

Unidade 1 Introdução à lógica bivalente e à teoria dos conjuntos

Pág. 9

1.1. As expressões I e V são designações.

1.2. As expressões II, III, IV e VI são proposições.

A proposição III é falsa e, por exemplo, a proposição VI é verdadeira.

Pág. 10

2.1. A expressão é uma proposição pois é uma afirmação acerca da qual é possível dizer se é verdadeira ou falsa.

2.2. A expressão não é uma proposição pois a resposta é subjetiva (depende dos conhecimentos de quem resolve o problema).

3.1. As proposições p e q não são equivalentes porque não têm o mesmo valor lógico (a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira).

3.2. As proposições q e r são equivalentes porque têm o mesmo valor lógico (verdadeiro).

3.3.

a) Se a proposição $t \Leftrightarrow p$ é verdadeira então t e p têm o mesmo valor lógico.

Sendo p falsa, então t também é falsa.

b) Se a proposição $t \Leftrightarrow r$ é verdadeira então t e r têm o mesmo valor lógico.

Sendo r verdadeira, então t também é verdadeira.

c) Se a proposição $t \Leftrightarrow q$ é falsa então t e q têm valores lógicos diferentes.

Sendo q verdadeira, então t é falsa.

Pág. 11

4.1. Como $(-2)^2 = 4$, a proposição p é falsa.

Como $(-2)^3 = -8$, a proposição q é verdadeira.

O valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow q$ é falso porque p e q têm valores lógicos diferentes.

4.2. Como $(-2)^3 = -8$, a proposição r é falsa.

O valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow r$ é verdadeiro porque p e r têm o mesmo valor lógico.

4.3. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, a proposição s é verdadeira.

O valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow s$ é falso porque p e s têm valores lógicos diferentes.

4.4. Como $(-2)^3 = -8$, a proposição t é falsa.

O valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow t$ é verdadeiro porque p e t têm o mesmo valor lógico.

4.5. A proposição q é verdadeira e a proposição r é falsa.

O valor lógico da proposição $q \Leftrightarrow r$ é falso porque q e r têm valores lógicos diferentes.

4.6. As proposições q e s são verdadeiras.

O valor lógico da proposição $q \Leftrightarrow s$ é verdadeiro porque q e s têm o mesmo valor lógico.

4.7. A proposição q é verdadeira e a proposição t é falsa.

O valor lógico da proposição $q \Leftrightarrow t$ é falso porque q e t têm valores lógicos diferentes.

4.8. A proposição r é falsa e a proposição s é verdadeira.

O valor lógico da proposição $r \Leftrightarrow s$ é falso porque r e s têm valores lógicos diferentes.

4.9. As proposições r e t são falsas.

O valor lógico da proposição $r \Leftrightarrow t$ é verdadeiro porque r e t têm o mesmo valor lógico.

4.10. A proposição s é verdadeira e a proposição t é falsa.

O valor lógico da proposição $s \Leftrightarrow t$ é falso porque s e t têm valores lógicos diferentes.

Pág. 12

5.1. $\sim p$: "A Susana não tem olhos azuis."

5.2. $\sim p$: $4 + 5 \neq (-3)^2$

5.3. $\sim p$: $4 \geq 5$

5.4. $\sim p$: $\frac{3}{4} \leq 1$

6.

Proposição: p	Proposição: $\sim p$
$\frac{15}{3}$ é número inteiro.	$\frac{15}{3}$ não é número inteiro.
$\sqrt{5} \geq 3$	$\sqrt{5} < 3$
Todos os gatos são pretos.	Algum gato não é preto.
O carro é branco.	O carro não é branco.
Pelo menos uma pera está madura.	Nenhuma pera está madura.
A equipa da minha cidade perde.	A equipa da minha cidade não perde.

7.1. Se a proposição $(\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$ é verdadeira então $\sim p$ e $\sim q$ têm o mesmo valor lógico.

Sendo p falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

Assim sendo, $\sim q$ é verdadeira. Logo, q é falsa.

O valor lógico de q é falso.

7.2. Se a proposição $(\sim q) \Leftrightarrow p$ é falsa então $\sim p$ e p têm valores lógicos diferentes.

Sendo p falsa, então $\sim p$ é verdadeira. Logo, q é falsa.

O valor lógico de q é falso.

Pág. 13

8.1.

- a) $p \wedge q$: “5 é um número primo e ímpar.”
 b) $p \wedge (\sim q)$: “5 é um número primo e par.”
 c) $\sim r$: “Nem todos os números ímpares são primos.”

8.2.

a) p é verdadeira e r é falsa, logo $p \wedge r$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \wedge r$ é falso.

b) q é verdadeira e $\sim r$ é verdadeira (pois r é falsa), logo $q \wedge (\sim r)$ é verdadeira.

Então $\sim(q \wedge (\sim r))$ é falsa.

O valor lógico da proposição $\sim(q \wedge (\sim r))$ é falso.

c) p é verdadeira e $\sim r$ é verdadeira (pois r é falsa), logo $p \wedge (\sim r)$ é verdadeira.

$p \wedge (\sim r)$ é verdadeira e q é verdadeira, logo $(p \wedge (\sim r)) \wedge q$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(p \wedge (\sim r)) \wedge q$ é verdadeiro.

Pág. 14

9.1. Se $(\sim a) \wedge b$ é verdadeira então as proposições $\sim a$ e b são ambas verdadeiras.

Conclusão: o valor lógico de b é verdadeiro.

9.2. Se a é falsa então $a \wedge b$ é falsa. Logo, $\sim(a \wedge b)$ é verdadeira.

Se $\sim(a \wedge b)$ é verdadeira e $(\sim(a \wedge b)) \wedge (\sim b)$ falsa, então $\sim b$ é falsa.

Assim sendo, o valor lógico de b é verdadeiro.

10. Se a é uma proposição verdadeira, então $\sim a$ é falsa.

Logo, a proposição $((\sim b) \wedge a) \wedge (\sim a)$ é sempre falsa, independentemente da proposição b ser verdadeira ou falsa.

Conclusão: Não é possível determinar o valor lógico da proposição b .

11.1. As proposições p e r são verdadeiras e a proposição q é falsa, ou seja, o valor lógico das proposições p e r é verdadeiro e o valor lógico da proposição q é falso.

11.2. Se $(\sim s) \wedge p$ é verdadeira então $\sim s$ e p são ambas verdadeiras.

Se $\sim s$ é verdadeira, então s é falsa.

O valor lógico da proposição s é falso.

11.3. Sendo q falsa, então $\sim q$ é verdadeira.

Se $t \wedge (\sim q)$ é falsa e $\sim q$ é verdadeira, então t é falsa.

O valor lógico da proposição t é falso.

Tarefa 1

1.1. As proposições p e s são falsas e as proposições q e r são verdadeiras.

1.2.

a) $q \wedge s$: “25 é múltiplo de 5 e 3 é divisor de 10.”

b) $(\sim q) \wedge s$: “25 não é múltiplo de 5 e 3 é divisor de 10.”

c) $p \wedge (\sim s)$: “9 é um número ímpar e primo e 3 não é divisor de 10.”

1.3. Como a proposição p é falsa, a proposição $p \wedge a$ é falsa, qualquer que seja a proposição a .

Então, o valor lógico da proposição $p \wedge a$ é falso.

1.4. Se a proposição $q \wedge b$ é verdadeira então as proposições q e b são ambas verdadeiras.

Conclui-se que o valor lógico da proposição b é verdadeiro.

1.5.

a) Se p é falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

Se r é verdadeira, então $\sim r$ é falsa.

Se $\sim p$ é verdadeira e $\sim r$ é falsa, então o valor lógico da proposição $(\sim p) \wedge (\sim r)$ é falso.

b) Se s é falsa, então $\sim s$ é verdadeira.

Se q e $\sim s$ são verdadeiras, então $q \wedge \sim s$ é verdadeira.

Se r e $q \wedge (\sim s)$ são verdadeiras, então $r \wedge (q \wedge (\sim s))$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $r \wedge (q \wedge (\sim s))$ é verdadeiro.

Pág. 15

12.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

As colunas relativas a $p \vee q$ e a $q \vee p$ são iguais, donde se conclui que $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

12.2. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Como as colunas relativas a $(p \vee q) \vee r$ e a $p \vee (q \vee r)$ são iguais, conclui-se que $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

13. As proposições p e r são falsas e a proposição q é verdadeira.

13.1. Se p é falsa, então $p \wedge (\sim r)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \wedge (\sim r)$ é falso.

13.2. Se q é verdadeira e r é falsa, então $p \wedge r$ é falsa.

Logo, o valor lógico da proposição $\sim(p \wedge r)$ é verdadeiro.

13.3. Se p e r são falsas, então $\sim p$ e $\sim r$ são verdadeiras.
Se $\sim p$ e $\sim r$ são verdadeiras, então $(\sim p) \vee (\sim r)$ é verdadeira.
O valor lógico da proposição $(\sim p) \vee (\sim r)$ é verdadeiro.

13.4. Se r é falsa, então $\sim r$ é verdadeira.
Se q e $\sim r$ são verdadeiras, então $q \wedge (\sim r)$ é verdadeira.
Se p é falsa e $q \wedge (\sim r)$ é verdadeira, então $p \vee (q \wedge (\sim r))$ é verdadeira.
O valor lógico da proposição $p \vee (q \wedge (\sim r))$ é verdadeiro.

14.1. Se p é verdadeira e $p \wedge r$ é falsa, então r é falsa.
Se r é falsa e $q \vee r$ é falsa, então q é falsa.
O valor lógico da proposição q é falso.

14.2. Se p é verdadeira e $p \wedge r$ é falsa, então r é falsa.
Se $(p \wedge q) \vee r$ é verdadeira e r é falsa, então $p \wedge q$ é verdadeira.
Se $p \wedge q$ é verdadeira, então p e q são ambas verdadeiras.
O valor lógico da proposição q é verdadeiro.

15. Sabe-se que a proposição p é verdadeira e a proposição r é falsa.

15.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee (p \wedge q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F

As colunas relativas a $r \vee (p \wedge q)$ e a q são iguais, donde se conclui que $r \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow q$.

15.2. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$r \vee q$	$(r \vee q) \wedge p$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F

As colunas relativas a $(r \vee q) \wedge p$ e a q são iguais, donde se conclui que $(r \vee q) \wedge p \Leftrightarrow q$.

Pág. 16

16.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \vee \sim p$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

A proposição $(p \vee q) \vee \sim p$ é uma tautologia porque é sempre verdadeira.

16.2.
 $(p \vee q) \vee \sim p \Leftrightarrow (q \vee p) \vee \sim p \Leftrightarrow q \vee (p \vee \sim p) \Leftrightarrow q \vee V \Leftrightarrow V$
A proposição $(p \vee q) \vee \sim p$ é uma tautologia porque é sempre verdadeira.

17.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim (p \vee q) \wedge p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

A proposição $\sim (p \vee q) \wedge p$ é sempre falsa.

17.2. $\sim (p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \wedge p \Leftrightarrow (\sim q \wedge \sim p) \wedge p$
 $\Leftrightarrow \sim q \wedge (\sim p \wedge p) \Leftrightarrow \sim q \wedge F \Leftrightarrow F$

A proposição $\sim (p \vee q) \wedge p$ é uma contradição porque é sempre falsa.

18. $p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow V \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$

Como p e q são duas proposições não equivalentes, então têm valores lógicos diferentes (uma é verdadeira e a outra é falsa). Assim sendo, $p \vee q$ é verdadeira.

Portanto, a proposição $p \vee ((\sim p) \wedge q)$ é verdadeira pois a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se essas proposições forem simultaneamente falsas.

O valor lógico da proposição $p \vee ((\sim p) \wedge q)$ é verdadeiro.

19.1. A proposição “ π é igual 3,14” é falsa e a proposição “ $\sqrt{2}$ é igual a 1,4” também é falsa.

Logo, o valor lógico da proposição “ π é igual 3,14 e $\sqrt{2}$ é igual a 1,4” é falso.

19.2. A proposição “28 é um número par” é verdadeira e a proposição “28 é divisível por 3” é falsa.

Logo, o valor lógico da proposição “28 é um número par ou divisível por 3” é verdadeiro.

19.3. A proposição “15 não é número primo” é verdadeira e a proposição “15 é múltiplo de 10” é falsa.

Logo, o valor lógico da proposição “15 não é número primo ou é múltiplo de 10” é verdadeiro.

20.1. $\sim p : 5 \geq 7$

20.2. $\sim q : 2 \geq 5 \vee 5 \geq 7$

Tarefa 2

1.1. O valor lógico da proposição p é verdadeiro e o das proposições q , r e s é falso.

1.2.

a) Se p é verdadeira, então $\sim p$ é falsa.

Se $\sim p$ é falsa e r é falsa, então $\sim p \vee r$ é falsa.

b) Se r é falsa, então $\sim r$ é verdadeira.

Se q é falsa e $\sim r$ é verdadeira, então $q \vee \sim r$ é verdadeira.

2.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F

As colunas relativas a $(p \wedge q) \vee r$ e a $p \wedge (q \vee r)$ não são iguais, donde se conclui que as proposições $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$ não são equivalentes. Por exemplo, se p é falsa e q e r são verdadeiras então $(p \wedge q) \vee r$ e a $p \wedge (q \vee r)$ têm valores lógicos distintos.

3.1.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

As colunas relativas a $p \wedge (q \vee r)$ e a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são iguais, donde se conclui que $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

3.2.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

As colunas relativas a $p \vee (q \wedge r)$ e a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são iguais, donde se conclui que $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

4. A proposição $\sim p \wedge (p \vee q)$ é verdadeira se e somente se $\sim p$ é verdadeira e $p \vee q$ é verdadeira.

Daqui resulta que p é falsa. Sendo p falsa e $p \vee q$ verdadeira então q é verdadeira.

Quanto à proposição $\sim p \wedge q$ ser verdadeira, tal acontece se e só se $\sim p$ é verdadeira e q é verdadeira, ou seja, p é falsa e q é verdadeira.

Daqui resulta que as proposições $\sim p \wedge (p \vee q)$ e $\sim p \wedge q$ são ambas verdadeiras se e só se p é falsa e q é verdadeira. Logo, são equivalentes.

5.1.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

As colunas relativas a $\sim(p \wedge q)$ e a $\sim p \vee \sim q$ são iguais, donde se conclui que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

5.2.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

As colunas relativas a $\sim(p \vee q)$ e a $\sim p \wedge \sim q$ são iguais, donde se conclui que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

Pág. 17

21.1.

a) π é um número racional ou $\sqrt{8}$ é maior ou igual a 3.

b) $\sqrt{4}$ é maior que 2.

c) $\sqrt{8}$ é maior ou igual a 3 e 4 é diferente de $\sqrt{16}$.

21.2.

a) $\sim(q \wedge s) \Leftrightarrow \sim q \vee \sim s$

Então, a proposição pode ser traduzida por: $\sqrt{8} \geq 3 \vee \sqrt{4} > 2$

b) $\sim(r \vee s) \Leftrightarrow \sim r \wedge \sim s$

Então, a proposição pode ser traduzida por: $4 \neq \sqrt{16} \wedge \sqrt{4} > 2$

Pág. 18

22.1. $p \dot{\vee} q$

22.2. Ou não vou a Paris ou não vou a Londres.

23. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$p \dot{\vee} q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

As colunas relativas a $p \dot{\vee} q$ e a $\sim(p \Leftrightarrow q)$ são iguais, donde se conclui que $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \sim(p \Leftrightarrow q)$.

Tarefa 3

1.1.

a) Hoje vou ao cinema e não vou ao teatro.

b) Hoje vou ao cinema ou fico em casa.

c) Hoje vou ao cinema e ao teatro.

d) Hoje não fico em casa e não vou ao cinema.

- e) Hoje não fico em casa e vou ao teatro.
f) Hoje não vou ao cinema ou vou ao teatro.

1.2.

- a) $\sim p \wedge r$ b) $\sim p \wedge q$ c) $r \vee p$

1.3.

- a) Hoje fico em casa ou não vou ao teatro.
b) Hoje não vou ao cinema nem vou ao teatro.

2.1. Sabe-se que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

$$\text{Então, } \sim(p \wedge q): (-3)^2 \geq 2^3 \vee \frac{2^2}{3} \leq 1.$$

2.2. Sabe-se que $\sim(q \vee r) \Leftrightarrow \sim q \wedge \sim r$.

$$\text{Então, } \sim(q \vee r): \frac{2^2}{3} \leq 1 \wedge \left(-\frac{3}{5}\right)^4 \neq \left(\frac{9}{25}\right)^2.$$

2.3. Sabe-se que $\sim(\sim p \wedge \sim r) \Leftrightarrow p \vee r$.

$$p \vee r: (-3)^2 \geq 2^3 \wedge \left(-\frac{3}{5}\right)^4 \neq \left(\frac{9}{25}\right)^2.$$

2.4. Sabe-se que $\sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

$$p \wedge \sim q: (-3)^2 \geq 2^3 \vee \frac{2^2}{3} > 1.$$

Pág. 19

24. As proposições a , b e c são todas verdadeiras e a proposição d é falsa.

24.1. Se a é verdadeira e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $a \Rightarrow b$ é verdadeiro.

24.2. Se c é verdadeira e d é falsa então $c \Rightarrow d$ é falsa.

O valor lógico da proposição $c \Rightarrow d$ é falso.

24.3. Se d é falsa e b é verdadeira então $d \Rightarrow b$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $d \Rightarrow b$ é verdadeiro.

24.4. Sendo a verdadeira, então $\sim a$ é falsa.

Se $\sim a$ é falsa e c é verdadeira então $(\sim a) \Rightarrow c$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(\sim a) \Rightarrow c$ é verdadeiro.

24.5. Sendo a verdadeira, então $\sim a$ é falsa.

Se d é falsa e $\sim a$ é falsa então $d \Rightarrow (\sim a)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $d \Rightarrow (\sim a)$ é verdadeiro.

24.6. Sendo c verdadeira, então $\sim c$ é falsa.

Se b é verdadeira e $\sim c$ é falsa então $b \Rightarrow (\sim c)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $b \Rightarrow (\sim c)$ é falso.

24.7. Se a é verdadeira e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

Sendo a e b verdadeiras, então $\sim a$ e $\sim b$ são falsas.

Se $\sim a$ é falsa e $\sim b$ é falsa então $(\sim a) \Rightarrow (\sim b)$ é verdadeira.

Se $a \Rightarrow b$ é verdadeira e $(\sim a) \Rightarrow (\sim b)$ é verdadeira então

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\sim a) \Rightarrow (\sim b))$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\sim a) \Rightarrow (\sim b))$ é verdadeiro.

24.8. Se a é verdadeira e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

Sendo a e b verdadeiras, então $\sim a$ e $\sim b$ são falsas.

Se $\sim b$ é falsa e $\sim a$ é falsa então $(\sim b) \Rightarrow (\sim a)$ é verdadeira.

Se $a \Rightarrow b$ é verdadeira e $(\sim b) \Rightarrow (\sim a)$ é verdadeira então

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\sim b) \Rightarrow (\sim a))$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\sim b) \Rightarrow (\sim a))$ é verdadeiro.

Pág. 20

25.1.

a) $a \Rightarrow (\sim b)$

b) $(\sim a \wedge c) \Rightarrow b$

25.2.

a) Se Bernardo pratica voleibol então Catarina pratica *ballet*.

b) Se Ana pratica natação ou Bernardo não pratica voleibol então Catarina não pratica *ballet*.

c) Se Ana não pratica natação então Bernardo não pratica voleibol e Catarina pratica *ballet*.

d) Se Ana pratica natação ou Catarina não pratica *ballet* então Bernardo pratica voleibol.

e) A Ana pratica natação ou se o Bernardo não pratica voleibol então a Catarina não pratica *ballet*.

