

Unidade 1 Introdução à lógica bivalente e à teoria dos conjuntos

Pág. 5

1.1.

		Designação	Proposição
I	Portugal	x	
II	Portugal é um país europeu		x
III	$4^2 - 10$	x	
IV	$4^2 - 10$ é um número primo		x
V	$\frac{7}{8} < 1$		x

1.2.

		Valor lógico
II	Portugal é um país europeu	V
IV	$4^2 - 10$ é um número primo	F
V	$\frac{7}{8} < 1$	V

2.

p	$\sim p$	Valor lógico de p	Valor lógico de $\sim p$
π é um número real	π não é um número real	V	F
$\sqrt{2}$ não é um número racional	$\sqrt{2}$ é um número racional	V	F
$\sqrt{20} > 5$	$\sqrt{20} \leq 5$	F	V
As diagonais de um paralelogramo bisseclam-se	As diagonais de um paralelogramo não se bisseclam.	V	F
$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$	$\sqrt{\frac{16}{9}} \neq \frac{4}{3}$	V	F
$7^{-2} \geq \frac{1}{7}$	$7^{-2} < \frac{1}{7}$	F	V
$5 < \sqrt{27}$	$5 \geq \sqrt{27}$	V	F
$\sqrt[3]{27} \neq \sqrt{9}$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt{9}$	F	V

Pág. 6

3.1.

		Valor lógico
a:	11 é um número primo	V
b:	$\sqrt{8} < \pi$	V
c:	$\sqrt{2} + \sqrt{7} = 3$	F

3.2.

a) $\sim a \vee b$

b) $(\sim c) \wedge (\sim b)$

3.3.

a) V b) F c) V
d) V e) F f) V

4.1.

Proposições	Valor lógico
$p: \sqrt{9} + \sqrt{25} = \sqrt{34}$	F
$q: \text{Um quadrado é um retângulo}$	V
$r: \text{Um triângulo equilátero é isósceles}$	V

4.2.

a) $(\sim p \vee q) \wedge r$

$$(V \vee V) \wedge V = V \wedge V = V$$

O valor lógico é V.

b) $(q \wedge \sim r) \vee p$

$$(V \wedge F) \vee F = F \vee F = F$$

O valor lógico é F.

c) $\sim(p \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q)$

$$\sim(F \wedge F) \vee (V \wedge F) = (\sim F) \vee (F) = V \vee F = V$$

O valor lógico é V.

d) $\sim(\sim r \vee p) \vee \sim(q \wedge \sim p)$

$$\sim(F \vee V) \vee \sim(V \wedge V) = \sim F \vee (\sim V) = V \vee F = V$$

O valor lógico é V.

Pág. 7

5.1.

a) $b \wedge \sim a$

b) $c \wedge a$

c) $a \vee c$

d) $(b \wedge \sim c) \Rightarrow (\sim a)$

e) $b \Rightarrow [(\sim a) \wedge (\sim c)]$

5.2. Se $(\sim a \wedge c) \Rightarrow b$ é falsa, então $(\sim a \wedge c)$ é verdadeira e b é falsa.

Se $(\sim a \wedge c)$ é verdadeira, então $\sim a$ é verdadeira e c é verdadeira.

Então:

a é falsa ; b é falsa ; c é verdadeira

6.1.

a) $\sim p \wedge \sim q$

b) $\sim r \Rightarrow q$

c) $(r \wedge \sim p) \Rightarrow q$

6.2.

a) A Rute almoça na cantina ou o Luís não vai de bicicleta para a escola.

b) O Luís não vai de bicicleta para a escola e a Vera vai de autocarro

c) Se o Luís vai de bicicleta para a escola ou a Rute não almoça na cantina, então a Vera não vai de autocarro para a escola.

d) Se o Luís não vai de bicicleta para a escola, então a Rute almoça na cantina ou a Vera não vai de autocarro para a escola.

Pág. 8

7.1.

Proposições	Valor lógico
a : $\sqrt{2}$ é solução da equação $x^2 - 2 = 0$	V
b : A equação $x^2 - 2 = 0$ tem duas soluções.	V
c : $\sqrt{2}$ não é um número real	F

7.2.

a) Como a e b são verdadeiras, $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

Assim, conclui-se que $(a \Rightarrow b) \vee c$ é verdadeira.

b) Como a é verdadeira, c é falsa e b é verdadeira, então $a \Rightarrow c$ é falsa e $c \Rightarrow b$ é verdadeira. Como a conjunção de uma proposição falsa com uma verdadeira é falsa, tem-se que $(a \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow b)$ é falsa.

c) Repara que:

a	b	c	$\sim b$	$\sim b \vee c$	$a \wedge \sim b$	$(\sim b \vee c) \Rightarrow (a \wedge \sim b)$
V	V	F	F	F	F	V

O valor lógico de $(\sim b \vee c) \Rightarrow (a \wedge \sim b)$ é verdadeiro.

d) $\sim(a \Rightarrow b) \wedge \sim(c \Rightarrow b)$

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$c \Rightarrow b$	$\sim(a \Rightarrow b)$	$\sim(c \Rightarrow b)$	$\sim(a \Rightarrow b) \wedge \sim(c \Rightarrow b)$
V	V	F	V	V	F	F	F

O valor lógico de $\sim(a \Rightarrow b) \wedge \sim(c \Rightarrow b)$ é verdadeiro.

$$8.1. \sim b \wedge (a \wedge b) \Leftrightarrow \sim b \wedge (b \wedge a) \Leftrightarrow (\sim b \wedge b) \wedge a \Leftrightarrow F \wedge a \Leftrightarrow F$$

O valor lógico é Falso.

$$8.2. a \vee (\sim a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee \sim a) \vee b \Leftrightarrow (a \vee \sim a) \vee b \Leftrightarrow V \vee b \Leftrightarrow V$$

O valor lógico é Verdadeiro.

$$8.3. \sim b \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow (\sim b \wedge a) \vee (\sim b \wedge b) \Leftrightarrow (\sim b \wedge a) \vee F \Leftrightarrow \sim b \wedge a$$

$$8.4. \sim[(\sim a) \wedge (a \vee \sim b)] \Leftrightarrow \sim(\sim a) \vee \sim(a \vee \sim b) \Leftrightarrow a \vee \sim(a \wedge b) \Leftrightarrow (a \vee \sim a) \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow V \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a \vee b$$

$$8.5. \sim a \wedge [(a \vee b) \wedge \sim b] \Leftrightarrow \sim a \wedge [(a \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim b)] \Leftrightarrow \sim a \wedge [(a \wedge \sim b) \vee F] \Leftrightarrow \sim a \wedge (a \wedge \sim b) \Leftrightarrow (\sim a \wedge a) \wedge \sim b \Leftrightarrow F \wedge \sim b \Leftrightarrow F$$

O valor lógico é Falso.

$$8.6. \sim(a \vee b) \vee (\sim a \vee b) \Leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b) \vee (\sim a \vee b) \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee a \vee b) \Leftrightarrow (V \vee b) \wedge (V \vee \sim a) \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V$$

O valor lógico é Verdadeiro.

$$8.7. (a \vee \sim b) \vee (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow (a \vee \sim b \vee \sim a) \wedge (a \vee \sim b \vee b) \Leftrightarrow (V \vee \sim b) \wedge (a \vee V) \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V$$

O valor lógico é Verdadeiro.

$$8.8. a \wedge [(b \vee \sim a) \wedge (\sim b \vee \sim a)] \Leftrightarrow a \wedge [\sim a \vee (b \wedge \sim b)] \Leftrightarrow a \wedge (\sim a \vee F) \Leftrightarrow a \wedge \sim a \Leftrightarrow F$$

O valor lógico é Falso.

Pág. 9

9.1.

a	b	$\sim a$	$\sim a \wedge b$	$\sim(\sim a \wedge b)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

9.2. Se $\sim(\sim a \wedge b)$ é falsa, então $\sim a \wedge b$ é verdadeira.

Assim, $\sim a$ é verdadeira e b é verdadeira, donde se conclui que a é falsa e b é verdadeira. Ambos telefonaram à Joana.

10. Se $\sim(b \wedge \sim a) \wedge \sim a$ é verdadeira, então $\sim(b \wedge \sim a)$ é verdadeira e $\sim a$ também. Então, a é falsa e $(b \wedge \sim a)$ é falsa.

Como $\sim a$ é verdadeira, então b é falsa.

Assim conclui-se que a e b são ambas falsas.

11.1.

a	b	$\sim a$	$b \wedge a$	$\sim a \vee (b \wedge a)$	$\sim a \vee (b \wedge a) \vee a$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

$$11.2. \sim a \vee (b \wedge a) \vee a \Leftrightarrow \sim a \vee a \vee (b \wedge a) \Leftrightarrow V \vee (b \wedge a) \Leftrightarrow V$$

12.1.

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$(a \vee \sim b)$	$(\sim a \wedge b)$	$(a \vee \sim b) \wedge (\sim a \wedge b)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

$$12.2. (a \vee \sim b) \wedge (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow$$

$$[a \wedge (\sim a \wedge b)] \vee [\sim b \wedge (\sim a \wedge b)] \Leftrightarrow (F \wedge b) \vee (F \wedge \sim a) \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$$

Pág. 10

13.1.

a) $(\sim a \wedge c) \Rightarrow b$

b) $\sim(a \wedge c) \Rightarrow \sim b$

c) $a \dot{\vee} c$

13.2.

I	$(a \vee b) \wedge (c \vee b)$ $(a \sqcup c) \sqcup b$	Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção (pôr em evidência b)
II	$(\sim a \wedge \sim b \wedge c) \vee b$ $(\sim a \sqcup b) \wedge (\sim b \sqcup b) \sqcup (c \sqcup b)$ $(\sim a \sqcup b) \sqcup (c \sqcup b)$ $(\sim a \sqcup c) \sqcup b$	Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção. Princípio do 3.º excluído e $\vee$ como elemento neutro da conjunção. Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção.

13.3. Se $[\sim(\sim a \Rightarrow b)] \Rightarrow (\sim c)$ é verdadeira, então $[\sim(\sim a \Rightarrow b)]$ é verdadeira e $(\sim c)$ é falsa, isto é, c é verdadeira.

Tem-se que $(\sim a \Rightarrow b)$ é falsa, donde se deduz que $\sim a$ é verdadeira e b é falsa.

Então a é falsa, b é falsa e c é verdadeira.

O Bruno pratica judo e natação.

14.1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

14.2. Implicação contrarrecíproca

Pág. 11

15.1.

a) $p \Rightarrow q$; $\sim q \Rightarrow \sim p$

b) $q \Rightarrow \sim r$; $r \Rightarrow \sim q$

15.2.

a) Se 3 não é um número ímpar, então 3 não é solução da equação $x^2 - 9 = 0$.

b) Se 3 não é um número ímpar, então 3 é solução da equação $x^2 - 9 = 0$.

16.1. $(\sim q \wedge p) \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q \wedge p) \vee (\sim p) \Leftrightarrow$

$(q \vee \sim p) \vee (\sim p) \Leftrightarrow q \vee \sim p \vee (\sim p) \Leftrightarrow q \vee \sim p$

16.2. $\sim[(q \wedge p) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow \sim(q \wedge p) \wedge p \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p) \wedge p \Leftrightarrow$

$(\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge p) \Leftrightarrow \sim q \wedge p$

16.3. $\sim[(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow$

$(\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow F \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow q \wedge p$

16.4. $p \Leftrightarrow (\sim p)$ é o mesmo que $(p \Rightarrow (\sim p)) \wedge ((\sim p) \Rightarrow p)$.

$(p \Rightarrow (\sim p)) \wedge ((\sim p) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \vee (\sim p)) \wedge (p \vee p) \Leftrightarrow$

$(\sim p) \wedge p \Leftrightarrow F$

16.5. $(\sim p) \Rightarrow [(q \Rightarrow \sim p)] \Leftrightarrow (\sim p) \Rightarrow [\sim q \vee (\sim p)] \Leftrightarrow$

$p \vee [\sim q \vee (\sim p)] \Leftrightarrow p \vee (\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow V \vee (\sim q) \Leftrightarrow V$

16.6. $\sim p \vee \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)] \Leftrightarrow$

$\sim p \vee \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow$

$[(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow$

$(\sim p \vee \sim q \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee p) \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V$

Pág. 12

17.1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Leftrightarrow (\sim p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

17.2.

$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)$	
$(\boxed{\sim p} \vee q) \wedge (\sim p)$	Implicação como disjunção
$(\boxed{\sim p} \vee q) \wedge (\sim p \vee \boxed{F})$	Identificação do elemento neutro da disjunção
$(\sim p) \vee (\boxed{q} \wedge \boxed{F})$	Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção
$(\sim p) \vee \boxed{F}$	Identificação do elemento absorvente da conjunção
$(\sim p) \vee \boxed{F}$	Identificação do elemento neutro da disjunção
$\sim p$	

Conclui-se que $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)$ é equivalente a $\sim p$.

18.1. Como a é falsa, $(a \wedge b)$ é falsa e $\sim(a \wedge b)$ é verdadeira.

Tem-se uma implicação com antecedente verdadeiro e consequente falso pelo que a implicação é falsa.

O valor lógico de $[\sim(a \wedge b)] \Rightarrow a$ é falso.

18.2. $[\sim(a \wedge b)] \Rightarrow a \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee a \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge V) \Leftrightarrow$

$a \wedge (b \vee V) \Leftrightarrow a \wedge V \Leftrightarrow a$

Pág. 13

19.1.

	Designação	Expressão designatória	Proposição	Condição
$\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$	X			
Um triângulo equilátero tem três lados iguais			X	
$x^2 + x$		X		
$2x - 1 < 3$				X
21 é múltiplo de 7			X	
x é múltiplo de 7				X
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 > 0$			X	
$\exists n \in \mathbb{N}: 3n - 8 = 0$			X	

19.2.

	Valor lógico
Um triângulo equilátero tem três lados iguais	V
21 é múltiplo de 7	V
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 > 0$	V
$\exists n \in \mathbb{N}: 3n - 8 = 0$	F

20.1. $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ Todos os números naturais

transformam esta condição numa proposição verdadeira. A condição é universal em $\mathbb{N}$.

$$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

Como $5 \in \mathbb{N}$, a condição é possível em $\mathbb{N}$.

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ Não há qualquer número natural que transforme esta condição numa proposição verdadeira. A condição diz-se impossível em $\mathbb{N}$.

	Classificação em $\mathbb{N}$
$a(x): 2x - 1 > 0$	Universal
$b(x): x^2 - 5x = 0$	Possível
$c(x): 1 - x > 0$	Impossível

20.2. $\forall x \in \mathbb{N}, a(x)$, isto é, $\forall x \in \mathbb{N}, 2x - 1 > 0$

$\exists x \in \mathbb{N}: b(x)$, isto é, $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 5x = 0$

$\forall x \in \mathbb{N}: \sim c(x)$, isto é, $\forall x \in \mathbb{N}: 1 - x \leq 0$

21. Para conhecer o valor lógico de $\exists x \in]1, 2]: 2x^2 - 3x = 0$

considera-se:

$$2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

Como $\frac{3}{2} \in]1, 2]$ conclui-se que a proposição é verdadeira.

Para negar $\exists x \in \mathbb{Z}: 2 < x < 3$ deve atender-se a que:

$$\sim(2 < x < 3) \Leftrightarrow \sim(x > 2 \wedge x < 3) \Leftrightarrow (x \leq 2 \vee x \geq 3)$$

Para conhecer o valor lógico de $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 3$ considera-se:

$$x^2 \neq 3 \Leftrightarrow \sim(x^2 = 3) \Leftrightarrow \sim(x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$x \neq -\sqrt{3} \wedge x \neq \sqrt{3}$$

Como $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ não pertencem a $\mathbb{Q}$, a proposição é verdadeira.

p	Valor lógico de p	$\sim p$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$	F	$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, x = x$	F	$\exists x \in \mathbb{R}: x \neq x$
$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = x$	V	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x$
$\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 > 0$	V	$\exists x \in \mathbb{R}^+: x^2 \leq 0$
$\exists x \in]1, 2]: 2x^2 - 3x = 0$	V	$\forall x \in]1, 2], 2x^2 - 3x \neq 0$
$\exists x \in \mathbb{Z}: 2 < x < 3$	F	$\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 \vee x \geq 3$
$\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 3$	V	$\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 3$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 0$	V	$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \leq 0$

Pág. 14

22.1. A condição $p(x): |x| < 1$ é impossível em A e universal em B .

22.2.

a)	$\forall x \in A, p(x)$	F
b)	$\forall x \in B, p(x)$	V
c)	$\exists x \in A, p(x)$	F
d)	$\exists x \in A, \sim p(x)$	V
e)	$\exists x \in B, \sim p(x)$	F
f)	$\forall x \in A, \sim p(x)$	V

22.3. $\forall x \in A, p(x)$ é falsa pois, por exemplo 2 não verifica a

condição: $|-2|=2 > 1$

$\exists x \in A, p(x)$ é falsa pois $|-2|=|2|=2$ e $2 > 1$. Também

$|-1|=|1|=1$.

Não existe qualquer elemento de A que verifique a condição.

$\exists x \in B, \sim p(x)$ é falsa uma vez que $\sim p(x): |x| \geq 1$ e não existe

qualquer elemento de B que verifique esta condição uma vez que

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{e} \quad \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

23.1.

a) $3 - 2x < 7 \Leftrightarrow -2x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{2} \Leftrightarrow x > -2$

$a(x)$ é universal em $\mathbb{N}$;

b) $a(x)$ é possível em $\mathbb{R}^-$;

c) $b(x)$ é impossível em $\mathbb{N}$;

d) $b(x)$ é universal em $\mathbb{Z}^-$;

23.2.

a) $\forall x \in U, a(x)$ é uma proposição verdadeira para

$$U =]-2, +\infty[;$$

b) $\exists x \in U: a(x)$ é uma proposição verdadeira para $U = \mathbb{R}$;

c) $\exists x \in U: b(x)$ é uma proposição falsa para $U = \mathbb{R}^+$;

d) $\forall x \in U, b(x)$ é uma proposição verdadeira para $U = \mathbb{R}^-$;

e) $\forall x \in U, a(x)$ é uma proposição falsa para $U = \mathbb{R}$;

f) $\forall x \in U, a(x) \wedge b(x)$ é uma proposição verdadeira para

$$U =]-2, 0[$$

24.1. Por exemplo, o número 6 é par e não é múltiplo de 4.

24.2. Por exemplo, 10 é múltiplo de 5 e o seu algarismo das unidades não é 5.

Pág. 15

24.3. Notar que $0 \in \mathbb{Z}$ e $|0| = 0$

24.4. Notar que $1 \in \mathbb{N}$ e $1^2 = 1$

24.5. Por exemplo, $-3 \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$;

24.6. Por exemplo, $-4 \in \mathbb{R}$ e $\frac{-4}{2} = -2$. Contudo $-2 > -4$

25.1. O conjunto B é constituído pelos quadrados dos elementos de A.

$$B = \{1, 9, 25, 49, 81\}$$

25.2.

a) $\frac{x}{3} \leq 12 - x \Leftrightarrow x \leq 36 - 3x \Leftrightarrow 4x \leq 36 \Leftrightarrow x \leq 9$

A proposição $p: \forall x \in A: \frac{x}{3} \leq 12 - x$ é verdadeira

$1 \in A$ e $1^2 \in A$. Então a proposição $q: \exists x \in A: x^2 \in A$ é verdadeira.

Por exemplo $9 \in A$ e $9 \in B$, o que mostra que a proposição

$r: \forall x \in A: x \notin B$ é falsa.

b) $\sim \left(\forall x \in A: \frac{x}{3} \leq 12 - x \right) \Leftrightarrow \exists x \in A: \frac{x}{3} > 12 - x$

$$\sim (\exists x \in A: x^2 \in A) \Leftrightarrow \forall x \in A: x^2 \notin A$$

$$\sim (\forall x \in A: x \notin B) \Leftrightarrow \exists x \in A: x \in B$$

Então $\sim p: \exists x \in A: \frac{x}{3} > 12 - x$;

$$\sim q: \forall x \in A: x^2 \notin A;$$

$$\sim r: \exists x \in A: x \in B$$

26.1.

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N}: \frac{15-3x}{2} \geq -1 \right\}$

$$\frac{15-3x}{2} \geq -1 \Leftrightarrow 15-3x \geq -2 \Leftrightarrow -3x \geq -17 \Leftrightarrow$$

$$x \leq \frac{-17}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é divisor de } 8\}$

$$B = \{1, 2, 4, 8\}$$

c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 4, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

d) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 4, 8\}$

$$A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

26.2.

- a) Por exemplo, $x \leq 5$ é universal em A .
- b) Por exemplo, $5 < x < 10$ é impossível em A e possível em B .
- c) Por exemplo, $x \leq 3$ é possível em A e B .

Pág. 16**27.1.**

$$a) x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 5$$

$$\forall x \in A \cap B, x^2 - 9x + 20 = 0 \quad \boxed{V}$$

$$b) 3 - \frac{x+2}{2} > -1 \Leftrightarrow 6 - x - 2 > -2 \Leftrightarrow -x > -6 \Leftrightarrow x < 6$$

$$\forall x \in A, 3 - \frac{x+2}{2} > -1 \quad \boxed{V}$$

c) O maior elemento de B é 9 e $\sqrt{9} = 3$

$$\exists x \in B: \sqrt{x} > 3 \quad \boxed{F}$$

27.2.

$$a) \{x: x \in A \wedge x \in B\} = \{4, 5\}$$

$$b) \{x: x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 2, 3\}$$

$$c) B \setminus A = \{x: x \in B \wedge x \notin A\} = \{6, 7, 8, 9\}$$

$$d) B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$28.1. 2(3-x) < 5 \Leftrightarrow 6-2x < 5 \Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}: p(x)\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$28.2. 3 - \frac{x+1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow 6 - x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: q(x)\} =]-\infty, 3]$$

$$28.3. \frac{3x+1}{3} < \frac{2+x}{2} \Leftrightarrow 6x+2 < 6+3x \Leftrightarrow 3x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: r(x)\} = \left] -\infty, \frac{4}{3} \right[$$

$$28.4. D = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \wedge \sim r(x)\} =]-\infty, 3] \cap \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[= \left[\frac{4}{3}, 3 \right]$$

$$28.5. E = \{x \in \mathbb{R}: \sim [p(x) \wedge q(x)]\} = \{x \in \mathbb{R}: \sim p(x) \vee \sim q(x)\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup]3, +\infty[$$

$$28.6. F = \{x \in \mathbb{R}: \sim [p(x) \vee q(x)]\} = \{x \in \mathbb{R}: \sim p(x) \wedge \sim q(x)\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cap]3, +\infty[= \{ \}$$

Pág. 17**29.1.**

$$a) \frac{5x-7}{2} > 4 \Leftrightarrow 5x-7 > 8 \Leftrightarrow 5x > 15 \Leftrightarrow x > 3; B =]3, +\infty[$$

$$\text{Então, } \bar{B} =]-\infty, 3].$$

$$b) \text{ Como } A = [-6, 5[, \text{ então: } \bar{A} =]-\infty, -6[\cup]5, +\infty[$$

$$c) A \cap B = [-6, 5[\cap]3, +\infty[=]3, 5[$$

$$d) A \cup B = [-6, 5[\cup]3, +\infty[= [-6, +\infty[$$

$$e) B \setminus A = \{x: x \in B \wedge x \notin A\} = B \cap \bar{A} = [5, +\infty[$$

$$f) \bar{B} \cap \bar{A} = \{x: x \in \bar{B} \wedge x \notin A\} = \bar{B} \cap A =]-\infty, 3] \cap [-6, 5[= [-6, 3]$$

$$30.1. 2x < 6 \vee 2 - \frac{2}{5}x < 0 \Leftrightarrow x < 3 \vee 10 - 2x < 0 \Leftrightarrow$$

$$x < 3 \vee -2x < -10 \Leftrightarrow x < 3 \vee x > 5$$

$$A =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$$

$$30.2. |x| < 4 \Leftrightarrow x < 4 \wedge x > -4$$

$$B =]-4, 4[;$$

$$30.3. \bar{A} = [3, 5]$$

$$30.4. \bar{B} =]-\infty, -4[\cup [4, +\infty[$$

$$30.5. A \cup B =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[\cup]-4, 4[=]-\infty, 4[\cup]5, +\infty[$$

$$30.6. \overline{A \cup B} = [4, 5]$$

$$30.7. A \cup \bar{B} =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[\cup]-\infty, -4[\cup [4, +\infty[=$$

$$=]-\infty, 3[\cup [4, +\infty[$$

$$\overline{A \cup B} = [3, 4[$$

$$\text{Notar que } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap B$$

$$30.8. \bar{A} \cap B = [3, 5] \cap]-4, 4[= [3, 4[$$

$$\overline{\bar{A} \cap B} =]-\infty, 3[\cup [4, +\infty[$$

$$\text{Notar que } \overline{\bar{A} \cap B} = A \cup \bar{B}$$

$$30.9. \bar{A} \cap \mathbb{Z} = [3, 5] \cap \mathbb{Z} = \{3, 4, 5\}$$

$$30.10. A \cap B \cap \mathbb{Z} =]-4, 3[\cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

31.

	Implicação	Valor lógico (V/F)	Implicação contrarrecíproca
I	n é divisor de 12 $\Rightarrow$ n é divisor de 4	F	n não é divisor de 4 $\Rightarrow$ n não é divisor de 12
II	n é múltiplo de 4 $\Rightarrow$ n é múltiplo de 12	F	n não é múltiplo de 12 $\Rightarrow$ n não é múltiplo de 4
III	$x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$	F	$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq -2$
IV	$x \leq -5 \Rightarrow x \geq 5$	V	$ x < 5 \Rightarrow x > -5$
V	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$	F	$x \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow 2x + 3 \leq 0$

$$31.1. \quad 3x - \frac{x}{2} > 1 - 2x \Leftrightarrow 6x - x > 2 - 4x \Leftrightarrow 9x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{9}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\} = \left] \frac{2}{9}, +\infty \right[$$

$$x > \frac{2-x}{8} \Leftrightarrow 8x > 2-x \Leftrightarrow 9x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{9}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : b(x)\} = \left] \frac{2}{9}, +\infty \right[$$

Como $A = B$, conclui-se que $a(x)$ e $b(x)$ são equivalentes.

$$32.2. \text{ Sabe-se que } A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\} = \left] \frac{2}{9}, +\infty \right[.$$

Como $\mathbb{N} \subset \left] \frac{2}{9}, +\infty \right[$, conclui-se que $a(x)$ é universal em $\mathbb{N}$.

32.3.

$$a) \quad [\sim b(x)] \Rightarrow [\sim c(x)], \text{ isto é, } x \leq \frac{2-x}{8} \Rightarrow \frac{x+1}{2} \leq 2-x$$

$$b) \quad x \leq \frac{2-x}{8} \Leftrightarrow 8x \leq 2-x \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{9},$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R} : \sim b(x)\} = \left] -\infty, \frac{2}{9} \right]$$

$$\frac{x+1}{2} \leq 2-x \Leftrightarrow x+1 \leq 4-2x \Leftrightarrow 3x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\bar{C} = \{x \in \mathbb{R} : \sim c(x)\} =]-\infty, 1]$$

Como $\bar{B} \subset \bar{C}$, conclui-se que $[\sim b(x)] \Rightarrow [\sim c(x)]$. Logo

$$c(x) \Rightarrow b(x).$$

$$33.1. \quad p(x): x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4. \text{ Então,}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R} : p(x)\} = \{-4, 4\}.$$

$$q(x): |x| = 4$$

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4. \text{ Então, } Q = \{x \in \mathbb{R} : q(x)\} = \{-4, 4\}.$$

$$r(x): x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Então } R = \{x \in \mathbb{R} : r(x)\} = \{4\}.$$

33.2.

a) $p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira

b) $q(x) \Rightarrow p(x)$ é verdadeira

c) $q(x) \Rightarrow r(x)$ é falsa

d) $r(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira

33.3.

a) $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes pois $p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira e $q(x) \Rightarrow p(x)$ é verdadeira. Por dupla implicação se conclui que $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

$$P = Q$$

b) $r(x)$ e $q(x)$ não são equivalentes porque $q(x) \Rightarrow r(x)$ é falsa.

$$Q \not\subset R$$

Unidade 2 Radicais. Potências de expoente racional

Pág. 19

1.1. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$

1.2. $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-2) \times 6 \times (-1)} = \sqrt[3]{12}$

1.3. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{3}{5} \times 10} = \sqrt[3]{6}$

1.4. $\sqrt[5]{-3} \times \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{(-3) \times \frac{1}{6} \times 4} = \sqrt[5]{-2}$

1.5. $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$

1.6. $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 5} = \sqrt[3]{-40}$

2.1. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

2.2. $\sqrt{125} \times \sqrt{18} = \sqrt{5^3 \times 3^2 \times 2} = 5 \times 3 \sqrt{5 \times 2} = 15\sqrt{10}$

2.3. $\sqrt[3]{-16} = \sqrt[3]{-2^4} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 2} = -2\sqrt[3]{2}$

2.4. $\sqrt{320} - 3\sqrt{80} = \sqrt{2^6 \times 5} - 3\sqrt{2^4 \times 5} = 8\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$

2.5. $\sqrt{20} + (1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = \sqrt{2^2 \times 5} + 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 6 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

2.6. $\sqrt[3]{128} \times \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{2^7} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = 4\sqrt[3]{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt[3]{2}$

2.7.

$$29 - (1 + \sqrt{28})^2 - \frac{\sqrt{252}}{2} = 29 - 1 - 2\sqrt{2^2 \times 7} - 28 - \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7}}{2} = -4\sqrt{7} - 6\frac{\sqrt{7}}{2} = -7\sqrt{7}$$

2.8. $\sqrt[4]{0,0001} \times \sqrt[4]{\frac{1}{32}} = \sqrt[4]{10^{-4}} \times \sqrt[4]{2^{-5}} = \sqrt[4]{2^{-4} \times 5^{-4} \times 2^{-5}} = \sqrt[4]{2^{-9} \times 5^{-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{5} \sqrt[4]{2^{-1}} = \frac{1}{20} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

2.9. $\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{-5^2 \times 5^2 \times 2} = \sqrt[3]{(-5)^3 \times 10} = -5\sqrt[3]{10}$

3.1. $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{56}$

$2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} = \sqrt[3]{56}$

3.2. $-\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{-3}$

$-\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{(-1)^5 \times 3} = \sqrt[5]{-3}$

3.3. $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{1536} = 2\sqrt[4]{480}$

$2\sqrt[4]{480} = 2\sqrt[4]{2^5 \times 15} = \sqrt[4]{2^9 \times 3 \times 5} = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{1536}$

3.4. $\sqrt{8} \times \sqrt[3]{6} = 4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{8 \times 6} = \sqrt{8} \times \sqrt{6}$

3.5. $\sqrt[3]{2^{-1}} \times \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2^{-1}} \times \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^{-1} \times 2^2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$

3.6. $0,3\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5}$

$\sqrt{\frac{1}{\dots}} = \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$

4.1.

a) $\overline{BD}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Então, $\overline{BD} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$.

b) $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.

Então, $\overline{BE} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

4.2.

a) Área de cada face do cubo: $\frac{144}{6} = 24$

Medida de cada aresta do cubo: $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$

$\overline{BD} = \sqrt{2} a = \sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

Então, $\overline{BD} = 4\sqrt{3}$.

b) $\overline{BE} = \sqrt{3} a = \sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{3^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

Então, $\overline{BE} = 6\sqrt{2}$.

5.1.

Seja P o perímetro do retângulo.

$P = 2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 2(\sqrt{18} - \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$

O perímetro do retângulo é $10\sqrt{2}$.

5.2. Seja A a área do retângulo.

$A = (\sqrt{18} - \sqrt{2})(\sqrt{8} + \sqrt{2}) = (3\sqrt{2} - \sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{2})$

$A = (2\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 6 \times 2 = 12$

A área do retângulo é 12.

5.3.

$\overline{AC}^2 = (\sqrt{18} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 8 + 18 = 26$

Então, $\overline{AC} = \sqrt{26}$.

Pág. 20

6. Seja d a medida de cada uma das diagonais do retângulo.

$x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

A medida de um dos lados do retângulo é $3 + \sqrt{2}$ e a medida do outro lado é $3 - \sqrt{2}$.

