

Teste de Autoavaliação 1

1.1.

- a) $a \wedge \sim c$ b) $\sim c \wedge \sim b$
 c) $a \Rightarrow \sim c$ d) $b \Leftrightarrow a$

1.2. Se $(a \Rightarrow (\sim b)) \vee (c \wedge a)$ é falsa, então a proposição $a \Rightarrow (\sim b)$ é falsa e $c \wedge a$ é também falsa.

Como $a \Rightarrow (\sim b)$ é falsa, então a é verdadeira e $\sim b$ é falsa, ou seja b é verdadeira.

Como $c \wedge a$ é falsa e a é verdadeira então c é falsa.

Conclui-se assim que a é verdadeira, b é verdadeira e c é falsa.

2.1. $p \Rightarrow \sim q$

2.2. Nem o Pedro está inscrito no 10.º ano nem pratica desporto.

2.3. Se $[(p \wedge q) \vee \sim p] \wedge p$ é verdadeira, então $[(p \wedge q) \vee \sim p]$ é uma proposição verdadeira e p também é verdadeira.

Sendo p verdadeira, $\sim p$ é falsa.

Como $[(p \wedge q) \vee \sim p]$ é verdadeira e $\sim p$ é falsa, conclui-se que $p \wedge q$ é verdadeira e então q é verdadeira, o que significa que o Pedro pratica desporto.

3.1. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (\sim q) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee (\sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim q) \text{ como se pretendia mostrar.}$$

3.2. Se q tem valor lógico falso, $\sim q$ é verdadeira e, por outro lado, $p \wedge q$ é falsa.

Como $p \wedge q$ é falsa, $(p \wedge q) \Rightarrow r$ é verdadeira e então

$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow \sim q$ é verdadeira.

4.1.

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)$	$p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p) \wedge q$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

4.2. $[p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)] \wedge q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \vee p)] \wedge q$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee p) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow (V \vee q) \wedge q \Leftrightarrow q$$

5.1. $a \Rightarrow (a \vee b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim a \vee (a \vee b)$$

$$\Leftrightarrow V \vee b \Leftrightarrow V$$

5.2. $\sim[\sim((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim[(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)]$$

$$\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q)$$

$$\Leftrightarrow V \vee V \Leftrightarrow V$$

6. Se $(\sim a) \Rightarrow (\sim b)$ é uma proposição falsa, então $(\sim a)$ é verdadeira e $(\sim b)$ é falsa, ou seja, a é falsa e b é verdadeira.

Assim sendo, $(a \Leftrightarrow b)$ é falsa e então $[(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (\sim a)]$ é verdadeira.

Como $(\sim a) \vee (\sim b)$ é verdadeira, a proposição

$[(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (\sim a)] \wedge [(\sim a) \vee (\sim b)]$ é verdadeira.

7. $\sim[(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee q)] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge \sim(p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow F \text{ (contradição)}$$

8.1. $[p \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee q$$

$$\Leftrightarrow [p \wedge \sim(p \wedge q)] \vee q$$

$$\Leftrightarrow [p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)] \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \vee q$$

8.2. $p \vee (\sim q \wedge p) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p \wedge V) \vee (\sim q \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (V \vee \sim q) \Leftrightarrow p$$

Teste de Autoavaliação 2

1.1. $\forall x \in \mathbb{Z}^-, x^2 \geq 1$ Verdadeiro

1.2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} > 0$ Falso ($\sqrt{0^2} = 0$)

1.3. $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, (\sqrt{x})^2 \geq 0$ Verdadeiro

1.4. $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 - 16 = 0$ Verdadeiro ($n = 4$)

1.5. $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 - 15 = 0$ Falso

1.6. $\exists x \in \mathbb{Z}: \sqrt{-\frac{x}{2}} \in \mathbb{Z}$ Verdadeiro ($x = -2$)

$$2.1. x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$\Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow x > 2$$

Como $3 > 2$, pode afirmar-se que $\exists x \in \mathbb{R}: p(x) \wedge q(x)$ é verdadeira.

A condição $p(x) \wedge q(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

2.2.

a) Por exemplo $r(x): x - 3 = 0$

b) Por exemplo $r(x): x < 0$

3.1.

a) $\exists x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)$

$$18 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -18 \Leftrightarrow x \geq 9 \Leftrightarrow x \in [9, +\infty[$$

$$|x| < 5 \Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -5 \Leftrightarrow x \in]-5, 5[$$

$\exists x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)$ tem valor lógico falso.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sim c(x)$

$$\Leftrightarrow \sim (x^2 + 7 < 0 \wedge x < 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7 \geq 0 \vee x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq -7 \vee x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

O valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{R}, \sim c(x)$ é verdadeiro.

3.2.

a) $A = [9, +\infty[; B =]-5, 5[; C = \{ \}$

$$B \cap \bar{C} =]-5, 5[\cap \mathbb{R} =]-5, 5[$$

b) $B \cap \bar{A} =]-5, 5[\cap]-\infty, 9[=]-5, 5[$

4.1.

a) $A = [-2, 3[; B =]-\infty, \frac{7}{2}[; C =]-5, +\infty[$

$$C \setminus A =]-5, -2[\cup [3, +\infty[;$$

b) $B \setminus C =]-\infty, -5[;$

$$c) A \cup \bar{B} = [-2, 3[\cup \left[\frac{7}{2}, +\infty[\right].$$

4.2.

a) $D = \{x \in \mathbb{Z}: -2 \leq x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$E = \{x \in \mathbb{Z}: x \in B \wedge x \in C\} = \left\{x \in \mathbb{Z}: x \in \left[-5, \frac{7}{2}\right]\right\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

b) Diagrama III pois $D \subset E$, ou seja, todos os elementos de D também pertencem a E .

5.1. $\forall x \in U, p(x)$. Falso. Notar que $5 \in U$ e $-5 \notin U$.

5.2. $\forall x \in U, q(x)$. Verdadeiro.

$6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$. A condição $x < 6$ é universal em U .

5.3. $\exists x \in U, r(x)$. Verdadeiro.

5.4. $\forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow r(x)$. Verdadeiro.

Notar que o conjunto-solução de $p(x)$ e de $r(x)$ é $\{-3, -2, 2, 3\}$.

5.5. $\forall x \in U, q(x) \Rightarrow p(x)$. Falso. Por exemplo, para $x = 5$ tem-se $6 - 5 > 0$ e no entanto $-5 \notin U$. Isto significa que -5 satisfaz $q(x)$ mas não satisfaz $p(x)$.

