial. Ora, a reta de equação, $y = \frac{1}{2}x + 3$ interseca o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-6, 0)$ e interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 3)$. Tem-se, portanto, $a = 6$ e $b = 3$.

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

28.

$$\text{a) } x^2 + 3y^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{3y^2}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

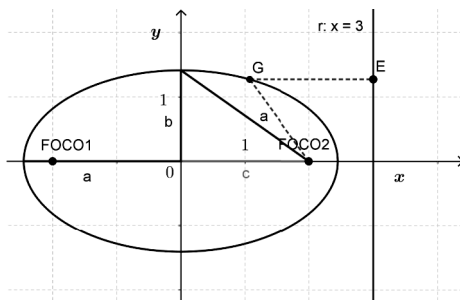
b) Dado que $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $6 = 2 + c^2$.

$$6 = 2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 4$$

Portanto, $c = 2$.

Assim, o foco de abscissa positiva é o ponto $F(2, 0)$.

c)



Tem-se $x^2 + 3y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 = \frac{6-x^2}{3}$ e $F(2, 0)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse: $d(P, F) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{6-x^2}{3}} =$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + \frac{6-x^2}{3}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 12x + 12 + 6 - x^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(x^2 - 6x + 9)}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |x-3|.$$

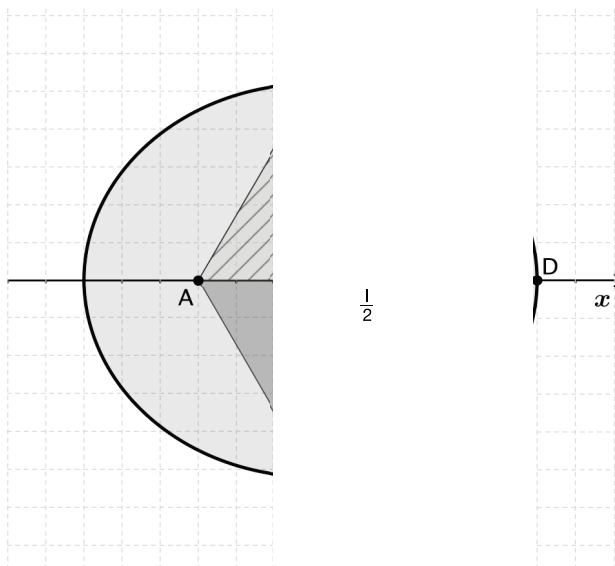
Por outro lado, $d(P, r) = |x-3|$.

$$\text{Portanto, } \frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |x-3|}{|x-3|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

como se queria demonstrar.

29.

Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero. Se os vértices A e B são os focos da elipse, então C é um dos vértices da elipse. Seja $C(0, b)$ e seja l a distância focal $\overline{AB}$.



Do enunciado: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = l$, logo $2c = l$ e $a = l$.

Pelo teorema de Pitágoras: $l^2 = b^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -b^2 = -l^2 + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3l^2}{4} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}l}{2}$

Finalmente,

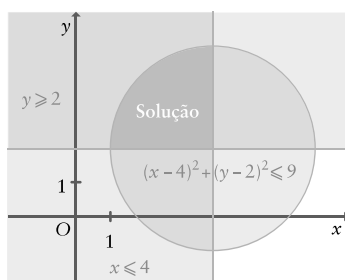
$$\hat{\text{Área}}_{[ACD]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{OC}}{2} = \frac{(\overline{OD} + \overline{AO}) \times \overline{OC}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AO}}{2} = \frac{\left(l + \frac{l}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}l}{4}}{2} = \frac{\frac{3l}{2} \times \frac{\sqrt{3}l}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{8}$$

como se queria demonstrar.

30.

a) A região do plano definida pela condição $y \geq 2 \wedge x \leq 4 \wedge (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 9$ é determinada pelas retas de equação $y = 2$ e $x = 4$ e pela circunferência de equação $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$.

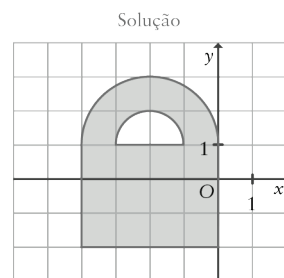
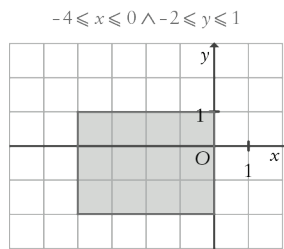
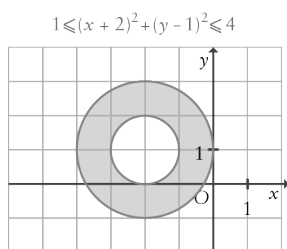
O conjunto de pontos definido por $y \geq 2 \wedge x \leq 4 \wedge (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 9$ é:



(Na imagem, corresponde à zona sombreada em tom mais escuro).

b) A região do plano definida pela condição: $1 \leq (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \vee (-4 \leq x \leq 0 \wedge -2 \leq y \leq 1)$ é determinada pelas retas de equações $x = -4$, $x = 0$, $y = -2$, $y = 1$ e pelas circunferências de equações $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Estas circunferências têm centro no ponto $(-2, 1)$ e raios, respetivamente, 1 e 2.

O conjunto de pontos definido por $1 \leq (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \vee (-4 \leq x \leq 0 \wedge -2 \leq y \leq 1)$ é:



31.

a) $y \leq 2$

b) $x > -1$

c) $y \geq x$

d) $y < -x$

32. A região colorida é a reunião do círculo de centro $C(0, 1)$ e raio 1, com o retângulo de lados contidos nas retas de equações $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = -2$.

Assim, a região sombreada é dada por: $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \vee (-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0)$

33.

a) $\text{Área}_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{BA}}{2} \times \overline{CB}$. Logo, $\text{Área} = \frac{4+8}{2} \times 3 = 6 \times 3 = 18$ (u.a.).

Tem-se $\overline{CB} = 10 - 7 = 3$, $\overline{CD} = 8$ e $\overline{BA} = 4$.

b) Um ponto $P(x, y)$ pertence à mediatriz de $[AD]$ se e só se $d(A, P) = d(D, P)$.

$$d(A, P) = d(D, P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-10)^2} \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-7)^2 = (x-8)^2 + (y-10)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = x^2 - 16x + 64 + y^2 - 20y + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x - 14y + 65 = -16x - 20y + 164 \Leftrightarrow 6y = -8x + 99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-8x}{6} + \frac{99}{6} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$$

A equação reduzida da mediatriz é $y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$.

c) O raio da circunferência é $d(A, D) = \sqrt{(8-4)^2 + (10-7)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ (u.c.).

d) A região colorida é a interseção do círculo de centro $A(4, 7)$ e raio 5, com os semiplanos definidos pelas condições $x \geq 0$, $x \leq 4$ e $y \leq 7$.

Assim, região colorida é dada por: $(x-4)^2 + (y-7)^2 \leq 25 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge y \leq 7$.

Págs. 59 a 68

34.

a)

Vetores	Mesma direção	Mesmo sentido	Mesma norma	Iguais?
$\vec{a}$ e $\vec{b}$	não	x	sim	não
$\vec{b}$ e $\vec{c}$	sim	sim	não	não
$\vec{d}$ e $\vec{e}$	sim	não	sim	não
$\vec{c}$ e $\vec{f}$	sim	sim	sim	sim

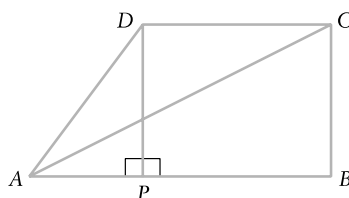
b) $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 3$

c) $\vec{d}$ e $\vec{e}$

35.

a) Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares (têm a mesma direção).

b) Seja P a projeção ortogonal de D sobre AB .



Pelo teorema de Pitágoras: $\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{DP}^2 \Leftrightarrow 5^2 = \overline{AP}^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \overline{AP} = 3$

Como $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$, tem-se $\overline{AB} = 8$. Então, aplicando novamente o teorema de Pitágoras,

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 8^2 + 4^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 64 + 16 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

36.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC}$

e) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EF}$

g) $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{NG}$

i) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$

k) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{EJ}$

l) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ (os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{PO}$ são simétricos).

b) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{LA}$

d) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH}$

f) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LJ}$

h) $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$

j) $\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{LM}$

37.

- a) «Quaisquer que sejam os pontos A , B e C , tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.»
b) «Quaisquer que sejam os pontos A , B , C e D tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.»
c) «Quaisquer que sejam os pontos A e B , tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.»

38.

$$\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}, \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}, \vec{c} = -2\vec{d}, \vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{c}, \vec{f} = -4\vec{e}, \vec{e} = -\frac{1}{4}\vec{f}, \vec{g} = 2\vec{h}, \vec{h} = \frac{1}{2}\vec{g}$$

39.

- a) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$
b) $\frac{1}{3}\overrightarrow{LI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{LO}$
c) $\frac{2}{3}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{ED}$
d) $\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{FL}$

40.

- a) Tem-se $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$. Portanto:
«Quaisquer que sejam os pontos A e B tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$.»
b) Como $3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = 3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 3\overrightarrow{BA}$, então $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$.
«Quaisquer que sejam os pontos A , B e C tem-se sempre: $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$.»

41.

Seguindo a sugestão:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Portanto, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$$\text{De modo análogo: } \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Portanto, $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Conclui-se assim que $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$, de onde se conclui que o quadrilátero é um paralelogramo.

42.

Primeiro caso: $\vec{a} = \vec{0}$

Se $\vec{a} = \vec{0}$, então $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} - \vec{b} = -\vec{b}$.

Como dois vetores simétricos são colineares, tem-se que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

Segundo caso: $\vec{a} = \vec{b}$

Se $\vec{a} = \vec{b}$, então $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Como o vetor nulo é colinear com qualquer vetor, também neste caso os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

Terceiro caso: $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{a} \neq \vec{b}$

Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ colineares, existe um número real λ tal que $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Como estamos a admitir que $\vec{a} \neq \vec{b}$, tem-se $\lambda \neq 1$.

Vem: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \lambda \vec{a} = (1 + \lambda)\vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \lambda \vec{a} = (1 - \lambda)\vec{a}$.

Portanto, $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}(\vec{a} - \vec{b})$. Logo, os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

43.

$\vec{a}(6, 2)$, $\vec{b}(0, -2)$, $\vec{c}(-3, 0)$, $\vec{d}(1, -3)$ e $\vec{e}(-3, -5)$.

44.

a₁) As coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ são $(-2 + 7, 3 + 4) = (5, 7)$.

a₂) As coordenadas $\vec{u} - \vec{v}$ são $(-2 - 7, 3 - 4) = (-9, -1)$.

a₃) As coordenadas de $2\vec{v} - 3\vec{u}$ são $(14 - (-6), 8 - 9) = (20, -1)$.

a₄) As coordenadas de $3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ são $(21 + 2, 12 - 3) = (23, 9)$.

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$.

c) $\vec{u}(-2, 3)$ e $\vec{v}(7, 4)$ não são colineares, pois $-2 \times 4 \neq 3 \times 7$.

d) $\vec{u}(-2, 3)$ e $\vec{w}(4, -6)$ são colineares porque $-2 \times (-6) = 3 \times 4$.

e) $\vec{t}(k, -12)$ e $\vec{v}(7, 4)$ são colineares se e só se $k \times 4 = -12 \times 7 \Leftrightarrow k = \frac{-12 \times 7}{4} \Leftrightarrow k = -21$.

f) Dado que pretendemos um vetor com a direção e o sentido de $\vec{u}$, esse vetor é da forma $k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Como $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$, o vetor $\frac{1}{\sqrt{13}}\vec{u}$ tem a direção e o sentido de $\vec{u}$ e norma 1.

Então, o vetor $\frac{4}{\sqrt{13}}\vec{u}$ é o vetor pretendido. As suas coordenadas são $\frac{4}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left(-\frac{8}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}\right) = \left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, \frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$.

45. As coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ coincidem com as coordenadas dos pontos P , Q e R .

Note-se que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Então, as coordenadas de R são $(4, -3) + (2, 1) = (6, -2)$.

46.

a) $A + \overrightarrow{EG} = A + \overrightarrow{AC} = C$

b) $J + \overrightarrow{LO} = J + \overrightarrow{JM} = M$

c) $G + 2\overrightarrow{FK} = G + \overrightarrow{FO} = G + \overrightarrow{GP} = P$

d) $I + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{JM} = I + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MJ} = I + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{MJ} = K + \overrightarrow{KG} = G$

47.

a) As coordenadas de $P + \vec{u}$ são $(-1, 5) + (3, -2) = (2, 3)$.

b) As coordenadas de $P + 2\vec{v} + \vec{u}$ são $(-1, 5) + 2 \times (-6, 7) + (3, -2) = (-1, 5) + (-12, 14) + (3, -2) = (-10, 17)$.

48.

Tem-se $B = A + \overrightarrow{AB}$ e, assim, as coordenadas de B são $(-3, -4) + (4, 6) = (1, 2)$.

O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$.

$M_{[AB]} \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-4+2}{2} \right)$, ou seja, $M_{[AB]}(-1, -1)$.

O raio da circunferência é a distância do centro a A (ou a B):

$$r = d(A, M) = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-1 - (-4))^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

A equação reduzida da circunferência é $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

49.

a) $(B - A) + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

b) $K + \frac{1}{3}(M - P) = K + \frac{1}{3}\overrightarrow{PM} = K + \overrightarrow{PO} = K + \overrightarrow{KJ} = J$

c) $I + 2(D - G) - \frac{1}{2}\overrightarrow{NP} = I + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{PO} = B + \overrightarrow{PO} = A$

50.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, logo, $B = C + \overrightarrow{AC}$.

Tem-se $\overrightarrow{AC} = C - A$; assim, as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(-2, 3) - (4, 1) = (-6, 2)$.

Portanto, as coordenadas de B são $(-2, 3) + (-6, 2) = (-8, 5)$.

51.

Tem-se $D = A + \overrightarrow{BC}$. Dado que $\overrightarrow{BC} = C - B$, as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são $(7, 6) - (5, 2) = (2, 4)$.

Portanto, as coordenadas de D são $(2, 1) + (2, 4) = (4, 5)$.

52.

Como conhecemos as coordenadas do ponto A e as coordenadas do ponto médio de $[AC]$, podemos determinar as coordenadas de C .

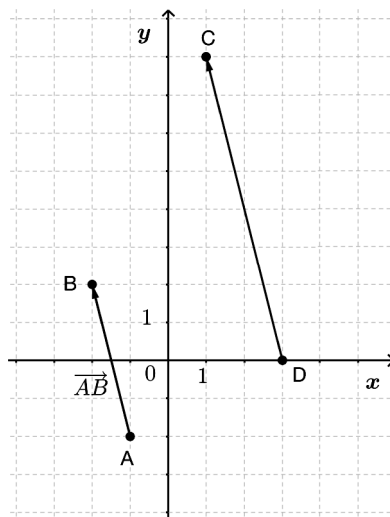
Seja M o ponto médio de $[AC]$. Tem-se $\overrightarrow{AM} = M - A$ e, portanto, $\overrightarrow{AM}(2, 3)$. Dado que $C = M + \overrightarrow{AM}$, as coordenadas de C são $(8, 1) + (2, 3) = (10, 4)$.

Por outro lado, sendo Q o ponto médio de $[BC]$, tem-se $Q = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

As coordenadas de Q são $(10, 4) + \frac{1}{2}(-10, 6) = (10, 4) + (-5, 3) = (5, 7)$.

53.

Representemos, num referencial o.n., os pontos A , B e D e a semirreta que contém $[DC]$.



Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são colineares. Determinemos as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e de $\overrightarrow{DC}$.

Dado que os vetores $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$ e $\overrightarrow{DC}(k - 3, 8)$ são colineares, tem-se $-1 \times 8 = 4(k - 3)$.

$$-1 \times 8 = 4 \times (k - 3) \Leftrightarrow -8 = 4k - 12 \Leftrightarrow -4k = -12 + 8 \Leftrightarrow -4k = -4 \Leftrightarrow k = 1$$

$\overrightarrow{AB} = B - A \searrow (-2, 2) - (-1, -2) = (-1, 4)$. De forma análoga, $\overrightarrow{DC} = C - D \searrow (k, 8) - (3, 0) = (k - 3, 8)$.

54.

a) $\overrightarrow{AB}$ é vetor diretor da reta. $\overrightarrow{AB} = B - A \searrow (0, 8) - (2, 3) = (-2, 5)$.

b) Sendo $\overrightarrow{AB}(-2, 5)$ vetor diretor da reta, o declive é $m = -\frac{5}{2}$ (os vetores têm 1.^a e 2.^a coordenada).

c) Tem-se $y = -\frac{5}{2}x + b$. Para determinar b (ordenada na origem), substitui-se x e y pelas coordenadas de um ponto da reta.

Considerando, por exemplo, o ponto $A(2, 3)$, tem-se: $3 = -\frac{5}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow -b = -5 - 3 \Leftrightarrow b = 8$.

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{5}{2}x + 8$.

55.

a) Como o declive é 5, então, um vetor diretor da reta é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, 5)$.

b) Se o vetor $\vec{v}(3, k)$ é vetor diretor da reta, então é colinear com o vetor de coordenadas $(1, 5)$.

Assim, $1 \times k = 5 \times 3 \Leftrightarrow k = 15$.

56.

Dado que $\vec{v}(5, 2)$ é vetor diretor, então o declive da reta é $m = \frac{2}{5}$ e a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{2}{5}x + b$.

Substituindo, na equação, x e y pelas coordenadas de A : $-4 = \frac{2}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow -b = -\frac{4}{5} + 4 \Leftrightarrow b = -\frac{16}{5}$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = \frac{2}{5}x - \frac{16}{5}$.

Os pontos de interseção com os eixos coordenados Oy e Ox são os pontos da reta de abscissa 0 e de ordenada 0, respetivamente.

Se $x = 0$, $y = \frac{2}{5} \times 0 - \frac{16}{5} = -\frac{16}{5}$. O ponto $P(0, -\frac{16}{5})$ é o ponto de interseção da reta com o eixo Oy .

Se $y = 0$, $0 = \frac{2}{5}x - \frac{16}{5} \Leftrightarrow -\frac{2x}{5} = -\frac{16}{5} \Leftrightarrow x = 8$. O ponto $Q(8, 0)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo Ox .

57.

Como as retas são paralelas, têm o mesmo declive: $m = -2$ e, então, a equação reduzida da reta s é da forma $y = -2x + b$.

Substituindo, na equação, x e y pelas coordenadas do ponto A : $-7 = -2 \times (-1) + b \Leftrightarrow -b = 2 + 7 \Leftrightarrow b = -9$, de onde resulta a equação reduzida $y = -2x - 9$.

58.

A reta de equação $x = -1$ é paralela ao eixo Oy , portanto, um seu vetor diretor é o vetor de coordenadas $(0, 1)$ que tem norma 1. Os vetores diretores desta reta com norma 4 são os vetores de coordenadas $4(0, 1) = (0, 4)$ e $-4(0, 1) = (0, -4)$.

59. A bissetriz dos quadrantes pares tem equação reduzida $y = -x$.

O declive da reta é $m = -1$; então, um vetor diretor desta reta é, por exemplo, $\vec{v}(1, -1)$.

60.

a) A reta r tem ordenada na origem igual a -7 ; então, a equação reduzida é da forma $y = mx - 7$.

Substituindo, na equação, x e y pelas coordenadas do ponto A :

$$-1 = m \times 3 - 7 \Leftrightarrow -3m = -7 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{6}{3} \Leftrightarrow m = 2.$$

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{d}(1, 2)$.

Como r e s são paralelas, quaisquer seus vetores diretores são colineares, então $1 \times 8 = 2 \times (k - 3)$.

Resolvendo a equação:

$$1 \times 8 = 2 \times (k - 3) \Leftrightarrow 8 = 2k - 6 \Leftrightarrow -2k = -6 - 8 \Leftrightarrow k = \frac{14}{2} \Leftrightarrow k = 7$$

b) r e s são paralelas e, portanto, a equação reduzida da reta s é da forma $y = 2x + b$.

Substituindo, na equação, x e y pelas coordenadas de $P(4, 0)$ (ponto de interseção com o eixo Ox):

$$0 = 2 \times 4 + b \Leftrightarrow -8 = b. \text{ Então, a equação reduzida de } s \text{ é } y = 2x - 8.$$

61.

a) $3x + y = 9 \Leftrightarrow y = -3x + 9$ e $y - 2x = 5 \Leftrightarrow y = 2x + 5$, logo, as retas não são paralelas, pois têm declives diferentes: $m_r = -3$ e $m_s = 2$.

b) $-8x + 2y = 24 \Leftrightarrow 2y = 8x + 24 \Leftrightarrow y = 4x + 12$ e, dado que s é definida por $y = 4x$, as retas são paralelas pois têm declives iguais: $m_r = m_s = 4$.

c) $x + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} + 2$ e $\frac{x}{3} = 2 - y \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} + 2$, logo, as retas são paralelas pois têm declives iguais: $m_r = m_s = -\frac{1}{3}$.

d) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = -\frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2$ e $2x - \frac{y}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{y}{5} = -2x + 1 \Leftrightarrow y = 10x - 5$, logo, as retas não são paralelas, pois têm declives diferentes: $m_r = -\frac{2}{3}$ e $m_s = 10$.

e) As retas $r: y = 1$ e $s: y = 2x$ não são paralelas, pois a reta r tem declive 0 e a reta s tem declive 2.

f) As retas $r: x = -2$ e $s: y = 1 - x$ não são paralelas, pois a reta r é paralela ao eixo Oy e a reta s não é paralela a nenhum dos eixos.

g) As retas $r: x = 4$ e $s: y = -3$ não são paralelas; as retas r e s são perpendiculares.

h) As retas $r: x + 1 = 0$ e $s: 6 = 4 - 5x$ são paralelas, pois ambas são paralelas ao eixo Oy ; tem-se $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ e $6 = 4 - 5x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

i) As retas $r: 5y - 3 = 0$ e $s: -\frac{y}{2} + 1 = 0$ são paralelas, pois são paralelas ao eixo Ox , ambas têm declive 0; $5y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$ e $-\frac{y}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

62.

a) Uma equação vetorial: $(x, y) = (-1, 4) + k(3, -2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) Os pontos $A(-1, 4)$ e $B(3, 5)$ determinam o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A \mid (3, 5) - (-1, 4) = (4, 1)$

Uma equação vetorial: $(x, y) = (-1, 4) + k(4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 4 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

c) A bissetriz dos quadrantes ímpares passa na origem $O(0, 0)$ e um seu vetor diretor é $\vec{v}(1, 1)$.

Uma equação vetorial: $(x, y) = (0, 0) + k(1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = k \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

d) Um vetor diretor é, por exemplo, $\vec{v}(-1, 1)$ e o ponto $P(0, 1)$ pertence à reta.

Uma equação vetorial: $(x, y) = (0, 1) + k(-1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

e) A reta é paralela ao eixo Ox . Um seu vetor diretor é, por exemplo, $\vec{v}(1, 0)$. Considerando, por exemplo, o ponto $P(0, 2)$, tem-se:

- uma equação vetorial: $(x, y) = (0, 2) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.
- um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

f) A reta é paralela ao eixo Oy . Um seu vetor diretor é, por exemplo, $\vec{v}(0, 1)$. A reta passa, por exemplo, na origem do referencial.

- uma equação vetorial: $(x, y) = (0, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.
- um sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

63.

Um vetor diretor da reta que contém a semirreta $\overrightarrow{MN}$ é, por exemplo,

$$\overrightarrow{MN} = N - M = (-3, 5) - (3, -1) = (-6, 6).$$

Uma condição que define a semirreta é $(x, y) = (3, -1) + k(-6, 6)$, $k \geq 0$.

64.

As coordenadas de B são $(5, 2)$. Um vetor diretor da reta que contém o segmento de reta $[AB]$ é, por exemplo, $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4)$.

Uma condição que define o segmento de reta é $(x, y) = (5, -2) + k(0, 4)$, $0 \leq k \leq 1$.

65.

a) Tem-se: $\vec{u}(2, 1)$, $A(3, 3)$ e $B(7, 5)$.

Uma equação vetorial da reta AB : $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

b₁) Observe-se que $B = A + 2\vec{u}$.

Uma condição que define o segmento de reta $[AB]$ é $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $0 \leq k \leq 2$.

b₂) Uma equação vetorial da semirreta $\overrightarrow{AB}$ é $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \geq 0$.

c) Já vimos que $B = A + 2\vec{u}$, portanto, $A = B - 2\vec{u}$, de onde se conclui $k = -2$.

66.

a) O ponto $P(-1, 3)$ pertence à circunferência se e só se as suas coordenadas satisfazem a equação $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$.

$$(-1)^2 + 3^2 + 8 \times (-1) - 2 \times 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 1 + 9 - 8 - 6 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Portanto, o ponto P pertence à circunferência.

b₁) b₂) b₃) Começemos por escrever a equação $x^2 + 8x + y^2 - 2y = -4$ na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
 Recorda que $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ e que $(y \pm b)^2 = y^2 \pm 2by + b^2$.

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + y^2 - 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = -4 + 16 + 1 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

Assim se conclui que a equação reduzida da circunferência é $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{13})^2$; então, o centro da circunferência é $C(-4, 1)$.

Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{PC} = C - P \searrow (-3, -2)$.

A equação reduzida da reta é da forma: $y = \frac{2}{3}x + b$.

Substituindo, na equação, x e y pelas coordenadas de P , obtém-se $b : 3 = \frac{2}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{11}{3}$. Então:

- a equação reduzida da reta r é: $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$;
- uma equação vetorial da reta r é: $(x, y) = (-1, 3) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}$;
- um sistema de equações paramétricas da reta r é: $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3 | Geometria analítica no espaço

Págs. 69 a 78

67.

a) b) c) $P(3, 3, 4)$, $Q(-2, -5, 3)$ e $R(4, 3, -2)$.

68.

a) As coordenadas dos pontos assinalados sobre o prisma são: $A(2, 3, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(2, 4, -1)$, $D(-1, 4, 1)$, $E(-2, 4, -2)$, $F(-2, -3, 2)$, $G(2, -4, 1)$, $H(2, -3, -1)$ e $I(0, 2, 2)$.

b₁) As coordenadas do simétrico de A relativamente ao plano xOy são $(2, 3, -2)$.

b₂) As coordenadas do simétrico de B relativamente ao plano xOz são $(2, -1, 0)$.

b₃) As coordenadas do simétrico de C relativamente ao plano yOz são $(-2, 4, -1)$.

b₄) As coordenadas do simétrico de H relativamente ao eixo Ox são $(2, 3, 1)$.

b₅) As coordenadas do simétrico de D relativamente ao eixo Oy são $(1, 4, -1)$.

b₆) As coordenadas do simétrico de F relativamente ao eixo Oz são $(2, 3, 2)$.

b₇) As coordenadas do simétrico de C relativamente à origem são $(-2, -4, 1)$.

69.

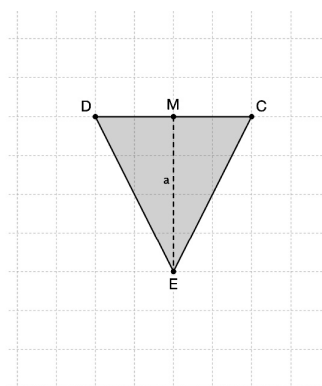
As coordenadas dos vértices do poliedro são: $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(2, 0, 2)$, $E(2, 2, 2)$, $F(0, 2, 2)$, $G(0, 0, 2)$, $P(1, 1, -2)$ e $Q(1, 1, 4)$.

70.

a) $A(0, 0, 4)$, $B(0, 4, 4)$, $C(4, 4, 4)$, $D(4, 0, 4)$, $E(2, 2, -2)$.

b) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$. $A_{\text{base}} = 16$ e altura = 6, então $V_{\text{pirâmide}} = \frac{16 \times 6}{3} = 32$ (u.c.).

c) As faces laterais são todas iguais e são triângulos isósceles, então, por exemplo, $\text{Área}_{[CDE]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{ME}}{2}$, sendo M o ponto médio de $[DC]$.



Tem-se $\overline{CD} = 4$, $M(4, 2, 4)$ e $\|\overrightarrow{ME}\| = \sqrt{(2-4)^2 + (2-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+0+36} = 2\sqrt{10}$.

Então, $\text{Área}_{[CDE]} = \frac{4 \times 2\sqrt{10}}{2} = 4\sqrt{10}$ (u.a.).

71.

- a) O plano yOz é paralelo ao plano α de equação $x = 5$.
- b) O plano xOz é paralelo ao plano β de equação $y = -1$.
- c) O plano xOz é paralelo ao plano γ de equação $z = -6$.

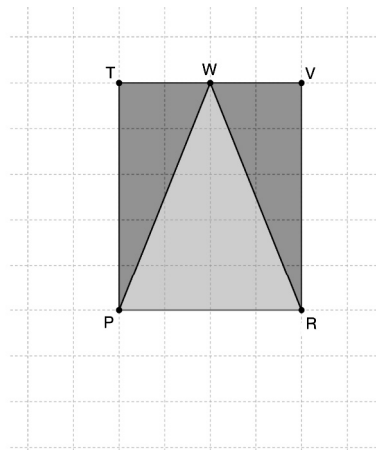
72.

- a) O plano paralelo ao plano xOz e que passa no ponto P é o plano de equação $y = 4$.
- b) O plano paralelo ao plano xOy e que passa no ponto P é o plano de equação $z = 2$.
- c) O plano paralelo ao plano yOz e que passa no ponto P é o plano de equação $x = -3$.

73.

- a) $P(2, 0, 0)$, $Q(2, 2, 0)$, $R(0, 2, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $S(0, 0, 4)$, $T(2, 0, 4)$ e $V(0, 2, 4)$.
- b) O plano PQU é paralelo ao plano yOz . Uma equação do plano PQU é $x = 2$.
- c) O plano TUV é paralelo ao plano xOy . Uma equação do plano TUV é $z = 4$.
- d) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$. $A_{\text{base}} = 4$ e altura = 4, então $V_{\text{pirâmide}} = \frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3}$ (u.v.).
- e) A secção produzida no prisma pelo plano PTV é o retângulo $[PRVT]$ e a secção produzida na pirâmide pelo plano PTV é o triângulo $[PWR]$.

Pretende-se calcular a área da região representada a sombreado mais escuro.



$\text{Área}_{[TWP]} = \frac{\overline{PT} \times \overline{TW}}{2}$. Tem-se $\overline{PT} = 4$ e $\overline{TW} = \frac{\overline{TV}}{2}$. Ora $[TV]$ é a diagonal de um quadrado de lado 2 e, portanto, $\overline{TV} = 2\sqrt{2}$. Então, $\overline{TW} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$\text{Área}_{[TWP]} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Os triângulos $[TWP]$ e $[VWR]$ são geometricamente iguais; logo, a área pedida é $4\sqrt{2}$ (u.a.).