Seja d a medida da diagonal do retângulo.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se

$$d^2 = (3 + \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2.$$

$$d^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 22. \text{ Então, } d = \sqrt{22}.$$

$$7.1. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$7.2. \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{-2}} = \sqrt[3]{-4}$$

$$7.3. \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

$$7.4. \left(\sqrt[5]{3}\right)^{-1} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

$$7.5. \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{-3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{-3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$7.6. \left(\sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)^{-4} = \sqrt[5]{\frac{1}{9} \cdot 81} = \sqrt[5]{9} = 3\sqrt[5]{27}$$

$$8.1. \frac{\sqrt{216} - \sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^3 \times 3^3} - \sqrt{2^2 \times 3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$$

$$8.2. \frac{(\sqrt[3]{2})^{-1}}{\sqrt[3]{2^{-2}}} + \sqrt[3]{16} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{\frac{4}{2}} + 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$$

$$8.3. \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)+4}{\sqrt[3]{0,1}} = \frac{(\sqrt{5})^2 - 4 + 4}{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2 \times 5}}} = \sqrt[3]{2 \times 5^3} = \sqrt[3]{250}$$

$$8.4. \frac{\sqrt[5]{8+\sqrt{2}} \times \sqrt[5]{8-\sqrt{2}}}{\sqrt[5]{1+5\sqrt{36}}} = \frac{\sqrt[5]{(8+\sqrt{2})(8-\sqrt{2})}}{\sqrt[5]{1+5 \times 6}} = \frac{\sqrt[5]{64-2}}{\sqrt[5]{1+5 \times 6}} = \frac{\sqrt[5]{62}}{\sqrt[5]{31}} = \sqrt[5]{2}$$

$$9. (2 + \sqrt{3})^3 - 5(2 + \sqrt{3})^2 + 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^2 - 5(2 + \sqrt{3})^2 + 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{3})(4 + 4\sqrt{3} + 3) - 5(4 + 4\sqrt{3} + 3) + 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 5(7 + 4\sqrt{3}) + 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$14 + 8\sqrt{3} + 7\sqrt{3} + 12 - 35 - 20\sqrt{3} + 10 + 5\sqrt{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0$$

Conclui-se que $2 + \sqrt{3}$ é solução da equação.

$$10. (\sqrt[3]{2})^4 + 3(\sqrt[3]{2})^3 - 2(\sqrt[3]{2}) = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{2} + 3 \times 2 - 2\sqrt[3]{2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$6 = 6$$

Conclui-se que $\sqrt[3]{2}$ é solução da equação.

$$11.1. \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

$$11.2. \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$11.3. \sqrt[3]{\sqrt[5]{-1}} = \sqrt[15]{-1}$$

$$11.4. \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12}$$

$$11.5. 3\sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^7}$$

$$11.6. \sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{12}$$

$$12.1. 2\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{2^3 \times \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2^6 \times 3}} = \sqrt[4]{2^6 \times 3} = \sqrt[4]{192}$$

$$12.2. \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{\sqrt[6]{15}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{3}$$

$$12.3. \sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{5}}} = \sqrt[6]{\sqrt{2^2 \times 5}} = \sqrt[12]{20}$$

$$12.4. \sqrt[4]{2\sqrt{3}} \times \sqrt[8]{0,5} = \sqrt[4]{2^2 \times 3} \times \sqrt[8]{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{2^2 \times 3} \times \sqrt[8]{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{\frac{2^2 \times 3}{2}} = \sqrt[8]{6}$$

$$12.5. \sqrt[3]{\sqrt{3}} + \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3} + \sqrt[6]{3} = 2\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^6 \times 3} = \sqrt[6]{192}$$

$$13.6. \sqrt[3]{\sqrt{-7}} \times \sqrt[5]{-2\sqrt[3]{-3}} = \sqrt[15]{-7} \times \sqrt[15]{(-2)^3 \times (-3)} = \sqrt[15]{-7} \times \sqrt[15]{-24} = \sqrt[15]{-168}$$

$$12.7. \sqrt{2\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[6]{2^{-1}} = \sqrt[6]{2^3 \times 3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{2^3 \times 3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3 \times 3}{2}} = \sqrt[6]{12}$$

$$12.8. \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}\right)^{-3} \times \sqrt[6]{54} = \left(\sqrt[12]{3}\right)^{-3} \times \sqrt[12]{54} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^3}} \times \sqrt[12]{54} = \sqrt[12]{\frac{54}{27}} = \sqrt[12]{2}$$

Pág. 21

13.1. Como $\overline{AB} = \sqrt{12}$, tem-se

$$\overline{AB} = \sqrt{\sqrt{12}} = \sqrt[4]{12}.$$

Seja P o perímetro de $[ABCD]$.

$$P = 4\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{4^4 \times 12} = \sqrt[4]{3072}$$

como se pretendia demonstrar.

13.2. Sabe-se que $\overline{AB} = \sqrt[4]{12}$.

$$\text{Pelo Teorema de Pitágoras, } \overline{AC}^2 = \left(\sqrt[4]{12}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{12}\right)^2.$$

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{12} + \sqrt{12} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2\sqrt{12} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2\sqrt{2^2 \times 3}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 \sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow$$

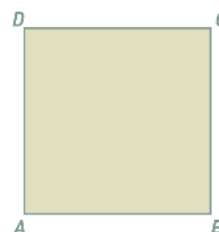
$$\overline{AC} = 2\sqrt[8]{3^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\sqrt[8]{9}, \text{ como se pretendia demonstrar.}$$

14.1. $\overline{OB} = \overline{AO} = \sqrt[3]{2}$. Sabe-se que $[AOB]$ é um triângulo retângulo pois as diagonais do quadrado são perpendiculares.

$$\text{Pelo Teorema de Pitágoras } \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2.$$

$$\text{Então, } \overline{AB}^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2\sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB}^2 = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \sqrt[3]{2^5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt[3]{2^5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt[6]{32}$$



14.2. A área da região colorida é a diferença entre as áreas dos triângulos $[ABM]$ e $[ABO]$.

$$A_{[ABM]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{2} = \frac{\sqrt[6]{32} \times \sqrt[6]{32}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^5} \times \sqrt[6]{2^5}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^{10}}}{2} = \sqrt[6]{2^4}$$

$$A_{[ABO]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{2} = \frac{\sqrt[6]{32} \times \sqrt[6]{32}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^5} \times \sqrt[6]{2^5}}{2^2} = \frac{\sqrt[6]{2^{10}}}{2^2} = \frac{2\sqrt[6]{2^4}}{2^2} = \frac{\sqrt[6]{2^4}}{2}$$

$$A_{[ABM]} - A_{[ABO]} = \sqrt[6]{2^4} - \frac{\sqrt[6]{2^4}}{2} = \frac{2\sqrt[6]{2^4} - \sqrt[6]{2^4}}{2} = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$$

$$15.1. \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$15.2. \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

$$15.3. \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$$

$$15.4. \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$15.5. \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2 \times 2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$15.6. \frac{4}{5\sqrt[4]{27}} = \frac{4}{5\sqrt[4]{3^3}} = \frac{4 \times \sqrt[4]{3}}{5 \times 3} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15}$$

$$15.7. \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \sqrt{7}+2$$

$$15.8. \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{5}+1)}{(2\sqrt{5}-1)(2\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{5}+1)}{20-1} = \frac{2\sqrt{15}+\sqrt{3}}{19}$$

$$15.9. \frac{1}{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})(3\sqrt{6}+2\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{54-12} = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{42}$$

$$15.10. \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6}-1)}{(2\sqrt{6}+1)(2\sqrt{6}-1)} = \frac{2\sqrt{18}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}+1}{24-1} = \frac{6\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}+1}{23}$$

$$15.11. \frac{\sqrt{12}+2}{7-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{12}+2)(7+\sqrt{3})}{(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3})} = \frac{(2\sqrt{3}+2)(7+\sqrt{3})}{49-3} = \frac{14\sqrt{3}+6+14+2\sqrt{3}}{46} = \frac{16\sqrt{3}+20}{46} = \frac{8\sqrt{3}+10}{23}$$

$$15.12. \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}(3\sqrt{2}-\sqrt{10})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{10})(3\sqrt{2}-\sqrt{10})} = \frac{6\sqrt{10}-2\sqrt{50}}{18-10} = \frac{6\sqrt{10}-10\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{4}$$

$$15.13. \frac{2}{3-\sqrt{2n}} = \frac{2(3+\sqrt{2n})}{(3-\sqrt{2n})(3+\sqrt{2n})} = \frac{6+2\sqrt{2n}}{9-2n}$$

$$15.14. \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}{n+3-n} = \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}{3}$$

$$15.15. \frac{3n}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{3n \times \sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n^2} \times \sqrt[3]{n}} = \frac{3n \times \sqrt[3]{n}}{2n} = \frac{3\sqrt[3]{n}}{2}$$

Pág. 22

$$16.1. \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2+2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{(2-\sqrt[3]{2})(2^2+2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)} = \frac{2^2+2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{2^3-(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8-2} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}$$

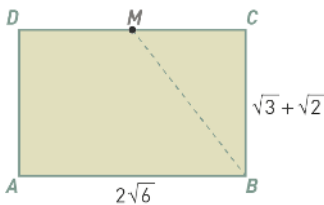
$$16.2. \frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{2((\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{10}+(\sqrt[3]{2})^2)}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{10}+(\sqrt[3]{2})^2)} = \frac{2((\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{10}+(\sqrt[3]{2})^2)}{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{2\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{10}+2\sqrt[3]{4}}{3}$$

$$16.3. \frac{3}{2+\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{2-(-\sqrt[3]{4})} = \frac{3(2^2-2\sqrt[3]{4}+(-\sqrt[3]{4})^2)}{(2-(-\sqrt[3]{4}))((2-2\sqrt[3]{4}+(-\sqrt[3]{4})^2))} = \frac{3(4-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2^4})}{2^3-(-\sqrt[3]{4})^3} = \frac{3(4-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})}{8+4} = \frac{6(2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{12} = \frac{2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$16.4. \frac{1}{2\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\left((2\sqrt[3]{6})^2 + 2\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{2})^2\right)}{(2\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2})\left((2\sqrt[3]{6})^2 + 2\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{2})^2\right)} =$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}}{(2\sqrt[3]{6})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{4\sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}}{48-2} = \frac{4\sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}}{46}$$

17.1. Como M é o ponto médio de $[CD]$, $\overline{MC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{6}$.



Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{MC}^2$.

$$\overline{BM}^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 11 + 2\sqrt{6}$$

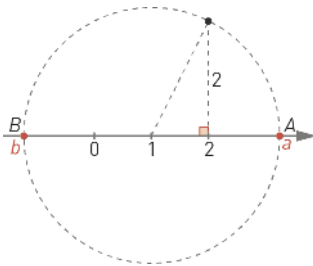
Então, $\overline{BM} = \sqrt{11 + 2\sqrt{6}}$ como se pretende demonstrar.

$$17.2. \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{3-2} =$$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Conclui-se que $\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

18.1. Seja x a medida da hipotenusa do triângulo.



$$x^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 5. \text{ Então, } x = \sqrt{5}.$$

$$a = 1 + \sqrt{5} \text{ e } b = 1 - \sqrt{5}$$

18.2.

$$a) \sqrt{a+b} = \sqrt{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

$(\sqrt{2})^2 = 2$ é uma proposição verdadeira. Então, $\sqrt{a+b}$ é solução da equação $x^2 = 2$.

b)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{1-2\sqrt{5}+5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{(6+2\sqrt{5})^2}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{36+24\sqrt{5}+20}{36-20} = \frac{56+24\sqrt{5}}{16} = \frac{8(7+3\sqrt{5})}{16} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \text{ como}$$

se pretendia demonstrar.

$$19.1. \overline{DC}^2 = 2^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{DC} = \sqrt{40} \quad \overline{AD}^2 = 2^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{2^2 + 1} \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{5}$$

$$(\overline{DC} - \overline{AD})^2 = (\sqrt{40} - \sqrt{5})^2 = 40 - 2\sqrt{200} + 5 = 45 - 2\sqrt{2 \times 100} =$$

$$= 45 - 20\sqrt{2}$$

Provou-se assim que $(\overline{DC} - \overline{AD})^2 = 45 - 20\sqrt{2}$.

$$19.2. \overline{BC}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{5}$$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD} + \overline{BC}} = \frac{3}{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, como se pretendia demonstrar.

$$20.1. (4 - \sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3} + 9 = 19 - 8\sqrt{3}$$

20.2. $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ é o número real positivo cujo quadrado é $19 - 8\sqrt{3}$.

Como $4 - \sqrt{3} > 0$ e $(4 - \sqrt{3})^2 = 19 - 8\sqrt{3}$ conclui-se que

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = 4 - \sqrt{3}.$$

Pág. 23

21.1. $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ é o número real positivo cujo quadrado é $7+2\sqrt{6}$.

Como $(1+\sqrt{6})^2 = 1+2\sqrt{6}+6 = 7+2\sqrt{6}$, e $1+\sqrt{6} > 0$,

conclui-se que $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = 1+\sqrt{6}$.

21.2. $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ é o número real positivo cujo quadrado é $28-10\sqrt{3}$.

Como $(5-\sqrt{3})^2 = 25-10\sqrt{3}+3 = 28-10\sqrt{3}$ e $5-\sqrt{3} > 0$,

conclui-se que $\sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}$.

22.1. Seja $a+b\sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ $c \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a+b\sqrt{c})^2 = 22+12\sqrt{2}.$$

$$\text{Então, } a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c = 22+12\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2c + 2ab\sqrt{c} = 22+12\sqrt{2}.$$

$$\text{Tem-se } c=2, \quad 2ab=12 \text{ e } a^2 + b^2c = 22.$$

$$2ab=12 \Leftrightarrow ab=6$$

Como a e b são inteiros e o produto positivo, têm o mesmo sinal.

Neste caso são ambos positivos de modo a garantir que $a+b\sqrt{c}$ seja um número positivo.

Atendendo à decomposição de 6 tem-se:

a	b	a^2	b^2	$a^2 + 2b^2$
1	6	1	36	73
2	3	4	9	22
3	2	9	4	17
6	1	36	1	38

Da tabela resulta que $a = 2$, $b = 3$ e $c = 2$.

Então, $\sqrt{22+12\sqrt{2}} = 2+3\sqrt{2}$.

22.2. Seja $a+b\sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a+b\sqrt{c})^2 = 14-6\sqrt{5}.$$

Então, $a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c = 14-6\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$$a^2 + b^2c + 2ab\sqrt{c} = 14-6\sqrt{5}.$$

Tem-se $c = 5$, $2ab = -6$ e $a^2 + 5b^2 = 14$.

$$2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$$

Como a e b são inteiros e o produto negativo, têm sinais contrários.

Atendendo à decomposição de 3 tem-se:

a	b	a^2	b^2	$5b^2$	$a^2 + 5b^2$
1	-3	1	9	45	46
-1	3	1	9	45	46
3	-1	9	1	5	14
-3	1	9	1	5	14

Para garantir que $a+b\sqrt{c}$ seja um número positivo, deve tomar-se $a = 3$, $b = -1$ e $c = 5$.

Então, $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}$.

23.1. $x = \sqrt{12-6\sqrt{3}} + \sqrt{12+6\sqrt{3}}$

Seja $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = a+b\sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$.

$$(a+b\sqrt{c})^2 = 12-6\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c = 12-6\sqrt{3}.$$

Então, $c = 3$. Assim, $2ab = -6$ e $a^2 + 3b^2 = 12$. Como $ab = -3$, tem-se:

a	b	a^2	b^2	$a^2 + 3b^2$
1	-3	1	9	28
-1	3	1	9	28
3	-1	9	1	12
-3	1	9	1	12

Sendo $a+b\sqrt{c}$ um número positivo, tem-se:

$$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3}$$

Seja $\sqrt{12+6\sqrt{3}} = a'+b'\sqrt{c'}$, $a', b' \in \mathbb{Z}$ e $c' \in \mathbb{N}$.

$$(a'+b'\sqrt{c'})^2 = 12+6\sqrt{3} \Leftrightarrow a'^2 + 2a'b'\sqrt{c'} + b'^2c' = 12+6\sqrt{3}$$

Tem-se $c = 3$.

Assim, $2ab = 6$ e $a^2 + 3b^2 = 12$. Como $ab = 3$, a e b são inteiros e têm o mesmo sinal.

Neste caso são ambos positivos de modo a garantir que $a+b\sqrt{c}$ seja um número positivo.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + 3b^2$
1	3	1	9	28
3	1	9	1	12

Tem-se: $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{12-6\sqrt{3}} + \sqrt{12+6\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3} + 3+\sqrt{3} = 6$$

23.2. $y = \sqrt{28+16\sqrt{3}} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$

Procedendo de forma análoga para

$$y = \sqrt{28+16\sqrt{3}} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}.$$

Seja $\sqrt{28+16\sqrt{3}} = a+b\sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$.

$$(a+b\sqrt{c})^2 = 28+16\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c = 28+16\sqrt{3}.$$

Então, $c = 3$.

Assim, $2ab = 16$ e $a^2 + 3b^2 = 28$. Como $ab = 8$, tem-se:

a	b	a^2	b^2	$a^2 + 3b^2$
1	8	1	64	193
2	4	4	16	52
4	2	16	4	28
8	1	64	1	67

Então, $\sqrt{28+16\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3}$.

Por outro lado, se $\sqrt{28-16\sqrt{3}} = a'+b'\sqrt{c'}$, $a', b' \in \mathbb{Z}$ e $c' \in \mathbb{N}$, tem-se

$$2ab = -16 \text{ e } a^2 + 3b^2 = 28.$$

Atendendo a que o produto $ab = -8$, e de forma análoga à anterior se conclui que:

$$\sqrt{28-16\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{28+16\sqrt{3}} + \sqrt{28-16\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3} + 4-2\sqrt{3} = 8$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.1.} \quad A \times B &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{4-2} = \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.2.} \quad \frac{A}{B} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} = \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{25.1.} \quad \frac{\sqrt{72}-\sqrt{18}+\sqrt{32}}{\sqrt{9}-\sqrt{2}} &= \frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{7\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{21\sqrt{2}+14}{9-2} = \frac{7(3\sqrt{2}+2)}{7} = 2+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{25.2.} \quad \frac{(1-\sqrt{8})^2}{1+2\sqrt{2}} &= \frac{(1-2\sqrt{2})^2(1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = \\ &= \frac{(1-4\sqrt{2}+8)(1-2\sqrt{2})}{1-8} = \frac{1-4\sqrt{2}+8-2\sqrt{2}+16-16\sqrt{2}}{-7} = \\ &= \frac{25-22\sqrt{2}}{-7} = \frac{22\sqrt{2}-25}{7} \end{aligned}$$

$$25.3. \frac{1}{(\sqrt{3}-2)^2} - \frac{1}{(\sqrt{3}+2)^2} = \frac{1}{3-4\sqrt{3}+4} - \frac{1}{3+4\sqrt{3}+4} =$$

$$= \frac{1}{7-4\sqrt{3}} - \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48} - \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7+4\sqrt{3} - 7+4\sqrt{3} =$$

$$= 8\sqrt{3}$$

$$25.4. \left(\sqrt[3]{5} - \frac{4}{\sqrt[3]{5^2}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{5} - \frac{4\sqrt[3]{5}}{5} \right)^2 = \left(\frac{5\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5}}{5} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{5}}{5} \right)^2 = \frac{\sqrt[3]{25}}{25}$$

$$26. A = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} - \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}-a-\sqrt{a}-a}{1-a} = \frac{-2a}{1-a}$$

Conclui-se assim que $A = \frac{-2a}{1-a}$.

27. Seja V_c o volume de cada cubo e V_e o volume de cada esfera.

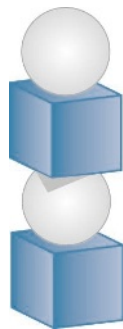
$$V_c = (2r)^3 = 8r^3; \quad V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = 2V_c + 2V_e \Leftrightarrow V = 2 \times 8r^3 + 2 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow$$

$$V = 16r^3 + \frac{8}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow V = \frac{48r^3 + 8\pi r^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$(48 + 8\pi)r^3 = 3V \Leftrightarrow r^3 = \frac{3V}{48 + 8\pi} \Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{48 + 8\pi}}$$



Pág. 24

$$28.1. 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$28.2. \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$28.3. \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{6}{10}}$$

$$28.4. \sqrt[6]{7^2} = 7^{\frac{1}{3}}$$

$$28.5. \sqrt[4]{7^3} = \sqrt[8]{7^6}$$

$$28.6. \sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$$

$$29.1. 3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$$

$$29.2. 6^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{6^4} = \sqrt[3]{6^2}$$

$$29.3. 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$29.4. 5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5^2}}$$

$$29.5. 7^{0,75} = 7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$$

$$29.6. 11^{-0,25} = 11^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{11}}$$

$$30.1. \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$$

$$30.2. \sqrt[6]{7^4} = 7^{\frac{4}{6}} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$30.3. \sqrt[4]{\sqrt[3]{7^2}} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}}$$

$$30.4. \sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3^2 \times 2}} = \sqrt[4]{3^2 \times 2} = 18^{\frac{1}{4}}$$

$$30.5. \sqrt[5]{2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}}$$

$$30.6. \left(\sqrt[5]{\frac{1}{7}} \right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{7} \right)^{\frac{1}{5}} \right)^{-2} = \left(\frac{1}{7} \right)^{-\frac{2}{5}} = 7^{\frac{2}{5}}$$

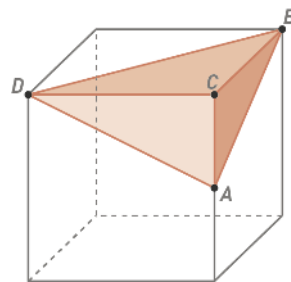
31.1. Seja $A_{[ABC]}$ a área da base $[ABC]$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\frac{a}{2} \times a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Se o volume da pirâmide é 3,

$$\text{tem-se } \frac{1}{3} \times \frac{a^2}{4} \times a = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^3}{12} = 3 \Leftrightarrow a^3 = 36 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{36} \Leftrightarrow a = 6^{\frac{2}{3}}$$



31.2. Seja S a área da superfície total do cubo.

$$S = 6a^2. \text{ Sendo } a = 6^{\frac{2}{3}}, \text{ tem-se } S = 6 \times \left(6^{\frac{2}{3}} \right)^2 = 6 \times 6^{\frac{4}{3}} = 6^{\frac{7}{3}}$$

32.1. Para comparar A , B e C , reduzem-se os radicais ao mesmo índice.

$$A = \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}; \quad B = \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27} \quad \text{e}$$

$$C = \sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[12]{25}$$

Como $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{25} < \sqrt[12]{27}$ conclui-se que $A < C < B$.

$$32.2. A \times C = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^2 \times 5} = \sqrt[6]{20}$$

$$32.3. \frac{C}{B} = \frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[12]{5^2}}{\sqrt[12]{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{25}{27}}$$

Pág. 25

$$33.1. \sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{5^2} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{50} = 50^{\frac{1}{6}}$$

$$33.2. \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{2^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^3}{2^2}} = \sqrt[12]{\frac{27}{4}} = \left(\frac{27}{4} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$33.3. \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{3}{6}}}{2^{\frac{2}{6}}} = \frac{(3^3)^{\frac{1}{6}}}{(2^2)^{\frac{1}{6}}} = \left(\frac{27}{4} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$33.4. \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2 \times 5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^2 \times 5}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^2 \times 5}{3^2}} = \left(\frac{20}{27} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$33.5. 5^{\frac{1}{6}} \times \left(\sqrt[4]{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} \times \left(2^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{2}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} = \\ = \left(5^2 \right)^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} = 50^{\frac{1}{12}}$$

$$33.6. \sqrt[5]{5^3} \times 3^{-\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{3}{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{10}} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{3}{10}} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{6}} = \\ = \left(\frac{5}{27} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$34.1. \left(\sqrt{2} \times 3^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[6]{2^3 \times \sqrt[3]{3^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[6]{2^3 \times 3^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \sqrt{\sqrt[6]{2^3 \times 3^2}} = \sqrt[12]{72}$$

$$34.2. \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4^4} \right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4^3}} \right)^{-1} = \frac{\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^9}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{2^7}$$

$$34.3. \left(\sqrt{2 \times 3^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{2 \times \sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{\sqrt{2^2 \times 3}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[4]{12} \right)^{\frac{2}{3}} = \\ = \sqrt[3]{\sqrt[4]{12^{-2}}} = \sqrt[12]{12^{-2}} = \sqrt[6]{12^{-1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{12}}$$

$$35.1. \sqrt[3]{4} \times 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{2^2} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{5}{9}} = 2^{\frac{6}{9} + \frac{5}{9}} = 2^{\frac{11}{9}}$$

$$35.2. \sqrt[3]{\left(1 - 4^{-\frac{1}{2}} \right)} = \sqrt[3]{\left(1 - \left(2^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} = \sqrt[3]{\left(1 - 2^{-1} \right)} = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{2} \right)} = \\ = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$35.3. \sqrt[3]{4} \times \left(1 - 2^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{2^2} \times \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{2}} = \\ = 2^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$35.4. \frac{\left(1 - \frac{3}{2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\left(1 - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(2^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{-1}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-1 - \frac{1}{2}} = \\ = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$36.1. \frac{A}{C} = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{12}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3^2 \times 2}}}{\sqrt[4]{12}} = \frac{\sqrt[4]{3^2 \times 2}}{\sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{\frac{3^2 \times 2}{2^2 \times 3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$36.2. B \times C = 3^{-\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{12} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{12} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{12} = \\ = \sqrt[12]{\frac{1}{3^4} \times \sqrt[12]{12^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^3 \times 4^3}{3^4}} = \sqrt[12]{\frac{4^3}{3}} = \sqrt[12]{\frac{64}{3}}$$

$$37. \frac{a^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^{-1}}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{6}}} = \frac{a^{-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{6}}} = a^{-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = a^{-\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6}} = a^0 = 1$$

$$38.1. \left(3^{-\frac{1}{3}} \times 9 \right)^{\frac{3}{4}} = \left(3^{-\frac{1}{3}} \times 3^2 \right)^{\frac{3}{4}} = \left(3^{-\frac{1}{3} + 2} \right)^{\frac{3}{4}} = \left(3^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{5}{4}} = \\ = \sqrt[4]{3^5}$$

$$38.2. \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \times \left(1 + 2^{-1} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \times \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \times \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = \\ = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

$$38.3. \frac{\left(3 - \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{5^3}{5}} = \\ = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$$

$$38.4. \left[\left(-3 \right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(-4 \right)^{-\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{12} \right]^{\frac{3}{2}} = \left[12^{-\frac{1}{3}} \times 12^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{3}{2}} = \\ = \left(12^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(12^{-\frac{1}{12}} \right)^{\frac{3}{2}} = 12^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{12}$$

Pág. 26

$$39.1. A = \frac{x^2}{9y} = \frac{\left(2^{\frac{2}{5}} \right)^2}{9 \times 3^{-2}} = \frac{2^{\frac{4}{5}}}{9 \times \frac{1}{9}} = 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$$

$$39.2. A = \frac{x^2}{9y} = \frac{\left(3^{\frac{1}{3}} \right)^2}{9 \times \sqrt{3}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{7}{2}}} = 3^{\frac{2}{3} - \frac{7}{2}} = 3^{-\frac{5}{6}}$$

$$39.3. A = \frac{x^2}{9y} = \frac{6^2}{9 \times 4^{\frac{1}{5}}} = \frac{(2 \times 3)^2}{3^2 \times \left(2^2 \right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 \times 2^{\frac{2}{5}}} = 2^{2 - \frac{2}{5}} = 2^{\frac{8}{5}}$$

$$40.1. A = \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{b}} \right) \times \left(\sqrt{a} - b^{-\frac{1}{4}} \right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{4}} \right) \times \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{4}} \right) = \\ = \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(b^{-\frac{1}{4}} \right)^2 = a - b^{-\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{\sqrt{b}}, \text{ como se pretendia}$$

demonstrar.

$$40.2. A = a - \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{8}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}$$

$$40.3. A = a - \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{12}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 \times 3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$41.1. A = \sqrt[3]{4a^2} \times \left(\frac{a\sqrt{2a}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4a^2} \times \sqrt[3]{\frac{a\sqrt{2a}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4a^3(2a)^{\frac{1}{2}}}{2}} = \sqrt[3]{2a^3 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{7}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{7}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}, \text{ como se pretendia}$$

demonstrar.

41.2. Como $A = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}$ tem-se:

$$A = 2^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[7]{5^3} \right)^{\frac{7}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{3}{7}} \right)^{\frac{7}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

42.1. Se $\overline{RS} = 18$, então

$$\overline{RS} = \sqrt{18}.$$

Seja $\overline{RF} = x$. Sabe-se que

$$\overline{RF} = \overline{SF}.$$

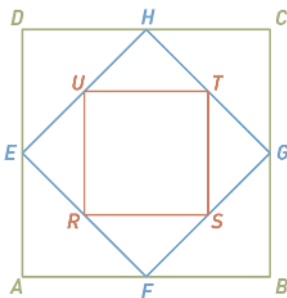
O triângulo $[RFS]$ é retângulo e

isósceles, logo $x^2 + x^2 = \overline{RS}^2$,

isto é $x^2 + x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9$.

Então, $x = 3$.

Assim, $\overline{EF} = 6$ e o perímetro de $[EFGH]$ é 24.



42.2. Se a área do quadrado $[ABCD]$ é 20, então $\overline{AB} = \sqrt{20}$ e

$$\overline{AF} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

$$\overline{EF}^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 10. \text{ Assim, } \overline{EF} = \sqrt{10} \text{ e } \overline{RF} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\overline{RS}^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \overline{RS}^2 = \frac{10}{4} + \frac{10}{4} \Leftrightarrow \overline{RS}^2 = \frac{20}{4} \Leftrightarrow$$

$$\overline{RS}^2 = 5. \text{ Então } \overline{RS} = \sqrt{5}.$$

$$\overline{US}^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \overline{US}^2 = 10. \text{ Assim, } \overline{US} = \sqrt{10}.$$

Pág. 27

43.1. $\widehat{OMB} = 90^\circ$ porque BC é tangente a circunferência de centro O em M .

$\widehat{MBN} = 30^\circ$ porque $[BNC]$ é um triângulo retângulo, e $\widehat{C} = 60^\circ$.

$\widehat{BOM} = 60^\circ$ pois a soma dos ângulos internos do triângulo $[OBM]$ é 180° .

43.2.

a) Sabe-se que $\overline{OB} = 2r$ pois $[BN]$ é uma mediana sendo O o baricentro do triângulo $[ABC]$ e, por isso, $\overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{BN}$ o que

equivale a dizer que $\overline{OB} = 2\overline{ON}$.

Então, pelo Teorema de Pitágoras $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$, isto é,

$$4r^2 = r^2 + \overline{BM}^2.$$

$$\text{Assim, } \overline{BM} = \sqrt{3r^2} \Leftrightarrow \overline{BM} = r\sqrt{3}.$$

Designando o perímetro de $[ABC]$ por P , tem-se

$$P = 6 \times \overline{BM} = 6\sqrt{3}r.$$

b) $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

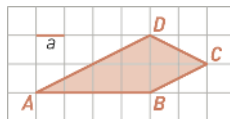
$$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{3}r$$

Como $\overline{OM} = r$, conclui-se que $\overline{AM} = 3r$.

$$\text{Então, } A_{\text{triângulo}} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2} = \frac{2\sqrt{3}r \times 3r}{2} = 3\sqrt{3}r^2$$

$$\frac{A_{\text{círculo}}}{A_{\text{triângulo}}} = \frac{\pi r^2}{3\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

44.



$$\overline{BC}^2 = (2a)^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 5a^2$$

Então, $\overline{BC} = \sqrt{5}a$. Sabe-se que $\overline{CD} = \overline{BC}$.

$$\overline{AD}^2 = (2a)^2 + (4a)^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 4a^2 + 16a^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 20a^2$$

Como $20 = 2^2 \times 5$, conclui-se que $\overline{AD} = 2\sqrt{5}a$.

Sabendo que o perímetro do quadrilátero $[ABCD]$ é 32 tem-se

$$4a + 2 \times \sqrt{5}a + 2\sqrt{5}a = 32 \Leftrightarrow 4a + 4\sqrt{5}a = 32 \Leftrightarrow$$

$$(4 + 4\sqrt{5})a = 32 \Leftrightarrow a = \frac{32}{4 + 4\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = \frac{32(4 - 4\sqrt{5})}{(4 + 4\sqrt{5})(4 - 4\sqrt{5})}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{32(4 - 4\sqrt{5})}{16 - 80} \Leftrightarrow a = \frac{32(4 - 4\sqrt{5})}{-64} \Leftrightarrow a = \frac{-(4 - 4\sqrt{5})}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{5} - 2$$

Pág. 29

1.1.

$$T(x) = P(x) + Q(x) = (-x^2 + 3x - 2) + (2x^3 - 5x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 2$$

O polinómio $T(x)$ tem grau 3.

$$\begin{aligned} 1.2. \quad T(x) &= P(x) \times Q(x) = (-x^2 + 3x - 2) \times (2x^3 - 5x) = \\ &= -2x^5 + 5x^3 + 6x^4 - 15x^2 - 4x^3 + 10x = -2x^5 + 6x^4 + x^3 - 15x^2 + 10x \end{aligned}$$

O polinómio $T(x)$ tem grau 5.

$$\begin{aligned} 1.3. \quad T(x) &= Q(x) - P(x) = (2x^3 - 5x) - (-x^2 + 3x - 2) = \\ &= 2x^3 - 5x + x^2 - 3x + 2 = 2x^3 + x^2 - 8x + 2 \end{aligned}$$

O polinómio $T(x)$ tem grau 3.

$$1.4. \quad T(x) = [Q(x)]^2 = (2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 20x^4 + 25x^2$$

O polinómio $T(x)$ tem grau 6.

$$2.1. \quad A(x) - B(x) = (x^3 - 3x) - (-2x^2 + x - 3) =$$

$$= x^3 - 3x + 2x^2 - x + 3 = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

$$2.2. \quad A(x) \times B(x) = (x^3 - 3x) \times (-2x^2 + x - 3) =$$

$$= -2x^5 + x^4 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2 + 9x = -2x^5 + x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$2.3. \quad A(x) - B(x) \times C(x) = (x^3 - 3x) - (-2x^2 + x - 3) \times \left(-\frac{3}{2}x + 2\right) =$$

$$= x^3 - 3x - \left(3x^3 - 4x^2 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}x - 6\right) =$$

$$= x^3 - 3x - 3x^3 + 4x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{9}{2}x + 6 =$$

$$= -2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 6$$

$$2.4. \quad B(x) + [C(x)]^2 = (-2x^2 + x - 3) + \left(-\frac{3}{2}x + 2\right)^2 =$$

$$= -2x^2 + x - 3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 1$$

3.1.

a) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3 e $B(x)$ é um polinómio de grau 4, então o polinómio $A(x) \times B(x)$ tem grau 7 (3+4).

b) Como $C(x)$ é um polinómio de grau 7 e $B(x)$ é um polinómio de grau 4, então o polinómio $C(x) - B(x)$ tem grau 7.

c) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3 e $C(x)$ é um polinómio de grau 7, então o polinómio $A(x) \times C(x)$ tem grau 10 (3+7).

d) Sendo $A(x)$ um polinómio de grau 3, então o polinómio $[A(x)]^2$ tem grau 6. Como $[A(x)]^2$ é um polinómio de grau 6 e $B(x)$ é um polinómio de grau 4, então o polinómio $[A(x)]^2 \times B(x)$ tem grau 10 (6+4).