Tarefa 4

1.1. Proposição dada: Se o preço do livro é superior a 20 euros e não tem desconto, então não compro o livro.

Proposições elementares:

p : O preço do livro é superior a 20 euros.

q : O livro tem desconto.

r : Compro o livro.

Proposição dada em linguagem simbólica: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$

1.2. Proposição dada: Compro o livro se e só se o desconto for superior a 25%.

Proposições elementares:

p : Compro o livro.

q : O livro tem um desconto superior a 25%.

Proposição dada em linguagem simbólica: $p \Leftrightarrow q$

1.3. Proposição dada: Se $-3 < 0$ e $2 > 0$, então $-3 \times 2 < 0$

Proposições elementares:

p : $-3 < 0$

q : $2 > 0$

r : $-3 \times 2 < 0$

Proposição dada em linguagem simbólica: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

1.4. Proposição dada: Se $60 \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{60} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt{60}$ é um número irracional.

Proposições elementares:

p : $60 \in \mathbb{N}$

q : $\sqrt{60} \in \mathbb{N}$

r : $\sqrt{60}$ é um número irracional.

Proposição dada em linguagem simbólica: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

1.5. Proposição dada: Nem $\sqrt{7}$ é um número natural nem 7 é um quadrado perfeito.

Proposições elementares:

p : $\sqrt{7}$ é um número natural.

q : 7 é um quadrado perfeito.

Proposição dada em linguagem simbólica: $\sim p \wedge \sim q$

1.6. Proposição dada: O número 1653 é múltiplo de 3 se e só se a soma do valor dos algarismos é divisível por 3.

Proposições elementares:

p : O número 1653 é múltiplo de 3.

q : A soma do valor dos algarismos do número é divisível por 3.

Proposição dada em linguagem simbólica: $p \Leftrightarrow q$

2.1. $(a \wedge b) \vee c$ **2.2.** $c \Rightarrow (\sim a \wedge \sim b)$

2.3. $(\sim a) \Rightarrow (b \vee c)$ **2.4.** $c \Rightarrow (a \wedge b)$

2.5. $c \Rightarrow (\sim a \vee b)$ **2.6.** $c \Leftrightarrow (a \wedge b)$

Pág. 21

26.1. $\sim a \vee b$

26.2. $(\sim b) \Rightarrow c$

26.3. $(a \wedge c) \Rightarrow b$ Nota: $2 < \frac{5}{2} < 3 \Leftrightarrow 2 < \frac{5}{2} \wedge \frac{5}{2} < 3$

26.4. $(\sim c) \Leftrightarrow a$

Pág. 22

27. As proposições p e q são verdadeiras e a proposição r é falsa.

Nota: Em $\mathbb{R}$, $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$.

27.1. Se r é falsa e p é verdadeira então $r \Rightarrow p$ é verdadeira.

Se q é verdadeira e r é falsa então $q \Rightarrow r$ é falsa.

Se $r \Rightarrow p$ é verdadeira e $q \Rightarrow r$ é falsa então $(r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow r)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow r)$ é verdadeiro.

27.2. Se q é verdadeira e r é falsa então $q \wedge r$ é falsa.

Se p é verdadeira e $q \wedge r$ é falsa então $p \Rightarrow (q \wedge r)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \Rightarrow (q \wedge r)$ é falso.

27.3. Sendo r falsa, então $\sim r$ é verdadeira.

Se q é verdadeira e $\sim r$ é verdadeira então $q \vee \sim r$ é verdadeira.

Logo, $\sim (q \vee \sim r)$ é falsa.

Sendo p verdadeira, então $\sim p$ é falsa.

Se $\sim p$ é falsa e q é verdadeira então $\sim p \vee q$ é verdadeira.

Se $\sim (q \vee \sim r)$ é falsa e $\sim p \vee q$ é verdadeira então

$\sim (q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\sim (q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ é verdadeiro.

27.4. Se p é verdadeira e r é falsa então $p \wedge r$ é falsa. Logo,

$\sim (p \wedge r)$ é verdadeira.

Se q é verdadeira e $\sim (p \wedge r)$ é verdadeira então $q \Rightarrow \sim (p \wedge r)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $q \Rightarrow \sim (p \wedge r)$ é verdadeiro.

28. Se $\sim a \Rightarrow \sim b$ é falsa então $\sim a$ é verdadeira e $\sim b$ é falsa.

Logo, conclui-se que a é falsa e b é verdadeira.

28.1. Se b é verdadeira e a é falsa então $b \Rightarrow a$ é falsa.

O valor lógico da proposição $b \Rightarrow a$ é falso.

28.2. Se a é falsa e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $a \Rightarrow b$ é verdadeiro.

28.3. Se a é falsa e b é verdadeira então $a \Leftrightarrow b$ é falsa.

O valor lógico da proposição $a \Leftrightarrow b$ é falso.

Pág. 23

29.1. $\sim (\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow \sim q \wedge \sim p \Leftrightarrow \sim (q \vee p)$

29.2. $\sim (p \vee q) \Rightarrow p \Leftrightarrow \sim [\sim (p \vee q)] \vee p \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (p \vee q) \vee p \Leftrightarrow p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee p) \vee q \Leftrightarrow p \vee q$

29.3. $\sim p \Rightarrow \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p) \vee \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow p \vee (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee \sim q \Leftrightarrow V \vee \sim q \Leftrightarrow V$

30.1.

a) Se visitei Paris então não visitei Barcelona.

b) Se visitei Paris e Barcelona então não visitei Roma.

30.2. Se a disjunção $((b \wedge r) \Rightarrow (\sim p)) \vee p$ fosse falsa teríamos
 $(b \wedge r) \Rightarrow (\sim p)$ falsa e p falsa.

Mas a implicação $(b \wedge r) \Rightarrow (\sim p)$ só é falsa se $b \wedge r$ é verdadeira e $\sim p$ é falsa, ou seja p é verdadeira.

Ora a proposição p não pode ter o valor lógico falso e verdadeiro (princípio da não contradição).

31. Se $(a \Rightarrow \sim b) \vee c$ é falsa então $a \Rightarrow \sim b$ é falsa e c é falsa.

Se $a \Rightarrow \sim b$ é falsa então a é verdadeira e $\sim b$ é falsa.

Sendo $\sim b$ falsa, então b é verdadeira.

Assim, conclui-se que a e b são verdadeiras e c é falsa.

31.1. Se c é falsa e a é verdadeira, então $\sim c$ é verdadeira e $\sim a$ é falsa.

Se $\sim c$ é verdadeira e $\sim a$ é falsa então $(\sim c) \Rightarrow (\sim a)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $(\sim c) \Rightarrow (\sim a)$ é falso.

31.2. Se a é verdadeira e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

Se b é verdadeira e c é falsa então $b \wedge c$ é falsa.

Se $a \Rightarrow b$ é verdadeira e $b \wedge c$ é falsa então $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \wedge c)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \wedge c)$ é falso.

31.3. Sendo c falsa, então $\sim c$ é verdadeira.

Se $\sim c$ é verdadeira e b é verdadeira então $\sim c \Rightarrow b$ é verdadeira.

Se a é verdadeira e b é verdadeira então $a \Rightarrow b$ é verdadeira.

Se $\sim c \Rightarrow b$ é verdadeira e $a \Rightarrow b$ é verdadeira então

$(\sim c \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow b)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(\sim c \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow b)$ é verdadeiro.

32. Se $\sim(\sim a \Rightarrow b) \wedge c$ é verdadeira então $\sim(\sim a \Rightarrow b)$ é verdadeira e c é verdadeira.

Sendo $\sim(\sim a \Rightarrow b)$ verdadeira, então $\sim a \Rightarrow b$ é falsa.

Se $\sim a \Rightarrow b$ é falsa então $\sim a$ é verdadeira e b é falsa.

Sendo $\sim a$ verdadeira, então a é falsa.

Conclusão: O valor lógico de a e b é falso e o de c é verdadeiro.

33. Se $p \Leftrightarrow q$, então as proposições p e q têm o mesmo valor lógico, isto é, são ambas verdadeiras ou são ambas falsas.

Vamos, então, começar por simplificar a expressão

$$(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim q \vee (p \wedge q)).$$

$$(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim q \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim p) \vee q) \vee ((\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee ((\sim q \vee p) \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (\sim q \vee p)$$

Ora, uma das proposições q e $\sim q$ é verdadeira. Logo, $p \vee q$ é verdadeira ou $\sim q \vee p$ é verdadeira.

Se $p \vee q$ é verdadeira ou $\sim q \vee p$ é verdadeira, então

$$(p \vee q) \vee (\sim q \vee p) \text{ é verdadeira.}$$

Assim sendo a proposição $(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$ é verdadeiro.

Proposta 1

1.1.

a) O número 9 não é primo e o número 26 é múltiplo de 3.

b) O número 9 é primo ou o número 26 não é múltiplo de 3.

1.2.

a) $\sim p \vee q$

b) $\sim p \wedge \sim q$

1.3.

a) As proposições p e q são ambas falsas.

Sendo p falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

Se $\sim p$ é verdadeira e q é falsa, então $\sim p \vee q$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\sim p \vee q$ é verdadeiro.

b) Sendo q falsa, então $\sim q$ é verdadeira.

Se p é falsa e $\sim q$ é verdadeira, então $p \wedge \sim q$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \wedge \sim q$ é falso.

c) Sendo p falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

Se $\sim p$ é verdadeira e q é falsa, então $\sim p \wedge q$ é falsa.

Se p é falsa e $\sim p \wedge q$ é falsa, então $p \vee (\sim p \wedge q)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \vee (\sim p \wedge q)$ é falso.

Proposta 2

Se $a \wedge \sim b$ é verdadeira então a é verdadeira e $\sim b$ é verdadeira.

Sendo $\sim b$ verdadeira, então b é falsa.

Conclui-se que a é verdadeira e b é falsa.

2.1. Se a é verdadeira e b é falsa, então $a \vee b$ é verdadeira.

Logo, o valor lógico da proposição $\sim(a \vee b)$ é falso.

2.2. Se a é verdadeira e $\sim b$ é verdadeira, então $a \vee \sim b$ é verdadeira.

Sendo a verdadeira, então $\sim a$ é falsa.

Se $\sim a$ é falsa e $a \vee \sim b$ é verdadeira, então $\sim a \wedge (a \vee \sim b)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $\sim a \wedge (a \vee \sim b)$ é falso.

2.3. Sendo a verdadeira, então $\sim a$ é falsa.

Se $\sim a$ é falsa e b é falsa, então $\sim a \wedge b$ é falsa.

Se a é verdadeira e $\sim a \wedge b$ é falsa, então $a \vee (\sim a \wedge b)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $a \vee (\sim a \wedge b)$ é verdadeiro.

Proposta 3

Se b é falsa e $\sim a \vee b$ é verdadeira, então $\sim a$ é verdadeira.

Sendo $\sim a$ verdadeira, então a é falsa.

3.1. Sendo b falsa, então $\sim b$ é verdadeira.

Se a é falsa e $\sim b$ é verdadeira, então $a \vee \sim b$ é verdadeira.

Se $\sim a$ é verdadeira e $a \vee \sim b$ é verdadeira, então $\sim a \wedge (a \vee \sim b)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\sim a \wedge (a \vee \sim b)$ é verdadeiro.

3.2. Se a é falsa e b é falsa, então $a \wedge b$ é falsa. Logo, $\sim(a \wedge b)$ é verdadeira.

Se a é falsa e $\sim b$ é verdadeira, então $a \wedge \sim b$ é falsa.

Se $\sim(a \wedge b)$ é verdadeira e $a \wedge \sim b$ é falsa, então

$\sim(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b)$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\sim(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b)$ é verdadeiro.

3.3. Se $\sim a$ é verdadeira e b é falsa, então $\sim a \vee b$ é verdadeira.

Logo, $\sim(\sim a \vee b)$ é falsa.

Se $\sim(\sim a \vee b)$ é falsa e b é falsa, então $\sim(\sim a \vee b) \wedge b$ é falsa.

O valor lógico da proposição $\sim(\sim a \vee b) \wedge b$ é falso.

Proposta 4

4.1.

a) $\sim q$

b) $\sim(q \wedge r)$

c) $\sim p \wedge q$

d) $q \vee \sim r$

4.2.

a) O primeiro classificado é português ou o terceiro classificado é italiano.

b) O primeiro classificado não é português e o terceiro classificado não é italiano.

c) Não é verdade que o segundo classificado é português ou o terceiro classificado é italiano.

d) Os dois primeiros classificados são portugueses.

4.3. Se $\sim(p \vee \sim q) \wedge r$ é verdadeira, então $\sim(p \vee \sim q)$ é verdadeira e r é verdadeira.

Se $\sim(p \vee \sim q)$ é verdadeira, então $p \vee \sim q$ é falsa.

Se $p \vee \sim q$ é falsa, então p é falsa e $\sim q$ é falsa.

Sendo $\sim q$ falsa, então q é verdadeira.

Assim sendo, as proposições q e r são verdadeiras e a proposição p é falsa.

Conclui-se, então, que o primeiro classificado é português, o segundo classificado é português e o terceiro classificado é italiano.

Pág. 26

Proposta 5

Se as proposições p e q não são equivalentes, então têm valores lógicos diferentes (uma delas é verdadeira e a outra é falsa).

5.1. Se uma das proposições p e q é verdadeira, então a proposição $p \vee q$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $p \vee q$ é verdadeiro.

5.2. Se uma das proposições p e q é falsa, então a proposição $p \wedge q$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \wedge q$ é falso.

5.3. Se a proposição $p \vee q$ é verdadeira (provado em 5.1.), então a proposição $(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$ é verdadeira

(independentemente do valor lógico da proposição $p \wedge \sim q$).

O valor lógico da proposição $(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$ é verdadeiro.

5.4. Se uma das proposições p e q é verdadeira, então uma das proposições $\sim p$ e $\sim q$ é falsa.

Se uma das proposições $\sim p$ e $\sim q$ é falsa, então a proposição $\sim p \wedge \sim q$ é falsa.

Se a proposição $\sim p \wedge \sim q$ é falsa, então a proposição

$(\sim p \wedge \sim q) \wedge p$ é falsa (independentemente do valor lógico da proposição p).

O valor lógico da proposição $(\sim p \wedge \sim q) \wedge p$ é falso.

Proposta 6

6.1.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \wedge r)$
V	V	V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	F	F

6.2. Por observação da última coluna da tabela de verdade construída na alínea anterior, conclui-se que se a proposição $(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \wedge r)$ for verdadeira então as proposições p e r são verdadeiras e a proposição q é falsa.

Proposta 7

7.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$\sim p$	$q \wedge p$	$\sim p \vee (q \wedge p)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V

As colunas relativas a $\sim p \vee (q \wedge p)$ e a $\sim(p \wedge \sim q)$ são iguais, donde se conclui que $\sim p \vee (q \wedge p)$ é equivalente a $\sim(p \wedge \sim q)$.

7.2. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$p \wedge (\sim(p \vee \sim q))$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F

A proposição $p \wedge (\sim(p \vee \sim q))$ é sempre falsa, isto é, é uma contradição.

7.3. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \vee (\sim(p \wedge \sim q))$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

A proposição $p \vee (\sim(p \wedge \sim q))$ é sempre verdadeira, isto é, é uma tautologia.

7.4. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$(\sim q \wedge p) \vee q$	$p \vee [(\sim q \wedge p) \vee q]$	$p \vee q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F

As colunas relativas a $p \vee [(\sim q \wedge p) \vee q]$ e a $p \vee q$ são iguais, donde se conclui que $p \vee [(\sim q \wedge p) \vee q]$ é equivalente a $p \vee q$.

Proposta 8

Se $(a \vee \sim b) \vee (\sim a \wedge c)$ é falsa, então $a \vee \sim b$ é falsa e $\sim a \wedge c$ é falsa.

Se $a \vee \sim b$ é falsa, então a é falsa e $\sim b$ é falsa. Logo, b é verdadeira.

Sendo a falsa, então $\sim a$ é verdadeira.

Se $\sim a$ é verdadeira e $\sim a \wedge c$ é falsa, então c é falsa.

Portanto, as proposições a e c são falsas e a proposição b é verdadeira.

Conclui-se que a chave B abre a porta da entrada n.º 48 e a chave A abre a porta da entrada n.º 50.

Proposta 9

9.1. Sabe-se que $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Se $p \wedge q$ é falsa, então $\sim p \vee \sim q$ é verdadeira.

$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
F	V

9.2. Sabe-se que $\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow (p \vee q)$.

Se $p \vee q$ é verdadeira, então $\sim p \wedge \sim q$ é falsa.

$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	F

9.3. Sabe-se que $\sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee \sim q$.

Se $p \vee \sim q$ é verdadeira, então $\sim(\sim p \wedge q)$ é verdadeira.

$p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
V	V

9.4. Sabe-se que $\sim p \wedge q \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$.

Se $p \vee \sim q$ é falsa, então $\sim p \wedge q$ é verdadeira.

$\sim p \wedge q$	$p \vee \sim q$
V	F

Proposta 10

10.1.

a) Pedro não telefona à Joana ou não a convida para passear.

b) Pedro não telefona à Joana e não a convida para passear.

c) Hoje estudo ou não vou passear.

10.2. a : Hoje não estudo. e b : Hoje vou passear.

10.3. s : Hoje estudo. e t : Hoje não vou passear.

Proposta 11

11.1. A proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa.

a) Se p é verdadeira e q é falsa então $p \Rightarrow q$ é falsa.

O valor lógico da proposição $p \Rightarrow q$ é falso.

b) Sendo q falsa, então $\sim q$ é verdadeira.

Se p é verdadeira e $\sim q$ é verdadeira então $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeiro.

c) Se q é falsa e p é verdadeira então $q \Rightarrow p$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $q \Rightarrow p$ é verdadeiro.

d) Sendo p verdadeira, então $\sim p$ é falsa.

Se q é falsa e $\sim p$ é falsa então $q \Rightarrow \sim p$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $q \Rightarrow \sim p$ é verdadeiro.

11.2.

a) Se $p \Rightarrow r$ é verdadeira e p é verdadeira então r é verdadeira.

O valor lógico da proposição r é verdadeiro.

b) Se $r \Rightarrow (p \wedge q)$ é falsa então r é verdadeira e $p \wedge q$ é falsa.

O valor lógico da proposição r é verdadeiro.

c) Se $(r \vee q) \Rightarrow \sim p$ é falsa então $r \vee q$ é verdadeira e $\sim p$ é falsa.

Se $r \vee q$ é verdadeira e q é falsa então r é verdadeira.

O valor lógico da proposição r é verdadeiro.

Proposta 12

12.1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

12.2.

a) A proposição $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ é falsa porque as colunas relativas a $p \Rightarrow q$ e a $\sim p \Rightarrow \sim q$ são diferentes.

Logo, conclui-se que a proposição $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ não é uma tautologia.

b) A proposição $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ é falsa porque as colunas relativas a $q \Rightarrow p$ e a $p \Rightarrow q$ são diferentes.

Logo, conclui-se que a proposição $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ não é uma tautologia.

c) A proposição $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ é verdadeira porque as colunas relativas a $p \Rightarrow q$ e a $\sim q \Rightarrow \sim p$ são iguais.

Logo, conclui-se que a proposição $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ é uma tautologia.

d) A proposição $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ é verdadeira porque as colunas relativas a $\sim p \Rightarrow \sim q$ e a $q \Rightarrow p$ são iguais.

Logo, conclui-se que a proposição $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ é uma tautologia.