74.

a₁) O eixo paralelo à reta definida pela condição $x = 0 \wedge y = 2$ é o eixo Oz .

a₂) O eixo paralelo à reta definida pela condição $x = 1 \wedge z = 4$ é o eixo Oy .

a₃) O eixo paralelo à reta definida pela condição $2y - 1 = 7 \wedge \frac{z}{6} + 2 = \frac{1}{3}$ é o eixo Ox , pois

$$2y - 1 = 7 \wedge \frac{z}{6} + 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = 4 \wedge z = -10$$

b) Seja P um ponto da reta definida por: $2y - 1 = 7 \wedge \frac{z}{6} + 2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{Já vimos que: } 2y = 7 + 1 \wedge \frac{z}{6} + \frac{12}{6} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow y = 4 \wedge z = -10.$$

As coordenadas de P são do tipo $(x, 4, -10)$, $x \in \mathbb{R}$; então, um ponto da reta é $P(0, 4, -10)$.

75.

a₁) A reta PQ é paralela ao eixo Oz , pois os pontos P e Q têm abscissas e ordenadas iguais.

a₂) A reta PR é paralela ao eixo Ox , pois os pontos P e R têm ordenadas e cotas iguais.

a₃) A reta PS é paralela ao eixo Oy , pois os pontos P e S têm abscissas e cotas iguais.

b₁) Já observámos que a reta PQ é paralela ao eixo Oz ; uma condição que a define é $x = 2 \wedge y = 4$.

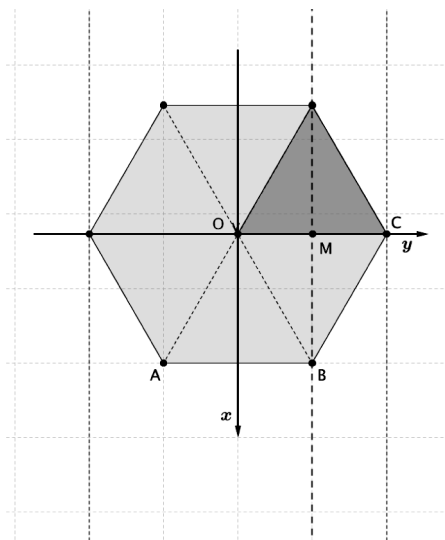
b₂) Já observámos que a reta PR é paralela ao eixo Ox ; uma condição que a define é $y = 4 \wedge z = 6$.

b₃) Já observámos que a reta PS é paralela ao eixo Oy ; uma condição que a define é $x = 2 \wedge z = 6$.

76.

Na figura seguinte está desenhada a base do prisma «vista de cima». Atendendo a que é um hexágono regular, o triângulo $[OBC]$ é equilátero. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow \overline{MB}^2 = 12 \Leftrightarrow \overline{MB} = 2\sqrt{3}$$



a) O ponto B tem coordenadas $(2\sqrt{3}, 2, 0)$, o ponto F tem coordenadas $(2\sqrt{3}, 2, 12)$ e o ponto G , que é simétrico de F em relação ao plano yOz , é o ponto de coordenadas $(-2\sqrt{3}, 2, 12)$.

b) Tem-se $B(2\sqrt{3}, 2, 0)$ e $F(2\sqrt{3}, 2, 12)$; portanto, a reta BF é definida por $x = 2\sqrt{3} \wedge y = 2$.

c) Tem-se $A(2\sqrt{3}, -2, 0)$ e $B(2\sqrt{3}, 2, 0)$; portanto, a reta AB é definida por $x = 2\sqrt{3} \wedge z = 0$.

d) $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$. Observe-se que a área da base do prisma pode ser determinada calculando a área de um dos triângulos equiláteros em que se decompõe o hexágono regular e multiplicar essa área por 6.

$$Á_{\text{triângulo}} = \frac{\overline{OC} \times \overline{BM}}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ e, portanto, } V_{\text{prisma}} = 6 \times 4\sqrt{3} \times 12 = 288\sqrt{3} \text{ (u.v.)}.$$

77.

a) $d(A, B) = \sqrt{(-1-3)^2 + (8-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$

b) $d(B, C) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-4-8)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{16 + 144 + 36} = \sqrt{196} = 14$

c) $d(A, D) = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16 + 0 + 9} = \sqrt{25} = 5$

d) $d(C, E) = \sqrt{(1-3)^2 + (6-(-4))^2 + (-7-4)^2} = \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$

e) $d(B, F) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (6-8)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

78.

a) $V_{\text{cubo}} = (d(A, D))^3$ e $d(A, D) = \sqrt{(-3-3)^2 + (3-5)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$.

Assim: $V_{\text{cubo}} = 7^3 = 343$ (unidades de volume).

b) Uma equação do plano que passa por $A(3, 5, 3)$ e é paralelo ao plano xOz é $y = 5$.

c) Uma condição que define a reta que passa por $D(-3, 3, 6)$ e é perpendicular ao plano yOz é $y = 3 \wedge z = 6$.

Repara que se trata de uma reta paralela a Ox .

79.

a) O plano PQT é paralelo ao plano yOz ; uma equação do plano PQT é $x = 5$.

b) A reta RU é paralela ao eixo Oz ; uma condição que define a reta RU é $x = 0 \wedge y = 5$.

c1) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$, então $75 = \frac{25 \times a}{3} \Leftrightarrow a = \frac{75 \times 3}{25} = 9$ (unidades de comprimento).

A altura da pirâmide é a cota de W e a projeção de W sobre o plano xOy é o centro da base.

Portanto, $W\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$.

c2) $d(P, W) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-5\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-0\right)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 81} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{324}{4}} = \sqrt{\frac{374}{4}} = \sqrt{\frac{187}{2}}$

80.

a) Observe-se que o segmento de reta $[AB]$ está contido no eixo Ox e que o seu ponto médio é a origem do referencial. Assim, o plano mediador do segmento $[AB]$ é o plano yOz , ou seja, é o plano de equação $x = 0$.

b) O plano mediador do segmento de reta $[CD]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $d(C, P) = d(D, P)$.

$$d(C, P) = d(D, P) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x = -6y \Leftrightarrow x = y$$

O plano mediador do segmento de reta $[CD]$ é o plano de equação $x = y$.

c) O plano mediador do segmento de reta $[EF]$ é definido pela equação $d(E, P) = d(F, P)$ em que $P(x, y, z)$ é um ponto do plano mediador.

$$d(E, P) = d(F, P) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-6)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 8z + 16} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12z + 36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12z + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4x - 2y - 8z + 12z + 16 + 9 + 1 - 4 - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - 2y + 4z - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - y + 2z - 7 = 0$$

O plano mediador é o plano de equação $5x - y + 2z - 7 = 0$.

d) O plano mediador do segmento de reta $[GH]$ é definido pela equação $d(G, P) = d(H, P)$.

$$d(G, P) = d(H, P) \Leftrightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 6x + 4y + 2y - 8z + 4z + 36 + 4 + 16 - 9 - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6y - 4z + 42 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2z + 21 = 0$$

O plano mediador é o plano de equação $3x + 3y - 2z + 21 = 0$.

81.

a) $R(3, 3, -1)$ pertence ao plano α se e só se as suas coordenadas satisfazem a equação $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

$$3 - 2 \times 3 + 3 \times (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow 3 - 6 - 3 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ logo } R \text{ pertence ao plano } \alpha.$$

b) Como R pertence ao plano mediador, então $\overline{QR} = \overline{PR}$. Determinemos, então, $\overline{PR}$.

$$\overline{PR} = d(P, R) = \sqrt{(3-5)^2 + (3-9)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7, \text{ então, } d(R, Q) = 7.$$

82.

a) Tem-se que a altura da pirâmide é 7 e a base da pirâmide é um quadrado de lado 8. Então:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{8 \times 8 \times 7}{3} = \frac{448}{3} \text{ (u.v.)}$$

b) Seguindo a sugestão do problema, observe-se que o plano VDB é plano mediador do segmento $[AC]$. Dado que $A(8, 8, 7)$ e $C(0, 0, 7)$, então o plano mediador será definido por:

$$\begin{aligned} d(A, P) = d(C, P) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-7)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + y^2 + z^2 - 14z + 49 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -16x + 64 - 16y + 64 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x - y + 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 8 = 0 \end{aligned}$$

Uma equação do plano é $x + y - 8 = 0$.

c) O plano ABD é paralelo ao plano xOy e passa no ponto $C(0, 0, 7)$; assim, é definido pela equação $z = 7$.

d) Como $A(8, 8, 7)$ e $B(0, 8, 7)$, a reta AB é paralela ao eixo Ox ; é definida pela condição $y = 8 \wedge z = 7$.

e) Como $V(4, 4, 0)$ e $E(4, 4, 7)$, a reta VE é paralela ao eixo Oz ; é definida pela condição $x = 4 \wedge y = 4$.

f) Como $A(8, 8, 7)$, então o simétrico A' , relativamente ao plano yOz , tem coordenadas $(-8, 8, 7)$.

83.

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

b) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$

c) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

e) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

84.

a) $C(5, -4, 1)$ é o centro da superfície esférica e $r^2 = 36 \Leftrightarrow r = \sqrt{36} \Leftrightarrow r = 6$.

b) $C(-1, 7, -3)$ é o centro da superfície esférica e $r^2 = 12 \Leftrightarrow r = \sqrt{12} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3}$.

c) $C(0, -3, 0)$ é o centro da superfície esférica e $r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \sqrt{1} \Leftrightarrow r = 1$.

d) $C(0, 0, 0)$ é o centro da superfície esférica e $r^2 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt{5}$.

e) Vamos escrever a equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$:

Acrescentam-se, à equação inicial, os termos em falta para completar os quadrados dos binômios, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 22 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 22 + 1 + 4 + 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36 \end{aligned}$$

Então, a equação reduzida da superfície esférica é: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6^2$, logo $C(1, 2, 3)$ e $r = 6$.

f) Vamos escrever a equação na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$:

Acrescentam-se, à equação inicial, os termos em falta para completar os quadrados dos binómios, do seguinte modo:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 8z = 40 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 8z + 16 = 40 + 25 + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + (y + 5)^2 + (z - 4)^2 = 81$$

Então, a equação reduzida da superfície esférica é: $x^2 + (y + 5)^2 + (z - 4)^2 = 9^2$, logo $C(0, -5, 4)$ e $r = 9$.

85.

A superfície esférica com centro em $A(3, 4, 1)$ é: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = r^2$.

O raio da superfície esférica é $\overline{AB}$.

$$r = \overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (-2 - 4)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{36 + 36 + 4} = \sqrt{76}$$

Então, a equação reduzida da superfície esférica de centro em A e que passa em B é:

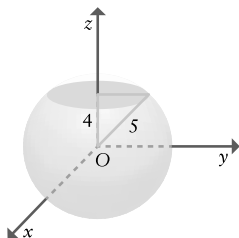
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 76$$

86.

O círculo que é a interseção da esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ com o plano de equação $z = 4$ é definido por $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \\ z = 4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4^2 \leq 25 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 - 16 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

Então, o círculo tem raio 3 e a área pretendida é a de um círculo de raio $r = 3$; logo, $A = 9\pi$ (unidades de área).



87.

a) O ponto H tem abcissa igual à abcissa de A e tem cota 0, ou seja, $H(1, y, 0)$.

A ordenada de H é igual à ordenada de G . Ora G é o ponto da superfície esférica que pertence ao eixo Oy . Então, a ordenada de G é a solução negativa da equação $(0 - 1)^2 + (y - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 11$.

$$1 + (y - 1)^2 + 1 = 11 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 3 \vee y - 1 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -2$$

A ordenada de G é -2 e as coordenadas de H são $(1, -2, 0)$.

b) Tem-se $\overline{GF} = 3$, $\overline{EF} = 1$, $\overline{BF} = 1$.

O volume do paralelepípedo é $3 \times 1 \times 1 = 3$.

A área da base da pirâmide é $3 \times 1 = 3$ e a altura da pirâmide é $c - 1$.

O volume da pirâmide é: $\frac{1}{3} \times 3 \times (c - 1) = c - 1$.

O volume do sólido é, portanto, igual a: $3 + c - 1 = 2 + c$.

88.

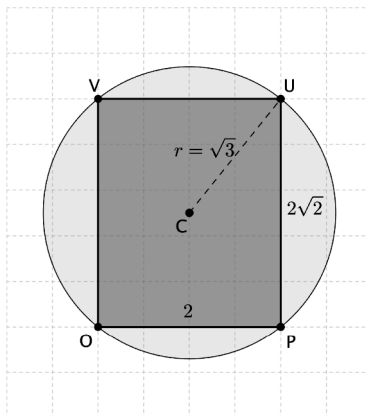
a) $R(2, 0, 0)$, então a aresta do cubo tem comprimento 2 (unidade de comprimento). Assim, $Q(2, 2, 0)$ e $U(2, 2, 2)$. A reta UQ é paralela ao eixo Oz ; é definida pela condição $x = 2 \wedge y = 2$.

b) A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo tem centro no centro do cubo, ou seja, no ponto $C(1, 1, 1)$.

O raio é metade da diagonal espacial do cubo. Então, $r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Assim, a equação da superfície esférica é: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

c) Na figura estão representadas as secções produzidas no cubo e na superfície esférica pelo plano PUV : uma circunferência e um retângulo inscrito na circunferência.



O raio da circunferência é igual ao raio da superfície esférica, pois o plano PUV passa no centro da superfície esférica.

Quanto ao retângulo, $\overline{VU} = 2$, pois $[VU]$ é uma aresta do cubo e $\overline{UP} = 2\sqrt{2}$, pois $[UP]$ é uma diagonal facial do cubo.

A área pretendida é: $\text{Área}_{\text{círculo}} - \text{Área}_{\text{retângulo}} = \pi(\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} = 3\pi - 4\sqrt{2}$ (u.a.).

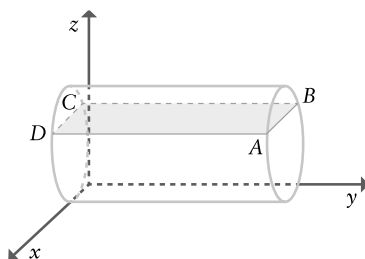
89.

a) A reta que passa pelos centros das esferas é perpendicular ao plano xOz . Sejam C_1 e C_2 os centros das duas esferas, então $C_1(3, 3, 3)$ e $C_2(3, 9, 3)$, logo, uma condição que define a reta que passa nesses pontos é $x = 3 \wedge z = 3$.

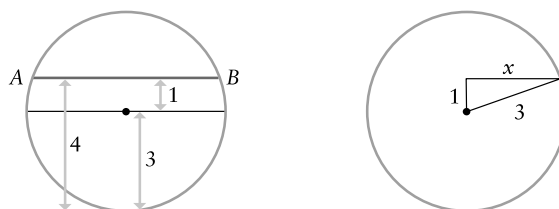
b) A esfera mais afastada do xOz , tem centro no ponto $C_2(3, 9, 3)$ e raio $r = 3$. Assim, a condição que a define é $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 + (z - 3)^2 \leq 9$.

c) $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$, $A_{\text{base}} = \pi \times 3^2 = 9\pi$ e $\text{altura} = 4 \times 3 = 12$, logo, $V_{\text{cilindro}} = 9\pi \times 12 = 108\pi$ (unidades de volume).

d) A interseção do plano de equação $z = 4$ com a caixa cilíndrica é o retângulo $[ABCD]$, representado na figura.



As duas figuras seguintes são dois esquemas da base do cilindro que contém o lado $[AB]$ do referido retângulo. Na segunda destas figuras, designou-se por x metade do comprimento de $[AB]$.



Do teorema de Pitágoras, resulta que $x^2 + 1^2 = 3^2$, ou seja, $x = \sqrt{8}$.

Portanto, $\overline{AB} = 2\sqrt{8}$. Tem-se, por outro lado, que $\overline{BC} = 12$.

O perímetro da secção é, portanto, $2 \times 2\sqrt{8} + 2 \times 12 = 24 + 4\sqrt{8}$ (cm)

90.

a) Seguindo a sugestão do exercício, observe-se que o plano RVT é plano medidor do segmento de reta $[OQ]$. Seja $W(x, y, z)$ um ponto do plano medidor do segmento $[OQ]$, com $O(0, 0, 0)$ e $Q(2, 2, 0)$, então $d(O, W) = d(Q, W)$.

$$\begin{aligned} d(O, W) = d(Q, W) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow 0 = -4x + 4 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

O plano RVT é definido pela equação $x + y - 2 = 0$.

b) O ponto $A(-3, 4, 7)$ pertence ao plano RVT se as suas coordenadas verificarem a equação $x + y - 2 = 0$:

$$-3 + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$$

Portanto, o ponto A não pertence ao plano.

c) Tem-se $P(0, 2, 0)$ e $Q(2, 2, 0)$; a reta PQ é paralela ao eixo Ox e é definida pela condição $y = 2 \wedge z = 0$.

d) O centro dessa esfera é o centro do cubo, ou seja, o ponto $C(1, 1, 1)$ e o raio da esfera é 1.

Assim, uma condição que a define é $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1$.

e) O espaço exterior à esfera corresponde ao contrário da condição definida na alínea anterior; logo, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 > 1$.

Os pontos do cubo são os pontos de abscissa, ordenada e cota entre 0 e 2.

Uma condição que define a região indicada é:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 > 1 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

91.

a) O plano mediador do segmento $[AB]$ é definido pela equação $d(A, P) = d(B, P)$, com $P(x, y, z)$.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10y + 25 - 4z + 4 = -6x + 9 - 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 10y - 2z = 9 + 1 - 4 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 10y - 2z = -19$$

O plano mediador do segmento $[AB]$ é definido pela equação $6x - 10y - 2z = -19$.

b) $C(4, 2, 0)$ pertence ao plano mediador do segmento $[AB]$ se e só se as suas coordenadas verificarem a equação do plano.

$6 \times 4 - 10 \times 2 - 2 \times 0 = -19 \Leftrightarrow 24 - 20 = -19 \Leftrightarrow 4 = -19$. Dado que $4 = -19$ é uma proposição falsa, o ponto C não pertence ao plano mediador do segmento $[AB]$.

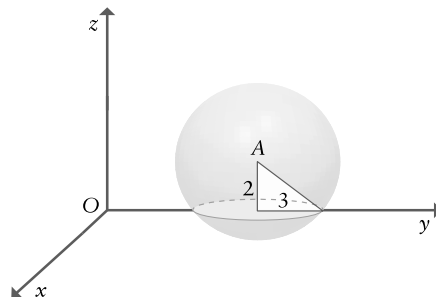
c) Dado que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , $\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$.

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{29} \times \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{174}}{2} \text{ (u.a.)}$$

d) O raio da superfície esférica pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras.



Tem-se que $r^2 = 2^2 + 3^2$, donde vem $r = \sqrt{13}$.

Portanto, uma equação da superfície esférica é $x^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 13$.

Capítulo 4 | Cálculo vetorial no espaço

Págs. 79 a 84

92.

a₁) Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{BF}$.

a₂) Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{FB}$.

a₃) Por exemplo, $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BH}$.

a₄) Por exemplo, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AG}$.

b₁) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

b₂) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b₃) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EB}$

b₄) $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH}$

b₅) $C + \overrightarrow{CD} = D$

b₆) $B + \overrightarrow{CH} = B + \overrightarrow{BE} = E$

b₇) $H + (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DA}) = H + (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GF}) = H + \vec{0} = H$

b₈) $E - F = \overrightarrow{FE}$

b₉) $D + (F - H) = D + \overrightarrow{HF} = D + \overrightarrow{DB} = B$

b₁₀) $B + 2\overrightarrow{AD} + (E - G) = B + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GE} = B + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GE} = B + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE} = C + \overrightarrow{FE} = C + \overrightarrow{CD} = D$

93.

a₁) $-\vec{u}(-2, -1, 2)$

a₂) $\overrightarrow{OP}(6, -7, 10)$. Então, $\overrightarrow{OP} + \vec{u} \searrow (6, -7, 10) + (2, 1, -2) = (8, -6, 8)$

a₃) $\vec{u} - \vec{v} \searrow (2, 1, -2) - (-6, -3, 6) = (2, 1, -2) + (6, 3, -6) = (8, 4, -8)$

a₄) $3\vec{u} + 2\vec{v} \searrow 3 \times (2, 1, -2) + 2 \times (-6, -3, 6) = (6, 3, -6) + (-12, -6, 12) = (-6, -3, 6)$

a₅) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} - \vec{u}) \searrow \frac{1}{4}((6, -7, 10) - (2, 1, -2)) = \frac{1}{4}(4, -8, 12) = (1, -2, 3)$

b) $r = \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$ e, assim, a superfície esférica é definida pela equação $(x - 6)^2 + (y + 7)^2 + (z - 10)^2 = 9$.

c) Os vetores $\vec{u}(2, 1, -2)$ e $\vec{v}(-6, -3, 6)$ são colineares se e só se

$$\begin{aligned} 2 \times (-3) &= 1 \times (-6) \wedge 2 \times 6 = -2 \times (-6) \wedge 1 \times 6 = -2 \times (-3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6 = -6 \wedge 12 = 12 \wedge 6 = 6 \end{aligned}$$

Então, os vetores são colineares.

94.

a) Os vetores são colineares se e só se

$$\frac{8}{-2} = \frac{-12}{3} = \frac{16}{-4} \Leftrightarrow -4 = -4 = -4$$

Os vetores são colineares; tem-se $\vec{v} = -4\vec{u}$.

b) Os vetores são colineares se e só se $\frac{8}{4} = \frac{-6}{3} = \frac{4}{-1}$, ou seja, se e só se ,

$$8 \times (-3) = -6 \times 4 \wedge 8 \times (-1) = 4 \times 4 \wedge -6 \times (-1) = 4 \times (-3) \\ -24 = -24 \wedge -8 = 16 \wedge 6 = -12$$

Os vetores não são colineares.

c) Os vetores são colineares se e só se

$$-5 \times 3 = 5 \times (-3) \wedge -5 \times (-3) = -5 \times (-3) \wedge 5 \times (-3) = -5 \times 3 \\ -15 = -15 \wedge 15 = 15 \wedge 15 = 15$$

Os vetores são colineares, tem-se $\vec{u} = \frac{5}{3}\vec{v}$.

d) Observemos, por exemplo, que $\frac{6}{3} \neq \frac{-1}{-2}$.

Portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

e) Os vetores não são colineares, pois, por exemplo, a segunda coordenada de $\vec{u}$ é 0 e a segunda coordenada de $\vec{v}$ é diferente de 0.

f) Tem-se:

$$0 \times (-2) = 4 \times 0 \wedge 0 \times (-5) = 10 \times 0 \wedge 4 \times (-5) = 10 \times (-2) \\ 0 = 0 \wedge 0 = 0 \wedge -20 = -20$$

Os vetores são colineares; $\vec{u} = -2\vec{v}$.

g) Os vetores não são colineares: a segunda coordenada de $\vec{u}$ é 0 e a segunda coordenada de $\vec{v}$ é diferente de 0.

h) Os vetores são colineares: $\vec{u} = -5\vec{v}$.

95.

$\vec{v}$ é colinear a $\vec{u}$ mas com sentido contrário. Então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : (v_1, v_2, v_3) = \lambda(-2, 6, -3) = (-2\lambda, 6\lambda, -3\lambda)$.

$$\|\vec{v}\| = 21 \Leftrightarrow \sqrt{(-2\lambda)^2 + (6\lambda)^2 + (-3\lambda)^2} = 21 \Leftrightarrow \sqrt{49\lambda^2} = 21 \Leftrightarrow 7|\lambda| = 21 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ (pois } \lambda \in \mathbb{R}^+)$$

As coordenadas de $\vec{v}$ são $(-6, 18, -9)$.

96.

a) $A + \vec{u} \mid (-3, 1, 6) + (6, 2, 4) = (3, 3, 10)$

b) $B + 3\vec{u} \mid (7, -4, 9) + 3(6, 2, 4) = (7, -4, 9) + (18, 6, 12) = (25, 2, 21)$

c) $A - \vec{u} \mid (-3, 1, 6) - (6, 2, 4) = (-3, 1, 6) + (-6, -2, -4) = (-9, -1, 2)$

d) $B - \frac{1}{2}\vec{u} \mid (7, -4, 9) - \frac{1}{2}(6, 2, 4) = (7, -4, 9) + (-3, -1, -2) = (4, -5, 7)$

97.

$$P + \vec{u} = Q \Leftrightarrow \vec{u} = Q - P$$

$$(-5, 2, c - 10) = (-3, b, -2) - (a, -7, 8) \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -3 - a \\ 2 = b + 7 \\ c - 10 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 + 5 \\ b = -7 + 2 \\ c = -10 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}$$

Os valores de a , b e c são 2, -5 e 0, respectivamente.

98.

P pertence à superfície esférica de centro em C e raio igual a $\|\vec{v}\|$ se e só se $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$;

ora $P = C + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \vec{v}$ e, portanto, $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$.

99.

Começemos por determinar a área da base do cone para, em seguida, determinar a altura ($\overrightarrow{CV}$).

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(-5 + 3)^2 + (4 - 3)^2 + (7 - 7)^2} = \sqrt{5}$$

A área da base do cone é $\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$ e, como o volume do cone é 20π , tem-se:

$$20\pi = \frac{1}{3} \times 5\pi \times h \Leftrightarrow h = 12$$

Então, $\|\overrightarrow{CV}\| = 12$ e $\overrightarrow{CV} = \lambda \vec{u}$, com $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

$$\overrightarrow{CV}(\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$$

$$\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = 12 \Leftrightarrow 9\lambda^2 = 144 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{144}{9}} \Leftrightarrow \lambda = \pm 4$$

Como $\lambda \in \mathbb{R}^+$, conclui-se que $\lambda = 4$.

Dado que $V = C + \overrightarrow{CV} = C + 4\vec{u}$, as coordenadas de V são

$$(-5, 4, 7) + 4(1, 2, 2) = (-5, 4, 7) + (4, 8, 8) = (-1, 12, 15).$$

100.

$$\text{a)} B - A = (5, -8, 3) - (2, 1, 0) = (3, -9, 3)$$

$$\text{b)} A - C = (2, 1, 0) - (7, -4, 9) = (-5, 5, -9)$$

$$\text{c)} C - B = (7, -4, 9) - (5, -8, 3) = (2, 4, 6)$$

$$\text{d)} \frac{2}{3}(A - B) = \frac{2}{3}((2, 1, 0) - (5, -8, 3)) = \frac{2}{3}(-3, 9, -3) = (-2, 6, -2)$$

101.

$$\text{a)} d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 3)^2 + (-1 - (-5))^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$$

$$\text{b)} \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 4, -1) - (-1, 3, -5) = (3, 1, 4) \text{ e } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$$

102.

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (2, 4, 6) = \lambda(8k^3, -2, -3) \Leftrightarrow (2, 4, 6) = (8\lambda k^3, -2\lambda, -3\lambda)$$

De onde resulta o sistema de equações,

$$\begin{cases} 2 = 8\lambda k^3 \\ 4 = -2\lambda \\ 6 = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^3 = -\frac{2}{8\lambda} \\ \lambda = -\frac{4}{2} \\ \lambda = -\frac{6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^3 = -\frac{1}{8} \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Conclui-se que $k = -\frac{1}{2}$.

103.

a) $A(4, 1, 3)$ pertence à superfície esférica se e só se as suas coordenadas satisfazem a equação que define a superfície esférica.

$$(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + 3^2 = 14 \Leftrightarrow 1 + 4 + 9 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14, \text{ então o ponto pertence à superfície esférica.}$$

b) Tem-se $B = C + \overrightarrow{AC}$, sendo $C(3, -1, 0)$ o centro da superfície esférica.

$$\overrightarrow{AC} = C - A \searrow (3, -1, 0) - (4, 1, 3) = (-1, -2, -3).$$

Então, as coordenadas de B são $(3, -1, 0) + (-1, -2, -3) = (2, -3, -3)$.

104.

$$\mathbf{a)} H = G + \overrightarrow{BA} \searrow (6, 9, 15) + ((11, -1, 2) - (8, 5, 0)) = (6, 9, 15) + (3, -6, 2) = (9, 3, 17)$$

b) A superfície esférica com centro A e que contém B tem equação: $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = r^2$,

$$\text{onde } r = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7. \text{ Logo:}$$

$$(x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$$

c) Uma condição que define a reta é $x = 6 \wedge z = 15$.

105.

$$\mathbf{a)} \text{ Tem-se } M_{[AB]} \searrow \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{12-4}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{16}{2}\right) = (-2, 4, 8).$$

$$\mathbf{b)} \text{ Tem-se } C = A + \vec{v}, \text{ logo } C \searrow (-5, 12, 7) + (1, 8, -5) = (-4, 20, 2).$$

$$M \text{ é ponto médio de } [BC], \text{ então as coordenadas de } M \text{ são } \left(\frac{1-4}{2}, \frac{-4+20}{2}, \frac{9+2}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{16}{2}, \frac{11}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 8, \frac{11}{2}\right).$$

$$\text{Como } \overrightarrow{AM} = M - A, \text{ então } \overrightarrow{AM} \searrow \left(-\frac{3}{2}, 8, \frac{11}{2}\right) - (-5, 12, 7) = \left(\frac{7}{2}, -4, -\frac{3}{2}\right).$$

106.

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AB]$.

$$M_{[AB]} = \left(\frac{6+8}{2}, \frac{-2+8}{2}, \frac{9-1}{2} \right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2} \right) = (7, 3, 4)$$

O raio da superfície esférica é $r = d(A, M) = \sqrt{(7-6)^2 + (3+2)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{1+25+25} = \sqrt{51}$.

Uma equação da superfície esférica é $(x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 51$.

107.

a) Uma equação vetorial da reta: $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(2, -3, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 5) - (1, 4, 3) = (-2, -2, 2)$

Uma equação vetorial da reta: $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(-2, -2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

c) A reta é paralela ao eixo Oz e, portanto, um vetor diretor é $\vec{r}(0, 0, 1)$.

Uma equação vetorial da reta: $(x, y, z) = (3, 2, 0) + \lambda(0, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

d) A reta é paralela ao eixo Oy e, portanto, um seu vetor diretor é $\vec{s}(0, 1, 0)$.

Por exemplo, $P(1, 0, 4)$ é um ponto da reta.

Uma equação vetorial da reta: $(x, y, z) = (1, 0, 4) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

e) A reta é paralela ao eixo Ox e, portanto, um seu vetor diretor é $\vec{z}(1, 0, 0)$.

Uma equação vetorial da reta: $(x, y, z) = (0, 5, -1) + \lambda(1, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

108.

Tem-se $P(0, 5, 4)$ e $Q(3, 5, 0)$.

$\overrightarrow{PQ}$ é vetor diretor da reta e $\overrightarrow{PQ} = Q - P_{\curvearrowright} (3, 5, 0) - (0, 5, 4) = (3, 0, -4)$.

Uma equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (0, 5, 4) + \lambda(3, 0, -4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

109.

a) Tem-se $S(0, 0, 2)$ e $Q(2, 4, 0)$.

$\overrightarrow{QS}$ é vetor diretor da reta e $\overrightarrow{QS} = S - Q_{\curvearrowright} (0, 0, 2) - (2, 4, 0) = (-2, -4, 2)$.

Uma equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(-2, -4, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Tem-se $P(2, 0, 0)$ e $R(0, 4, 0)$.

$\overrightarrow{PR}$ é um vetor diretor da reta e $\overrightarrow{PR} = R - P_{\curvearrowright} (0, 4, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 4, 0)$.

Um sistema de equações paramétricas é:

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Tem-se $R(0, 4, 0)$ e $T(2, 0, 2)$.

$\overrightarrow{RT}$ é um vetor diretor da reta e $\overrightarrow{RT} = T - R_{\curvearrowright} (2, 0, 2) - (0, 4, 0) = (2, -4, 2)$.