3.2.

a) Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x) + P(x)$ seja 5 então $P(x)$ tem de ser um polinómio do 5.º grau, ou seja, $n=5$.

b) Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x) \times P(x)$ seja 5 então $P(x)$ tem de ser um polinómio do 2.º grau, ou seja, $n=2$.

c) Como $B(x)$ é um polinómio do 4.º grau então $[B(x)]^2$ é um polinómio de grau 8. Se o grau do polinómio $[B(x)]^2 \times P(x)$ é 11 então $P(x)$ tem de ser um polinómio do 3.º grau, ou seja, $n=3$.

d) Como $C(x)$ é um polinómio do 7.º grau, para que o grau do polinómio $C(x) \times P(x)$ seja 7 então $P(x)$ tem de ser um polinómio de grau 0, ou seja, $n=0$.

e) Sendo $P(x)$ um polinómio de grau n , então o polinómio $[P(x)]^3$ tem grau $3n$. Como $B(x)$ é um polinómio do 4.º grau então $[P(x)]^3 \times B(x)$ é um polinómio de grau $3n+4$. Como o polinómio $[P(x)]^3 \times B(x)$ tem grau 13 tem-se:
 $3n+4=13 \Leftrightarrow 3n=9 \Leftrightarrow n=3$.

3.3.

a) Por exemplo, $T(x) = -x^4 + x^3$.

b) Como o polinómio $A(x) \times C(x)$ tem grau 10, o polinómio $A(x) \times C(x) \times T(x)$ tem grau 12 se $T(x)$ for um polinómio de grau 2.
Por exemplo, $T(x) = x^2 - 2$.

c) Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x) \times [T(x)]^2$ seja 7 então $[T(x)]^2$ tem de ser um polinómio do 4.º grau. Logo, $T(x)$ é um polinómio de grau 2.
Por exemplo, $T(x) = -2x^2 + 5x + 1$.

Pág. 30

$$\begin{aligned} 4.1. \quad A(x) &= 2(5x-4)^2 + 4(5x-4)(x^3-x^2) = \\ &= 2(25x^2-40x+16) + 4(5x^4-5x^3-4x^3+4x^2) = \\ &= 50x^2-80x+32+20x^4-20x^3-16x^3+16x^2 = \\ &= 20x^4-36x^3+66x^2-80x+32 \end{aligned}$$

4.2.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3} \times [x(x^2-3x+1)] \times (2x-1) = \frac{1}{3} (x^3-3x^2+x)(2x-1) = \\ &= \frac{2x^4-x^3-6x^3+3x^2+2x^2-x}{3} = \frac{2x^4-7x^3+5x^2-x}{3} = \\ &= \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.3. \quad V(x) &= (5x-4)^2 \times (x^3-x^2) = (25x^2-40x+16) \times (x^3-x^2) = \\ &= 25x^5-25x^4-40x^4+40x^3+16x^3-16x^2 = \\ &= 25x^5-65x^4+56x^3-16x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. P(x) &= (x+1)(3x+1)(4x+2) + 2(3x)(x+1)(4x+2) = \\
 &= (3x^2 + x + 3x + 1)(4x+2) + (6x^2 + 6x)(4x+2) = \\
 &= (3x^2 + 4x + 1)(4x+2) + 24x^3 + 12x^2 + 24x^2 + 12x = \\
 &= 12x^3 + 6x^2 + 16x^2 + 8x + 4x + 2 + 24x^3 + 36x^2 + 12x = \\
 &= 36x^3 + 58x^2 + 24x + 2
 \end{aligned}$$

6.1. O polinômio $R(x) = x^2 - x + 1$ não pode ser o resto da divisão inteira de $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 5$ por $B(x) = x^2 + 3x$ porque numa divisão inteira de polinômios o grau do polinômio resto é sempre inferior ao grau do polinômio divisor.

6.2. Os polinômios $Q(x) = 2x - 10$ e $R(x) = 31x - 5$ podem ser, respectivamente, o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 5$ por $B(x) = x^2 + 3x$ porque

$$B(x) \times Q(x) + R(x) = A(x).$$

$$\begin{aligned}
 B(x) \times Q(x) + R(x) &= (x^2 + 3x)(2x - 10) + 31x - 5 = \\
 \text{Ora,} \quad &= 2x^3 - 10x^2 + 6x^2 - 30x + 31x - 5 = 2x^3 - 4x^2 + x - 5 = A(x).
 \end{aligned}$$

Pág. 31

$$\begin{aligned}
 7.1. A(x) &= (2x^2 - x + 1)(2x + 3) + (x + 1) = \\
 &= 4x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 + x + 1 = 4x^3 + 4x^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.2. A(x) &= (2x^2 - x + 1)(x^2 - 2x) + (2x + 1) = \\
 &= 2x^4 - 4x^3 - x^3 + 2x^2 + x^2 - 2x + 2x + 1 = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.3. A(x) &= (2x^2 - x + 1)(x^3 - x + 1) + (-2) = \\
 &= 2x^5 - 2x^3 + 2x^2 - x^4 + x^2 - x + x^3 - x + 1 - 2 = \\
 &= 2x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.4. A(x) &= (2x^2 - x + 1)(-x^2 + 2x - 1) + 0 = \\
 &= -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = \\
 &= -2x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.5. A(x) &= (2x^2 - x + 1)(x^3 - x^2) + (-x + 3) = \\
 &= 2x^5 - 2x^4 - x^4 + x^3 + x^3 - x^2 - x + 3 = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3
 \end{aligned}$$

8. Designemos por $D(x)$ o dividendo. Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
 D(x) &= (x^2 - 1)(3x - 5) + 2x = 3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 + 2x = \\
 &= 3x^3 - 5x^2 - x + 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) = (3x + 1)(x^2 - x) + 3 = \\
 &= 3x^3 - 3x^2 + x^2 - x + 3 = 3x^3 - 2x^2 - x + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) = (2x^2 + x + 1)(3x - 1) + x + 2 = \\
 &= 6x^3 - 2x^2 + 3x^2 - x + 3x - 1 + x + 2 = 6x^3 + x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) = (-x^4 + x)(2x^2 + x) + x^3 + x + 1 = \\
 &= -2x^6 - x^5 + 2x^3 + x^2 + x^3 + x + 1 = -2x^6 - x^5 + 3x^3 + x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

12.1. Quociente: $x^3 - x + 1$; Resto: $2x - 3$

12.2. Quociente: $2x^2 - 3x$; Resto: $2x - 3$

12.3. Quociente: $(2x^2 - 3x)(x^3 - x + 1)$

Resto: 0

Pág. 32

13.1.

$$\begin{array}{r}
 4x^2 + 6x - 5 \quad | 2x - 1 \\
 \underline{-4x^2 + 2x} \quad 2x + 4 \\
 8x - 5 \\
 \underline{-8x + 4} \\
 -1
 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x + 4$

Resto: $R(x) = -1$

13.2.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \quad | x^2 - x + 2 \\
 \underline{-x^3 + x^2 - 2x} \quad x + 1 \\
 x^2 - 5x + 5 \\
 \underline{-x^2 + x - 2} \\
 -4x + 3
 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x + 1$

Resto: $R(x) = -4x + 3$

13.3.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad | x^3 + x - 2 \\
 \underline{-2x^4} \quad -2x^2 + 4x \quad 2x \\
 -2x^2 + x + 1
 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x$

Resto: $R(x) = -2x^2 + x + 1$

13.4.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x - 5 \quad | 2x + 1 \\
 \underline{-x^2 - \frac{1}{2}x} \quad \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\
 \frac{5}{2}x - 5 \\
 \underline{-\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}} \\
 -\frac{25}{4}
 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

Resto: $R(x) = -\frac{25}{4}$

Pág. 33

14.1.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad |x^2 + x - 2 \\ -x^3 - x^2 + 2x \quad \quad x - 3 \\ \hline -3x^2 + 3x - 2 \\ 3x^2 + 3x - 6 \\ \hline 6x - 8 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x - 3$

Resto: $R(x) = 6x - 8$

14.2.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \quad |x^2 - 2x \\ -2x^4 + 4x^3 \quad \quad 2x^2 + 5x + 10 \\ \hline 5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \\ -5x^3 + 10x^2 \\ \hline 10x^2 - 2x + 1 \\ -10x^2 + 20x \\ \hline 18x + 1 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2 + 5x + 10$

Resto: $R(x) = 18x + 1$

14.3.

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 0x^2 - 5x + 0 \quad |3x + 2 \\ -3x^3 - 2x^2 \quad \quad x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9} \\ \hline -2x^2 - 5x + 0 \\ 2x^2 + \frac{4}{3}x \\ \hline -\frac{11}{3}x + 0 \\ \frac{11}{3}x + \frac{22}{9} \\ \hline \frac{22}{9} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9}$

Resto: $R(x) = \frac{22}{9}$

14.4.

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 2x + 5 \quad |2x - 5 \\ -4x^2 + 10x \quad \quad 2x + 4 \\ \hline 8x + 5 \\ -8x + 20 \\ \hline 25 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x + 4$

Resto: $R(x) = 25$

14.5.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x + 6 \quad |x^2 - x \\ -x^3 + x^2 \quad \quad \quad x + 4 \\ \hline 4x^2 + 0x + 6 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline 4x + 6 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x + 4$

Resto: $R(x) = 4x + 6$

14.6.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 0x^2 - x + 0 \quad |x^2 + 3x - 1 \\ -2x^3 - 6x^2 + 2x \quad \quad 2x - 6 \\ \hline -6x^2 + x + 0 \\ 6x^2 + 18x - 6 \\ \hline 19x - 6 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x - 6$

Resto: $R(x) = 19x - 6$

14.7.

$$\begin{array}{r} -3x^2 + x + 2 \quad |2x + 1 \\ 3x^2 + \frac{3}{2}x \quad \quad -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \\ \hline \frac{5}{2}x + 2 \\ -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4} \\ \hline \frac{3}{4} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

Resto: $R(x) = \frac{3}{4}$

14.8.

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 2 \quad |x^3 - 2x \\ -x^5 \quad \quad + 2x^3 \quad \quad \quad x^2 + x + 2 \\ \hline x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - 2 \\ -x^4 \quad \quad + 2x^2 \\ \hline 2x^3 + 2x^2 + 0x - 2 \\ -2x^3 \quad \quad + 4x \\ \hline 2x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + x + 2$

Resto: $R(x) = 2x^2 + 4x - 2$

15. Designemos por $A(x)$ o divisor. Então, tem-se:

$$6x^3 - x^2 + 5 = A(x) \times (3x - 2) + 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 - x^2 - 2x = A(x) \times (3x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^3 - x^2 - 2x}{3x - 2} = A(x)$$

Recorrendo ao algoritmo da divisão de polinômios tem-se:

$$\begin{array}{r} 6x^3 - x^2 - 2x + 0 \quad | 3x - 2 \\ -6x^3 + 4x^2 \quad \quad | 2x^2 + x \\ \hline 3x^2 - 2x + 0 \\ -3x^2 + 2x \quad \quad | 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Então, $A(x) = 2x^2 + x$.

16.1. $(-x^3 + 3x^2 + x - 5):(x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & -2 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -x^2 + 2x + 3$

Resto: $R(x) = -2$

16.2. $(3x^2 - 7):(x + 2)$

$$\begin{array}{r|rr} -2 & 3 & 0 & -7 \\ & -6 & 12 & \\ \hline & 3 & -6 & 5 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 3x - 6$

Resto: $R(x) = 5$

16.3. $(2x^3 - x + 3):(x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ & 4 & 8 & 14 & \\ \hline & 2 & 4 & 7 & 17 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2 + 4x + 7$

Resto: $R(x) = 17$

16.4. $(x^4 - x^2 + x - 3):(x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ & -1 & 1 & 0 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^3 - x^2 + 1$

Resto: $R(x) = -4$

16.5. $(5x^3 + x^2 - 3x):(x - \frac{1}{2})$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 5 & 1 & -3 & 0 \\ & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{5}{8} & \\ \hline & 5 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{8} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 5x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{4}$

Resto: $R(x) = -\frac{5}{8}$

16.6. $(3x^3 + 4x^2 - 3x - 7):(x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 3 & 4 & -3 & -7 \\ & 15 & 95 & 460 & \\ \hline & 3 & 19 & 92 & 453 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 3x^2 + 19x + 92$

Resto: $R(x) = 453$

16.7. $(x^3 - \frac{1}{2}x):(x + \frac{1}{2})$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Resto: $R(x) = \frac{1}{8}$

16.8. $(-x^4 + x^2 - 1):(x - \frac{1}{3})$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{3} & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{8}{81} & \\ \hline & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} & \frac{8}{27} & -\frac{73}{81} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{8}{27}$

Resto: $R(x) = -\frac{73}{81}$

17.1. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & 1 & -k & 2 \\ & 6 & 14 & 28-2k & \\ \hline & 3 & 7 & 14-k & 30-2k \end{array}$$

O polinômio $P(x)$ é divisível por $x - 2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ for igual a zero.

Então tem-se $30 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

17.2. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 2 & -3 & k \\ & 1 & -3 & 6 & \\ \hline & -1 & 3 & -6 & k+6 \end{array}$$

O resto da divisão de $T(x)$ por $x + 1$ é 3 se e só se $k + 6 = 3 \Leftrightarrow k = -3$.

17.3. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & -1 & 0 & 2k & -k \\ -1 & & 2 & -1 & 1 & -2k-1 \\ \hline & -2 & 1 & -1 & 2k+1 & -3k-1 \end{array}$$

O resto da divisão de $S(x)$ por $x+1$ é -4 se e só se $-3k-1=-4 \Leftrightarrow k=1$.

17.4. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & k & 0 & 1 & -k & 0 \\ -1 & & -k & k & -k-1 & 2k+1 \\ \hline & k & -k & k+1 & -2k-1 & 2k+1 \end{array}$$

O polinômio $Q(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $Q(x)$ por $x+1$ for igual a zero, isto é, se $2k+1=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$.

Pág. 34

18.1. O polinômio $P(x) = -x^3 + 4x^2 - 2kx + 1$; $k \in \mathbb{R}$ é divisível por $x+1$ se e só se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é zero. Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão de $P(x)$ por $x+1$, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & -2k & 1 \\ -1 & & 1 & -5 & 2k+5 \\ \hline & -1 & 5 & -2k-5 & 2k+6 \end{array}$$

O resto da divisão é zero se e só se $2k+6=0 \Leftrightarrow k=-3$.

18.2. Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão do polinômio $P(x) = -x^3 + 4x^2 - 2kx + 1$; $k \in \mathbb{R}$ por $x-2$, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & -2k & 1 \\ 2 & & -2 & 4 & -4k+8 \\ \hline & -1 & 2 & -2k+4 & -4k+9 \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é 3 se e só se $-4k+9=3 \Leftrightarrow k=3$.

19. Como $P(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right)Q(x) + R$, então o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{b}{a}$ são, respectivamente, $aQ(x)$ e R .

20. Como o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ são, respectivamente, $Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6$ e $R(x) = 5$, então sabe-se que $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \times (4x^3 - 2x^2 + 6) + 5$.

20.1. Sabe-se que $2x-1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, logo:

$$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times (4x^3 - 2x^2 + 6) + 5 = (2x-1) \times (2x^3 - x^2 + 3) + 5$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $2x-1$ são, respectivamente, $2x^3 - x^2 + 3$ e 5.

20.2. Sabe-se que $4x-2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$, logo:

$$\begin{aligned} P(x) &= 4\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} \times (4x^3 - 2x^2 + 6) + 5 = \\ &= (4x-2) \times \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) + 5. \end{aligned}$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $4x-2$ são, respectivamente, $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ e 5.

21.1. Atendendo a que $2x-6 = 2(x-3)$, começa-se por determinar o quociente e o resto da divisão de $x^3 - x + 1$ por $x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & & 3 & 9 & 24 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 25 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 3x + 8$

Resto: $R(x) = 25$

Então, o quociente e o resto da divisão de $x^3 - x + 1$ por $2x-6$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{2} \times (x^2 + 3x + 8) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$$

Resto: $R(x) = 25$

21.2. Atendendo a que $3x-6 = 3(x-2)$, começa-se por determinar o quociente e o resto da divisão de $2x^3 - 4x^2 + 2$ por $x-2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2$

Resto: $R(x) = 2$

Então, o quociente e o resto da divisão de $2x^3 - 4x^2 + 2$ por $3x-6$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{3} \times 2x^2 = \frac{2}{3}x^2$$

Resto: $R(x) = 2$

21.3. Atendendo a que $3x+1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de $x^4 + \frac{x^3}{3} + x$ por $x + \frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^3 + 1$; Resto: $R(x) = -\frac{1}{3}$

Então, o quociente e o resto da divisão de $x^4 + \frac{x^3}{3} + x$ por $3x+1$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{3} \times (x^3 + 1) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}; \text{ Resto: } R(x) = -\frac{1}{3}$$

22.1.

a) O polinômio $P(x) = 2x^3 - kx^2 - 3x + 2k$, $k \in \mathbb{R}$ é divisível por $x-1$ se e só se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ é zero.

Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão de $P(x)$ por $x-1$, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -k & -3 & 2k \\ & & 2 & -k+2 & -k-1 \\ \hline & 2 & -k+2 & -k-1 & k-1 \end{array}$$

O resto da divisão é zero se e só se $k-1=0 \Leftrightarrow k=1$.

b) Sabe-se que $2x+4=2(x+2)$. Então, o polinômio

$P(x) = 2x^3 - kx^2 - 3x + 2k$, $k \in \mathbb{R}$ é divisível por $2x+4$ se e só se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é zero.

Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão de $P(x)$

por $x+2$, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -k & -3 & 2k \\ & & -4 & 2k+8 & -4k-10 \\ \hline & 2 & -k-4 & 2k+5 & -2k-10 \end{array}$$

O resto da divisão é zero se e só se $-2k-10=0 \Leftrightarrow k=-5$.

Pág. 35

22.2. Recorrendo ao algoritmo da divisão de polinômios tem-se:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - kx^2 - 3x + 2k \quad | x^2 + x \\ -2x^3 - 2x^2 \quad \quad \quad 2x + (-k-2) \\ \hline (-k-2)x^2 - 3x + 2k \\ (k+2)x^2 + (k+2)x \\ \hline (k-1)x + 2k \end{array}$$

O resto da divisão inteira de $P(x)$ por x^2+x é dado por $(k-1)x+2k$. Se o resto for igual a $x+3$, então tem-se:

$$(k-1)x+2k = x+3 \Leftrightarrow k-1=1 \wedge 2k=3 \Leftrightarrow k=2 \wedge k=\frac{3}{2}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{impossível}}$

Donde se conclui que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por x^2+x não pode ser igual a $x+3$.

22.3. Sendo $k=-2$, então $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 4$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Então, $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

A divisão de $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ por $(x+3)(x-1)$ pode ser feita dividindo primeiro $P(x)$ por $x+3$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 2 & -3 & -4 \\ & & -6 & 12 & -27 \\ \hline & 2 & -4 & 9 & -31 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = 2x^2 - 4x + 9; \quad \text{Resto: } R_1(x) = -31$$

$$\text{Então, tem-se: } P(x) = (x+3) \times (2x^2 - 4x + 9) - 31 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & -4 & 9 \\ & & 2 & -2 \\ \hline & 2 & -2 & 7 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q_2(x) = 2x - 2; \quad \text{Resto: } R_2(x) = 7$$

$$\text{Então, tem-se: } 2x^2 - 4x + 9 = (x-1) \times (2x-2) + 7 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$P(x) = (x+3) \times [(x-1) \times (2x-2) + 7] - 31 =$$

$$= (x+3) \times (x-1) \times (2x-2) + 7x + 21 - 31 =$$

$$= (x^2 + 2x - 3) \times (2x-2) + 7x - 10$$

Conclui-se, então, que o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ por $x^2 + 2x - 3$ são, respetivamente, $2x-2$ e $7x-10$.

23.1. Sabe-se que o volume do prisma é dado por $(\overline{AB})^2 \times \overline{AF}$.

Então, tem-se que $2x^3 + 13x^2 + 24x + 9 = (x+3)^2 \times \overline{AF}$, ou seja,

$$\frac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 9}{x^2 + 6x + 9} = \overline{AF}.$$

Recorrendo ao algoritmo da divisão tem-se:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 13x^2 + 24x + 9 \quad | x^2 + 6x + 9 \\ -2x^3 - 12x^2 - 18x \quad \quad \quad 2x + 1 \\ \hline x^2 + 6x + 9 \\ -x^2 - 6x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

Donde se conclui que $\overline{AF} = 2x+1$.

23.2. A área A da superfície total do prisma é dada:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x+3)^2 + 4(x+3)(2x+1) = \\ &= 2(x^2 + 6x + 9) + 4(2x^2 + x + 6x + 3) = \\ &= 2x^2 + 12x + 18 + 8x^2 + 4x + 24x + 12 = \\ &= 10x^2 + 40x + 30 \end{aligned}$$

$$23.3. A(x) = 240 \Leftrightarrow 10x^2 + 40x + 30 = 240 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -7$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x = 3$.

Assim sendo, o volume do prisma é dado por:

$$V(3) = 2 \times 3^3 + 13 \times 3^2 + 24 \times 3 + 9 = 252.$$

24. Como os triângulos $[ABV]$ e $[OCV]$ são semelhantes, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{\overline{VA}}{10} \Leftrightarrow \overline{VA} = 2x.$$

Então o volume do prisma é dado por, em função de x , por:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x)^2 \times (10-2x) = 4x^2 \times (10-2x) = 40x^2 - 8x^3 = \\ &= -8x^3 + 40x^2. \end{aligned}$$

Pág. 36

25.1. O resto da divisão de $2x^2 - 3x + 4$ por $x - 2$ é igual a:

$$2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = 6.$$

25.2. O resto da divisão de $-x^4 + x^3 + 2x + 4$ por $x - 2$ é igual a:

$$-2^4 + 2^3 + 2 \times 2 + 4 = -16 + 8 + 4 + 4 = 0.$$

25.3. O resto da divisão de $-2x^2 + x + 21$ por $x + 3$ é igual a:

$$-2 \times (-3)^2 + (-3) + 21 = -18 - 3 + 21 = 0.$$

25.4. O resto da divisão de $x^3 - 4x + 1$ por $x + 1$ é igual a:

$$(-1)^3 - 4(-1) + 1 = -1 + 4 + 1 = 4.$$

25.5. Como $2x - 4 = 2(x - 2)$, o resto da divisão de $x^3 - 5x + 2$ por $2x - 4$ é igual a:

$$2^3 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0.$$

25.6. Como $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, o resto da divisão de $x^2 + 3x - 1$ por $2x - 1$ é igual a:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{4}.$$

26.1. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é dado por $P(-2)$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a 1 se $P(-2) = 1$.

$$P(-2) = 1 \Leftrightarrow 2 \times (-2)^3 - k(-2) + 3 = 1 \Leftrightarrow -16 + 2k + 3 = 1 \Leftrightarrow k = 7$$

26.2. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é dado por $P(1)$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é igual a 3 se $P(1) = 3$.

$$P(1) = 3 \Leftrightarrow -1^4 - 2 \times 1^2 + k \times 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow -3 + k + 1 = 3 \Leftrightarrow k = 5$$

26.3. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x + 2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ for igual a 0.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a 0 se $P(-2) = 0$.

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow -3 \times (-2)^3 + k(-2)^2 - 3 \times (-2) + k = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 + 4k + 6 + k = 0 \Leftrightarrow k = -5$$

26.4. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é dado por $P(-1)$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é igual a -2 se $P(-1) = -2$.

$$P(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^8 - 2k(-1)^6 + (-1) + k = -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - 2k - 1 + k = -2 \Leftrightarrow k = 2$$

27.1. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é dado por $P(1)$.

$$P(1) = 1^{734} - 2 \times 1^{53} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

27.2. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = 3 \times (-1)^{523} + (-1)^{48} - 2 \times (-1)^{501} = -3 + 1 + 2 = 0.$$

27.3. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = -(-1)^{103} - (-1)^{86} + 2 \times (-1)^{37} + (-1) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3.$$

27.4. Como $2x + 2 = 2(x + 1)$, sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 2$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^{127} + 2 \times (-1)^{53} + (-1)^{24} + 3 = -1 - 2 + 1 + 3 = 1.$$

28.1.

$$P(-2) = -(-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 2 = 8 + 8 + 10 + 2 = 28.$$

Então, o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a 28 pois é dado por $P(-2)$.

28.2.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{8} + \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2 = -\frac{1}{8}.$$

Então, o resto da divisão de $P(x)$ por $2x - 1$ é igual a $-\frac{1}{8}$ pois é dado por $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pág. 37

29.1. $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1) = 0$.

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{2n} + 2(-1)^n + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2(-1)^n + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(-1)^n = -2 \Leftrightarrow (-1)^n = -1$$

Ora, $(-1)^n = -1$ se n é ímpar.

29.2. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^{2n} + 2(-1)^n + 1 = 1 + 2(-1)^n + 1 = 2(-1)^n + 2$$

Como n é par, $(-1)^n = 1$ e $P(-1) = 2 \times 1 + 2 = 4$.

Então, se n é par o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é igual a 4.

29.3. Sabe-se que o resto da divisão de $Q(x)$ por $x - 1$ é dado por $Q(1)$.

$$Q(1) = 1^{n+1} - 2 \times 1^n + 1^{n-1} = 1 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como o resto da divisão de $Q(x)$ por $x-1$ é zero, conclui-se que $Q(x)$ é divisível por $x-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

29.4. Como $3x+3=3(x+1)$, sabe-se que o resto da divisão de

$(P(x)+Q(x))$ por $3x+3$ é dado por $(P(-1)+Q(-1))$.

$$P(-1)=2(-1)^n+2 \text{ e}$$

$$Q(-1)=(-1)^{n+1}-2(-1)^n+(-1)^{n-1}=(-1)^n(-1-2+(-1)^{-1})=-4(-1)^n$$

, então tem-se

$$P(-1)+Q(-1)=2(-1)^n+2-4(-1)^n=2-2(-1)^n.$$

Como n é par, $(-1)^n=1$. Logo, $P(-1)+Q(-1)=2-2 \times 1=0$.

Então, se n é par o resto da divisão de $(P(x)+Q(x))$ por $3x+3$ é igual a 0, ou seja, $(P(x)+Q(x))$ é divisível por $3x+3$.

30.1. Os restos das divisões de $P(x)$ por $x+1$ e por $x-2$ se de $P(x)$ são dados por $P(-1)$ e $P(2)$, respectivamente.

Sabe-se que os restos das divisões de $P(x)$ por $x+1$ e por $x-2$ são, respectivamente, 3 e -2 .

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-1)=3 \\ P(2)=-2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^4 - a \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + b = 3 \\ 2^4 - a \times 2^2 + 3 \times 2 + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-3+b=3 \\ 16-4a+6+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5+a \\ -4a+5+a=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5+a \\ -3a=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=5+\frac{29}{3} \\ a=\frac{29}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{44}{3} \\ a=\frac{29}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

30.2. $P(x)$ é divisível por $x-1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ for igual a 0, ou seja, se $P(1)=0$.

$$\begin{aligned} P(1)=0 &\Leftrightarrow 1^4 - a \times 1^2 + 3 \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow 1-a+3+b=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -a+b=-4 \Leftrightarrow a=b+4 \end{aligned}$$

31.1. $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1)=0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é dado por $P(2)$.

Como $P(x)$ dividido por $x-2$ dá resto 3 então $P(2)=3$.

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-1)=0 \\ P(2)=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (-1)^3 + m \times (-1)^2 + n = 0 \\ 2 \times 2^3 + m \times 2^2 + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+m+n=0 \\ 16+4m+n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n=2-m \\ 4m+2-m=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2-m \\ 3m=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2-m \\ m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2-(-5) \\ m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n=7 \\ m=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

31.2. Os restos das divisões de $P(x)$ por x e por $x-1$ se de $P(x)$ são dados por $P(0)$ e $P(1)$, respectivamente.

Sabe-se que os restos das divisões de $P(x)$ por x e por $x-1$ são, respectivamente, 1 e -2 .

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(0)=1 \\ P(1)=-2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 0^3 + m \times 0^2 + n = 1 \\ 2 \times 1^3 + m \times 1^2 + n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ 2+m+n=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

32.1. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $x+2$ e por $x-1$, então os restos das divisões de $P(x)$ por $x+2$ e por $x-1$ são iguais a 0, ou seja, $P(-2)=0$ e $P(1)=0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-2)=0 \\ P(1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(-2)^4 + a \times (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 + b \times (-2) + 2 = 0 \\ -1^4 + a \times 1^3 - 2 \times 1^2 + b \times 1 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -16-8a-8-2b+2=0 \\ -1+a-2+b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a-2b=22 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=-11 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+1-a=-11 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=-12 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=1-(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \end{aligned}$$

32.2. Sendo $a=-4$ e $b=5$, então

$$P(x)=-x^4-4x^3-2x^2+5x+2.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é dado por $P(2)$.

$$P(2)=-2^4-4 \times 2^3-2 \times 2^2+5 \times 2+2=-16-32-8+10+2=-44.$$

Assim sendo, o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é -44 .

33. Sabe-se que $P(x)$ é divisível por $x+2$ e que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é 1, ou seja, $P(-2)=0$ e $P(2)=1$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-2)=0 \\ P(2)=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \times (-2)^3 - a \times (-2)^2 + b \times (-2) - 1 = 0 \\ -\frac{1}{2} \times 2^3 - a \times 2^2 + b \times 2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4-4a-2b-1=0 \\ -4-4a+2b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b=-3 \\ -4a+2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=3 \\ 2b=6+4a \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+6+4a=3 \\ 2b=6+4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a=-3 \\ 2b=6+4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ 2b=6+4 \times (-\frac{3}{8}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ 2b=6-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ b=\frac{9}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Sendo } a=-\frac{3}{8} \text{ e } b=\frac{9}{4}, \text{ então } P(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{4}x-1.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = -\frac{1}{2} \times (-1)^3 + \frac{3}{8} \times (-1)^2 + \frac{9}{4} \times (-1) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{9}{4} - 1 =$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{3}{8} - \frac{18}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{19}{8}.$$

Assim sendo, o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é $-\frac{19}{8}$.

Pág. 38

34.1. $P(-1) = 2 \times (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$

Como $P(-1) = 0$, -1 é raiz do polinômio $P(x)$.

34.2. Sendo -1 é uma raiz do polinômio $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $P(x)$ por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ & & -2 & -3 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, o quociente da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é

$$Q(x) = 2x^2 + 3x - 2.$$

34.3. Se $P(x)$ é divisível por $x+1$, então $P(x) = (x+1) \times Q(x)$.

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) = (x+1) \times (2x^2 + 3x - 2)$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

$$\text{Então, } 2x^2 + 3x - 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \times (x+2) = (2x-1) \times (x+2).$$

Donde se conclui que $P(x) = (x+1)(2x-1)(x+2)$.

35.1. Tendo em atenção a informação dada, conclui-se que -2 é uma raiz de $P(x)$ e que $P(x) = (x+2) \times (x^3 + 3x^2 - 4)$.

Simplificando, tem-se:

$$P(x) = (x+2) \times (x^3 + 3x^2 - 4) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2x^3 + 6x^2 - 8 =$$

$$= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8.$$

35.2.

a) Atendendo à aplicação da regra de Ruffini apresentada, constata-se que o quociente da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é $x^3 + 3x^2 - 4$.

b) Atendendo à aplicação da regra de Ruffini apresentada, constata-se que o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x+2)^2$ é $x^2 + x - 2$.

c) Atendendo à aplicação da regra de Ruffini apresentada, constata-se que o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x+2)^3$ é $x-1$.

35.3. Como $P(x) = (x+2)^3(x-1)$, sabe-se que as raízes do polinômio $P(x)$ são -2 e 1 .

-2 é uma raiz de multiplicidade 3 e 1 é uma raiz de multiplicidade 1.

36.1. Sabe-se que $A(x)$ é divisível por $x^2 - 16$ e que

$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$. Então, $A(x)$ é divisível por $x-4$ e por $x+4$.

Aplicando a Regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -16 & 32 \\ -4 & & -4 & 24 & -32 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \\ 3 & & 4 & -8 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

As raízes do polinômio $A(x)$ são -4 , 2 e 4 .

36.2. As raízes do polinômio $A(x)$ têm multiplicidade 1.

36.3. Atendendo aos cálculos efetuados anteriormente sabe-se que $A(x) = (x+4)(x-4)(x-2)$.

Pág. 39

37.1. Como $B(x) = (x-1)^m(x+2)^n$; $m, n \in \mathbb{N}$, sabe-se que 1 e -2 são raízes do polinômio $B(x)$ de multiplicidade m e n , respetivamente.

Para determinar os valores de m e n vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & \\ 1 & & 1 & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

Assim sendo, tem-se

$$B(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^3(x+2).$$

Logo, $m=3$ e $n=1$.

37.2. As raízes do polinômio $B(x)$ são 1 e -2 , de multiplicidades, respetivamente, 3 e 1 .

38.1. Como $B(x) = (x+1)^m \times (x-2)^n \times (x+3)^p$; $m, n, p \in \mathbb{N}$, sabe-se que -1 , 2 e -3 são raízes do polinômio $B(x)$ de multiplicidade m , n e p , respetivamente.

Para determinar os valores de m , n e p vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -11 & 13 & 26 & -20 & -24 \\ -1 & & 2 & 9 & -22 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -9 & 22 & 4 & -24 & 0 \\ -1 & & 3 & 6 & -28 & 24 & \\ \hline & 1 & -6 & 28 & -24 & 0 & \\ -1 & & 4 & 2 & -30 & & \\ \hline & 1 & -2 & 30 & -54 & \neq 0 & \end{array}$$

Assim, tem-se $B(x) = (x+1)^2(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 28 & -24 \\ 2 & & 2 & -2 & -16 & 24 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & & \\ 2 & & 2 & 6 & & \\ \hline 1 & 3 & 0 & & & \end{array}$$

Conclui-se que $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = (x-1)^3(x+3)$.

Assim sendo, tem-se $B(x) = (x+1)^2(x-2)^3(x+3)$.

Logo, $m=2$, $n=3$ e $p=1$.