Proposta 13

13.1.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

13.2.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$r \wedge q$	$(p \vee \sim r) \Rightarrow (r \wedge q)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Pág. 28

Proposta 14

14.1.

a) Se 256^2 não é múltiplo de 4 então 256 não é número par.

b) Se a soma do algarismo das dezenas com o algarismo das unidades do número 256^2 é divisível por 4 então esse número é múltiplo de 4.

14.2.

a) $a \Rightarrow b \wedge c$

b) $(\sim a) \Rightarrow (\sim b \wedge \sim c)$

14.3. $\sim a \Rightarrow (\sim b \wedge \sim c) \Leftrightarrow (\sim(\sim a)) \vee (\sim b \wedge \sim c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \vee (\sim(b \vee c)) \Leftrightarrow (\sim(b \vee c)) \vee a \Leftrightarrow b \vee c \Rightarrow a$$

Proposta 15

15.1.

a) Sendo p verdadeira, então $\sim p$ é falsa.

Se $\sim p$ é falsa e r é falsa então $\sim p \vee r$ é falsa.

Sendo r falsa, então $\sim r$ é verdadeira.

Se $\sim p \vee r$ é falsa e $\sim r$ é verdadeira então $\sim p \vee r \Rightarrow \sim r$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\sim p \vee r \Rightarrow \sim r$ é verdadeiro.

b) Se r é falsa e p é verdadeira então $r \vee p$ é verdadeira.

Se p é verdadeira e $r \vee p$ é verdadeira então $p \Rightarrow r \vee p$ é verdadeira.

Sendo p verdadeira, então $\sim p$ é falsa.

Se $\sim p$ é falsa e r é falsa então $\sim p \vee r$ é falsa.

Se $p \Rightarrow r \vee p$ é verdadeira e $\sim p \vee r$ é falsa então

$(p \Rightarrow r \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee r)$ é falsa.

O valor lógico da proposição $(p \Rightarrow r \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee r)$ é falso.

15.2.

a) Se $p \wedge q \Rightarrow r$ é falsa então $p \wedge q$ é verdadeira e r é falsa.

Se $p \wedge q$ é verdadeira então p é verdadeira e q é verdadeira.

O valor lógico da proposição q é verdadeiro.

b) Se r é falsa então $q \wedge r$ é falsa, independentemente do valor lógico da proposição q .

Se $(p \vee q \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ é verdadeira e $q \wedge r$ é falsa então $p \vee q \Rightarrow \sim q$ é falsa.

Se $p \vee q \Rightarrow \sim q$ é falsa então $p \vee q$ é verdadeira e $\sim q$ é falsa.

Sendo $\sim q$ falsa, então q é verdadeira.

O valor lógico da proposição q é verdadeiro.

Proposta 16

16.1. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \vee q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee q \Leftrightarrow q$$

16.2. $\sim(p \vee q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow \sim(\sim(p \vee q) \vee \sim p) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim(p \vee q)) \wedge \sim(\sim p) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$$

16.3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow p \Rightarrow (\sim q \vee \sim p) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q \vee \sim p) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (\sim q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)$$

16.4. $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p) \Leftrightarrow V \wedge (q \vee \sim p) \Leftrightarrow q \vee \sim p$$

Proposta 17

Se $(a \Rightarrow \sim c) \vee b$ é falsa, então $a \Rightarrow \sim c$ é falsa e b é falsa.

Se $a \Rightarrow \sim c$ é falsa, então a é verdadeira e $\sim c$ é falsa. Logo, c é verdadeira.

Conclusão: O Tiago lançou a seta vermelha (porque c é verdadeira), o Rui lançou a seta verde (porque b é falsa e c é verdadeira) e o Pedro lançou a seta azul.

Proposta 18

18.1. Se $(a \Rightarrow (b \wedge c)) \vee (c \Rightarrow (a \wedge b))$ é falsa, então $a \Rightarrow (b \wedge c)$ é falsa e $c \Rightarrow (a \wedge b)$ é falsa.

Se $a \Rightarrow (b \wedge c)$ é falsa, então a é verdadeira e $b \wedge c$ é falsa.

Se $c \Rightarrow (a \wedge b)$ é falsa, então c é verdadeira e $a \wedge b$ é falsa.

Se $b \wedge c$ é falsa e c é verdadeira, então b é falsa.

Portanto, o valor lógico das proposições a e c é verdadeiro e o da proposição b é falso.

18.2. $p \Rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \text{V} \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

As proposições $p \Rightarrow p \wedge q$ e $\sim p \vee q$ são equivalentes. Como a proposição $\sim p \vee q$ é verdadeira, também a proposição $p \Rightarrow p \wedge q$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $p \Rightarrow p \wedge q$ é verdadeiro.

Proposta 19

19.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Como as colunas relativas a $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e a $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ não são iguais, conclui-se que as proposições $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ não são equivalentes. Então a implicação não goza da propriedade associativa.

19.2. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \vee (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V

Como as colunas relativas a $p \vee (q \Rightarrow r)$ e a $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$ são iguais, conclui-se que as proposições $p \vee (q \Rightarrow r)$ e $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$ são equivalentes. Então a disjunção é distributiva em relação à implicação.

Proposta 20

20.1. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$p \dot{\vee} q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	V	F

Como as colunas relativas a $p \dot{\vee} q$ e a $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ são iguais, conclui-se que $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

20.2. Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

p	q	r	$p \dot{\vee} q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F

Como as colunas relativas a $p \dot{\vee} q$ e a $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ são iguais, conclui-se que $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

Proposta 21

21.1.

a) $b \Leftrightarrow a$

b) $(\sim a) \Rightarrow (\sim b \wedge \sim c)$

c) $(b \wedge \sim c) \dot{\vee} a$

21.2. $a \Rightarrow (\sim b \vee c) \Leftrightarrow \sim a \vee (\sim b \vee c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \vee c \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$$

21.3.

a) $\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (p \wedge \sim(\sim q)) \wedge \sim q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$$

A proposição $\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q$ é sempre falsa, isto é, é uma contradição.

b) Recorrendo a uma tabela de verdade, tem-se:

a	b	$\sim a$	$\sim a \wedge b$	$(\sim a \wedge b) \Rightarrow b$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

A proposição $(\sim a \wedge b) \Rightarrow b$ é sempre verdadeira, isto é, é uma tautologia.

Pág. 30

34.1. $4x$ é uma expressão designatória.

34.2. $5 > 3$ é uma proposição.

34.3. $2\pi r = 10$ é uma condição.

34.4. 4π é uma designação.

34.5. $3n+1$ é uma expressão designatória.

34.6. $3n+1 < 15$ é uma condição.

34.7. A bicicleta tem duas rodas é uma proposição.

34.8. 15 é múltiplo de 6 é uma proposição.

34.9. $|x| > 3$ é uma condição.

34.10. A soma dos ângulos internos, em graus, de um polígono com n lados é igual a $(n-2) \times 180$ é uma condição.

Pág. 31

35.1. $x-2 < x \Leftrightarrow x-x < 2 \Leftrightarrow 0 < 2$.

Então, o valor lógico da proposição $\forall x, x-2 < x$ é verdadeiro.

35.2. $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -1$.

Então, o valor lógico da proposição $\forall x, x^2 + 1 > 0$ é verdadeiro.

Pág. 32

36.1. As condições II e IV são universais em $\mathbb{R}$ porque quando se substitui numa das condições x por qualquer valor real obtém-se sempre uma proposição verdadeira.

36.2. As condições I e III não são universais em $\mathbb{R}$.

A condição I não é universal em $\mathbb{R}$ pois a proposição $\forall x, x \in \{ \}$ é falsa. Por exemplo, se $x = 1$, a proposição $1 \in \{ \}$ é falsa.

A condição III não é universal em $\mathbb{R}$ pois a proposição $\forall x, x \notin \mathbb{Q}$ é falsa. Por exemplo, se $x = 2$, a proposição $2 \notin x \notin \mathbb{Q}$ é falsa.

37.1. O valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 > x$ é falso.

Repara que se $x = 0$, a proposição $0^2 > 0$ é falsa.

37.2. O valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{Z}^-: x^2 > x$ é verdadeiro.

Se $x \in \mathbb{Z}^-$, então $x^2 > 0$. Logo, $x^2 > x$.

37.3. O valor lógico da proposição $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ é falso.

Por exemplo se $x = 3$, a proposição $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ é falsa.

37.4. O valor lógico da proposição $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}$ é verdadeiro. O quadrado de um número natural ainda é um número natural.

38.1. O valor lógico da proposição $\exists x \in \mathbb{N}: x$ é ímpar e divisível por 2 é falso.

Os números ímpares não são divisíveis por 2, logo a proposição dada é falsa.

38.2. O valor lógico da proposição “No conjunto dos triângulos, existe um triângulo com todos os ângulos externos agudos” é falso.

A soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360° , logo os ângulos externos não podem ser todos agudos.

38.3. O valor lógico da proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -3$ é falso.

Sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, isto é, o quadrado de qualquer número real é não negativo.

Pág. 33

39.1.

a) A condição III: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ é universal em $\mathbb{R}$.

b) A condição I: $x^2 < 0$ é impossível em $\mathbb{R}$.

39.2. As condições II e IV são possíveis não universais.

A condição II é possível porque a proposição $\exists x: x < \frac{x}{2}$ é

verdadeira. Por exemplo, se $x = -1$, a proposição $-1 < \frac{-1}{2}$ é verdadeira.

A condição II não é universal porque a proposição $\forall x, x < \frac{x}{2}$ é

falsa. Por exemplo, se $x = 0$, a proposição $0 < \frac{0}{2}$ é falsa.

A condição IV é possível porque a proposição $\exists x: x < |x|$ é verdadeira. Por exemplo, se $x = -2$, a proposição $-2 < |-2|$ é verdadeira.

A condição IV não é universal porque a proposição $\forall x, x < |x|$ é falsa. Por exemplo, se $x = 0$, a proposição $0 < |0|$ é falsa.

Pág. 34

40.1. A condição $p(x)$ é universal, a condição $q(x)$ é impossível e a condição $r(x)$ é possível não universal.

40.2.

a) Sendo $p(x)$ uma condição universal, então a condição $p(x) \vee q(x)$ é universal.

b) Sendo $q(x)$ uma condição impossível, então a condição $p(x) \wedge q(x)$ é impossível.

c) Sendo $p(x)$ uma condição universal, então a condição $p(x) \vee r(x)$ é universal.

d) Sendo $q(x)$ uma condição impossível, então a condição $q(x) \wedge r(x)$ é impossível.

e) Sendo $q(x)$ uma condição impossível e $r(x)$ uma condição possível não universal, então a condição $r(x) \vee q(x)$ é possível não universal.

40.3.

- a) Sendo $p(x)$ uma condição universal e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $p(x) \vee t(x)$ é universal.
- b) Sendo $q(x)$ uma condição impossível e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $q(x) \wedge t(x)$ é impossível.
- c) Sendo $r(x)$ uma condição possível não universal e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $r(x) \vee t(x)$ é possível.

Tarefa 5

1.1.

- a) A condição $p(x)$ é universal pois a proposição $\forall x, x+1 > x$ é verdadeira.
- b) A condição $q(x)$ é impossível pois a proposição $\exists x: x^2 < 0$ é falsa.
- c) A condição $r(x)$ é possível não universal pois a proposição $\exists x: x^2 = 4$ é verdadeira (por exemplo, $2^2 = 4$) e a proposição $\forall x, x^2 = 4$ é falsa (por exemplo, $1^2 = 4$ é uma proposição falsa).

1.2.

- a) Sendo $p(x)$ uma condição universal e $q(x)$ uma condição é impossível, então a condição $p(x) \vee q(x)$ é universal.
- b) Sendo $p(x)$ uma condição universal e $r(x)$ uma condição possível não universal, então a condição $p(x) \vee r(x)$ é universal.
- c) Sendo $p(x)$ uma condição universal e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $p(x) \vee t(x)$ é universal.

1.3.

- a) Sendo $q(x)$ uma condição impossível e $p(x)$ uma condição é universal, então a condição $q(x) \wedge p(x)$ é impossível.
- b) Sendo $q(x)$ uma condição impossível e $r(x)$ uma condição possível não universal, então a condição $q(x) \wedge r(x)$ é impossível.
- c) Sendo $q(x)$ uma condição impossível e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $q(x) \wedge t(x)$ é impossível.

1.4.

- a) Sendo $r(x)$ uma condição possível e $p(x)$ uma condição é universal, então a condição $r(x) \vee p(x)$ é universal.
- b) Sendo $r(x)$ uma condição possível e $q(x)$ uma condição é impossível, então a condição $r(x) \vee q(x)$ é possível.
- c) Sendo $r(x)$ uma condição possível e $t(x)$ uma condição qualquer, então a condição $r(x) \vee t(x)$ é possível.

Pág. 35

41.1. Existe pelo menos um quadrilátero com os lados iguais que não é um quadrado.

41.2. Existe pelo menos uma turma que tem menos de 25 alunos.

41.3. Existe pelo menos um quadrado perfeito que é um número ímpar.

41.4. Qualquer aluno da turma A não tem 16 anos.

41.5. Todas as intervenções foram não positivas.

41.6. Todos os números reais têm inverso.

$$42.1. \sim(\forall x, x^2 = x) \Leftrightarrow \exists x: x^2 \neq x$$

$$42.2. \sim(\forall x, x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists x: x^2 \leq 0$$

$$42.3. \sim(\forall x, x < 3) \Leftrightarrow \exists x: x \geq 3$$

$$42.4. \sim(\exists x: x+1=2x) \Leftrightarrow \forall x, x+1 \neq 2x$$

$$42.5. \sim(\exists x: x \leq -2) \Leftrightarrow \forall x, x > -2$$

$$42.6. \sim(\exists x: \sqrt[3]{x} \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \forall x, \sqrt[3]{x} \notin \mathbb{Z}$$

$$42.7. \sim(\forall x, x < 3 \vee x > 5) \Leftrightarrow \exists x: x \geq 3 \wedge x \leq 5 \Leftrightarrow \exists x: 3 \leq x \leq 5$$

$$42.8. \sim(\exists x: x \geq -3 \wedge x < 0) \Leftrightarrow \forall x, x < -3 \vee x \geq 0$$

Pág. 36

43.1. A proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow p(x)$ é falsa pois se $x = 2$, a implicação $2 \in A \Rightarrow |2| \leq 1$ é falsa (porque a proposição $2 \in A$ é verdadeira e a proposição $|2| \leq 1$ é falsa).

43.2. A proposição $\exists x: x \in A \wedge p(x)$ é verdadeira pois se $x = 1$, a conjunção $1 \in A \wedge |1| \leq 1$ é verdadeira (porque a proposição $1 \in A$ é verdadeira e a proposição $|1| \leq 1$ também é verdadeira).

43.3. Para provar que a proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow p(x)$ é verdadeira vamos considerar dois casos:

1) Valores de x que não pertencem ao conjunto B

Neste caso a implicação $x \in B \Rightarrow |x| \leq 1$ é verdadeira.

Pois, os valores lógicos de $F \Rightarrow V$ e de $F \Rightarrow F$ são verdade.

2) Valores de x que pertencem ao conjunto B

Neste caso, o valor lógico da implicação $x \in B \Rightarrow |x| \leq 1$ também é verdade, conforme se mostra na tabela abaixo.

x	$ x $	$x \in B$	$ x \leq 1$	$x \in B \Rightarrow x \leq 1$
-1	1	V	V	V
0	0	V	V	V
1	1	V	V	V

Conclusão: a proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow p(x)$ é verdadeira.

44.1. O valor lógico da proposição $\forall x, x \in \mathbb{N} \Rightarrow p(x)$, sendo $p(x): x^2$ é quadrado perfeito, é verdadeiro.

44.2. O valor lógico da proposição $\forall x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow p(x)$, sendo $p(x): x^2$ é quadrado perfeito, é falso pois se, por exemplo, $x = \sqrt{2}$, a implicação $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{2})^2$ é quadrado perfeito é falsa (porque a proposição $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ é verdadeira e a proposição $(\sqrt{2})^2$ é quadrado perfeito é falsa).

44.3. O valor lógico da proposição $\exists x: x \in \mathbb{R} \wedge q(x)$, sendo $q(x): \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, é verdadeiro.

Por exemplo, se $x = 1$, a conjunção $1 \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{1} \in \mathbb{Z}$ é verdadeira (porque a proposição $1 \in \mathbb{R}$ é verdadeira e a proposição $\frac{1}{1} \in \mathbb{Z}$ também é verdadeira).

Pág. 37

45.1. $A = \{-1, 1, 2\}$ e $p(x): 3x < 8$.

Se $x = -1$, a proposição $3 \times (-1) < 8$ é verdadeira.

Se $x = 1$, a proposição $3 \times 1 < 8$ é verdadeira.

Se $x = 2$, a proposição $3 \times 2 < 8$ é verdadeira.

Então, a condição $p(x)$ é universal em A .

45.2. A proposição $\forall x \in B, p(x)$ é falsa.

Contraexemplo: 3.

Ora, $3 \in B$ e $p(3)$ é falsa (pois $3 \times 3 \geq 8$).

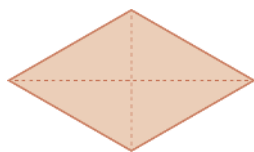
46.1. A proposição “Todos os múltiplos de 3 são múltiplos de 9” é falsa.

Contraexemplo: 12 (pois, 12 é múltiplo de 3 e 12 não é múltiplo de 9).

46.2. A proposição “Todos os losangos do plano têm diagonais iguais” é falsa.

Contraexemplo: o losango representado ao lado tem diagonais diferentes.

Num losango que não seja um quadrado as diagonais são diferentes.



46.3. A proposição $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 1$ é falsa.

Contraexemplo: 1 (pois, 1 é um número natural e a proposição $1^2 > 1$ é falsa).

46.4. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}^-, x^3 < x$ é falsa.

Contraexemplo: $-\frac{1}{2}$ (pois, $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^-$ e a proposição $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 < -\frac{1}{2}$ é falsa).

Pág. 38

47.1. A condição $p(x)$ é possível em A porque a proposição $\exists x \in A: p(x)$ é verdadeira.

Sendo $x = 1$, sabe-se que $1 \in A$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

47.2. A condição $q(x)$ é impossível em A porque a proposição $\exists x \in A: p(x)$ é falsa.

Sendo $x = 1$, sabe-se que $1 \in A$ e $\frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$.

Sendo $x = 2$, sabe-se que $1 \in A$ e $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$.

Sendo $x = 4$, sabe-se que $1 \in A$ e $\frac{4}{5} \notin \mathbb{N}$.

Sendo $x = 6$, sabe-se que $1 \in A$ e $\frac{6}{5} \notin \mathbb{N}$.

48.1. O valor lógico da proposição $\exists x \in U: r(x)$, sendo

$U = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ e $r(x): \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$, é falso.

De facto, substituindo a variável x tem-se:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ e } 2 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ e } 3 \in \mathbb{N} \text{ e } \quad \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ e } 4 \in \mathbb{N}.$$

48.2. A condição $\sim r(x)$ é universal em U porque a proposição

$\forall x \in U, \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ é verdadeira.

Pág. 39

49.1.

a) Substituindo a variável x , por cada um dos valores do conjunto U , na condição $p(x): 3x - 1 < 6$, obtém-se sempre proposições verdadeiras:

$$3 \times (-2) - 1 < 6 \text{ (verdadeira)}$$

$$3 \times 1 - 1 < 6 \text{ (verdadeira)}$$

$$3 \times 2 - 1 < 6 \text{ (verdadeira)}$$

A proposição $\forall x \in U, p(x)$ é verdadeira.