Uma equação vetorial da reta RT é $(x, y, z) = (0, 4, 0) + \lambda(2, -4, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

As coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano de equação $x = 10$, obtêm-se determinando os valores de y e z que satisfazem a condição $(10, y, z) = (0, 4, 0) + \lambda(2, -4, 2)$.

$$(10, y, z) = (0, 4, 0) + \lambda(2, -4, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 2\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ y = 4 - 4 \times 5 \\ z = 2 \times 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ y = -16 \\ z = 10 \end{cases}$$

O ponto de interseção é $I(10, -16, 10)$.

d) A reta r é paralela ao eixo Oz , pois um vetor diretor da reta é $\vec{r}(0, 0, 1)$.

O ponto de coordenadas $(2, 0, 2)$ é o vértice T do paralelepípedo.

Então, a reta r é a reta TP que intersesta o plano OUV no ponto P .

110.

a) $P(-2, 7, 18)$ pertence a s se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-2, 7, 18) = (1, -2, 3) + k(-1, 3, 5)$$

$$(-2, 7, 18) = (1, -2, 3) + k(-1, 3, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 1 - k \\ 7 = -2 + 3k \\ 18 = 3 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = 3$$

Portanto, $P \in s$, pois $P = (-1, 2, 3) + 3(-1, 3, 5)$.

b) Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A_{\curvearrowright} (2, -4, -9) - (0, 2, 1) = (2, -6, -10)$.

Portanto, as retas são paralelas se e só se os vetores $\overrightarrow{AB}(2, -6, -10)$ e $\vec{s}(-1, 3, 5)$ são colineares. Dado que $\overrightarrow{AB} = -2,5 \vec{s}$, conclui-se que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{s}$ são colineares e, portanto, as retas s e AB são paralelas.

111.

a) A área total do prisma corresponde à soma das áreas das bases (quadrados de lado 4) com as áreas da superfície lateral (quatro retângulos com comprimento 10 e largura 4).

$\text{Área}_{\text{base}} = 16$ e $\text{Área}_{\text{face lateral}} = 40$, então $\text{Área}_{\text{prisma}} = 2 \times 16 + 4 \times 40 = 32 + 160 = 192$ (unidades de área).

b) Tem-se $P(4, 0, 0)$ e $B(2, 4, 10)$ (B é ponto médio da aresta $[UV]$).

$\overrightarrow{PB}$ é vetor diretor da reta PB e $\overrightarrow{PB} = B - P \mid (2, 4, 10) - (4, 0, 0) = (-2, 4, 10)$.

Um sistema de equações paramétricas é:

$$\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 10\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

c) O plano PTU é paralelo ao plano yOz . Assim uma equação deste plano é $x = 4$.

d) O ponto U tem, como simétrico relativamente ao plano yOz , o ponto $U'(-4, 4, 10)$.

e) Tem-se $C(2, 2, 5)$. O simétrico de C relativamente ao eixo Ox é o ponto $C'(2, -2, -5)$.

f) A é o ponto médio da aresta $[TS]$, logo, $A(2, 0, 10)$.

As coordenadas do ponto médio do segmento $[AC]$ são $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{10+5}{2}\right) = \left(2, 1, \frac{15}{2}\right)$.

g) Seja $W(x, y, z)$ um ponto que pertence ao plano mediador do segmento $[PU]$. Então:

$$d(P, W) = d(U, W) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-10)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-10)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 = y^2 - 8y + 16 + z^2 - 20z + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = -8y + 16 - 20z + 100 \Leftrightarrow 8y + 20z - 116 = 0 \Leftrightarrow 2y + 5z - 29 = 0$$

Uma equação do plano mediador de $[PU]$ é $2y + 5z - 29 = 0$.

h) O raio da superfície esférica é $\|\overrightarrow{AC}\|$ e $\overrightarrow{AC} = C - A \mid (2, 2, 5) - (2, 0, 10) = (0, 2, -5)$.

$$\text{Assim, } r = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

A superfície esférica tem equação reduzida: $(x-2)^2 + y^2 + (z-10)^2 = 29$.

$$\textbf{i)} V_{\text{prisma}} = 4 \times 4 \times 10 = 160 \text{ e } V_{\text{cone}} = \frac{\pi \times r^2 \times 5}{3} = \frac{20\pi}{3}.$$

$$V = V_{\text{prisma}} - 2V_{\text{cone}} = 160 - \frac{40\pi}{3} = \frac{480-40\pi}{3} \text{ (unidades de volume)}$$

112.

a) O ponto $P(0, 3, 0)$ pertence à geratriz e pertence à interseção do plano yOz com a base do cone. Deste modo se conclui que o raio da base do cone é 3.

A altura do cone é a abcissa do ponto da geratriz que pertence ao eixo Ox ; é portanto, o ponto da reta que contém a geratriz que tem ordenada e cota iguais a 0.

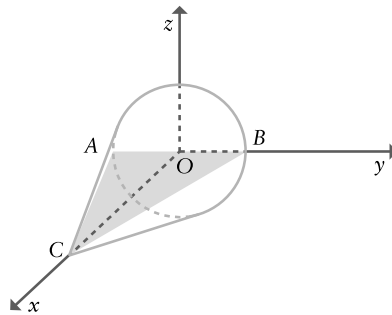
$$(x, 0, 0) = (0, 3, 0) + k(3, -1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ 0 = 3 - k \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ 3 = k \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 3 = k \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, a altura do cone é 9.

Finalmente, $V_{\text{cone}} = \frac{\pi \times 3^2 \times 9}{3} = 27\pi$ (unidades de volume).

b) As coordenadas do vértice do cone são $(9, 0, 0)$; então, uma equação do plano perpendicular ao eixo Ox que passa no vértice do cone é $x = 9$.

c) Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, que resulta da interseção do cone com o plano de equação $z = 0$.



Como $\overline{OB} = 3$, tem-se $\overline{AB} = 6$.

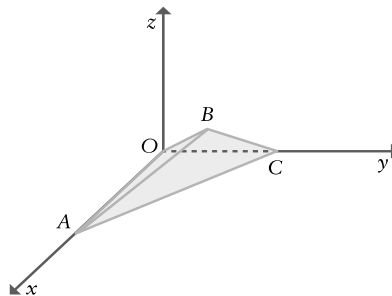
Como $\overline{OC} = 9$, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{6 \times 9}{2} = 27$.

113.

a) Um vetor diretor da reta é $\overrightarrow{AB} = B - A \mid (0, 2, 1) - (10, 0, 0) = (-10, 2, 1)$.

Uma equação vetorial da reta AB é $(x, y, z) = (10, 0, 0) + \lambda(-10, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Considerando que a base da pirâmide $[OBCA]$ é o triângulo $[OBC]$, tem-se que a altura correspondente a essa base é $\overline{OA}$.



Determinemos a área do triângulo $[OBC]$. Se tomarmos para base do triângulo o lado $[OC]$, a altura correspondente é a cota do ponto B .

Portanto a área do triângulo $[OBC]$ é igual a $\frac{5 \times 1}{2}$, ou seja, $\frac{5}{2}$.

O volume da pirâmide é, portanto, $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times 10 = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$ (unidades de volume).

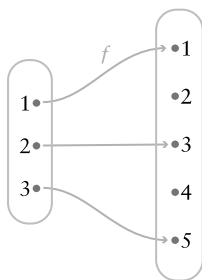
Tema 4 | Funções Reais de Variável Real

Capítulo 1 | Generalidades acerca de funções

Págs. 86 a 92

1.

a) O diagrama que representa a função é:



b₁) 5

b₂) 3

b₃) 1

b₃) {1, 3, 5}

2.

Vamos calcular a imagem de cada objeto recorrendo à definição $f(x) = -2x + 1$:

$$f(-5) = -2 \times (-5) + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$f(1) = -2 \times 1 + 1 = -2 + 1 = -1$$

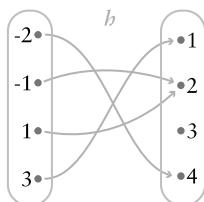
$$f(7) = -2 \times 7 + 1 = -14 + 1 = -13$$

$$f(13) = -2 \times 13 + 1 = -26 + 1 = -25$$

Portanto, o gráfico da função é $\{(-5, 11), (1, -1), (7, -13), (13, -25)\}$.

3.

a) O diagrama de setas é:



b) O domínio da função é o conjunto $\{-2, -1, 1, 3\}$.

O contradomínio da função é o conjunto $\{1, 2, 4\}$.

c) O conjunto-solução da condição $h(x) < 3$ é o conjunto dos elementos do domínio de f cujas imagens são inferiores a 3, ou seja, é o conjunto $\{-1, 1, 3\}$.

4.

a)

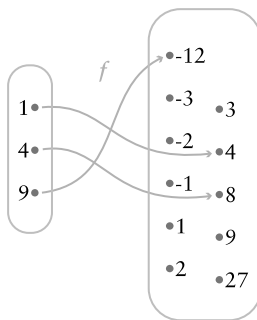
• Correspondência f

Para $x = 1$, obtém-se $-6y = -24 \Leftrightarrow y = 4$.

Para $x = 4$, obtém-se $-3y = -24 \Leftrightarrow y = 8$.

Para $x = 9$, obtém-se $-2y = -24 \Leftrightarrow y = 12$.

O diagrama de setas correspondente é:



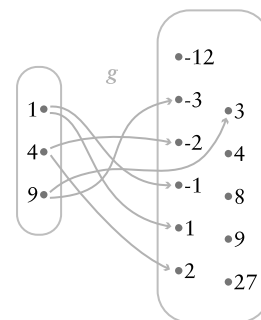
• Correspondência g

Para $x = 1$, obtém-se $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1$.

Para $x = 4$, obtém-se $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -2$.

Para $x = 9$, obtém-se $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3 \vee y = -3$.

O diagrama de setas correspondente é:



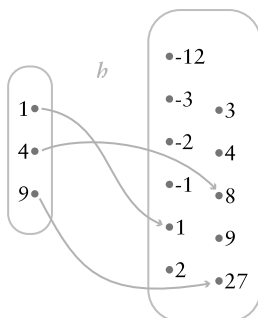
• Correspondência h

Para $x = 1$, obtém-se $y = \sqrt{1} = 1$.

Para $x = 4$, obtém-se $y = \sqrt{4^3} = 8$.

Para $x = 9$, obtém-se $y = \sqrt{9^3} = 27$.

O diagrama de setas correspondente é:



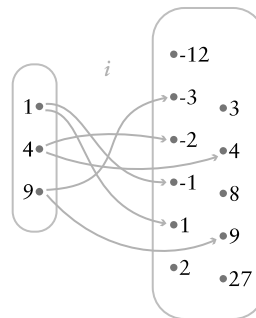
• Correspondência i

Para $x = 1$, obtém-se $(y - 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1$.

Para $x = 4$, obtém-se $(y - 4)(y + \sqrt{4}) = 0 \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -2$.

Para $x = 9$, obtém-se $(y - 9)(y + \sqrt{9}) = 0 \Leftrightarrow y = 9 \vee y = -3$.

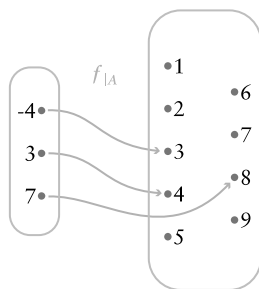
O diagrama de setas correspondente é:



b) As correspondências g e i não são funções de A em B porque os objetos têm mais do que uma imagem.

5.

a) O domínio de $f|_A$ é $G \cap A = \{-4, 3, 7\}$. O diagrama de setas que representa esta função é:



b) O conjunto B é constituído por todos os elementos de G que satisfazem a condição $|f(x) - x| = 7$.
Tem-se:

x	-4	-1	3	5	7	9
$f(x)$	3	1	4	6	8	2
$ f(x) - x $	$ 3 + 4 = 7$	$ 1 + 1 = 2$	$ 4 - 3 = 1$	$ 6 - 5 = 1$	$ 8 - 7 = 1$	$ 2 - 9 = 7$

Então, $B = \{-4, 9\}$.

Definindo $f|_B$ por meio de uma tabela:

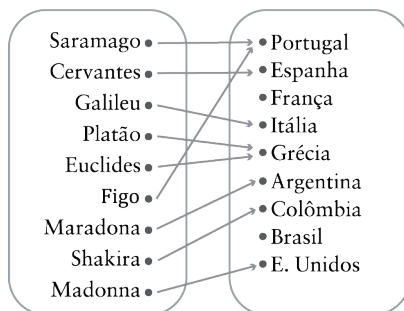
x	-4	9
$f _B(x)$	3	2

c) Tem-se $f(3) = 4$, $f(5) = 6$ e $f(7) = 8$.

Por outro lado, $f(-4) \neq -4 + 1$, $f(-1) \neq -1 + 1$ e $f(9) \neq 9 + 1$. Então, $C = \{3, 5, 7\}$.

6.

a) O diagrama de setas correspondente é:



b) $D_{f|_C} = \{\text{Figo, Maradona}\}$

Conjunto de chegada: B

x	$f _C(x)$
Figo	Portugal
Maradona	Argentina

7.

a) Seja $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $g(x) = x^2$ e $h(x)$ é o produto dos divisores de x .

x	$g(x)$	$h(x)$
2	$g(2) = 2^2 = 4$	$h(2) = 1 \times 2 = 2$
4	$g(4) = 4^2 = 16$	$h(4) = 1 \times 2 \times 4 = 8$
6	$g(6) = 6^2 = 36$	$h(6) = 1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$
8	$g(8) = 8^2 = 64$	$h(8) = 1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$
10	$g(10) = 10^2 = 100$	$h(10) = 1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$

Portanto, os objetos que verificam a condição $g(x) = h(x)$ são: 6, 8 e 10.

b) Seja $E = \{2, 4, 10\}$, então, $h(E) = \{h(2), h(4), h(10)\} = \{2, 8, 100\}$.

c) Seja $F = \{x \in D : h(x) = 2^{x-1}\}$. F é o conjunto formado pelos elementos de D que são solução da equação $h(x) = 2^{x-1}$.

x	$h(x)$	2^{x-1}
2	$h(2) = 1 \times 2 = 2$	$2^{2-1} = 2$
4	$h(4) = 1 \times 2 \times 4 = 8$	$2^{4-1} = 2^3 = 8$
6	$h(6) = 1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$	$2^{6-1} = 2^5 = 32$
8	$h(8) = 1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$	$2^{8-1} = 2^7 = 128$
10	$h(10) = 1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$	$2^{10-1} = 2^9 = 512$

Verifica-se que as soluções são 2 e 4; portanto, $F = \{2, 4\}$.

Então, $g(F) = g(\{2, 4\}) = \{g(2), g(4)\} = \{2^2, 4^2\} = \{4, 16\}$.

8.

a) Seja $f: \{3, 7, 11, 15\} \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{3x-5}{4}$.

Tem-se:

$$f(3) = \frac{3 \times 3 - 5}{4} = 1$$

$$f(7) = \frac{3 \times 7 - 5}{4} = 4$$

$$f(11) = \frac{3 \times 11 - 5}{4} = 7$$

$$f(15) = \frac{3 \times 15 - 5}{4} = 10$$

A tabela que define a função é:

x	3	7	11	15
$f(x)$	1	4	7	10

b) A função é injetiva, pois não existem objetos diferentes com a mesma imagem.

9.

a) Começa por observar que cada elemento do domínio só satisfaz uma das condições.

Portanto, dado que 5 e 7 são números primos, a imagem de qualquer deles é 7 (é o único múltiplo de 7 do conjunto de chegada).

Já 6 e 8 são números pares; as suas imagens podem ser 5 ou 20. O 9 e o 25 são quadrados perfeitos e, portanto, a imagem de 9 é $\sqrt{9} = 3$ e a imagem de 25 é $\sqrt{25} = 5$.

Tem-se, por exemplo:

x	5	6	7	8	9	25
$f(x)$	14	5	14	20	3	5

b) Qualquer função que se defina nestas condições não é injetiva, pois 5 e 7 tem, obrigatoriamente, a mesma imagem.

Por outro lado, também os objetos 6, 8 e 25 não podem ter imagens diferentes, pois a imagem de 25 é 5 e as imagens de 6 e 8 só podem ser 5 ou 20.

c) Por exemplo, $C = \{6, 7, 8, 9\}$.

10.

Vamos usar o método de «redução ao absurdo».

Suponhamos que $f(m) = 2$; como $f(m) \times f(n) = 4$, ter-se-ia $2 \times f(n) = 4$, ou seja, $f(n) = 2$. Portanto, m e n teriam a mesma imagem, o que contraria o facto de a função f ser injetiva.

Então, $f(m) \neq 2$.

11.

A função f não é sobrejetiva, pois o seu contradomínio é $\{1, 2, 4\}$, que é diferente do conjunto de chegada, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

12.

a) O objeto x cuja imagem é 7 é solução da equação $f(x) = 7$, ou seja, é a solução da equação, $7 = \frac{5x-4}{3}$.

$$7 = \frac{5x-4}{3} \Leftrightarrow 21 = 5x-4 \Leftrightarrow -5x = -4-21 \Leftrightarrow x = \frac{25}{5} \Leftrightarrow x = 5$$

5 é um elemento do domínio, logo é a solução do problema.

b) Seguindo a sugestão, ou seja, resolvendo a equação em ordem a x ,

$$y = \frac{5x-4}{3} \Leftrightarrow 3y = 5x-4 \Leftrightarrow -5x = -4-3y \Leftrightarrow x = \frac{3y+4}{5}$$

Portanto, para cada número real y existe um real x tal que $f(x) = y$. Esse número real x é $\frac{3y+4}{5}$.

c) Para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y . Portanto, todos os elementos do conjunto de chegada pertencem ao contradomínio. Portanto, o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

13.

a) A função não é injetiva já que $f(\text{Torre}) = f(\text{Peão})$, ou seja, os objetos Torre e Peão têm a mesma imagem. Logo, a função f não é bijetiva.

b) A função é bijetiva porque é injetiva e sobrejetiva. Observa que o conjunto das imagens é igual ao conjunto de chegada (sobrejetiva) e diferentes objetos possuem diferentes imagens (injetiva).

14.

Tem-se: $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 4 = 3b + 4 \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b$

Portanto, f é injetiva.

Seja $y \in \mathbb{R}$. Tem-se: $3x + 4 = y \Leftrightarrow 3x = y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{3}$

Portanto, para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y .

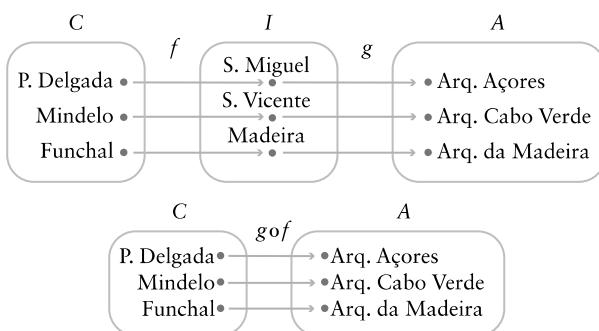
Assim, f é sobrejetiva. Portanto, a função f é bijetiva.

15.

Como A tem cinco elementos e B tem quatro, qualquer função de A em B tem pelo menos dois objetos com a mesma imagem, e portanto não é injetiva. Logo, não é bijetiva.

Como cada objeto só pode ter uma imagem, qualquer função de B em A não é sobrejetiva. Logo, não é bijetiva.

16. O diagrama que representa a função $g \circ f$ é:



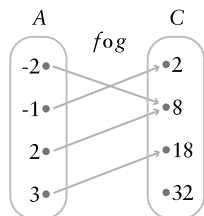
17.

a) As funções g e f ficam definidas pelas seguintes tabelas, respetivamente:

x	-2	-1	2	3
$g(x)$	4	1	4	9

x	1	4	9	16
$f(x)$	2	8	18	32

b)



c) Recorrendo à definição, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2$.

18.

a) $D_{i \circ h} = \{x \in D_h : h(x) \in D_i\} = \{x \in D : h(x) \in F\}$

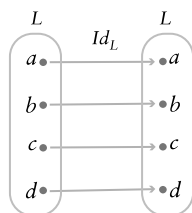
Tem-se $h(3) = -1$, $h(5) = 1$, $h(8) = 4$ e $h(13) = 9$; como $4 \in F$, $9 \in F$, $-1 \notin F$ e $1 \notin F$, tem-se $D_{i \circ h} = \{8, 13\}$.

b) Recorrendo à definição, $(i \circ h)(x) = i[h(x)] = i(x - 4) = \sqrt{x - 4}$.

c) $D_{i \circ h} = \{8, 13\}$ e $(i \circ h)(x) = \sqrt{x - 4}$. Então, $(i \circ h)(8) = \sqrt{8 - 4} = 2$ e $(i \circ h)(13) = \sqrt{13 - 4} = 3$.

Logo, $D'_{i \circ h} = \{2, 3\}$.

19.

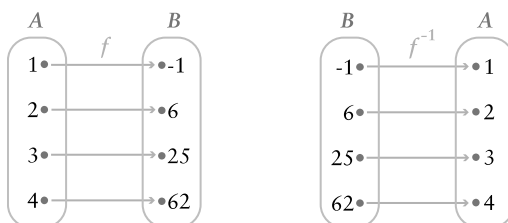


20.

$(f \circ f)(x) = f(x) \Leftrightarrow f[f(x)] = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ (pois f é injetiva)

21.

a)



$$\mathbf{b)} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}[f(1)] = f^{-1}(-1) = 1$$

$$(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}[f(2)] = f^{-1}(6) = 2$$

$$(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}[f(3)] = f^{-1}(25) = 3$$

$$(f^{-1} \circ f)(4) = f^{-1}[f(4)] = f^{-1}(62) = 4$$

Portanto, $f^{-1} \circ f = Id_A$.

$$(f \circ f^{-1})(-1) = f[f^{-1}(-1)] = f(1) = -1$$

$$(f \circ f^{-1})(6) = f[f^{-1}(6)] = f(2) = 6$$

$$(f \circ f^{-1})(25) = f[f^{-1}(25)] = f(3) = 25$$

$$(f \circ f^{-1})(62) = f[f^{-1}(62)] = f(4) = 62$$

Portanto, $f \circ f^{-1} = Id_B$.

22.

a) A inversa de f é a função $f^{-1}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{6}$.

A expressão que define a função inversa resulta da resolução da equação $y = 6x + 5$ em ordem a x .

$$y = 6x + 5 \Leftrightarrow -6x = 5 - y \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{6}$$

b) Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(6x + 5) = \frac{6x + 5 - 5}{6} = \frac{6x}{6} = x$$

Como $x \in \mathbb{R}$, então $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{x-5}{6}\right) = \frac{6(x-5)}{6} + 5 = x - 5 + 5 = x$$

Como $x \in \mathbb{R}$, então $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$.

23. Seja $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, $a \neq -1$ e $a \neq 1$.

Pretende-se mostrar que $\exists x_0: f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

$$y = ax + b \Leftrightarrow -ax = b - y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

Então, $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow ax + b = \frac{x-b}{a} \Leftrightarrow a(ax + b) = x - b \Leftrightarrow a^2x + ab = x - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2x - x = -ab - b \Leftrightarrow x(a^2 - 1) = -(ab + b) \Leftrightarrow x = -\frac{ab + b}{a^2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a-1} \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$$

Portanto, o número real x_0 tal que $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ é $\frac{b}{1-a}$.

Capítulo 2 | Generalidades acerca de funções reais de variável real

Págs. 93 a 102

24.

A função h não é uma f.r.v.r., pois o seu domínio não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

25.

a) Não existem restrições, assim, $D_f = \mathbb{R}$.

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\}$

Tem-se: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Assim, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 16 \neq 0\}$

A condição $x^2 + 16 = 0$ é impossível. Assim, $D_f = \mathbb{R}$.

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \neq 0\}$

Tem-se: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$.

Assim, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

e) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x - 4 \neq 0\}$

Tem-se: $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + 5}{2} \vee x = \frac{-3 - 5}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Assim, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

f) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 5 \geq 0\}$

Tem-se: $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

Assim, $D_f = [-5, +\infty[$.

g) Não existe qualquer restrição. Assim, $D_f = \mathbb{R}$.

h) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 \geq 0 \wedge x \neq 0\}$

Tem-se: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Dado que o domínio é definido pela conjunção das condições $x \geq -2$ e $x \neq 0$, tem-se $D_f = [-2, +\infty[\setminus \{0\}$.

i) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 8 - 3x \geq 0 \wedge x - 2 \neq 0\}$

Tem-se: $8 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$.

Por outro lado, $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Assim, $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{8}{3} \wedge x \neq 2\right\} = \left]-\infty, \frac{8}{3}\right] \setminus \{2\}$.

$$\text{j)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x \geq 0 \wedge x^2 - 2x \neq 0\}$$

$$\text{Tem-se: } 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\text{Assim, } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2\} =]-\infty, 3] \setminus \{0, 2\}.$$

$$\text{k)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 6 \geq 0 \wedge \sqrt{x - 6} \neq 0\}$$

$$\text{Tem-se: } x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6.$$

$$\sqrt{x - 6} = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Assim, } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 6 \wedge x \neq 6\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 6\} =]6, +\infty[.$$

$$\text{l)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \geq 0 \wedge \sqrt{x + 1} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\}$$

$$\text{Tem-se: } x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

$$\text{Assim, } D_f =]-1, +\infty[.$$

$$\text{m)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt[3]{x} - 2 \neq 0\}$$

$$\text{Tem-se: } \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8.$$

$$\text{Assim, } D_f = \mathbb{R} \setminus \{8\}.$$

$$\text{n)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge 2 - \sqrt{x} \neq 0\}$$

$$\text{Tem-se: } 2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Assim, } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge x \neq 4\} = [0, +\infty[\setminus \{4\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}.$$

$$\text{o)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: 8 - x \geq 0 \wedge 2x - 1 \geq 0 \wedge \sqrt{2x - 1} - 3 \neq 0\}$$

$$\text{Tem-se: } 8 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 8.$$

$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x - 1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 9 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Assim, } D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \leq 8 \wedge x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 5\right\} = \left[\frac{1}{2}, 8\right] \setminus \{5\}.$$

$$\text{p)} D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x^2 + 9 \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + 9} - 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 9 \geq 0 \text{ é uma condição universal.}$$

$$\sqrt{x^2 + 9} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$$

$$\text{Assim, } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x \neq -4 \wedge x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}.$$

26.

$$\text{a)} \text{ Se } x = -3, \text{ então o raio da circunferência é } \overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ então o raio da circunferência é } \overline{OQ} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$$

$$\text{Se } x = 3, \text{ então o raio da circunferência é } \overline{OR} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Assim, $f(-3) = 2\pi \times 5 = 10\pi$, $f(0) = 2\pi \times 2 = 4\pi$, $f(3) = 2\pi \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}\pi$ e a tabela de f é:

x	-3	0	3
$f(x)$	10π	4π	$2\sqrt{10}\pi$

Se $y = 4$, então a reta passa em P e a sua ordenada na origem é o valor de b tal que $4 = 2 \times (-3) + b$, ou seja, é 10.

Se $y = 2$, então a reta passa em Q e a sua ordenada na origem é a ordenada de Q , ou seja, é 2.

Se $y = 1$, então a reta passa em R e a sua ordenada na origem é o valor de b tal que $1 = 2 \times 3 + b$, ou seja, $b = -5$.

Assim, a tabela de g é:

x	1	2	4
$g(x)$	-5	2	10

Tem-se:

$$\overrightarrow{PQ} \mid Q - P = (0, 2) - (-3, 4) = (3, -2), \quad \overrightarrow{PR} \mid R - P = (3, 1) - (-3, 4) = (6, -3) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{QR} \mid R - Q = (3, 1) - (0, 2) = (3, -1).$$

$$\text{Portanto, } \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \quad \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5} \text{ e } \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Assim, a tabela de h é:

x	$\overrightarrow{PQ}$	$\overrightarrow{PR}$	$\overrightarrow{QR}$
$h(x)$	$\sqrt{13}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$

b) h não é uma f.r.v.r. porque o seu domínio não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

27.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	2	-2	3	1	-1	2

b) $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $D'_f = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

c) As soluções da equação são as abcissas dos pontos do gráfico que têm ordenada 2.

$$\text{Tem-se: } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4.$$

Assim, C.S. = $\{-1, 4\}$.

d) As soluções da inequação $f(x) < 0$ são as abcissas dos pontos do gráfico com ordenadas negativas.

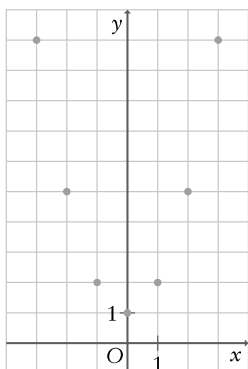
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Assim, C.S. = $\{-2, 0, 3\}$.

28. Tem-se:

x	$f(x) = x^2 + 1$
-3	$f(-3) = 10$
-2	$f(-2) = 5$
-1	$f(-1) = 2$
0	$f(0) = 1$
1	$f(1) = 2$
2	$f(2) = 5$
3	$f(3) = 10$

O gráfico de f é:

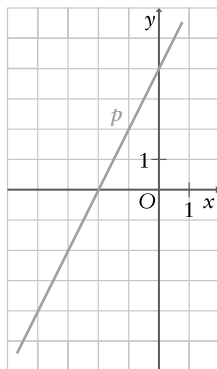


29.

a) O domínio da função definida por $p(x) = 2x + 4$ é $\mathbb{R}$.

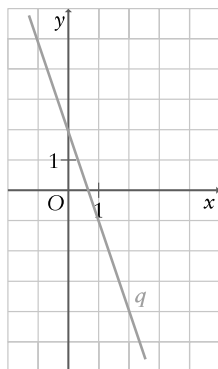
A equação $y = 2x + 4$ é a equação reduzida de uma reta no plano.

O gráfico da função p é a reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 4)$ e $(-2, 0)$.



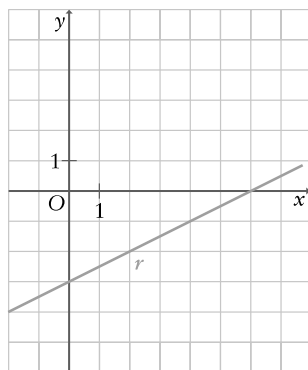
b) $D_q = \mathbb{R}$

A equação $y = -3x + 2$ é a equação reduzida da reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, -4)$.



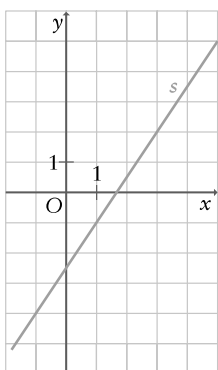
c) $D_r = \mathbb{R}$

A equação $y = \frac{x}{2} - 3$ é a equação reduzida da reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, -3)$ and $(6, 0)$.



d) $D_s = \mathbb{R}$

A equação $y = \frac{3x-5}{2}$ é equivalente a $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, que é a equação reduzida da reta que passa nos pontos de coordenadas $(1, -1)$ and $(3, 2)$.



30.

a) Seja $Q(x, 0)$, com $x > 0$, então $\overrightarrow{PQ}\left(x-1, -\frac{15}{4}\right)$ e $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{25}{4}$.