Pág. 7

Teste de Autoavaliação 3

$$1.1. \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{10}$$

1.2. Como $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$, tem-se:

$$\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

1.3. Como $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{1}{3}}} = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)^{-\frac{1}{3}}$, tem-se:

$$\sqrt[5]{2} = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

1.4. Como $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \times 6} = \sqrt[3]{48}$, tem-se $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{12}$

$$\text{Então, } \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[3]{4}$$

$$2.1. \sqrt[4]{259200} = \sqrt[4]{2^7 \times 3^4 \times 5^2} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^3 \times 3^4 \times 5^2} = 2 \times 3 \times \sqrt[4]{2^3 \times 5^2} = 6 \times \sqrt[4]{2^3 \times 5^2} = 6 \times \sqrt[4]{200}$$

Daqui se conclui que $n = 200$

2.2. Como $\sqrt[3]{259200} = k\sqrt[3]{150}$, então,

$$k = \frac{\sqrt[3]{259200}}{\sqrt[3]{150}} = \sqrt[3]{\frac{2^7 \times 3^4 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5^2}} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 12$$

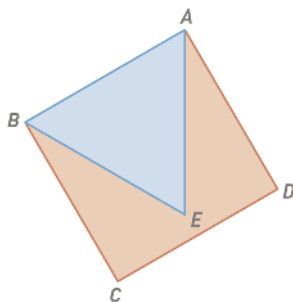
Conclui-se que $k = 12$

$$3.1. \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{\sqrt[6]{10}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 5}}}{\sqrt[6]{2 \times 5}} = \frac{\sqrt[6]{2^2 \times 5}}{\sqrt[6]{2 \times 5}} = \sqrt[6]{\frac{2^2 \times 5}{2 \times 5}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\begin{aligned}
 3.2. \quad & \frac{1 + (2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{18} - 1)^2}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} = \\
 & = \frac{1 + 12 + 4\sqrt{18} + 6 - (18 - 2\sqrt{18} + 1)}{7 - 1} = \\
 & = \frac{19 + 4\sqrt{18} - 18 + 2\sqrt{18} - 1}{6} = \frac{6\sqrt{18}}{6} = \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 3x - \sqrt{2}x = 1 \Leftrightarrow (3 - \sqrt{2})x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{9 - 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}
 \end{aligned}$$

5.1. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.



Se a área do quadrado é 24, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = 24 + 24 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 48.$$

Portanto $\overline{AC} = \sqrt{2^4 \times 3} = 4\sqrt{3}$, como se pretendia mostrar.

5.2. Se a área do quadrado é 24, tem-se $\overline{AB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

O perímetro do triângulo [ABE] é dado por $3\overline{AB} = 3 \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

5.3. Seja h a altura do triângulo. Pelo Teorema de Pitágoras,

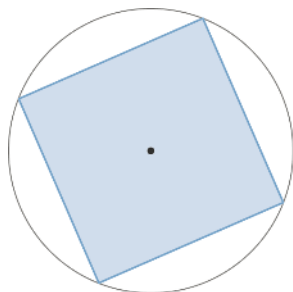
$$(2\sqrt{6})^2 = h^2 + (\sqrt{6})^2.$$

Então, $h^2 = 18$, isto é, $h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

A área do triângulo [ABE] é dada por

$$\frac{2\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2^2 \times 3} = 6\sqrt{3}.$$

6.1. Seja r o raio do círculo e a a medida do lado do quadrado.



Como $\pi r^2 = A$, então $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

$$a^2 + a^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 4 \frac{A}{\pi} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2A}{\pi}. \text{ Então, } a = \sqrt{\frac{2A}{\pi}}.$$

O perímetro do quadrado é dado por $4a$, ou seja $4 \times \sqrt{\frac{2A}{\pi}}$.

6.2. Se $A = 3\pi$, então $a = \sqrt{\frac{6\pi}{\pi}} = \sqrt{6}$

A medida do lado do quadrado é $\sqrt{6}$.

Pág. 9

Teste de Autoavaliação 4

1.1. $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

1.2. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

2. $27^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$

3.1. $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

$b = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{16}$

Conclui-se que $b > a$.

3.2. $a \times b = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt{8} \times \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{8 \times 16} = \sqrt[6]{2^3 \times 2^4} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$

4. $\frac{\sqrt[4]{9 \times 3^3}}{(\sqrt[6]{3})^2} = \frac{\sqrt[4]{3^2 \times 3^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

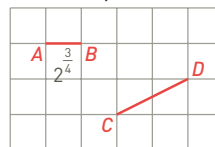
5.1. $A = \frac{(xy)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[8]{x^2y}} = \frac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[8]{x^2y}} = \frac{\sqrt[24]{x^4y^4}}{\sqrt[24]{x^6y^3}} = \sqrt[24]{\frac{x^4y^4}{x^6y^3}} = \sqrt[24]{\frac{y}{x^2}} = \sqrt[24]{x^{-2}y}$

Conclui-se que $A = \sqrt[24]{x^{-2}y}$.

5.2. $A = \sqrt[24]{\left(3^{-\frac{3}{8}}\right)^{-2}} \sqrt[4]{3} = \sqrt[24]{3^{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}} = \sqrt[24]{3}$

Então, $A = \sqrt[24]{3}$.

6.1. Seja P o perímetro de um quadrado de lado $\overline{AB}$.



$P = 4 \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2 \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{11}{4}}$

O perímetro é $2^{\frac{11}{4}}$.

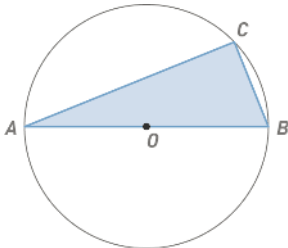
6.2. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$\overline{CD}^2 = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(2 \times 2^{\frac{3}{4}}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \sqrt{2^3} + \sqrt{2^7}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Então, } \overline{CD} = (10\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}}$$

7. O triângulo $[ABC]$ é retângulo pois está inscrito numa circunferência.



Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 3 + 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 3 + \sqrt[3]{2^2}$$

$$\text{Conclui-se que } \overline{AB} = \left(3 + \sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pág. 11

Teste de Autoavaliação 5

1. Sendo o quociente um polinômio de grau 2 e o divisor um polinômio de grau 4, então o dividendo é um polinômio de grau 6 $(4+2)$.

Assim sendo, a opção correta é a (B).

2. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & a & 2 & b \\ -1 & 1 & -a-1 & a-1 \\ \hline & -1 & a+1 & -a+1 & |a+b-1 \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é igual a $a+b-1$. Então, o resto é zero se:

$$a+b-1=0 \Leftrightarrow b=1-a.$$

Assim sendo, a opção correta é a (D).

3. Se o polinômio $A(x) \times B(x)$ tem grau 5 e o polinômio $A(x)$ tem grau 3, então o polinômio $B(x)$ tem grau $2(5-3)$.

Logo, no máximo o polinômio $B(x)$ tem 3 termos (se for um polinômio completo).