38.2. As raízes do polinômio $B(x)$ são -3 , -1 e 2 , de multiplicidades, respetivamente, 1 , 2 e 3 .

39.1. Começamos por determinar os zeros do polinômio $2x^2 + 5x - 3$.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

$$\text{Então, } 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3).$$

39.2. Começamos por determinar os zeros do polinômio $-3x^2 - 3x + 6$.

$$\begin{aligned} -3x^2 - 3x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } -3x^2 - 3x + 6 = -3(x-1)(x+2) = (-3x+3)(x+2).$$

39.3. Começamos por determinar os zeros do polinômio $6x^2 + x - 1$.

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } 6x^2 + x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (6x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

39.4. $4x^3 - 5x^2 + x = x(4x^2 - 5x + 1)$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $4x^2 - 5x + 1$.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Assim sendo, } 4x^2 - 5x + 1 = 4\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x-1)(4x-1).$$

$$\text{Então, } 4x^3 - 5x^2 + x = x(4x^2 - 5x + 1) = x(x-1)(4x-1).$$

39.5. Sabendo que -1 é um zero do polinômio

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, então $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline 2 & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(2x^2 - 7x + 3).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $2x^2 - 7x + 3$.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 3$$

$$\text{Assim sendo, } 2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x-1)(x-3).$$

$$\text{Portanto, } 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(2x-1)(x-3).$$

39.6. Como $-18x^4 + 9x^3 + 50x^2 - 25x$ é divisível por $1-2x$ e

$1-2x = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, sabe-se que $\frac{1}{2}$ é zero do polinômio

$-18x^4 + 9x^3 + 50x^2 - 25x$. Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & -18 & 9 & 50 & -25 & 0 \\ & & -9 & 0 & 25 & 0 \\ \hline & -18 & 0 & 50 & 0 & 0 \end{array}$$

Então, $-18x^4 + 9x^3 + 50x^2 - 25x$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)(-18x^3 + 50x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)(9x^2 - 25) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)(3x-5)(3x+5).$$

Pág. 40

40.1. Seja $P(x)$ o polinômio que satisfaz as condições exigidas.

$$P(x) = a(x-3)^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é 5 , ou seja,

$$P(-1) = 5.$$

$$P(-1) = 5 \Leftrightarrow a(-1-3)^2 = 5 \Leftrightarrow 16a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{16}$$

$$\text{Então, } P(x) = \frac{5}{16}(x-3)^2 = \frac{5}{16}(x^2 - 6x + 9) = \frac{5}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{45}{16}.$$

40.2. Seja $P(x)$ o polinômio que satisfaz as condições exigidas.

$$P(x) = a(x+2)(x-1)(x+1), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por x é 1 , ou seja,

$$P(0) = 1.$$

$$P(0) = 1 \Leftrightarrow a(0+2)(0-1)(0+1) = 1 \Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } P(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x+1) = \left(-\frac{1}{2}x-1\right)(x^2-1) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

41.1. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-3$ é dado por $P(3)$.

$$P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 54 - 45 - 12 + 3 = 0.$$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x-3$ é igual a 0 , $P(x)$ é divisível por $x-3$.

41.2. Como $P(x)$ é divisível por $x-3$, aplicando a regra de

Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 3 & & 6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-3) \times (2x^2 + x - 1)$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$\text{Então, } 2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1).$$

$$\text{Donde se conclui que } P(x) = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1).$$

42.1.

$$P(-2) = 2 \times (-2)^3 - (-2)^2 - 13 \times (-2) - 6 = -16 - 4 + 26 - 6 = 0.$$

42.2. Como $P(-2) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $x+2$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -13 & -6 \\ -2 & & -4 & 10 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+2) \times (2x^2 - 5x - 3)$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } 2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-3)(2x+1).$$

$$\text{Donde se conclui que } P(x) = (x+2)(x-3)(2x+1).$$

43. Sabe-se que $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 18x + 45$ é divisível por $2x-5$.

Aplicando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, tem-se:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 18x + 45 \quad | 2x-5 \\ -2x^3 + 5x^2 \quad \quad \quad x^2 - 9 \\ \hline -18x + 45 \\ 18x - 45 \\ \hline 0 \end{array}$$

Donde se conclui que

$$P(x) = (2x-5)(x^2-9) = (2x-5)(x-3)(x+3).$$

44.1. Conjunto dos divisores do termo independente do polinómio: $D = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$.

Sabe-se que as raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D .

Então, temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$A(1) = 1^3 + 4 \times 1^2 + 1 - 6 = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

Logo, 1 é raiz de $A(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } A(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 + 5x + 6$.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

As raízes de $A(x)$ são $-3, -2$ e 1 .

$$\text{Então, } A(x) = (x-1)(x+2)(x+3).$$

44.2. Conjunto dos divisores do termo independente do polinómio: $D = \{-1, 1, -2, 2\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D .

Como $A(x)$ é um polinómio do 4.º grau, temos de identificar pelo menos duas dessas raízes.

$$A(-1) = (-1)^4 - 3 \times (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \times (-1) - 2 = 1 + 3 + 1 - 3 - 2 = 0$$

$$\text{e } A(1) = 1^4 - 3 \times 1^3 + 1^2 + 3 \times 1 - 2 = 1 - 3 + 1 + 3 - 2 = 0.$$

Logo, -1 e 1 são raízes de $A(x)$.

Aplicando sucessivamente a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & & -1 & 4 & -5 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 & \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Então, } A(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - 3x + 2).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 - 3x + 2$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

As raízes de $A(x)$ são $-1, 1$ e 2 .

$$\text{Então, } A(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-1) = (x+1)(x-2)(x-1)^2.$$

44.3. Conjunto dos divisores do termo independente do polinómio: $D = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D .

Como $A(x)$ é um polinómio do 4.º grau, temos de identificar pelo menos duas dessas raízes.

$$A(-1) = (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 =$$

$$= 1 + 2 - 9 - 2 + 8 = 0 \text{ e}$$

$$A(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 - 9 \times 1^2 + 2 \times 1 + 8 = 1 - 2 - 9 + 2 + 8 = 0.$$

Logo, -1 e 1 são raízes de $A(x)$.

Aplicando sucessivamente a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 3 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & 8 & 0 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 & \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Então, } A(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - 2x - 8).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 - 2x - 8$.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = -2$$

Assim sendo, $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

As raízes de $A(x)$ são $-2, -1, 1$ e 4 .

Então, $A(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 4)(x + 2)$.

Pág. 41

45.1. $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

Então, $P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$.

45.2.

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$2\left(x + \frac{1}{2}\right)$	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	+

45.3.

a) O conjunto-solução da inequação $P(x) < 0$ é $\left]-\frac{1}{2}, 3\right[$.

b) O conjunto-solução da inequação $P(x) \geq 0$ é

$$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty[.$$

46.1. Sabe-se que dado um polinômio de coeficientes inteiros se este tiver raízes inteiras então essas raízes são divisores do termo independente do polinômio.

Conjunto dos divisores do termo independente do polinômio

$$P(x): D = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}.$$

Sabe-se que se o polinômio $P(x)$ tiver raízes inteiras elas

pertencem ao conjunto D .

Então, temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$P(-1) = -(-1)^3 + 5 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) - 8 = 1 + 5 + 2 - 8 = 0$$

Logo, -1 é raiz de $P(x)$.

Sabendo que -1 é raiz do polinômio $P(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x - 8$,

então $P(x)$ é divisível por $x + 1$. Aplicando a regra de Ruffini

vamos decompor $P(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 5 & -2 & -8 \\ -1 & & 1 & -6 & 8 \\ \hline & -1 & 6 & -8 & 0 \end{array}$$

Então, $P(x) = (x + 1)(-x^2 + 6x - 8)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio

$$-x^2 + 6x - 8.$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = 4$$

Assim sendo, $-x^2 + 6x - 8 = -1(x - 2)(x - 4) = (2 - x)(x - 4)$.

Portanto, $P(x) = (x + 1)(2 - x)(x - 4)$.

46.2.

	$-\infty$	-1		2		4	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$2 - x$	+	+	+	0	-	-	-
$x - 4$	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

46.3. O conjunto-solução da inequação $P(x) < 0$ é

$$\left]-1, 2\right[\cup [4, +\infty[.$$

Pág. 42

47.1.

$$A(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) - 12 = -8 + 12 + 8 - 12 = 0 \quad \text{e}$$

$$B(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0.$$

Logo, -2 é uma raiz comum a $A(x)$ e a $B(x)$.

47.2. Sabendo que -2 é uma raiz do polinômio $A(x)$, então

$A(x)$ é divisível por $x + 2$.

Aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $A(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -2 & & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Então, $A(x) = (x + 2)(x^2 + x - 6)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + x - 6$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -3$$

Assim sendo, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Portanto, $A(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 3)$.

Em seguida vamos decompor em fatores o polinômio $B(x)$.

$B(x)$ é divisível por $x + 2$ porque -2 é uma raiz do polinômio

$B(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, $B(x) = (x + 2)(x^2 + x - 2)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + x - 2$.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

Assim sendo, $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Portanto, $B(x) = (x + 2)(x - 1)(x + 2) = (x + 2)^2(x - 1)$.

47.3.

a) Para resolver a inequação $A(x) \geq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-3	-2	2	$+\infty$
$x+2$	-	-	-	0	+
$x-2$	-	-	-	-	0
$x+3$	-	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	+	0	+

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, +\infty[.$$

b) Para resolver a inequação $B(x) < 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	-	0
$B(x)$	-	0	-	+

$$B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 2[.$$

48.1. Como $2x-3 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)$, o resto da divisão de $P(x)$ por

$2x-3$ é igual a $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} - \frac{3}{2} + 6 = 0.$$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $2x-3$ é igual a zero, conclui-se que $P(x)$ é divisível por $2x-3$.

48.2. Sabe-se que $P(x)$ é divisível por $2x-3$, então aplicando a regra de Ruffini tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Conclui-se que } P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x - 4).$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \vee 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 2 \vee x = -1$$

As raízes de $P(x)$ são -1 , $\frac{3}{2}$ e 2 .

48.3. $P(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x - 4) > 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)(x+1) > 0$$

Para resolver a inequação $P(x) > 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$2\left(x - \frac{3}{2}\right)$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	-	0
$x+1$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1, \frac{3}{2}\right[\cup]2, +\infty[.$$

49.1.

$$P(-1) = 2 \times (-1)^3 + 7 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = -2 + 7 - 2 - 3 = 0.$$

Como $P(-1) = 0$, -1 é uma das raízes de $P(x)$.

49.2. Vamos começar por decompor o polinómio $P(x)$ em fatores.

Provou-se que -1 é uma das raízes de $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x+1)(2x^2 + 5x - 3).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $2x^2 + 5x - 3$.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3).$$

$$\text{Portanto, } P(x) = (x+1)(2x-1)(x+3).$$

Para resolver a inequação $P(x) \leq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-3	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$2x-1$	-	-	-	-	0
$x+3$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

$$50. A(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -2$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 1 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$\text{Então, } A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1.$$

As raízes de $A(x)$ são -1 e 1 .

Pág. 43

51.1. $x^4 - 5x^2 = -4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = 1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$$

As soluções da equação dada são $-2, -1, 1$ e 2 .

51.2. $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 2 \vee x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 1 \vee x = -1$$

As soluções da equação dada são $-\sqrt{2}, -1, 1$ e $\sqrt{2}$.

51.3. $x^4 = 2x^2 + 8 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -2$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 4 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

As soluções da equação dada são -2 e 2 .

51.4. $2x^4 + 4 = 9x^2 \Leftrightarrow 2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = \frac{1}{2}$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 4 \vee x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

As soluções da equação dada são $-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e 2 .

52.1. $A(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x^2+4) < 0$$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+4	$+$	$+$	$+$	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0

$$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[.$$

52.2. $A(x) + B(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 + x^4 - 20x^2 + 34 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 20x^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Leftrightarrow y = 9 \vee y = 1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 9 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$$

As soluções da equação $A(x) + B(x) = 0$ são $-3, -1, 1$ e 3 .

53.1. Sabe-se que dado um polinómio de coeficientes inteiros se este tiver raízes inteiras então são divisores do termo independente do polinómio.

Conjunto dos divisores do termo independente do polinómio

$$A(x): D = \{-1, 1, -2, 2\}.$$

Sabe-se que se o polinómio $A(x)$ tiver raízes inteiras elas pertencem ao conjunto D.

Então, temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$A(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2$$

-1 não é raiz de $A(x)$ porque $A(-1) \neq 0$.

$$A(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Logo, 1 é raiz de $A(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } A(x) = (x-1)(x^2 + x - 2).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 + x - 2$.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

Assim sendo, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

$$\text{Então, } A(x) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2).$$

53.2.

a) $(x+3)A(x) > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)^2(x+2) > 0$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+3)A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Então, } (x+3)A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[.$$

b) $(x-2)A(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2(x+2) \leq 0$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Então, } (x-2)A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2].$$

c) $(x^2 + 1)A(x) \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \leq 0$ porque $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	+	0	+

Então, $(x^2 + 1)A(x) \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup \{1\}$.

53.3. Como 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio $B(x)$, sabe-se que $B(x)$ é divisível por $(x-3)^2$. Aplicando a regra de Ruffini, vamos decompor $B(x)$ em fatores.

	1	-4	-3	18
3		3	-3	-18
	1	-1	-6	0
3		3	6	
	1	2	0	

Então, conclui-se que $B(x) = (x-3)^2(x+2)$.

Para resolver a inequação $B(x) \leq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$(x-3)^2$	+	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	+	0	+

$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup \{3\}$.

53.4. $A(x) < B(x) \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) < (x-3)^2(x+2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) - (x-3)^2(x+2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)[(x-1)^2 - (x-3)^2] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 6x - 9) < 0 \Leftrightarrow (x+2)(4x-8) < 0$$

Para resolver a inequação anterior vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$4x-8$	-	-	-	0	+
$(x+2)(4x-8)$	+	0	-	0	+

$A(x) < B(x) \Leftrightarrow (x+2)(4x-8) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[$.

Pág. 45

1.1. $A(2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$, $D(-1, 3)$, $E(-3, 1)$ e $F(-1, -1)$.

1.2.

- a) Os pontos que têm abscissa positiva são A , B e C .
 b) Os pontos que têm ordenada negativa são A e F .
 c) Os pontos que pertencem ao 2.º quadrante são D e E .
 d) Os pontos que têm coordenadas com o mesmo sinal são B , C e F .

2.1. $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(0, 2)$, $D(-1, 5)$, $E(-2, 2)$, $F(3, 5)$, $G(1, 5)$, $H(1, 1)$ e $I(3, 1)$.

2.2.

- a) B , G e H .
 b) D , F e G .
 c) D e G .
 d) B e H .
 e) Por exemplo, A e F .
 f) E .

3.1. Como o triângulo $[ABE]$ é equilátero, $\overline{BE} = \overline{AB} = 4$.

O ponto E pertence ao eixo das ordenadas e
 $\overline{OE} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, então $E(0, 2\sqrt{3})$.

3.2. $C(2 + 2\sqrt{3}, 2)$

3.3. $D(2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$

3.4. O ponto F pertence ao eixo das abscissas e
 $\overline{BF} = \overline{BD} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, então $F(2 + 4\sqrt{2}, 0)$.

Pág. 46

4.1.

- a) $P \in Ox \Leftrightarrow 4 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$
 b) $P \in 2.^\circ Q \Leftrightarrow \frac{5}{3} - 2k < 0 \wedge 4 - 3k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{5}{6} \wedge k < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k \in \left] \frac{5}{6}, \frac{4}{3} \right[$

4.2.

a) O ponto Q pertence ao semieixo positivo das ordenadas se:

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \wedge 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \wedge m > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m = 3 \vee m = -1) \wedge m > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 3$$

b) $Q \in 3.^\circ Q \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0 \wedge 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 3 \wedge m < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \in \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$$

Cálculo auxiliar:

$$m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 1) < 0$$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$m - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$m + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$(m - 3)(m + 1)$	$+$	0	$-$	0

$$(m - 3)(m + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

5. Se o quadrado representado em cada um dos referenciais tem perímetro 16, então tem lado 4.

5.1. $B(3 - 4, 1)$, $C(3 - 4, 1 - 4)$ e $D(3, 1 - 4)$, ou seja, $B(-1, 1)$, $C(-1, -3)$ e $D(3, -3)$.

5.2. $\overline{OC} = \overline{BD} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, então $B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $C(0, 4\sqrt{2})$ e $D(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

5.3. $\overline{AC} = \overline{BD} = 4\sqrt{2}$, então $B(-2\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$, $C(0, 1 - 4\sqrt{2})$ e $D(2\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$.

5.4. $\overline{OB} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, então $B(\sqrt{15}, 0)$, $C(1 + \sqrt{15}, \sqrt{15})$ e $D(1, 1 + \sqrt{15})$.

6.1.

$$A \in 2.^\circ Q \Leftrightarrow 1 - 2k < 0 \wedge k^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{2} \wedge k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

6.2. O ponto P pertence ao semieixo positivo das ordenadas se:

$$2k^2 + k - 1 = 0 \wedge -2k > 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \wedge k < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{1}{2} \vee k = -1 \right) \wedge k < 0 \Leftrightarrow k = -1$$

6.3. O ponto B pertence ao semieixo negativo das abscissas se:

$$k^3 - 4k = 0 \wedge 5 - 3k < 0 \Leftrightarrow k(k^2 - 4) = 0 \wedge k > \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k = 0 \vee k = 2 \vee k = -2) \wedge k > \frac{5}{3} \Leftrightarrow k = 2$$

7.1. $P \in Ox \Leftrightarrow 3 - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 6$

7.2. $P \in Oy \Leftrightarrow 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

7.3.

$$P \in 1.^\circ Q \Leftrightarrow 2k - 1 > 0 \wedge 3 - \frac{k}{2} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{2} \wedge k < 6 \Leftrightarrow k \in \left] \frac{1}{2}, 6 \right[$$

Pág. 47

8.1.

a) A reta que passa por A e é paralela ao eixo Oy é definida pela equação $x = 2$.

b) A reta que passa por B e é paralela ao eixo Ox é definida pela equação $y = -3$.

c) A reta AC é definida pela equação $x = 2$. Então, a reta paralela a AC que passa em B é definida pela equação $x = -1$.

8.2.

a) A reta BC é definida pela equação $y = -3$. Então, a reta AP é paralela a BC se A e P tiverem a mesma ordenada, ou seja, se $k + 2 = -5 \Leftrightarrow k = -7$.

b) A reta AC é definida pela equação $x = 2$. Então, a reta BP é paralela a AC se B e P tiverem a mesma abscissa, ou seja, se $3 - k = -1 \Leftrightarrow k = 4$.

9.1.

a) Sendo A o ponto de coordenadas $(3, 1)$, então as coordenadas do simétrico de A em relação ao eixo das ordenadas são $(-3, 1)$.

b) Sendo B o ponto de coordenadas $(1, 5)$, então as coordenadas do simétrico de B em relação ao eixo das abscissas são $(1, -5)$.

c) Sendo C o ponto de coordenadas $(-2, 3)$, então as coordenadas do simétrico de C em relação à origem do referencial são $(2, -3)$.

9.2.

a) A reta vertical que passa pelo ponto $D(-4, -2)$ é definida pela equação $x = -4$.

b) A reta vertical que passa pelo ponto $E(2, -4)$ é definida pela equação $y = -4$.

9.3.

a) A equação $x - k = 3$ representa a reta vertical que passa pelo ponto $A(3, 1)$ se:

$$3 - k = 3 \Leftrightarrow k = 0.$$

b) A equação $2x = k$ representa a reta vertical que passa pelo ponto $D(-4, -2)$ se:

$$2 \times (-4) = k \Leftrightarrow k = -8.$$

c) A equação $k - y = -1$ representa a reta horizontal que passa pelo ponto $B(1, 5)$ se:

$$k - 5 = -1 \Leftrightarrow k = 4.$$

10.1. $AB: y = -2$; $BC: x = 1$; $CD: y = 3$ e $AD: x = -2$.

10.2.

a) $x = -3$

b) $y = \frac{5}{3}$

10.3. O ponto $G\left(3k - \frac{5+k}{2}, 2+k\right)$ pertence à reta AD se:

$$3k - \frac{5+k}{2} = -2 \Leftrightarrow 6k - 5 - k = -4 \Leftrightarrow 5k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

Sendo $k = \frac{1}{5}$, então $G\left(-2, \frac{11}{5}\right)$.

O segmento de reta $[AD]$ é definido pela condição $x = -2 \wedge -2 \leq y \leq 3$. Logo G pertence a $[AD]$.

Pág. 48

11.1.

a) O segmento de reta $[AC]$ é definido pela condição $x = -4 \wedge -2 \leq y \leq 3$.

Então, por exemplo, o ponto $P(-4, 1)$ pertence a $[AC]$.

b) A semirreta oposta da semirreta BA é definida pela condição $y = 3 \wedge x \geq 2$.

Então, por exemplo, o ponto $P(4, 3)$ pertence a essa semirreta.

c) A semirreta oposta da semirreta AB é definida pela condição $y = 3 \wedge x \leq -4$.

Então, por exemplo, o ponto $P(-5, 3)$ pertence a essa semirreta.

11.2.

a) $y = 3$

b) $y = 3$

c) $x = -4$

12.1. O semiplano representado é definido pela inequação $x < 3$.

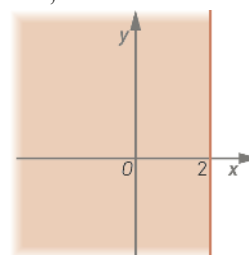
12.2. O semiplano representado é definido pela inequação $y \geq -2$.

12.3. O semiplano representado é definido pela inequação $x \geq -\sqrt{2}$.

13.1. $2x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

A representação geométrica do conjunto

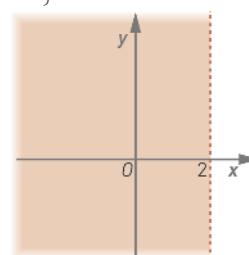
$$A = \{P(x, y) : 2x - 4 \leq 0\} \text{ é:}$$



13.2. $\frac{x}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

A representação geométrica do conjunto

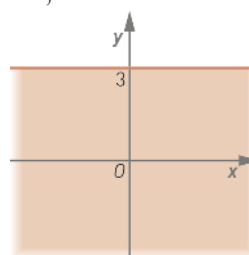
$$A = \left\{P(x, y) : \frac{x}{2} - 1 < 0\right\} \text{ é:}$$



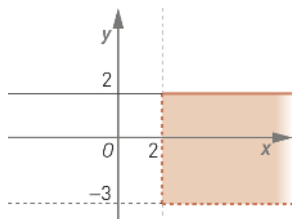
13.3. $2y - 5 \geq 1 \Leftrightarrow 2y \geq 6 \Leftrightarrow y \geq 3$

A representação geométrica do conjunto

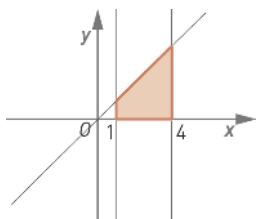
$$A = \{P(x, y) : 2y - 5 \geq 1\} \text{ é:}$$



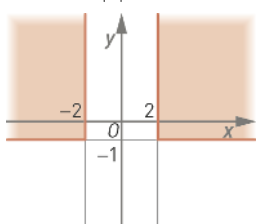
14.1. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição $x > 2 \wedge -3 < y \leq 2$ é:



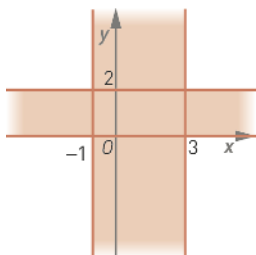
14.2. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição $0 \leq y \leq x \wedge 1 \leq x \leq 4$ é:



14.3. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição $|x| \geq 2 \wedge y \geq -1$ é:



14.4. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição $0 \leq y \leq 2 \vee -1 \leq x \leq 3$ é:



15.1.

a) $P(2-3k, 1) \in C$ se $3(2-3k)-1 \leq 5$.

$$3(2-3k)-1 \leq 5 \Leftrightarrow 6-9k-1 \leq 5 \Leftrightarrow -9k \leq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$$

b) $P\left(\frac{k-1}{2}, k\right) \notin C$ se $3\left(\frac{k-1}{2}\right)-1 > 5$.

$$3\left(\frac{k-1}{2}\right)-1 > 5 \Leftrightarrow \frac{3k-3}{2}-1 > 5 \Leftrightarrow 3k-3-2 > 10 \Leftrightarrow 3k > 15 \Leftrightarrow k > 5$$

15.2.

a) $3x-1 \leq 5 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$

O semiplano correspondente ao conjunto C é constituído por todos os pontos do plano que têm abscissa não superior a 2. O ponto B não pertence ao conjunto C porque tem abscissa 4 (superior a 2).

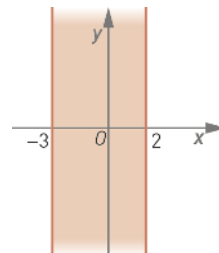
Assim sendo, o segmento de reta $[AB]$ não está contido no semiplano correspondente ao conjunto C .

b) Por exemplo, o ponto $P(-1, 4)$.

Pág. 49

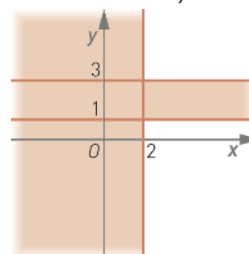
16.1. $A \cap B = \{P(x, y): 2x+6 \geq 0 \wedge 5-x \geq 3\}$

$$2x+6 \geq 0 \wedge 5-x \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \wedge -x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x \leq 2$$



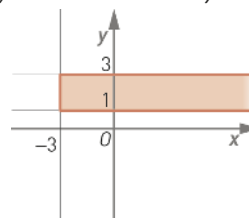
16.2. $B \cup C = \{P(x, y): 5-x \geq 3 \vee 1 \leq y \leq 3\}$

$$5-x \geq 3 \vee 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 2 \vee 1 \leq y \leq 3$$



16.3. $A \cap C = \{P(x, y): 2x+6 \geq 0 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$

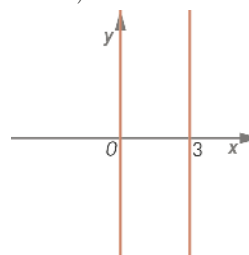
$$2x+6 \geq 0 \wedge 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge 1 \leq y \leq 3$$



17.1.

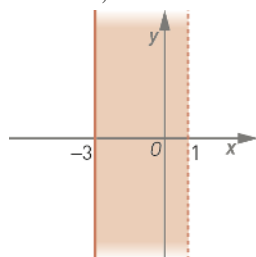
$$\sim(x^2-3x \neq 0) \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $\sim(x^2-3x \neq 0)$ é:



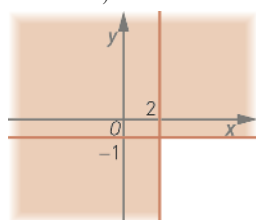
$$17.2. \sim(x \geq 1 \vee x < -3) \Leftrightarrow x < 1 \wedge x \geq -3$$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $\sim(x \geq 1 \vee x < -3)$ é:



$$17.3. \sim(y < -1 \wedge x > 2) \Leftrightarrow y \geq -1 \vee x \leq 2$$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $\sim(y < -1 \wedge x > 2)$ é:

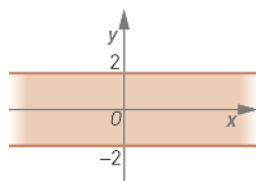


$$17.4. y^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2 \leq 0 \wedge y+2 \geq 0) \vee (y-2 \geq 0 \wedge y+2 \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y \leq 2 \wedge y \geq -2) \vee \underbrace{(y \geq 2 \wedge y \leq -2)}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow y \leq 2 \wedge y \geq -2$$

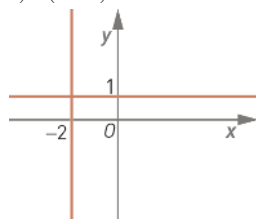
A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $y^2 \leq 4$ é:



$$17.5. y(x+2) = (x+2) \Leftrightarrow y(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee y = 1$$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $y(x+2) = (x+2)$ é:



$$18. I: \sim(x \leq -1 \vee y < 2) \Leftrightarrow x > -1 \wedge y \geq 2$$

$$II: \sim|x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

$$III: y < 2 \wedge \sim(x > 1 \vee y \geq 1) \Leftrightarrow y < 2 \wedge x \leq 1 \wedge y < 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge y < 1$$

Então, a correspondência entre as condições e as representações geométricas é a seguinte:

$$I \rightarrow B ; \quad II \rightarrow C ; \quad III \rightarrow A$$

$$19.1. A_1(3,0), B_1(-3,0), C_1(7,0), D_1(-5,0) \text{ e } E_1(0,0).$$

$$19.2. A_2(0,5), B_2(0,2), C_2(0,-4), D_2(0,0) \text{ e } E_2(0,3).$$

$$19.3. A_3(3,5), B_3(3,2), C_3(3,-4), D_3(3,0) \text{ e } E_3(3,3).$$

$$19.4. A_4(3,2), B_4(-3,2), C_4(7,2), D_4(-5,2) \text{ e } E_4(0,2).$$

Pág. 50

20.1. A projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox é o ponto de coordenadas (2,0).

Então, o ponto C é a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox se e só se $3k+1=2 \wedge 1-3k=0$.

$$3k+1=2 \wedge 1-3k=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3} \wedge k=\frac{1}{3} \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

20.2. A projeção ortogonal de A sobre a reta $y=-4$ é o ponto de coordenadas (2,-4).

A projeção ortogonal de B sobre a reta $x=2$ também é o ponto de coordenadas (2,-4).

20.3. A projeção ortogonal de A sobre a reta $y=3$ é o ponto de coordenadas (2,3).

Então, o ponto P é a projeção ortogonal de A sobre a reta $y=3$ se e só se $k^2-1=2 \wedge k^2-k+1=3$.

$$k^2-1=2 \wedge k^2-k+1=3 \Leftrightarrow k^2=3 \wedge k^2-k-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k=\sqrt{3} \vee k=-\sqrt{3}) \wedge k=\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k=\sqrt{3} \vee k=-\sqrt{3}) \wedge (k=2 \vee k=-1) \Leftrightarrow k \in \emptyset$$

21. Em relação à situação I, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$$A(5,-5,0), B(5,5,0), C(-5,5,0), D(-5,-5,0), E(-5,-5,10), F(5,-5,10), G(5,5,10) \text{ e } H(-5,5,10).$$

Em relação à situação II, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$$A(10,-5,0), B(10,5,0), C(0,5,0), D(0,-5,0), E(0,-5,10), F(10,-5,10), G(10,5,10) \text{ e } H(0,5,10).$$

Em relação à situação III, o triângulo [AOB] é retângulo em O, então sabe-se que $(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2$.

Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, tem-se:

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2 \Leftrightarrow 2(\overline{OA})^2 = 10^2 \Leftrightarrow (\overline{OA})^2 = 50$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{OA} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Assim sendo, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$$A(5\sqrt{2},0,0), B(0,5\sqrt{2},0), C(-5\sqrt{2},0,0), D(0,-5\sqrt{2},0),$$

$$E(0,-5\sqrt{2},10), F(5\sqrt{2},0,10), G(0,5\sqrt{2},10) \text{ e } H(-5\sqrt{2},0,10).$$

22.1.

- a) Os pontos que têm abscissa positiva são A e E .
 b) Os pontos que têm cota positiva são B , C e D .
 c) Os pontos que têm ordenada negativa são D e E .

22.2. As coordenadas dos pontos assinalados na figura são:

$A(2,2,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,1,2)$, $D(0,-1,2)$ e $E(1,-1,0)$.

22.3.

- a) A projeção ortogonal de C sobre o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(-1,0,0)$.
 b) A projeção ortogonal de C sobre o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0,1,0)$.
 c) A projeção ortogonal de C sobre o eixo Oz é o ponto de coordenadas $(0,0,2)$.

22.4.

- a) A projeção ortogonal de A sobre o plano xOy é o ponto de coordenadas $(2,2,0)$.
 b) A projeção ortogonal de A sobre o plano yOz é o ponto de coordenadas $(0,2,-1)$.
 c) A projeção ortogonal de A sobre o plano xOz é o ponto de coordenadas $(2,0,-1)$.

Pág. 51**23.1.**

- a) Os pontos que pertencem ao plano xOz são A , F e O .
 b) Os pontos que pertencem ao plano yOz são G e O .
 c) Os pontos que pertencem ao plano $z = -1$ são A e B .
 d) O ponto que pertence ao plano $x = 2$ é o A .
 e) O ponto que pertence ao plano $y = -2$ é o G .

23.2. As coordenadas dos pontos assinalados na figura são:

$A(2,0,-1)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,2,1)$, $D(-1,1,1)$, $E(-3,1,1)$,
 $F(-3,0,2)$, $G(0,-2,3)$ e $H(1,-1,1)$.

24.1. O ponto A pertence ao 8.º octante porque tem abscissa positiva e ordenada e cotas negativas.

O ponto B pertence ao 2.º octante porque tem abscissa negativa e ordenada e cotas positivas.

24.2.

- a) A projeção ortogonal de A sobre o eixo Oz é o ponto de coordenadas $(0,0,-5)$.
 b) A projeção ortogonal de B sobre o plano xOz é o ponto de coordenadas $(-1,0,4)$.

24.3.

- a) Uma equação cartesiana do plano que passa em A e é paralelo a xOy é $z = -5$.
 b) Uma equação cartesiana do plano que passa em A e é paralelo a yOz é $x = 2$.
 c) Uma equação cartesiana do plano que passa em B e é paralelo a xOz é $y = 2$.

d) Uma equação cartesiana do plano que passa em B e é paralelo a xOy é $z = 4$.

Pág. 52

25.1. $C(8,-4,-2)$, $G(8,0,2)$ e $L(0,4,-2)$.

25.2.

- a) Uma equação cartesiana do plano que contém a face $[ABCD]$ é $y = -4$.
 b) Uma equação cartesiana do plano que contém a face $[MJLN]$ é $y = 4$.
 c) Uma equação cartesiana do plano que contém a face $[BCJMPG]$ é $x = 8$.

25.3.

- a) A reta que contém a aresta $[FG]$ é definida por $y = 0 \wedge z = 2$.
 b) A reta que contém a aresta $[BC]$ é definida por $x = 8 \wedge y = -4$.
 c) A reta que contém a aresta $[BG]$ é definida por $x = 8 \wedge z = 2$.
 d) A reta que contém a aresta $[MJ]$ é definida por $x = 8 \wedge y = 4$.

26.1.

a) As coordenadas dos vértices do cubo são:
 $O(0,0,0)$, $P(6,0,0)$, $Q(6,6,0)$, $R(0,6,0)$, $S(0,6,6)$,
 $T(0,0,6)$, $U(6,0,6)$ e $V(6,6,6)$.

b) $V_{\text{cubo}} = 6^3 = 216$

26.2.