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(-\frac{15}{4}\right)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{225}{16} = \frac{625}{16} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{400}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 25 \Leftrightarrow x-1 = -5 \vee x-1 = 5 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 6$$

A solução é $Q(6, 0)$ porque a abscissa de Q é positiva.

b) A reta definida pelos pontos $P\left(1, \frac{15}{4}\right)$ e $Q(6, 0)$ tem vetor diretor $\overrightarrow{PQ}\left(5, -\frac{15}{4}\right)$.

O declive é $m = \frac{-\frac{15}{4}}{5} = -\frac{3}{4}$ e a ordenada na origem pode obter-se recorrendo às coordenadas de um dos pontos, P ou Q . Substituindo x e y pelas coordenadas de Q , tem-se:

$$0 = -\frac{3}{4} \times 6 + b \Leftrightarrow -b = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow b = \frac{9}{2}$$

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$, logo $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$.

31. Recorrendo ao «teste» da reta vertical, verifica-se que os gráficos que representam funções são **(B)**, **(C)** e **(E)**; nos casos **(A)** e **(D)** há pelo menos uma reta vertical que intersesta a linha representada em mais do que um ponto.

32. Os pontos $P(2, 3)$ e $Q(2, -4)$ têm a mesma abscissa e têm ordenadas diferentes; por isso, os pontos P e Q não podem pertencer, simultaneamente, ao gráfico de uma função.

33.

a) Sabe-se que $g(a) - g(b) = h(b) - h(a)$.

Dizer que a reta de equação $x = a$ intersesta o gráfico de g num ponto de ordenada 7 é dizer que $g(a) = 7$ e dizer que a reta de equação $x = a$ intersesta o gráfico de h num ponto de ordenada 5 é dizer $h(a) = 5$. Por outro lado, como os gráficos de g e h se intersestam num ponto de abscissa b , tem-se $g(b) = h(b)$.

Então,

$$g(a) - g(b) = h(b) - h(a) \Leftrightarrow 7 - g(b) = g(b) - 5 \Leftrightarrow -2g(b) = -5 - 7 \Leftrightarrow g(b) = \frac{12}{2} \Leftrightarrow g(b) = 6$$

O ponto R tem ordenada 6.

b) Não. Já vimos que $g(a) = 7$ e $h(a) = 5$ e a imagem de a não pode ser simultaneamente igual a 7 e a 5.

34. Recorrendo ao «teste» da reta horizontal, verifica-se que os gráficos **(A)**, **(D)** e **(E)** representam funções não injetivas, pois, para cada um deles, há pelo menos uma reta horizontal que intersesta o gráfico em mais do que um ponto.

35.

Tem-se $A(a, -a)$, com $a < 0$ e, portanto, $\overline{OA} = -\sqrt{2}a$.

Tem-se $B(b, b)$, com $b > 0$ e, portanto, $\overline{OB} = \sqrt{2}b$.

$$\overline{OA} = \overline{OB} \Leftrightarrow -\sqrt{2}a = \sqrt{2}b \Leftrightarrow -a = b$$

Então: $f(a) = -a = b = f(b)$. Portanto, a e b têm imagens iguais, logo f não é injetiva.

36. Se f é par, então $f(-5) = f(5) = 9$ e $f(-2) = f(2) = 3$. Então, $f(-2) + f(5) = 9 + 3 = 12$.

37.

a) Dado que $D_f = \mathbb{R}$, f é par se e só se $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^2 + 3|-x| = x^2 + 3x = f(x)$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$, conclui-se que a função f é par.

b) Tem-se, por exemplo, $g(1) = \frac{1-1}{1^2+1} = 0$ e $g(-1) = \frac{-1-1}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$, portanto, g não é uma função par.

c) Tem-se $D_h = \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x-1)(-x+1) = (-1)(x+1)(-x+1) = \\ &= (x+1)(-1)(-x+1) = (x+1)(x-1) = h(x) \end{aligned}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = h(x)$, conclui-se que a função h é par.

38. A função não é par, pois os simétricos dos objetos do intervalo $]5, 10]$ não pertencem a D_f .

Observe-se que a restrição $f|_{[-5,5]}$ é uma função par.

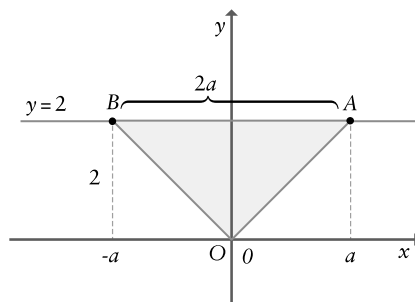
39. Tem-se, por exemplo, $f(1) = a + b + c$ e $f(-1) = a - b + c$.

Ora, $f(1) = f(-1) \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0$ e, por hipótese, $b \neq 0$.

Portanto, f não é par.

40. Os gráficos das funções representadas em **(A)** e **(B)** são simétricos em relação ao eixo Oy e, portanto, representam funções pares. Observe-se que no caso da função **(C)**, por exemplo, $f(1) = 3$ e $f(-1) = -3$ e, portanto, a função representada não é par.

41. Observe-se que a função é par e que a reta de equação $y = 2$ intersesta o gráfico da função em dois pontos A e B , sendo que A pertence ao 1.º quadrante. Suponhamos que $A(a, 2)$, com $a > 0$; então, $B(-a, 2)$ e B pertence ao 2.º quadrante.

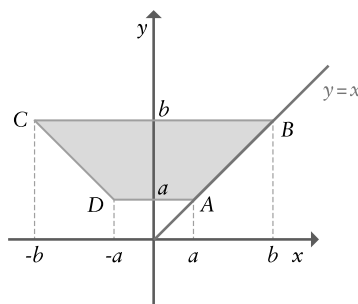


Sabe-se que o triângulo $[OAB]$ tem área 12. Ora, $\text{Área}_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = \overline{AB} = 2a$.

Então, $2a = 12$ e, portanto, $a = 6$.

As soluções da equação $f(x) = 2$ são -6 e 6 .

42. A imagem seguinte sugere a situação descrita no enunciado do problema.



$$A = \frac{2b + 2a}{2} \times (b - a) \Leftrightarrow A = (b + a) \times (b - a) \Leftrightarrow A = b^2 - a^2$$

como se pretendia demonstrar.

43. Designemos por a a abscissa de A e por b a abscissa de B , com $a \neq b$.

Suponhamos que $b = -a$.

Nesse caso, as coordenadas de A seriam $(a, a + 2)$ e as coordenadas de B seriam $(b, b + 2) = (-a, -a + 2)$.

Como f é par, viria $a + 2 = -a + 2 \Leftrightarrow a = 0$, pelo que b também seria 0, o que é impossível porque $a \neq b$.

44. Pela definição de função ímpar, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

$$f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow 6 = -f(2) \Leftrightarrow f(2) = -6$$

$$-f(5) = f(-5) \Leftrightarrow -(-3) = f(-5) \Leftrightarrow f(-5) = 3$$

$$f(2) + f(-5) = -6 + 3 = -3$$

45. f é ímpar, logo $f(-1) = -f(1)$ e $f(0) = 0$.

$$\text{Então, } f(0) + f(1) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow 0 + f(1) = 1 - f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}.$$

46. f par, então, $f(1) = f(-1) = -2$ e $f(2) = f(-2) = 3$.

Como $f(0) = 1$, têm-se $D'_f = \{-2, 1, 3\}$.

g é ímpar, então, $g(1) = -2 \Rightarrow g(-1) = 2$ e $g(2) = 3 \Rightarrow g(-2) = -3$ e $g(0) = 0$.

Então, $D'_g = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$.

47.

a) Seja $f(x) = 3x^2 - 5$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$$

Portanto, a função f é par.

b) Seja $g(x) = 2x^3 + 5$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

Tem-se, por exemplo, $g(1) = 2 \times 1^3 + 5 = 7$ e $g(-1) = 2 \times (-1)^3 + 5 = -2 + 5 = 3$.

Então, $g(-1) \neq g(1)$ e $g(-1) \neq -g(1)$.

Portanto, a função g não é par nem é ímpar.

c) Seja $h(x) = x^2 - 2x$.

Tem-se, por exemplo, $h(1) = 1^2 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$ e $h(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.

Portanto, $h(-1) \neq h(1)$ e $h(-1) \neq -h(1)$, do que se conclui que a função h não é par nem é ímpar.

d) Seja $i(x) = 3x^4 - x^2 + 1$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$i(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 3x^4 - x^2 + 1 = i(x)$$

Conclui-se, portanto, que a função i é par.

e) Seja $j(x) = x^2 \sqrt[3]{x}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$j(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} = x^2 \cdot (-\sqrt[3]{x}) = -x^2 \sqrt[3]{x} = -j(x)$$

Portanto, a função j é ímpar.

f) Seja $k(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$.

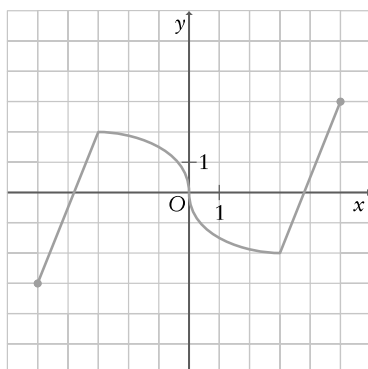
Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$k(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x}{x^2 + 2} = -\frac{x}{x^2 + 2} = -k(x)$$

Portanto, a função k é ímpar.

48. Os gráficos das funções representadas em **(A)** e **(C)** são simétricos em relação à origem do referencial e, portanto, as funções são ímpares.

49. A função é ímpar; logo, $\forall x \in [-5, 5], f(-x) = -f(x)$; o gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.



50.

a) b) c) d) Observe-se que $f(5) = g(5) = -2$ e que $f(-4) = g(-4) = 3$.

Pela informação acerca da paridade das funções:

$$f(5) = f(-5) = -2 \text{ e } f(-4) = f(4) = 3$$

$$g(5) = -g(-5) = -2 \text{ e } g(-4) = -g(4) = 3, \text{ então, } g(-5) = 2 \text{ e } g(4) = -3$$

Tem-se, então:

«O ponto $A(-5, 2)$ pertence ao gráfico da função g .»

«O ponto $B(-5, -2)$ pertence ao gráfico da função f .»

«O ponto $C(4, -3)$ pertence ao gráfico da função g .»

«O ponto $A(4, 3)$ pertence ao gráfico da função f .»

51.

$$f \text{ é ímpar} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(-x)^{2n+1} + b(-x)^{2n-1} + c = -(ax^{2n+1} + bx^{2n-1} + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(-x)^{2n}(-x) + b(-x)^{2n}(-x)^{-1} + c = -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ax^{2n} \times x - bx^{2n} \times x^{-1} + c = -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} + c = -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -c \Leftrightarrow c = 0$$

52.

a) Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = x + 1$ é injetiva mas não é ímpar.

b) Falsa, por exemplo a função representada no exercício **48 (C)** é ímpar e não é injetiva.

c) Verdadeira, se o domínio é $\mathbb{R}$, 0 pertence ao domínio, logo a imagem de zero é zero, pelo que o seu gráfico intersesta a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

d) Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = 0$ é simultaneamente par e ímpar.

53. Seja $g \circ f$ a função composta e seja $x \in \mathbb{R}$.

Então, $(g \circ f)(-x) = g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.

Portanto, $g \circ f$ é uma função par.

54.

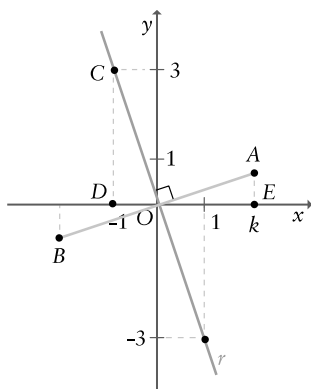
Como as abscissas dos pontos A e B são simétricas, e dado que a função f é ímpar, os pontos A e B são simétricos em relação à origem do referencial. Portanto, a mediatriz de $[AB]$ passa na origem do referencial e, como tem declive -3 , é a reta de equação $y = -3x$.

Os triângulos $[ODC]$ e $[OEA]$ são semelhantes e, portanto, $\frac{OC}{CD} = \frac{OA}{OE}$. Então, $\frac{OC}{3} = \frac{OA}{k}$ e, como

$OC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, tem-se $OA = \frac{k\sqrt{10}}{3}$.

A área do triângulo $[ABC]$ é 20 e é dada por $\frac{AB \times OC}{2}$. Então, $\frac{AB \times OC}{2} = 20$ e $\frac{AB \times OC}{2} = 20 \Leftrightarrow 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2 \times OA \times OC}{2} = 20 \Leftrightarrow \frac{k\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{10} = 20 \Leftrightarrow 10k = 60 \Leftrightarrow k = 6$.



55.

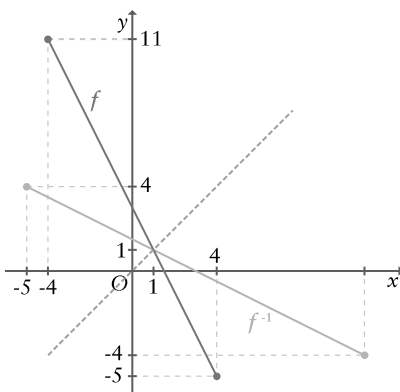
a) $D'_f = [f(4), f(-4)] = [-5, 11]$; portanto, $D_{f^{-1}} = [-5, 11]$.

Para obter uma expressão da função inversa de f , resolvemos a equação $y = -2x + 3$ em ordem a x .

$$y = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x = 3 - y \Leftrightarrow x = \frac{3 - y}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

Portanto, $f^{-1}: [-5, 11] \rightarrow [-4, 4]$ e $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

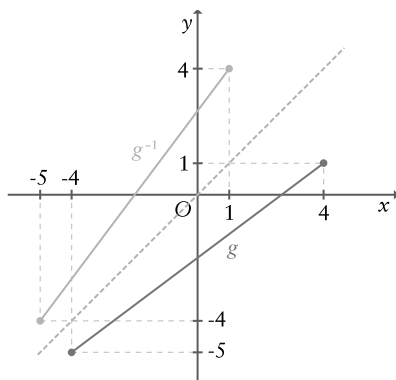


b) $D'_g = [g(-4), g(4)] = [-5, 1]$; portanto, $D_{g^{-1}} = [-5, 1]$. Para obter uma expressão da função inversa de g vamos resolver a equação $y = \frac{3x-8}{4}$ em ordem a x .

$$y = \frac{3x-8}{4} \Leftrightarrow 4y = 3x-8 \Leftrightarrow -3x = -4y-8 \Leftrightarrow x = \frac{4y+8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{8}{3}$$

Então, $g^{-1}: [-5, 1] \rightarrow [-4, 4]$ e $g^{-1}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{8}{3}$.

O gráfico de g^{-1} é simétrico ao gráfico de g relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.



56.

a) $y = ax + b \Leftrightarrow \frac{y-b}{a} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$

Então, $f(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$; f é uma função afim e, como $\frac{1}{a}$ é negativo, concluímos que f é uma função decrescente. Portanto, $f(-3) = 7$ e $f(5) = -5$.

$$\begin{cases} f(-3) = 7 \\ f(5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{a} - \frac{b}{a} = 7 \\ \frac{5}{a} - \frac{b}{a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - b = 7a \\ 5 - b = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 7a + 3 \\ 5 + 7a + 3 = -5a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 7a + 3 \\ 12a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = -\frac{14}{3} + 3 \\ a = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

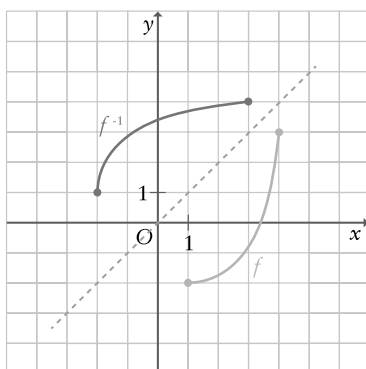
Portanto, $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$.

b) Tem-se $\frac{1}{a} = -\frac{3}{2}$ e $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$. Portanto, $f: [-5, 7] \mapsto [-3, 5]$ e $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

57.

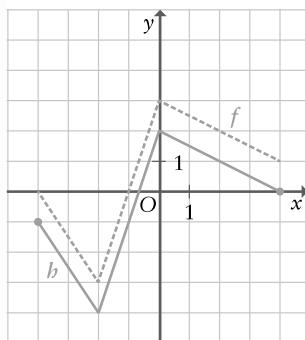
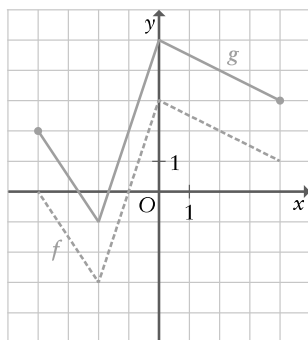
a) Seja $f^{-1}(-1) = a$, então $f(a) = -1$. Ora, o ponto do gráfico de f que tem ordenada -1 tem abscissa 3, portanto, $a = 3$.

b) O gráfico da função f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (reta de equação $y = x$).

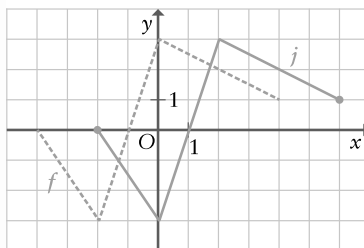
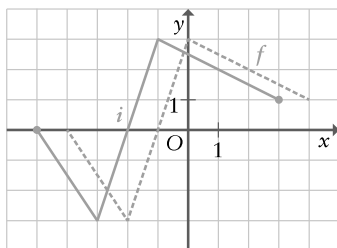


58.

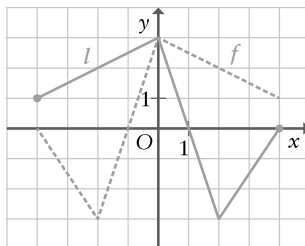
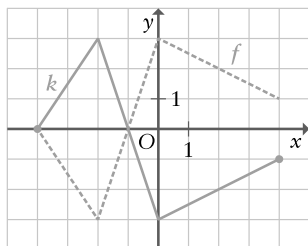
a) b) Os gráficos das funções g e h definidas por $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = f(x) - 1$ são obtidos pelas translações do gráfico da função f associadas aos vetores $\vec{v}(0, 2)$ e $\vec{s}(0, -1)$, respectivamente.



c) d) Os gráficos das funções i e j definidas por $i(x) = f(x + 1)$ e $j(x) = f(x - 2)$ são obtidos pelas translações do gráfico da função f associadas aos vetores $\vec{v}(-1, 0)$ e $\vec{s}(2, 0)$, respectivamente.

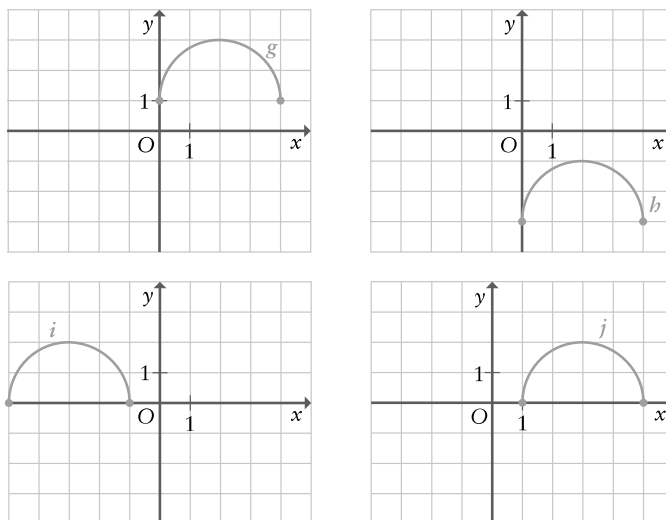


e) f) Os gráficos das funções k e l definidas por $k(x) = -f(x)$ e $l(x) = f(-x)$ são obtidos pelas reflexões do gráfico da função f de eixos Ox e Oy , respectivamente.

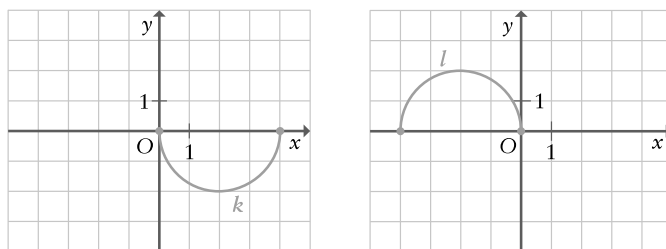


59.

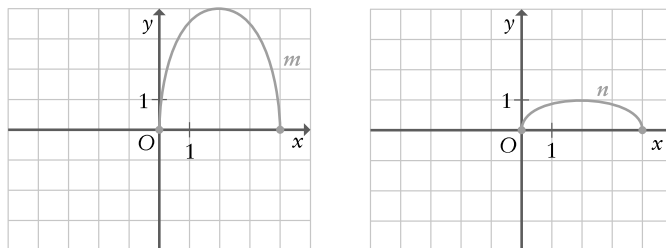
a) b) c) d) Os gráficos das funções g , h , i e j definidas por $g(x) = f(x) + 1$, $h(x) = f(x) - 3$, $i(x) = f(x + 5)$ e $j(x) = f(x - 1)$ são obtidos pelas translações do gráfico da função f associadas aos vetores $\vec{v}(0, 1)$, $\vec{s}(0, -3)$, $\vec{a}(-5, 0)$ e $\vec{b}(1, 0)$, respetivamente.



e) f) Os gráficos das funções k e l definidas por $k(x) = -f(x)$ e $l(x) = f(-x)$ são obtidos pelas reflexões do gráfico da função f de eixos Ox e Oy , respetivamente.



g) h) Os gráficos das funções m e n definidas $m(x) = 2f(x)$ e $n(x) = \frac{f(x)}{2}$ obtêm-se, respetivamente, por meio de uma dilatação e de uma contração verticais do gráfico de f . Tem-se $D_m = D_n = D_f = [0, 4]$, $D'_m = [0, 4]$ e $D'_n = [0, 1]$. Considere-se, por exemplo, o ponto $A(2, f(2))$ do gráfico de f . O ponto $A'(2, 2f(2))$ pertence ao gráfico de m . O ponto $A''(2, \frac{f(2)}{2})$ pertence ao gráfico de n .

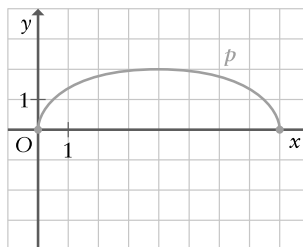
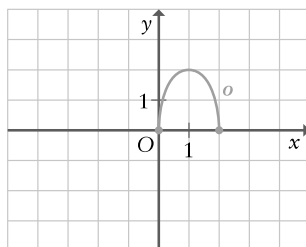


i) j) Os gráficos das funções o e p definidas por $o(x) = f(2x)$ e $p(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ obtêm-se, respetivamente, por meio de uma contração e de uma dilatação horizontais do gráfico de f .

Tem-se $D_o = [0, 2]$, $D_p = [0, 8]$ e $D'_o = D'_p = D'_f = [0, 2]$.

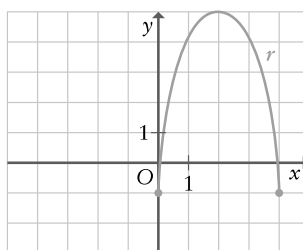
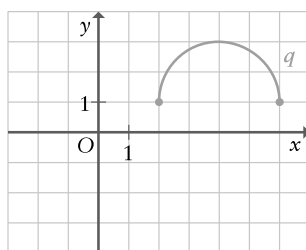
$o(1) = f(2)$ e, portanto, o ponto de coordenadas $(1, f(2))$ pertence ao gráfico de o .

$p(4) = f(2)$ e, portanto, o ponto de coordenadas $(4, f(2))$ pertence ao gráfico de p .



k) l) O gráfico da função q definida por $q(x) = f(x - 2) + 1$ obtém-se do gráfico de f por meio da translação associada ao vetor $\vec{q}(2, 1)$.

O gráfico da função r definida por $r(x) = 3f(x) - 1$ obtém-se do gráfico de f por meio de uma dilatação vertical seguida da translação associada ao vetor $\vec{r}(0, -1)$.



60.

Sejam:

$$g_1(x) = f(x - 2)$$

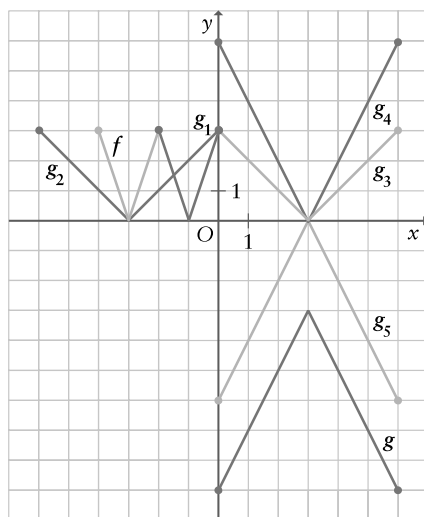
$$g_2(x) = g_1\left(\frac{1}{3}x\right) = f\left(\frac{1}{3}x - 2\right)$$

$$g_3(x) = g_2(-x) = f\left(-\frac{1}{3}x - 2\right)$$

$$g_4(x) = 2g_3(x) = 2f\left(-\frac{1}{3}x - 2\right)$$

$$g_5(x) = -g_4(x) = -2f\left(-\frac{1}{3}x - 2\right)$$

$$g(x) = g_5(x) - 3 = -2f\left(-\frac{1}{3}x - 2\right) - 3$$



61.

Tem-se $g(x) = f(x - 3)$.

Seja a a abscissa do ponto de interseção dos gráficos de g e f ; então $g(a) = f(a)$.

Ora, como $g(a) = f(a - 3)$, conclui-se que $f(a - 3) = f(a)$. Portanto, f não é injetiva, já que $a - 3$ e a são objetos diferentes com a mesma imagem.

Capítulo 3 | Monotonia, extremos e concavidade

Págs. 103 a 109

62.

a) A imagem zero é $a(0) = \frac{0}{3} + 6 = 6$; o zero de a é a solução da equação $a(x) = 0$.

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{3} + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x = -18 \Leftrightarrow x = -\frac{18}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$$

O zero é $-\frac{9}{2}$.

b) A imagem zero é $b(0) = 0 - 9 = -9$; os zeros de b são as soluções da equação $b(x) = 0$.

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

Os zeros são: $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

c) A imagem zero é $c(0) = 0 - 0 + 16 = 16$; os zeros de c são as soluções da equação $c(x) = 0$.

$$c(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

Ou $c(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

A função tem um único zero que é o 4.

d) A imagem zero é $d(0) = 0 - 0 + 4 = 4$; os zeros de d são as soluções da equação $d(x) = 0$.

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{1}{2}$$

Os zeros são: 4 e $\frac{1}{2}$.

e) A imagem zero é $e(0) = 0 + 0 = 0$; os zeros de e são as soluções da equação $e(x) = 0$.

$$e(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$$

Os zeros são: -2 e 0 .

f) A imagem zero é $f(0) = 0 - 0 = 0$; os zeros de f são as soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Os zeros são: 0 e 4 .

g) A imagem zero é $g(0) = 0 - 0 + 0 - 6 = -6$; os zeros de g são as soluções da equação $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Como o polinómio é divisível por $(x - 1)$, vamos aplicar a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio.

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0 = R

$$\text{Assim, } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \vee x = 2$$

Os zeros são: 1, 2 e 3.

h) A imagem zero é $h(0) = 0 + 0 + 0 - 3 = -3$. Os zeros de h são as soluções da equação $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

Como o polinómio admite uma raiz inteira, ela só pode ser ± 1 ou ± 3 .

Calculemos $h(-1)$.

$$h(-1) = -1 + 6 - 8 - 3 = -6$$

Portanto, -1 não é raiz de $h(x)$.

Calculemos $h(-3)$.

$h(-3) = -27 + 54 - 24 - 3 = 0$. Assim, -3 é raiz de $h(x)$ e, portanto, $h(x)$ é divisível por $x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 8 & -3 \\ -3 & & -3 & -9 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

Então,

$$x^3 + 6x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \vee x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

Os zeros são: $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$, -3 e $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.

63.

$$g(0) = -6 \Leftrightarrow 0^2 + p \times 0 + q = -6 \Leftrightarrow q = -6$$

$$g(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + 3p - 6 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3p - 6 = 0 \Leftrightarrow 3p = -3 \Leftrightarrow p = -1$$

64.

$$f(0) = 12 \Leftrightarrow c = 12$$

$$f(-2) = f(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + 12 = 0 \\ 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4a - 2b + 12 = 0 \\ 1 + a + b + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-13 - b) - 2b + 4 = 0 \\ a = -13 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -52 - 4b - 2b + 4 = 0 \\ a = -13 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b = 48 \\ a = -13 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 \\ a = -5 \end{cases}$$

A solução é $a = -5$, $b = -8$ e $c = 12$.

65.

Considerando a equação reduzida da elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tem-se, neste caso, $a = 3$ e $b = 2$. Assim, os vértices são: $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(0, 2)$ e $V_4(0, -2)$.

O gráfico da função possui três pontos coincidentes com três vértices; então, como V_3 e V_4 não podem pertencer, simultaneamente, ao gráfico de h , obrigatoriamente, os pontos $V_1(-3, 0)$ e $V_2(3, 0)$ são pontos do gráfico da função. Portanto, -3 e 3 são zeros de h , ou seja, $h(-3) = 0$ e $h(3) = 0$.

$$\begin{cases} h(3) = 0 \\ h(-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^4 - 3^3 - \frac{79}{9} \times 3^2 + 3p + q = 0 \\ (-3)^4 - (-3)^3 - \frac{79}{9} \times (-3)^2 - 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - 27 - 79 + 3p + q = 0 \\ 81 + 27 - 79 - 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -25 + 3p + q = 0 \\ 29 - 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 25 - 3p \\ 29 - 3p + 25 - 3p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 25 - 3p \\ -6p = -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ p = 9 \end{cases}$$

Portanto, $p = 9$ e $q = -2$, ou seja, $h(x) = x^4 - x^3 - \frac{79}{9}x^2 + 9x - 2$.

3	1	-1	$-\frac{79}{9}$	9	-2	
3	3	6	$-\frac{25}{3}$	2		
-3	1	2	$-\frac{25}{9}$	$\frac{2}{3}$	0 = R	
-3	-3	3	$-\frac{2}{3}$			
1	-1	$\frac{2}{9}$	0 = R			

$$\text{Assim, } x^4 - x^3 - \frac{79}{9}x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)\left(x^2 - x + \frac{2}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \vee x = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = \frac{\frac{4}{3}}{2} \vee x = \frac{\frac{2}{3}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$

Concluindo, a imagem de 0 é $h(0) = -2$ e os zeros são $-3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 3 .

66.

- a) A imagem de zero é 6. Os zeros da função são 2 e 4.
- b) A função é positiva em $\{0, 1\}$.
- c) A função é negativa em $\{3, 5\}$.

67.

- a) A imagem de zero é -2 . Os zeros da função são -3 , 1 e 4 .
- b) A função é positiva em $[-5, -3[\cup]1, 4[$.
- c) A função é negativa em $] -3, 1[\cup]4, 5]$.