Assim sendo, a opção correta é a (B).

$$4. 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \mid x^2 + 3$$

$$\begin{array}{r} -2x^3 \quad -6x \quad 2x-4 \\ \hline -4x^2 -3x-1 \\ \hline 4x^2 \quad +12 \\ \hline -3x+11 \end{array}$$

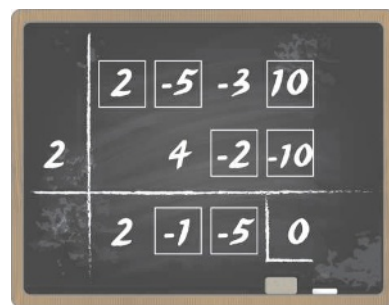
O resto da divisão inteira do polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ por $x^2 + 3$ é $-3x + 11$.

Assim sendo, a opção correta é a (B).

5. Basta verificar que $P(x) = (-x^2 + 2x) \times (-x - 2) + (x + 4)$.

$$\text{Ora, } (-x^2 + 2x) \times (-x - 2) + (x + 4) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 4 = x^3 - 3x + 4 = P(x).$$

6.1.



6.2. Sabe-se que $5x - 10 = 5(x - 2)$. Então, o resto da divisão de $A(x)$ por $5x - 10$ é igual ao resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$, ou seja, é zero.

7. Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios tem-se:

$$\begin{array}{r} 3x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 1 \mid x^2 + 2x + 3 \\ -3x^4 - 6x^3 - 9x^2 \quad \quad 3x^2 - 7x + 5 \\ \hline -7x^3 - 9x^2 + 2x - 1 \\ \hline 7x^3 + 14x^2 + 21x \quad \quad \quad 5x^2 + 23x - 1 \\ \hline -5x^2 - 10x - 15 \quad \quad \quad 13x - 16 \\ \hline \end{array}$$

Conclui-se que $Q(x) = 3x^2 - 7x + 5$ e $R(x) = 13x - 16$.

Então, $Q(x) + R(x) = 3x^2 - 7x + 5 + 13x - 16 = 3x^2 + 6x - 11$.

$$\begin{aligned} 8.1. V(x) &= (3x)^3 + (2x-1)^3 = 27x^3 + (2x-1)^2(2x-1) = \\ &= 27x^3 + (4x^2 - 4x + 1)(2x-1) = \\ &= 27x^3 + 8x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 4x + 20 - 1 = \\ &= 35x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

8.2. A altura de cada um dos sólidos é dada por $3x+2x-1$, ou seja, $5x-1$.

Como os sólidos A e B têm o mesmo volume, então sabe-se que $A(x) \times (5x-1) = V(x)$.

$$A(x) \times (5x-1) = V(x) \Leftrightarrow A(x) = \frac{V(x)}{5x-1} \Leftrightarrow A(x) = \frac{35x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{5x-1}$$

Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 35x^3 - 12x^2 + 6x - 1 & 5x - 1 \\ -35x^3 + 7x^2 & 7x^2 - x + 1 \\ \hline -5x^2 + 6x - 1 & \\ 5x^2 - x & \\ \hline 5x - 1 & \\ -5x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Então, $A(x) = 7x^2 - x + 1$.

Pág. 13

Teste de Autoavaliação 6

1. Sabe-se que o polinômio $P(x)$ é divisível por $x-2$ e dividido por $x+3$ dá resto 5, então tem-se que $P(2)=0$ e $P(-3)=5$.

Donde se conclui que $P(2) \times P(-3) = 0$.

Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

2. Se $P(3) = -1$, então o polinômio $P(x)$ dividido por $x-3$ dá resto -1 .

Assim sendo, a opção correta é a **(D)**.

3. Se $P(x)$ é divisível por $2x+1$, então $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - k\left(-\frac{1}{2}\right) + k = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8} + \frac{k}{2} + k = 0 \Leftrightarrow -1 + 4k + 8k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$$

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**.

4. Sabe-se que $P(x)$ é um polinômio divisível por x^2-4 e que $x^2-4 = (x-2)(x+2)$. Então, $P(x)$ é um polinômio divisível por $x-2$ e por $x+2$, ou seja, $P(2)=0$ e $P(-2)=0$.

Pode-se então concluir que $P(-2) = P(2)$.

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**.

5. Na opção **(A)**, $P(x)$ é divisível por $Q(x) = x+1$ porque

$$P(-1) = 0. P(-1) = (-1)^{11} - (-1)^7 + (-1)^4 - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0.$$

Na opção **(B)**, $P(x)$ é divisível por $Q(x) = x+3$ porque

$$P(-3) = 0. P(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 = -27 + 27 = 0.$$

Na opção **(C)**, $P(x)$ é divisível por $Q(x) = 4-2x = -2(x-2)$

porque $P(2) = 0. P(2) = -2^2 + 3 \times 2 - 2 = -4 + 6 - 2 = 0$.

Na opção **(D)**, $P(x)$ não é divisível por $Q(x) = x-1$ porque

$$P(1) \neq 0. P(1) = 1^{18} + 1^{15} - 1^8 = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Assim sendo, a opção correta é a **(D)**.

6. Sendo $3x+6 = 3(x+2)$, sabe-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 + mx^2 - 3x + 2$ por $3x+6$ é 0 se $P(-2) = 0$.

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^4 + m \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 16 + 4m + 6 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

7. O polinômio $P(x) = x^2 + x - 6$ é divisível por $x-a$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$ for igual a 0, ou seja, se $P(a) = 0$.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -3.$$

O polinômio $P(x) = x^2 + x - 6$ é divisível por $x-a$ se $a \in \{-3, 2\}$.

8.1. Sendo $a = 1$, então $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - b$.

O polinômio $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1) = 0$.

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 - (-1)^2 + 2 \times (-1) - b = 0 \Leftrightarrow -1 - 1 - 2 - b = 0 \Leftrightarrow b = -4$$

8.2. Sendo $b = -3$, então $P(x) = x^3 - ax^2 + 2x + 3$.

O resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $x-3$ é 2 se $P(3) = 2$.

$$P(3) = 2 \Leftrightarrow 3^3 - a \times 3^2 + 2 \times 3 + 3 = 2 \Leftrightarrow 27 - 9a + 6 + 3 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{34}{9}$$

8.3. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x-2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ for igual a 0, ou seja, se $P(2) = 0$.

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - a \times 2^2 + 2 \times 2 - b = 0 \Leftrightarrow 8 - 4a + 4 - b = 0 \Leftrightarrow b = 12 - 4a$$

Então $P(x)$ é divisível por $x-2$ se, por exemplo, $a = 3$ e $b = 0$ ou se $a = 0$ e $b = 12$.