- a) A aresta $[PU]$ pode ser definida por $x = 6 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 6$.
 b) A face $[UVST]$ pode ser definida por $z = 6 \wedge 0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6$.

27.1. As coordenadas dos vértices da pirâmide são:

$A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$, $O(0,0,0)$ e $E(3,3,9)$.

27.2. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

O triângulo $[DEM]$ é retângulo em D , então sabe-se que:

$$(\overline{ME})^2 = (\overline{MD})^2 + (\overline{DE})^2$$

$$\Leftrightarrow (\overline{ME})^2 = 3^2 + 9^2$$

$$\Leftrightarrow (\overline{ME})^2 = 90$$

Donde se conclui que $\overline{ME} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

A área da superfície lateral da pirâmide é dada por:

$$A = 4 \times A_{[ABE]} = 4 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{ME}}{2} = 4 \times \frac{6 \times 3\sqrt{10}}{2} = 36\sqrt{10}.$$

Pág. 53

28.1. A reta AD é definida pelo seguinte sistema de equações:

$$x = 2 \wedge y = 2.$$

28.2.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \times 4^2 \times (8-2) = \frac{1}{3} \times 4^2 \times (8-2) = \frac{96}{3} = 32.$$

Designemos por x a medida da aresta de um cubo com igual volume ao da pirâmide. Então, tem-se:

$$x^3 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt[3]{4}.$$

Logo, $a = 3 \wedge b = 4$.

29.1. O triângulo $[TOU]$ é retângulo em O , então sabe-se que

$$(\overline{OU})^2 + (\overline{OT})^2 = (\overline{UT})^2.$$

Como $\overline{OU} = \overline{OT} = 2\sqrt{2}$, tem-se:

$$(\overline{OU})^2 + (\overline{OT})^2 = (\overline{UT})^2 \Leftrightarrow 2(2\sqrt{2})^2 = (\overline{UT})^2 \Leftrightarrow (\overline{UT})^2 = 16$$

Donde se conclui que $\overline{UT} = \sqrt{16} = 4$.

Então, $A_{\text{face cubo}} = 4^2 = 16$.

29.2. As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$U(2\sqrt{2}, 0, 0), T(0, 2\sqrt{2}, 0), S(-2\sqrt{2}, 0, 0), R(0, -2\sqrt{2}, 0), \\ Q(2\sqrt{2}, 0, 4), M(-2\sqrt{2}, 0, 4), P(0, 2\sqrt{2}, 4) \text{ e } N(0, -2\sqrt{2}, 4).$$

29.3. Designemos por h a medida da altura da pirâmide.

$$V_{\text{poliedro}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow 80 = 4^3 + \frac{1}{3} \times 4^2 \times h \Leftrightarrow 16 = \frac{16}{3}h \Leftrightarrow h = 3$$

Então, $V(0, 0, 7)$.

Pág. 54

30.1. $A(1, -2)$, $B(3, 1)$ e $C(-2, 3)$.

30.2.

a) Por aplicação do Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{AB})^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 13.$$

Então, $\overline{AB} = \sqrt{13}$.

b) Por aplicação da fórmula da distância entre dois pontos conhecidas as suas coordenadas, tem-se:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

30.3.

a) Por aplicação do Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{BC})^2 = 5^2 + 2^2 \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 = 29.$$

Então, $\overline{BC} = \sqrt{29}$.

b) Por aplicação da fórmula da distância entre dois pontos conhecidas as suas coordenadas, tem-se:

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$$

31.1. Seja P o ponto médio de $[AB]$. As coordenadas de P são

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+3}{2} \right) = \left(1, \frac{5}{2} \right).$$

31.2.

a) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto C .

Como M é o ponto médio de $[AC]$, tem-se:

$$\left(-\frac{1}{2}, -1 \right) = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{2+y}{2} \right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{-3+x}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{2+y}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $C(2, -4)$.

b) As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são

$$\left(\frac{5+2}{2}, \frac{3+(-4)}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

$$\mathbf{32.1.} \quad \overline{OP} = \sqrt{(0-8)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{89} \approx 9,4.$$

32.2. 1.ª alternativa:

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{AP} &= \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} + \sqrt{(3-8)^2 + (4-5)^2} = \\ &= \sqrt{9+16} + \sqrt{25+1} = 5 + \sqrt{26} \approx 10,1. \end{aligned}$$

2.ª alternativa:

$$\begin{aligned} \overline{OB} + \overline{BP} &= \sqrt{(0-6)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(6-8)^2 + (2-5)^2} = \\ &= \sqrt{36+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{40} + \sqrt{13} \approx 9,9. \end{aligned}$$

O caminho é mais curto na 2.ª alternativa.

Pág. 55

33.1. O triângulo $[PQB]$ é retângulo em Q .

Por aplicação do Teorema de Pitágoras, sabe-se que

$$(\overline{PB})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{QB})^2.$$

$$(\overline{PB})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{QB})^2 \Leftrightarrow (\overline{PB})^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow (\overline{PB})^2 = 25.$$

Donde se conclui que $\overline{PB} = \sqrt{25} = 5$.

O triângulo $[APB]$ é retângulo em P .

Por aplicação do Teorema de Pitágoras, sabe-se que

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{PB})^2.$$

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{PB})^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 3^2 + 5^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 34.$$

Donde se conclui que $\overline{AB} = \sqrt{34}$.

33.2. Relativamente ao referencial da figura, sabe-se que

$A(3, -1, 1)$ e $B(-1, 2, -2)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}.$$

34.1.

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

34.2. O ponto C pertence ao semieixo positivo das cotas, então

$C(0, 0, z)$, $z > 0$.

$$\mathbf{a)} \quad \overline{BC} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2 + (0-z)^2} = \sqrt{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25+z^2} = \sqrt{50} \Leftrightarrow 25+z^2 = 50 \Leftrightarrow z^2 = 25 \Leftrightarrow z = 5 \vee z = -5$$

Como $z > 0$, conclui-se que $z = 5$.

Então, $C(0, 0, 5)$.

$$\mathbf{b)} \quad \overline{AC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (3-z)^2} = \sqrt{4^2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16+(3-z)^2} = \sqrt{32} \Leftrightarrow 16+(3-z)^2 = 32 \Leftrightarrow (3-z)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-z = 4 \vee 3-z = -4 \Leftrightarrow z = -1 \vee z = 7$$

Como $z > 0$, conclui-se que $z = 7$.

Então, $C(0, 0, 7)$.

$$\mathbf{35.1.} \quad \overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}.$$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, conclui-se que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

35.2. As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

As coordenadas do ponto médio de $[AC]$ são

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(1, 2, \frac{3}{2} \right).$$

As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{3+4}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = \left(2, \frac{7}{2}, 1 \right).$$

36.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow 2y + 6y = 4x + 9 - 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow 8y = 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida na forma reduzida por

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

36.2. $3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{6}{2}$ (proposição verdadeira)

Conclui-se que o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$.

Pág. 56

37.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow -2y - 6y = -2x - 4x + 1 + 9 - 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow -8y = -6x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida por $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$.

37.2.

a) Seja D o ponto da mediatriz de $[AC]$ que tem abscissa -3 . Então, $D(-3, y)$ e $\overline{DA} = \overline{DC}$.

$$\overline{DA} = \overline{DC} \Leftrightarrow \sqrt{(-3+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (y+2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(-3+2)^2 + (y-1)^2 = (-3-0)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + y^2 - 2y + 1 = 9 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow -2y - 4y = 9 + 4 - 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow -6y = 11$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{11}{6}$$

Portanto, $D\left(-3, -\frac{11}{6}\right)$.

b) Seja E o ponto da mediatriz de $[AC]$ que tem abscissa -3 . Então, $E(x, 4)$ e $\overline{EA} = \overline{EC}$.

$$\overline{EA} = \overline{EC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (4+2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+2)^2 + (4-1)^2 = (x-0)^2 + (4+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 9 = x^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow 4x = 23$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23}{4}$$

Portanto, $E\left(\frac{23}{4}, 4\right)$.

38.1. O ponto de interseção da reta r com o segmento de reta $[AB]$ é o ponto médio desse segmento.

Então, as coordenadas desse ponto são $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

38.2. Vamos então começar por determinar uma equação da mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -6y = -12x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$$

A reta r , mediatriz de $[AB]$, é definida pela equação $y = 2x - \frac{1}{2}$.

Então, o semiplano superior fechado de fronteira r e que contém o ponto A é representado pela inequação $y \geq 2x - \frac{1}{2}$.

39.1. Vamos começar por determinar a equação reduzida da reta AB .

O declive da reta é dado por $m_{AB} = \frac{2 - (-2)}{-1 - 5} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$.

Uma equação da reta AB é do tipo $y = -\frac{2}{3}x + b$.

Como o ponto $B(-1, 2)$ pertence à reta, tem-se:

$$2 = -\frac{2}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow \frac{4}{3} = b$$

Equação reduzida da reta AB : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

O ponto $P(0, 2)$ não pertence à reta AB mas pertence ao

semiplano superior aberto definido pela reta AB pois $2 > 0 + \frac{4}{3}$.

Então, o semiplano aberto cuja fronteira é a reta AB e que contém o ponto $P(0, 2)$ é representado pela inequação

$$y > -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

39.2. Vamos então começar por determinar uma equação da mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 8y = 12x - 24$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

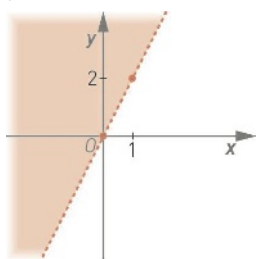
A mediatriz de $[AB]$ é definida pela equação $y = \frac{3}{2}x - 3$.

O ponto $T(-1, 1)$ não pertence à mediatriz de $[AB]$ mas pertence ao semiplano superior definido pela mediatriz de $[AB]$ pois

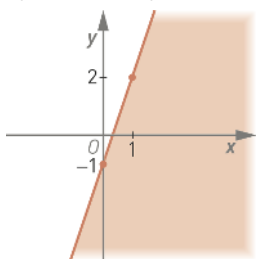
$$1 > -\frac{3}{2} - 3.$$

Então, o semiplano fechado cuja fronteira é mediatriz de $[AB]$ e que contém o ponto T é representado pela inequação $y \geq \frac{3}{2}x - 3$

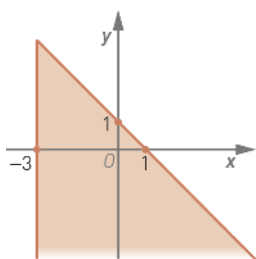
40.1. $y - 2x > 0 \Leftrightarrow y > 2x$



40.2. $3x - y \geq 1 \Leftrightarrow -y \geq -3x + 1 \Leftrightarrow y \leq 3x - 1$

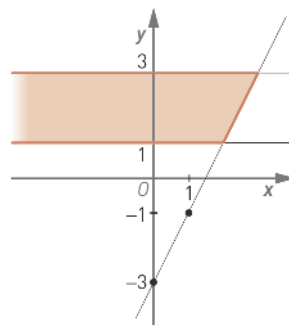


40.3. $x + y \leq 1 \wedge x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -x + 1 \wedge x \geq -3$



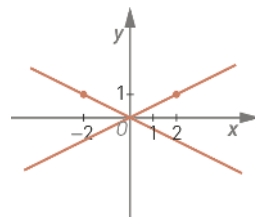
40.4. $\frac{2x-y}{3} \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2x - y \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \geq 2x - 3 \wedge 1 \leq y \leq 3$$



40.5. $x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow$

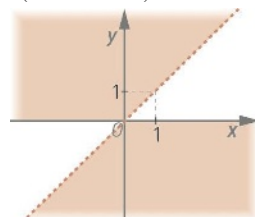
$$\Leftrightarrow x - 2y = 0 \vee x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \vee y = -\frac{x}{2}$$



40.6. $xy - y^2 < 0 \Leftrightarrow y(x - y) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y < 0 \wedge x - y > 0) \vee (y > 0 \wedge x - y < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y < 0 \wedge y < x) \vee (y > 0 \wedge y > x)$$



Pág. 57

41. As circunferências representadas pela equações I, II, III e IV têm centros de coordenadas, respetivamente,

$(-2, -1)$, $(2, -2)$, $(2, 1)$ e $(-1, 2)$ e raios 2 (I, II e III) e $\sqrt{5}$ (IV).

Então, a correspondência entre as condições e as circunferências representadas é a seguinte:

$I \rightarrow C$, $II \rightarrow D$, $III \rightarrow A$ e $IV \rightarrow B$.

42.1.

a) O conjunto de pontos do plano que distam de A 3 unidades é a circunferência de centro em A e raio 3 e é definido pela equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

b) O conjunto de pontos do plano que distam igualmente de A e de C é a mediatriz do segmento de reta [AC].

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de [AB], então

$$\overline{PA} = \overline{PC}.$$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x+5)^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -8y = 12x + 16$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 2$$

O conjunto de pontos que distam igualmente de A e de C é definido pela equação $y = -\frac{3}{2}x - 2$.

c) O conjunto de pontos do plano cuja distância a B não é superior a 2 unidades é o círculo de centro em B e raio 2 e é definido pela inequação $(x+3)^2 + (y-5)^2 \leq 4$.

d) O conjunto de pontos do plano cuja distância à origem do referencial é não inferior a 3 unidades e não é superior a 5 unidades é a coroa circular de centro na origem do referencial e raios 2 e 5. É definido pela condição $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$.

42.2.

a) A circunferência de diâmetro [AB] tem centro no ponto médio de [AB] e raio igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$.

As coordenadas do ponto médio de [AB] são

$$\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (-1, 4).$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(1+3)^2 + (3-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

A circunferência de diâmetro [AB] é definida pela equação

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

b) A circunferência de centro $C(-5, -1)$ e tangente a Oy tem raio 5. Então, é definida pela equação $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 25$.

c) A circunferência de centro $C(-5, -1)$ e tangente a Ox tem raio 1. Então, é definida pela equação $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 1$.

Pág. 58

43.1. O lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(3, -1)$ e raio 4.

43.2. O lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $(x-2)^2 + y^2 \leq 9$ é o círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, 0)$ e raio 3.

43.3. O lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$ é o quarto de círculo centrado na

origem do referencial e raio 2, cujas pontos têm abscissas não negativas e ordenadas não positivas.

$$\mathbf{43.4.} \quad x^2 + y^2 - 2y - 1 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1^2 = 25 + 1 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 27.$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 25$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio $\sqrt{27}$.

$$\mathbf{43.5.} \quad x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 - 2^2 = -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 2)$ e raio 2.

$$\mathbf{43.6.} \quad x^2 - 6x + y^2 + 2y = -9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 = -9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 - 6x + y^2 + 2y = -9$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(3, -1)$ e raio 1.

43.7.

$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 3^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9.$$

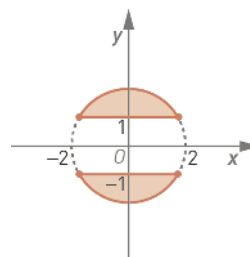
Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + y^2 - 6y = 0$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 3)$ e raio 3.

$$\mathbf{43.8.} \quad x^2 + x + y^2 - 2y = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = -1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$$

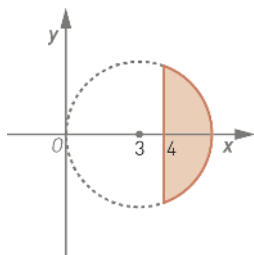
$$+1^2 - 1^2 = -1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + x + y^2 - 2y = -1$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e raio $\frac{1}{2}$.

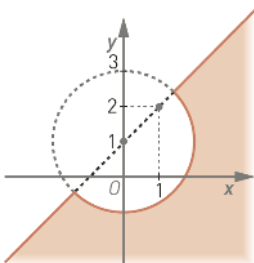
$$\mathbf{44.1.} \quad x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |y| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (y \geq 1 \vee y \leq -1)$$



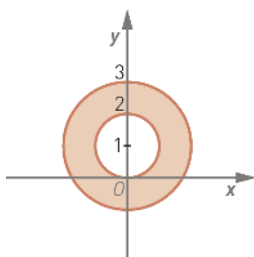
44.2.



44.3.



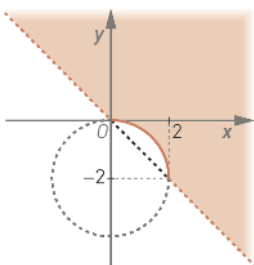
44.4.



44.5.

$$y > -x \wedge x^2 + y^2 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y > -x \wedge x^2 + y^2 + 4y + 4 \geq 4 \Leftrightarrow$$

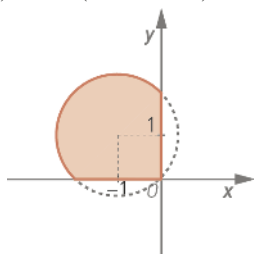
$$\Leftrightarrow y > -x \wedge x^2 + (y+2)^2 \geq 4$$



44.6. $x^2 + y^2 \leq 2(x-y) \wedge (x \leq 0 \vee y \geq 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \leq 1 + 1 \wedge (x \leq 0 \vee y \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \wedge (x \leq 0 \vee y \geq 0)$$



45.1. A região colorida da figura é definida pela condição:

$$x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq x + 3.$$

45.2. A região colorida da figura é definida pela condição:

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq -x + 2.$$

45.3. A região colorida da figura é definida pela condição:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \wedge (y \geq 4 \vee y \leq 0) \wedge (x \geq 4 \vee x \leq 0).$$

45.4. A região colorida da figura é definida pela condição:

$$4 \leq (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 13 \wedge y \geq -\frac{3}{2}x.$$

Pág. 59

46.1. Eixo maior: $2 \times 3 = 6$

Eixo menor: $2 \times 2 = 4$

46.2. Sendo P um dos pontos da elipse, então $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 6$.

46.3. Sabe-se que $a = 3 \wedge b = 2$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $9 = 4 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 5$

Sendo $c > 0$, então conclui-se que $c = \sqrt{5}$.

Focos: $(\sqrt{5}, 0)$ e $(-\sqrt{5}, 0)$.

47.1.

a) Sendo P um dos pontos da elipse, então $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49 + \frac{144}{25}} + \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1369}{25}} + \sqrt{\frac{169}{25}} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{37}{5} + \frac{13}{5} = 2a \Leftrightarrow \frac{50}{5} = 2a \Leftrightarrow 10 = 2a \Leftrightarrow a = 5$$

Eixo maior: $2 \times 5 = 10$

b) Sabe-se que $a = 5 \wedge c = 3$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $25 = b^2 + 9 \Leftrightarrow b^2 = 16$

Sendo $b > 0$, então conclui-se que $b = 4$.

Vértices: $(5, 0)$; $(-5, 0)$; $(0, 4)$ e $(0, -4)$.

47.2. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

48.1. O conjunto de pontos do plano cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-4, 0)$ e $B(4, 0)$ é igual a 12 é a elipse de focos nos pontos A e B e eixo maior igual a 12.

48.2. Sabe-se que $2a = 12 \wedge c = 4$, ou seja, $a = 6 \wedge c = 4$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $36 = b^2 + 16 \Leftrightarrow b^2 = 20$

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

49.1. Sendo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que $a = 4$ e $b = 3$.

A soma das medidas das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos é igual a $2a$, ou seja, 8.

49.2. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $16 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 7$

Sendo $c > 0$, então conclui-se que $c = \sqrt{7}$.

Focos: $(\sqrt{7}, 0)$ e $(-\sqrt{7}, 0)$.

Pág. 60

50.1. Sendo vértices da elipse são os pontos de coordenadas $(6, 0)$; $(-6, 0)$; $(0, 4)$ e $(0, -4)$, então conclui-se que

$a = 6$ e $b = 4$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $36 = 16 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 20$.

Sendo $c > 0$, então conclui-se que $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Focos: $(2\sqrt{5}, 0)$ e $(-2\sqrt{5}, 0)$.

50.2. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Sejam R e S os pontos da elipse que têm abscissa 4. Então tem-se:

$$\frac{4^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 64 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{80}{9} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{80}{9}} \vee y = -\sqrt{\frac{80}{9}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4\sqrt{5}}{3} \vee y = -\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

Assim sendo, os pontos R e S têm coordenadas $\left(4, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ e

$$\left(4, -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right).$$

51.1. Dividindo ambos os membros da equação $x^2 + 9y^2 = 4$ por 4, obtém-se:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1 \text{ (equação reduzida da elipse).}$$

Então $a^2 = 4$ e $b^2 = \frac{4}{9}$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que $a = 2$ e $b = \frac{2}{3}$.

Eixo maior: $2a = 4$

Eixo menor: $2b = \frac{4}{3}$

51.2. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $4 = \frac{4}{9} + c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{32}{9}$.

Como $c > 0$, conclui-se que $c = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Focos: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, 0\right)$ e $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, 0\right)$.

52.1.

a) Sendo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que $a = 3$ e $b = 2$.

Eixo maior: $2a = 6$

Eixo menor: $2b = 4$

A circunferência de diâmetro igual ao eixo menor da elipse é centrada na origem do referencial e tem raio 2. Então, é definida pela equação $x^2 + y^2 = 4$.

b) A circunferência de diâmetro igual ao eixo maior da elipse é centrada na origem do referencial e tem raio 3. Então, é definida pela equação $x^2 + y^2 = 9$.

$$\text{52.2. } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{(2x)^2}{4} = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{4x^2}{4} = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + x^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x^2 = 9 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{10} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{9}{10}} \vee x = -\sqrt{\frac{9}{10}} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}} \vee x = -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ y = 2 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ y = 2 \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ y = \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ y = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos de interseção da reta $y = 2x$ com a

elipse são $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

53.1. Sendo o ponto P a interseção da reta AB com o plano α , então sabe-se que P é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (-1, 2, -1).$$

$P(-1, 2, -1)$.

53.2. O plano α é o plano mediador de $[AB]$.

Seja $Q(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano α .

Sabe-se que $\overline{QA} = \overline{QB}$.

$$\overline{QA} = \overline{QB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2x + 8y - 2z - 6z - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 8y - 8z - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0$$

Então, uma equação do plano α é $x + y - z - 2 = 0$.

53.3.

a) O ponto $R(-2, 3, k)$ pertence ao plano α se:

$$-2 + 3 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow -k = -1 \Leftrightarrow k = 1.$$

b) O ponto $R(k, -1, 0)$ pertence ao plano α se:

$$k + (-1) - 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

c) O ponto $R(5, k, -2)$ pertence ao plano α se:

$$5 + k - (-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 5 + k + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -5.$$

Pág. 61

54.1. As coordenadas do ponto médio do lado $[AB]$ são

$$\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-1+0}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

As coordenadas do ponto médio do lado $[AC]$ são

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = \left(1, \frac{1}{2}, 1 \right).$$

As coordenadas do ponto médio do lado $[BC]$ são

$$\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+(-1)}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right).$$

54.2. Uma equação do plano paralelo a xOy e passa em

$$B(-1, 0, 2) \text{ é } z = 2.$$

54.3. Uma equação do plano paralelo a yOz e passa em

$$A(2, -1, 3) \text{ é } x = 2.$$

54.4.

a) Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} =$$

$$= \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = (x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 =$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow -4x - 2x + 2y - 6z + 4z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y - 2z + 9 = 0$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é

$$-6x + 2y - 2z + 9 = 0.$$

b) Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AC]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PC}$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 =$$

$$= x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow -4x + 2y + 4y - 6z - 2z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 6y - 8z + 9 = 0$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AC]$ é

$$-4x + 6y - 8z + 9 = 0.$$

c) Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[BC]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 4z - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 6z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 3z = 0$$

Então, uma equação do plano mediador de $[BC]$ é $x + 2y - 3z = 0$.

55.1. O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas } (0, 0, 0) \text{ e raio } 3.$$

55.2. O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \text{ é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas } (0, 1, -2) \text{ e raio } 2.$$

55.3. O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 25 \text{ é a esfera de centro no ponto de coordenadas } (0, 0, 4) \text{ e raio } 5.$$

$$55.4. \quad x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$$

O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 9 \text{ é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas } (0, -1, 0) \text{ e raio } 3.$$

$$55.5. \quad x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 + z^2 = -4 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$$

O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = -4 \text{ é a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas } (-1, 2, 0) \text{ e raio } 1.$$

$$55.6. \quad x^2 - 4x + y^2 + z^2 - 2z \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1^2 \leq 0 + 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 5$$

O conjunto de pontos do espaço definido pela condição

$$x^2 - 4x + y^2 + z^2 - 2z \leq 0 \text{ é a esfera de centro no ponto de coordenadas } (2, 0, 1) \text{ e raio } \sqrt{5}.$$

56.1. Seja r o raio da superfície esférica de centro A e que passa em B . Então, $r = \overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{4+1+49} = \sqrt{54}.$$

Assim sendo, a superfície esférica de centro A e que passa em B é definida pela seguinte equação (na forma reduzida):

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 54.$$

56.2. O centro da esfera de diâmetro $[BC]$ é o ponto médio de $[BC]$ e o raio é igual a $\frac{\overline{BC}}{2}$.

As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

$$r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{(-1-2)^2 + (2+1)^2 + (-3-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+9+49}}{2} = \frac{\sqrt{67}}{2}.$$

Assim sendo, a esfera de diâmetro $[BC]$ é definida pela seguinte inequação (na forma reduzida):

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{67}{4}.$$

56.3. O ponto $A(1, 3, 4)$ é exterior à superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ porque $1^2 + 3^2 + 4^2 > 14$.

O ponto $B(-1, 2, -3)$ pertence à superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ porque $(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14$.

O ponto $C(2, -1, 4)$ é exterior à superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ porque $2^2 + (-1)^2 + 4^2 > 14$.

57.1. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 + z^2 - 6z + 3^2 = 2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

A superfície esférica de equação $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 2$ tem centro $C(1, -2, 3)$ e raio 4.

57.2.

a) Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos a xOy são os planos de equações:

$$z = 3 - 4 \text{ e } z = 3 + 4, \text{ ou seja, } z = -1 \text{ e } z = 7.$$

b) Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos a yOz são os planos de equações:

$$x = 1 - 4 \text{ e } x = 1 + 4, \text{ ou seja, } x = -3 \text{ e } x = 5.$$

c) Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos a xOz são os planos de equações:

$$y = -2 - 4 \text{ e } y = -2 + 4, \text{ ou seja, } y = -6 \text{ e } y = 2.$$

57.3. Uma equação do plano paralelo ao plano $x = \pi$ e passa pelo centro da superfície esférica é $x = 1$.

Pág. 62

58.1. $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z \leq 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + z^2 + 4z + 2^2 \leq 20 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \leq 25$$

A esfera definida pela condição $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z \leq 20$ tem centro $C(1, 0, -2)$ e raio 5.

Como as bases do cilindro são paralelas ao plano xOy e a esfera está inscrita no cilindro, conclui-se que os planos que contêm as bases do cilindro são definidos pelas equações cartesianas $z = -2 - 5$ e $z = -2 + 5$, ou seja, $z = -7$ e $z = 3$.

58.2. Como a esfera está inscrita no cilindro, o raio da base do cilindro é igual ao raio da esfera (5) e a altura do cilindro é igual ao diâmetro da esfera (10).

$$\text{Então, } V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi.$$

59.1. Sabe-se que a base da pirâmide está contida no plano xOy , então o ponto A tem cota nula.

Como a pirâmide é quadrangular regular, a sua base é um quadrado.

$$A_b = 36 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6.$$

Como a origem do referencial é o centro da base da pirâmide e a base é um quadrado de lado 6, conclui-se que $A(3, 3, 0)$.

O ponto E pertence ao eixo das cotas, logo tem abscissa e ordenada nulas.

$$V_{\text{pirâmide}} = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times A_b \times h = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 36 \times \overline{OE} = 48 \Leftrightarrow 12\overline{OE} = 48$$

$$\Leftrightarrow \overline{OE} = 4$$

Então, $E(0, 0, 4)$.

59.2.

a) $\overline{EA} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}.$

A esfera de centro E e raio $\overline{EA}$ é definida pela inequação $x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 34$.

b) A esfera de centro E e tangente ao plano xOy tem raio 4. Então, pode ser representada pela inequação

$$x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 16.$$

c) A esfera de centro E e tangente ao plano $y = 3$ tem raio 3. Então, pode ser representada pela inequação

$$x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 9.$$

60. A esfera definida pela inequação $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 9$ tem centro $C(2, -1, 0)$ e raio 3.

60.1.

a) O plano de equação $x = k$ intersesta a esfera dada se: $k \geq -3 \wedge k \leq 2 + 3 \Leftrightarrow k \geq -3 \wedge k \leq 5 \Leftrightarrow k \in [-3, 5]$.

b) O plano de equação $y = k$ intersesta a esfera dada se: $k \geq -1 - 3 \wedge k \leq -1 + 3 \Leftrightarrow k \geq -4 \wedge k \leq 2 \Leftrightarrow k \in [-4, 2]$.

c) O plano de equação $z = k$ intersesta a esfera dada se:
 $k \geq 0 - 3 \wedge k \leq 0 + 3 \Leftrightarrow k \geq -3 \wedge k \leq 3 \Leftrightarrow k \in [-3, 3]$.

$$60.2. (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 9 \wedge z = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + k^2 \leq 9 \wedge z = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 9 - k^2 \wedge z = k$$

A interseção do plano $z = k$ com a superfície esférica dada é um círculo de raio 2 se $9 - k^2 = 4$.

$$9 - k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \sqrt{5} \vee k = -\sqrt{5}.$$

$$61.1. x^2 - 8x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4^2 + y^2 - 4y + 2^2 + z^2 - 2z + 1^2 = -4 + 4^2 + 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17$$

Então, a superfície esférica de equação

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ tem centro no ponto de}$$

coordenadas $(4, 2, 1)$ e raio $\sqrt{17}$.

O vértice F do cubo tem de coordenadas $(2, -1, 3)$ e o centro da superfície esférica circunscrita ao cubo, o ponto de coordenadas, é o ponto médio de $[FC]$.

Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto C .

Como $(4, 2, 1)$ são as coordenadas do ponto médio de $[FC]$, tem-

$$\text{-se: } (4, 2, 1) = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{3+z}{2} \right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{2+x}{2} = 4 \\ \frac{-1+y}{2} = 2 \\ \frac{3+z}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $C(6, 5, -1)$.

$$61.2. \overline{FC} = 2r = 2\sqrt{17}. \text{ Designemos por } a \text{ a aresta do cubo. Sabe-}$$

$$\text{-se que } (\overline{FC})^2 = 3a^2.$$

Então, tem-se:

$$(2\sqrt{17})^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 4 \times 17 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{68}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{68}{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{51}}{3}$$

$$V_{\text{cubo}} = \left(\frac{2\sqrt{51}}{3} \right)^3 = \frac{8 \times \sqrt{51^3}}{27} = \frac{8 \times 51\sqrt{51}}{27} = \frac{136\sqrt{51}}{9}$$

Pág. 63

62.1.

- a) $B + \vec{v} = D$
 b) $D + \vec{w} = C$
 c) $C + \vec{v} = E + \vec{u}$
 d) $(B + \vec{w}) + \vec{u} = A$

62.2.

- a) Um representante de $\vec{w} + \vec{v}$ é $\overrightarrow{BC}$.
 b) Um representante de $\vec{w} + \vec{u}$ é $\overrightarrow{BA}$.
 c) Um representante de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ é $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

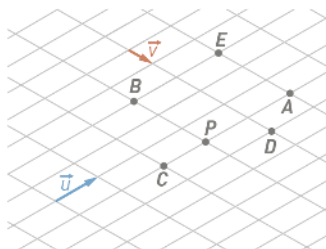
63.1.

- a) $A + \vec{v} = B$
 b) $D + \vec{u} = E$
 c) $D + (\vec{u} + \vec{v}) = F$

63.2.

- a) Um representante de $\vec{u} + \vec{v}$ é $\overrightarrow{DF}$.
 b) Um representante de $\vec{w} + \vec{u}$ é $\overrightarrow{CG}$.
 c) Um representante de $\vec{v} + \vec{w}$ é $\overrightarrow{EG}$.
 d) Um representante de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ é $\overrightarrow{AC}$.

64.



Pág. 64

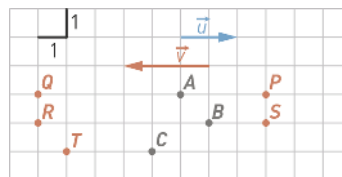
65.1.

- a) $\|\vec{u}\| = 2$
 b) $\|\vec{v}\| = 3$
 c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 1$
 d) $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

65.2.

- a) Se $\vec{u} = k\vec{v}$, então $k = -\frac{2}{3}$.
 b) Se $\vec{v} = k\vec{u}$, então $k = -\frac{3}{2}$.

65.3.



66.1.

- a) $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
 b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$

66.2.

- a) Se $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, então $k = 2$.
 b) Se $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, então $k = -\frac{1}{2}$.

$$67.1. \|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$67.2. \|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OV}\| = \|\overrightarrow{BV}\| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{18 + 64} = \sqrt{82}$$

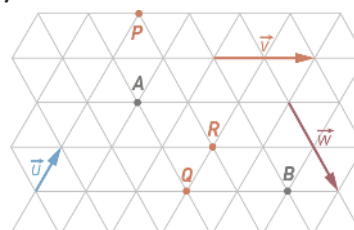
67.3. Designemos por M o ponto médio de [AB].

$$\|\vec{w}\| = \left\| \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OV} \right\| = \|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$$

Pág. 65

$$68.1. 2\vec{u} + \vec{w} - \vec{v} = (2\vec{u} + \vec{w}) - \vec{v} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

68.2./ 68.3./68.4.



69.1.

a) Designemos por O o centro do octaedro. Então, tem-se:

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EC}.$$

Um representante do vetor $\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AC})$ é $\overrightarrow{EC}$.

$$b) (\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EF}.$$

Um representante do vetor $(\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BF}$ é $\overrightarrow{EF}$.

$$c) \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$$

Um representante do vetor $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EC}$ é $\overrightarrow{AE}$.

$$69.2. V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{[\text{ABCOE}]} = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 6^2 \times \overrightarrow{OE} \right) = 24 \overrightarrow{OE}.$$

O triângulo [COE] é retângulo em O. Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se $(\overrightarrow{OE})^2 + (\overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{EC})^2$.

$$(\overline{OE})^2 + (\overline{OC})^2 = (\overline{EC})^2 \Leftrightarrow 2(\overline{OE})^2 = 6^2 \Leftrightarrow (\overline{OE})^2 = 18$$

Donde se conclui que $\overline{OE} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Assim sendo, $V_{\text{octaedro}} = 24 \times 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$.