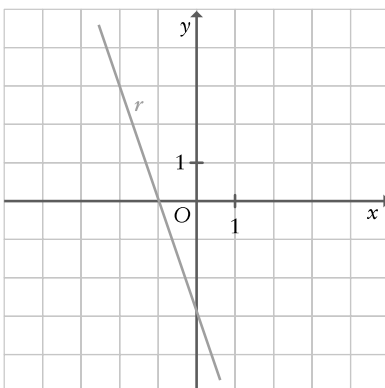
68.

a) Tem-se $h(x) = ax + b$ sendo $y = ax + b$ a equação do gráfico de h . Tem-se $a = \frac{3}{-1} = -3$ e a ordenada na origem b , determina-se substituindo, em $y = -3x + b$, x e y pelas coordenadas de P .

$$3 = -3 \times (-2) + b \Leftrightarrow -b = 6 - 3 \Leftrightarrow b = -3$$

Então, $h(x) = -3x - 3$.

b) Já sabemos que a reta passa em $P(-2, 3)$ e passa também em $Q(0, -3)$.



- c) A função é positiva em $] -\infty, -1[$.
- d) A função é negativa em $] -1, +\infty[$.

69.

O gráfico de h é obtido pela translação horizontal de g associada ao vetor $\vec{v}(2, 0)$. Assim, tem-se $D'_h = D'_g$, portanto, a função h também é positiva em $\mathbb{R}$.

70.

A proposição «A função f é negativa em $\mathbb{R}$.» é verdadeira. Dado que a função é par e dado que é negativa em $\mathbb{R}^+$, também é negativa em $\mathbb{R}^-$, pois objetos simétricos têm imagens iguais. Como $f(0)$ é negativo, conclui-se que f é negativa em $\mathbb{R}$.

A proposição «A função f é negativa em $[0, +\infty[$ e positiva em $] -\infty, 0]$.» é falsa.

71.

a) $D'_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) A função é limitada, pois $\forall x \in A, 1 \leq f(x) \leq 9$.

72.

O conjunto de chegada é $\mathbb{R}^+$: $\forall x \in D_g, g(x) > 0$.

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 5$, pode concluir-se que $\forall x \in D_g, 0 \leq g(x) \leq 5$ e, portanto, a função g é limitada.

73.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$-3 \leq g(x) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \times 2 \leq 2 \times g(x) \leq 4 \times 2 \Leftrightarrow -6 \leq 2g(x) \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \times (-6) \geq -2g(x) \geq -1 \times 8 \Leftrightarrow 6 \geq -2g(x) \geq -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 5 \geq -2g(x) + 5 \geq -8 + 5 \Leftrightarrow 11 \geq -2g(x) + 5 \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq h(x) \leq 11$$

Assim, a função h é limitada pois, $\forall x \in \mathbb{R}, -3 \leq h(x) \leq 11$.

74.

a) g é majorada; 0 é um majorante.

h é majorada; 4 é um majorante.

i é majorada; 16 é um majorante.

k é majorada; 3 é um majorante.

b) f é minorada; 0 é um minorante.

h é minorada; -5 é um minorante.

i é minorada; -6 é um minorante.

k é minorada; 0 é um minorante.

c) Conclui-se que as funções limitadas são: h , i e k , pois são funções simultaneamente minoradas e majoradas.

75.

De $\forall x \in A, -4 < f(x) < 6$ conclui-se que $D'_f \subset]-4, 6[$ e de $\forall x \in B, -1 < g(x) < 8$ conclui-se que $D'_g \subset]-1, 8[$. Então, $D'_h \subset]-4, 6[\cup]-1, 8[$, ou seja, $D'_h \subset]-4, 8[$.

Portanto, $\forall x \in A \cup B, -4 < h(x) < 8$, ou seja, h é uma função limitada.

76.

Se f é limitada, então existem números reais m e M tais que $\forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$, isto é, $D'_f \subset [m, M]$.

Dado que $D'_g \subset D'_f$, então $D'_g \subset [m, M]$ e, portanto, $\forall x \in D_g, m \leq g(x) \leq M$, o que traduz que g é uma função limitada.

77.

- a)** A afirmação «A função f é crescente em $\{1, 2, 3\}$.» é verdadeira, pois $f(1) < f(2) < f(3)$.
- b)** A afirmação «A função f é crescente em $\{1, 2, 3, 4\}$.» é falsa. Tem-se $f(3) = f(4)$ e, para f ser crescente em $\{1, 2, 3, 4\}$, teria de ser $f(3) < f(4)$.
- c)** A afirmação «A função f é crescente em sentido lato em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.» é falsa. Observa na tabela que $f(4) > f(5)$. Para f ser crescente em sentido lato em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ teria de ser $f(4) \leq f(5)$.
- d)** A afirmação «A função f é crescente em sentido lato em $\{2, 3, 4\}$.» é verdadeira, pois $f(2) < f(3) \leq f(4)$.
- e)** A afirmação «A função f é decrescente em $\{4, 5, 6\}$.» é verdadeira, pois $f(4) > f(5) > f(6)$.
- f)** A afirmação «A função f é decrescente em $\{3, 4, 5\}$.» é falsa. Tem-se $f(3) = f(4)$ e, para f ser decrescente em $\{3, 4, 5\}$, teria de ser $f(3) > f(4)$.
- g)** A afirmação «A função f é decrescente em sentido lato em $\{3, 4, 5, 6\}$.» é verdadeira, pois $f(3) \geq f(4) > f(5) > f(6)$.
- h)** A afirmação «A função f é constante em $\{3, 4\}$.» é verdadeira, pois $f(3) = f(4)$.

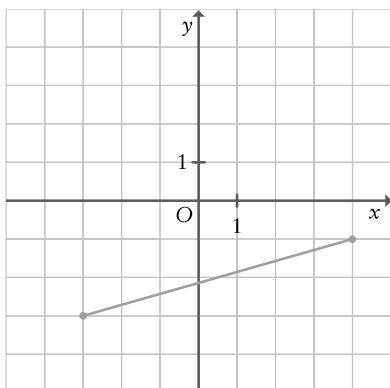
78.

- a)** A afirmação «A função f é crescente em $[-1, 3]$.» é verdadeira.
- b)** A afirmação «A função f é decrescente em $[-5, -1]$.» é verdadeira.
- c)** A afirmação «A função f é decrescente em $[-4, -2]$.» é verdadeira. Repara que, sendo f decrescente em $[-5, -1]$, também é decrescente em qualquer intervalo contido nesse.
- d)** A afirmação «A função f é crescente em sentido lato em $[-1, 4]$.» é falsa. Observa no gráfico que $f(4) < f(3)$. Para f ser crescente em sentido lato teria de ser $f(4) \geq f(3)$.
- e)** A afirmação «A função f é decrescente em $[-5, -1] \cup [3, 5]$.» é falsa. Repara que, por exemplo, -2 e 4 pertencem a $[-5, -1] \cup [3, 5]$, -2 é menor do que 4 , e $f(-2)$ é também menor do que $f(4)$.

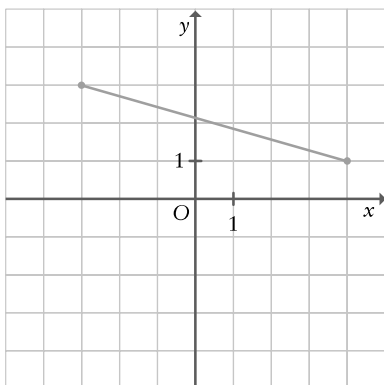
É importante perceberes que o facto de uma função ser decrescente (crescente) em A e em B , com $A \cap B = \emptyset$, não permite concluir que a função seja decrescente (crescente) em $A \cup B$.

79.

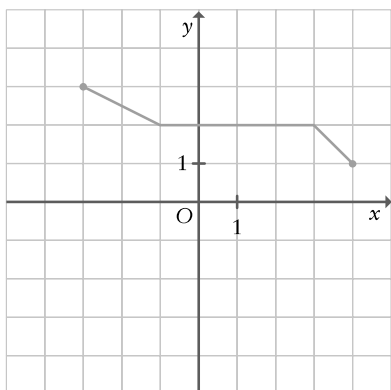
- a)** Por exemplo:



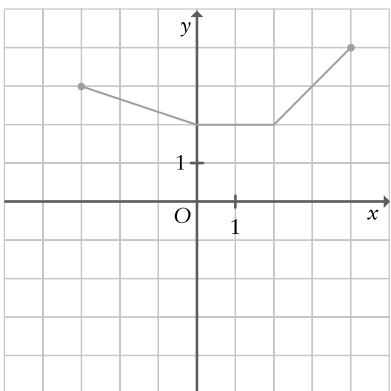
b) Por exemplo:



c) Por exemplo:



d) Por exemplo:



80. Se a função é decrescente, então $g(1) > g(3)$. Assim, a única opção é a (C).

81.

a) Tem-se, para quaisquer reais a e b :

$$f(b) > f(a) \Leftrightarrow 3b - 4 > 3a - 4 \Leftrightarrow 3b > 3a \Leftrightarrow b > a$$

Portanto, $f(b) > f(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow f(b) > f(a)$.

b) Tem-se, para quaisquer reais a e b :

$$g(b) < g(a) \Leftrightarrow -b + 2 < -a + 2 \Leftrightarrow -b < -a \Leftrightarrow b > a$$

Portanto, $g(b) < g(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow g(b) < g(a)$.

82.

Tem-se, para quaisquer reais a e b :

$$b > a \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow -f(b) > -f(a) \Rightarrow g(b) > g(a)$$

Portanto, $b > a \Rightarrow g(b) > g(a)$.

83.

a) $D'_f = \{-3, -1, 0, 1, 2, 5\}$

b) O mínimo absoluto é -3 (a menor das imagens).

c) O máximo absoluto é 5 (a maior das imagens).

84.

a) A função g é uma função afim, definida por uma expressão do tipo $ax + b$, com $a = -2$.

Portanto, a função g é uma função decrescente, o seu contradomínio é $[g(3), g(-1)]$.

Dado que $g(-1) = 4 + 2 = 6$ e $g(3) = 4 - 6 = -2$, tem-se $D'_g = [-2, 6]$.

b) -2 é mínimo absoluto e 6 é máximo absoluto.

85.

a) Por definição, $V_2(5) =]5 - 2, 5 + 2[=]3, 7[$.

b) Por definição, $V_1(-4) =]-4 - 1, -4 + 1[=]-5, -3[$.

c) Por definição, $V_{0,25}\left(\frac{3}{4}\right) = \left]\frac{3}{4} - \frac{1}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right[= \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

86.

a) $[-3, 5] \cap V_2(4) = [-3, 5] \cap]4 - 2, 4 + 2[= [-3, 5] \cap]2, 6[=]2, 5]$

b) $[-4, +\infty[\cap V_1(-4) = [-4, +\infty[\cap]-4 - 1, -4 + 1[= [-4, +\infty[\cap]-5, -3[= [-4, -3[$

87.

a) $D'_f = [-4, 4]$

b) O máximo absoluto é 4 .

c) O mínimo absoluto é -4 .

d) 3 é máximo relativo, sendo -5 o respetivo maximizante, e 4 é máximo relativo, sendo 3 o respetivo maximizante.

e) -3 é mínimo relativo, sendo -1 o respetivo minimizante, e -4 é mínimo relativo, sendo 5 o respetivo minimizante.

88. Como n é par, tem-se, para qualquer número real x , $x^n \geq 0$, donde vem $ax^n \geq 0$, pois $a > 0$.

Daqui resulta que $ax^n - b \geq -b$.

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -b$.

Por outro lado, tem-se $f(0) \geq -b$.

Como $f(0) = -b$ e como $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -b$, vem que $-b$ é a menor das imagens.

Portanto, $-b$ é o mínimo absoluto da função f .

89.

a) Tem-se $A(a, 5a^2)$ e $B(b, 5b^2)$.

O declive da reta AB é $\frac{5b^2 - 5a^2}{b - a} = \frac{5(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{5(b - a)(b + a)}{b - a} = 5(b + a) = 5a + 5b$

b) O declive da reta PQ é $5p + 5q$.

O declive da reta QR é $5q + 5r$.

Como $p < r$, tem-se $5p < 5r$, pelo que $5p + 5q < 5q + 5r$.

Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

90.

Sejam A e B dois pontos do gráfico de f de abscissas a e b , respetivamente, com $a > b$.

Tem-se $A(a, -3a^2 + 2a + 6)$ e $B(b, -3b^2 + 2b + 6)$.

O declive da reta AB é:

$$\begin{aligned} & \frac{-3b^2 + 2b + 6 - (-3a^2 + 2a + 6)}{b - a} = \\ & = \frac{3a^2 - 3b^2 - 2a + 2b}{b - a} = \frac{3(a^2 - b^2) - 2(a - b)}{b - a} = \\ & = \frac{3(a - b)(a + b) - 2(a - b)}{b - a} = \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{b - a} = \\ & = \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{-(a - b)} = \\ & = -[3(a + b) - 2] = 2 - 3a - 3b \end{aligned}$$

Sejam P , Q e R três pontos do gráfico da função f , de abscissas p , q e r , respetivamente, com $p < q < r$.

O declive da reta PQ é $2 - 3p - 3q$ e o declive da reta QR é $2 - 3q - 3r$. Como $p < r$, tem-se $-3p > -3r$, pelo que $2 - 3p - 3q > 2 - 3q - 3r$. Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

Capítulo 4 | Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções

Págs. 110 a 127

91.

As expressões (A), (B) e (C) definem funções polinomiais.

Repara que $x^2 + (\sqrt{x^2 + 1} + 3)^2 - 6\sqrt{x^2 + 1}$ é equivalente a

$$x^2 + x^2 + 1 + 2 \times \sqrt{x^2 + 1} \times 3 + 9 - 6\sqrt{x^2 + 1}$$

e, portanto, é equivalente a $2x^2 + 10$.

92.

a) Tem-se $f(x) = a(x - 5)^2 - 4$; substituindo $f(x)$ e x pela ordenada e pela abcissa de P obtém-se:

$$8 = a(3 - 5)^2 - 4 \Leftrightarrow 8 = 4a - 4 \Leftrightarrow -4a = -8 - 4 \Leftrightarrow a = 3$$

A função f é definida por $f(x) = 3(x - 5)^2 - 4$.

b) O eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 5$.

c) O eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 5$. Tem-se $P(3, 8)$ e, portanto, $P(5 - 2, 8)$; então, as coordenadas de Q são $(5 + 2, 8)$, ou seja, $Q(7, 8)$.

93.

a₁) Os zeros de f são as soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Os zeros são: -2 e 2 .

a₂) As coordenadas do vértice são $(0, -4)$. O eixo de simetria é a reta de equação $x = 0$ e o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

b₁) Os zeros de g são as soluções da equação $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow af(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \text{ (pois, } a \neq 0\text{)}$$

Os zeros de g são os zeros de f , ou seja, são -2 e 2 .

b₂) A concavidade é voltada para cima já que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e $a > 0$.

b₃) Tem-se $g(x) = a(x^2 - 4) = ax^2 - 4a = a(x - 0)^2 - 4a$.

Então, o vértice do gráfico de g é $V_g(0, -4a)$ e $-4a = -12$.

$$-4a = -12 \Leftrightarrow a = 3$$

c₁) O gráfico de i tem a concavidade voltada para cima, pois o gráfico de i obtém-se do gráfico de g por uma translação horizontal.

c₂) Os zeros de g são -2 e 2 ; aplicando ao gráfico de g a translação associada ao vetor $\vec{v}(h, 0)$, os zeros de i são as abcissas dos pontos de coordenadas $(-2, 0) + (h, 0)$ e $(2, 0) + (h, 0)$. Como o menor zero é 3 , então: $-2 + h = 3$ e, portanto, $h = 5$.

O maior zero é $2 + 5$, ou seja, 7 .

c₃) O gráfico de i obtém-se aplicando ao gráfico de g a translação associada ao vetor $\vec{v}(5, 0)$; o vértice do gráfico de g é o ponto de coordenadas $(0, -12)$, portanto o vértice do gráfico de i é o ponto $V(0 + 5, -12 + 0)$, ou seja, $V(5, -12)$.

d₁) O gráfico da função j obtém-se do gráfico da função i por meio da translação associada ao vetor $\vec{s}(0, k)$. Dado que o vértice do gráfico de i é $V_i(5, -12)$, o vértice do gráfico de j é $V_j(5 + 0, -12 + k)$.

Como $-12 + k = 3$, conclui-se que $k = 9$.

d₂) Pela alínea anterior, sabe-se que $V_j(5, -3)$, logo a parábola que é o gráfico de j tem equação $y = a(x - 5)^2 - 3$.

Como a parábola que é o gráfico de j pode ser obtida do gráfico de g por meio de translações, conclui-se que $a = 3$. Então, $j(x) = 3(x - 5)^2 - 3 = 3(x^2 - 10x + 25) - 3 = 3x^2 - 30x + 72$.

d₃) A área do triângulo $[PQR]$ é dada por $\frac{|y_P| \times \overline{QR}}{2}$ (y_P é a ordenada de P).

A ordenada de P é a imagem de zero: $j(0) = 72$. Portanto, $|y_P| = 72$.

Os zeros da função j são as soluções da equação $j(x) = 0$:

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 30x + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \times 3 \times 72}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{36}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36}{6} \vee x = \frac{24}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 4$$

Portanto, $\overline{QR} = 6 - 4 = 2$.

Finalmente, a área do triângulo $[PQR]$ é $\frac{72 \times 2}{2} = 72$ (unidades de área).

94.

a) O vértice da parábola é o ponto $A(-3, 4)$.

b₁) Uma circunferência de centro em $O(0, 0)$ tem equação: $x^2 + y^2 = r^2$.

O ponto $A(-3, 4)$ pertence à circunferência, portanto $(-3)^2 + 4^2 = r^2$.

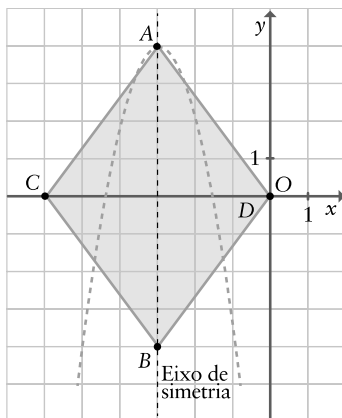
$$(-3)^2 + 4^2 = r^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 25$$

Uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 25$.

b₂) O eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = -3$. Dado que a circunferência tem centro na origem do referencial, se um dos pontos de interseção com a circunferência é $A(-3, 4)$, o ponto B tem coordenadas $(-3, -4)$.

O ponto de interseção da circunferência com o eixo de simetria da parábola é $B(-3, -4)$.

b₃) Observe-se a imagem que traduz o problema.



Os pontos A e B situam-se no eixo de simetria da parábola e o ponto C é o ponto do eixo Ox tal que AB é a mediatriz de $[OC]$, portanto, $C(-6, 0)$.

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \quad (D \text{ designa a diagonal maior do losango e } d \text{ a diagonal menor}).$$

A área é 24 (unidades de área).

95.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad g(x) &= 4x^2 - 12x + 3 = 4(x^2 - 3x) + 3 = 4\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 3 - 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 - 4 \times \frac{9}{4} = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6 \end{aligned}$$

b) O vértice do gráfico da função g é $P\left(\frac{3}{2}, -6\right)$. A reta OP definida pela origem do referencial e pelo vértice P tem declive $m = \frac{-6}{\frac{3}{2}} = -4$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -4x$.

As coordenadas dos pontos de interseção da reta com a parábola são as soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 12x + 3 \\ y = -4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 12x + 3 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 4x^2 - 12x + 3 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 8x - 3 = 0 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 8x - 3 = 0 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-4) \times (-3)}}{2 \times (-4)} \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-8} \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-8} \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8 \pm 4}{-8} \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{-8} \vee x = \frac{-12}{-8} \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2} \\ y = -2 \vee y = -6 \end{cases}$$

As coordenadas de Q são $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

c) As parábolas com vértice no ponto Q têm equações da forma $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$. Como o ponto $R(0, 12)$ pertence à parábola, então, $12 = a\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$.

$$12 = a\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow 14 = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = 56$$

A equação da parábola é: $y = 56\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$.

96.

a) $x^2 - 3x + 4 = \left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

As coordenadas do vértice são $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

b) O eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = \frac{3}{2}$.

c) O ponto A tem coordenadas $(1, g(1))$. Tem-se $g(1) = 1^2 - 3 + 4 = 2$. Portanto, $A(1, 2)$.

O ponto B tem coordenadas $(3, g(3))$. Tem-se $g(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 4 = 4$. Portanto, $B(3, 4)$.

Um vetor diretor da reta AB é o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$ de coordenadas $(3 - 1, 4 - 2) = (2, 2)$.

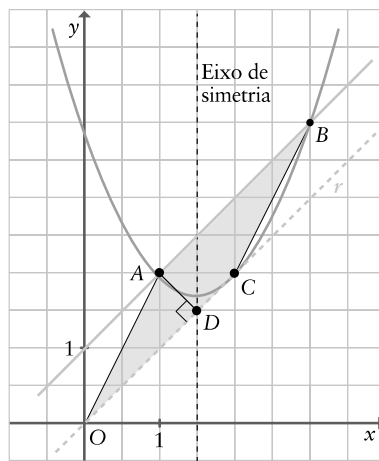
Então, o declive da reta AB é $m = \frac{2}{2} = 1$.

A reta r também tem declive 1 e, como passa na origem, é a reta de equação $y = x$.

As coordenadas do ponto C são a solução do sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = x \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 - 3x + 4 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Portanto, $C(2, 2)$.



As retas AB e OC são paralelas e, dado que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são iguais, conclui-se que o quadrilátero $[OABC]$ é um paralelogramo.

Tomando $[OC]$ para base, a altura é $[AD]$, sendo D a interseção da reta OC com a reta que passa em A e é perpendicular a OC .

Como a reta OC é a bissetriz dos quadrantes ímpares, a reta AD é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e, portanto, tem declive -1 . Dado que passa em $A(1, 2)$, a reta AD é definida por $y = -x + 3$.

As coordenadas de D são a solução do sistema $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x \end{cases}$. Portanto, $D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A área do paralelogramo $[OABC]$ é $\sqrt{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$ (unidades de área).

97.

a₁) $V(-1, -3)$, portanto, a abscissa do vértice é -1 .

a₂) Uma equação do eixo de simetria é $x = -1$.

a₃) A concavidade está voltada para cima.

a₄) Dado que um dos zeros é 2 e o eixo de simetria do gráfico de f é a reta de equação $x = -1$, então o outro zero é $-1 - 3 = -4$. Os zeros são 2 e -4 .

a₅) Atendendo ao sentido da concavidade do gráfico e aos zeros da função, conclui-se que:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 2[$$

$$\text{C.S.} =]-4, 2[$$

b₁) Tem-se: $f(x) = a(x + 1)^2 - 3$.

Como o ponto de coordenadas $(2, 0)$ pertence ao gráfico de f , $0 = a(2 + 1)^2 - 3$.

$$0 = a(2 + 1)^2 - 3 \Leftrightarrow 3 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Uma expressão analítica que define a função é: $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 - 3$.

b₂) O ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas $(0, f(0))$.

$$f(0) = \frac{1}{3}(0 + 1)^2 - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

Então, o ponto tem coordenadas $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$.

98.

A área do triângulo é $\frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2}$; dado que $\overline{AB} = 2$, tem-se $\frac{2 \times \overline{OC}}{2} = 2 \Leftrightarrow \overline{OC} = 2$.

Por outro lado, abscissa do vértice do gráfico de f é $\frac{1+3}{2} = 2$.

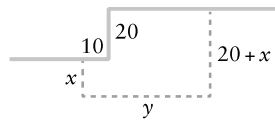
Então, $f(x) = a(x - 2)^2 + k$. Recorrendo às coordenadas de $C(0, 2)$ e de $A(1, 0)$, tem-se:

$$\begin{cases} 2 = a(0 - 2)^2 + k \\ 0 = a(1 - 2)^2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4a + k \\ 0 = a + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4k + k \\ a = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -3k \\ a = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do vértice do gráfico da função são $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$.

99.

a)



Como foram gastos 100 m de rede, tem-se $x + y + (x + 20) = 100$.

$$x + y + (x + 20) = 100 \Leftrightarrow -y = x + x + 20 - 100 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$$

A área do jardim é a diferença entre a área do retângulo de dimensões y e $x + 20$ e a área do retângulo de dimensões 20 e 10.

$$y(x + 20) - 20 \times 10 = (80 - 2x)(x + 20) - 20 \times 10 = 1600 + 80x - 40x - 2x^2 - 200 = \\ = -2x^2 + 40x + 1400$$

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

b) A área máxima é o máximo absoluto de a , que corresponde à ordenada do vértice.

Sendo $y = ax^2 + bx + c$, a abscissa do vértice é $\frac{-b}{2a}$. Neste caso, é $\frac{-40}{-4} = 10$.

Então, a ordenada do vértice é $a(10) = -2 \times 100 + 40 \times 100 + 1400 = -200 + 400 + 1400 = 1600$.

Logo, a área máxima é 1600 m^2 .

100.

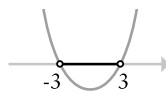
a) $3x^2 - 26 < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 27 < 0$

Cálculos auxiliares: $3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

O gráfico de $y = 3x^2 - 27$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima; então,

$$3x^2 - 27 < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 3[$$

$$\text{C.S.} =]-3, 3[$$

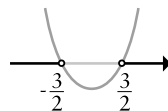


b) $4x^2 > 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 > 0$

Cálculos auxiliares: $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

O gráfico de $y = 4x^2 - 9$ tem concavidade voltada para cima; então, $4x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$



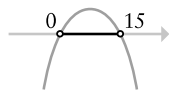
$$\text{c) } 3x > \frac{x^2}{5} \Leftrightarrow 3x - \frac{x^2}{5} > 0$$

Cálculos auxiliares:

$$3x - \frac{x^2}{5} = 0 \Leftrightarrow x \left(3 - \frac{x}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3 - \frac{x}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 15$$

O gráfico de $y = 3x - \frac{x^2}{5}$ tem a concavidade voltada para baixo; então, $3x - \frac{x^2}{5} > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 15[$.

C.S. = $]0, 15[$



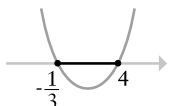
$$\text{d) } 3x^2 - 11x \leq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 4 \leq 0$$

$$3x^2 - 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 4 \times 3 \times 4}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 13}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 4$$

O gráfico de $y = 3x^2 - 11x - 4$ tem a concavidade voltada para cima; então,

$$3x^2 - 11x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 4 \right].$$

C.S. = $\left[-\frac{1}{3}, 4 \right]$



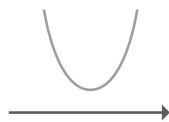
$$\text{e) } x^2 + 7 \geq 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 \geq 0$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

A equação é impossível; o gráfico de $y = x^2 - 5x + 7$ tem a concavidade voltada para cima e não interseca o eixo Ox ; por isso, a função definida por $y = x^2 - 5x + 7$ é positiva em $\mathbb{R}$.

C.S. = $\mathbb{R}$



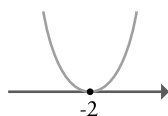
f) Cálculos auxiliares:

$$3x^2 + 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 3 \times 12}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-12}{6} \Leftrightarrow x = -2$$

A equação tem apenas uma solução; o gráfico de $y = 3x^2 + 12x + 12 = 0$ tem a concavidade voltada para cima e vértice em $V(-2, 0)$.

Então, $3x^2 + 12x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$$\text{C.S.} = \{-2\}$$



g) $4x - 5 \geq x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 5 \geq 0$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 5 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

A equação é impossível; a função definida por $-x^2 + 4x - 5$ não possui zeros e o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo; então, a condição $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ é impossível.

$$\text{C.S.} = \emptyset$$



h) $(x + 2)^2 - (2x - 1)(2x + 1) \geq 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - (4x^2 - 1) \geq 5 \Leftrightarrow$

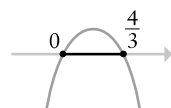
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x^2 + 1 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x \geq 0$$

Cálculos auxiliares:

$$-3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$$

O gráfico de $y = -3x^2 + 4x$ tem a concavidade voltada para baixo; então, $-3x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

$$\text{C.S.} = \left[0, \frac{4}{3}\right]$$



101.

a) $g(12) = \frac{12^2}{48} + \frac{12}{6} = \frac{144}{48} + \frac{12}{6} = 3 + 2 = 5$

Ao meio-dia estavam 5 litros de gás tóxico no ar da oficina.

b) O problema é traduzido pela condição $g(t) > 8 \wedge t \in [8, 20]$.

$$g(t) > 8 \Leftrightarrow \frac{1}{48}t^2 + \frac{1}{6}t - 8 > 0$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{t^2}{48} + \frac{t}{6} - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 8t - 384 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 1536}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-8 \pm 40}{2} \Leftrightarrow t = 16 \vee t = 24$$

A parábola que é o gráfico de $y = \frac{t^2}{48} + \frac{t}{6} - 8$ tem a concavidade voltada para cima; então,

$$\frac{t^2}{48} + \frac{t}{6} - 8 > 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty, -24[\cup]16, +\infty[$$

O conjunto-solução do problema é $(]-\infty, -24[\cup]16, +\infty[) \cap [8, 20] =]16, 20]$. O ambiente tornou-se irrespirável a partir das 16 h.

102.

a) f não é quadrática se $m^2 - 4 = 0$.

$$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 2$$

A função f não é uma função quadrática se $m \in \{-2, 2\}$.

b) f tem um único zero se a equação $f(x) = 0$ tiver uma única solução. Essa situação surge se $f(x)$ for um polinómio do 1.º grau, ou se, sendo um polinómio do 2.º grau, o binómio discriminante for 0 ($\Delta = 0$).

$f(x)$ é um polinómio de 1.º grau se $m^2 - 4 = 0$, ou seja, se $m = 2$ ou $m = -2$.

O binómio discriminante é zero se $b^2 - 4ac = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 = -25 \Leftrightarrow m^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2} \vee m = \frac{5}{2}$$

Portanto, a função terá apenas um zero se $m \in \left\{-\frac{5}{2}, -2, 2, \frac{5}{2}\right\}$.

c) f é sempre positiva se a parábola correspondente estiver voltada para cima e não interseção o eixo Ox , o que significa que o coeficiente de x^2 tem de ser positivo e a função não deve possuir zeros, ou seja, $\Delta < 0$.

$$\text{Então, } \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 3^2 - 4 \times (m^2 - 4) \times 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 25 - 4m^2 < 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 2$$

$$25 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2} \vee m = \frac{5}{2}$$

$$\text{Então: } m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\text{ e } 25 - 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[.$$

$$\text{Portanto, } m \in (]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[) \cap \left(]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[) \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[.$$

d) A função f tem dois zeros se $\Delta > 0$, ou seja, se $25 - 4m^2 > 0$ e é negativa entre os zeros se a concavidade do gráfico estiver voltada para cima, ou seja, se $m^2 - 4 > 0$.

$$\text{Recorrendo à alínea anterior, tem-se: } m \in (]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[) \cap \left(]-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[) \Leftrightarrow m \in \left]-\frac{5}{2}, -2\right[\cup \left]2, \frac{5}{2}\right[.$$

103.

- a) A expressão define uma função cúbica de coeficientes: $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = 1$.
- b) A expressão não define uma função cúbica.
- c) A expressão define uma função cúbica; a expressão é equivalente a $\frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{2} + \frac{x}{2}$ cujos coeficientes são: $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$ e $d = 0$.
- d) A expressão não define uma função cúbica; a expressão $x^2(x - 1) - (x - 1)^2x$ é equivalente a $x^2 - x$.
- e) A expressão define uma função cúbica; a expressão é equivalente a $-4x^3 + 4x^2 - x$ cujos coeficientes são: $a = -4$, $b = 4$, $c = -1$ e $d = 0$.
- f) A expressão define uma função cúbica; a expressão é equivalente a $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ de coeficientes: $a = 8$, $b = -12$, $c = 6$ e $d = -1$.