8.4. Os restos das divisões de $P(x)$ por $x-1$ e por $x+2$ são dados por $P(1)$ e $P(-2)$, respectivamente.

Sabe-se que os restos das divisões de $P(x)$ por $x-1$ e por $x+2$ são, respectivamente, 2 e -1 .

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(1) = 2 \\ P(-2) = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 - a \times 1^2 + 2 \times 1 - b = 2 \\ (-2)^3 - a \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + 2 - b = 2 \\ -8 - 4a - 4 - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ -4a - 1 + a = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ -3a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - (-4) \\ a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Teste de Autoavaliação 7

1.1. $P(1) = 2 \times 1^4 + 5 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 1 - 1 = 2 + 5 + 3 - 1 - 1 = 8$

Como $P(1) \neq 0$, conclui-se que o polinómio $P(x)$ não é divisível por $x - 1$.

1.2. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

	2	5	3	-1	-1
-1		-2	-3	0	1
	2	3	0	-1	0
-1		-2	-1	1	
	2	1	-1	0	
-1		-2	1		
	2	-1	0		
-1		-2			
	2	-3	0		

Assim sendo,

$$P(x) = (x+1)(x+1)(x+1)(2x-1) = (x+1)^3(2x-1).$$

Logo, $n = 3$.

2.1. Se $P(x)$ é divisível por $x + 2$, então $P(x) = (x+2) \times Q(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 2$.

	1	4	1	-6
-2		-2	-4	6
	1	2	-3	0

O quociente da divisão de por $x + 2$ é $Q(x) = x^2 + 2x - 3$.

$$P(x) = (x+2) \times Q(x) = (x+2) \times (x^2 + 2x - 3)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Então, $P(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$.

As raízes do polinómio $P(x)$ são $-3, -2$ e 1 .

2.2. Para resolver a inequação $P(x) \geq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	-	0
$x+3$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [1, +\infty[.$$

3. O polinómio $A(x)$ que satisfaz as condições exigidas no enunciado é da seguinte forma:

$$A(x) = a(x-2)^2(x+1)^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 3$ é 1 , ou seja, $A(3) = 1$.

$$A(3) = 1 \Leftrightarrow a \times (3-2)^2 \times (3+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 16a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } A(x) &= \frac{1}{16}(x-2)^2(x+1)^2 = \frac{1}{16}(x^2-4x+4)(x^2+2x+1) = \\ &= \frac{1}{16}(x^4+2x^3+x^2-4x^3-8x^2-4x+4x^2+8x+4) = \\ &= \frac{1}{16}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{16} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4.1. Vamos começar por fatorizar o polinómio $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } P(x) = 2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1).$$

Donde se conclui que $P(x) \times Q(x) = (x-2)(2x+1)(2x+1)$.

4.2.

a) $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1) < 0$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$2x+1$	-	0	+	+
$(x-2)(2x+1)$	+	0	-	0

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, 2 \right[$$

b) $P(x) \geq Q(x) \Leftrightarrow (x-2)(2x+1) \geq 2x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x+1) - (2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)[(x-2)-1] \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \geq 0$$

Para resolver a inequação vamos recorrer a um quadro de sinais.

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0
$(2x+1)(x-3)$	+	0	-	0

$$\text{Então, } P(x) \geq Q(x) \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [3, +\infty[.$$

5.1. Os restos das divisões de $P(x)$ por $x + 2$ e por $x - 1$ são dados por $P(-2)$ e $P(1)$, respetivamente.

Sabe-se que os restos das divisões de $P(x)$ por $x + 2$ e por $x - 1$ são, respetivamente, 0 (porque $P(x)$ é divisível por $x + 2$) e 3 .

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(1) = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 + b = 0 \\ a \times 1^3 + 2 \times 1^2 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 8 + b = 0 \\ a + 2 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 8a - 8 \\ a + 2 + 8a - 8 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8a - 8 \\ 9a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \times 1 - 8 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1)=0$.

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow a \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + b = 0 \Leftrightarrow -a + 2 + b = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -a + b = -2 \Leftrightarrow a - b = 2$$

5.3. Sendo $a=5$ e $b=3$, então $P(x)=5x^3+2x^2+3$.

Como $a-b=2$, por **5.2.** sabe-se que $P(x)$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $P(x)$ por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & & -5 & 3 & -3 \\ \hline & 5 & -3 & 3 & 0 \end{array} \quad \text{Quociente: } Q(x)=5x^2-3x+3$$

Portanto, $P(x)=(x+1)(5x^2-3x+3)$.

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-60}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-51}}{10} \text{ impossível}$$

O polinômio $Q(x)=5x^2-3x+3$ não tem zeros.

Logo, não é possível decompor $Q(x)$ em fatores do primeiro grau.

Conclui-se, então, que $P(x)=(x+1)(5x^2-3x+3)$.

6. Seja a um número real qualquer, então tem-se:

$$P(a)=a^{n+1}-2a^n+a^2-4=(a^{n+1}-2a^n)+(a^2-4)= \\ =a^n(a-2)+(a-2)(a+2)=(a-2)(a^n+a+2).$$

Provamos que $\forall a \in \mathbb{R}, P(a)=(a-2)(a^n+a+2), n \in \mathbb{N}$.

Então, $P(x)=(x-2)(x^n+x+2), n \in \mathbb{N}$.

$$P(2)=(2-2) \times (2^n+2+2)=0 \times (2^n+4)=0$$

Como $P(2)=0$, conclui-se que $P(x)$ é divisível por $x-2$.

Teste de Autoavaliação 8

1. Se a projeção ortogonal de um ponto A sobre Ox é $A'(-2,0)$ então a abscissa de A é -2 .

Se a projeção ortogonal de um ponto A sobre a reta $x=1$ é $A''(1,3)$ então a ordenada de A é 3 .

Donde se conclui que o ponto A tem coordenadas $(-2,3)$.

Assim sendo, a opção correta é a **(D)**.

2. Sendo $P(a,b)$ um ponto do 3.º quadrante e $Q(c,d)$ um ponto do 2.º quadrante, sabe-se que $a < 0, b < 0, c < 0$ e $d > 0$.

Então, $a+b < 0$ e $d-(a+b) > 0$.

Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

3. Se $A(5,-3)$ e $B(1,-3)$, sabe-se que qualquer ponto P pertencente ao segmento de reta $[AB]$ tem ordenada -3 e abscissa entre 1 e 5 .

Logo, o ponto P pode ter coordenadas $(3,-3)$.

Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

4. As coordenadas da projeção ortogonal de $A(-2,3,5)$ sobre o plano xOz são $(-2,0,5)$.

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**.