Então, conclui-se que a condição $p(x)$ é universal em U .

b) Substituindo a variável x , por cada um dos valores do conjunto U , na condição $q(x): x^2 = 2x$, obtém-se as seguintes proposições:

$$(-2)^2 = 2 \times (-2) \text{ (falsa)}$$

$$1^2 = 2 \times 1 \text{ (falsa)}$$

$$2^2 = 2 \times 2 \text{ (verdadeira)}$$

A proposição $\exists x \in U: q(x)$ é verdadeira e a proposição

$\forall x \in U, q(x)$ é falsa.

Então, conclui-se que a condição $q(x)$ é possível não universal em U .

c) Substituindo a variável x , por cada um dos valores do conjunto U , na condição $r(x): (x^2 - 1)(x^2 - 4) \neq 0$, obtém-se sempre proposições falsas:

$$((-2)^2 - 1)((-2)^2 - 4) \neq 0 \text{ (falsa)}$$

$$(1^2 - 1)(1^2 - 4) \neq 0 \text{ (falsa)}$$

$$(2^2 - 1)(2^2 - 4) \neq 0 \text{ (falsa)}$$

A proposição $\exists x \in U: r(x)$ é falsa.

Então, conclui-se que a condição $r(x)$ é impossível em U .

49.2.

a) A condição $\sim p(x)$ é impossível em U porque a condição $p(x)$ é universal em U .

b) A condição $\sim q(x)$ é possível não universal em U porque a condição $q(x)$ é possível não universal em U .

c) A condição $\sim r(x)$ é universal em U porque a condição $r(x)$ é impossível em U .

50.1. Por exemplo, $U = \{1, 2\}$.

A condição $p(x)$ é universal em U porque se substituirmos a variável x por cada um dos valores do conjunto U obtemos sempre proposições verdadeiras.

50.2. Por exemplo, $U = \{-1, 0\}$.

A condição $q(x)$ é impossível em U porque se substituirmos a variável x por cada um dos valores do conjunto U obtemos sempre proposições falsas.

50.3. Por exemplo, $U = \{0, 2, 5\}$.

As condições $p(x)$ e $q(x)$ são ambas possíveis não universais em U porque se substituirmos a variável x por cada um dos valores do conjunto U numas situações obtemos proposições verdadeiras e noutras obtemos proposições falsas.

Pág. 40

51.1.

a) O valor lógico da proposição $\exists x \in A: x > 1$ é falso porque substituindo a variável x por cada um dos valores do conjunto A obtemos proposições falsas:

$$-\frac{1}{3} > 1 \text{ (falsa)}$$

$$\frac{3}{4} > 1 \text{ (falsa)}$$

$$\frac{1}{2} > 1 \text{ (falsa)}$$

b) O valor lógico da proposição $\forall x \in B, x$ é quadrado perfeito é verdadeiro porque substituindo a variável x por cada um dos valores do conjunto B obtemos proposições verdadeiras (os números 1, 4, 9 e 16 são quadrados perfeitos).

c) O valor lógico da proposição $\exists x \in B: \sqrt{x}$ é quadrado perfeito é verdadeiro porque substituindo, por exemplo, a variável x por 1 ($1 \in B$) obtemos uma proposição verdadeira:

$$\sqrt{1} \text{ é quadrado perfeito (verdadeira)}$$

51.2.

a) A condição $4x^2 = 1$ é possível não universal em A porque a proposição $\exists x \in A: 4x^2 = 1$ é verdadeira e a proposição $\forall x \in A, 4x^2 = 1$ é falsa.

$$4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \text{ (falsa)}$$

$$4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \text{ (falsa)}$$

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ (verdadeira)}$$

b) A condição $|x| < 1$ é universal em A porque a proposição $\forall x \in A, |x| < 1$ é verdadeira.

$$\left|-\frac{1}{3}\right| < 1 \text{ (verdadeira)}$$

$$\left|\frac{3}{4}\right| < 1 \text{ (verdadeira)}$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ (verdadeira)}$$

c) A condição $x^2 > 1$ é impossível em A porque a proposição $\exists x \in A: x^2 > 1$ é falsa.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 > 1 \text{ (falsa)}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 > 1 \text{ (falsa)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > 1 \text{ (falsa)}$$

52.1. A condição $x < 0$ é impossível em $\mathbb{N}$.

Sendo $t(x)$ uma condição possível não universal em $\mathbb{N}$ e $x < 0$ uma condição impossível em $\mathbb{N}$, então a condição $t(x) \wedge x < 0$ é impossível em $\mathbb{N}$.

52.2. A condição $t(x) \vee \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ é possível não universal em $\mathbb{N}$.

Sendo $t(x)$ uma condição possível não universal em $\mathbb{N}$ e

$t(x) \vee \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ uma condição possível não universal em $\mathbb{N}$, então

a condição $t(x) \vee \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ é possível em $\mathbb{N}$.

52.3. A condição $t(x) \vee 2x \in \mathbb{N}$ é universal em $\mathbb{N}$.

Sendo $t(x)$ uma condição possível não universal em $\mathbb{N}$ e

$t(x) \vee 2x \in \mathbb{N}$ uma condição universal em $\mathbb{N}$, então a condição $t(x) \vee 2x \in \mathbb{N}$ é universal em $\mathbb{N}$.

53. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$.

Não existe nenhuma condição $p(x)$ que seja universal em A e impossível em B porque existe um elemento (o número 3) que pertence simultaneamente a A e a B , ou seja, $A \cap B = \{3\}$.

Se a condição for universal em A , então será sempre possível em B .

Tarefa 6

1.1. Visitei todos os museus da cidade.

1.2. Existe pelo menos um museu da cidade que não tem guia.

1.3. Pelo menos uma das entrevistas teve uma duração inferior ou igual a 15 minutos.

1.4. Todos os candidatos reúnem as condições mínimas.

2.1.

a) A proposição $\forall x \in A, p(x)$ é verdadeira porque substituindo, em $p(x)$, a variável x por cada um dos valores do conjunto A obtemos proposições verdadeiras.

$|-3| < 4$ (verdadeira); $|2| < 4$ (verdadeira); $|1| < 4$ (verdadeira); $|3| < 4$ (verdadeira).

b) A proposição $\exists x \in B: q(x)$ é falsa porque substituindo, em $q(x)$, a variável x por cada um dos valores do conjunto B obtemos proposições falsas.

$3 \times 3 = 6$ (falsa); $3 \times 5 = 6$ (falsa); $3 \times 3 = 6$ (falsa).

c) A proposição $\exists x \in A: q(x)$ é verdadeira porque substituindo, em $q(x)$, a variável x por 2 obtemos uma proposição verdadeira.

$3 \times 2 = 6$ (verdadeira).

d) A proposição $\forall x \in A, q(x)$ é falsa porque, por exemplo, substituindo, em $q(x)$, a variável x por 1 obtemos uma proposição falsa.

$3 \times 1 = 6$ (falsa).

e) A proposição $\exists x \in B: p(x)$ é verdadeira porque substituindo, em $p(x)$, a variável x por 3 obtemos uma proposição verdadeira.

$|3| < 4$ (verdadeira).

f) A proposição $\forall x \in B, \sim q(x)$ é verdadeira porque substituindo, em $\sim q(x)$, a variável x por cada um dos valores do conjunto B obtemos proposições verdadeiras.

$3 \times 3 \neq 6$ (verdadeira); $3 \times 5 \neq 6$ (verdadeira); $3 \times 3 \neq 6$ (verdadeira).

g) A proposição $\forall x \in A, \sim q(x)$ é falsa porque, por exemplo, substituindo, em $\sim q(x)$, a variável x por 1 obtemos uma proposição falsa.

$3 \times 1 \neq 6$ (falsa).

h) A proposição $\exists x \in A: \sim q(x)$ é verdadeira porque, por exemplo, substituindo, em $\sim q(x)$, a variável x por 3 obtemos uma proposição verdadeira.

$3 \times 3 \neq 6$ (verdadeira).

2.2.

a) $\exists x \in A: \sim p(x)$

b) $\forall x \in B, \sim q(x)$

c) $\forall x \in A, \sim q(x)$

d) $\exists x \in A: \sim q(x)$

e) $\forall x \in B, \sim p(x)$

f) $\exists x \in B: q(x)$

g) $\exists x \in A: q(x)$

h) $\forall x \in A, q(x)$

2.3.

a) A condição $p(x)$ é universal em A porque a proposição $\forall x \in A, p(x)$ é verdadeira.

A condição $q(x)$ é possível em A porque a proposição

$\exists x \in A: q(x)$ é verdadeira.

A condição $\sim p(x)$ é impossível em A porque a proposição

$\exists x \in A: \sim p(x)$ é falsa.

A condição $\sim q(x)$ é possível em A porque a proposição

$\exists x \in A: \sim q(x)$ é verdadeira.

b) A condição $p(x)$ é possível em B porque a proposição

$\exists x \in B: p(x)$ é verdadeira.

A condição $q(x)$ é impossível em B porque a proposição

$\exists x \in B: q(x)$ é falsa.

A condição $\sim p(x)$ é possível em B porque a proposição

$\exists x \in B: \sim p(x)$ é verdadeira.

A condição $\sim q(x)$ é universal em B porque a proposição

$\forall x \in B, \sim q(x)$ é verdadeira.

2.4.

a) Como $p(x)$ é uma condição universal em A e $r(x)$ é uma condição qualquer, então a condição $p(x) \vee r(x)$ é universal em A .

b) Como $q(x)$ é uma condição possível em A e $r(x)$ é uma condição qualquer, então a condição $q(x) \vee r(x)$ é possível em A .

c) Como $q(x)$ é uma condição impossível em B e $r(x)$ é uma condição qualquer, então a condição $q(x) \wedge r(x)$ é impossível em B .

Pág. 41

54.1. Um triângulo ter dois ângulos iguais $\Rightarrow$ Triângulo ser isósceles.

54.2. Ser quadrado $\Rightarrow$ Ser retângulo.

54.3. Ser triângulo equilátero $\Leftrightarrow$ Triângulo ter os três ângulos iguais.

54.4. Dois números serem negativos $\Rightarrow$ O produto dos dois números ser positivo.

Pág. 42

55.1. A implicação $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ é verdadeira pois sendo se $x > 2$ e $x > 2$, então $x \times x > 2 \times 2$, ou seja, $x^2 > 4$.

55.2. A implicação $x < -2 \Rightarrow x^2 < -4$ é falsa pois, por exemplo, -3 satisfaz o antecedente e não satisfaz o consequente: $-3 < -2$ (proposição verdadeira) e $(-3)^2 < -4$ (proposição falsa).

55.3. A implicação $x < 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$ é verdadeira. O consequente da implicação é verdadeiro ($\forall x, x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$), logo a implicação é verdadeira independentemente do valor lógico do antecedente.

56.1. A implicação contrarrecíproca de $2x < 4 \Rightarrow x < 3$ é $x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4$.

56.2. A implicação contrarrecíproca de $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ é $x \neq 3 \Rightarrow x^2 \neq 9$.

56.3. A implicação contrarrecíproca de $2x \geq 4 \Rightarrow x > 3$ é $x \leq 3 \Rightarrow 2x < 4$.

56.4. A implicação contrarrecíproca de $x \leq -2 \Rightarrow x^2 \geq 4$ é $x^2 < 4 \Rightarrow x > -2$.

57. Contrarrecíproca: Se um triângulo é retângulo então tem dois ângulos diferentes.

Pretende-se demonstrar que a implicação contrarrecíproca é verdadeira.

Ora, se um triângulo é retângulo então tem um ângulo interno reto e dois ângulos internos agudos. Logo, tem sempre dois ângulos diferentes (reto e agudo).

Pág. 43

58.1. Como $3 < \sqrt{11} < 4$, então só há três números naturais menores do que $\sqrt{11}$: 1, 2 e 3.

Então, $\{x \in \mathbb{N} : x < \sqrt{11}\} = \{1, 2, 3\}$.

58.2. Sabe-se que $-7 < -2\pi < -6$.

Então, $\{x \in \mathbb{Z} : x > -2\pi\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$.

58.3. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 10\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

59. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

$B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 2\} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} : |x| \leq 2\} = \{1, 2\}$

$D = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Logo, o diagrama corresponde ao conjunto D .

Pág. 44

60.1. Sendo $A = \{-3, 2, 4, 6\}$, então $\{x \in A : x^2 = 9\} = \{-3\}$.

60.2. Sendo $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, então $\{x \in B : x^2 = 9\} = \{3\}$.

60.3. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$.

61.1. $x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

a) Sendo $A = \{-2, 0, 2\}$, então

$\{x \in A : x(x^2 - 4) = 0\} = \{-2, 0, 2\}$.

b) Sendo $B = \{-1, 1\}$, então $\{x \in B : x(x^2 - 4) = 0\} = \{\}$.

c) Sendo $C = \{1, 0, 3\}$, então $\{x \in C : x(x^2 - 4) = 0\} = \{0\}$.

61.2.

a) A condição $x(x^2 - 4) = 0$ é universal em A .

b) A condição $x(x^2 - 4) = 0$ é impossível em B .

c) A condição $x(x^2 - 4) = 0$ é possível não universal em C .

Pág. 45

62.1. Por exemplo, o elemento 1 pertence a A e não pertence a B .

$2(1-5) < \frac{1}{2}$ (verdadeira) e $\frac{5}{2} < 1 < 7$ (falsa).

62.2. $2(x-5) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-10 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x-20 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{21}{4}$

Portanto, $A = \{x \in \mathbb{N} : 2(x-5) < \frac{1}{2}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$2x \leq 11 \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{2}$

Portanto, $C = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 2x \leq 11\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Conclui-se, então, que $A = C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

62.3.

a) Por exemplo, $U = \{2, 3, 4\}$.

b) Por exemplo, $U = \{1, 2\}$.

Pág. 46

63.1. Sendo $\{x \in U : p(x)\} = \{-3, 5, 7\}$ e

$\{x \in U : q(x)\} = \{1, 5, 6, 7\}$, então

$A = \{x \in U : p(x) \vee q(x)\}$

$= \{-3, 5, 7\} \cup \{1, 5, 6, 7\} = \{-3, 1, 5, 6, 7\}$.

63.2. Sendo $\{x \in U : p(x)\} = \{-3, 5, 7\}$ e

$\{x \in U : q(x)\} = \{1, 5, 6, 7\}$, então

$B = \{x \in U : p(x) \wedge q(x)\} = \{-3, 5, 7\} \cap \{1, 5, 6, 7\} = \{5, 7\}$.

64.1. $p(x) : \frac{8-x}{3} < x$

$\frac{8-x}{3} < x \Leftrightarrow 8-x < 3x \Leftrightarrow -4x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x > 2$

Então, $A = \{x \in \mathbb{R} : p(x)\} =]2, +\infty[$.

$$64.2. q(x): \frac{2x}{5} \leq 3$$

$$\frac{2x}{5} \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{2}$$

$$\text{Então, } B = \{x \in \mathbb{R}: q(x)\} =]-\infty, \frac{15}{2}].$$

$$64.3. r(x): 1 < x \leq 3$$

$$\text{Então, } C = \{x \in \mathbb{R}: r(x)\} =]1, 3].$$

$$64.4. D = \{x \in \mathbb{R}: p(x) \wedge q(x)\} =]2, +\infty[\cap]-\infty, \frac{15}{2}] =]2, \frac{15}{2}]$$

$$64.5. E = \{x \in \mathbb{R}: p(x) \vee r(x)\} =]2, +\infty[\cup]1, 3] =]1, +\infty[$$

Pág. 47

$$65.1. x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x(x^2 - x - 2) = 0\} = \{-1, 0, 2\}$$

$$65.2. 3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x > 0\} =]-\infty, 3[$$

65.3. A proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ é verdadeira porque $A \subset B$.

65.4. A proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$ é falsa.

Contraexemplo: $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$ pertence a B e $\frac{5}{2}$ não pertence a A .

66.1. Para provar que a proposição $\forall n, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeira vamos considerar dois casos:

1) Valores de n que não pertencem ao conjunto A (n não é múltiplo de 4)

Neste caso a implicação $\forall n, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeira.

Pois, os valores lógicos de $F \Rightarrow V$ e de $F \Rightarrow F$ são verdade.

2) Valores de n que pertencem ao conjunto A (n é múltiplo de 4)

Se n é múltiplo de 4, então $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Logo, $n = 2 \times 2k$, $k \in \mathbb{N}$, isto é, n é múltiplo de 2 (n é par).

Conclusão: a proposição $\forall n, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeira.

Logo, $A \subset B$.

66.2. Por exemplo, 2 pertence ao conjunto B (pois 2 é par) e não pertence ao conjunto A (pois 2 não é múltiplo de 4).

Então, a afirmação $B \subset A$ é falsa.

Pág. 48

$$67.1. A = \{n: n \text{ é número ímpar e } n \text{ é divisor de } 12\} = \{1, 3\}.$$

$$67.2. B = \{n: n \text{ é número primo e } n \text{ é divisor de } 12\} = \{2, 3\}.$$

$$67.3. C = \{n: n \text{ é divisor de } 12 \text{ ou } n \text{ é número par inferior a } 9\} \\ = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}.$$

67.4.

$$D = \{n: n \text{ é divisor de } 12 \text{ e } n \text{ não é número primo}\} = \{1, 4, 6, 12\}$$

$$68.1. A = \{x \in \mathbb{R}: x > -5\} =]-5, +\infty[$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 4\} = [-2, 4[$$

$$A \cap C =]-5, +\infty[\cap [-2, 4[= [-2, 4[$$

$$68.2. B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \sqrt{5}\} =]-\infty, \sqrt{5}]$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 4\} = [-2, 4[$$

$$B \setminus C = \{x \in B: x \notin C\} =]-\infty, -2]$$

$$68.3. \bar{B} \cup C =]\sqrt{5}, +\infty[\cup [-2, 4[= [-2, +\infty[$$

$$68.4. \bar{C} \setminus A = \{x \in \bar{C}: x \notin A\} =$$

$$= \{x \in]-\infty, -2[\cup [4, +\infty[: x \notin]-5, +\infty[\} =]-\infty, -5].$$

Tarefa 7

$$1.1. (n-1)(n^2 - 5n + 6) = 0 \Leftrightarrow n-1 = 0 \vee n^2 - 5n + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \vee n = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \vee n = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 3 \vee n = 2$$

$$A = \{n \in \mathbb{N}: (n-1)(n^2 - 5n + 6) = 0\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{2n+1}{3} < 4 \Leftrightarrow 2n+1 < 12 \Leftrightarrow 2n < 11 \Leftrightarrow n < \frac{11}{2}$$

$$B = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{2n+1}{3} < 4\right\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$|n-2| < 3 \Leftrightarrow n-2 < 3 \wedge n-2 > -3 \Leftrightarrow n < 5 \wedge n > -1 \Leftrightarrow n < \frac{11}{2}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}: |n-2| < 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B \setminus C = \{x \in B: x \notin C\} = \{5\}$$

1.2.

a) O valor lógico da proposição $\forall n, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeiro porque $A \subset B$.

b) O valor lógico da proposição $\forall n, n \in C \Rightarrow n \in B$ é verdadeiro porque $C \subset B$.

c) O valor lógico da proposição $\forall n, n \in A \Leftrightarrow n \in C$ é falso pois $4 \in C$ e $4 \notin A$, ou seja, porque $A \neq C$.

d) O valor lógico da proposição

$\forall n, (n \in A \Rightarrow n \in C \wedge n \in C \Rightarrow n \in A)$ é falso porque

$4 \in C$ e $4 \notin A$. Repara que $A \subset C$ mas $C \not\subset A$.

Pág. 49

69. Em $\mathbb{R}$, seja P o conjunto-solução da condição $p(x): x \geq 0$ e

Q o conjunto-solução da condição $q(x): x > 1$. Então,

$$P = [0, +\infty[\text{ e } Q =]1, +\infty[.$$

69.1.

a) O valor lógico da proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é falso.

A proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é falsa porque $P \not\subset Q$.

Por exemplo, a proposição $\frac{1}{2} \geq 0$ é verdadeira e a proposição

$\frac{1}{2} > 1$ é falsa. Logo é falsa a implicação $\frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > 1$.

b) O valor lógico da proposição $\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$ é verdadeiro.

A proposição $\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$ é verdadeira porque $Q \subset P$.

69.2. As condições $p(x)$ e $q(x)$ não são equivalentes porque a

proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x) \wedge q(x) \Rightarrow p(x)$ é falsa.

70. Em $\mathbb{R}$, seja A o conjunto-solução da condição $a(x): |x| \leq 1$

e B o conjunto-solução da condição $b(x): -1 \leq x \leq 1$. Então,

$$A = [-1, 1] \text{ e } B = [-1, 1].$$

70.1. A proposição $\forall x, a(x) \Rightarrow b(x)$ é verdadeira porque

$$A \subset B.$$

70.2. A proposição $\forall x, b(x) \Rightarrow a(x)$ é verdadeira porque

$$B \subset A.$$

70.3. A proposição $\forall x, a(x) \Leftrightarrow b(x)$ é verdadeira porque

$$A = B.$$

71. As condições $a(x)$ e $b(x)$ não são equivalentes porque a

proposição $\forall x, a(x) \Rightarrow b(x) \wedge b(x) \Rightarrow a(x)$ é falsa.

Sabe-se que $]2, 5] \subset [2, 5]$, mas $[2, 5] \not\subset]2, 5]$.

Pág. 50

72.1. Sejam A e B os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 5\}$ e

$$B = \{x \in \mathbb{N}: 0 < x \leq 4\}.$$

$$\text{Ora, } A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Como $A = B$, então as condições $p(x): x < 5$ e $q(x): 0 < x \leq 4$ são equivalentes em $\mathbb{N}$.

72.2. Sejam C e D os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{Z}: x < 5\}$ e

$$D = \{x \in \mathbb{Z}: 0 < x \leq 4\}.$$

$$\text{Ora, } C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } D = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Como $C \neq D$, então as condições $p(x): x < 5$ e $q(x): 0 < x \leq 4$ não são equivalentes em $\mathbb{Z}$.

$$\mathbf{72.3.} \quad U = \left\{ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \right\}$$

Sejam E e F os conjuntos $E = \{x \in U: x < 5\}$ e

$$F = \{x \in U: 0 < x \leq 4\}.$$

$$\text{Ora, } E = \left\{ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \right\} \text{ e } F = \left\{ \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \right\}.$$

Como $E = F$, então as condições $p(x): x < 5$ e $q(x): 0 < x \leq 4$ são equivalentes em U .

$$\mathbf{72.4.} \quad A = \left\{ -1, 2, \frac{5}{2}, 4 \right\}$$

Sejam G e H os conjuntos $G = \{x \in A: x < 5\}$ e

$$H = \{x \in A: 0 < x \leq 4\}.$$

$$\text{Ora, } G = \left\{ -1, 2, \frac{5}{2}, 4 \right\} \text{ e } H = \left\{ 2, \frac{5}{2}, 4 \right\}.$$

Como $G \neq H$, então as condições $p(x): x < 5$ e $q(x): 0 < x \leq 4$ não são equivalentes em A .

$$\mathbf{73.1.} \quad A \cap B = [3, 5] \text{ e } \overline{A \cap B} =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[.$$

$$\overline{A} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[\text{ e } \overline{B} =]-\infty, 3[.$$

$$\overline{A \cup B} =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[.$$

Conclui-se, então, que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\mathbf{73.2.} \quad A \cup B = [1, +\infty[\text{ e } \overline{A \cup B} =]-\infty, 1[.$$

$$\overline{A} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[\text{ e } \overline{B} =]-\infty, 3[.$$

$$\overline{A \cap B} =]-\infty, 1[.$$

Conclui-se, então, que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\mathbf{74.1.} \quad \overline{B} = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 2\}$$

$$\mathbf{74.2.} \quad \overline{A \cup B} = \{x \in \mathbb{N}: \sim(x \leq 4 \vee x > 2)\} = \{x \in \mathbb{N}: x > 4 \wedge x \leq 2\}$$

74.3.

$$\overline{A \cup B} = \{x \in \mathbb{N}: \sim(x \leq 4) \vee \sim(x > 2)\} = \{x \in \mathbb{N}: x > 4 \vee x \leq 2\}$$

Pág. 51

$$\mathbf{75.1.} \quad x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

$$A = \{-2, 0, 2\}$$

$$\mathbf{75.2.} \quad |x| \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$$

$$B = [-2, 2]$$

75.3. Em $\mathbb{R}$, a implicação $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow |x| \leq 2$ é verdadeira.

Repara que $A \subset B$.

75.4. A implicação contrarrecíproca é $|x| > 2 \Rightarrow x^3 - 4x \neq 0$. A implicação é verdadeira. $|x| > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ e $x^3 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

$$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

Tarefa 8

1.1. Em $\mathbb{R}$, a implicação $x < 5 \Rightarrow x^2 < 25$ é não universal pois, por exemplo, -6 satisfaz o antecedente e não satisfaz o consequente: $-6 < 5$ (proposição verdadeira) e $(-6)^2 < 25$ (proposição falsa).

A implicação contrarrecíproca de $x < 5 \Rightarrow x^2 < 25$ é $x^2 \geq 25 \Rightarrow x \geq 5$.

1.2. Em $\mathbb{N}$, a implicação $x < 10 \Rightarrow x^2 < 85$ é universal pois o quadrado de qualquer número natural inferior a 10 é inferior a 85.

A implicação contrarrecíproca de $x < 10 \Rightarrow x^2 < 85$ é $x^2 \geq 85 \Rightarrow x \geq 10$.

1.3. Em $\mathbb{N}$, a implicação n é múltiplo de 3 $\Rightarrow n$ é múltiplo de 6 é não universal pois, por exemplo, 3 satisfaz o antecedente e não satisfaz o consequente: 3 é múltiplo de 3 (proposição verdadeira) e 3 é múltiplo de 6 (proposição falsa).

A implicação contrarrecíproca de n é múltiplo de 3 $\Rightarrow n$ é múltiplo de 6 é n não é múltiplo de 6 $\Rightarrow n$ não é múltiplo de 3.

1.4. Em $\mathbb{R}$, a implicação $x \in [-1, 0] \Rightarrow |x| \in [0, 1]$ é universal.

A implicação contrarrecíproca de $x \in [-1, 0] \Rightarrow |x| \in [0, 1]$ é $|x| \notin [0, 1] \Rightarrow x \notin [-1, 0]$.

2.1. Um triângulo tem um ângulo externo reto $\Rightarrow$ Triângulo é retângulo

2.2. A afirmação é verdadeira. Se um dos ângulos externos de um triângulo é reto então o respetivo ângulo interno adjacente também é reto (porque num triângulo, a soma da amplitude de um ângulo interno com a amplitude do seu ângulo externo adjacente é igual a 180°).

Se o triângulo tem um ângulo interno reto então é retângulo.

3. Contrarrecíproca: Se um triângulo é acutângulo então todos os ângulos externos do triângulo são obtusos.

Pretende-se demonstrar que a implicação contrarrecíproca é verdadeira.

Ora, se um triângulo é acutângulo todos os seus ângulos internos são agudos. Logo, todos os seus ângulos externos são obtusos (porque num triângulo, a soma da amplitude de um ângulo interno com a amplitude do seu ângulo externo adjacente é igual a 180°).

Pág. 53

Proposta 22

22.1. $4x - 2$ é uma expressão designatória.

22.2. 7π é uma designação.

22.3. $5x < 3$ é uma condição.

22.4. $\frac{7}{2} > 3$ é uma proposição.

22.5. $\frac{1}{3}\pi r^2$ é uma expressão designatória.

22.6. $\frac{3x+4}{2} = x$ é uma condição.

22.7. $x \in \mathbb{Z}$ é uma condição.

22.8. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ é uma proposição.

22.9. $\pi x \in \mathbb{R}$ é uma condição.

Proposta 23

23.1. $p(x): x^2 + 2 = 0$ e $q(x): (x+1)^2 - 1 = x(x+2)$

a) $x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$ (impossível).

Então, o valor lógico da proposição $\forall x, p(x)$ é falso.

b) $(x+1)^2 - 1 = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow 0 = 0$

Então, o valor lógico da proposição $\forall x, q(x)$ é verdadeiro.

c) A condição $p(x)$, ou seja, $x^2 + 2 = 0$ é impossível.

Então, o valor lógico da proposição $\exists x: p(x)$ é falso.

23.2. As condições $p(x)$ e $\sim q(x)$ são impossíveis e as condições $q(x)$ e $\sim p(x)$ são universais.

23.3.

a) Sendo $p(x)$ uma condição impossível e $r(x)$ uma condição possível não universal, então a condição $p(x) \wedge r(x)$ é impossível.

b) Sendo $q(x)$ uma condição universal e $r(x)$ uma condição possível não universal, então a condição $q(x) \vee r(x)$ é universal.

Proposta 24

Cálculos auxiliares:

$$\bullet 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$\bullet (x+1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$$

$$\bullet x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$$

$$\bullet x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{4}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet (x-1)^2 - x^2 = 1 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 = 1 - 2x \Leftrightarrow 0 = 0$$

Proposições	Valor lógico em			
	$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{R}$
$\exists x \in U: 2x + 1 < 0$	F	V	V	V
$\forall x \in U, (x+1)^2 \geq 1$	V	F	F	F
$\exists x \in U: x^2 = 5$	F	F	F	V
$\exists x \in U: x^2 = \frac{1}{4}$	F	F	V	V
$\forall x \in U, (x-1)^2 - x^2 = 1 - 2x$	V	V	V	V

Proposta 25

25.1. Sendo x um número natural ($x \geq 1$), podemos concluir que

$$x+1 \geq 2 \text{ e } (x+1)^2 \geq 4.$$

Portanto, a proposição $\forall x \in U, (x+1)^2 \geq 4$ é verdadeira se $U = \mathbb{N}$.

No entanto, a proposição $\forall x \in U, (x+1)^2 \geq 4$ é falsa se $U = \mathbb{Z}$.

Por exemplo, para $x = 0$ tem-se $(0+1)^2 \geq 4$, que é uma proposição falsa.

25.2. $2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

A proposição $\exists x \in U: 2x^2 = x$ é falsa se $U = \mathbb{N}$ e verdadeira se

$U = \mathbb{Q}$ porque as soluções da equação $2x^2 = x$ $\left(0 \text{ e } \frac{1}{2}\right)$ não são números naturais, mas são números racionais.

25.3. $2x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

A proposição $\exists x \in U: 2x^2 = 10$ é falsa se $U = \mathbb{Q}$ e verdadeira se $U = \mathbb{R}$ porque as soluções da equação $2x^2 = 10$ $(-\sqrt{5} \text{ e } \sqrt{5})$ não são números racionais, mas são números reais.

25.4. $4 - x^2 = -(x-2)(x+2) \Leftrightarrow 4 - x^2 = -(x^2 - 4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = 0$$

A proposição $\forall x \in U, 4 - x^2 = -(x-2)(x+2)$ é verdadeira se $U = \mathbb{R}$ porque a condição $4 - x^2 = -(x-2)(x+2)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Pág. 54

Proposta 26

26.1. Em $\mathbb{R}$, seja A o conjunto-solução da condição $a(x): x^2 + 3 < 0$ e B o conjunto-solução da condição

$$b(x): (-2x)^2 = 4x^2.$$

A condição $a(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$ e a condição $b(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Logo, $A = \{ \}$ e $B = \mathbb{R}$.

26.2.

a) Como a condição $x^2 + 3 < 0$ é impossível em $\mathbb{R}$ então conclui-se que: $x^2 + 3 < 0 \vee 3x > 1 \Leftrightarrow 3x > 1$.

b) Como a condição $x^2 + 3 < 0$ é impossível em $\mathbb{R}$ então conclui-se que: $x^2 + 3 < 0 \wedge 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 < 0$.

c) Como a condição $b(x): (-2x)^2 = 4x^2$ é universal em $\mathbb{R}$ então conclui-se que: $(-2x)^2 = 4x^2 \vee 3x^2 = 12 \Leftrightarrow (-2x)^2 = 4x^2$.

d) Como a condição $b(x): (-2x)^2 = 4x^2$ é universal em $\mathbb{R}$ então conclui-se que: $(-2x)^2 = 4x^2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Proposta 27

27.1.

a) Se em U a proposição $\forall x, p(x)$ é verdadeira, então a proposição $\exists x: p(x)$ também é verdadeira.

Assim sendo, o valor lógico da proposição $\exists x: p(x)$ é verdadeiro.

b) Se em U a proposição $\exists x: q(x)$ é falsa, então a proposição $\forall x, q(x)$ também é falsa.

Assim sendo, o valor lógico da proposição $\forall x, q(x)$ é falso.

27.2. A condição $p(x)$ é universal em U porque a proposição

$\forall x, p(x)$ é verdadeira e a condição $q(x)$ é impossível em U porque a proposição $\exists x: q(x)$ é falsa.

a) Sendo $p(x)$ uma condição universal em U e $r(x)$ uma condição definida em U , então a condição $p(x) \vee r(x)$ é universal em U .

b) Sendo $q(x)$ uma condição impossível em U e $r(x)$ uma condição definida em U , então a condição $q(x) \wedge r(x)$ é impossível em U .

c) Se $p(x)$ uma condição universal em U então $\sim p(x)$ é uma condição impossível em U .

Sendo $\sim p(x)$ uma condição impossível em U e $r(x)$ uma condição definida em U , então a condição $\sim p(x) \wedge r(x)$ é impossível em U .

d) Se $q(x)$ uma condição impossível em U então $\sim q(x)$ é uma condição universal em U .

Sendo $\sim q(x)$ uma condição universal em U e $r(x)$ uma condição definida em U , então a condição $\sim q(x) \vee r(x)$ é universal em U .

Proposta 28

28.1.

a) Todos os alunos da turma do Ricardo têm 15 anos.

$$\text{b)} \sim (\forall x, q(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim q(x)$$

28.2.

a) Existe pelo menos um aluno da turma do Ricardo que tem 15 anos.

$$\text{b)} \sim (\exists x: q(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim q(x)$$

28.3.

a) Existe pelo menos um aluno da turma do Ricardo que é filho único e tem olhos azuis.

b) Em linguagem simbólica: $\sim(\forall x, r(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim r(x)$

Em linguagem corrente: Existe pelo menos um aluno da turma do Ricardo que não é filho único.

Pág. 55**Proposta 29**

29.1. Pelo menos um sábado não vou à piscina.

29.2. Em nenhum dia da semana há música na biblioteca.

29.3. Existe pelo menos um número natural que não tem simétrico.

29.4. Existe pelo menos um paralelogramo que não é retângulo.

29.5. Todos os números inteiros têm inverso.

$$\mathbf{29.6.} \exists x: x \leq \frac{1}{2} \quad \mathbf{29.7.} \forall x, 2x \neq \frac{x}{2}$$

$$\mathbf{29.8.} \forall x, x^2 + 1 = (x+1)^2 \quad \mathbf{29.9.} \forall x, x \times \frac{1}{x} = 1$$

Proposta 30

30.1. A proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow \frac{x}{2}$ é um número par é falsa. Por

exemplo, $2 \in A$ (verdadeira) e $\frac{2}{2}$ é um número par (falsa).

A negação da proposição dada é a seguinte proposição:

$$\exists x: x \in A \wedge \frac{x}{2} \text{ é um número ímpar.}$$

30.2. A proposição $\exists x: x \in B \wedge x$ é número primo é verdadeira. Por exemplo, $3 \in B$ e 3 é número primo.

A negação da proposição dada é a seguinte proposição:
 $\forall x, x \notin B \vee x$ não é número primo.

30.3. A proposição $\exists x: x \in B \wedge x \leq 3$ é verdadeira. Por exemplo, $1 \in B$ e $1 \leq 3$.

A negação da proposição dada é a seguinte proposição:
 $\forall x, x \notin B \vee x > 3$.

30.4. A proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin B$ é verdadeira porque nenhum dos elementos do conjunto A pertence ao conjunto B. A negação da proposição dada é a seguinte proposição:
 $\exists x: x \in A \wedge x \in B$.

30.5. A proposição $\exists x: x \in A \wedge x \in B$ é falsa porque os conjuntos A e B não têm elementos comuns, isto é, $A \cap B = \{ \}$.

A negação da proposição dada é a seguinte proposição:
 $\forall x, x \notin A \vee x \notin B$.

30.6. A proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow \frac{x}{2} \notin B$ é falsa pois, por exemplo,

$2 \in A$ (verdadeira) e $\frac{2}{2} \in B$ (falsa).

A negação da proposição dada é a seguinte proposição:

$$\exists x: x \in A \wedge \frac{x}{2} \in B.$$

Proposta 31

31.1. A condição $a(x)$ não é universal em $\mathbb{N}$ porque a proposição $\exists x: \sim a(x)$ é verdadeira.

$$\text{Se } x=1 \text{ então } \frac{1+1}{2} \geq 1.$$

31.2. A condição $b(x)$ é impossível em $U = \{3, 5, 6\}$ porque substituindo, em $b(x)$, a variável x por cada um dos valores do conjunto U obtemos proposições falsas.
 $3 \times 3 - 2 \leq 4$ (falsa); $3 \times 5 - 2 \leq 4$ (falsa); $3 \times 6 - 2 \leq 4$ (falsa).

31.3. Sabe-se que $3x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Assim sendo, a condição $b(x): 3x - 2 \leq 4$ é possível em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, $x=1$ verifica a condição e é impossível em $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, $x=3$ não verifica a condição. Então, a condição $b(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

31.4.

$$\mathbf{a)} \quad \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x+1 < 2x \Leftrightarrow 1 < x \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Então, } A = \{x \in \mathbb{R}: a(x)\} =]1, +\infty[.$$

$$\mathbf{b)} \quad 3x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\text{Então, } B = \{x \in \mathbb{R}: b(x)\} =]-\infty, 2].$$

$$\mathbf{c)} \quad C = \{x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)\} = A \cap B =]1, +\infty[\cap]-\infty, 2] =]1, 2].$$

Pág. 56**Proposta 32****32.1.**

$$\mathbf{a)} \quad 2x^2 + x = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x = 2\} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

$$\mathbf{b)} \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1; B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{c)} \quad A \cup B = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right\} \cup \{-1, 1\} =$$

$$= \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, -1, 1, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

$$\mathbf{d)} \quad A \cap B = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right\} \cap \{-1, 1\} = \{ \}$$

32.2.

a) $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$C = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[$

b) $C \setminus B = \{x \in C : x \notin B\} =]1, +\infty[$

c) $\bar{C} =]-\infty, 1[$

d) $\mathbb{R}^+ \cap \bar{C} =]0, +\infty[\cap]-\infty, 1[=]0, 1[$

Proposta 33

33.1. $1 - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$

$A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\} =]-\infty, 2[$

33.2. $2\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 6x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{6} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : b(x)\} = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

33.3. $C = \{x \in \mathbb{R} : a(x) \wedge b(x)\} = A \cap B =$

$=]-\infty, 2[\cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[= \left[\frac{1}{3}, 2\right[$

33.4. $D = \{x \in \mathbb{R} : a(x) \wedge \sim b(x)\}$

$= A \cap \bar{B} =]-\infty, 2[\cap]-\infty, \frac{1}{3}[=]-\infty, \frac{1}{3}[$

33.5. $\sim c(x) : 1 - x < 0 ; 1 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$

$E = \{x \in \mathbb{R} : b(x) \vee \sim c(x)\} = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[\cup]1, +\infty[= \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

33.6. $F = \{x \in \mathbb{R} : \sim a(x) \vee \sim c(x)\}$

$= [2, +\infty[\cup]1, +\infty[=]1, +\infty[$

Proposta 34

34.1. $|x| \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2 ; A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} = [-2, 2]$

$2x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{2} \Leftrightarrow x < 3 ;$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 6 < 0\} =]-\infty, 3[$

Como $A \subset B$, a proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ é verdadeira.