104.

- a) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$.
A função tem um único zero que é 2.
- b) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$.
Os zeros são: $-\sqrt{2}$, 0 e $\sqrt{2}$.
- c) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $\frac{2x^3 - x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$.
Os zeros são: 0 e $\frac{1}{2}$.
- d) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $2(x + 1)(2 - x)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee 2 - x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$.
Os zeros são: -1 , 2 e 3.
- e) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $\frac{(x + 1)^3}{2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1$.
A função tem um único zero que é -1 .
- f) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$:
 $(x^2 + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (repara que a equação $x^2 + 1 = 0$ é impossível)
A função tem um único zero que é -3 .
- g) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$: $2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -1$
Os zeros são: -1 , 0 e $\frac{1}{2}$.

h) Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$. Para resolver a equação $-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$ começamos por descobrir um zero. Já sabemos que, se o polinómio $f(x)$ tiver raízes inteiras, serão divisores de 2, ou seja, só podem ser ± 1 ou ± 2 .

Tem-se, por exemplo, $f(1) = -1 + 4 - 5 + 2 = 0$ e, portanto, $f(x)$ é divisível por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & -1 & 3 & -2 & 0 = R \end{array}$$

$$\text{Então, } -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(-x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee -x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \vee x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Os zeros são: 1 e 2.

105.

a) A expressão da função pode ser escrita na forma: $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$, sendo z_1 , z_2 e z_3 os zeros de f . Então, $f(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 2)$.

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow a(-1 + 2)(-1 - 1)(-1 - 2) = 4 \Leftrightarrow 6a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

A função é definida analiticamente por:

$$f(x) = \frac{2}{3}(x + 2)(x - 1)(x - 2) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)(x - 1) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$$

b) Recorrendo à informação sobre as raízes de $f(x)$, tem-se $f(x) = a(x + 1)^2(x - 2)$.

Recorrendo ao teorema do resto, sabe-se que $f(-3) = 10$.

$$f(-3) = 10 \Leftrightarrow a(-3 + 1)^2(-3 - 2) = 10 \Leftrightarrow a \times 4 \times (-5) = 10 \Leftrightarrow -20a = 10 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

A função é definida analiticamente por: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2(x - 2) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$.

c) A raiz 0 pode ter multiplicidade 1 ou 3. No caso de ter multiplicidade 1, $f(x)$ pode ser, por exemplo, da forma $ax(x^2 + 1)$. Recorrendo ao teorema do resto, tem-se $f(-1) = 2$, ou seja, $a(-1)((-1)^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2a = 2 \Leftrightarrow a = -1.$$

A função f pode ser definida por $f(x) = -x(x^2 + 1)$. No caso de a raiz 0 ter multiplicidade 3, tem-se

$f(x) = ax^3$ e, como $f(-1) = 2$, conclui-se que $f(x) = -2x^3$.

106.

a) Os zeros de f são -2 , 1 e 3 e $f(0) = 2$.

Então, $f(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 3) \wedge f(0) = 2$.

$$2 = a(0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) \Leftrightarrow 2 = 6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

A função é definida analiticamente por $f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

b) Os zeros de g são -2 e 1 , sendo -2 raiz dupla e $g(0) = -4$.

Então, $g(x) = a(x + 2)^2(x - 1) \wedge g(0) = -4$.

$$-4 = a(0 + 2)^2(0 - 1) \Leftrightarrow -4 = -4a \Leftrightarrow a = 1$$

A função é definida analiticamente por $g(x) = (x + 2)^2(x - 1)$.

c) Os zeros de h são 1 e 4 , sendo 1 raiz dupla e $h(2) = 1$.

$$h(x) = a(x - 1)^2(x - 4) \wedge h(2) = 1$$

$$1 = a(2 - 1)^2(2 - 4) \Leftrightarrow 1 = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

A função é definida analiticamente por $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2(x - 4)$.

107.

a) A função tem dois zeros que são números simétricos (a e $-a$) e, portanto, o gráfico de f tem de interseção o eixo das abcissas em dois pontos simétricos em relação à origem do referencial.

b) Os zeros de g são $a - 1$, a e $a + 1$, portanto, sendo $A(a - 1, 0)$, $B(a, 0)$ e $C(a + 1, 0)$, tem de ser $\overline{AB} = \overline{BC}$.

c) A função h só tem um zero (a) e o gráfico apresentado é de uma função com dois zeros.

d) O único zero da função é a ; ora, no gráfico apresentado, o zero da função é um número positivo, mas, então, o gráfico, teria de começar por ter a concavidade voltada para baixo, pois a também é o coeficiente do termo de grau 3 do polinómio que define a função j .

108.

$$\mathbf{a)} \quad x^3 < 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) < 0$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$x = 0$$

Num quadro, registamos os zeros e a variação de sinal de x e de $x^2 - 4$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Portanto, $x^3 < 4x \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$.

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup]0, 2[$$

b) Na condição $(1 - x^2)(x + 2) \geq 0$, o primeiro membro já está decomposto em fatores.

Cálculos auxiliares:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Produto	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Portanto, $(1 - x^2)(x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$.

C.S. = $]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$

c) $x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x > -2$

$x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$

C.S. = $]-2, +\infty[$

d) $x(x^2 - 2) > x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2 - x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) > 0$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+3}{2} \vee x = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x(x^2 - 2) > x^2 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty[$

C.S. = $[-1, 0] \cup [2, +\infty[$

e) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \leq x^3 - x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 1) \leq x(x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2} - x\right) \leq 0$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$\frac{1}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{2} - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Produto	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Portanto, $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \leq x^3 - x \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$.

C.S. = $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

f) $(2 - x)(x - 3)^2 < 0$; nesta condição, o primeiro membro já está decomposto em fatores.

Cálculos auxiliares:

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$(x - 3)^2 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$2 - x$	+	0	-	-	-
$(x - 3)^2$	+	+	+	0	+
Produto	+	0	-	0	-

$$(2 - x)(x - 3)^2 < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[\setminus \{3\}$$

g) $2x^3 + 2 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x^3 + 2 < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 < 0$

Se $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ tiver uma raiz inteira, só poderá ser -1 ou 1 .

Tem-se $2 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 2 \times (-1) + 1 = -2 - 1 + 2 + 1 = 0$; portanto, decompondo o polinómio $2x^3 - x^2 - 2x - 1$ em fatores:

	2	-1	-2	1
-1		-2	3	-1
	2	-3	1	<u>$0 = R$</u>

Então, $2x^3 - x^2 - 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 3x + 1) < 0$.

Cálculos auxiliares:

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$2x^2 - 3x + 1$	+	+	+	0	-	0	+
Produto	-	0	+	0	-	0	+

Portanto, $2x^3 + 2 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 1[$.

C.S. = $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 1[$

109. $a(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(x - 3) < 0$ (pois $a < 0$)

Cálculos auxiliares:

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Portanto, $a(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]2, 3[$.

C.S. = $]-\infty, -1[\cup]2, 3[$

110.

a) Os zeros inteiros de f são divisores do termo independente de $f(x)$ e, portanto, só podem ser ± 1 ou ± 2 .

Verificando, por exemplo, que -1 e 1 são zeros de $f(x)$, podemos usar estes zeros para decompor $f(x)$ em fatores.

-1	2	3	-4	-3	2
		-2	-1	5	-2
	2	1	-5	2	$0 = R$
1		2	3	-2	
	2	3	-2	$0 = R$	

Portanto, $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(2x^2 + 3x - 2) \leq 0$.

Cálculos auxiliares:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + 5}{4} \vee x = \frac{-3 - 5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Os zeros da função f são: $-2, -1, \frac{1}{2}, 1$.

x	$-\infty$	-2		-1		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2 + 3x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Produto	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Portanto, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

C.S. = $[-2, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x = x(x^3 + 3x^2 - 4)$

Facilmente se conclui que 1 é raiz do polinómio $x^3 + 3x^2 - 4$ e utilizamos essa raiz para decompor este polinómio em fatores.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 = R \end{array}$$

Então, $x^4 + 3x^3 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + 4x + 4) \leq 0$.

Cálculos auxiliares:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} \Leftrightarrow x = -2$$

Portanto, $x^4 + 3x^3 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^2 \leq 0$.

Os zeros da função f são: $-2, 0, 1$, sendo -2 uma raiz dupla.

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Produto	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [0, 1]$

C.S. = $\{-2\} \cup [0, 1]$

c) Seja $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^3$.

Os zeros da função são -1 e 2 , com multiplicidade 2 e 3, respetivamente.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$(x + 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 2)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$

C.S. = $]-\infty, 2]$

111.

a) Os zeros de f são $-2, 0, 2$ e 3 e $f(1) = 1$.

Então, $f(x) = ax(x-3)(x-2)(x+2) \wedge f(1) = 1$.

$f(1) = a(1-3)(1-2)(1+2) \Leftrightarrow 1 = 6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

A função f é definida analiticamente por $f(x) = \frac{1}{6}x(x-3)(x-2)(x+2)$.

b) Os zeros de g são -2 e 1 , sendo -2 e 1 raízes de multiplicidade 2, e $g(0) = 1$.

Então, $g(x) = a(x+2)^2(x-1)^2 \wedge g(0) = 1$.

$$g(0) = a(0+2)^2(0-1)^2 \Leftrightarrow 1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

A função é definida analiticamente por $g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$.

c) Os zeros de h são -3 e 1 , sendo que estas raízes têm multiplicidade ímpar, e $f(0) = 3$.

Poderia ser $h(x) = a(x+3)^3(x-1) \wedge h(0) = 3$ ou $h(x) = a(x+3)(x-1)^3 \wedge h(0) = 3$, mas, a análise da mudança do sentido da concavidade do gráfico, sugere, acertadamente, que a primeira hipótese é a correta.

$$h(0) = a(0+3)^3(0-1) \Leftrightarrow 3 = -27a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{27} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{9}$$

A função é definida analiticamente por $h(x) = -\frac{1}{9}(x+3)^3(x-1)$.

112.

a) Tem-se $f(1) = 0$ e, também, recorrendo ao teorema do resto, $f(-1) = -4$. Portanto:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 9 = 0 \\ -a + b - 9 = -4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} a + b - 9 = 0 \\ -a + b - 9 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 - a \\ -a + 9 - a - 9 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 - a \\ -2a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 - 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 2 \end{cases}$$

b₁) Tem-se $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$ e sabemos que 1 é zero de f . Então, recorrendo à regra de Ruffini:

	2	7	0	-9
1		2	9	9
	2	9	9	0 = R

Portanto, $2x^3 + 7x^2 - 9 = (x-1)(2x^2 + 9x + 9)$.

Determinemos as raízes do polinómio do 2.º grau, recorrendo à fórmula resolvente.

$$2x^2 + 9x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 + 3}{4} \vee x = \frac{-9 - 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{6}{4} \vee x = -\frac{12}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -3$$

Então, $2x^2 + 9x + 9 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+3)$ e, finalmente, $2x^3 + 7x^2 - 9 = 2(x-1)(x+3)\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

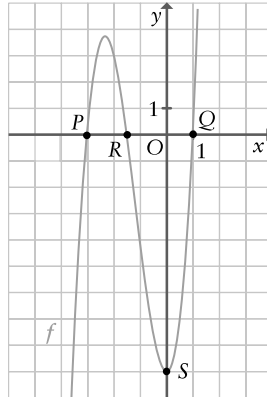
b₂)

x	$-\infty$	-3		$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x + \frac{3}{2}$	-	-	-	0	+	+	+
Produto	-	0	+	0	-	0	+

b₃) Começemos por assinalar os pontos de interseção com os eixos: $P(-3, 0)$, $Q(1, 0)$, $R(-\frac{3}{2}, 0)$, $S(0, -9)$.

Dado que o coeficiente do termo de grau 3 é positivo, sabemos que o gráfico começa por ter a concavidade voltada para baixo.

O gráfico terá melhor qualidade se determinarmos as coordenadas de mais alguns pontos do gráfico.



b₄) O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x) + k$ obtém-se por meio de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0, k)$. Da observação do gráfico da função f , conclui-se que, para que a função h tenha apenas um zero e ele seja negativo, é necessário deslocar o gráfico de f de modo que a imagem de S tenha ordenada positiva; dado que a ordenada de S é -9 , conclui-se que $k \in]9, +\infty[$.

113.

a) As abscissas dos pontos de interseção são as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x = 2x(x - 1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Calculemos, por exemplo, $g(0)$, $g(-1)$ e $g(2)$ para obtermos as ordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos:

$$g(0) = 0$$

$$g(-1) = 4$$

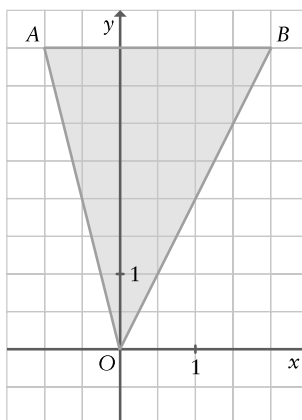
$$g(2) = 4$$

As coordenadas dos pontos de interseção são: $(0, 0)$, $(-1, 4)$ e $(2, 4)$.

b) O polígono determinado pelos três pontos da alínea anterior é um triângulo.

Representando esses pontos num referencial e observando que dois dos vértices têm a mesma ordenada, somos levados a tomar $[AB]$ para base; consequentemente, a altura vai ser a ordenada dos pontos A e B .

Portanto, $\text{Área}_{[ABO]} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.



O perímetro é dado por $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}$.

$$\overline{OA} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}, \quad \overline{OB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{AB} = 3$$

O perímetro é, portanto, $3 + 2\sqrt{5} + \sqrt{17}$ (unidades de comprimento).

114.

a) Vamos determinar a área do triângulo $[BCD]$ tomando $[BC]$ para base; a altura será $[OD]$.

Portanto, a área é $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ (unidades de área).

b) Os zeros de f são -1 , 2 e 3 .

O gráfico da função h definida por $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ obtém-se aplicando ao gráfico de f uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Os zeros de h são, portanto, -2 , 4 e 6 .

O gráfico da função j definida por $j(x) = f(-x)$ obtém-se do gráfico de f por meio de uma reflexão de eixo Oy .

Os zeros de j são, portanto, -3 , -2 e 1 .

c) O gráfico da função t definida por $t(x) = f(x - k)$ obtém-se aplicando ao gráfico de f uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(k, 0)$. Observando o gráfico de f , concluímos que a imagem de B tem de ter abscissa negativa e a abscissa da imagem de C tem de manter-se positiva; portanto, a função t tem um zero positivo e dois zeros negativos se $-3 < k < -2$.

d) As coordenadas do ponto do gráfico de f que tem abscissa 1 são $(1, f(1))$.

$$\text{Tem-se } f(1) = \frac{(1+1)(1-2)(1-3)}{3} = \frac{4}{3}.$$

Seja $E\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

A reta definida pelos pontos $A(-1, 0)$ e $E\left(1, \frac{4}{3}\right)$ tem declive $m = \frac{\frac{4}{3} - 0}{1 - (-1)} = \frac{2}{3}$; a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{2}{3}x + b$. Dado que $0 = \frac{2}{3} \times (-1) + b$, conclui-se que a ordenada na origem é $b = \frac{2}{3}$; portanto, a equação reduzida da reta é $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

As coordenadas dos pontos de interseção são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{3} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = (x+1)(x-2)(x-3) \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = (x+1)(x-2)(x-3) \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) - (x+1)(x-2)(x-3) = 0 \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(2 - (x-2)(x-3)) = 0 \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \vee 2 = (x-2)(x-3) \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee 2 = x^2 - 5x + 6 \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ 3y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = \frac{5 \pm 3}{2} \\ y = \frac{2x + 2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{10}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

A reta AE interseca o gráfico de f nos pontos A e E e no ponto de coordenadas $\left(4, \frac{10}{3}\right)$.

115.

Começamos por determinar os zeros da função g :

$$\begin{aligned} \frac{8x^2 + 10x - 2x^3}{5} = 0 &\Leftrightarrow 8x^2 + 10x - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x(8x + 10 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 8x + 10 - 2x^2 = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{-4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{-4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-8 + 12}{-4} \vee x = \frac{-8 - 12}{-4} &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Portanto, a abcissa do ponto P pertence ao intervalo $]0, 5[$.

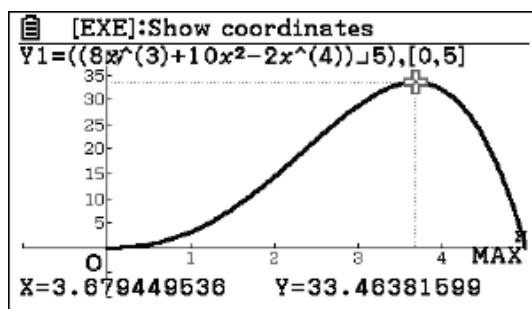
Sejam $P\left(x, \frac{8x^2 + 10x - 2x^3}{5}\right)$, $O(0, 0)$ e $Q(0, y)$ de tal modo que $\overline{OP} = \overline{PQ}$.

De acordo com a igualdade anterior, os pontos O e Q formam uma base sobre o eixo Oy e desse modo o ponto P será um ponto pertencente à mediatriz do segmento $[OQ]$ e, assim, a ordenada de Q é $y = \frac{2(8x^2 + 10x - 2x^3)}{5}$.

A área será, então, determinada pela função a , cuja expressão é:

$$a(x) = \frac{\frac{2(8x^2 + 10x - 2x^3)}{5} \times x}{2} = \frac{x(8x^2 + 10x - 2x^3)}{5}$$

No referencial seguinte está uma representação do gráfico de a e assinalado o ponto A , onde é atingido o valor máximo da área do triângulo $[OPQ]$.



A área máxima é atingida quando $x \approx 3,7$.

116.

$f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = \frac{2}{2} = 1$; $f(3) = 3^2 = 9$; $f(4) = \frac{4}{2} = 2$. Então $D_f' = \{1, 2, 9\}$.

117.

a) Como -1 é racional, $g(-1) = \frac{-1}{2}$. Como $\sqrt{4}$ é racional, $g(\sqrt{4}) = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$. Como $\sqrt{5}$ é irracional, $g(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Como $\frac{6}{5}$ é racional, $g\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{3}{5}$. Como $\frac{1}{\pi}$ é irracional, $g\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi$. Como $-\sqrt{\frac{9}{4}}$ é racional, $g\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right) = \frac{-\sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$.

b) Da definição da função g , conclui-se que as imagens dos racionais são racionais e as imagens dos irracionais são irracionais.

$$\frac{2}{x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ ou seja, o objeto cuja imagem é } \sqrt{3} \text{ é } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, \text{ ou seja, o objeto cuja imagem é } \frac{2}{3} \text{ é } \frac{4}{3}.$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \text{ ou seja, o objeto cuja imagem é } -\frac{1}{4} \text{ é } -\frac{1}{2}.$$

118.

$$\mathbf{a)} \quad f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1; \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1; \quad f(3) = 6 - 1 = 5;$$

$$f(a^2 + 2) = 2(a^2 + 2) - 1 = 2a^2 + 4 - 1 = 2a^2 + 3$$

b) $f(x) = 8 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 8 \wedge x < 0) \vee (2x - 1 = 8 \wedge x \geq 0)$

Tem-se: $x^2 - 1 = 8 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -3$.

$2x - 1 = 8 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 2x = 9 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

Os objetos que possuem imagem 8 são: -3 e $\frac{9}{2}$.

C.S. = $\left\{-3, \frac{9}{2}\right\}$

c) Seja $f|_{[-2,3]}$. O gráfico da função é constituído por parte da parábola da equação $y = x^2 - 1$ e parte da reta de equação $y = 2x - 1$.

O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(0, -1)$ e a parábola intersesta o semieixo negativo Ox no ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

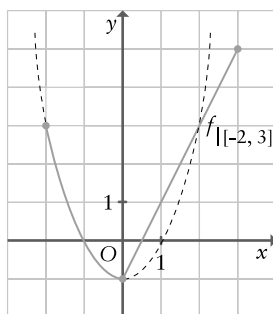
$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$

O gráfico da restrição de f ao intervalo $[0, 3]$ é um segmento de reta de extremos $(0, f(0))$ e $(3, f(3))$.

$f(0) = -1$

$f(3) = 5$

O gráfico da restrição de f ao intervalo $[-2, 3]$ é:



$D'_f|_{[-2,3]} = [-1, 5]$

119.

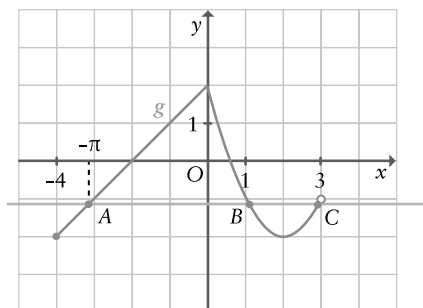
a₁) As soluções da equação são as abscissas dos pontos do gráfico de ordenada -1 ; esses pontos são $P(-3, -1)$ e $Q(1, -1)$.

C.S. = $\{-3, 1\}$

a₂) As soluções da inequação são as abscissas dos pontos do gráfico com ordenada menor do que -1 .

C.S. = $[-4, -3[\cup]1, 3[$

b)



$g(-\pi)$ é a ordenada do ponto do gráfico de abscissa $-\pi$ (ponto A).

A reta de equação $y = g(-\pi)$ intersesta o gráfico da função em três pontos, A , B e C . Portanto, a equação tem três soluções que são as abscissas desses pontos.

c) A função é injetiva em qualquer intervalo contido em $[-4, 0]$, em $[0, 2]$ ou em $[2, 3]$.

d)

x	-4		0		2	3
g	Mín. -2	$\nearrow$	Máx. 2	$\searrow$	Mín. -2	$\nearrow$

e) A função g é definida por ramos: no intervalo $[-4, 0]$ é definida por uma função afim e, no intervalo $]0, 3[$ é definida por uma função quadrática.

Seja $A(-4, -2)$ e seja $B(0, 2)$; tem-se $\overrightarrow{AB}(4, 4)$. O declive da reta AB é 1 e ela intersesta o eixo Oy em 2.

Portanto, a equação da reta que contém $[AB]$ é $y = x + 2$.

O gráfico da função quadrática é parte da parábola com vértice $V(2, -2)$ e que passa em $(0, 2)$ e, portanto, tem equação $y = (x - 2)^2 - 2$.

A função $g: [-4, 3[\mapsto \mathbb{R}$ é definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \in [-4, 0] \\ (x - 2)^2 - 2 & \text{se } x \in]0, 3[\end{cases}$$

120.

Vamos começar por determinar as coordenadas de A e de B . O ponto B , ponto de interseção com o eixo Oy , tem ordenada $h(0) = 6$. Conclui-se que $B(0, 6)$.

A abscissa de A é a solução da equação $h(x) = 0$.

Tem-se: $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3 + x^2 - 2x = 0 \wedge x < 0) \vee (x^2 - 4x + 6 = 0 \wedge x \geq 0)$.

$$x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Esta equação é impossível, e, portanto, não existem zeros em $\mathbb{R}_0^+$.

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2$$

Ora, $(x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Conclui-se que $A(-2, 0)$. Tem-se $\overrightarrow{AB}(2, 6)$ e, portanto, $m_{AB} = \frac{6}{2} = 3$.

Assim, a equação reduzida de AB é $y = 3x + 6$.

A reta r paralela a AB e que passa no ponto P tem equação reduzida $y = 3x - 6$.

As coordenadas dos pontos C e D são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = x^2 - 4x + 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

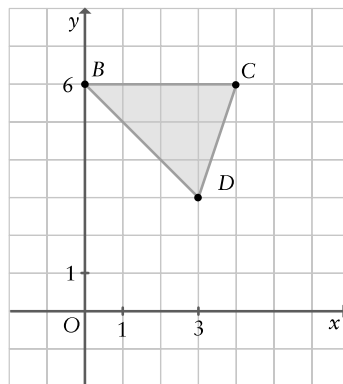
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 12}}{2} \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm 1}{2} \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Então: $B(0, 6)$, $C(4, 6)$ e $D(3, 3)$.

Representando os pontos num referencial, o facto dos pontos B e C terem a mesma ordenada, sugere que se tome $[BC]$ para base.

Desse modo, a diferença entre as ordenadas de B e de D , ou seja, $h = 6 - 3 = 3$, é a altura do triângulo.



A área do triângulo é, então, $A = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ (unidades de área).

121.

- O gráfico da função f é a reunião de duas semirretas com declives simétricos e origem no ponto de coordenadas $(2, 0)$. A função f é definida por $f(x) = a|x - 2|$. O ponto $(0, 1)$ pertence ao gráfico de f , então, $1 = a|0 - 2|$ e, portanto, $a = \frac{1}{2}$ e, assim, $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2|$.
- O gráfico da função g é a reunião de duas semirretas com declives simétricos e origem no ponto de coordenadas $(1, 1)$. A função g é definida por $g(x) = a|x - 1| + 1$. O ponto $(0, 3)$ pertence ao gráfico de g , então, $3 = a|0 - 1| + 1$, ou seja, $a = 2$ e, assim, $g(x) = 2|x - 1| + 1$.
- O gráfico da função h é a reunião de duas semirretas com declives simétricos e origem no ponto de coordenadas $(-1, 3)$. A função h é definida por $h(x) = a|x + 1| + 3$. O ponto $(0, 2)$ pertence ao gráfico de h , então, $2 = a|0 + 1| + 3$, ou seja, $a = -1$ e, assim, $g(x) = -|x + 1| + 3$.

122.

$$f(x) = -2|x - 1| + 1 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2(-x + 1) + 1 & \text{se } x - 1 < 0 \\ -2(x - 1) + 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

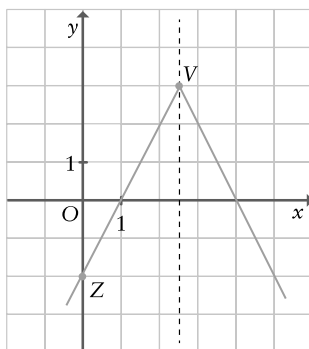
$$g(x) = |2x - 3| - 2 \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -2x + 3 - 2 & \text{se } 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 - 2 & \text{se } 2x - 3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 1 & \text{se } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 5 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

123.

$$3 - |5 - 2x| = 3 - |2x - 5| = -|2x - 5| + 3 = -2\left|x - \frac{5}{2}\right| + 3$$

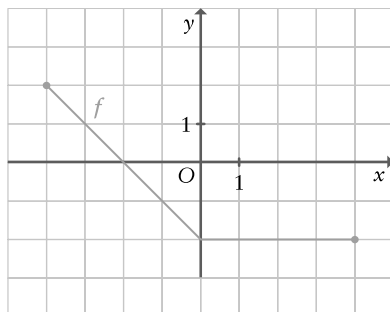
Assim, $f(x) = -2\left|x - \frac{5}{2}\right| + 3$. O vértice do gráfico da função é $V\left(\frac{5}{2}, 3\right)$, a reta $x = \frac{5}{2}$ é eixo de simetria, a imagem de zero é -2 e as semirretas estão «voltadas para baixo», pois $a = -2$.

Reunindo toda a informação, obtém-se o gráfico:

**124.**

- a) Observe-se que o gráfico da função f é constituído por dois segmentos de reta contidos numa reta de declive -1 e ordenada na origem é -2 e numa reta paralela ao eixo Ox .

Assim, o gráfico é:

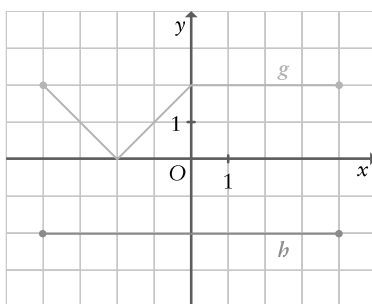


b) A função g é definida por $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$. Portanto, o gráfico de g coincide com o gráfico de f nos pontos de ordenada maior ou igual a zero.

À parte do gráfico de f que está abaixo do eixo Ox aplica-se a reflexão de eixo Ox .

A função h é definida por $h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Portanto, o gráfico de h coincide com o gráfico de f nos pontos de abscissa maior ou igual a zero. Dado que a função h é par ($h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$), o gráfico de h é simétrico em relação ao eixo Oy .

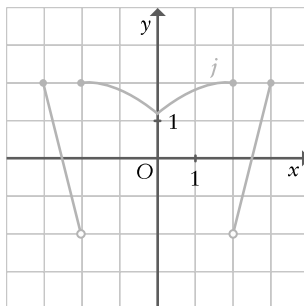
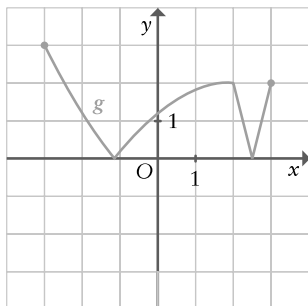
Os gráficos de g e h são:



$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } -4 \leq x < -2 \\ x + 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow h(x) = -2, x \in [-4, 4]$$

125.



126.

a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

O conjunto-solução é C.S. = $\{-2, 2\}$.

b) $|x| - 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} + 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} - 3 \vee x = \sqrt{2} + 3$

O conjunto-solução é C.S. = $\{-\sqrt{2} - 3, \sqrt{2} + 3\}$.

c) $|x| + 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} - 3$

Dado que $\sqrt{2} - 3$ é um número negativo, a equação é impossível.

C.S. = $\emptyset$

d) $|x^3| = 8 \Leftrightarrow x^3 = -8 \vee x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} \vee x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

O conjunto-solução é C.S. = $\{-2, 2\}$.

e) $|1 - 2x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |1 - 2x| = 3 \Leftrightarrow 1 - 2x = 3 \vee 1 - 2x = -3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

O conjunto-solução é C.S. = $\{-1, 2\}$.

f) $|x - 1| = 2 - 3x \Leftrightarrow (x - 1 = 2 - 3x \vee x - 1 = -2 + 3x) \wedge 2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4x = 3 \vee -2x = -1) \wedge -3x \geq -2 \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

O conjunto-solução é C.S. = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

g) $|5x - 1| = |7x + 5| \Leftrightarrow 5x - 1 = 7x + 5 \vee 5x - 1 = -7x - 5 \Leftrightarrow -2x = 6 \vee 12x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -\frac{1}{3}$

O conjunto-solução é C.S. = $\left\{-3, -\frac{1}{3}\right\}$.

h) $x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow |x| = \frac{4 - 2}{2} \vee |x| = \frac{4 + 2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| = 1 \vee |x| = 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -3 \vee x = 3$

O conjunto-solução é C.S. = $\{-3, -1, 1, 3\}$.

i) $|x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow x > -\sqrt{2} \wedge x < \sqrt{2}$

O conjunto-solução é C.S. = $] -\sqrt{2}, \sqrt{2} [$.

j) $\left|1 - \frac{x}{2}\right| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left|1 - \frac{x}{2}\right| \geq 3 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} \leq -3 \vee 1 - \frac{x}{2} \geq 3 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \leq -4 \vee -\frac{x}{2} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 8 \vee x \leq -4$

O conjunto-solução é C.S. = $] -\infty, -4] \cup [8, +\infty [$.

k) $|2x| + 4 > 0 \Leftrightarrow |2x| > -4$

Esta condição é universal. O conjunto-solução é C.S. = $\mathbb{R}$.

l) $|-2x| < 4 \Leftrightarrow |2x| < 4 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x < 2$

O conjunto-solução é C.S. = $] -2, 2 [$.

$$\text{m)} |x^2 + 1| - 5 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 + 1| \geq 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$\text{Portanto, } x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2.$$

O conjunto-solução é C.S. = $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{n)} 4 - |2x - 3| \geq 1 &\Leftrightarrow -|2x - 3| \geq -3 \Leftrightarrow |2x - 3| \leq 3 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq -3 \wedge 2x - 3 \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x \geq 0 \wedge 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 3 \end{aligned}$$

O conjunto-solução é C.S. = $[0, 3]$.

$$\text{o)} |x^2 - 5| \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq -4 \wedge x^2 - 5 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \wedge x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 9 \leq 0$$

Temos de resolver duas inequações do 2.º grau.