70.1.

$$\text{a) } \vec{v} = \overline{AB} + \vec{u} = B - A + \vec{u} = (-2, 0) - (3, 1) + (4, -1) = (-5, -1) + (4, -1) = (-1, -2)$$

$$\text{b) } \vec{v} = 2\vec{u} + \overline{BA} = 2\vec{u} + A - B = 2(4, -1) + (3, 1) - (-2, 0) = (8, -2) + (5, 1) = (13, -1)$$

c) Sejam (x, y) as coordenadas do vetor $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} 2\overline{AB} + \vec{v} &= -\vec{u} \Leftrightarrow 2(-5, -1) + (x, y) = -(4, -1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-10, -2) + (x, y) = (-4, 1) \Leftrightarrow (-10 + x, -2 + y) = (-4, 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 3. \end{aligned}$$

Então, $\vec{v} = (6, 3)$.

70.2.

$$\text{a) } \|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$

$$\text{b) } \|\overline{2AB}\| = \|-2(-5, -1)\| = \|(10, 2)\| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

$$\text{c) } \|\overline{3u}\| = \|-3(4, -1)\| = \|(-12, 3)\| = \sqrt{(-12)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 9} = \sqrt{153}$$

$$\text{d) } \|\vec{u} - \overline{AB}\| = \|(4, -1) - (-5, -1)\| = \|(9, 0)\| = \sqrt{9^2 + 0^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Pág. 66

71.1. Sendo D o ponto de interseção das retas r e s , definidas respectivamente pelas equações $y = 3$ e $x = -2$, então $D(-2, 3)$.

C pertence à reta r e tem abscissa positiva, logo $C(x, 3)$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= C - A = (x, 3) - (2, 1) = (x - 2, 2) \\ \|\overline{AC}\| &= 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 2^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 4} = \sqrt{16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 12 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{12} \vee x - 2 = -\sqrt{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3} \vee x = 2 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

Então, $C(2 + 2\sqrt{3}, 3)$.

B pertence à reta s e tem ordenada negativa, logo $B(-2, y)$, $y < 0$.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= B - A = (-2, y) - (2, 1) = (-4, y - 1) \\ \|\overline{AB}\| &= 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-4)^2 + (y - 1)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{16 + (y - 1)^2} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16 + (y - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow y - 1 = 3 \vee y - 1 = -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -2 \end{aligned}$$

Como $y < 0$, conclui-se que $y = -2$.

Então, $B(-2, -2)$.

71.2. Sabendo que $[BADE]$ um paralelogramo e E pertence a Ox , tem-se que $E = D + \overline{AB}$.

Então, $E = D + \overline{AB} = (-2, 3) + (-4, -3) = (-6, 0)$.

$$\text{72.1. } \overline{AB} = B - A = \left(\frac{7}{2}, 0\right) - (3, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Sendo $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, então $\vec{v} = (-1, -2)$.

Como $\vec{v} = -2\overline{AB}$, conclui-se que os vetores $\overline{AB}$ e $\vec{v}$ são colineares.

72.2. Como C pertence ao eixo Oy , então $C(0, y)$.

$$\overline{AC} = C - A = (0, y) - (3, -1) = (-3, y + 1).$$

Sendo $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, então $\vec{u} = (2, 3)$.

Os vetores $\overline{AC}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{AC} = \lambda \vec{u}$.

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (-3, y + 1) = \lambda(2, 3) \Leftrightarrow (-3, y + 1) = (2\lambda, 3\lambda) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 2\lambda \\ y + 1 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2} \\ y + 1 = 3\left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2} \\ y + 1 = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{11}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\overline{AC}$ e $\vec{u}$ são colineares quando $C\left(0, -\frac{11}{2}\right)$.

72.3.

a) Se $\|\vec{w}\| = 2\|\vec{u}\|$; $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares e têm o mesmo sentido, então $\vec{w} = 2\vec{u}$.

Assim, tem-se $\vec{w} = 2(2, 3) = (4, 6)$.

b) Se $\|\vec{w}\| = 2$; $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares e têm sentidos opostos, então $\vec{w} = -\frac{2}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Assim, tem-se

$$\vec{w} = -\frac{2}{\sqrt{13}}(2, 3) = \left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right) = \left(-\frac{4\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}\right).$$

73.1. $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (-4, -1)$.

73.2.

$$\text{a) } \vec{t} = \vec{u} - \vec{w} = (2, 3) - (-4, -1) = (6, 4)$$

$$\text{b) } \vec{t} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}(2, 3) + (4, -2) = \left(1, \frac{3}{2}\right) + (4, -2) = \left(5, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{t} &= 2(\vec{u} + \vec{w}) - 3\vec{v} = 2((2, 3) + (-4, -1)) - 3(4, -2) = \\ &= 2(-2, 2) - (12, 3) = (-4, 4) - (12, 3) = (-16, 1) \end{aligned}$$

$$73.3. \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \Leftrightarrow 2\vec{i} + 3\vec{j} = a\vec{i} + b\left(4\vec{i} - 2\vec{j}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{i} + 3\vec{j} = a\vec{i} + 4b\vec{i} - 2b\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow 2 = a + 4b \wedge 3 = -2b \Leftrightarrow 2\vec{i} + 3\vec{j} = (a + 4b)\vec{i} - 2b\vec{j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = a + 4\left(-\frac{3}{2}\right) \wedge -\frac{3}{2} = b \Leftrightarrow 2 = a - 6 \wedge -\frac{3}{2} = b \Leftrightarrow 8 = a \wedge -\frac{3}{2} = b$$

$$73.4. \vec{w} = c\vec{u} + d\vec{v} \Leftrightarrow -4\vec{i} - \vec{j} = c(2\vec{i} + 3\vec{j}) + d(4\vec{i} - 2\vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\vec{i} - \vec{j} = 2c\vec{i} + 3c\vec{j} + 4d\vec{i} - 2d\vec{j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\vec{i} - \vec{j} = (2c + 4d)\vec{i} + (3c - 2d)\vec{j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + 4d = -4 \\ 3c - 2d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 - 2d \\ 3(-2 - 2d) - 2d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 - 2d \\ -6 - 6d - 2d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 - 2d \\ -8d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 - 2\left(-\frac{5}{8}\right) \\ d = -\frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{4} \\ d = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\text{Então, } \vec{w} = -\frac{3}{4}\vec{u} - \frac{5}{8}\vec{v}.$$

Pág. 67

74.1.

a)

$$P = A - 3\vec{u} = (0, -2, 1) - 3(-2, 1, 3) = (0, -2, 1) - (-6, 3, 9) = (6, -5, -8)$$

b) Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto P .

$$\vec{OP} = P - O = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z).$$

$$\vec{AB} + \vec{u} = B - A + \vec{u} = (2, 1, -2) - (0, -2, 1) + (-2, 1, 3) = (0, 4, 0).$$

$$\vec{OP} = \vec{AB} + \vec{u} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 4, 0).$$

Então, $P(0, 4, 0)$.

c) Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto P .

$$\vec{BP} = P - B = (x, y, z) - (2, 1, -2) = (x - 2, y - 1, z + 2).$$

$$\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{u} = A - O + \frac{1}{2}\vec{u} =$$

$$(0, -2, 1) - (0, 0, 0) + \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

$$\vec{BP} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{u} \Leftrightarrow (x - 2, y - 1, z + 2) = \left(-1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 1 = -\frac{3}{2} \\ z + 2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Então, } P\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$74.2. \vec{AB} = B - A = (2, 1, -2) - (0, -2, 1) = (2, 3, -3)$$

Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AB} = \lambda \vec{u}.$$

$$\vec{AB} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (2, 3, -3) = \lambda(-2, 1, 3) \Leftrightarrow (2, 3, -3) = (-2\lambda, \lambda, 3\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -2\lambda \\ 3 = \lambda \\ -3 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases} \text{ impossível}$$

Conclusão: Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ não são colineares.

74.3.

a) Se $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}\|\vec{u}\|$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm o mesmo sentido, então $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

$$\text{Assim, tem-se } \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(-2, 1, 3) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

b) Se $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{AB}\|$ e $\vec{AB}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm sentidos

opostos, então $\vec{v} = -\vec{AB}$.

$$\text{Assim, tem-se } \vec{v} = -2\vec{AB} = -2(2, 3, -3) = (-4, -6, 6).$$

75.1.

a) Como P pertence ao plano xOy então $P(x, y, 0)$ e

$$\vec{AP} = P - A = (x, y, 0) - (2, 1, -4) = (x - 2, y - 1, 4).$$

Os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AP} = \lambda \vec{u}.$$

$$\vec{AP} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2, y - 1, 4) = \lambda(3, -2, 1) \Leftrightarrow (x - 2, y - 1, 4) = (3\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

$$\|\vec{AP}\| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3\lambda \\ y - 1 = -2\lambda \\ 4 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 12 \\ y - 1 = -8 \\ \lambda = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = -7 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Assim, tem-se $P(14, -7, 0)$ e

$$\|\vec{AP}\| = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 64 + 16} = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}.$$

b) Como P pertence ao plano yOz então $P(0, y, z)$ e

$$\vec{AP} = P - A = (0, y, z) - (2, 1, -4) = (-2, y - 1, z + 4).$$

Os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AP} = \lambda \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (-2, y-1, z+4) = \lambda(3, -2, 1) \Leftrightarrow (-2, y-1, z+4) = (3\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3\lambda \\ y-1 = -2\lambda \\ z+4 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ y-1 = \frac{4}{3} \\ z+4 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Assim, tem-se $P\left(0, \frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ e.

c) Como P pertence ao plano xOz então $P(x, 0, z)$ e

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, 0, z) - (2, 1, -4) = (x-2, -1, z+4).$$

Os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (x-2, -1, z+4) = \lambda(3, -2, 1) \Leftrightarrow (x-2, -1, z+4) = (3\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3\lambda \\ -1 = -2\lambda \\ z+4 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Assim, tem-se $P\left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{7}{2}\right)$ e

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

d) Como P pertence ao plano de equação $z = -2$ então

$$P(x, y, -2) \text{ e } \overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, -2) - (2, 1, -4) = (x-2, y-1, 2).$$

Os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (x-2, y-1, 2) = \lambda(3, -2, 1) \Leftrightarrow (x-2, y-1, 2) = (3\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3\lambda \\ y-1 = -2\lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 6 \\ y-1 = -4 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Assim, tem-se $P(8, -3, -2)$ e

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

75.2.

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\vec{u}\| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2} = \sqrt{4+1+16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 21$$

O conjunto dos pontos P do espaço que satisfazem a condição

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\vec{u}\| \text{ é a superfície esférica de centro } C(2, 1, -4) \text{ e raio}$$

$$\sqrt{21}, \text{ definida pela equação } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 21.$$

76.1.

a) As coordenadas dos pontos B e E são, respectivamente, $(5, 6, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{BE} = E - B = (0, 0, 2) - (5, 6, 0) = (-5, -6, 2).$$

b) As coordenadas dos pontos C e F são, respectivamente, $(0, 6, 0)$ e $(5, 0, 2)$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{CF} = F - C = (5, 0, 2) - (0, 6, 0) = (5, -6, 2).$$

76.2. $P \in [DE] \Leftrightarrow P(0, y, 2), 0 \leq y \leq 6$.

$$\|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{33} \Leftrightarrow \sqrt{(0-5)^2 + (y-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{33} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + (y-6)^2 + 4 = 33 \Leftrightarrow (y-6)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-6 = 2 \vee y-6 = -2 \Leftrightarrow y = 8 \vee y = 4$$

Como $0 \leq y \leq 6$, conclui-se que $y = 4$.

Logo, $P(0, 4, 2)$.

76.3. Os vetores $\vec{u}(2-k, 2k, 5+k)$ e $\overrightarrow{CF} = (5, -6, 2)$ são

$$\text{colineares se } \frac{2-k}{5} = \frac{2k}{-6} = \frac{5+k}{2}.$$

$$\frac{2-k}{5} = \frac{2k}{-6} = \frac{5+k}{2} \Leftrightarrow \frac{2-k}{5} = \frac{2k}{-6} \wedge \frac{2-k}{5} = \frac{5+k}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k-12 = 10k \wedge 2k = -15-3k \Leftrightarrow -4k = 12 \wedge 5k = -15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \wedge k = -3 \Leftrightarrow k = -3$$

Pág. 68

77.1. A superfície esférica representada na figura é definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, então é centrada na origem do referencial e tem raio 3.

Sendo A e B os pontos de interseção da superfície esférica com Oz , sabe-se que $A(0, 0, -3)$ e $B(0, 0, 3)$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{AP} = P - A = (-2, 1, 2) - (0, 0, -3) = (-2, 1, 5) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (-2, 1, 2) - (0, 0, 3) = (-2, 1, -1).$$

77.2. O conjunto de pontos do espaço que pertencem à superfície esférica e ao plano α é a circunferência de centro $(0, 0, 2)$ e raio $\sqrt{5}$ definida pela condição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge z = 2.$$

$$\mathbf{77.3.} \quad \overline{AB} = 6, \quad \overline{AP} = \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30} \text{ e}$$

$$\overline{BP} = \|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

$$6^2 = (\sqrt{30})^2 + (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 36 = 30 + 6 \text{ (proposição verdadeira)}$$

O triângulo $[ABP]$ é retângulo em P porque

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2.$$

78.1.

a) Sendo $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, então $\vec{v} = (2, -3)$.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (2, -3) = \lambda(-3, -2) \Leftrightarrow (2, -3) = (-3\lambda, -2\lambda) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -3\lambda \\ -3 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ Impossível}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 4) - (2, -1) = (1, 5)$.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-3, -2) + (2, -3) = (-1, -5).$$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{w}$ são colineares porque $\vec{w} = -\overrightarrow{AB}$.

78.2.

a) A reta AB passa em A e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$. Então, uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y) = (2, -1) + k(1, 5), \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) Uma equação vetorial da reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{v}$ é:

$$(x, y) = (2, -1) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

c) A semirreta $\overrightarrow{AB}$ pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (2, -1) + k(1, 5), \quad k \geq 0.$$

79.1. $\overrightarrow{BC}$ é um vetor diretor da reta r .

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (5, -1) - (-1, 2) = (6, -3).$$

A reta r passa no ponto $B(-1, 2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{BC}$.

Então, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y) = (-1, 2) + k(6, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

79.2. O ponto A pertence ao eixo Ox . Então, $A(x, 0)$.

Como A pertence à reta r , tem-se:

$$(x, 0) = (-1, 2) + k(6, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 6k \\ 0 = 2 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 6 \times \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, $A(3, 0)$.

79.3. A reta s passa nos pontos $A(3, 0)$ e $D(0, -2)$.

$$\text{Então, } b_s = -2 \text{ e } m_s = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

A reta s pode ser representada pela equação $y = \frac{2}{3}x - 2$.

79.4. Se a reta t é paralela a r , então tem a direção do vetor $\overrightarrow{BC}$ (que é um vetor diretor da reta r).

Como a reta t passa no ponto $D(0, -2)$, uma equação vetorial da reta t é:

$$(x, y) = (0, -2) + k(6, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

79.5. Se a reta u é paralela a s , então tem a direção do vetor $\overrightarrow{DA}$ (que é um vetor diretor da reta s).

$$\overrightarrow{DA} = A - D = (3, 0) - (0, -2) = (3, 2)$$

Como a reta u passa no ponto $C(5, -1)$, uma equação vetorial da reta u é:

$$(x, y) = (5, -1) + k(3, 2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 69

80.1. O vetor de coordenadas $(5, 2)$ é um vetor diretor da reta s . Então, o declive da reta s é $\frac{2}{5}$.

80.2.

$$\text{a) } 3x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = -3x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

O declive da reta r é $-\frac{3}{2}$ e a ordenada na origem é $\frac{1}{2}$.

Então, a reta r passa no ponto de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, -3)$.

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) Como a reta s é definida pela equação vetorial $s: (x, y) = (1, -2) + k(5, 2)$, $k \in \mathbb{R}$, sabe-se que passa no ponto de coordenadas $(1, -2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (5, 2)$.

Então, o declive da reta s é $\frac{2}{5}$ e a reta é definida por uma

$$\text{equação do tipo } y = \frac{2}{5}x + b.$$

Como o ponto de coordenadas $(1, -2)$ pertence à reta s , tem-se:

$$-2 = \frac{2}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow -2 = \frac{2}{5} + b \Leftrightarrow -2 - \frac{2}{5} = b \Leftrightarrow -\frac{12}{5} = b.$$

A reta s pode ser representada pela equação $y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}$.

c) A reta r pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = \frac{1}{2} - 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

d) A reta s pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = -2 + 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

80.3. Como a reta t é definida pelas equações

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}, \text{ sabe-se que qualquer ponto } P \text{ da reta } t \text{ é da}$$

forma $P(-1 + 2k, 3 - k)$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Pretende-se determinar o ponto de interseção da reta t com a reta r . Para tal, basta determinar k de modo que o ponto P pertença à reta r .

P pertence à reta r se:

$$3(-1 + 2k) + 2(3 - k) = 1 \Leftrightarrow -3 + 6k + 6 - 2k = 1 \Leftrightarrow 4k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Então, o ponto de interseção da reta t com a reta r é o ponto de

$$\text{coordenadas } \left(-1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 3 + \frac{1}{2}\right), \text{ ou seja, } \left(-2, \frac{7}{2}\right).$$

b) Pretende-se determinar o ponto de interseção da reta t com a reta s . Para tal, basta determinar k de modo que o ponto P pertença à reta s .

P pertence à reta s se:

$$3 - k = \frac{2}{5}(-1 + 2k) - \frac{12}{5} \Leftrightarrow 3 - k = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}k - \frac{12}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - 5k = -2 + 4k - 12 \Leftrightarrow -9k = -29 \Leftrightarrow k = \frac{29}{9}.$$

Então, o ponto de interseção da reta t com a reta s é o ponto de

$$\text{coordenadas } \left(-1 + 2 \times \frac{29}{9}, 3 - \frac{29}{9}\right), \text{ ou seja, } \left(\frac{49}{9}, -\frac{2}{9}\right).$$

81. Em primeiro lugar vamos determinar as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s .

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

As retas r e s interseccionam-se no ponto $A(1, 0)$, sendo esse ponto um dos vértices do triângulo.

Como as retas r e s contêm dois lados iguais de um triângulo que medem $\sqrt{8}$ unidades, os outros dois vértices do triângulo pertencem à circunferência de centro A e raio $\sqrt{8}$ e às retas r e s .

A circunferência de centro A e raio $\sqrt{8}$ é definida pela equação $(x - 1)^2 + y^2 = 8$.

Em seguida vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com as retas r e s .

Interseção da circunferência com a reta r

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 8 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 1)^2 = 8 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

A circunferência intersecciona a reta r nos pontos de coordenadas $(3, 2)$ e $(-1, -2)$.

Interseção da circunferência com a reta s

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (-x + 1)^2 = 8 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 8 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 1)^2 = 8 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 4 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = -1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

A circunferência intersecciona a reta s nos pontos de coordenadas $(3, -2)$ e $(-1, 2)$.

Conclui-se, então, que as possíveis coordenadas dos vértices do triângulo são:

$(1, 0)$, $(3, 2)$ e $(3, -2)$ ou $(1, 0)$, $(3, 2)$ e $(-1, 2)$ ou

$(1, 0)$, $(-1, -2)$ e $(3, -2)$ ou

$(1, 0)$, $(-1, -2)$ e $(-1, 2)$.

82.1. $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 6, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 6, 0).$$

A reta AB passa no ponto $A(3, 0, 0)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Então, uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 6, 0), \quad k \in \mathbb{R}.$$

A reta AC passa no ponto $A(3, 0, 0)$ e tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 6).$$

Então, uma equação vetorial da reta AC é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 0, 6), \quad k \in \mathbb{R}.$$

A reta BC passa no ponto $B(0, 6, 0)$ e tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 0, 6) - (0, 6, 0) = (0, -6, 6).$$

Então, uma equação vetorial da reta BC é:

$$(x, y, z) = (0, 6, 0) + k(0, -6, 6), \quad k \in \mathbb{R}.$$

82.2.

a) Se a reta r é paralela a AC , então $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6)$ é um vetor diretor da reta r .

Então, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-3, 0, 6), \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) Sejam D e E os pontos de interseção da reta r com os lados $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.

A reta r pode ser representada pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 2 \\ z = 3 + 6k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Qualquer ponto da reta r tem ordenada igual a 2. Então, os pontos D e E têm ordenada igual a 2.

A reta AB é definida pela equação

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 6, 0), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pretende-se determinar as coordenadas do ponto D , ou seja, as coordenadas do ponto da reta AB que tem ordenada 2. Assim sendo, tem-se:

$$(x, 2, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 6, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3k \\ 2=0+6k \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3 \times \frac{1}{3} \\ k=\frac{1}{3} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ k=\frac{1}{3} \\ z=0 \end{cases}$$

Então, $D(2,2,0)$.

Para determinar as coordenadas do ponto e procede-se de forma análoga.

O ponto E pertence à reta BC e tem ordenada 2. Assim sendo, tem-se:

$$(x,2,z)=(0,6,0)+k(0,-6,6), k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2=6-6k \\ z=0+6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ k=\frac{2}{3} \\ z=6 \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ k=\frac{2}{3} \\ z=4 \end{cases}$$

Então, $E(0,2,4)$.

Pág. 70

83.1. A reta BE passa no ponto $B(6,6,0)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BE} = E - B = (3,3,10) - (6,6,0) = (-3,-3,10).$$

Então, uma equação vetorial da reta BE é:

$$(x,y,z) = (6,6,0) + k(-3,-3,10), k \in \mathbb{R}.$$

83.2. Vamos começar por definir vetorialmente a reta CE.

A reta CE passa no ponto $E(3,3,10)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{CE}$.

$$\overrightarrow{CE} = E - C = (3,3,10) - (0,6,0) = (3,-3,10).$$

Então, uma equação vetorial da reta CE é:

$$(x,y,z) = (3,3,10) + k(3,-3,10), k \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção da reta CE com o plano xOz tem ordenada nula. Assim sendo, tem-se:

$$(x,0,z) = (3,3,10) + k(3,-3,10), k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+3k \\ 0=3-3k \\ z=10+10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ k=1 \\ z=20 \end{cases}.$$

A reta CE interseca o plano xOz no ponto de coordenadas $(6,0,20)$.

83.3.

a) Vamos começar por definir vetorialmente a reta AE.

A reta AE passa no ponto $E(3,3,10)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (3,3,10) - (6,0,0) = (-3,3,10).$$

Então, uma equação vetorial da reta AE é:

$$(x,y,z) = (3,3,10) + k(-3,3,10), k \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção da reta AE com o plano de equação $z=6$ tem cota igual a 6.

Assim sendo, tem-se:

$$(x,y,6) = (3,3,10) + k(-3,3,10), k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3k \\ y=3+3k \\ 6=10+10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3 \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ y=3+3 \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ k=-\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{21}{5} \\ y=\frac{9}{5} \\ k=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

A reta AE interseca o plano de equação $z=6$ no ponto de coordenadas $\left(\frac{21}{5}, \frac{9}{5}, 6\right)$.

b) De modo análogo determina-se o ponto de interseção da reta AE com o plano de equação $y=1$.

$$(x,1,z) = (3,3,10) + k(-3,3,10), k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3k \\ 1=3+3k \\ z=10+10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ k=-\frac{2}{3} \\ z=10+10 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ k=-\frac{2}{3} \\ z=\frac{10}{3} \end{cases}$$

A reta AE interseca o plano de equação $y=1$ no ponto de coordenadas $\left(5,1,\frac{10}{3}\right)$.

84.1. Interseção da reta r com o plano xOy

Equação do plano xOy: $z=0$

$$(x,y,0) = (-3,-1,-2) + k(2,1,3), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x=-3+2k \\ y=-1+k \\ 0=-2+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2 \times \frac{2}{3} \\ y=-1+\frac{2}{3} \\ k=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ k=\frac{2}{3} \end{cases}$$

A reta r interseca o plano xOy no ponto de coordenadas $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$.

Interseção da reta r com o plano xOz

$$(x,0,z) = (-3,-1,-2) + k(2,1,3), k \in \mathbb{R}$$

Equação do plano xOz: $y=0$

$$\begin{cases} x=-3+2k \\ 0=-1+k \\ z=-2+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2 \times 1 \\ k=1 \\ z=-2+3 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ k=1 \\ z=1 \end{cases}$$

A reta r interseca o plano xOz no ponto de coordenadas $(-1,0,1)$.

Interseção da reta r com o plano yOz

$$(0,y,z) = (-3,-1,-2) + k(2,1,3), k \in \mathbb{R}$$

Equação do plano yOz: $x=0$

$$\begin{cases} 0=-3+2k \\ y=-1+k \\ z=-2+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ y=-1+\frac{3}{2} \\ z=-2+3 \times \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano yOz no ponto de coordenadas

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

84.2. A reta r pode ser representada pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -2 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

84.3. Seja I ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo positivo das ordenadas. Então, $I(0, y, 0)$, $y > 0$.

Como I pertence à superfície esférica definida pela equação $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 2z = 2$, tem-se:

$$0^2 + 2 \times 0 + y^2 + 0^2 - 2 \times 0 = 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2} \vee y = -\sqrt{2}$$

Como $y > 0$, conclui-se que $y = \sqrt{2}$.

Portanto, $I(0, \sqrt{2}, 0)$.

Sendo s uma reta paralela à reta r , sabe-se que um vetor diretor da reta s é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 1, 3)$.

Então, uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 0) + k(2, 1, 3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

84.4. $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 2z = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1^2 = 2 + 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$$

A superfície esférica tem centro $C(-1, 0, 1)$ e raio 2.

$C \in r$?

$$\begin{cases} -1 = -3 + 2k \\ 0 = -1 + k \\ 1 = -2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2k \\ 1 = k \\ 3 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 1 = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Conclui-se, então, que o centro da superfície esférica pertence à reta r .

85.1.

$$\overline{AH} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$

Designemos por a a aresta do cubo. Sabe-se que $(\overline{AH})^2 = 3a^2$.

Então, tem-se:

$$6^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 36 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = 12 \Leftrightarrow a = \sqrt{12} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$A_{\text{face do cubo}} = a^2 = 12.$$

85.2. O centro da superfície esférica inscrita no cubo é o ponto médio da diagonal $[AH]$.

As coordenadas do ponto médio da diagonal $[AH]$ são

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (3, -1, -1).$$

O diâmetro da superfície esférica inscrita no cubo é igual à aresta do cubo, ou seja, 6. Então, o raio é igual a 3.

A superfície esférica inscrita no cubo pode ser representada pela seguinte equação:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Pág. 72

1.1.

$$A \times B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

1.2. Por exemplo, $\{(2,1), (3,2), (5,1)\}$

1.3. Por exemplo, $\{(2,3), (2,4), (3,4), (5,1)\}$

1.4. Os conjuntos C e E representam funções de A em B uma vez que, a cada elemento de A corresponde um e um só elemento de B .

O conjunto D não representa uma função de A em B porque ao elemento 2 faz corresponder dois valores de B , $(2,1)$ e $(2,3)$.

$$2.1. G_f = \{(-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)\}$$

$$G_g = \{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$$

2.2.

a) f é uma função injetiva porque a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, isto é, o gráfico de f não tem pontos com a mesma ordenada.

b) f não é uma função sobrejetiva porque nem todos os elementos de B são imagem por f de algum elemento de A . Nenhum elemento do gráfico de f tem ordenada 4.

2.3.

a) g é uma função não injetiva porque há objetos diferentes com a mesma imagem, ou seja, há pontos do gráfico de g com a mesma ordenada: $(-1,1)$ e $(1,1)$.

b) g não é uma função sobrejetiva porque nem todos os elementos de B são imagem por g de algum elemento de A . Nenhum elemento do gráfico de g tem ordenada 2 ou 3.

2.4. Não existe uma função h de A em B que seja bijetiva porque o número de elementos de A é inferior ao número de elementos de B . ($\#A < \#B$)

Assim, há elementos do conjunto B que não correspondem a qualquer elemento de A .

$$3.1. D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$D_f = \{2, 3, 5, 6\}; \quad D'_f = \{1, 2, 3, 4\}; \quad D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Então, } D_{g \circ f} = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 5$$

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(4) = 6$$

$$(g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(3) = 1$$

$$\text{Então, } D'_{g \circ f} = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$3.2. D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = \{1, 2, 3, 4\}; \quad D'_g = \{1, 2, 5, 6\}; \quad D_f = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$\text{Então, } D_{f \circ g} = \{1, 2, 4\}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 4$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(6) = 3$$

$$\text{Então, } D'_{f \circ g} = \{1, 3, 4\}$$

3.3. A composição de funções não goza da propriedade comutativa. Basta observar, por exemplo, que $(g \circ f)(2) = 2$ e $(f \circ g)(2) = 4$, isto é, $(g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2)$.

Pág. 73

4.1.

$$\text{a) } (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 2$$

$$\text{Então, } (g \circ f)(2) = 2$$

$$\text{b) } (f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(4) = 9$$

$$\text{Então, } (f \circ g)(7) = 9$$

4.2.

$$\text{a) } D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$D_f = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}; \quad D'_f = \{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$D_g = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$D_{g \circ f} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = -2$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 0$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 4$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(9) = 6$$

$$D'_{g \circ f} = \{-2, 0, 2, 4, 6\}$$

$$\text{b) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}; \quad D'_g = \{-2, 0, 2, 4, 6\};$$

$$D_f = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_{f \circ g} = \{3, 5, 7\}$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 1$$

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 5$$

$$(f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(4) = 9$$

$$D'_{f \circ g} = \{1, 5, 9\}$$

4.3.

$$\text{a) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = 2x + 1 - 3 = 2x - 2$$

$$\text{Então, } (g \circ f)(x) = 2x - 2, \quad \forall x \in D_{g \circ f}$$

$$\text{b) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(x - 3) + 1 = 2x - 6 + 1 = 2x - 5$$

$$\text{Então, } (f \circ g)(x) = 2x - 5, \quad \forall x \in D_{f \circ g}$$

5.1. $C = \{2, 6, 8\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $A \cap C = C \quad f|_C : C \rightarrow B$

$$x \mapsto \frac{x}{2}$$

b) $A \cap D = \{2, 4\} \quad f|_D : \{2, 4\} \rightarrow B$

$$x \mapsto \frac{x}{2}$$

5.2. f é injetiva: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{2} \neq \frac{x_2}{2}$, tem-se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo

f é injetiva.

f é sobrejetiva: $\forall y \in B, \exists x \in A: f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y \Leftrightarrow x = 2y.$$

Verifica-se que $\forall y \in B, \exists x \in A: x = 2y$. A função f é sobrejetiva.

Como f é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

$f^{-1}: B \rightarrow A$

$$x \mapsto 2x$$

5.3. Atendendo a que a função g é bijetiva, admite inversa e

$$G_{g^{-1}} = \{(4, 2), (1, 4), (3, 6), (2, 8)\}$$

$$g^{-1}(1) + g^{-1}(2) = 4 + 8 = 12$$

6.1. Não. A função g não é injetiva.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

Por exemplo, $-3 \neq 3$ e $f(-3) = f(3)$.

6.2. f é injetiva: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$, tem-se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Logo f é injetiva.

f é sobrejetiva: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}. \text{ Verifica-}$$

-se que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: x = \frac{y-3}{2}$. A função f é sobrejetiva.

Como f é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

6.3.

$$\text{a) } x = f^{-1}(3) \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{b) } x = f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$$

6.4.

$$\text{a) Em 6.2. viu-se que } f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}.$$

Então $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-3}{2}$$

b) Sabe-se que $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

$$f \circ f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

c) Sabe-se que $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

$$f^{-1} \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

Pág. 74

7. h é injetiva: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$.

$$\text{Ora, } x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{5} \neq \frac{x_2 - 2}{5} \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2).$$

Logo h é injetiva.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: h(x) = y.$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-2}{5} = y \Leftrightarrow x = 5y + 2$$

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: x = 5y + 2$. A função h é sobrejetiva.

Como h é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

$$h^{-1}(x) = 5x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

8.1. f é injetiva: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\text{Como } x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{3} \neq \frac{x_2}{3}, \text{ tem-se } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \text{ Logo}$$

f é injetiva.

f é sobrejetiva: $\forall y \in B, \exists x \in A: f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{3} = y \Leftrightarrow x = 3y.$$

Verifica-se que $\forall y \in B, \exists x \in A: x = 3y$. A função f é sobrejetiva.

Como f é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

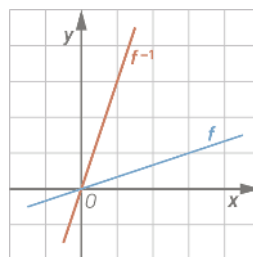
8.2. Atendendo a que $f(x) = y \Leftrightarrow x = 3y$, tem-se

$$f^{-1}(x) = 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

8.3. $f(3) = \frac{3}{3} = 1$. Logo $(3, 1)$ pertence ao gráfico de f .

$f^{-1}(1) = 3 \times 1 = 3$. Logo $(1, 3)$ pertence ao gráfico de f^{-1} .

8.4.



8.5.

a) Como $f^{-1}(f(a)) = a$, conclui-se que $A'(f(a), a)$ é um ponto do gráfico de f^{-1} .

b) Qualquer ponto P da reta $y = x$ é do tipo (x, x) . Vejamos a sua distância a A e a A' .

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-a)^2 + (x-f(a))^2}$$

$$\overline{A'P} = \sqrt{(x-f(a))^2 + (x-a)^2}$$

Verifica-se que $\overline{AP} = \overline{A'P}$, ou seja, a distância de qualquer ponto P da reta de equação $y=x$ é equidistante de A e de A' . Então a reta de equação $y=x$ é a mediatriz de $[AA']$.