5. O ponto $P(2,5-k,3-2k)$, $k \in \mathbb{R}$ pertence ao 5.º octante se $5-k > 0 \wedge 3-2k < 0$.

$$5-k > 0 \wedge 3-2k < 0 \Leftrightarrow -k > -5 \wedge -2k < -3 \Leftrightarrow k < 5 \wedge k > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k \in \left] \frac{3}{2}, 5 \right[$$

Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

6.1.

a) A reta AB pode ser definida pela equação $x=3$.

b) A reta que passa em A e é paralela a Ox pode ser definida pela equação $y=-1$.

6.2. A semirreta $\dot{BA}$ é definida pela condição $x=3 \wedge y \leq 4$.

Então, por exemplo, o ponto $P(3,2)$ pertence a essa semirreta.

7.1.

a) $A=\{P(x,y): 2x+1 \leq 3\}$ e $2x+1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Qualquer ponto que pertença ao conjunto A tem abscissa inferior ou igual a 1 .

Então, por exemplo, o ponto $P(-2,4)$ pertence ao conjunto A .

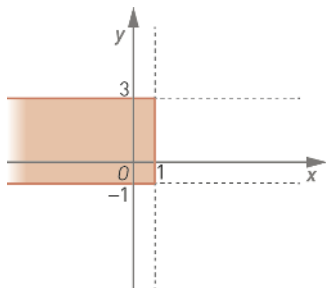
b) Qualquer ponto que pertença ao conjunto

$B=\{P(x,y): -1 \leq y \leq 3\}$ tem ordenada compreendida entre -1 e 3 .

Então, por exemplo, o ponto $P(5,1)$ pertence ao conjunto B .

c) Qualquer ponto que pertença ao conjunto $A \cap B$ tem abscissa inferior ou igual a 1 e ordenada compreendida entre -1 e 3. Então, por exemplo, o ponto $P(0, 2)$ pertence ao conjunto $A \cap B$.

7.2. O conjunto $A \cap B$ pode ser representado geometricamente por:



8.1. Uma equação cartesiana do plano que contém a face $[PQU]$ é $x = 6$.

8.2. A reta QR pode ser definida pelo seguinte sistema de equações: $y = 2 \wedge z = 0$.

8.3. Como o prisma triangular regular, sabe-se as bases $[PQU]$ e $[RST]$ são triângulos equiláteros.

O triângulo $[TOR]$ é retângulo em O , então sabe-se que

$$(\overline{OT})^2 + (\overline{OR})^2 = (\overline{RT})^2.$$

Como $\overline{RT} = \overline{RS} = 2\overline{OR} = 2 \times 2 = 4$, tem-se:

$$(\overline{OT})^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\overline{OT})^2 = 12$$

Donde se conclui que $\overline{OT} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Então, o ponto U tem coordenadas $(6, 0, 2\sqrt{3})$.

$$8.4. V_{\text{prisma}} = A_b \times h = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} \times 6 = 4\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}.$$

Pág. 19

Teste de Autoavaliação 9

$$1. \overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Assim sendo, a opção correta é a (B).

2. As projeções ortogonais de $A(-1, 5, 2)$ e de $B(3, -3, 0)$ sobre o plano xOz são, respetivamente, $A'(-1, 0, 2)$ e $B'(3, 0, 0)$.

As coordenadas do ponto médio de $[A'B']$ são

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (1, 0, 1).$$

Assim sendo, a opção correta é a (A).

3. O ponto $A(1, 2)$ pertence ao semiplano superior (aberto ou fechado) de fronteira r , sendo r a reta definida pela equação $y = 2x - 3$, pois $2 > 2 \times 1 - 3$.

Nas quatro possibilidades apresentadas nenhum dos pontos pertence à reta r . Então, para que o segmento de reta $[AB]$ esteja contido no semiplano superior de fronteira r , as coordenadas do ponto B têm que satisfazer a condição $y > 2x - 3$. Tal só se verifica na opção (B): $-2 > 2 \times 0 - 3$.

Assim sendo, a opção correta é a (B).

$$4. x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 4 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

O centro da circunferência é o ponto $C(1, -2)$.

Das retas apresentadas só uma passa por C , é a reta de equação $x = 1$.

Assim sendo, a opção correta é a (D).

5. A esfera definida pela inequação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 16 \text{ tem centro } C(1, 2, -3) \text{ e raio } 4.$$

O plano de equação $y = -2$ é tangente à esfera porque

$$|-2-2| = 4 \text{ (raio)}.$$

Assim sendo, a opção correta é a (B).

6.1. A reta r é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz da reta r .

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6x + 25 - 9 = 2y + 10y$$

$$\Leftrightarrow 8x + 16 = 12y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{4}{3}$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida na forma reduzida por

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{4}{3}.$$

6.2. Sendo $[AB]$ um diâmetro da circunferência, sabe-se que o centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$.

Assim sendo, as coordenadas do centro da circunferência são

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{5+(-1)}{2} \right) = (1, 2).$$

O raio da circunferência é dado por $\frac{\overline{AB}}{2}$.

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (5+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+36}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}.$$

6.3. A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas $(1, 2)$ e raio $\sqrt{13}$, então pode ser definida pela

$$\text{equação } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13.$$

A região colorida da figura é definida pela condição:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 13 \wedge y \geq \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \wedge x \geq 0.$$

7. Sendo $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 12$ e $b^2 = 8$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que $a = 2\sqrt{3}$ e $b = 2\sqrt{2}$. Logo, as coordenadas dos vértices da elipse que pertencem ao eixo Oy são $(0, 2\sqrt{2})$ e $(0, -2\sqrt{2})$.

Como $[AB] \parallel Ox$ e $[CD] \parallel Ox$, sabe-se que os pontos A e B têm ordenada $-2\sqrt{2}$ e os pontos C e D têm ordenada $2\sqrt{2}$. Então, $\overline{AD} = \overline{BC} = 4\sqrt{2}$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $12 = 8 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 4$.

Sendo $c > 0$, então conclui-se que $c = 2$.

Os focos da elipse são $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$.

Então, $\overline{AB} = \overline{F_1F_2} = 4$.

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

8.1. As coordenadas dos vértices do prisma são:

$O(0, 0, 0)$, $P(9, 0, 0)$, $Q(9, 9, 0)$, $R(0, 9, 0)$, $T(9, 9, 16)$,

$U(0, 9, 16)$, $V(0, 0, 16)$ e $S(9, 0, 16)$.

8.2. A esfera de centro T e raio 4 é definida pela inequação

$(x-9)^2 + (y-9)^2 + (z-16)^2 \leq 16$.

8.3. A reta QT pode ser definida pelo seguinte sistema de equação cartesianas: $x = 9 \wedge y = 9$.

8.4. O plano medidor de $[QR]$ é definido pela equação $x = \frac{9}{2}$ e

a reta SV é definida pela condição $y = 0 \wedge z = 16$.