O valor lógico da proposição $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ é verdadeiro.

34.2. A proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$ é falsa.

Contraexemplo: 2,5 (pois 2,5 pertence a B e 2,5 não pertence a A).

34.3. $|x| \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2 ; A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} = [-2, 2]$

$2x + 4 \geq 0 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{2} \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2 \wedge x \leq 2$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geq 0 \wedge x \leq 2\} = [-2, 2]$

Como $A = [-2, 2]$ e $C = [-2, 2]$, conclui-se que $A = C$.

34.4.

a) Por exemplo, $p(x) : x + 5 = 0$.

b) Por exemplo, $p(x) : x^2 = 1$.

Proposta 35

35.1. $\frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow x < 6$ e $x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Em $\mathbb{N}$, seja A o conjunto-solução da condição $a(x) : \frac{x}{2} < 3$ e B

o conjunto-solução da condição $b(x) : x - 1 \leq 4$.

Então, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Como $A = B$ conclui-se que, em $\mathbb{N}$, as condições $a(x)$ e $b(x)$ são equivalentes.

35.2.

a) A implicação contrarrecíproca de $b(x) \Rightarrow a(x)$ é $\sim a(x) \Rightarrow \sim b(x)$.

b) Pretende-se provar que, em $\mathbb{R}$, a proposição $[\sim a(x)] \Rightarrow [\sim b(x)]$ é universal.

$\sim a(x) : \frac{x}{2} \geq 3$ e $\sim b(x) : x - 1 > 4$

Em $\mathbb{R}$, seja C o conjunto-solução da condição $\sim a(x)$ e D o conjunto-solução da condição $\sim b(x)$.

Então, $C = [6, +\infty[$ e $D =]5, +\infty[$.

Como $C \subset D$ conclui-se que, em $\mathbb{R}$, a proposição $[\sim a(x)] \Rightarrow [\sim b(x)]$ é universal.

Pág. 57

Proposta 36

36.1.

a) $b(x) : x \geq 2$; Em $\mathbb{R}$, $B = [2, +\infty[$. Então, $\bar{B} =]-\infty, 2[$.

b) $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\} =]3, +\infty[$

36.2.

a) Ora, $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} =]-1, 2[$.

Então, por exemplo, à condição $c(x) : -1 < x < 2$ corresponde o conjunto $A \setminus B$.

b) Ora, $\bar{A} \cap B = (]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[) \cap [2, +\infty[=]3, +\infty[$.

Então, por exemplo, à condição $d(x) : x > 3$ corresponde o conjunto $\bar{A} \cap B$.

c) Ora,

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = (]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[) \cap]-\infty, 2[=]-\infty, -1[$.

Então, por exemplo, à condição $e(x) : x \leq -1$ corresponde o conjunto $\overline{A \cup B}$.

36.3.

a) A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x > 0$ traduz a seguinte inclusão entre dois conjuntos:

$$[2, +\infty[\subset]0, +\infty[.$$

b) A implicação contrarrecíproca de $x \geq 2 \Rightarrow x > 0$ é $x \leq 0 \Rightarrow x < 2$.

Proposta 37

Utilizando as segundas Leis de De Morgan, tem-se:

$$\sim(\forall x, p(x) \Rightarrow \sim q(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim(\sim q(x)) \Rightarrow \sim p(x) \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \exists x: q(x) \Rightarrow \sim p(x)$$

Donde se conclui que:

$$\exists x: q(x) \Rightarrow \sim p(x) \Leftrightarrow \exists x: q(x) \wedge p(x) \Leftrightarrow \exists x: p(x) \wedge q(x).$$

Proposta 38

38.1. Se $p(x)$ é universal em U , então $\sim p(x)$ é impossível em U .

Sendo $q(x)$ uma condição qualquer definida em U e $\sim p(x)$ uma condição é impossível em U , então a condição $q(x) \wedge \sim p(x)$ é impossível em U .

$$\text{Logo, } \{x \in U: q(x) \wedge \sim p(x)\} = \{ \}.$$

38.2. Se $r(x)$ é impossível em U , então $\sim r(x)$ é universal em U .

Sendo $r(x)$ uma condição impossível em U e $q(x)$ uma condição qualquer definida em U , então a condição $r(x) \vee q(x)$ é equivalente a $q(x)$.

Como $\sim r(x)$ é universal em U e $q(x)$ é uma condição qualquer definida em U , então $q(x) \wedge \sim r(x) \Leftrightarrow q(x)$.

À condição $q(x)$ corresponde o conjunto Q .

$$\text{Logo, } \{x \in U: [r(x) \vee q(x)] \wedge \sim r(x)\} = Q.$$

Proposta 39

$$A = \{x: p(x)\} \text{ e } B = \{x: q(x)\}.$$

Vamos provar por contrarrecíproco que a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ é verdadeira.

A contrarrecíproca de $\forall x \in \mathbb{R}, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ é

$$\exists x \in \mathbb{R}: p(x) \Rightarrow q(x).$$

Como $A \subset B$, a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira.

Então, a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ também é verdadeira.

Pág. 58

1. A negação da afirmação “Todos os participantes na reunião foram pontuais” é a afirmação “Pelo menos um participante na reunião não foi pontual”.

A opção correta é a (C).

2. A condição $x^2 < x$ é universal no conjunto $]0, 1[$.

A opção correta é a (D).

$$3. |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > -3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge p(x)\} =]0, +\infty[\cap]-3, 3[=]0, 3[$$

A opção correta é a (A).

$$4. \sim(\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 4) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \sim(2 \leq x < 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \sim(x \geq 2 \wedge x < 4) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x < 2 \vee x \geq 4$$

A opção correta é a (B).

5. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ é falsa.

Um contraexemplo é -3 pois a proposição $(-3)^2 > 4$ é verdadeira e a proposição $(-3)^2 > 2$ é falsa.

A opção correta é a (D).

6. Cálculos auxiliares:

$$\bullet x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

$$\bullet x^3 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

$$\bullet x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1-3}{2} \vee x = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$\bullet x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Como $A = \{x \in \mathbb{R}: a(x)\} = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ e $a(x) \Leftrightarrow b(x)$, então a condição $b(x)$ pode ser definida por $x^3 = 2x$.

A opção correta é a (B).

Pág. 59

1.1. A proposição “Todos os números naturais são positivos” é representada por $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.

1.2. A proposição “Há números inteiros que não são naturais” é representada por $\exists x \in \mathbb{Z}: x \notin \mathbb{N}$.

2.1. A negação da proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x = 3 \Rightarrow x < \pi$ é a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x = 3 \wedge x \geq \pi$.

2.2. A negação da proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x \notin \mathbb{N} \wedge x^2 \in \mathbb{N}$ é a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{N} \vee x^2 \notin \mathbb{N}$.

3.1. $p(n)$: n é divisor de 20; $q(n)$: n é divisor de 5;

$$P = \{n \in \mathbb{N}: p(n)\} \text{ e } Q = \{n \in \mathbb{N}: q(n)\}.$$

$$\text{Ora, } P = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \text{ e } Q = \{1, 5\}.$$

$Q \subset P$ porque qualquer um dos elementos do conjunto Q pertence ao conjunto P .

$P \not\subset Q$ porque há elementos de P que não pertencem a Q . Por exemplo, $2 \in P$ e $2 \notin Q$.

3.2. O facto de $p(n)$ ser condição necessária para $q(n)$ é traduzido através da seguinte implicação: $q(n) \Rightarrow p(n)$.

4.1. Sendo $a(x): 3 < x \leq 7$, então $\{x \in \mathbb{N}: a(x)\} = \{4, 5, 6, 7\}$.

4.2. Em $\mathbb{R}$, $C =]-\infty, 1[$ e $B = [5, +\infty[$. Então, $\bar{B} =]-\infty, 5[$.

Como $C \subset \bar{B}$, conclui-se que a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \Rightarrow \sim b(x)$ é verdadeira.

4.3. $\{x \in \mathbb{R}: \sim a(x) \wedge b(x)\}$

$$= \bar{A} \cap B = (]-\infty, 3] \cup]7, +\infty[) \cap [5, +\infty[=]7, +\infty[.$$

4.4. $A \setminus B = \{x \in A: x \notin B\} = \{x \in]3, 7]: x \notin [5, +\infty[\} =]3, 5[$.

Uma condição $p(x)$ tal que o conjunto-solução é $A \setminus B$ é, por exemplo, $p(x): 3 < x < 5$.

5. $U = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$, $a(x): \frac{x}{2} \in U$ e $b(x): 2 - 3x < 6$.

5.1.

a) Substituindo x por 4 em $a(x)$, obtém-se a proposição $\frac{4}{2} \in U$ que é verdadeira.

Substituindo x por -1 em $a(x)$, obtém-se a proposição $\frac{-1}{2} \in U$ que é falsa.

Então, conclui-se que a condição $a(x)$ é possível não universal em U .

b) $\sim b(x): 2 - 3x \geq 6$

$$2 - 3x \geq 6 \Leftrightarrow -3x \geq 4 \Leftrightarrow 3x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

Então, conclui-se que a condição $\sim b(x)$ é impossível em U .

5.2. A proposição $\forall x, a(x) \Leftrightarrow b(x)$ é falsa.

Um contraexemplo é 2 pois a proposição $\frac{2}{2} \in U$ é falsa e a proposição $2 - 3 \times 2 < 6$ é verdadeira.

Unidade 2 Radicais. Potências de expoente racional

Pág. 63

1.1. Como $3 < 5$ e $a > 0$, então $3a < 5a$.

1.2. Como $2 < 3$ e $b < 0$, então $2b > 3b$.

1.3. Como $a > 0$ e $b < 0$, então $ab < 0$.

1.4. Como $\sqrt{2} < \pi$ e $b < 0$, então $\sqrt{2}b > \pi b$.

1.5. Como $2 > \sqrt{3}$ e $ab < 0$, então $2ab < \sqrt{3}ab$.

2.1. Como $a < b$ e $a < c$, então $a \times a < b \times c$, ou seja, $a^2 < bc$.

2.2. Como $b < d$ e $\frac{1}{d} > 0$ (pois $d > 0$), então $b \times \frac{1}{d} < d \times \frac{1}{d}$, ou seja, $\frac{b}{d} < 1$.

2.3. Sendo $a < c$, então $a + d < c + d$.

Como $a + d < c + d$ e $\frac{1}{b} > 0$ (pois $b > 0$), então

$$(a + d) \frac{1}{b} < (c + d) \frac{1}{b}, \text{ ou seja, } \frac{a + d}{b} < \frac{c + d}{b}.$$

2.4. Se $0 < a < c$, então $a^2 < c^2$.

Como $0 < a^2 < c^2$, então $(a^2)^2 < (c^2)^2$, ou seja, $a^4 < c^4$.

2.5. Se $0 < b < d$, então $b^3 < d^3$.

Pág. 66

3.1. $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{6 \times 3} = \sqrt{18}$

3.2. $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{-2 \times 5 \times (-3)} = \sqrt[3]{30}$

3.3. $\sqrt[5]{0,1} \times \sqrt[5]{-0,02} = \sqrt[5]{0,1 \times (-0,02)} = \sqrt[5]{-0,002}$

3.4. $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{5 \times 2 \times 4} = \sqrt[4]{40}$

4.1. $\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

4.2. $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{(-3)^3 \times 2} = \sqrt[3]{(-3)^3} \times \sqrt[3]{2} = -3 \sqrt[3]{2}$

4.3. $\sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3 \sqrt[4]{3}$

4.4. $\sqrt[3]{864} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2 \times 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{3^3} = 2 \times \sqrt[3]{2^2} \times 3 = 6 \sqrt[3]{4}$

4.5. $\sqrt[5]{2^{-6}} = \sqrt[5]{(2^{-1})^5 \times 2^{-1}} = \sqrt[5]{(2^{-1})^5} \times \sqrt[5]{2^{-1}} = 2^{-1} \times \sqrt[5]{2^{-1}}$

5.1. $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$

5.2. $\sqrt[3]{2^4 \times 5^3} = \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 5^3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5^3} = 2 \times \sqrt[3]{2} \times 5 = 10 \sqrt[3]{2}$

5.3. $\sqrt[7]{-1} = \sqrt[7]{(-1)^7 \times 1} = \sqrt[7]{(-1)^7} \times \sqrt[7]{1} = -1 \sqrt[7]{1}$

5.4. $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{(-3)^3 \times 2} = \sqrt[3]{(-3)^3} \times \sqrt[3]{2} = -3 \sqrt[3]{2}$

5.5. $8 = 0,8 \times 10 = 0,8 \times \sqrt{10^2} = 0,8 \sqrt{100}$

6. $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt[4]{243} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{243 \times 9} = \sqrt[4]{2187} =$
 $= \sqrt[4]{3^4 \times 3^3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3^3} = 3 \sqrt[4]{27}$

Pág. 67

7.1. $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-2 \times (-2)} = \sqrt[3]{(-2)^2}$

7.2. $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} = (\sqrt[3]{-2})^2$

7.3. $(\sqrt[6]{3^2})^2 = ((\sqrt[6]{3})^2)^2 = (\sqrt[6]{3})^{2 \times 2} = (\sqrt[6]{3})^4$

7.4. $(\sqrt[6]{3^2})^2 = \sqrt[6]{(3^2)^2} = \sqrt[6]{3^{2 \times 2}} = \sqrt[6]{3^4}$

8.1. $A_t = 6 \times (\sqrt[4]{12})^2 = 6 \times \sqrt[4]{12^2} = 6 \sqrt[4]{144} = 6 \sqrt[4]{2^4 \times 3^2} =$
 $= 6 \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{3^2} = 6 \times 2 \sqrt[4]{9} = 12 \sqrt[4]{9}$

8.2. $V = (\sqrt[4]{12})^3 = \sqrt[4]{12^3} = \sqrt[4]{1728} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^2 \times 3^3} =$
 $= \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2^2 \times 3^3} = 2 \sqrt[4]{108}$

Tarefa 1

1.1. $\sqrt{6} \times \sqrt{7} = \sqrt{6 \times 7} = \sqrt{42}$

1.2. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8}$

1.3. $\sqrt[5]{5} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{5 \times 2 \times 3} = \sqrt[5]{30}$

1.4. $\sqrt[4]{11} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{11 \times 4 \times 2} = \sqrt[4]{88}$

1.5. $\sqrt[3]{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{4} \times (-3)} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

1.6. $\sqrt[8]{\frac{3}{5}} \times \sqrt[8]{\frac{7}{2}} = \sqrt[8]{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}} = \sqrt[8]{\frac{21}{10}}$

2.1. $\sqrt{21} = \sqrt{7 \times 3} = \sqrt{7} \times \sqrt{3}$

2.2. $\sqrt[3]{-20} = \sqrt[3]{-4 \times 5} = \sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{5}$

2.3. $\sqrt[4]{0,3} = \sqrt[4]{3 \times \frac{1}{10}} = \sqrt[4]{3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[4]{\frac{1}{5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$

2.4. $\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{-1 \times (-3)} = \sqrt[5]{-1} \times \sqrt[5]{-3}$

3.1. $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = \sqrt{2^3}$

3.2. $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \times 5} = \sqrt[3]{5^2}$

$$3.3. \sqrt{7^3} = \sqrt{7 \times 7 \times 7} = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = (\sqrt{7})^3$$

4. Sendo $a \geq 0$, então

$$(\sqrt[n]{a})^{k+1} = (\sqrt[n]{a})^k \times (\sqrt[n]{a})^1 = \sqrt[n]{a^k} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^k \times a} = \sqrt[n]{a^{k+1}}.$$

Pág. 68

$$9.1. (\sqrt{2})^3 - 5\sqrt{8} = \sqrt{2^3} - 5\sqrt{2^3} = -4\sqrt{2^3} = -4\sqrt{2^2 \times 2} =$$

$$= -4\sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = -4 \times 2 \times \sqrt{2} = -8\sqrt{2}$$

Então, conclui-se que $a = -8$.

$$9.2. (\sqrt[3]{24})^2 = \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} \times \sqrt[3]{2^3 \times 3} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3} = 2 \times \sqrt[3]{3} \times 2 \times \sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3 \times 3} = 4\sqrt[3]{9}$$

Então, conclui-se que $a = 9$.

$$9.3. (\sqrt[5]{49})^3 = \sqrt[5]{(7^2)^3} = \sqrt[5]{7^6} = \sqrt[5]{(-7)^6} =$$

$$= \sqrt[5]{(-7)^5 \times (-7)} = \sqrt[5]{(-7)^5} \times \sqrt[5]{-7} = -7\sqrt[5]{-7}$$

Então, conclui-se que $a = -7$.

$$9.4. (\sqrt[3]{2})^4 \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^4} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^4 \times 3} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2 \times 3} = 2 \times \sqrt[3]{6}$$

Então, conclui-se que $a = 6$.

$$10. A = (2\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{2})^2 \times (\sqrt[3]{2})^4 = 2^3 \times (\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{2})^6 =$$

$$= 8 \times 2 - (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{2})^3 = 16 - 2 \times 2 = 12$$

$$B = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} - \sqrt[3]{(-1)^5} =$$

$$= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} - \sqrt[3]{-1} =$$

$$= 3 - 4 \times \sqrt{6} + 4 \times 2 + 4\sqrt{6} - (-1) = 3 + 8 + 1 = 12$$

Então, $A = B$.