9.1. P é um ponto comum aos gráficos de f e g .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - 2 = 1 + 4x \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$$

$$f(-3) = g(-3) = -11. \text{ Então, } P(-3, -11).$$

9.2.

a) $f^{-1}(7) = x \Leftrightarrow 7 = f(x) \Leftrightarrow 7 = 3x - 2 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3.$

Então $f^{-1}(7) = 3$

b) $g^{-1}(-1) = x \Leftrightarrow -1 = g(x) \Leftrightarrow -1 = 1 + 4x \Leftrightarrow -2 = 4x \Leftrightarrow$

$$x = -\frac{1}{2}. \text{ Então } g^{-1}(-1) = -\frac{1}{2}$$

10.1. $f(x) = \frac{3}{x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

10.2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\}$$

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Então, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

10.3. $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\}$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \sim[(x-3)(x+3) = 0] \Leftrightarrow \sim(x-3=0 \vee x+3=0)$$

$$\Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

10.4. $f(x) = \sqrt{x-3}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \geq 0\}$$

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$D_f = [3, +\infty[$$

10.5. $f(x) = \sqrt{2-x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \geq 0\}$$

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$D_f =]-\infty, 2]$$

10.6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 5 \geq 0 \wedge \sqrt{x-5} \neq 0\}$$

$$x - 5 \geq 0 \wedge \sqrt{x-5} \neq 0 \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

$$D_f =]5, +\infty[$$

10.7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x| - 2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge |x| - 2 \neq 0\}$$

$$x \geq 0 \wedge |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \sim(|x| = 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \sim(x = 2 \vee x = -2) \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$D_f = [0, +\infty[\setminus \{2\}$$

10.8. $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \neq 0\}$$

$$x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

10.9. $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} + \sqrt{4 - 3x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$4 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -4 \wedge \sim[(x-1)(x+1) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \wedge \sim(x-1=0 \vee x+1=0) \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$D_f = \left] -\infty, \frac{4}{3} \right] \setminus \{-1, 1\}$$

Pág. 75

11.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$

As soluções da equação são -2 , -1 e 2 .

11.2.

a) Como $f(1) < 0$ e $f\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$, conclui-se que

$$f(1) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$$

$$f(1) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ tem sinal negativo.}$$

b) Sabe-se que $f(-3) - f(3) = -2 - 4 = -6$. Então

$$f(-3) - f(3) < 0.$$

$$f(-\sqrt{2}) > 0.$$

Conclui-se que $\frac{(f(-3) - f(3))}{f(-\sqrt{2})} < 0$, ou seja $\frac{(f(-3) - f(3))}{f(-\sqrt{2})}$ tem

sinal negativo.

c) Atendendo a que $f(-2) = 0$, tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\sqrt{2}) - f(-2) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\sqrt{2})$$

Como $0 < \sqrt{2} < 2$ e $0 < \frac{\pi}{2} < 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ e $f(\sqrt{2}) < 0$.

Então, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\sqrt{2}) < 0$

O sinal de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\sqrt{2}) - f(-2)$ é negativo.

11.3.

x	-3	-2	-1	2	3
$f(x)$	-2	0	+	0	+

12.1.

a) Seja $A(3,2)$, $B(0,-4)$ e $y=mx+b$ a equação reduzida da reta AB .

$$m = \frac{-6}{-3} = 2. \text{ Como } A \text{ pertence a } AB, \text{ tem-se } 2 = 2 \times 3 + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 = b$$

A reta AB tem por equação $y = 2x - 4$.

Então, $f(x) = 2x - 4$, para $x \in]-\infty, 3]$.

b) Considerando $A(3,2)$ e $C(5,0)$ e $y=mx+b$ a equação reduzida da reta AC , tem-se

$$m = \frac{-2}{2} = -1 \text{ Como } A \text{ pertence a } AC, \text{ tem-se } 2 = -3 + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 5$$

A reta AC tem por equação $y = -x + 5$.

Então, $f(x) = -x + 5$, para $x \in]3, +\infty[$.

$$12.2. (2x - 4 = 0 \wedge x \leq 3) \vee (-x + 5 = 0 \wedge x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge x \leq 3) \vee (x = 5 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$$

Os zeros de f são 2 e 5.

12.3.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	-

12.4.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		2	

2 é o máximo da função. O maximizante é 3. Trata-se de um máximo absoluto e relativo.

13.1. Pretende-se mostrar que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 4x_1 < 4x_2 \Leftrightarrow 4x_1 - 3 < 4x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Então f é uma função crescente.

$$13.2. (f+h)(x) = f(x) + h(x) = 4x - 3 + 2kx - 1 = (4+2k)x - 4$$

Então $(f+h)(x) = (4+2k)x - 4$. Sendo uma função afim, para ser decrescente deverá ter declive negativo. Assim, $4+2k < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2k < -4 \Leftrightarrow k < -2$$

13.3.

$$a) \text{ Sendo } g(x) = x^2 + 2x, \text{ tem-se } g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1$$

$$g(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \text{ e } g(2) = 2^2 + 2 \times 2 = 8$$

Então $A(-1,-1)$, $B(1,3)$ e $C(2,8)$.

b) Seja m_{AB} e m_{BC} os declives das retas AB e BC , respetivamente.

$$m_{AB} = \frac{3+1}{1+1} = 2 \text{ e } m_{BC} = \frac{8-3}{2-1} = 5$$

Como $m_{AB} < m_{BC}$, conclui-se que a concavidade não pode ser voltada para baixo.

$$c) g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Os zeros de g são -2 e 0.

Pág. 76

14.1. A função é par se $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.

$$f(-2) = 5 = f(2), f(-1) = 2 = f(1), f(0) = f(-0) = 1$$

14.2. A função é ímpar se $\forall x \in D_g, -x \in D_g \wedge g(-x) = -g(x)$.

$$g(-2) = -5 = -g(2), g(-1) = -2 = -g(1), g(0) = 0 = -g(0)$$

$$14.3. \text{ Por exemplo, } G_h = \{(-2,-2), (-1,5), (0,1), (1,2), (2,-5)\}.$$

14.4.

$$a) G_f = \{(-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5)\}$$

A dilatação vertical de coeficiente 3 transforma $P(x,y)$ em

$$P'(x, 3y)$$

A imagem do gráfico de f pela dilatação referida é:

$$\{(x, 3f(x)), x \in D_f\} = \{(-2,15), (-1,6), (0,3), (1,6), (2,15)\}$$

b) A dilatação horizontal de coeficiente 2 transforma $P(x,y)$ em

$$P'(2x, y)$$

A imagem do gráfico de f pela dilatação referida é:

$$\{(2x, f(x)), x \in D_f\} = \{(-4,5), (-2,2), (0,1), (2,2), (4,5)\}$$

14.5.

a) A contração vertical de coeficiente $\frac{1}{4}$ transforma $P(x,y)$ em

$$P'\left(x, \frac{1}{4}y\right)$$

A imagem do gráfico de f pela contração referida é:

$$\left\{\left(x, \frac{1}{4}f(x)\right), x \in D_f\right\} = \left\{\left(-2, \frac{5}{4}\right), \left(-1, \frac{2}{4}\right), \left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{2}{4}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right)\right\}$$

b) A contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ transforma $P(x,y)$

$$\text{em } P'\left(\frac{1}{2}x, y\right)$$

A imagem do gráfico de f pela contração referida é:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}x, f(x)\right), x \in D_f\right\} = \left\{\left(-1, 5\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right), \left(0, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(1, 5\right)\right\}$$

15.1. Domínio: $\{-4, 1, 3, 4\}$

Contradomínio: $\{2, 3, 0, 4\}$

15.2.

$$a) g(x) = f(x-2)$$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(2,0)$

$$D_g = \{-2, 3, 5, 6\}$$

$$G_g = \{(-2,2), (3,3), (5,0), (6,4)\}$$

b) $g(x) = f(x+1)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1,0)$

$$D_g = \{-5, 0, 2, 3\}$$

$$G_g = \{(-5, 2), (0, 3), (2, 0), (3, 4)\}$$

c) $g(x) = f(x-3)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(3,0)$

$$D_g = \{-1, 4, 6, 7\}$$

$$G_g = \{(-1, 2), (4, 3), (6, 0), (7, 4)\}$$

16.1.

Domínio: $\{-2, 1, 4, 5\}$

Contradomínio: $\{0, 3, 0, 2\}$

16.2.

a) $g(x) = 2f(x)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma dilatação vertical de coeficiente 2.

$$D_g = \{-2, 1, 4, 5\}$$

$$G_g = \{(-2, 0), (1, 6), (4, 0), (5, 4)\}$$

b) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$.

$$D_g = \{-2, 1, 4, 5\}$$

$$G_g = \left\{(-2, 0), \left(1, \frac{3}{2}\right), (4, 0), (5, 1)\right\}$$

c) $g(x) = f(2x)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

$$D_g = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$$

$$G_g = \left\{(-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 3\right), (2, 0), \left(\frac{5}{2}, 2\right)\right\}$$

d) $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma dilatação horizontal de coeficiente 3.

$$D_g = \{-6, 3, 12, 15\}$$

$$G_g = \{(-6, 0), (3, 3), (12, 0), (15, 2)\}$$

Pág. 77

17.1. $g(x) = f(x) + 2$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma translação de vetor $\vec{u}(0, 2)$.

$$D_g = [-2, 5]; \quad D'_g = [-4, 3]$$

17.2. $g(x) = -f(x) + 3$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela composição de uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$.

$$D_g = [-2, 5]$$

$$D'_g = [0, 7]$$

17.3. $g(x) = f(x-2) - 1$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela composição da translação de vetor $\vec{u}(2, 0)$ seguida da translação de vetor $\vec{v}(0, -1)$.

$$D_g = [0, 7]$$

$$D'_g = [-5, 2]$$

17.4. $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) - 1$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela composição da dilatação horizontal de coeficiente 3, seguida da translação de vetor $\vec{v}(0, -1)$.

$$D_g = [-6, 15]$$

$$D'_g = [-5, 2]$$

18.1. Extremos absolutos:

-3 é mínimo absoluto (2 é minimizante)

3 é máximo absoluto (6 é maximizante)

Extremos relativos:

Máximos: 1 e 3 (maximizantes: 4 e 6)

Mínimos: -3 e 0 (minimizantes: 2 e 5)

18.2.

a) $g(x) = -f(x)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f por uma reflexão de eixo Ox .

$$D_g = [2, 6]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : 3 e 5

b) $g(x) = f(x-1)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f por uma translação de vetor $\vec{u}(1, 0)$.

$$D_g = [3, 7]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : 4 e 6

c) $g(x) = f(-x)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f por uma reflexão de eixo Oy .

$$D_g = [-6, 2]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : -5 e -3

d) $g(x) = -f(x+2)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela composta de uma translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$ seguida de uma reflexão de eixo Ox .

$$D_g = [0, 4]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : 1 e 3

e) $g(x) = 3f(x)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 3.

$$D_g = [2, 6]; \quad D'_g = [-9, 9]$$

Zeros de g : 3 e 5

f) $g(x) = f(4x)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$.

$$D_g = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$

g) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente 2.

$$D_g = [4, 12]; \quad D'_g = [-3, 3]$$

Zeros de g : 6 e 10

h) $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$

O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela composta de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida de uma reflexão de eixo Ox .

$$D_g = [2, 6]; \quad D'_g = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Zeros de g : 3 e 5

18.3.

a) $h(x) = f(2x)$

x	1		2		$\frac{5}{2}$		3
h	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

b) $h(x) = \frac{1}{3}f(x)$

x	2		4		5		6
h	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

19.

Repara que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(4, 0)$. Então o gráfico de f é a imagem do gráfico de g pela translação de vetor $-\vec{u}(-4, 0)$

Assim $D_f = [-7, 0]$ e $D'_f = [-3, 2]$.

Zeros de f : -6, -3 e 0

O gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Zeros de h : -3, -1 e 0

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 0\}$$

Pág. 78

20.1. O vértice da parábola que corresponde ao gráfico de f é o ponto de coordenadas $(1, -2)$. Então,

$$f(x) = a(x-1)^2 - 2, \quad a \neq 0.$$

Como o ponto de coordenadas $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se:

$$a(0-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$.

20.2. O quadro de variação relativo à função f é o seguinte:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

20.3.

a) Como o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(4, 3)$, então $g(x) = f(x-4) + 3$.

Sendo $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$, então

$$g(x) = 2(x-4-1)^2 - 2 + 3 = 2(x-5)^2 + 1.$$

b) Como o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação horizontal de vetor $\vec{u}(-3, 6)$, então $h(x) = -f(x+3) + 6$.

Sendo $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$, então

$$h(x) = -2(x+3-1)^2 - 2 + 6 = -2(x+2)^2 + 4.$$

21.1. As abscissas dos pontos A e B correspondem aos zeros da função quadrática f .

Então, $f(x) = a(x+2)(x-4)$, $a \neq 0$.

Como o ponto $C(0, -4)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se:

$$a(0+2)(0-4) = -4 \Leftrightarrow -8a = -4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$.

Designemos por $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola representativa da função. Atendendo à simetria da parábola em relação à reta

$$x = x_v, \text{ conclui-se que } x_v = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

$$y_v = f(1) = \frac{1}{2}(1+2)(1-4) = -\frac{9}{2}.$$

As coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico de f são $\left(1, -\frac{9}{2}\right)$.

21.2. $f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+2)(x-4) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2x - 8) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = -1 \wedge c = -4$$

21.3. Sendo $g(x) = f(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sabe-se que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(2, 0)$.

Então $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 6[$.

O conjunto solução da inequação $g(x) < 0$ é $]0, 6[$.

21.4. Sendo $h(x) = f(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$, sabe-se que o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{v}(k, 0)$.

Sendo h uma função par sabe-se que o vértice tem abscissa nula. Então $k = -1$.

22.1.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Os zeros da função f são $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ e $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Designemos por $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola representativa da função. Atendendo à simetria da parábola em relação à reta $x = x_v$, conclui-se que

$$x_v = \frac{-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$y_v = f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 1 = 2 - 4 - 1 = -3.$$

As coordenadas do vértice da parábola que corresponde ao gráfico de f são $(-1, -3)$.

c) Uma equação do eixo de simetria do gráfico de f é $x = -1$.

22.2. Atendendo a que a representação gráfica da função f tem a concavidade para cima ($a > 0$) e aos zeros, podemos tirar as seguintes conclusões quanto ao sinal da função:

x	$-\infty$	$-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$		$-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right[\cup \left] -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right[;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right[;$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

22.3. Variação e extremos:

f é crescente em $[-1, +\infty[$.

f é decrescente em $]-\infty, -1]$.

f tem mínimo absoluto igual a -3 .

Pág. 79

23.1.

$$f(x) = x^2 + x - 6 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - 6 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 6 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

A representação gráfica da função f é uma parábola de vértice $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ cuja concavidade está voltada para cima, então o mínimo de f é $-\frac{25}{4}$.

O contradomínio da função f é $\left[-\frac{25}{4}, +\infty\right)$.

23.2. O gráfico de h , definida por $h(x) = -f(2x)$, é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Então o quadro de sinal da função h é o seguinte:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$		$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+	0	-

23.3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = -2x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -5$$

$$g(2) = -2 \times 2 + 4 = 0 \text{ e } g(-5) = -2 \times (-5) + 4 = 14.$$

Os gráficos das funções f e g intersectam-se nos pontos de coordenadas $(-5, 14)$ e $(2, 0)$.

24.1. Como -2 e 1 são os zeros da função quadrática f , então sabe-se que $f(x) = a(x+2)(x-1)$, $a \neq 0$.

Como o ponto $A(-1, -2)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se:

$$a(-1+2)(-1-1) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Portanto, } f(x) = 1(x+2)(x-1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Como o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função afim g , sabe-se que $g(x) = mx + 1$.

Sendo $A(-1, -2)$ um ponto pertencente ao gráfico da função g , tem-se:

$$g(-1) = -2 \Leftrightarrow m \times (-1) + 1 = -2 \Leftrightarrow -m + 1 = -2 \Leftrightarrow m = 3.$$

$$\text{Então, } g(x) = 3x + 1.$$

24.2. Um dos pontos de interseção dos gráficos das duas funções é $A(-1, -2)$ e B é o outro ponto de interseção dos gráficos das funções f e g .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$$g(3) = 3 \times 3 + 1 = 10. \text{ Então, } B(3, 10).$$

24.3.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[$$



25.1.

$$a) f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x).$$

f é uma função par porque $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$b) g(-x) = -5(-x) = 5x = -g(x).$$

g é uma função ímpar porque $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$c) (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 3 - 5x = 2x^2 - 5x - 3.$$

$$(f+g)(-x) = 2(-x)^2 - 5(-x) - 3 = 2x^2 + 5x - 3.$$

$(f+g)(-x) \neq (f+g)(x)$ e $(f+g)(-x) \neq -(f+g)(x)$, logo a função $f+g$ não é par nem é ímpar.

25.2.

$$a) f(x) > 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 3 > 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 0$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



$$\text{Então, } x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[.$$

$$b) g(x) \leq x^2 \Leftrightarrow -5x \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 - 5x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5$$



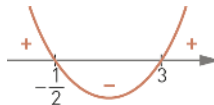
$$\text{Então, } x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[.$$

$$c) (f+g)(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5+7}{4} \vee x = \frac{5-7}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$



$$\text{Então, } 2x^2 - 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}, 3\right[.$$

Pág. 80

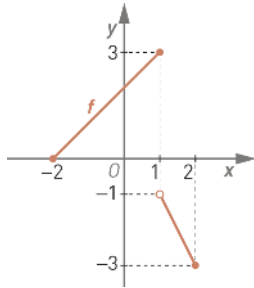
$$26.1. D_f = [-2, 1] \cup]1, 2] = [-2, 2].$$

$$26.2. f(-1) + f(1) \times f(2)$$

$$= (-1+2) + (1+2) \times (-2 \times 2 + 1) = 1 + 3 \times (-3) = 1 - 9 = -8.$$

26.3. $f(-2) = -2 + 2 = 0$; $f(1) = 1 + 2 = 3$;

$f(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$.



26.4. Por observação da representação gráfica de f , conclui-se que $D'_f = [-3, -1[\cup [0, 3]$.

27.1.

• Se $-2 \leq x < 1$, então $f(x) = -3$.

• Se $1 \leq x \leq 5$, então $f(x) = a(x-2)^2 - 4$, sendo $a \neq 0$, porque a representação gráfica é parte de uma parábola de vértice no ponto de coordenadas $(2, -4)$.

Como $f(5) = 5$, então tem-se:

$$a(5-2)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1$$

Conclui-se que se $1 \leq x \leq 5$, então $f(x) = (x-2)^2 - 4$.

Então,
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 - 4 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

27.2.

a) A equação $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ tem uma e uma só solução se $k \in \{-4\} \cup]-3, 5]$. Basta reparar que quando $k \in \{-4\} \cup]-3, 5]$ a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico de f num único ponto.

b) A equação $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ tem duas e só duas soluções se $k \in]-4, -3[$. Basta reparar que quando $k \in]-4, -3[$ a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico de f em dois pontos.

c) A equação $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ tem mais de duas soluções se $k = -3$. Basta reparar que quando $k = -3$ a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico de f em mais de dois pontos.

27.3. Por observação da representação gráfica da função f constata-se que f tem apenas um zero e que esse zero se encontra entre 1 e 5.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 = 0 \wedge 1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \wedge 1 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow (x-2 = 2 \vee x-2 = -2) \wedge 1 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = 0) \wedge 1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

28.1.
$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

28.2.

a) $f(x) = 3 \Leftrightarrow |x-3| = 3 \Leftrightarrow x-3 = 3 \vee x-3 = -3 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 0$
Conjunto-solução: $\{0, 6\}$

b) $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow x-3 = 1 \vee x-3 = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$

Conjunto-solução: $\{2, 4\}$

c) $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x-3| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x-3 = \frac{2}{3} \vee x-3 = -\frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \vee x = \frac{7}{3}$

Conjunto-solução: $\left\{\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right\}$

28.3.

a) Sendo $f(x) = |x-3|$, então $D'_f = [0, +\infty[$.

O gráfico da função g , definida por $g(x) = -f(x-2) + 3$, pode ser obtido a partir do gráfico de f , aplicando sucessivamente as seguintes transformações:

Uma translação de vetor $\vec{u} = (2, 0)$;

Uma reflexão de eixo Ox ;

Uma translação de vetor $\vec{v} = (0, 3)$.

Então, $D'_g =]-\infty, 3]$.

b) Uma equação do eixo de simetria do gráfico de f é $x = 3$.

Como o gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico de f , aplicando a sequência de transformações indicadas em **28.3. a)**, conclui-se que uma equação do eixo de simetria do gráfico de g é $x = 5$.

Pág. 81

29.1. Sendo $f(x) = |x+2|$, então $D'_f = [0, +\infty[$ e $x = -2$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico da função f .

a) O gráfico da função h , definida por $h(x) = f(x-3) - 2$, pode ser obtido a partir do gráfico de f , aplicando sucessivamente as seguintes transformações:

Uma translação de vetor $\vec{u} = (3, 0)$;

Uma translação de vetor $\vec{v} = (0, -2)$.

Então, $D'_h = [-2, +\infty[$ e $x = 1$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

b) O gráfico da função h , definida por $h(x) = 2f(x+1) + 3$, pode ser obtido a partir do gráfico de f , aplicando sucessivamente as seguintes transformações:

Uma translação de vetor $\vec{u} = (-1, 0)$;

Uma dilatação vertical de coeficiente 2;

Uma translação de vetor $\vec{v} = (0, 3)$.

Então, $D'_h = [3, +\infty[$ e $x = -3$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

c) O gráfico da função h , definida por $h(x) = -\frac{1}{2}f(x-2)$, pode

ser obtido a partir do gráfico de f , aplicando sucessivamente as seguintes transformações:

Uma translação de vetor $\vec{u} = (2, 0)$;

Uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$;

Uma reflexão de eixo Ox .

Então, $D'_h =]-\infty, 0]$ e $x=0$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

29.2.

$$a) g(x) = 3 \Leftrightarrow |2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \vee 2x-1 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \vee 2x = -2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1.$$

Conjunto-solução: $\{-1, 2\}$.

b)

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow |2x-1| = |x+2| \Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \vee 2x-1 = -(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee 3x = -1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{3}.$$

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$.

29.3.

$$a) f(x) > 2 \Leftrightarrow |x+2| > 2 \Leftrightarrow x+2 > 2 \vee x+2 < -2 \Leftrightarrow x > 0 \vee x < -4$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[.$$

b)

$$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow |x+2| \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 1 \wedge x+2 \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -1 \wedge x \geq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3, -1]$$

c)

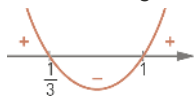
$$g(x) < |x| \Leftrightarrow |2x-1| < |x| \Leftrightarrow (2x-1)^2 < x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 < x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0$$

Cálculo auxiliar:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4+2}{6} \vee x = \frac{4-2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$$

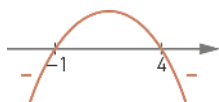


$$\text{Então, } 3x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{3}, 1 \right[.$$

$$30.1. f(x) \geq -4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x \geq -4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$



$$\text{Então, } f(x) \geq -4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 4].$$

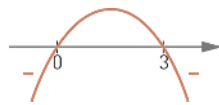
$$30.2. g(x) = |f(x)| \Leftrightarrow g(x) = |-x^2 + 3x|$$

$$\text{Assim sendo, } g(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } -x^2 + 3x \geq 0 \\ -(-x^2 + 3x) & \text{se } -x^2 + 3x < 0 \end{cases}.$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x+3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$



$$-x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 3]$$

$$-x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{Então, } g(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3x & \text{se } x < 0 \vee x > 3 \end{cases}.$$

30.3.

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow |-x^2 + 3x| = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 2 \vee -x^2 + 3x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \vee -x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{-2} \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Conjunto-solução: } \left\{ \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 1, 2, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

31.1. O gráfico da função f , definida por $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$, pode

ser obtido a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$, por aplicação sucessiva das seguintes transformações:

Translação de vetor $\vec{u} = (-3, 0)$;

Reflexão de eixo Ox ;

Translação de vetor $\vec{v} = (0, 1)$.

$$31.2. f(13) = 1 - \sqrt{13+3} = 1 - \sqrt{16} = 1 - 4 = -3, \text{ logo o ponto}$$

$A(13, 3)$ não pertence ao gráfico de f .

$$31.3. f(x) = -6 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x+3} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 49 \wedge x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x = 46 \wedge x \geq -3 \Leftrightarrow x = 46.$$

A abscissa do ponto do gráfico de f que tem ordenada -6 é 46.

$$31.4. f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 1 \wedge x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x = -2 \wedge x \geq -3 \Leftrightarrow x = -2.$$

Zero da função f : -2 .

$$32.1. f(2) = \sqrt{2-2} + 3 = \sqrt{0} + 3 = 0 + 3 = 3.$$

A ordenada de A é 3.

32.2.

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 3 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x-2 = 4 \wedge x-2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x = 6$$

A abscissa de B é 6.

$$32.3. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[.$$

Se $x \in [2, +\infty[$, sabe-se que $\sqrt{x-2} \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 3 \geq 0 + 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3.$$

Então, $D'_f = [3, +\infty[$.

$$32.4. f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = (x - 3)^2 \wedge x - 2 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x^2 - 6x + 9 \wedge x \geq 2 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 11 = 0 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{2} \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \right) \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$$

O ponto do gráfico de f que tem abscissa igual à ordenada é o

ponto de coordenadas $\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}, \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

A distância desse ponto à origem é dada por:

$$d = \sqrt{\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2} - 0 \right)^2 + \left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2} - 0 \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \times 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{49 + 14\sqrt{5} + 5}{4} \times 2} = \sqrt{\frac{54 + 14\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{27 + 7\sqrt{5}}.$$

Pág. 82

33.1.

$$1 - \sqrt{2x+1} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 2x+1 = 25 \wedge 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 12$$

Conjunto-solução: $\{12\}$

$$33.2. \sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \wedge 3x-2 \geq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \wedge x \geq \frac{2}{3} \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \wedge x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{-2} \wedge x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2) \wedge x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Conjunto-solução da equação: $\{1, 2\}$

33.3.

$$\sqrt{4x+1} = 1-x \Leftrightarrow 4x+1 = (1-x)^2 \wedge 4x+1 \geq 0 \wedge 1-x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+1 = 1-2x+x^2 \wedge x \geq -\frac{1}{4} \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x = 0 \wedge -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x(-x+6) = 0 \wedge -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee -x+6 = 0) \wedge -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 6) \wedge -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Conjunto-solução da equação: $\{0\}$

33.4.

$$\sqrt{2x-3} = 3-x \Leftrightarrow 2x-3 = (3-x)^2 \wedge 2x-3 \geq 0 \wedge 3-x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 9-6x+x^2 \wedge x \geq \frac{3}{2} \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \wedge \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} \wedge \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2} \wedge \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \Leftrightarrow (x = 6 \vee x = 2) \wedge \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2$$

Conjunto-solução da equação: $\{2\}$

$$33.5. \sqrt{2-x} = 1 + \sqrt{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2-x})^2 = (1 + \sqrt{x+2})^2 \wedge 2-x \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 1 + 2\sqrt{x+2} + x+2 \wedge x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = -2x-1 \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x+2})^2 = (-2x-1)^2 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2) = 4x^2 + 4x + 1 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+8 = 4x^2 + 4x + 1 \wedge -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} = x^2 \wedge -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\sqrt{7}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{7}}{2} \right) \wedge -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Conjunto-solução da equação: $\left\{ -\frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$

33.6.

$$\sqrt{1-2x} = 2+x \Leftrightarrow 1-2x = (2+x)^2 \wedge 1-2x \geq 0 \wedge 2+x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x = 4+4x+x^2 \wedge x \leq \frac{1}{2} \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 3 = 0 \wedge -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-12}}{2} \wedge -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \wedge -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 + \sqrt{6} \vee x = -3 - \sqrt{6}) \wedge -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{6}$$

Conjunto-solução da equação: $\{-3 + \sqrt{6}\}$

34.1.

$$a) D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} = [-2, +\infty[$$

Se $x \in [-2, +\infty[$, sabe-se que $\sqrt{x+2} \geq 0$.

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x+2} \geq 1 + 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 1$$

Então, $D'_g = [1, +\infty[$.

$$b) f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} > \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-x > x \wedge 2-x \geq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow -2x > -2 \wedge x \leq 2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \wedge x \leq 2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1[$$

34.2. $g(x) = x \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+2 = (x-1)^2 \wedge x+2 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+2 = x^2 - 2x + 1 \wedge x \geq -2 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
 Conjunto-solução da equação: $\left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

35.1. Como $f(9) = 2 + \sqrt[3]{9-1} = 2 + \sqrt[3]{8} = 2 + 2 = 4$, conclui-se que o ponto de coordenadas $(9, 4)$ pertence ao gráfico de f .

35.2. $f(0) = 2 + \sqrt[3]{0-1} = 2 + \sqrt[3]{-1} = 2 + (-1) = 1$.

O gráfico de f interseja o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = -2 \Leftrightarrow x-1 = (-2)^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 = -8 \Leftrightarrow x = -7$

O gráfico de f interseja o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-7, 0)$.

35.3. $f(x) = 5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt[3]{x-1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 = 27 \Leftrightarrow x = 28$

Conjunto-solução da equação: $\{28\}$

36.1. Se $x \in]-\infty, -3]$ a concavidade do gráfico é voltada para cima e se $x \in [-3, +\infty[$ a concavidade do gráfico é voltada para baixo. Então, conclui-se que $b = -3$.

Assim sendo, $f(x) = a\sqrt[3]{x+3} + c$.

Sabe-se que o gráfico de f passa nos pontos de coordenadas $(-3, -2)$ e $(5, 0)$, então tem-se:

$\begin{cases} f(-3) = -2 \\ f(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt[3]{-3+3} + c = -2 \\ a\sqrt[3]{5+3} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + c = -2 \\ a \times 2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a = 1 \end{cases}$

Conclusão: $a = 1$, $b = -3$ e $c = -2$.

36.2. Atendendo aos valores de a , b e c determinados no item anterior, sabe-se que $f(x) = \sqrt[3]{x+3} - 2$.

36.3.

$f(x) > -4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} - 2 > -4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} > -2 \Leftrightarrow x+3 > (-2)^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+3 > -8 \Leftrightarrow x > -11 \Leftrightarrow x \in]-11, +\infty[$

b) $(f \times h)(2) = f(2) \times h(2) = (2+2) \times (3 - \sqrt{2-1}) = 4 \times 2 = 8$

c) $(f+h)(5) = f(5) + h(5) = (5+2) + (3 - \sqrt{5-1}) = 7+1 = 8$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = \frac{-3+2}{(-3)^2 - 2 \times (-3)} = \frac{-1}{9+6} = -\frac{1}{15}$

e) $(f \circ h)(1) = f(h(1)) = f(3 - \sqrt{1-1}) = f(3) = 3+2 = 5$

f) $(h \circ g)(-1) = h(g(-1)) = h((-1)^2 - 2 \times (-1)) =$
 $= h(3) = 3 - \sqrt{3-1} = 3 - \sqrt{2}$

37.2. $\frac{(f+g)(-1)}{h(6)} = \frac{f(-1) + g(-1)}{3 - \sqrt{6-1}} = \frac{-1+2 + (-1)^2 - 2 \times (-1)}{3 - \sqrt{5}} =$
 $= \frac{4}{3 - \sqrt{5}} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{9-5} =$
 $= \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} = 3 + \sqrt{5}$

37.3.

a) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x+2) \times (x^2 - 2x) =$
 $= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x = x^3 - 4x$

b)

$D_{\frac{g}{h}} = D_g \cap D_h \setminus \{x : h(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[\setminus \{10\} = [1, +\infty[\setminus \{10\}$

Cálculo auxiliar:

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty[$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \wedge x-1 = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x = 10 \Leftrightarrow x = 10$

$\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 2x}{3 - \sqrt{x-1}} = \frac{(x^2 - 2x)(3 + \sqrt{x-1})}{(3 - \sqrt{x-1})(3 + \sqrt{x-1})} =$
 $= \frac{x(x-2)(3 + \sqrt{x-1})}{9 - x + 1} = \frac{x(x-2)(3 + \sqrt{x-1})}{10 - x}$

c) $D_{f+h} = D_f \cap D_h = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$

$(f+h)(x) = f(x) + h(x) = x+2 + 3 - \sqrt{x-1} = x+5 - \sqrt{x-1}$

d) $D_{h \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_h\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [1, +\infty[\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1\}$

$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$

Então, $D_{h \circ f} = [-1, +\infty[$.

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x+2) = 3 - \sqrt{x+2-1} = 3 - \sqrt{x+1}$

37.1.

a) $(g-f)(3) = g(3) - f(3) = 3^2 - 2 \times 3 - (3+2) = 9 - 6 - 5 = -2$

38.1. Como o ponto de coordenadas $(0, -1)$ pertence ao gráfico da função afim f , sabe-se que $f(x) = mx - 1$.

Sendo $P(1, 1)$ um ponto pertencente ao gráfico da função f , tem-se:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow m \times 1 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

$$\text{Então, } f(x) = 2x - 1.$$

Como o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gráfico da função afim g , sabe-se que $g(x) = mx + 2$.

Sendo $P(1, 1)$ um ponto pertencente ao gráfico da função g , tem-se:

$$g(1) = 1 \Leftrightarrow m \times 1 + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{Então, } g(x) = -x + 2.$$

38.2.

$$\begin{aligned} \text{a) } h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 2) = 2(-x + 2) - 1 \\ &= -2x^2 + 4x + x - 2 = -2x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } D_h = D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x^2 + 5x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

Os zeros da função h são $\frac{1}{2}$ e 2 .

c)

$$\begin{aligned} (f \circ h)(x) < 0 &\Leftrightarrow f(h(x)) < 0 \Leftrightarrow 2(h(x)) - 1 < 0 \Leftrightarrow 2(-2x^2 + 5x - 2) - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x^2 + 10x - 4) - 1 < 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 10x - 5 < 0 \end{aligned}$$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$(2x-1)^2$	+	0	+	+
$-x+2$	+	+	0	-
$(f \circ h)(x)$	+	0	0	-

$$\text{Então, } (f \circ h)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[.$$

$$\textbf{39.1. } f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^3 + 3 = 0 \wedge x > 1) \vee (x^2 - 1 = 0 \wedge x \leq 1).$$

$$2x^3 + 3 = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{3}{2} \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \wedge x > 1 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

$$x^2 - 1 = 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$.