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

A condição é equivalente a: $(x \geq -3 \wedge x \leq 3) \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1)$.



O conjunto-solução é C.S. = $[-3, -1] \cup [1, 3]$.

$$\text{p)} |x^2 + 5x - 3| > 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 3 < -3 \vee x^2 + 5x - 3 > 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x < 0 \vee x^2 + 5x - 6 > 0$$

Trata-se da disjunção de duas inequações do 2.º grau.

Cálculos auxiliares:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 1$$

$$x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 0$$

$$x^2 + 5x < 0 \Leftrightarrow x \in]-5, 0[$$

$$x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[$$

O conjunto-solução é C.S. = $]-\infty, -6[\cup]-5, 0[\cup]1, +\infty[$.

$$\text{q)} |x^2 - 3x + 5| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 \geq -2 \wedge x^2 - 3x + 5 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 7 \geq 0 \wedge x^2 - 3x + 3 \leq 0$$

Trata-se da conjugação de duas inequações do 2.º grau.

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$x^2 - 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 28}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-17}}{2}$$

O gráfico de $y = x^2 - 3x + 7$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima que não intersesta o eixo Ox ; portanto, a condição $x^2 - 3x + 7 \geq 0$ é uma condição universal.

O gráfico de $y = x^2 - 3x + 3$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima que não intersesta o eixo Ox ; portanto, a condição $x^2 - 3x + 3 \leq 0$ é uma condição impossível.

Como a conjugação de uma condição impossível com qualquer condição é uma condição impossível, a condição $|x^2 - 3x + 5| \leq 2$ é impossível.

C.S. = $\emptyset$

$$\mathbf{r)} |2x^2 + 5x + 3| \leq 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 \geq -3 \wedge 2x^2 + 5x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 6 \geq 0 \wedge 2x^2 + 5x \leq 0$$

Cálculos auxiliares:

$$2x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-21}}{2}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{2}$$

O gráfico de $y = 2x^2 + 5x + 6$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima que não intersesta o eixo Ox ; portanto, a condição $2x^2 + 5x + 6 \geq 0$ é universal.

O gráfico de $y = 2x^2 + 5x$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima que intersesta o eixo Ox nos pontos de abscissa $-\frac{5}{2}$ e 0 ; portanto, a condição $2x^2 + 5x \leq 0$ é equivalente a $x \in \left[-\frac{5}{2}, 0\right]$.

O conjunto-solução é C.S. = $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$.

$$\mathbf{s)} |2x - 5| > |2x + 1| \Leftrightarrow (2x - 5)^2 > (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 > 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24x > -24 \Leftrightarrow x < 1$$

O conjunto-solução é C.S. = $] -\infty, 1[$.

$$\mathbf{t)} |2x - 5| > |3x + 1| \Leftrightarrow (2x - 5)^2 > (3x + 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 > 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 - 26x + 24 > 0$$

Cálculos auxiliares:

$$-5x^2 - 26x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{676 + 480}}{-10} \Leftrightarrow x = \frac{26 \pm 34}{-10} \Leftrightarrow x = \frac{26 + 34}{-10} \vee x = \frac{26 - 34}{-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{26 + 34}{-10} \vee x = \frac{26 - 34}{-10} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = \frac{4}{5}$$

O gráfico de $y = -5x^2 - 26x + 24$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e, portanto, o conjunto-solução é C.S. = $] -6, \frac{4}{5}[$.

127.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x + 2| = |4 - 2x| \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 16 - 16x + 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 20x - 12 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 20x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 144}}{-6} \Leftrightarrow$$

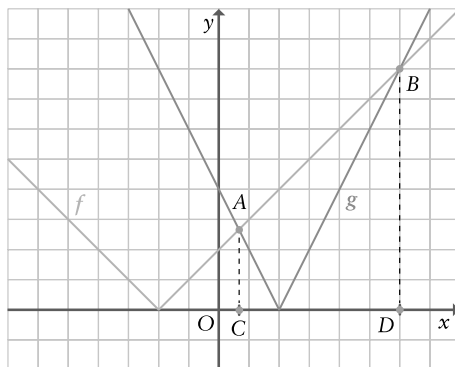
$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm 16}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-6} \vee x = \frac{-36}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 6$$

O conjunto-solução é C.S. = $\left\{\frac{2}{3}, 6\right\}$.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow |x + 2| > |4 - 2x| \Leftrightarrow (x + 2)^2 > (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow -3x^2 + 20x - 12 > 0$$

Como a parábola de equação $y = -3x^2 + 20x - 12$ está voltada para baixo, o conjunto-solução da condição $-3x^2 + 20x - 12 > 0$ é C.S. = $\left] \frac{2}{3}, 6 \right[$.

No referencial seguinte estão representadas graficamente as funções f e g .



Os gráficos interseitam-se nos pontos A e B cujas abscissas são as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

As soluções da inequação $f(x) > g(x)$ são as abscissas dos pontos do segmento $[CD]$.

128.

Dado que 1 e 3 são soluções da condição $|ax - b| = 4$, tem-se:

$$|a - b| = 4 \wedge |3a - b| = 4 \Leftrightarrow (a - b = 4 \vee a - b = -4) \wedge (3a - b = 4 \vee 3a - b = -4) \Leftrightarrow$$

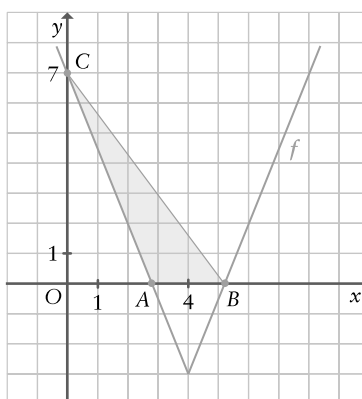
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a - b = 4 \\ 3a - b = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} a - b = -4 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a - b = -4 \\ 3a - b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -4 \\ b = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$$

Dado que $a \neq 0$, concluímos que há duas hipóteses: $a = -4$ e $b = -8$ ou $a = 4$ e $b = 8$.

129.

a) Considere a seguinte representação de f .



As abscissas dos pontos de interseção com o eixo Ox são os zeros de f .

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{|5x-20|}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow |5x-20| = 6 \Leftrightarrow 5x-20 = 6 \vee 5x-20 = -6 \Leftrightarrow x = \frac{26}{5} \vee x = \frac{14}{5}$ e a ordenada do ponto de interseção com o eixo Oy é $f(0) = 7$.

Vamos tomar $[AB]$ para a base e, portanto, a altura correspondente é $[OC]$.

A área do triângulo é $\frac{\left(\frac{26}{5} - \frac{14}{5}\right) \times 7}{2} = \frac{84}{10} = \frac{42}{5} = 8,4$ (unidades de área).

b) A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 4]$ e é crescente em $[4, +\infty[$. A função possui mínimo absoluto igual a -3 , atingido em $x = 4$.

c) O gráfico da função g é obtido do gráfico de f por translação associada ao vetor $\vec{v}(-3, 0)$, seguida de reflexão relativamente ao eixo Ox e seguida de translação associada ao vetor $\vec{u}(0, 2)$.

O contradomínio de f é o intervalo $[-3, +\infty[$; o contradomínio de g é $]-\infty, 3+2]$.

Portanto, $D'_g =]-\infty, 5]$.

130.

O gráfico da função f é o representado a encarnado e o gráfico da função g é o gráfico representado a azul.

Tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - 2 & \text{se } x - 2 < 0 \\ x - 2 - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & \text{se } x < 2 \\ x - 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Portanto, a reta DA é a reta de equação $y = -x$ e a reta DC é a reta de equação $y = x - 4$.

$$g(x) = \begin{cases} 3 - (-x - 1) & \text{se } x + 1 < 0 \\ 3 - (x + 1) & \text{se } x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 & \text{se } x < -1 \\ -x + 2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Portanto, a reta AB é a reta de equação $y = x + 4$ e a reta BC é a reta de equação $y = -x + 2$.

As retas DA e BC são paralelas pois têm ambas declive -1 e as retas AB e DC são paralelas pois têm ambas declive 1 . Por outro lado, as retas AB e DC são perpendiculares às retas DA e BC porque as primeiras são paralelas às bissetrizes dos quadrantes ímpares e as segundas são paralelas às bissetrizes dos quadrantes pares. Portanto, o quadrilátero $[ABCD]$ é um retângulo.

Sabemos que B tem coordenadas $(-1, 3)$ e que D tem coordenadas $(2, -2)$, pois são os vértices dos gráficos g e f , respetivamente. As coordenadas de A são a solução do sistema constituído pelas equações das retas AB e DA :

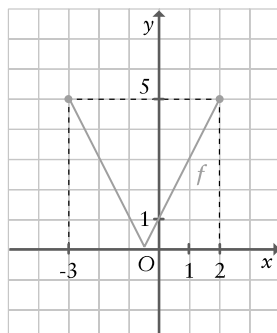
$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x + 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Então, $A(-2, 2)$, $\overline{AB} = \sqrt{(-1+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$ e $\overline{DA} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32}$.

Portanto, a área do triângulo $[ABCD]$ é $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$ (u.a.).

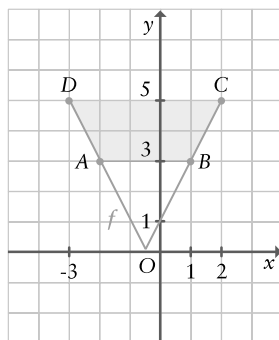
131.

a) O gráfico da função é a reunião de dois segmentos de reta com um extremo no ponto $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e declives simétricos. Tem-se $f(0) = 1$ e, portanto, a representação gráfica da função é:



b) A função é limitada, pois $\forall x \in D_f, 0 \leq f(x) \leq 5$.

c) Dado que as retas de equações $y = 3$ e $y = 5$ são paralelas, o quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio.



As abscissas dos pontos de interseção do gráfico da função com a reta de equação $y = 3$ são as soluções da equação: $|2x + 1| = 3$; $|2x + 1| = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = -3 \vee 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$.

Portanto, $A(-2, 3)$ e $B(1, 3)$.

De modo idêntico se conclui que $C(2, 5)$ e $D(-3, 5)$, pois a equação $|2x + 1| = 5$ é equivalente a $x = -3 \vee x = 2$. Tem-se $\overline{AB} = 1 - (-2) = 3$, $\overline{DC} = 2 - (-3) = 5$ e a altura do trapézio $[ABCD]$ é $5 - 3 = 2$.

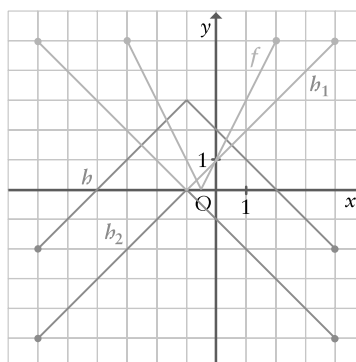
Então, $A_{\text{trapézio}} = \frac{5+3}{2} \times 2 = 8$ (unidades de área).

d₁) Consideremos as funções assim definidas:

$$h_1(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$h_2(x) = -h_1(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$h_3(x) = h_2(x) + 3 = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = h(x)$$



d₂) A função h é crescente no intervalo $[-6, -1]$ e é decrescente no intervalo $[-1, 4]$.

Tem máximo (absoluto) igual a 3, atingido em -1 , e tem mínimo (absoluto) igual a -2 , atingido em -6 e em 4 .
Não tem outros extremos.

132.

O gráfico da função f pode obter-se aplicando ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ a translação associada ao vetor $\vec{v}(2, -1)$; então, $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$.

O gráfico da função g pode obter-se por meio da reflexão de eixo Oy do gráfico de $y = \sqrt{x}$, seguida da translação associada ao vetor $\vec{v}(4, 1)$; então, $g(x) = \sqrt{-(x-4)} + 1$.

133.

$$\sqrt{x+2} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = y + 1 \Leftrightarrow x + 2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow x = (y + 1)^2 - 2$$

A função inversa de h é a função definida por $h^{-1}(x) = (x + 1)^2 - 2$, com $D_{h^{-1}} = D'_h = [-1, +\infty[$ e $D'_{h^{-1}} = D_h = [-2, +\infty[$.

$$x^2 = y \wedge x \in]-\infty, 0] \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

A função inversa de k é a função definida por $k^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, com $D_{k^{-1}} = D'_k = [0, +\infty[$ e $D'_{k^{-1}} = D_k =]-\infty, 0]$.

$$1 + \sqrt{4-x} = y \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = y - 1 \Leftrightarrow 4 - x = (y - 1)^2 \Leftrightarrow x = 4 - (y - 1)^2$$

A função inversa de j é a função definida por $j^{-1}(x) = 4 - (x - 1)^2$, com $D_{j^{-1}} = D'_j = [1, +\infty[$ e $D'_{j^{-1}} = D_j =]-\infty, 4]$.

$$2 - (x - 1)^2 = y \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2 - y \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2 - y} \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2 - y} + 1$$

A função inversa de t é definida por $t^{-1}(x) = \sqrt{2-x} + 1$, com $D_{t^{-1}} = D'_t =]-\infty, 2]$ e $D'_{t^{-1}} = D_t = [1, +\infty[$.

134.

a) $\sqrt{3-2x} = 3 \Leftrightarrow 3-2x = 9 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$. C.S. = $\{-3\}$

b) $\sqrt{2x-1} = x \Rightarrow 2x-1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Verificação: $\sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$ é uma proposição verdadeira.

C.S. = $\{1\}$

c) $\sqrt{2x+1} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -3$. Esta equação é impossível. C.S. = $\emptyset$

d) $\sqrt{3x+1} - 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = x + 1 \Rightarrow 3x + 1 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Verificação: $\sqrt{3 \times 0 + 1} - 1 = 0$ é uma proposição verdadeira. $\sqrt{3 \times 1 + 1} - 1 = 1$ é uma proposição verdadeira.

C.S. = $\{0, 1\}$

$$\text{e)} \sqrt{1-2x} - \sqrt{x+13} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+13} \Rightarrow 1-2x = x+13 \Leftrightarrow -3x = 12 \Leftrightarrow x = -4$$

Verificação: $\sqrt{1-2 \times (-4)} - \sqrt{-4+13} = 0$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{C.S.} = \{-4\}$$

$$\text{f)} 2x + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1-2x \Rightarrow 2-x = (1-2x)^2 \Leftrightarrow 2-x = 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{8} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{4}$$

Verificação: $2 \times 1 + \sqrt{2-1} = 1$ é uma proposição falsa, portanto, 1 não é solução.

$2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{2+\frac{1}{4}} = 1$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

$$\text{g)} 2x = 5 - \sqrt{x^2 + 2x - 15} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = (5 - 2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 25 - 20x + 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 22x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 480}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm 2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \vee x = 4$$

Verificação: $2 \times \frac{10}{3} = 5 - \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{10}{3} - 15}$ é uma proposição falsa.

$2 \times 4 = 5 - \sqrt{4^2 + 2 \times 4 - 15}$ é uma proposição falsa.

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

$$\text{h)} \sqrt{x^2} = x \Leftrightarrow x^2 = x^2 \wedge x > 0$$

Repara que $\sqrt{x^2} = |x|$ e $|x| = x$ se e só se $x \geq 0$.

$$\text{C.S.} = \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{i)} \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 2 - x \Leftrightarrow |x-2| = 2 - x \Leftrightarrow |x-2| = -(x-2);$$

ora, $|x-2| = -(x-2)$ se e só se $x-2 \leq 0$, ou seja, $x \leq 2$.

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$$

$$\text{j)} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \wedge 2-x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x = 2$$

Esta condição é impossível.

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

$$\text{k)} \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \wedge x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge (x = -1 \vee x = 1) \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

$$\text{l)} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt{2-x} \Rightarrow 2x+1 = 2-x \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Verificação: $\sqrt{2 \times \frac{1}{3} + 1} = \sqrt{2 - \frac{1}{3}}$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\text{m)} \sqrt{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow x+1 \leq 9 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 8 \wedge x \geq -1$$

$$\text{C.S.} = [-1, 8]$$

$$\text{n)} 2 - \sqrt{1-x} < 4 \Leftrightarrow -\sqrt{1-x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} > -2. \sqrt{1-x} \text{ designa um número não negativo se e só se } 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 1]$$

$$\text{o)} 1 - \sqrt{2x+1} > x \Leftrightarrow -\sqrt{2x+1} > x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} < 1-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < (1-x)^2 \wedge 2x+1 \geq 0 \wedge 1-x > 0 \Leftrightarrow 2x+1 < 1-2x+x^2 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x < 0 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 1 \Leftrightarrow x(-x+4) < 0 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \vee x > 4) \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 1$$

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$$

$$\text{p)} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} > 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \wedge 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \leq 3$$

$$\text{C.S.} = [-1, 3]$$

$$\text{q)} \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow (x+1 > 0 \wedge 1-x^2 > 0) \vee x = 1 \Leftrightarrow (x > -1 \wedge -1 < x < 1) \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} =]-1, 1]$$

$$\text{r)} \sqrt{x} \geq x \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \geq x^2 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{C.S.} = [0, 1]$$

135.

$$\text{a)} g(0) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{-a} + 2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{-a} = 2 \Leftrightarrow -a = 4 \Leftrightarrow a = -4$$

$$\text{b}_1) g(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 1 \Leftrightarrow x+4 = 1 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{b}_2) g(x) = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + 2 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 2x-2 \Rightarrow x+4 = (2x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+4 = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow 9x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(9-4x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{9}{4}$$

Verificação:

$$\sqrt{0+4} + 2 = 0 \text{ é uma proposição falsa.}$$

$$\sqrt{0+4} + 2 = 2 \times \frac{9}{4} \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{9}{4}\right\}; g\left(\frac{9}{4}\right) = \sqrt{\frac{9}{4}+4} + 2 = \sqrt{\frac{25}{4}} + 2 = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

O ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa tem coordenadas $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)$.

136.

$$\text{a)} (h \circ j)(x) = h[j(x)] = h(\sqrt{5+x}) = \sqrt{5+x} - 1 \text{ e } (j \circ h)(x) = j[h(x)] = j(x-1) = \sqrt{5+x-1} = \sqrt{4+x}.$$

Então, $\exists x \in \mathbb{R}: (h \circ j)(x) \neq (j \circ h)(x)$ e, por isso, h e j não são permutáveis.

$$\begin{aligned} \text{b) } h(x) = j(x) &\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{5 + x} \Rightarrow (x - 1)^2 = 5 + x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5 + x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Verificação:

$4 - 1 = \sqrt{5 + 4}$ é uma proposição verdadeira; $-1 - 1 = \sqrt{5 - 1}$ é uma proposição falsa. Portanto, a única solução é 4.

Os gráficos de f e de g interseitam-se num ponto de abcissa 4.

137.

a) Tem-se: $3 = a\sqrt{16} + b$ e $5 = a\sqrt{9} + b$ (x é expresso em milhares). Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3 = a\sqrt{16} + b \\ 5 = a\sqrt{9} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4a + b \\ 5 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 4a \\ 5 = 3a + 3 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 4a \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 11 \\ a = -2 \end{cases}$$

b) $-2\sqrt{x} + 11 < 2 \Leftrightarrow -2\sqrt{x} < -9 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{9}{2} \Leftrightarrow x > \frac{81}{4}$. O número mínimo é $\frac{81}{4} \times 1000 + 1 = 20251$.

138.

a) $A(10) = \sqrt{180 - 3,6 \times 10} = \sqrt{180 - 36} = \sqrt{144} = 12$. O número de clientes é 12 000.

b) $6 = \sqrt{180 - 3,6p} \Leftrightarrow 6^2 = 180 - 3,6p \Leftrightarrow 3,6p = 180 - 36 \Leftrightarrow p = \frac{144}{3,6} \Leftrightarrow p = 40$. O preço será de 40 €.

c) $A(x) = B(x) \Leftrightarrow \sqrt{180 - 3,6p} = 15 - 0,3p \Rightarrow 180 - 3,6p = (15 - 0,3p)^2 \Leftrightarrow$

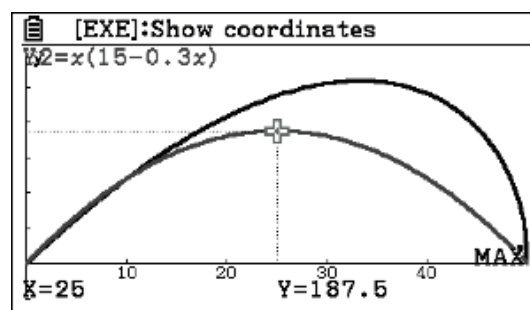
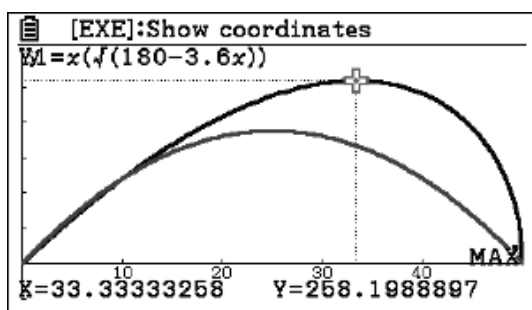
$$\Leftrightarrow 180 - 3,6p = 225 - 9p + 0,09p^2 \Leftrightarrow 0,09p^2 - 5,4p + 45 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{5,4 \pm \sqrt{29,16 - 16,2}}{0,18} \Leftrightarrow p = \frac{5,4 \pm 3,6}{0,18} \Leftrightarrow p = 10 \vee p = 50$$

Quer 10 quer 50 são soluções da equação $A(x) = B(x)$, mas, no contexto do problema, só 10 faz sentido. Assim, o preço é 10 €.

d) A receita é dada pelo produto do número de unidades vendidas pelo preço por unidade. A receita de MatA é dada por $R_A(p) = p \times \sqrt{180 - 3,6p}$ e a receita de MatB é dada por $R_B(p) = p \times (15 - 0,3p)$, com $p \in]0, 50[$. Conclui-se que é o MatA que permite obter uma maior receita.

Recorrendo à calculadora, conclui-se que o máximo de R_A é aproximadamente igual a 258 199 e o máximo de R_B é 187 500.



139.

Os pontos que distam 5 unidades de P pertencem à circunferência de centro P e raio 5.

A equação reduzida dessa circunferência é $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

Os pontos pedidos têm coordenadas: $(-1, -2)$ e $(-\frac{9}{5}, -\frac{18}{5})$.

As coordenadas dos pontos da reta r que distam 5 unidades de P são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (2x + 5)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 20x + 25 = 25 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 180}}{10} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-14 \pm 4}{10} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

140.

a) Seja $P(x, 2x)$ o ponto do gráfico de f cuja ordenada é o dobro da abscissa. Como o ponto pertence ao gráfico da função, então $2x = f(x)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - 2x} - 1 &= 2x \Leftrightarrow \sqrt{5 - 2x} = 2x + 1 \Rightarrow 5 - 2x = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 5 - 2x = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 10}{8} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, apenas $\frac{1}{2}$ é solução. Então, $P(\frac{1}{2}, 1)$.

Verificação:

$$\sqrt{5 - 2 \times (-2)} - 1 = 2 \times (-2) \text{ é uma proposição falsa;}$$

$$\sqrt{5 - 2 \times \frac{1}{2}} - 1 = 2 \times \frac{1}{2} \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{5 - 2x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{5 - 2x} = y + 1 \Leftrightarrow 5 - 2x = (y + 1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5 - (y + 1)^2}{2}$$

A função inversa é definida por $f^{-1}(x) = \frac{5 - (x + 1)^2}{2}$, $D_{f^{-1}} = D'_f = [-1, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, \frac{5}{2}]$.

141.

a) Pelo enunciado, $d(O, A) = 5$ e $A(x, \sqrt{5x + 1})$ (pois A é ponto do gráfico de f). Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{5x + 1})^2 &= 25 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 + 11}{2} \vee x = \frac{-5 - 11}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -8 \text{ (3 é a única solução de acordo com o enunciado).} \end{aligned}$$

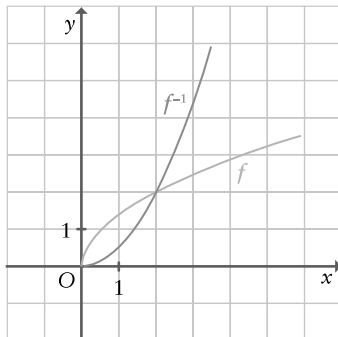
Assim: $A(3, 4)$, $B(3, 0)$, $C(x, \sqrt{5x+1})$ e, então, $A_{[ABC]}(x) = \frac{4 \times (x-3)}{2} = 2x - 6$. Como o ponto C tem abscissa maior do que A , então $x > 3$ e, logo, $D_{A_{[ABC]}(x)} =]3, +\infty[$.

b) Pelo enunciado: $A_{[ABC]}(x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 6 = 6 \Leftrightarrow x = 6$. A abscissa é 6.

142.

a) $y = \sqrt{2x} \Leftrightarrow 2x = y^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}$

Então, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}$, $D_{f^{-1}} = D'_f = [0, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = [0, +\infty[$.



b₁) Se o ponto $P(x, y)$ pertence ao gráfico de f , então $y = \sqrt{2x}$, ou seja, as coordenadas de P são $(2, \sqrt{2x})$. Então:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x})^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x} = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$$

b₂) $d(A, P) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 9} = \sqrt{6} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 9 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. Então, as coordenadas dos pontos são $(1, f(1))$ e $(3, f(3))$, ou seja, $(1, \sqrt{2})$ e $(3, \sqrt{6})$.

b₃) Vamos determinar o mínimo da função definida em $[0, +\infty[$ por $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$. Esta função atinge o mínimo em 2. Portanto, o ponto do gráfico de f mais próximo de A é o ponto de coordenadas $(2, f(2))$, ou seja, $(2, \sqrt{4}) = (2, 2)$.

143.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \wedge x < 2 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3) \wedge x < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$

Conclui-se, portanto, que -1 é um zero de f .

$\sqrt{x-2} - 3 = 0 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 = 9 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x = 11$

Conclui-se, portanto, que 11 é zero de f .

Os zeros de f são -1 e 11.

b) $f(66) = \sqrt{66-2} - 3 = 5$

$$x^2 - 2x - 3 = 5 \wedge x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \wedge x < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \wedge x < 2 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 4) \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = -2$$

A função definida por $\sqrt{x-2} - 3$ é injetiva e, portanto, a única solução de $\sqrt{x-2} - 3 = f(66)$ é 66. Então, as soluções da equação $f(x) = f(66)$ são -2 e 66.

c) Tem-se $C(0, 1)$. O ponto B é o ponto de coordenadas $(0, f(0))$; como $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3$, tem-se $B(0, -3)$. Como A está a igual distância de B e de C , sabe-se que pertence à mediatriz do segmento $[BC]$ e como B e C têm abscissas iguais, a mediatriz de $[BC]$ é uma reta paralela a Ox , é a reta de equação $y = \frac{-3+1}{2} = -1$. Então, a ordenada de A é -1. Dado que A pertence ao gráfico de f e tem abscissa superior a 2, a abscissa de A é a solução da equação $\sqrt{x-2} - 3 = -1$.

$$\sqrt{x-2} - 3 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6, \text{ logo } A(6, -1) \text{ e } d(A, C) = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Finalmente, Perímetro} = d(C, B) + d(A, B) + d(A, C) = 4 + 4\sqrt{10}.$$

144.

a) Zeros da função para $x \in [-2, 1[$: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Ora, $(x = -1 \vee x = 3) \wedge x \in [-2, 1[\Leftrightarrow x = -1$. Portanto, -1 é zero de g .

Zeros da função para $x \in [1, 17]$: $4 - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$. Dado que $17 \in [1, 17]$, conclui-se que 17 é zero de g .

Os zeros de g são -1 e 17.

b) $g(x) > 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 2x + 3 > 0 \wedge -2 \leq x < 1) \vee (4 - \sqrt{x-1} > 0 \wedge 1 < x \leq 17)$

Cálculos auxiliares:

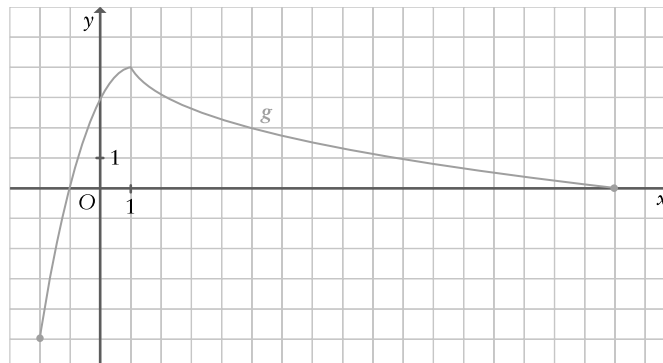
$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$\text{Portanto, } -x^2 + 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[.$$

$$4 - \sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < 4 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x < 17 \Leftrightarrow x \in [1, 17[$$

$$\text{Então, } g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (]-1, 3[\cap [-2, 1]) \cup [1, 17[\Leftrightarrow x \in]-1, 17[$$

c)



d) A função é crescente em $[-2, 1]$ e é decrescente em $[1, 17]$; o máximo absoluto é 4, atingido em 1 e o mínimo absoluto é -5, atingido em -2; não há outros extremos.

145.

a) $\sqrt[3]{3-x} = 2 \Leftrightarrow 3-x = 8 \Leftrightarrow x = -5$

C.S. = $\{-5\}$

b) $2 - 3\sqrt[3]{1-2x} = 11 \Leftrightarrow -3\sqrt[3]{1-2x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = -3 \Leftrightarrow 1-2x = -27 \Leftrightarrow x = 14$

C.S. = $\{14\}$

c) $\sqrt[3]{x^2+3x-1} = 3 \Leftrightarrow x^2+3x-1 = 27 \Leftrightarrow x^2+3x-28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 4$

C.S. = $\{-7, 4\}$

d) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = x^2-1 \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

C.S. = $\{-1, 2\}$

e) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = -(x^2-1) \Leftrightarrow x^2+x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

C.S. = $\{-1, 0\}$

f) $\sqrt[3]{x^3+1} = x+1 \Leftrightarrow x^3+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+1 = (x+1)^2(x+1) \Leftrightarrow x^3+1 = (x^2+2x+1)(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+1 = x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow 3x^2+3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

C.S. = $\{-1, 0\}$

g) $\frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{8}} \geq 1 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{\frac{1-x}{8}} \geq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1-x}{8}} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{8} \leq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 1-x \leq -1 \Leftrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2$

C.S. = $[2, +\infty[$

h) $2 + \sqrt[3]{8-x^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8-x^2} > -2 \Leftrightarrow 8-x^2 > -8 \Leftrightarrow 16-x^2 > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

C.S. = $] -4, 4[$

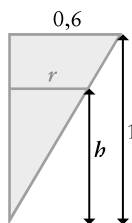
i) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} > -\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow x+3 > -x-1 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$

C.S. = $[-2, +\infty[$

146.

a) $V_{\text{cone}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 0,6^2 \times 1}{3} = 0,12\pi \text{ (m}^3\text{)}$

b)



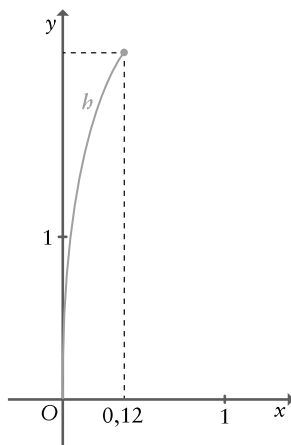
Recorrendo à semelhança de triângulos, tem-se $r = 0,6h$ e, portanto:

$$v(h) = \frac{1}{3} \times \pi \times (0,6h)^2 \times h = \frac{0,36}{3} \times \pi \times h^2 \times h = 0,12\pi h^3$$

c) Relembra que 1 litro = 1 dm³ = 1000 cm³.