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção do plano medidor de $[QR]$ com a reta SV são $(\frac{9}{2}, 0, 16)$.

8.5. O ponto W tem a mesma abscissa e a mesma ordenada que o ponto Q .

$$V_{\text{pirâmide}} = 162 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 9}{2} \times \overline{QW} = 162 \Leftrightarrow \frac{27}{2} \overline{QW} = 162 \Leftrightarrow \overline{QW} = \frac{162 \times 2}{27} \Leftrightarrow \overline{QW} = 12$$

Como $\overline{QW} = 12$ e a cota do ponto Q é zero, conclui-se que a cota do ponto W é 12.

Então, $W(9, 9, 12)$.

Pág. 21

Teste de Autoavaliação 10

1. $\overline{AB} = B - A = (2, 1) - (-2, -3) = (4, 4)$.

$C = A + \overline{AB} = (-2, -3) + (4, 4) = (2, 1)$.

Assim sendo, a opção correta é a (C).

2. Sendo $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = k\vec{u}$, $k > 0$, então $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (-k, 3k)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3) + (-k, 3k) = (-1-k, 3+3k)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(-1-k)^2 + (3+3k)^2} = \sqrt{(1+k)^2 + (3(1+k))^2} = \sqrt{(1+k)^2 + 9(1+k)^2} = \sqrt{10(1+k)^2} = (1+k)\sqrt{10} = (1+k)\|\vec{u}\|.$$

Assim sendo, a opção correta é a (A).

3. Sendo $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, então $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

$$\overline{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow B - A = \vec{u} \Leftrightarrow B = A + \vec{u} \Leftrightarrow B = (-1, 0, 3) + (2, -1, 3) \Leftrightarrow B = (1, -1, 6)$$

Assim sendo, a opção correta é a (D).

4. A reta r é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (-1, 2, -3) + k(1, -1, 2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Se $k = -1$, tem-se:

$$(x, y, z) = (-1, 2, -3) - (1, -1, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2, 3, -5)$$

Assim sendo, a opção correta é a (A).

5. A reta r é definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 2 + 6k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

As coordenadas de um vetor diretor da reta r são $(-3, 6)$.

Então, o declive da reta r é $\frac{6}{-3}$, ou seja, -2 .

Assim sendo, a opção correta é a (B).

6.1. Se $\vec{v}$ é um vetor de norma 2, colinear com $\vec{u}$ e sentido

oposto ao de $\vec{u}$, então $\vec{v} = -\frac{2}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Assim, tem-se

$$\vec{v} = -\frac{2}{\sqrt{10}}(-3, 1) = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{6\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{10}\right) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

6.2. Se o ponto B pertence a Oy , então $B(0, y)$.

$$\overline{AB} = B - A = (0, y) - (2, 3) = (-2, y-3)$$

Os vetores $\overline{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{AB} = \lambda \vec{u}$.

$$\overline{AB} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (-2, y-3) = \lambda(-3, 1) \Leftrightarrow (-2, y-3) = (-3\lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3\lambda \\ y-3 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ y-3 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ y = 3 + \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\overline{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares quando $B\left(0, \frac{11}{3}\right)$.

6.3. Como a reta r tem a direção do vetor $\vec{u}(-3,1)$, o declive da reta r é $-\frac{1}{3}$.

Então, a reta r é definida por uma equação do tipo $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Como o ponto $A(2,3)$ pertence à reta r , tem-se:

$$3 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = -\frac{2}{3} + b \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow \frac{11}{3} = b.$$

A reta r pode ser representada pela equação $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

7.1.

a) Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, sabe-se que os lados são paralelos dois a dois. Então, as retas BC e AD são paralelas.

Assim sendo, sabe-se que $\vec{AD}$ é um vetor diretor da reta BC .

$$\vec{AD} = D - A = (0,1) - (-2,-3) = (2,4).$$

A reta BC passa em $B(5,0)$ e tem a direção do vetor $\vec{AD}$.

Então, uma equação vetorial da reta BC é:

$$(x,y) = (5,0) + k(2,4), k \in \mathbb{R}.$$

b) Sendo $[AFBD]$ é um paralelogramo, tem-se $F = B + \vec{DA}$.

$$F = B + \vec{DA} = (5,0) - \vec{AD} = (5,0) - (2,4) = (3,-4).$$

7.2. $\vec{AB}$ é um vetor diretor da reta AB .

$$\vec{AB} = B - A = (5,0) - (-2,-3) = (7,3).$$

A reta AB pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + 7k \\ y = -3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{8.1.} \quad x^2 - 2x + y^2 + 4y = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 3 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

A circunferência tem centro $C_1(1,-2)$ e raio $\sqrt{8}$.

$C_1 \in r$?

$$3 \times 1 + 2 \times (-2) = -1 \Leftrightarrow 3 - 4 = -1 \text{ (proposição verdadeira)}$$

Conclui-se, então, que o centro da circunferência pertence à reta r .

8.2. O eixo Ox é definido pela equação $y = 0$.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (0+2)^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 4 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \vee x-1 = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

A circunferência C intersesta o eixo Ox nos pontos $A(3,0)$ e

$B(-1,0)$.

Então, $\vec{AB} = 4$.

$$\mathbf{9.} \quad V_{\text{cubo}} = 8 \Leftrightarrow (\overline{OP})^3 = 8 \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \overline{OP} = 2.$$

As coordenadas dos pontos R e V são, respetivamente, $(0,2,0)$ e $(0,2,2)$.

Sendo M o ponto médio de $[RV]$, sabe-se que $M(0,2,1)$.

As coordenadas do ponto T são $(2,0,2)$.

A reta MT passa no ponto $T(2,0,2)$ e tem a direção do vetor

$$\vec{MT}.$$

$$\vec{MT} = T - M = (2,0,2) - (0,2,1) = (2,-2,1).$$

Então, uma equação vetorial da reta MT é:

$$(x,y,z) = (2,0,2) + k(2,-2,1), k \in \mathbb{R}$$

Pág. 23

Teste de Autoavaliação 11

1. (B) 6

B \ A	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
4	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
9	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

$$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}; \{(1,1),(2,3),(3,2)\}; \{(1,2),(2,1),(3,3)\}; \\ \{(1,2),(2,3),(3,1)\}; \{(1,3),(2,1),(3,2)\}; \{(1,3),(2,2),(3,1)\};$$

$$\mathbf{2. (B)} \quad (g \circ f)(2) = (f \circ g)(6)$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(8) = 4$$

$$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4$$

$$\mathbf{3. (D)} \quad f(x) = 3x + 5$$

Se $f^{-1}(2) = -1$, então $f(-1) = 2$

As opções (A) e (C) são rejeitadas atendendo a que as funções, nestes casos, não são bijetivas.