A função f tem dois zeros, -1 e 1 .

39.2.

a)

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \circ g)\left(\sqrt[3]{4}\right) &= f\left(g\left(\sqrt[3]{4}\right)\right) = f\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}}\right) = f\left(\sqrt[3]{2}\right) = f\left(\sqrt[3]{2}\right) \\ &= 2\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7 \end{aligned}$$

Pág. 84

40.1. Como a abscissa do ponto R é um zero da função, vamos determinar os zeros da função f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como a abscissa de R é positiva, conclui-se que a abscissa do ponto R é 2 .

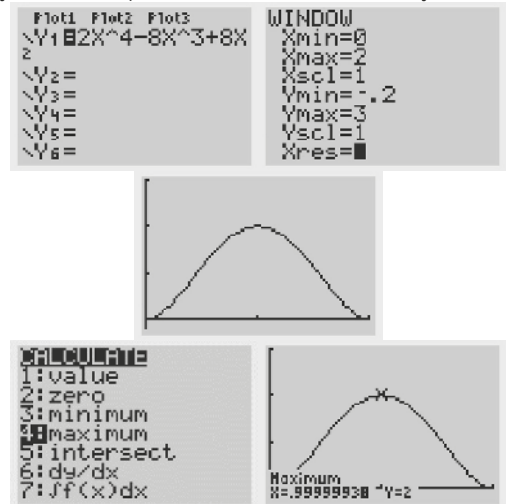
40.2. O ponto P pertence ao gráfico de f e tem abscissa $x \in]0, 2[$, então $P(x, f(x))$.

Sendo g a função que a cada $x \in]0, 2[$ faz corresponder a área do retângulo $[PQRS]$, então tem-se:

$$\begin{aligned} g(x) &= (2-x) \times f(x) = (2-x) \times (-2x^3 + 4x^2) = \\ &= -4x^3 + 8x^2 + 2x^4 - 4x^3 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2, \quad \forall x \in]0, 2[. \end{aligned}$$

40.3. Recorrendo à calculadora gráfica vamos obter um valor de x , aproximado às décimas, para o qual a área do retângulo $[PQRS]$ é máxima.

Para tal, basta representar a função na calculadora (tendo em atenção o domínio) e determinar o máximo da função.



O valor de x , aproximado às décimas, para o qual a área do retângulo $[PQRS]$ é máxima é $1,0$.

41.1. Como o ponto Q pertence ao gráfico de g , sabe-se que $Q(x, g(x))$.

No caso em que a ordenada do ponto Q é 5 , tem-se:

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + 2 = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Então, $Q(2, 5)$.

Sendo a reta PQ paralela ao eixo Oy , então P e Q têm a mesma abscissa.

Logo, $P(2, f(2))$.

$$\text{Como } f(2) = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ então } P(2, 2).$$

Designemos por P' o perímetro do retângulo $[MNPQ]$.

$$P' = 2 \times 2 + 2 \times (5 - 2) = 4 + 6 = 10.$$

41.2.

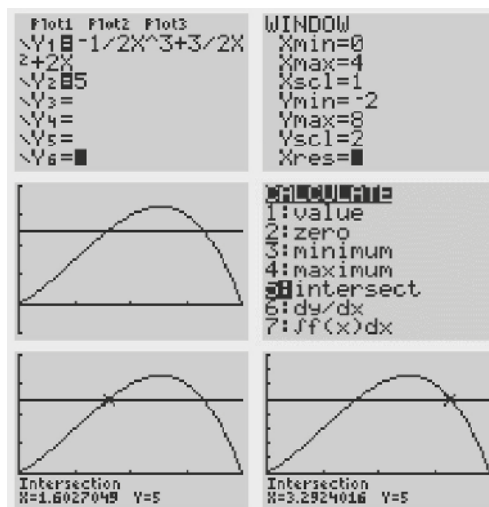
a) Como o ponto P , de abscissa a , se desloca sobre o gráfico de f , em que $a \in]0, 4[$, sabe-se que $P(a, f(a))$.

O ponto Q tem a mesma abscissa que o ponto P e pertence ao gráfico de g . Então, $Q(a, g(a))$.

$$\overline{PQ} = g(a) - f(a) = \frac{3}{2}a + 2 - \frac{a^2}{2}.$$

$$h(a) = a \times \left(-\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a + 2 \right) = -\frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + 2a, \quad \forall a \in]0, 4[.$$

b) Vamos recorrer à calculadora gráfica para obter o valor de a (abscissa de P), arredondada às centésimas, de modo que a área do retângulo $[MNPQ]$ seja 5.



A área do retângulo $[MNPQ]$ é igual a 5 quando a abscissa do ponto P , arredondada às centésimas, é 1,60 ou 3,29.

Pág. 86

$$1.1. A = \sum_{k=1}^{10} k$$

$$1.2. A = \sum_{k=3}^{12} (k-2)$$

$$1.3. A = \sum_{k=6}^{15} (k-5)$$

$$2.1. A+B = \sum_{i=2}^6 2i + \sum_{i=3}^7 (3i-1)$$

$$= (4+6+8+10+12) + (8+11+14+17+20)$$

$$40+70=110$$

$$2.2. C-B = \sum_{i=2}^8 (i^2-3i) - \sum_{i=3}^7 (3i-1)$$

$$= (-2+0+4+10+18+28+40) - (8+11+14+17+20)$$

$$= 98-70=28$$

$$3.1. 3+5+7+9+11+13 = \sum_{k=1}^6 (2k+1)$$

$$3.2. 1+3+5+7+9+11+13+15 = \sum_{k=1}^8 (2k-1)$$

$$3.3. \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$3.4. 10+15+20+25+30+35 = \sum_{k=1}^6 (5k+5)$$

$$3.5. \frac{1}{10} + 1 + 10 + 100 + 1000 = \sum_{k=1}^5 10^{k-2}$$

$$3.6. 2+\sqrt{7}+\sqrt{10}+\sqrt{13}+4=\sqrt{4}+\sqrt{7}+\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{16}$$

$$= \sum_{k=1}^5 \sqrt{3k+1}$$

$$4.1. 3n+1$$

$$4.2.$$

$$a) \sum_{n=1}^{11} (3n+1)$$

$$b) \sum_{n=1}^8 (3n+1)$$

$$c) \sum_{n=3}^{11} (3n+1)$$

Pág. 87

5.1

2	5	8	11	14	17	20	$= \sum_{i=1}^7 (3i-1)$
3	7	11	15	19	23	27	$= \sum_{i=1}^7 (4i-1)$
4	9	14	19	24	29	34	$= \sum_{i=1}^7 (5i-1)$
5	11	17	23	29	35	41	$= \sum_{i=1}^7 (6i-1)$
6	13	20	27	34	41	48	$= \sum_{i=1}^7 (7i-1)$
$= \sum_{i=1}^5 i+1$	$= \sum_{i=1}^5 (2i+3)$	$= \sum_{i=1}^5 (3i+5)$	$= \sum_{i=1}^5 (4i+7)$	$= \sum_{i=1}^5 (5i+9)$	$= \sum_{i=1}^5 (6i+11)$	$= \sum_{i=1}^5 (7i+13)$	

$$5.2. \sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=1}^5 (2i+3) + \sum_{i=1}^5 (3i+5) + \sum_{i=1}^5 (4i+7) + \sum_{i=1}^5 (5i+9) +$$

$$\sum_{i=1}^5 (6i+11) + \sum_{i=1}^5 (7i+13) =$$

$$= \sum_{i=1}^5 (i+2i+3+3i+5+4i+7+5i+9+6i+11+7i+13)$$

$$= \sum_{i=1}^5 (27i+49)$$

$$5.3. \sum_{i=1}^7 (3i-1) + \sum_{i=1}^7 (4i-1) + \sum_{i=1}^7 (5i-1) + \sum_{i=1}^7 (6i-1)$$

$$+ \sum_{i=1}^7 (7i-1) =$$

$$= \sum_{i=1}^7 (3i-1+4i-1+5i-1+6i-1+7i-1)$$

$$= \sum_{i=1}^7 (25i-5)$$

$$5.4. \sum_{i=1}^5 (27i+49) = 27 \sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=1}^5 49 = 27 \times (1+2+3+4+5) + 5 \times 49$$

$$= 27 \times 15 + 5 \times 49$$

$$= 650$$

$$6.1. \sum_{i=3}^{29} (i^2-i) = \sum_{i=1}^{29} (i^2-i) - \sum_{i=1}^2 (i^2-i) + \sum_{i=1}^{30} (i^2-i) = k-2+870$$

$$= k - (0+2) + (30^2-30) = k+868$$

$$6.2. \sum_{i=1}^{28} (i^2 - i) = \sum_{i=1}^{30} (i^2 - i) - \sum_{i=29}^{30} (i^2 - i) = k - (29^2 - 29 + 30^2 - 30) \\ = k - 1682$$

$$6.3. \sum_{i=1}^{14} (i^2 - i) + \sum_{i=16}^{30} (i^2 - i) \\ \sum_{i=1}^{14} (i^2 - i) + \sum_{i=16}^{30} (i^2 - i) = \sum_{i=1}^{14} (i^2 - i) + \sum_{i=15}^{15} (i^2 - i) + \sum_{i=16}^{30} (i^2 - i) - \sum_{i=15}^{15} (i^2 - i) \\ = \sum_{i=1}^{30} (i^2 - i) - \sum_{i=15}^{15} (i^2 - i) = k - (15^2 - 15) \\ = k - 210$$

$$7.1. \sum_{k=1}^{10} 3 = 10 \times 3 = 30$$

$$7.2. \sum_{k=2}^{49} \left(\frac{5}{6}\right) = (49 - 2 + 1) \times \frac{5}{6} = 48 \times \frac{5}{6} = 40$$

$$7.3. \sum_{k=12}^{25} \left(-\frac{2}{17}\right) = (25 - 12 + 1) \times \left(-\frac{2}{17}\right) = 14 \times \left(-\frac{2}{17}\right) = -4$$

$$7.4. \sum_{k=50}^{1000} (-1)^k$$

Repara que:

$$(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ par} \\ -1 & \text{se } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

1.º processo

A soma de duas quaisquer parcelas consecutivas é zero.

A 1.ª parcela é 1 e a 2.ª é -1. Se o número de parcelas é para o valor do somatório é zero.

Se o número de parcelas é ímpar o valor do somatório é 1.

Como o número de parcelas é dado por $1000 - 50 + 1$, temos 951 parcelas (número ímpar), então o valor do somatório é 1.

2.º processo

Quantos números pares há de 50 a 1000?

O número de números inteiros de 50 a 1000 é dado por $(1000 - 50 + 1) = 951$ que é igual ao número de parcelas do

$$\text{somatório } \sum_{k=50}^{1000} (-1)^k.$$

Destes 951 números inteiros quantos são pares?

Se pensarmos numa sequência de termo geral $2n$, podemos determinar a ordem do termo igual a 50 e do termo igual a 1000.

$$2n = 50 \Leftrightarrow n = 25 \quad \text{e} \quad 2n = 1000 \Leftrightarrow n = 500$$

O número de termos do 25.º ao 500.º é dado por $(500 - 25 + 1) = 476$

Assim, no somatório $\sum_{k=50}^{1000} (-1)^k$ há 476 parcelas iguais a 1 e as

restantes, ou seja, $(951 - 476 = 475)$ iguais a -1.

$$\text{Assim, } \sum_{k=50}^{1000} (-1)^k = 476 \times 1 + 475 \times (-1) = 1$$

$$8.1. \sum_{i=1}^n (2x_i + 3) = 2 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 3 = 2A + 3n$$

$$8.2. \sum_{i=1}^n (3x_i - 5) = 3 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 5 = 3A - 5n$$

$$8.3. \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - 2}{3}\right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 2\right) = \frac{1}{3}(A - 2n) = \frac{A - 2n}{3}$$

Pág. 88

9.

$$a) \sum_{i=1}^{20} 2i = 2 \sum_{i=1}^{20} i = 2 \times \left(\frac{20^2 + 20}{2}\right) = 420$$

$$b) \sum_{i=1}^{15} (3i - 1) = 3 \sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1}^{15} 1 = 3 \times \left(\frac{15^2 + 15}{2}\right) - 15 = 3 \times 120 - 15 = 345$$

$$c) \sum_{i=15}^{50} (5 - i) = \sum_{i=15}^{50} 5 - \sum_{i=15}^{50} i = (50 - 15 + 1) \times 5 - \left(\sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{14} i\right) \\ = 180 - \left(\frac{50^2 + 50}{2} - \frac{14^2 + 14}{2}\right) = 180 - (1275 - 105) = -990$$

9.2.

$$a) \sum_{i=1}^n 5i = 180 \Leftrightarrow 5 \sum_{i=1}^n i = 180 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n i = 36 \Leftrightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 36$$

$$n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 17}{2} \Leftrightarrow n = -9 \vee n = 8$$

O valor de n é 8.

$$b) \sum_{i=1}^n (2i - 3) = 120 = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 3 = 120 \Leftrightarrow 2 \times \frac{n^2 + n}{2} - 3n - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 120 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 22}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -10 \quad \text{O valor de } n \text{ é } 12.$$

$$10.1. \sum_{i=1}^{12} 3i + \sum_{i=13}^{20} 3i = \sum_{i=1}^{20} 3i$$

$$10.2. 2 + \sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$\text{Repara que } 2 = \sum_{i=1}^{10} k \Leftrightarrow 2 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$\text{Assim, } 2 + \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{5} + \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{5} + x_i\right)$$

$$10.3. \sum_{i=1}^8 2i + 3 \sum_{i=1}^8 (2 - i) = \sum_{i=1}^8 2i + \sum_{i=1}^8 (6 - 3i) = \sum_{i=1}^8 (6 - i)$$

$$11.1. \sum_{i=1}^{30} (2y_i - 1) = 20 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{30} y_i - \sum_{i=1}^{30} 1 = 20 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{30} y_i = 20 + 30$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30} y_i = 25$$

11.2.

$$a) \sum_{i=1}^{30} (2x_i - 3y_i) = 2 \sum_{i=1}^{30} x_i - 3 \sum_{i=1}^{30} y_i = 2 \times 35 - 3 \times 25 = -5$$

$$b) \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{x_i - y_i}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{30} x_i - \sum_{i=1}^{30} y_i\right) = \frac{1}{2}(35 - 25) = 5$$

$$12.1. \sum_{i=1}^{50} (x_i^2 - 2x_i) = \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{50} x_i = b - 2a$$

12.2.

$$\sum_{i=1}^{50} (1+x_i)^2 = \sum_{i=1}^{50} (1+2x_i+x_i^2) = \sum_{i=1}^{50} 1 + 2 \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 50 + 2a + b$$

12.3.

$$\sum_{i=1}^{50} (3-x_i)^2 = \sum_{i=1}^{50} (9-6x_i+x_i^2) = \sum_{i=1}^{50} 9 - 6 \sum_{i=1}^{50} x_i + \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 450 - 6a + b$$

12.4.

$$\sum_{i=1}^{50} [(2x_i-1)(2x_i+1)] = \sum_{i=1}^{50} (4x_i^2-1) = 4 \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - \sum_{i=1}^{50} 1 = 4b - 50$$

Pág. 89**13.1.**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{5+3+6+4+2+1+5+3}{8} = 3,625$$

$$\bar{x} = 3,625$$

13.2.

Seja k a pontuação acrescentada à amostra $\tilde{x}$.

$$\sum_{i=1}^9 y_i = k + \sum_{i=1}^8 x_i = k + 29$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^9 y_i}{9} = \frac{29+k}{9}$$

$$\bar{y} = 4 \Leftrightarrow \frac{29+k}{9} = 4 \Leftrightarrow k = 7.$$

Conclui-se que é impossível a média da amostra $\tilde{y}$ ser 4, pois o maior valor que k pode tomar é 6.

14.1.

A dimensão da amostra é dada pela soma das frequências absolutas:

$$12 + 23 + 8 + 5 + 2 = 50.$$

A dimensão da amostra é 50.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^5 n_j \tilde{x}_j}{50} = \frac{12 \times 1 + 23 \times 2 + 8 \times 3 + 5 \times 4 + 2 \times 5}{50} = \frac{112}{50} = 2,24$$

$$\bar{x} = 2,24$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = 5. \text{ Daqui resulta que } \sum_{i=1}^7 x_i = 35.$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^7 y_i}{7} = \frac{\sum_{i=1}^7 2x_i}{7} = \frac{2 \sum_{i=1}^7 x_i}{7} = \frac{2 \times 35}{7} = 10$$

$$\bar{y} = 10$$

15.2.

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^7 z_i}{7} = \frac{\sum_{i=1}^7 (4x_i - 6)}{7} = \frac{4 \sum_{i=1}^7 x_i - \sum_{i=1}^7 6}{7} = \frac{4 \times 35 - 7 \times 6}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

$$\bar{z} = 14$$

16.1. Seja $\tilde{y}$ a amostra dos preços com IVA seguidos de 10 € de desconto.

$$\tilde{y} = 1,23\tilde{x} - 10$$

$$\bar{\tilde{y}} = 1,23\bar{x} - 10$$

$$\bar{\tilde{y}} = 1,23 \times 800 - 10 = 974$$

$$\bar{\tilde{y}} = 974 \text{ €}$$

16.2.

Seja $\tilde{z}$ a amostra dos preços com 10 € de desconto seguido do IVA.

$$\tilde{z} = 1,23(\tilde{x} - 10) = 1,23\tilde{x} - 12,3$$

$$\bar{\tilde{z}} = 1,23 \times \bar{\tilde{x}} - 12,3 = 1,23 \times 800 - 12,3 = 971,7$$

$$\bar{\tilde{z}} = 971,7 \text{ €}$$

Pág. 90**17.1.**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^5 n_j \tilde{x}_j}{\sum_{j=1}^5 n_j} = \frac{2 \times 10 + 4 \times 12 + 9 \times 15 + 5 \times 18 + 5 \times 20}{2 + 4 + 9 + 5 + 5} = \frac{393}{25} = 15,72$$

$$\bar{x} = 15,72 \text{ camadas.}$$

Há 10 unidades estatísticas com valor superior à média.

17.2.

a)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^5 n_j \tilde{y}_j}{\sum_{j=1}^5 n_j} = \frac{6 \times 15 + 5 \times 18 + 12 \times 20 + 4 \times 22 + 3 \times 25}{6 + 5 + 12 + 4 + 3} = \frac{583}{30}$$

$$\bar{y} \approx 19,43 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \bar{z} = \frac{\sum_{j=1}^5 n_j \tilde{z}_j}{\sum_{j=1}^5 n_j} = \frac{1 \times 12 + 4 \times 15 + 5 \times 18 + 8 \times 20 + 2 \times 25}{1 + 4 + 5 + 8 + 2} = \frac{372}{20} = 18,6$$

$$\bar{z} \approx 18,6 \text{ cm}$$

$$\text{c) } \bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^5 n_j \tilde{y}_j + \sum_{j=1}^5 n_j \tilde{z}_j}{30 + 20} = \frac{583 + 372}{50} = \frac{955}{50} = 19,1$$

$$\bar{w} = 19,1 \text{ cm}$$

18.1.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{25 + 30 + 20 + 22 + 18}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

$$\bar{x} = 23 \text{ min}$$

Ordenação da amostra: 18, 20, 22, 25, 30

$$\text{18.2. } \tilde{y} = (18, 20, 22, 25, 30 + k)$$

$$\bar{\tilde{y}} > x_{(4)} \Leftrightarrow \frac{18 + 20 + 22 + 25 + 30 + k}{5} > 25 \Leftrightarrow 115 + k > 125 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k > 10.$$

O menor valor inteiro que satisfaz a condição é 11.

18.3.

$$y = (18 + k, 20, 22, 25, 30)$$

$$\bar{z} < x_{(2)} \Leftrightarrow \frac{18 + k + 20 + 22 + 25 + 30}{5} < 20 \Leftrightarrow 115 + k < 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k < -15.$$

O maior valor inteiro que satisfaz a condição é -16 .

Pág. 91**19.1.** Amplitude: $6 - 2 = 4$

A amplitude é 4

$$\mathbf{19.2.} \quad \bar{x} = \frac{2 + 6 + 3 + 5 + 6 + 2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$

19.3.

$$SS_x = \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + (-2)^2 = 18$$

20.1. Sabe-se que $\sum_{i=1}^5 d_i = 0$.

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 0 \Leftrightarrow 3 + (-2) + d_3 + (-5) + 2 = 0 \Leftrightarrow d_3 = 2$$

$$d_3 = 2$$

$$\mathbf{20.2.} \quad SS_y = \sum_{i=1}^5 d_i^2 = 3^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-5)^2 + 2^2 = 46$$

$$\mathbf{20.3.} \quad y_1 = d_1 + \bar{y} = 3 + 12 = 15$$

$$y_2 = d_2 + \bar{y} = -2 + 12 = 10$$

$$y_3 = d_3 + \bar{y} = 2 + 12 = 14$$

$$y_4 = d_4 + \bar{y} = -5 + 12 = 7$$

$$y_5 = d_5 + \bar{y} = 2 + 12 = 14$$

$$y = (15, 10, 14, 7, 14)$$

21.1**a)** $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 4 + 3 + 2 + 3 + 6 + 5}{8} = \frac{30}{8} = 3,75$$

$$\mathbf{b)} \quad SS_x = \sum_{j=1}^5 n_j (\tilde{x}_j - 3,75)^2$$

$$= 2(2 - 3,75)^2 + 2(3 - 3,75)^2 + (4 - 3,75)^2 + 2(5 - 3,75)^2 + (6 - 3,75)^2$$

$$SS_x = 15,5$$

21.2. Sabe-se que $\bar{y} = \bar{x} + 8$.

Repara que $y_i = x_i + 8, \forall i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Para a amostra y , tem-se que

$$d_i = y_i - \bar{y} = x_i + 8 - \bar{y} = x_i + 8 - (\bar{x} + 8) = x_i - \bar{x}$$

Como $y_i - \bar{y} = x_i - \bar{x}$, conclui-se que $SS_y = SS_x$.

21.3. Sabe-se que $\bar{z} = 2\bar{x}$

$$\text{Repara que } z_i - \bar{z} = 2x_i - 2\bar{x} = 2(x_i - \bar{x})$$

$$SS_z = \sum_{i=1}^8 (z_i - \bar{z})^2 = \sum_{i=1}^8 (2x_i - 2\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^8 4(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= 4 \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 4SS_x$$

$$SS_z = 4SS_x$$

22.1. $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{1}{60}x$$

$$\bar{y} = \frac{1}{60} \times \bar{x} = \frac{1}{60} \times 31,25 = \frac{25}{48}$$

$$\bar{y} \approx 0,52 \text{ min}$$

$$\mathbf{22.2.} \quad SS_y = \left(\frac{1}{60}\right)^2 \times SS_x = \frac{12052}{3600}$$

$$SS_y = \frac{12052}{3600} \text{ s}^2$$

Pág. 92**23.1.****a)**

$$\bar{x} = \frac{3 \times 0 + 5 \times 4 + 5 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 8}{3 + 5 + 5 + 3 + 4} = \frac{98}{20} = 4,9$$

$$\bar{x} = 4,9 \text{ horas}$$

$$\mathbf{b)} \quad SS_x = \sum_{j=1}^5 n_j \tilde{x}_j^2 - 20 \times 4,9^2 = 3 \times 0^2 + 5 \times 4^2 + 5 \times 5^2 +$$

$$+ 3 \times 7^2 + 4 \times 8^2 - 20 \times 4,9^2 = 608 - 480,2 = 127,8$$

$$SS_x = 127,8$$

23.2.

Número de dias com o número de horas de sol superior à média:

$$5 + 5 + 3 + 4 = 17$$

$$\frac{17}{20} = 0,85 \quad (85\%)$$

$$85\%$$

$$\mathbf{24.1.} \quad \bar{x} = \frac{250 + 310 + 270 + 285 + 300}{5} = \frac{1415}{5} = 283$$

$$\bar{x} = 283 \text{ €}$$

24.2.

$$SS_x = 250^2 + 310^2 + 270^2 + 285^2 + 300^2 - 5 \times 283^2 = 2280$$

$$SS_x = 2280$$

24.3.

$$\text{Seja } \bar{y} = (1 - 0,12)\bar{x} = 0,88\bar{x}$$

$$\bar{y} = 0,88\bar{x} = 0,88 \times 283 = 249,04$$

$$\bar{y} = 249,04 \text{ €}$$

$$SS_y = 0,88^2 SS_x = 0,88^2 \times 2280 = 1765,632$$

$$SS_y = 1765,632$$

24.4.

$$\text{Seja } \bar{z} = (1 + 0,05) \bar{x} = 1,05 \bar{x}$$

$$\bar{z} = 1,05 \bar{x} = 1,05 \times 283 = 297,15$$

$$\bar{z} = 297,15 \text{ €}$$

$$SS_z = 1,05^2 SS_x = 1,05^2 \times 2280 = 2513,7$$

$$SS_z = 2513,7$$

25.1.

a) amplitude;

$$\text{Amplitude: } 96 - 32 = 64$$

b) média;

Pode começar-se por agrupar os dados.

$\tilde{x}_i$	n_i
32	2
48	3
64	2
80	2
96	1

$$\bar{x} = \frac{2 \times 32 + 3 \times 48 + 2 \times 64 + 2 \times 80 + 96}{2 + 3 + 2 + 2 + 1} = \frac{592}{10} = 59,2$$

$$\bar{x} = 59,2 \text{ páginas.}$$

c)

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{10 - 1} = \frac{2 \times 32^2 + 3 \times 48^2 + 2 \times 64^2 + 2 \times 80^2 + 96^2 - 10 \times 59,2^2}{9}$$

$$s_x^2 = \frac{4121,6}{9}$$

$$s_x^2 = 457,96$$

d)

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{4121,6}{9}}$$

$$s_x \approx 21,40 \text{ páginas}$$

25.2.

a) Amplitude: $96 - 32 = 64$

b)

$\tilde{y}_i$	n_i
32	2
48	1
64	2
80	1
96	2

$$\bar{x} = \frac{2 \times 32 + 48 + 2 \times 64 + 80 + 2 \times 96}{2 + 1 + 2 + 1 + 2} = \frac{512}{8} = 64$$

$$\bar{x} = 64 \text{ páginas}$$

c)

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{8 - 1} = \frac{2 \times 32^2 + 48^2 + 2 \times 64^2 + 80^2 + 2 \times 96^2 - 8 \times 64^2}{7}$$

$$s_y^2 = \frac{4608}{7}$$

$$s_y^2 \approx 658,29$$

d)

$$s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{\frac{4608}{7}}$$

$$s_y \approx 25,66 \text{ páginas}$$

25.3

Na amostra y há maior dispersão de dados, atendendo a que o desvio-padrão é maior.

Pág. 93

26.1.

$\tilde{x}_i$	n_i
7	1
8	4
10	3
11	3
12	2
16	4
17	2
20	1

26.2. Dimensão da amostra: 20

$$\text{Mediana: } \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{11 + 11}{2} = 11$$

$$\bar{x} = \frac{7 + 4 \times 8 + 3 \times 10 + 3 \times 11 + 2 \times 12 + 4 \times 16 + 2 \times 17 + 20}{1 + 4 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 1} = \frac{244}{20} = 12,2$$

O desvio em relação à média da classificação obtida pelo Rui foi de $11 - 12,2 = -1,2$

Desvio: $-1,2$

26.3.

$$SS_x = 7^2 + 4 \times 8^2 + 3 \times 10^2 + 3 \times 11^2 + 2 \times 12^2 + 4 \times 16^2 + 2 \times 17^2 + 20^2 - 20 \times 12,2^2$$

$$SS_x = 281,2$$

$$s_x = \sqrt{\frac{281,2}{19}}$$

$$s_x = 3,847$$

$$26.4. \left[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x \right] = \left[12,2 - \sqrt{\frac{281,2}{19}}, 12,2 + \sqrt{\frac{281,2}{19}} \right]$$

$$\bar{x} - s_x \approx 8,353$$

$$\bar{x} + s_x \approx 16,047$$

Há 12 classificações cujos valores pertencem ao intervalo

$$\left[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x \right] \text{ o que corresponde a } 60\% \left(\frac{12}{20} = 0,6 \right)$$

27.1.

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 12 + 7 + 8 + 23 + 3 + 20}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\bar{x} = 10 \text{ vendas.}$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 6 + 15 + 10 + 9 + 8 + 10 + 12}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\bar{y} = 10 \text{ vendas.}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 10 \text{ vendas.}$$

$$27.2. SS_x = 2^2 + 5^2 + 12^2 + 7^2 + 8^2 + 23^2 + 3^2 + 20^2 - 8 \times 10^2 = 424$$

$$s_x = \sqrt{\frac{424}{7}}$$

$$s_x \approx 7,78$$

$$SS_y = 10^2 + 6^2 + 15^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 - 8 \times 10^2 = 50$$

$$s_y = \sqrt{\frac{50}{7}}$$

$$s_y \approx 2,67$$

$s_x > s_y$. Logo a dispersão é maior na amostra x

$$27.3. \bar{x} - s_x \approx 2,22 \text{ e } \bar{x} + s_x \approx 17,78$$

Há 5 dias em que o número de vendas pertence ao intervalo

$$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x], \text{ o que corresponde a } 62,5\% \left(\frac{5}{8} = 0,625 \right)$$

$$27.4. \bar{y} - s_y \approx 7,33 \text{ e } \bar{y} + s_y \approx 12,67$$

Há 7 dias em que o número de vendas pertence ao intervalo

$$[\bar{y} - s_y, \bar{y} + s_y], \text{ o que corresponde a } 87,5\% \left(\frac{7}{8} = 0,875 \right)$$

28.

$$SS_x = \sum_{i=1}^{11} x_i^2 - 11 \times 5^2 = 327 - 11 \times 25 = 52$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{11-1}} = \sqrt{\frac{52}{10}}$$

$$s_x \approx 2,28$$

29.1. Amostra ordenada: (2,3,4,5,5,7,8,9)

29.2.

a) P_{40}

$$\frac{40 \times 8}{100} = 3,2$$

$$P_{40} = x_{(4)} = 5$$

$$P_{40} = 5$$

b) P_{75}

$$\frac{75 \times 8}{100} = 6$$

$$P_{75} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{7+8}{2} = 7,5$$

$$P_{75} = 7,5$$

29.3. Começa-se por determinar o percentil 70.

$$\frac{70 \times 8}{100} = 5,6$$

$$P_{70} = x_{(6)} = 7$$

Sabe-se que 70% dos dados têm valor menor ou igual a 7. E no máximo 30% dos dados têm valor superior a 7.

O menor valor pedido é 8.

Pág. 94

30.1. Amostra ordenada:

(40,50,55,60,60,65,70,75,80,80,80,85,90,95,100)

$$30.2. \frac{40 \times 15}{100} = 6$$

$$P_{40} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{65+70}{2} = 67,5$$

$$P_{40} = 67,5$$

$$\frac{55 \times 15}{100} = 8,25$$

$$P_{55} = x_{(9)} = 80$$

30.3. $P_k = 75$

$$x_{(8)} = 75$$

Se $\frac{k \times 15}{100}$ representar um número inteiro e o percentil de ordem

k ser 75, deve-se ter:

$$\frac{k \times 15}{100} = 7 \Leftrightarrow k = \frac{700}{15} \notin \mathbb{N}. \text{ Esta situação é impossível pois}$$

$$k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 100$$

Para que o percentil de ordem k seja igual a $x_{(8)}$, então tem-se

$$7 < \frac{k \times 15}{100} < 8 \Leftrightarrow \frac{700}{15} < k < \frac{800}{15}$$

Como $k \in \mathbb{N}$, tem-se $k \in \{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$

Ao dado 75 corresponde os percentis de ordem k , em que

$$k \in \{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$$

31.1. O número de portagens é dado por:

$$1+3+2+3+4+5+2=20$$

20 portagens.

31.2. Valor pago pelo automobilista:

$$0,20 + 3 \times 0,60 + 2 \times 0,65 + 3 \times 0,85 + 4 \times 1,25 + 5 \times 1,40 + 2 \times 1,60 =$$

$$= 21,05$$

Valor pago: 21,05 €.

$$31.3. \bar{x} = \frac{21,05}{20} = 1,0525$$

$$\bar{x} = 1,0525 \text{ €}$$

31.4.

```
1-Var Stats
x̄=1.0525
Σx=21.05
Σx²=25.3025
Sx=.4070028449
σx=.3966973027
↓n=20
```

$$31.5. \frac{20 \times 20}{100} = 4$$

$$P_{20} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{0,60 + 0,65}{2} = 0,625$$

$$P_{20} = 0,625 \text{ €}$$

31.6.

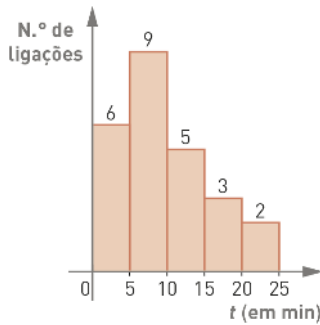
$$P_{45} = ?$$

$$\frac{45 \times 20}{100} = 9$$

$$P_{45} = \frac{X_{(9)} + X_{(10)}}{2} = \frac{0,85 + 1,25}{2} = 1,05$$

$$P_{45} = 1,05 \text{ €}$$

Das portagens com valor superior a 1,05 € o valor mais baixo é 1,25 €.

32.1.

$$\mathbf{32.2.} \text{ Área do histograma: } 5 \times (6 + 9 + 5 + 3 + 2) = 125$$

$$\mathbf{32.3.} \quad P_{40} = x$$

$$40\% \text{ da área total: } 0,4 \times 125 = 50$$

$$5 \times 6 + (x - 10) \times 9 = 50 \Leftrightarrow 9x = 110 \Leftrightarrow x = \frac{110}{9}$$

$$P_{40} = \frac{110}{9}$$

$$P_{85} = y$$

$$85\% \text{ da área do histograma: } 106,25$$

$$5 \times 6 + 5 \times 9 + 5 \times 5 + (y - 15) \times 3 = 106,25$$

$$\Leftrightarrow 3y = 106,25 - 55 \Leftrightarrow y = \frac{51,25}{3}$$

$$P_{85} = \frac{51,25}{3} = \frac{205}{12}$$

$$P_{85} = \frac{205}{12}$$