Então: $48\,000 = 0,12\pi h^3 \Leftrightarrow h^3 = \frac{48\,000}{0,12\pi} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{48\,000}{0,12\pi}} \Rightarrow h \approx 50,3$. A altura é, aproximadamente, 50 cm.

d) Seja v o volume do líquido no recipiente. Como $v = 0,12\pi h^3$, tem-se $h^3 = \frac{v}{0,12\pi} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{v}{0,12\pi}}$. A função é definida por: $h(v) = \sqrt[3]{\frac{v}{0,12\pi}}$, $D_h = [0; 0,12\pi]$ e $D'_h = [0, 1]$. O gráfico é:



147.

a) Zeros da função para $x \in]-\infty, 0]$: $\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = -2 \Leftrightarrow x-1 = -8 \Leftrightarrow x = -7$. Dado que $-7 \in]-\infty, 0]$, conclui-se que -7 é zero de f .

Zeros da função para $x \in]0, +\infty[$: $-2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$. Dado que $\frac{1}{2} \in]-\infty, 0]$ e $-1 \notin]0, +\infty[$, conclui-se que $\frac{1}{2}$ é zero de f .

Os zeros de f são -7 e $\frac{1}{2}$.

A imagem de zero é $f(0) = \sqrt[3]{0-1} + 2 = 1$.

$$\mathbf{b)} \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1} + 2 > 0 \wedge x \leq 0) \vee (-2x^2 - x + 1 > 0 \wedge x > 0)$$

Cálculos auxiliares:

$$\sqrt[3]{x-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} > -2 \Leftrightarrow x-1 > -8 \Leftrightarrow x > -7$$

$$-2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$-2x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$$

$$\text{Então, } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (]-7, +\infty[\cap]-\infty, 0]) \cup \left(\left]-1, \frac{1}{2}\right[\cap]0, +\infty[\right) \Leftrightarrow x \in \left]-7, \frac{1}{2}\right[.$$

Conclui-se que a função é positiva no intervalo $\left]-7, \frac{1}{2}\right[$.

148.

$$\mathbf{a_1)} \quad (f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 1 = 1$$

$$\mathbf{a_2)} \quad (f \times g)(5) = f(5) \times g(5) = -1 \times 3 = -3$$

$$\mathbf{a_3)} \quad (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 0$$

$$\mathbf{b_1)} \quad D_{(f-g)} = D_f \cap D_{2g} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{b_2)} \quad D_{\left(\frac{g}{f}\right)} = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \{1, 3, 5\}$$

$$\mathbf{b_3)} \quad D_{\left(\frac{f}{g-1}\right)} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 1\} = \{3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{c)} \quad (f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \wedge x \in D_{f \times g} \Leftrightarrow (f(x) = 0 \vee g(x) = 0) \wedge x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Repara que a função g não tem zeros.

Os zeros são $\{2, 4\}$.

149.

$$\mathbf{a_1)} \quad (h - f)(1) = h(1) - f(1) = -2 - (-2) = 0$$

$$\mathbf{a_2)} \quad (f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = -4 \times 1 = -4$$

$$\mathbf{a_3)} \quad (f \circ h)(3) = f(h(3)) = f(\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2} - 2 - 3 = \sqrt{2} - 5$$

$$\mathbf{b_1)} \quad D_{\left(\frac{h}{f}\right)} = D_h \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = [1, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{3\} = [1, +\infty[\setminus \{3\}$$

$$\mathbf{b_2)} \quad D_{\left(\frac{f}{h}\right)} = D_f \cap \{x \in D_h : h(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[\setminus \{5\} = [1, +\infty[\setminus \{5\}$$

$$\mathbf{b_3)} \quad D_{(h \circ g)} = \{x \in D_g : g(x) \in D_h\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

150.

a₁) $(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - (-2) = 4$

a₂) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = f(2) : g(2) = 1 : (-2) = -\frac{1}{2}$

b₁) $D\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

b₂) $D_{(\sqrt{g})} = \{x \in D_g : g(x) \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

b₃) $D\left(\frac{1}{\sqrt[3]{f}}\right) = \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) Tem-se que $4 \in D_{f \times g}$ e $(f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = -1 \times 4 = -4$. Portanto, o ponto de coordenadas $(4, -4)$ pertence ao gráfico de $f \times g$.

d) $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 1 - 2 = -1$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3 \Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$. C.S. = $\{0, 3\}$

f) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Assim: $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. As soluções da equação são as abscissas dos pontos em que os gráficos se interseitam. Os zeros são -1 e 3 .

g) Pela definição: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$. Assim: $(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) \geq 0$.

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	0	-
$g(x)$	+	0	-	0	+
$f(x) \times g(x)$	+	0	-	0	-

C.S. = $]-\infty, 0] \cup \{3\}$

h) O gráfico de f é uma reta com declive $m = -1$ e ordenada na origem $b = 3$, logo, $f(x) = -x + 3$. O gráfico de g é uma parábola com a concavidade voltada para cima e zeros: 0 e 3 , logo, $g(x) = ax(x - 3)$. Como $g(-1) = 4$ tem-se $a \times (-1) \times (-4) = 4 \Leftrightarrow a = 1$. Portanto, $g(x) = x(x - 1)$. O domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$.

i) $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x(-x + 3)(x - 3) = x(-x^2 + 6x - 9) = -x^3 + 6x^2 - 9x$. Como o domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$, então o domínio de $f \times g$ também é $\mathbb{R}$.

151.

a) A soma de duas funções afins pode ter um zero, pode não ter zeros ou pode ter uma infinidade de zeros, consoante a soma seja uma função polinomial de grau 1, constante, não nula, ou a função nula.

Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -4x + 2$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = -2x + 3$, que tem um zero.

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x + 2$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = 3$ e não tem zeros.

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = 0$ e tem uma infinidade de zeros.

b) A soma de uma função quadrática com uma função afim é sempre uma função quadrática e, portanto, pode não ter zeros, ter um zero ou ter dois zeros, como se apresenta nos exemplos seguintes.

Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$ e não tem zeros.
- Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 + 1$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1$ e tem um zero.
- Se $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 + x - 1$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 4x$ e tem dois zeros.

152.

a) A função $f + g$ não tem zeros. As retas r e s têm declives simétricos e a mesma ordenada na origem e, portanto, $(f + g)(x) = 2b$, com $b \neq 0$.

A função $f - g$ toma o valor zero na abcissa do ponto em que os gráficos das funções se intersectam, pois:

$$(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Neste caso, como os gráficos se intersectam no ponto $(0, b)$, conclui-se que 0 é o zero de $f - g$.

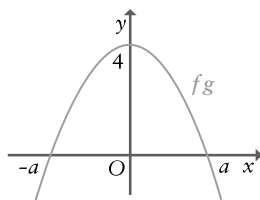
A função $f \times g$ tem dois zeros: a e $-a$.

$$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$$

O zero da função $\left(\frac{f}{g}\right)$ é o zero de f .

$$\left(\frac{f}{g}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = a$$

b) Como f e g são funções polinomiais de grau 1, a função $f \times g$ é uma função quadrática. O seu gráfico é uma parábola que intersecta o eixo Ox nos pontos de abcissa a e $-a$. Como as retas r e s têm declives de sinais contrários, a parábola que é o gráfico de $f \times g$ tem a concavidade voltada para baixo. Este pode ser a representação gráfica de $f \times g$.



153.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 6 - x \geq 0\} =]-\infty, 6]$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$

b) $D_h = D_g \cap D_f = [2, 6]$

$$\begin{aligned} \text{Zeros de } h: h(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x} = 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-2} = \sqrt{6-x} \Rightarrow (2 + \sqrt{x-2})^2 = 6-x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2 = 6-x \Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 4-2x \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 2-x \Rightarrow 4(x-2) = (2-x)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x-8 = 4-4x+x^2 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6 \end{aligned}$$

Verificamos que 2 satisfaz a equação inicial, mas 6 não satisfaz essa equação. Portanto, o único zero da função é 2.

154.

$$a_1) (f + g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 0 = -1$$

$$a_2) (g \times f)(-2) = g(-2) \times f(-2) = -3 \times 1 = -3$$

$$a_3) \left(\frac{g}{2f}\right)(-3) = g(-3) : 2(f(-3)) = -8 : 4 = -2$$

$$a_4) (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(0) = 1$$

$$b_1) D\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = [-3, 3] \cap \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = [-3, 3] \setminus \{-1, 1\}$$

$$b_2) D_{(\sqrt{f})} = \{x \in D_f : f(x) \geq 0\} = [-3, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right]$$

$$b_3) D_{(\sqrt{g})} = \{x \in D_g : g(x) \geq 0\} = [-1, 1]. \text{ (A função } g \text{ é positiva entre as raízes.)}$$

c) A função $f + g$ é definida por três expressões correspondentes aos intervalos $[-3, 0[$, $[0, 2[$ e $[2, 3]$.

$$\text{Tem-se } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ -1 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2x - 5 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \text{ então, } (f + g)(x) = \begin{cases} -x - x^2 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 2x - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

155.

$$a) D_{(f+g)} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$D\left(\frac{g}{f}\right) = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) $(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. As soluções desta equação são as abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos. O gráfico de f é uma reta de declive -1 que passa no ponto de coordenadas $(2, 0)$.

Intersecta o gráfico de g em três pontos, portanto a função $f - g$ tem três zeros.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0$. A função $\frac{f}{g}$ não possui zeros, pois o único zero de f , que é 2 , também é zero de g .

$$c) (f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x) \times g(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

Então, $(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Tema 5 | Estatística

Capítulo 1 | Características amostrais

Págs. 129 a 136

1.

a) Por exemplo, $\sum_{n=1}^6 n^3$

b) Por exemplo, $\sum_{n=1}^3 \frac{13}{4+n}$ ou $\sum_{n=5}^7 \frac{13}{n}$.

c) Por exemplo, $\sum_{n=10}^{13} \sqrt{n}$ ou $\sum_{n=1}^3 \sqrt{9+n}$.

2.

a) $\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

b) $\sum_{j=1}^3 (j \times 2^j) = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 = 2 + 8 + 24 = 34$

c) $\sum_{p=1}^5 (2p-1)^2 = (2 \times 1 - 1)^2 + (2 \times 2 - 1)^2 + (2 \times 3 - 1)^2 + (2 \times 4 - 1)^2 + (2 \times 5 - 1)^2 =$
 $= 1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$

d) $\sum_{i=1}^6 [i(i+1)] = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + 4(4+1) + 5(5+1) + 6(6+1) =$
 $= 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 = 112$

e) $\sum_{n=1}^6 (-2n)^n = (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6 = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 = 42$

3.

a) A proposição é verdadeira.

b) A proposição é falsa. $\sum_{k=1}^{20} (1+k^2) = \sum_{k=1}^{20} 1 + \sum_{k=1}^{20} k^2 = 20 + \sum_{k=1}^{20} k^2$

c) A proposição é verdadeira. $\sum_{n=1}^{30} (n+2)(n-2) = \sum_{n=1}^{30} (n^2 - 4) = \sum_{n=1}^{30} n^2 - 120$

d) A proposição é verdadeira. $\sum_{m=1}^{20} \frac{m^2 + 6m + 9}{m+3} = \sum_{m=1}^{20} \frac{(m+3)^2}{m+3} = \sum_{m=1}^{20} (m+3) = \sum_{m=1}^{20} m + \sum_{m=1}^{20} 3 = \sum_{m=1}^{20} m + 60 = 60 + \sum_{m=1}^{20} m$

4.

$$a) \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^{50} (10j) - 7 \sum_{j=1}^{50} j \right) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{50} (10j - 7j) = \sum_{j=1}^{50} \left(\frac{1}{3} 3j \right) = \sum_{j=1}^{50} j$$

$$b) \sum_{k=1}^{60} (k-2)^2 + 4 \sum_{k=1}^{60} k = \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4) + \sum_{k=1}^{60} (4k) = \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4 + 4k) = \sum_{k=1}^{60} (k^2 + 4) = \sum_{k=1}^{60} k^2 + \sum_{k=1}^{60} 4 = \\ = \sum_{k=1}^{60} k^2 + 240 = 240 + \sum_{k=1}^{60} k^2$$

c)

$$\sum_{p=1}^{70} \frac{(p+4)^2}{6} - \sum_{p=1}^{70} \frac{(p-4)^2}{6} = \sum_{p=1}^{70} \frac{p^2 + 8p + 16}{6} - \sum_{p=1}^{70} \frac{p^2 - 8p + 16}{6} = \sum_{p=1}^{70} \frac{p^2 + 8p + 16 - p^2 + 8p - 16}{6} = \sum_{p=1}^{70} \frac{16p}{6} = \frac{8}{3} \sum_{p=1}^{70} p$$

d)

$$\sum_{n=1}^{80} (3^{n+1} - 2^{n+2}) - 2 \sum_{n=1}^{80} 3^n + 3 \sum_{n=1}^{80} 2^n = \sum_{n=1}^{80} (3 \times 3^n - 4 \times 2^n - 2 \times 3^n + 3 \times 2^n) = \sum_{n=1}^{80} [(3-2) \times 3^n + (-4+3) \times 2^n] = \sum_{n=1}^{80} (3^n - 2^n)$$

5.

$$a) \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{3} = x + \sum_{k=1}^{18} \frac{k}{3} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{18} \frac{k}{3} + \frac{19}{3} + \frac{20}{3} = x + \sum_{k=1}^{18} \frac{k}{3} \Leftrightarrow \frac{39}{3} = x \Leftrightarrow x = 13$$

$$b) \sum_{k=1}^{15} (k+x) = \sum_{k=6}^{16} (k+x) \Leftrightarrow \sum_{k=6}^{15} (k+x) + 16 + x \Leftrightarrow \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 x = 16 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 + 5x = 16 + x \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

6.

$$\bar{x} = \frac{1,4 + 1,8 + 1,58 + 1,56 + 1,6 + 1,5 + 1,85 + 1,65 + 1,48 + 1,68 + 1,8 + 1,3}{12} = \frac{19,2}{12} = 1,6. \text{ A média é 1,6 horas por dia.}$$

O Pedro não cumpriu as recomendações da mãe.

7.

$$a) \bar{x} = \frac{9,2 + 10,2 + 10,6 + 9,1 + 10,8 + 9,9 + 11,1 + 9,3 + 11,2 + 10,5 + 9,5 + 10,7 + 9,8 + 10,9}{14} = \frac{142,8}{14} = 10,2. \text{ A média é 10,2 km.}$$

$$b) \bar{x} = 10,2. \text{ Então, teriam percorrido } 20 \times 10,2 = 204 \text{ km.}$$

8.

$$a) \bar{x} = \frac{1,99 + 1,82 + 1,86 + 1,90 + 1,84 + 1,86 + 1,91 + 1,94}{8} = \frac{15,12}{8} = 1,89. \text{ A média das alturas é 1,89 m.}$$

$$b) \text{ A soma das alturas dos jogadores do primeiro grupo é 15,12 e a soma das alturas dos jogadores do segundo grupo de 6 é } 6 \times 1,82 = 10,92. \text{ Então, } \bar{x}_{\text{equipa}} = \frac{15,12 + 10,92}{14} = \frac{26,04}{14} = 1,86 \text{ (m).}$$

9.

a) Demorou 27 dias ($5 + 4 + 9 + 5 + 3 + 1$).

b) $5 \times 8 + 4 \times 9 + 9 \times 10 + 5 \times 11 + 3 \times 12 + 1 \times 13 = 40 + 36 + 90 + 55 + 36 + 13 = 270$

O livro tem 270 páginas.

b) $\bar{x} = \frac{270}{27} = 10$. A Filipa leu, em média, 10 páginas por dia.

10.

$$\bar{x} = 9,7 \Leftrightarrow \frac{10,3 + 9,6 + a + 9,4}{4} = 9,7 \Leftrightarrow a + 29,3 = 38,8 \Leftrightarrow a = 9,5$$

O 3.º atleta demorou 9,5 segundos a percorrer os seus 100 m.

11.

a) Soma das temperaturas da cidade A foi $15 \times 30 = 450$. Na cidade B há 6 dias em que a temperatura máxima foi de mais 1 grau que na cidade A. Então, a soma das temperaturas na cidade B foi 456; portanto,

$$\bar{x}_B = \frac{456}{30} = 15,2 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

b) A média seria $1,8 \times 15 + 32 = 59$ ($^\circ\text{F}$).

12.

$$\text{a) } \bar{x} = \frac{8,02 + 7,92 + 8,11 + 8,03 + 7,95 + 8,06 + 7,97 + 8,08 + 8,11 + 8,03 + 7,99 + 8,09}{12} = \frac{96,36}{12} = 8,03 \text{ (m)}$$

b)

x_i	8,02	7,92	8,11	8,03	7,95	8,06	7,97	8,08	8,11	8,03	7,99	8,09
d_i	-0,01	-0,11	0,08	0	-0,08	0,03	-0,06	0,05	0,08	0	-0,04	0,06

13.

a) Como a soma de todos os desvios em relação à média é nula então, $d_{10} = -0,1$.

b) Pela alínea a), $d_{10} = -0,1$ e $x_{10} = 6,2$. Então, $\bar{x} = 6,2 + 0,1 = 6,3$. A média é 6,3 l por cada 100 km.

b) Os 10 automóveis consumiram $10 \times \bar{x} = 63$ l.

14.

a) Recorrendo às propriedades da soma dos quadrados dos desvios em relação à média

$$SS_x = SS_y = 20\,000\,000.$$

b) Recorrendo às propriedades da soma dos quadrados dos desvios em relação à média

$$SS_z = 1,15^2 SS_y = 1,3225 \times 20\,000\,000 = 26\,450\,000.$$

15.

a) $\bar{x} = \frac{13 + 16 + 17 + 14 + 13 + 14 + 16 + 17}{8} = \frac{120}{8} = 15$ (sementes por talhão)

b) $d_i = \{-2, 1, 2, -1, -2, -1, 1, 2\}$, então $SS_x = \sum_{i=1}^8 d_i^2 = 20$ e, finalmente, $s_x = \sqrt{\frac{20}{8-1}} \approx 1,69$.

16.

a) A dimensão da amostra é a soma das frequências absolutas, logo, a dimensão da amostra é 200 valores.

b) A média é $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \times n_i}{n} = \frac{150+308+396+507+504+735}{200} = 13$ e

$$SS_x = \sum_{i=1}^6 n_i (x_i - \bar{x})^2 = 15 \times 9 + 28 \times 4 + 33 + 36 + 49 \times 4 = 512 \text{ e finalmente, } s_x = \sqrt{\frac{512}{200-1}} \approx 1,6.$$

c) Pelas propriedades do desvio padrão: $s_y = \left| -\frac{1}{2} \right| s_x \approx 0,8$.

17.

Pelo enunciado, tem-se $SS_x = SS_y$. $SS_x = SS_y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = -n\bar{y}^2 + n\bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = n(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2)}{(x^2 - y^2)} = n.$$

18.

a) Tem-se $k = 2$, logo, pelo teorema de Chebycheff, a proporção de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{4}$.

b) Tem-se $k = 4$, logo, pelo teorema de Chebycheff, a proporção de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{16}$.

c) Tem-se $k = 3$, logo, pelo teorema de Chebycheff, a proporção de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{9}$.

19.

a) Tem-se $k = 2$, logo, pelo teorema de Chebycheff, a proporção de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{4}$, o que corresponde a 25% da amostra.

b) Tem-se $k = 5$, logo, pelo teorema de Chebycheff, a proporção de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{25}$, o que corresponde a 4% da amostra.

20.

- a)** Tem-se $[46, 54] = [50 - 2 \times 2, 50 + 2 \times 2]$; então, $k = 2$ e, pelo teorema de Chebycheff, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{4} \times 144$, ou seja, é inferior a 36.
- b)** Tem-se $[46, 56] = [50 - 3 \times 2, 50 + 3 \times 2]$; então, $k = 3$ e, pelo teorema de Chebycheff, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{9} \times 144$, ou seja, é inferior a 16.
- c)** Tem-se $[42, 58] = [50 - 4 \times 2, 50 + 4 \times 2]$; então, $k = 4$ e, pelo teorema de Chebycheff, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{16} \times 144$, ou seja, é inferior a 9.
- d)** Tem-se $[40, 60] = [50 - 5 \times 2, 50 + 5 \times 2]$; então, $k = 5$ e, pelo teorema de Chebycheff, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{25} \times 144$, ou seja, é inferior a 6.
- e)** Tem-se $[45, 55] = \left[50 - \frac{5}{2} \times 2, 50 + \frac{5}{2} \times 2\right]$; então, $k = \frac{5}{2}$ e, pelo teorema de Chebycheff, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{4}{25} \times 144$, ou seja, é inferior a 24.

21.

- a)** Tem-se $[9, 11] = [10 - 2 \times 0,5; 10 + 2 \times 0,5]$, portanto, $k = 2$. Então, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{4} \times 16$, logo, é inferior a 4, o que significa que o número máximo de jogadores fora do intervalo é 3.
- b)** Tem-se $[8,5; 11,5] = [10 - 3 \times 0,5; 10 + 3 \times 0,5]$, portanto, $k = 3$. Então, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é inferior a $\frac{1}{9} \times 16 \approx 1,8$, ou seja, o número de elementos que não pertencem ao intervalo é 0 ou é 1; logo, no mínimo, 15 pertencem ao intervalo.

No mínimo, 15 jogadores percorrem entre 8,5 km e 11,5 km.

22.

O intervalo $[11,4 - 1,3k; 11,4 + 1,3k]$ deve conter todos os resultados, excluindo os inferiores a 1. Ora, $11,4 - 1,3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{10,4}{1,3} \Leftrightarrow k = 8$ e, então, o número de elementos que não pertencem ao intervalo $[1; 21,8]$ é inferior a $\frac{1}{64} \times 120$, ou seja, é inferior a 1,875. O número máximo de alunos com classificação inferior a 1 é um, como se queria demonstrar.

23.

a) b) c) O primeiro passo é ordenar a amostra. A dimensão da amostra é 30.

$$\tilde{x} = \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 30, 31, 34, 37, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50\}$$

- $\frac{30 \times 30}{100} = 9$, então, o valor de P_{30} é a média dos elementos de ordem 9 e 10, ou seja $13 + 15$. Portanto, $P_{30} = 14$.

- $\frac{45 \times 30}{100} = 13,5$, então, P_{45} é o elemento de ordem $[13,5] + 1 = 14$. Portanto, $P_{45} = 20$.
- O terceiro quartil corresponde ao P_{75} ; $\frac{75 \times 30}{100} = 22,5$, então, P_{75} é o elemento de ordem $[22,5] + 1 = 23$. Portanto, $P_{75} = 37$.

24.

Distância percorrida	[8; 8,5[	[8,5; 9[	[9; 9,5[	[9,5; 10[	[10; 10,5[	[10,5; 11[	[11; 11,5[	[11,5; 12[
Número de jogadores	3	15	46	81	84	50	17	4

O primeiro passo é determinar a área total do histograma com base nos dados.

A área do histograma é:

$$0,5 \times 3 + 0,5 \times 15 + 0,5 \times 46 + 0,5 \times 81 + 0,5 \times 84 + 0,5 \times 50 + 0,5 \times 17 + 0,5 \times 4 = \\ = 0,5 \times (3 + 15 + 46 + 81 + 84 + 50 + 17 + 4) = 150$$

- O valor do primeiro quartil é o valor P_{25} , ou seja, é o valor tal que a área do histograma à esquerda da reta de equação $x = P_{25}$ é igual a 25% da área total do histograma.

Dado que 25% de 150 é $150 \times 0,25 = 37,5$, o primeiro quartil é o valor de x tal que a área da parte do histograma à esquerda da reta vertical que passa em $(x, 0)$ é igual a 37,5.

Tem-se:

$$0,5 \times 3 + 0,5 \times 15 + 0,5 \times 46 = 32$$

e

$$0,5 \times 3 + 0,5 \times 15 + 0,5 \times 46 + 0,5 \times 81 = 72,5$$

Como 37,5 está entre 32 e 72,5, x tem de pertencer ao intervalo $[9,5; 10[$; é o valor $x - 9,5$ que satisfaz a equação $32 + (x - 9,5) \times 81 = 37,5$.

$$32 + (x - 9,5) \times 81 = 37,5 \Leftrightarrow (x - 9,5) \times 81 = 5,5 \Leftrightarrow x = \frac{5,5}{81} + 9,5 \Leftrightarrow x \cong 9,5679. P_{25} = 9,568.$$

Significa que aproximadamente 25% dos jogadores percorreram uma distância igual ou inferior a 9568 m.

- Calculemos 95% da área total do histograma:

$$0,95 \times 150 = 142,5$$

$$\text{Tem-se } 0,5 \times 3 + 0,5 \times 15 + 0,5 \times 46 + 0,5 \times 81 + 0,5 \times 84 + 0,5 \times 50 = 139,5$$

e

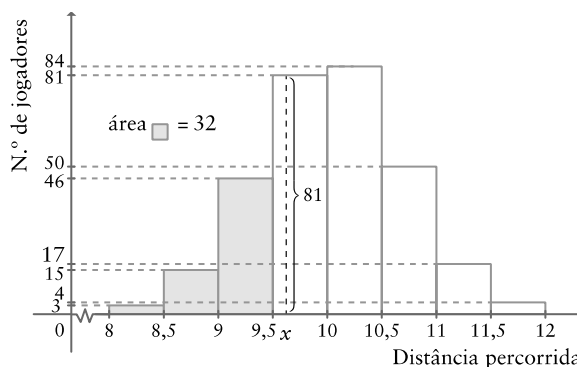
$$0,5 \times 3 + 0,5 \times 15 + 0,5 \times 46 + 0,5 \times 81 + 0,5 \times 84 + 0,5 \times 50 + 0,5 \times 17 = 148$$

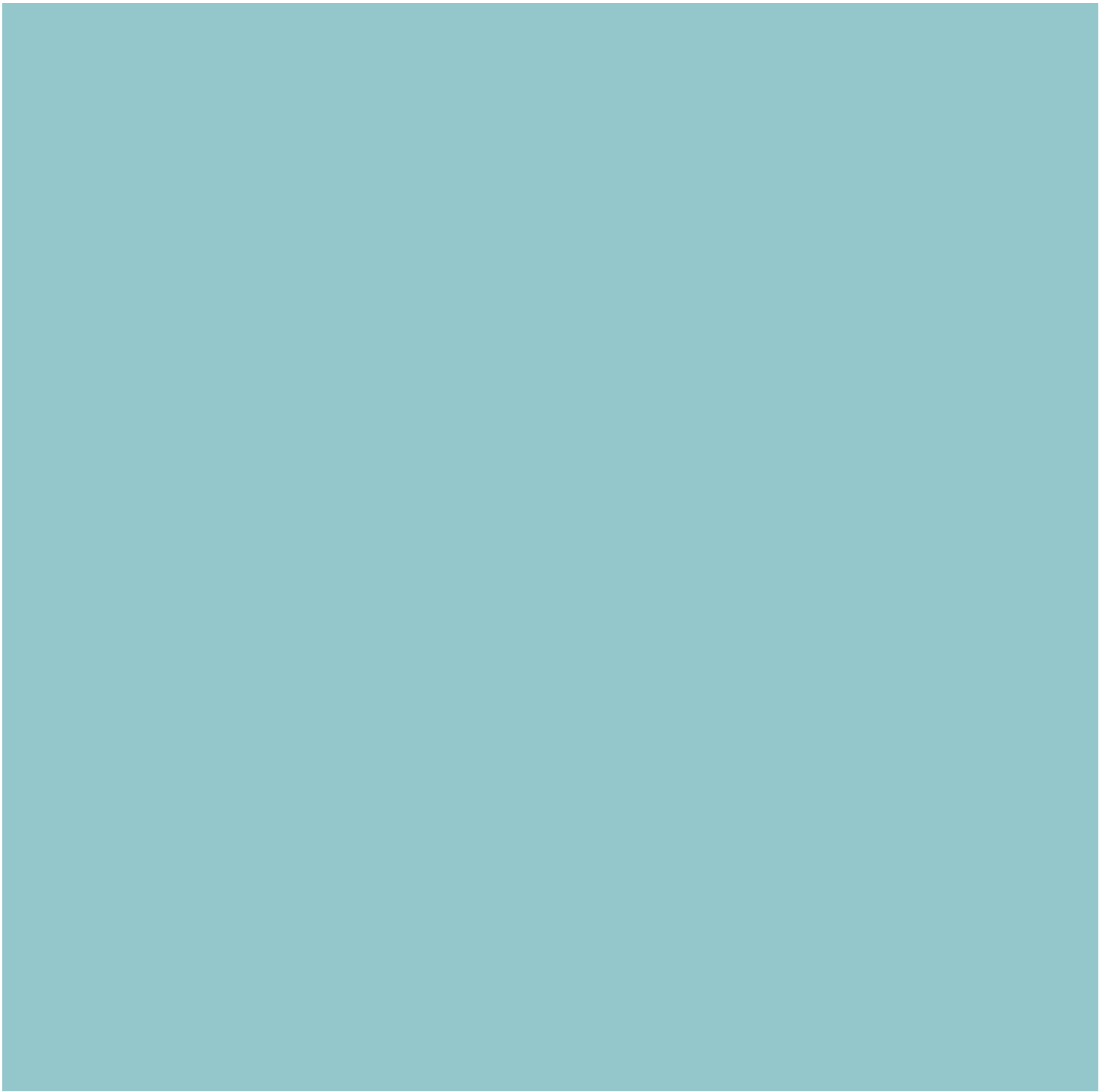
Então, o percentil 95 tem de pertencer ao intervalo $[11; 11,5[$.

$$\text{Designando o seu valor por } x, \text{ tem-se } 139,5 + (x - 11) \times 17 = 142,5.$$

$$139,5 + (x - 11) \times 17 = 142,5 \Leftrightarrow (x - 11) \times 17 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{17} + 11 \Leftrightarrow x \cong 11,1764. P_{95} = 11,176.$$

Significa que aproximadamente 95% dos jogadores percorreram uma distância igual ou inferior a 11176 m.





AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-3803-5
		 9 781111 113803 5



	EDUCAÇÃO www.leyaeducacao.com
---	---