Como $f(-1) = 2$ e f é bijetiva, a que satisfaz é a da opção (D).

$$\mathbf{4. (A)} \quad (21,3)$$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente 3.

$$\text{Assim, } G_g = \{(9,-1), (15,2), (21,3), (27,-2)\}$$

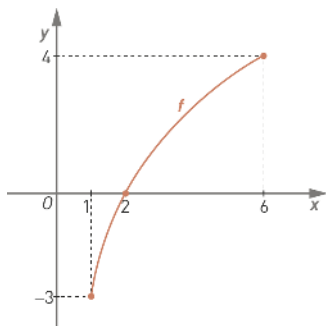
$$\mathbf{5. (D)} \quad [-5,-1]$$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela composta da translação de vetor $\vec{u}(-1,0)$ com a translação de vetor $\vec{v}(0,-2)$

O contradomínio de g é $[-5,-1]$.

$$\mathbf{6.1.} \quad \text{Se } f(2) = 0, \text{ então } f^{-1}(0) = 2.$$

Assim, conclui-se que o gráfico de f^{-1} intersesta Oy no ponto de coordenadas $(0,2)$.



6.2.

a) O gráfico de g é a imagem do gráfico de f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

$$D_g = \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$$

b) $D'_g = [-3, 4]$

c) Zeros de g : 1

d) $g(x) = 4 \Leftrightarrow f(2x) = 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

7.1.

a) Sendo a concavidade voltada para cima o declive da reta AB é menor do que o declive da reta BC . Ou sejam, $m < m'$. Então o sinal de $m - m'$ é negativo.

b) $A(4, 4)$, $B(6, 2)$ e $C(11, 3)$

$$m = m_{AB} = \frac{2-4}{6-4} = -1; \quad m' = m_{BC} = \frac{3-2}{11-6} = \frac{1}{5}$$

Então $m - m' = -1 - \frac{1}{5} = -\frac{6}{5}$ (sinal negativo)

7.2.

a) Se a reta é paralela a BC tem declive igual ao da reta BC , ou seja, declive $\frac{1}{5}$.

Equação da reta: $y = \frac{1}{5}x + b$ e passa no ponto $A(4, 4)$.

$$4 = \frac{1}{5} \times 4 + b \Leftrightarrow b = \frac{16}{5}$$

Assim, $g(x) = \frac{x}{5} + \frac{16}{5}$.

b) Interseção com Ox

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{16}{5} = 0 \Leftrightarrow x = -16$$

Intersecta Ox no ponto $(-16, 0)$.

Interseção com Oy

$$g(0) = \frac{0}{5} + \frac{16}{5} = \frac{16}{5}$$

Intersecta Oy no ponto $(0, \frac{16}{5})$.

8.1. Determina o produto dos zeros de f .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -15 & 16 & 12 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & 2 & -16 & 24 & 0 \end{array}$$

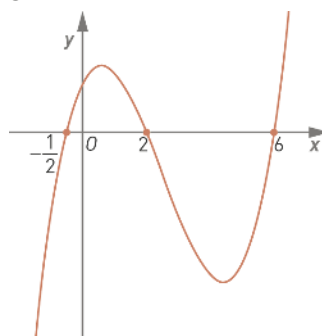
$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 16x + 24)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 16x + 24) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 6 \vee x = 2$$

O produto dos zeros de f é dado por $-\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = -6$.

8.2.



O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(k, 0)$.

A função g tem dois zeros negativos e um positivo se $k < 0 \wedge 2 < |k| < 6$, ou seja $-6 < k < -2$.

Pág. 25

Teste de Autoavaliação 12

1. O vértice da parábola que corresponde ao gráfico de f é o ponto de coordenadas $V(3, 4)$. Então,

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 4, \quad a \neq 0.$$

Como o ponto $A(1, -4)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se:

$$a(1 - 3)^2 + 4 = -4 \Leftrightarrow 4a = -8 \Leftrightarrow a = -2.$$

Conclui-se, então, que

$$f(x) = -2(x - 3)^2 + 4 = -2(x^2 - 6x + 9) + 4 = -2x^2 + 12x - 14.$$

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**.

2. Sabe-se que o contradomínio da função f é $[-3, +\infty[$.

O gráfico da função h , definida por $h(x) = -f(x + 1) + 2$, pode ser obtido do gráfico da função f através da seguinte sequência de transformações:

Translação de vetor $\vec{u} = (-1, 0)$;

Reflexão de eixo Ox ;

Translação de vetor $\vec{v} = (0, 2)$.

Então, o contradomínio da função h é $]-\infty, 5]$.

Assim sendo, a opção correta é a **(D)**.

3. $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$



Então, $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$.

$$|x| < 1 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \wedge x - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$$

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow x-1 < 2 \wedge x-1 > -2 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[$$

Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

4. O ponto A de coordenadas $(-2, 3)$ pertence aos gráficos das duas funções, então sabe-se que $f(-2) = 3$ e $g(-2) = 3$.

Se f é uma função par, então $f(2) = f(-2) = 3$.

Se g é uma função ímpar, então $g(2) = -g(-2) = -3$.

Portanto, $f(2) + g(2) = 3 + (-3) = 0$.

Assim sendo, a opção correta é a **(B)**.

5. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x = 0 \wedge x < 0) \vee (\sqrt{x} = 0 \wedge x \geq 0)$.

$$x^3 - x = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 = 1) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\sqrt{x} = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge x \geq 0) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

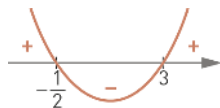
Conclui-se, então, que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$. A função f tem dois zeros, -1 e 0 . Assim sendo, a opção correta é a **(C)**.

6.1. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \geq 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5+7}{4} \vee x = \frac{5-7}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$



Então, $2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [3, +\infty[$.

O conjunto solução da inequação $f(x) \geq g(x)$ é

$$]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [3, +\infty[$$

6.2. $h(x) = 3 - |g(x)| = 3 - |2x + 1|$

a) $h(x) = 2 \Leftrightarrow 3 - |2x + 1| = 2 \Leftrightarrow |2x + 1| = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \vee 2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Conjunto-solução: $\{-1, 0\}$

b) O gráfico da função h , definida por $h(x) = 3 - |g(x)|$, pode ser obtido a partir do gráfico de g , através da seguinte sequência de transformações:

Mantendo-se a parte não negativa do gráfico de g e aplicando uma reflexão de eixo Ox à parte negativa;

Aplicando uma reflexão de eixo Oy ;

Aplicando uma translação de vetor $\vec{v} = (0, 3)$.

Conclui-se, então, que $D'_h =]-\infty, 3]$.

7.1.

a) O ponto B é comum aos gráficos das duas funções e tem abscissa 2. Logo, $B(2, f(2))$.

Como $f(2) = 2 \times 2 = 4$, então $B(2, 4)$.