Pág. 69

11. Sabe-se que a medida do lado do quadrado é igual à aresta de um cubo cujo volume é 200, então conclui-se que $\overline{AB} = \sqrt[3]{200}$. Logo, tem-se:

$$A_{[ABCD]} = (\overline{AB})^2 = (\sqrt[3]{200})^2 = \sqrt[3]{200^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 5^3 \times 5} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5} = 2 \times 2 \times 5 \times \sqrt[3]{5} = 20\sqrt[3]{5}$$

$$12.1. A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = (\sqrt{10} + 1) \times (\sqrt{5} - \sqrt{2}) =$$

$$= \sqrt{10} \times \sqrt{5} - \sqrt{10} \times \sqrt{2} + 1 \times \sqrt{5} - 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{50} - \sqrt{20} + \sqrt{5} - \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{2^2 \times 5} + \sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{2} =$$

$$= 5 \times \sqrt{2} - 2 \times \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

12.2. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{AC})^2 = (\sqrt{10} + 1)^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 10 + 2\sqrt{10} + 1 + 5 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 18 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 18$$

Portanto, $\overline{AC} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Pág. 70

$$13.1. \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$13.2. \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$13.3. \frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-16}{2}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$13.4. \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^{-7}}} = \sqrt[5]{\frac{2^3}{2^{-7}}} = \sqrt[5]{2^{10}} = (\sqrt[5]{2^5})^2 = 2^2$$

14.1. Designemos por l o lado do quadrado. Então, $l = \sqrt{a}$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(2r)^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a})^2 \Leftrightarrow 4r^2 = a + a \Leftrightarrow 4r^2 = 2a \Leftrightarrow r^2 = \frac{a}{2}$$

Como $r > 0$, conclui-se que $r = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

$$14.2. \frac{P_{\text{circunferência}}}{P_{\text{quadrado}}} = \frac{2\pi r}{4l} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{a}{2}}}{4\sqrt{a}} = \frac{2\pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}{4\sqrt{a}} = \frac{2\pi \sqrt{a}}{4\sqrt{a} \times \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Pág. 71

$$15.1. \frac{\sqrt{0,007}}{\sqrt{0,7}} = \sqrt{\frac{0,007}{0,7}} = \sqrt{0,01} = 0,1$$

$$15.2. \sqrt[4]{0,25^{-2}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$15.3. \frac{\sqrt{24} - \sqrt{150}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 6} - \sqrt{5^2 \times 6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^2} \times \sqrt{6} - \sqrt{5^2} \times \sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6} - 5\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{\frac{6}{3}} = -3\sqrt{2}$$

$$15.4. \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}} \times (\sqrt[3]{3})^{-1} = \sqrt[3]{3^4} \times \sqrt[3]{3^{-1}} = \sqrt[3]{3^4 \times 3^{-1}} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$15.5. \frac{(\sqrt[3]{2^3})^2}{\sqrt[5]{2^{-1}}} = \frac{\sqrt[5]{(2^3)^2}}{\sqrt[5]{2^{-1}}} = \sqrt[5]{\frac{2^6}{2^{-1}}} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \times 2^2} =$$

$$= \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$16.1. 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$16.2. -2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 2} = \sqrt[3]{-16}$$

$$16.3. 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{50}$$

$$16.4. \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$$

$$16.5. \sqrt[5]{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[15]{-2}$$

$$16.6. \sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[6]{2^2 \times 5} = \sqrt[6]{20}$$

$$16.7. 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{\sqrt{2^2 \times 2}} = 2\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^3} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{128}$$

$$16.8. \sqrt{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \times 3}} = \sqrt[6]{24}$$

$$16.9. \sqrt[3]{(\sqrt{3^{-1}})^{-2}} = \sqrt[3]{(3^{-1})^{-2}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3}$$

17. Designemos por l o lado do triângulo equilátero. Então,

$$l = \frac{6\sqrt[3]{2}}{3} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(2\sqrt[3]{2})^2 = (\sqrt[3]{2})^2 + h^2 \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^2} + h^2 \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} = h^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4} = h^2$$

Como $h > 0$, conclui-se que

$$h = \sqrt{3\sqrt[3]{4}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \times 4}} = \sqrt[6]{27 \times 4} = \sqrt[6]{108}.$$

Pág. 72

$$18.1. \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$18.2. \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$$

$$18.3. \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$18.4. \frac{-2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-2 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{-2 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{-2 \times \sqrt[3]{4}}{2} = -\sqrt[3]{4}$$

$$18.5. \frac{3}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3 \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{5}} = \frac{3 \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{5}}{5}$$

$$18.6. \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{2 + 3\sqrt{2^2 \times 3}}{4} =$$

$$= \frac{2 + 3 \times 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$$

19.1.

$$\frac{3}{2-\sqrt{2}} = \frac{3 \times (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2})} = \frac{6+3\sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6+3\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}$$

$$19.2. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{15}+\sqrt{6})}{(\sqrt{15}-\sqrt{6}) \times (\sqrt{15}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{45}+\sqrt{18}}{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 \times 5} + \sqrt{3^2 \times 2}}{15-6} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

$$19.3. \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{5} \times (2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1) \times (2\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{4 \times 3 - 1} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{11}$$

$$19.4. \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{(2+\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3) \times (\sqrt{3}-3)} = \frac{2\sqrt{3}-6+3-3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 3^2} =$$

$$= \frac{-3-\sqrt{3}}{3-9} = \frac{-3-\sqrt{3}}{-6} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

Pág. 74

20. Substituindo na equação x por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tem-se:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2 \times (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{5})} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1^2 - (\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (P.V.)}$$

Como a proposição obtida é verdadeira, conclui-se que o número de ouro é solução da equação dada.

21. Ora, $\overline{BC} = \overline{AB} = 2\overline{OB}$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{OC})^2 = (\overline{OB})^2 + (2\overline{OB})^2 \Leftrightarrow (\overline{OC})^2 = (\overline{OB})^2 + 4(\overline{OB})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{OC})^2 = 5(\overline{OB})^2$$

$$\text{Portanto, } \overline{OC} = \sqrt{5(\overline{OB})^2} = \sqrt{5} \times \sqrt{(\overline{OB})^2} = \sqrt{5}\overline{OB}.$$

$$\text{Então, } \overline{CD} = \overline{DO} + \overline{OC} = \overline{OB} + \sqrt{5}\overline{OB} = (1+\sqrt{5})\overline{OB} \text{ e}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{(1+\sqrt{5})\overline{OB}}{2\overline{OB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (número de ouro).}$$

$$\begin{aligned} 22.1. A+B &= 1-2\sqrt{2}+2+\sqrt{18}=3-2\sqrt{2}+\sqrt{3^2 \times 2}= \\ &= 3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=3+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.2. A-B &= 1-2\sqrt{2}-(2+\sqrt{18})=1-2\sqrt{2}-2-\sqrt{3^2 \times 2}= \\ &= -1-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-1-5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.3. A \times B &= (1-2\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{18})=2+\sqrt{18}-4\sqrt{2}-2\sqrt{36}= \\ &= 2+\sqrt{3^2 \times 2}-4\sqrt{2}-2 \times 6=2+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-12=-10-\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.4. \frac{A}{B} &= \frac{1-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{18}} = \frac{(1-2\sqrt{2}) \times (2-\sqrt{18})}{(2+\sqrt{18}) \times (2-\sqrt{18})} = \frac{2-\sqrt{18}-4\sqrt{2}+2\sqrt{36}}{2^2-(\sqrt{18})^2} = \\ &= \frac{2-\sqrt{3^2 \times 2}-4\sqrt{2}+2 \times 6}{4-18} = \frac{14-3\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{-14} = \frac{14}{-14} - \frac{7\sqrt{2}}{-14} = \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$23. \text{ Ora, } (2-\sqrt{3})^2 = 4-2 \times 2 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$$

$$\text{Como } 2-\sqrt{3} > 0, \text{ então } \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 24. \text{ Ora, } \sqrt{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt{4-2\sqrt{3}} &= \sqrt{(4+2\sqrt{3}) \times (4-2\sqrt{3})} = \\ &= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16-4 \times 3} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 \times (4-2\sqrt{3})}{(4+2\sqrt{3}) \times (4-2\sqrt{3})}} = \\ &= \frac{\sqrt{4(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{(4+2\sqrt{3}) \times (4-2\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Pág. 75

Proposta 1

$$1.1. (-3)^3 > (-4)^3, \text{ pois } -27 > -64.$$

$$1.2. (-3)^2 < (-4)^2, \text{ pois } 9 < 16.$$

$$1.3. \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \text{ pois } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$1.4. (-\sqrt{2})^3 > (-\sqrt{3})^3, \text{ pois}$$

$$(-\sqrt{2})^3 = (-\sqrt{2})^2 \times (-\sqrt{2}) = 2 \times (-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \text{ e}$$

$$(-\sqrt{3})^3 = (-\sqrt{3})^2 \times (-\sqrt{3}) = 3 \times (-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}.$$

$$1.5. \left(-\frac{1}{3}\right)^4 > \left(-\frac{1}{4}\right)^4, \text{ pois } \frac{1}{81} > \frac{1}{256}.$$

$$1.6. \pi^6 > 3^6, \text{ pois } \pi > 3.$$

Proposta 2

$$2.1. \text{ Como } b < 0 \text{ e } c > 0, \text{ então } b^3 < 0 \text{ e } c^3 > 0. \text{ Logo, } b^3 < c^3.$$

$$2.2. \text{ Como } a < b < 0, \text{ então } -a > -b > 0. \text{ Logo, } (-a)^4 > (-b)^4.$$

$$2.3. \text{ Como } 0 < c < d, \text{ então } 0 > -c > -d. \text{ Logo, } (-c)^5 > (-d)^5.$$

$$2.4. \text{ Como } 0 < c < d, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ par, então } c^n < d^n.$$

$$2.5. \text{ Como } b < 0 \text{ e } c > 0, \text{ então } b < c.$$

$$\text{Como } a < 0 \text{ e } b < c, \text{ então } ab > ac.$$

$$\text{Como } ab > 0, ac < 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar, então } (ab)^n > 0 \text{ e}$$

$$(ac)^n < 0.$$

$$\text{Então, conclui-se que } (ab)^n > (ac)^n, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar.}$$

Proposta 3

$$3.1. \sqrt{75} + \sqrt{12} = \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{2^2 \times 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$3.2. \sqrt[3]{5000} - 2\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{10^3 \times 5} - 2\sqrt[3]{2^3 \times 5} = 10\sqrt[3]{5} - 2 \times 2\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}$$

$$3.3. \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{24} = \sqrt{6} + \sqrt{2^2 \times 6} = \sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$3.4. \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} - \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2^4} = 3\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} \times 2 = \sqrt[4]{2}$$

$$\begin{aligned} 3.5. \sqrt{6} \times \sqrt{3} + \sqrt{200} - \sqrt{50} &= \sqrt{18} + \sqrt{10^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} = \\ &= \sqrt{3^2 \times 2} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$3.6.$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (5 - \sqrt{54}) &= (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 5 + \sqrt{3^2 \times 6} = \\ &= 2 + 2 \times \sqrt{6} + 3 - 5 + 3\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$3.7. \sqrt[3]{-250} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{(-5)^3 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 2} = -5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} 3.8. (\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{27} - 7 &= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 + \sqrt{3^2 \times 3} - 7 = \\ &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 3\sqrt{3} - 7 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Proposta 4

$$4.1. \text{ Se a área do quadrado é 28, então}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{Logo, o perímetro do quadrado é dado por } 4 \times 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}.$$

$$4.2. \text{ Se a medida do lado do quadrado é } \sqrt{6} - \sqrt{3}, \text{ então a área é dada por:}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = \\ &= 9 - 2\sqrt{3^2 \times 2} = 9 - 2 \times 3\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

4.3. Se a medida da diagonal do quadrado é $\sqrt{136}$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AB})^2 = (\sqrt{136})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(\overline{AB})^2 = 136 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 68$$

Portanto, $\overline{AB} = \sqrt{68} = \sqrt{2^2 \times 17} = 2\sqrt{17}$.

Logo, o perímetro do quadrado é dado por $4 \times 2\sqrt{17} = 8\sqrt{17}$.

Pág. 76

Proposta 5

5.1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow d^2 = 2l^2$$

Como $d > 0$, conclui-se que $d = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{l^2} = \sqrt{2}l$.

Então, $\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{2}l}{l} = \sqrt{2}$.

5.2. Sabe-se que $\overline{CD} = \overline{AB} = r$. Designemos por O o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{PO})^2 + (\overline{OA})^2 = (\overline{AP})^2 \Leftrightarrow (\overline{PO})^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\overline{PO})^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow (\overline{PO})^2 = \frac{3r^2}{4}$$

Portanto, $\overline{PO} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{r^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$.

Como $\overline{CF} = \overline{PQ} = 2\overline{PO} = 2 \times \frac{\sqrt{3}r}{2} = \sqrt{3}r$, então $\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}r}{r} = \sqrt{3}$.

Proposta 6

$$6.1. \frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{7}{3}}$$

$$6.2. \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{30}{3}} = \sqrt{10}$$

$$6.3. 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{20}$$

$$6.4. -\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(-1)^3 \times 7} = \sqrt[3]{-7}$$

$$6.5. \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$$

$$6.6. (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$6.7. \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

$$6.8. 3\sqrt{\sqrt{2}} = 3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} = \sqrt[4]{162}$$

$$6.9. \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{6}} = \sqrt[6]{\frac{12}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

Proposta 7

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

$$P = 2\overline{AB} + 2\overline{BC} = 2 \times 3 + 2 \times \sqrt{8} = 6 + 2\sqrt{2^2 \times 2} = (6 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$$

Pág. 77

Proposta 8

$$8.1. A_i = 2(\sqrt{6} \times \sqrt{2} + \sqrt{6} \times (\sqrt{3} + 1) + \sqrt{2} \times (\sqrt{3} + 1)) = \\ = 2(\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 2} + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \\ = 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) = \\ = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$$

$$8.2. V = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{12} \times (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{36} + \sqrt{12} = \\ = 6 + \sqrt{2^2 \times 3} = 6 + 2\sqrt{3}$$

8.3.

$$(\overline{BE})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \Leftrightarrow (\overline{BE})^2 = 6 + 2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\overline{BE})^2 = 12 + 2\sqrt{3}$$

Portanto, $\overline{BE} = \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}$.

Proposta 9

$$9.1. A = \frac{8\sqrt{72} - 3\sqrt{288}}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{288}}{\sqrt{8}} = 8\sqrt{9} - 3\sqrt{36} = \\ = 8 \times 3 - 3 \times 6 = 24 - 18 = 6$$

$$9.2. B = \sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2^3 \times 10} - \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10} = \\ = 2\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10}$$

$$9.3. \sqrt{AB} = \sqrt{6 \times \sqrt[3]{10}} = \sqrt{\sqrt[3]{6^3 \times 10}} = \sqrt[6]{6^3 \times 10} = \sqrt[6]{2160}$$

Proposta 10

$$10.1. \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \times 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$10.2. \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$$

$$10.3. \frac{-3}{\sqrt[5]{-8}} = \frac{-3}{\sqrt[5]{(-2)^3}} = \frac{-3 \times \sqrt[5]{(-2)^2}}{\sqrt[5]{(-2)^3} \times \sqrt[5]{(-2)^2}} = \frac{-3 \times \sqrt[5]{(-2)^2}}{\sqrt[5]{(-2)^5}} = \\ = \frac{-3 \times \sqrt[5]{4}}{-2} = \frac{3\sqrt[5]{4}}{2}$$

10.4.

$$\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times (1+2\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3}) \times (1+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{1^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{1-4 \times 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{-11} = \frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{11}$$

10.5. $\frac{3}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{3 \times (\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+2\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-2\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2} =$

$$= \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3-4 \times 2} = \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{-5} = \frac{-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{5}$$

10.6. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-2\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2} =$

$$= \frac{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{5-4 \times 3} = \frac{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{-7} = \frac{-\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{7}$$

10.7.

$$\frac{5}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}} = \frac{5 \times (2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}) \times (2\sqrt{5}-3\sqrt{2})} = \frac{10\sqrt{5}-15\sqrt{2}}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{5}-15\sqrt{2}}{4 \times 5-9 \times 2} = \frac{10\sqrt{5}-15\sqrt{2}}{2}$$

10.8. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{2}) \times (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{14}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} =$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{14}-\sqrt{6}}{4}$$

Proposta 11

11.1.

$$\overline{BC} = \frac{4}{2\sqrt{5}-2} = \frac{4 \times (2\sqrt{5}+2)}{(2\sqrt{5}-2) \times (2\sqrt{5}+2)} = \frac{8\sqrt{5}+8}{(2\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{8\sqrt{5}+8}{4 \times 5-4} =$$

$$= \frac{8\sqrt{5}+8}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

11.2. $P = 2 \times (2\sqrt{5}-2) + 2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 4\sqrt{5}-4+\sqrt{5}+1 = 5\sqrt{5}-3$

Pág. 78

Proposta 12

12.1. $V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$

12.2.

a) Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2$$

Como $d > 0$, conclui-se que $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \sqrt{2}a$.

b) $d = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{V}$

Proposta 13

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}V = \pi r^3 \Leftrightarrow \frac{3V}{4\pi} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = r$$

$$a = 2r = 2 \times \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{2^3 \times \frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{24V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Proposta 14

14.1. $A = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{\pi} = r^2$

Como $r > 0$, conclui-se que $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

14.2.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{A}{\pi} \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{4A\sqrt{A}}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4A\sqrt{A} \times \sqrt{\pi}}{3\sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}} = \frac{4A\sqrt{A\pi}}{3\pi}$$

Proposta 15

15.1. $(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) = 4+2 \times 2 \times \sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3} =$

$$= -1+4\sqrt{3}-4\sqrt{3} = -1$$

Assim sendo, $x_1 = 2+\sqrt{3}$ é solução da equação dada porque

$$x_1^2 - 4x_1 = -1.$$

$$(2-\sqrt{3})^2 - 4(2-\sqrt{3}) = 4-2 \times 2 \times \sqrt{3}+3-8+4\sqrt{3} =$$

$$= -1-4\sqrt{3}+4\sqrt{3} = -1$$

Então $x_2 = 2-\sqrt{3}$ também é solução da equação dada porque

$$x_2^2 - 4x_2 = -1.$$

15.2.

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^4 + (2-3\sqrt{2}) \times \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = 2 + (2-3\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}-3 \times 2 =$$

$$= 2\sqrt{2}-4 = 2(\sqrt{2}-2)$$

Então $x_2 = \sqrt[4]{2}$ é raiz da equação dada porque

$$x_2^4 + (2-3\sqrt{2})x_2^2 = 2(\sqrt{2}-2).$$

$$\left(-\sqrt[4]{2}\right)^4 + (2-3\sqrt{2}) \times \left(-\sqrt[4]{2}\right)^2 = 2 + (2-3\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}-3 \times 2 =$$

$$= 2\sqrt{2}-4 = 2(\sqrt{2}-2)$$

Logo, $x_3 = -\sqrt[4]{2}$ é raiz da equação dada porque

$$x_3^4 + (2-3\sqrt{2})x_3^2 = 2(\sqrt{2}-2).$$

Proposta 16

$$16.1. \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{2} \times (\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{ab} \times \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$$

16.2.

$$\frac{(\sqrt{a+b})^2 - 11}{\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{2+3})^2 - 11}{\sqrt{2 \times 3}} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 3 + 3^2 - 11}{\sqrt{6}} = \frac{2 + 6\sqrt{2} + 9 - 11}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{12}}{6} = \sqrt{12}$$

Pág. 79

Proposta 17**17.1.** Designemos por O o centro do quadrado $[ABCD]$.Sejam E e F os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente, do quadrado $[ABCD]$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{EF})^2 = (\overline{OE})^2 + (\overline{OF})^2 \Leftrightarrow (2r)^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 32 \Leftrightarrow r^2 = 8$$

Portanto, $r = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm.**17.2.****a)** A reta EF é um eixo de simetria do quadrado $[OEBF]$. Então, a área da região contida no quadrado $[OEBF]$ e colorida a amarelo é igual à área da região contida no quadrado $[OEBF]$ e colorida a vermelho.Como as retas EO e FO são dois eixos de simetria do quadrado $[ABCD]$ representado na figura, conclui-se que a área da região colorida a amarelo na figura é igual à área da região colorida a vermelho na figura, ou seja, é igual a S .**b)** Sabe-se que $S = (\overline{EF})^2 - 4 \times A_{\frac{1}{4}\text{círculo}} = (\overline{EF})^2 - A_{\text{círculo}}$.

$$\text{Então, } S = (4\sqrt{2})^2 - \pi \times (2\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 - \pi \times 4 \times 2 = (32 - 8\pi) \text{ cm}^2$$

Proposta 18

$$18.1. \frac{2}{\sqrt[4]{2}-2} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+2)}{(\sqrt[4]{2}-2) \times (\sqrt[4]{2}+2)} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+2)}{(\sqrt[4]{2})^2 - 2^2} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+2)}{\sqrt{2}-4} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+2) \times (\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{2}-4) \times (\sqrt{2}+4)} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+2) \times (\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{2 \times (\sqrt[4]{2}+1) \times (\sqrt{2}+1)}{-14} = \frac{(\sqrt[4]{2}+1) \times (\sqrt{2}+1)}{-7}$$

$$18.2. \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \times \left((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right)}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}) \times \left((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right)} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{5-2} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$$