O ponto C é a interseção do gráfico de g com o eixo Oy . Logo, $C(0, g(0))$.

Como $g(0) = -0 + 6 = 6$, então $C(0, 6)$.

$$A_{[OBC]} = \frac{6 \times 2}{2} = 6.$$

b) Se $a = \frac{1}{2}$, então $P(\frac{1}{2}, 0)$ e $S(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$.

$$f(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \text{ logo } S(\frac{1}{2}, 1).$$

Os pontos R e S têm a mesma ordenada. Logo $R(x, 1)$, tal que $g(x) = 1$.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow -x + 6 = 1 \Leftrightarrow x = 5$$

Então, $R(5, 1)$.

Como o ponto Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa que o ponto R , conclui-se que $Q(5, 0)$.

7.2.

a) Como o ponto P , de abscissa a , se desloca sobre o eixo Ox , sendo $a \in]0, 2[$, sabe-se que $P(a, 0)$.

O vértice S pertence ao gráfico de f e tem a mesma abscissa de P .

Então, $S(a, f(a))$, ou seja, $S(a, 2a)$.

O vértice R pertence ao gráfico de g e tem a mesma ordenada de S . Então, $R(x, 2a)$, tal que $g(x) = 2a$.

$$g(x) = 2a \Leftrightarrow -x + 6 = 2a \Leftrightarrow -x = 2a - 6 \Leftrightarrow x = -2a + 6.$$

Portanto, $R(-2a + 6, 2a)$.

Sendo h a função de domínio $]0, 2[$ que a cada valor de a faz corresponder a área do retângulo $[PQRS]$, tem-se:

$$h(a) = 2a \times (-2a + 6 - a) = 2a \times (-3a + 6) = -6a^2 + 12a.$$

b) $P_{[PQRS]} = 2 \times 2a + 2 \times (-3a + 6) = 4a - 6a + 12 = -2a + 12.$

$$h(a) = 4,5 \Leftrightarrow -6a^2 + 12a = 4,5 \Leftrightarrow -6a^2 + 12a - 4,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 4a - 1,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-4} \Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm 2}{-4} \Leftrightarrow a = 0,5 \vee a = 1,5$$

• Se $a = 0,5$, então $P_{[PQRS]} = -2 \times 0,5 + 12 = -1 + 12 = 11.$

• Se $a = 1,5$, então $P_{[PQRS]} = -2 \times 1,5 + 12 = -3 + 12 = 9.$

Se a área do retângulo $[PQRS]$ é 4,5, conclui-se que o perímetro do retângulo $[PQRS]$ é 9 ou 11.

8.1. $|2x-1|+3 < 5 \Leftrightarrow |2x-1| < 2 \Leftrightarrow 2x-1 < 2 \wedge 2x-1 > -2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$$

Conjunto-solução: $\left] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$

8.2. $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (1 + \sqrt{x-2})^2 \wedge x \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{x-2} + x - 2 \wedge x \geq 0 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-1 = 2\sqrt{x-2} \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{x-2} \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt{x-2})^2 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = x-2 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} = x \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Conjunto-solução da equação: $\left\{ \frac{9}{4} \right\}$

Pág. 27

Teste de Autoavaliação 13

1. (C) 90

$$\sum_{i=1}^{10} (2(x_i + 1)) = 2 \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} 2 = 2 \times 35 + 10 \times 2 = 90$$

2. (B) $\sum_{i=6}^{20} (i^2 + 2i)$

$$\sum_{i=1}^{20} (i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^5 (i^2 + 2i) + \sum_{i=6}^{20} (i^2 + 2i)$$

3. (A) 112

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = 15. \text{ Então } \sum_{i=1}^8 x_i = 15 \times 8 = 120$$

$$\sum_{i=1}^8 (x_i - 1) = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^8 1 = 120 - 8 = 112$$

4. (C) A média é 3.

Se a soma dos quadrados dos desvios é zero, então a amostra é constante. Como um dos dados é 3, conclui-se que todos os dados são iguais a 3, logo a média é 3.

5. (A) 35

$$\frac{31 \times 250}{100} = 77,5. \text{ Então } P_{31} = x_{(78)} = 35$$

6.1. $\sum_{k=1}^n (2k+1) = 120 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 120 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4+480}}{2} \Leftrightarrow n = 10 \vee n = -12$$

Sendo $n=10$, o número de parcelas do somatório é 10.

6.2. $\sum_{k=1}^n (2k+1) = 120$

$2k+1$ é o termo geral da sequência 3, 5, 7, 9, ...

$$2k+1 = 69 \Leftrightarrow k = 34$$

$$1 + \sum_{k=1}^{34} (2k+1) = 1 + (3+5+\dots+69) = 1 + (34^2 + 2 \times 34) = 1225$$

A soma dos números naturais ímpares inferiores a 70 é igual a 1225.

7. Para $x_3 = 15$, tem-se $d_3 = 2$, então $2 = 15 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 13$

$$x_1 - 13 = -5 \Leftrightarrow x_1 = 8$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 12 - 13 = -1$$

Sabe-se que:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \Leftrightarrow -5 + (-1) + 2 + d_4 = 0 \Leftrightarrow d_4 = 4$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow 4 = x_4 - 13 \Leftrightarrow x_4 = 17$$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$
8	-5
12	-1
15	2
17	4

Assim, tem-se:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 25 + 1 + 4 + 16 = 46$$

$$SS_x = 46$$

8.1. $\bar{x} = \frac{120+146+135+150+187+125+234+315+370}{9} =$
 $= \frac{1782}{9} = 198$

$$\bar{x} = 198$$

$$\bar{y} = \frac{98+112+94+127+153+87+198+270+337}{9} = \frac{1476}{9} = 164$$

8.2. $SS_x = \sum_{i=1}^9 x_i^2 - 9 \times 198^2 = 417916 - 352836 = 65080$

$$s_x = \sqrt{\frac{65080}{8}}; s_x \approx 90,19$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^9 y_i^2 - 9 \times 164^2 = 303764 - 242064 = 61690$$

$$s_y = \sqrt{\frac{61690}{8}}; s_y \approx 87,81$$

Como $s_x > s_y$, conclui-se que há maior dispersão na amostra x

8.3.

a) Amostra ordenada: (87, 94, 98, 112, 127, 153, 198, 270, 337)

$$P_{40} = ? \quad \frac{40 \times 9}{100} = 3,6$$

$$P_{40} = x_{(4)} = 112$$

b) Dos 30% dos anos da amostra, com maior número de participantes indica o ano em que o número de participantes foi menor.

$$P_{70} = ? \quad \frac{70 \times 9}{100} = 6,3$$

$$P_{40} = x_{(7)} = 198$$

O valor pedido corresponde ao ano 2014.