Proposta 19**19.1.****a)** Substituindo, por exemplo, x por 3 obtém-se:

$$\sqrt{9-12+4} = 3-2 \quad (\text{Proposição verdadeira})$$

b) Substituindo, por exemplo, x por 1 obtém-se:

$$\sqrt{1-4+4} = 1-2 \quad (\text{Proposição falsa})$$

$$19.2. \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2}$$

Assim sendo, a afirmação $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$ é verdadeira se $x - 2 \geq 0$, ou seja, se $x \geq 2$.Conclui-se, então, que $x \in [2, +\infty[$.**Proposta 20**

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{MC})^2 = (\overline{MB})^2 + (\overline{BC})^2 \Leftrightarrow (\overline{MC})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MC})^2 = \frac{1}{4} + 1 \Leftrightarrow (\overline{MC})^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Portanto, } \overline{MC} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\overline{AP} = \overline{AM} + \overline{MP} = \overline{AM} + \overline{MC} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Pág. 80

$$25.1. \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{2^5 \sqrt[5]{3^{4 \times 2}}} = \sqrt[5]{3^8}$$

$$25.2. \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[8]{3^{4 \times 2}} = \sqrt[4]{3^2}$$

$$25.3. \sqrt{5} = \sqrt[2 \times 3]{5^{1 \times 3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$25.4. \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6 \times 3]{2^{3 \times 3}} = \sqrt[2]{2^3}$$

$$25.5. \sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}} \quad 25.6. 11^{\frac{3}{4}} = 11^{\frac{3 \times 3}{4 \times 3}} = 11^{\frac{9}{12}}$$

$$25.7. 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2 \times 2}{3 \times 2}} = 5^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{5^4} \quad 25.8. 3^{\frac{4}{7}} = 3^{\frac{4 \times 3}{7 \times 3}} = 3^{\frac{12}{21}} = \sqrt[21]{3^{12}}$$

Pág. 81

$$26.1. \sqrt[7]{3^5} = 3^{\frac{5}{7}}$$

$$26.2. \sqrt[9]{5} \times \sqrt[9]{5^3} = \sqrt[9]{5 \times 5^3} = \sqrt[9]{5^4} = 5^{\frac{4}{9}}$$

$$26.3. \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$$

$$26.4. \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times 2} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$27.1. 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$27.2. \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$$

$$27.3. \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$27.4. 5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

$$27.5. 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$$

$$27.6. \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

$$28.1. \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{7} \text{ porque } \sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \times 4]{5^4} = \sqrt[12]{625} \text{ e } \sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \times 3]{7^3} = \sqrt[12]{343}.$$

$$28.2. \sqrt[5]{8} < \sqrt[4]{7} \text{ porque } \sqrt[5]{8} = \sqrt[5 \times 4]{8^4} = \sqrt[20]{4096} \text{ e } \sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \times 5]{7^5} = \sqrt[20]{16807}.$$

$$28.3. \sqrt[6]{11} > \sqrt[4]{2\sqrt[3]{15}} \text{ porque } \sqrt[6]{11} = \sqrt[6 \times 2]{11^2} = \sqrt[12]{121} \text{ e } \sqrt[4]{2\sqrt[3]{15}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \times 15}} = \sqrt[12]{120}.$$

Pág. 82

$$29.1. \sqrt[4]{3} \times \sqrt{2} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt[2 \times 2]{2} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{3 \times 4} = \sqrt[4]{12}$$

$$29.2. \sqrt[6]{5} \times \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[3 \times 2]{2^{2 \times 2}} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{5 \times 2^4} = \sqrt[6]{80}$$

$$29.3. \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{5} = \sqrt[3 \times 4]{5^{2 \times 4}} \times \sqrt[4 \times 3]{2^{1 \times 3}} \times \sqrt[2 \times 6]{5^{1 \times 6}} = \sqrt[12]{5^8} \times \sqrt[12]{2^3} \times \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{5^8 \times 2^3 \times 5^6} = \sqrt[12]{5^{14} \times 2^3} = \sqrt[12]{200}$$

$$29.4. \frac{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3 \times 2]{7^{1 \times 2}} \times \sqrt[6]{2}}{\sqrt[3 \times 2]{4^{1 \times 2}}} = \frac{\sqrt[6]{7^2} \times \sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{4^2}} = \frac{\sqrt[6]{7^2 \times 2}}{\sqrt[6]{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{7^2 \times 2}{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{49}{8}}$$

$$29.5. 3^{\frac{3}{4}} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{3^3} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{3^3} \times \sqrt[2 \times 2]{3} = \sqrt[4]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$29.6. \frac{2^{\frac{2}{5}} \times \sqrt[10]{4}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[5]{2^2} \times \sqrt[10]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[5 \times 2]{2^{2 \times 2}} \times \sqrt[10]{4}}{\sqrt[2 \times 5]{2^{1 \times 5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[10]{2^4} \times \sqrt[10]{2^2}}{\sqrt[10]{2^5}} = \sqrt[10]{\frac{2^4 \times 2^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\frac{2^6}{2^5}} = \sqrt[10]{2}$$

$$29.7. \sqrt[4]{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[8]{2} \times \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2} \times \sqrt[4 \times 2]{2^{3 \times 2}} = \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[8]{2 \times 2^6} = \sqrt[8]{2^7} = \sqrt[8]{128}$$

$$30.1. \overline{BC} = \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3 \times 6} = 2\sqrt[3]{6} = 2^{3 \times 2} \sqrt[6]{6^{1 \times 2}} = 2\sqrt[6]{6^2} = 2\sqrt[6]{36} = 2\overline{AB}$$

30.2. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 &= (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 + (2\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 + 4(\overline{AB})^2 &= (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow 5(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \overline{AC} = \sqrt{5(\overline{AB})^2} = \sqrt{5} \times \overline{AB} = \sqrt{5} \times \sqrt[6]{36} = \sqrt[2 \times 3]{5^3} \times \sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{125 \times 36} = \sqrt[6]{4500}.$$

Pág. 83

$$31.1. 2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$$

$$31.2. 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{-\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$31.3. 2^{\frac{2}{5}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(2 \times \frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$31.4. \left(\frac{1}{5^4}\right)^3 = 5^{\frac{3}{4}}$$

$$31.5. \left(3^{-\frac{2}{7}}\right)^2 = 3^{-\frac{4}{7}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{7}}$$

$$31.6. \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$31.7. 5^4 : 5^{-\frac{3}{2}} = 5^{4 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = 5^{4 + \frac{3}{2}} = 5^{\frac{11}{2}}$$

$$31.8. \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{8}{2}} : \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{8}{2} - \frac{3}{2}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$32.1. A = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}; B = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$A \times B = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{13}{12}}$$

$$32.2. B = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$32.3. A^{\frac{6}{5}} = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{6}{5}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{6}{15}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$32.4. A^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Pág. 84

$$33.1. \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{4}{5}} : \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{15}}$$

$$33.2. \frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{1 - \frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$33.3. 5^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$33.4. 6^{-\frac{2}{3}} : 2^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{6}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$34.1. \left(2^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{4}} \right) \times \left(2^{\frac{1}{2}} - 4^{-\frac{1}{4}} \right) = \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(4^{-\frac{1}{4}} \right)^2 = 2^{\frac{1}{2} \times 2} - 4^{-\frac{1}{4} \times 2} = 2^1 - 4^{-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$34.2. 3^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{3^2} \times \frac{1}{\sqrt[6]{5}} = \frac{\sqrt[3]{3^{2 \times 2}}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{81}{5}} = \sqrt[6]{16,2}$$

$$34.3. \sqrt[6]{11-3^2} \times \sqrt[6]{11+3^2} = \sqrt[6]{(11-3) \times (11+3)} = \sqrt[6]{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{11-3} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Pág. 86

Proposta 21

$$21.1. \sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[3 \times 2]{2^{1 \times 2}} \times \sqrt[2 \times 3]{3^{1 \times 3}} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^2 \times 3^3 \times 5} = \sqrt[6]{540} = 540^{\frac{1}{6}}$$

21.2.

$$\frac{\sqrt{8+32^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 2} + \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 2 \times 2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6^2 \times 2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6^2 \times 2}{6}} = \sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}$$

$$21.3. \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2^2} \times 2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{2^3}{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{8}{9}} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$21.4. \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{6}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$21.5. 4^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{4^4}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{4^4}{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{256}{27}} = \left(\frac{256}{27} \right)^{\frac{1}{6}}$$

21.6.

$$\left[\left(2^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 + 8^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[(\sqrt{2} - 1)^2 + \sqrt{8} \right]^{\frac{1}{3}} = (2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

Proposta 22

$$22.1. 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$$

$$22.2. \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$22.3. (\sqrt{3})^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^5}$$

$$22.4. \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2} \right)^1} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$22.5. \left[(\sqrt[3]{5})^{-2} \right]^{-\frac{1}{6}} = (\sqrt[3]{5})^{-2 \times (-\frac{1}{6})} = (\sqrt[3]{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9]{5}$$

$$22.6. \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3 \times 2]{3^2} = \sqrt[6]{3^2}$$

Proposta 23

$$23.1. \sqrt[3]{6} > \sqrt{3} \text{ porque } \sqrt[3]{6} = \sqrt[3 \times 2]{6^{1 \times 2}} = \sqrt[6]{36} \text{ e } \sqrt{3} = \sqrt[2 \times 3]{3^{1 \times 3}} = \sqrt[6]{27}. \text{ Então, o maior dos números é } \sqrt[3]{6}.$$

$$23.2. \sqrt[5]{7} < \sqrt[4]{5} \text{ porque } \sqrt[5]{7} = \sqrt[5 \times 4]{7^{1 \times 4}} = \sqrt[20]{2401} \text{ e } \sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \times 5]{5^{1 \times 5}} = \sqrt[20]{3125}. \text{ Então, o maior dos números é } \sqrt[4]{5}.$$

$$23.3. 5^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{2}{3}} \text{ porque } 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = \sqrt[2 \times 3]{5^{1 \times 3}} = \sqrt[6]{125} \text{ e } 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3 \times 2]{3^{2 \times 2}} = \sqrt[6]{81}. \text{ Então, o maior dos números é } 5^{\frac{1}{2}}.$$

$$23.4. \pi^{\frac{1}{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ porque } \pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \text{ e } \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \text{ Então, o maior dos números é } \pi^{\frac{1}{2}}.$$

23.5. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < \sqrt[6]{\pi}$ porque $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6}}$ e $\sqrt[6]{\pi} = \pi^{\frac{1}{6}}$.

Então, o maior dos números é $\sqrt[6]{\pi}$.

23.6. $\frac{3}{\sqrt{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ porque $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ e

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Então, o maior dos números é $\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Proposta 24

24.1.

$$\frac{\sqrt{2} \times 3^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt[3]{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2 \times 2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2 \times 2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 3^3}}{\sqrt[3]{3^2 \times 2 \times 2^6}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 3^2}}{\sqrt[3]{3^2 \times 2^7}} = \sqrt[6]{\frac{2^3 \times 3^2}{3^2 \times 2^7}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^4}} = \sqrt[6]{2^{-4}} = 2^{-\frac{4}{6}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

24.2.

$$\left(\frac{2}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^3 : \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 : \frac{\sqrt{2^2 \times 2}}{\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3^3}} : \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3^2 \times 3}} : \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{2^3}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{3 - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$$

24.3. Sendo $a > 0$, então:

$$\sqrt{a} \sqrt{a^{-1}} : a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt{\sqrt{a^2 \times a^{-1}}} : a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{a} : a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{4}} : a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = a^{\frac{3}{12} + \frac{8}{12}} = a^{\frac{11}{12}}$$

Proposta 25

Sabe-se que a e b são números reais positivos.

25.1. $\sqrt[4]{a^3 \sqrt{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3 \times a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{3+2}}} = \sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{12}}$

25.2. $\left(a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((a \times b)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{ab}$

25.3. $\frac{b^{\frac{1}{4}} \times b^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{b^{\frac{1+3}{4}}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{b^1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{b^4}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{b^4 \times b^3}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{b\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a}} = b\sqrt[4]{\frac{b^3}{a}}$

25.4.

$$\frac{\sqrt{ab}}{(ab)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{(ab)^{-\frac{1}{3}}} = (ab)^{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = (ab)^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = (ab)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(ab)^5} = \sqrt[6]{a^5 b^5}$$

Proposta 26

26.1.

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 2}} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{8^{-1}}} = \sqrt{2^{-1}\sqrt{(2^3)^{-1}}} = \sqrt{2^{-1}\sqrt{2^{-3}}} = \sqrt{\sqrt{(2^{-1})^2 \times 2^{-3}}} = \sqrt[4]{2^{-2} \times 2^{-3}} = \sqrt[4]{2^{-5}} = 2^{-\frac{5}{4}}$

26.2.

a) $\frac{9^{\frac{1}{5}}}{\frac{2}{3^3}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{5}}}{\frac{2}{3^3}} = \frac{3^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{3^3}} = 3^{\frac{2}{5} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{15} + \frac{10}{15}} = 3^{\frac{16}{15}}$

b) $\frac{\sqrt[4]{3} \times 3^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt[3]{3})^{-2}} = \frac{3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{3} \times (-2)}} = \frac{3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}}{3^{-\frac{4}{3}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{4}{3}}} = 3^{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = 3^{\frac{9}{12} + \frac{16}{12}} = 3^{\frac{25}{12}}$

Proposta 27

27.1. $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^5}$

27.2. $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^{3+2}} = \sqrt[3]{3^5}$

27.3. $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$

27.4. $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}} = (3^5)^{\frac{1}{3}} = 243^{\frac{1}{3}}$

Proposta 28

28.1. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{10}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{10}}$

28.2. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{10}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$

Proposta 29

29.1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AB})^2 = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\overline{AB})^2 = 4^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = \frac{(2^2)^{\frac{2}{3}}}{2} \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 2^{\frac{4}{3}-1} \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = \sqrt[3]{2}. \text{ Ora, } A_{[ABCD]} = (\overline{AB})^2 = \sqrt[3]{2}.$$

29.2. Atendendo aos cálculos efetuados anteriormente, tem-se:

$$\overline{AB} = \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}.$$

Logo, o perímetro do quadrado é dado por

$$4 \times \sqrt[6]{2} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{2+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{13}{6}}.$$

Proposta 30

30.1. Como o hexágono representado na figura é regular, então:

$$\begin{aligned} P &= 6 \times \overline{AB} = 6 \times 6^{\frac{1}{2}} = \\ &= 6 \times \sqrt{6} = \sqrt{6^2 \times 6} = \sqrt{6^3} \\ &= \sqrt{216} \end{aligned}$$

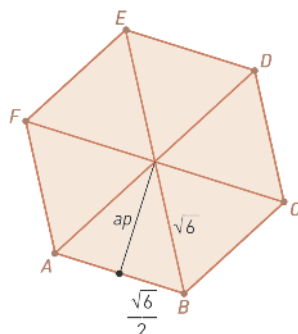
30.2. Dividindo o hexágono regular em 6 triângulos equiláteros (conforme ilustra a figura ao lado) e recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$(a_p)^2 = (\sqrt{6})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a_p)^2 = 6 - \frac{6}{4} \Leftrightarrow (a_p)^2 = \frac{18}{4}$$

$$\text{Donde se conclui que } a_p = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} A_{\text{hexágono}} &= \frac{P}{2} \times a_p = \frac{6\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{12}}{4} = \frac{9\sqrt{2^2 \times 3}}{2} = \frac{9 \times 2\sqrt{3}}{2} = \\ &= 9\sqrt{3} = 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$



Pág. 88

Proposta 31

31.1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{OC})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow (\overline{OC})^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{OC})^2 = 18$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{OC} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Ora, $\overline{OB} = \overline{OC}$ porque são raios da circunferência.

$$\text{Então, tem-se: } A_{\{OBC\}} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 3}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2} \times \sqrt{2} = \frac{9}{2} \times 2^{\frac{1}{2}}$$

31.2. Como o triângulo $[OAC]$ é retângulo e isósceles, conclui-se que $\widehat{AOC} = 45^\circ$.

Então $[BC]$ é um dos lados de um octógono regular inscrito na circunferência, pois $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$.

$$\text{Então, tem-se: } A_{\text{octógono}} = 8 \times A_{\{OBC\}} = 8 \times \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{72\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}$$

Proposta 32

32.1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{BC})^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 = 5; (\overline{BC})^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 = 5 \text{ e}$$

$$(\overline{AC})^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 13.$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{BC} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \overline{AC} = \sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}} \text{ e}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{20} = 20^{\frac{1}{2}}.$$

32.2. Se o triângulo $[ABC]$ for retângulo então a igualdade

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 \text{ é verdadeira.}$$

Ora, $20 = 13 + 5$ é uma igualdade falsa.

Logo, o triângulo $[ABC]$ não é retângulo.

32.3.

$$\begin{aligned} \text{a) } (\overline{AB} - \overline{BC})^3 &= (\sqrt{20} - \sqrt{5})^3 = (\sqrt{20} - \sqrt{5})^2 \times (\sqrt{20} - \sqrt{5}) = \\ &= (20 - 2\sqrt{100} + 5) \times (\sqrt{20} - \sqrt{5}) = (25 - 20) \times (\sqrt{2^2 \times 5} - \sqrt{5}) = \\ &= 5 \times (2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = 5 \times (\sqrt{5}) = 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{3}{\overline{AB} + \overline{BC}}\right)^3 &= \left(\frac{3}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{3}{3\sqrt{5}}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}\right)^3 = \left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = 5^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Proposta 33

33.1.

a) Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{BC})^2 = 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 = 10$$

Donde se conclui que $\overline{BC} = \sqrt{10}$.

b) Aplicando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \frac{8}{4} = \frac{\sqrt{10}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{4\sqrt{10}}{8} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

33.2. Vamos começar por determinar $\overline{AC}$ e em seguida $\overline{AE}$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$(\overline{AC})^2 = 3^2 + 9^2 \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 90$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{AC} = \sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = 3\sqrt{10}.$$

Aplicando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{\overline{AE}} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{12\sqrt{10}}{8} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Como } \overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}, \text{ conclui-se que } \overline{EC} = 3\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Assim sendo, o perímetro P do trapézio $[DBCE]$ é dado por:

$$P = \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{EC} + \overline{DE} = 4 + \sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{3\sqrt{10}}{2} = 4 + 3\sqrt{10}$$

Pág. 89

Proposta 34

34.1.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3} \times 2^{\frac{1}{2}}}}{6^{\frac{1}{6}}} &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{2}}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{\sqrt[6]{2^2 \times 3 \times 2 \times 3}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{\sqrt[6]{2^3 \times 3^2}}{\sqrt[6]{2 \times 3}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{2^3 \times 3^2}{2 \times 3}} = \sqrt[6]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^{4 \times 2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

34.2. Atendendo aos cálculos efetuados na alínea anterior, tem-

$$\text{-se que: } \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3} \times 2^{\frac{1}{2}}}}{6^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Proposta 35

35.1. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{4x^2 - 24x + 36} = 2x - 6$ é falsa.

Por exemplo, para $x = 1$ obtém-se:

$$\sqrt{4 - 24 + 36} = 2 - 6, \text{ ou seja, } \sqrt{16} = -4 \text{ (proposição falsa).}$$

35.2.

a) Ora,

$$(5 - \sqrt{2})^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 25 - 10\sqrt{2} + 2 = 27 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{Então, } \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} = 5 - \sqrt{2}$$

$$(1) \ 5 - \sqrt{2} > 0 \text{ porque } 5 > \sqrt{2}$$

b) Ora,

$$(3 + \sqrt{6})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = 9 + 6\sqrt{6} + 6 = 15 + 6\sqrt{6}.$$

$$\text{Então, } \sqrt{15 + 6\sqrt{6}} = \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2} = 3 + \sqrt{6}$$

$$(2) \ 3 + \sqrt{6} > 0$$

$$\mathbf{35.3.} \ (2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$(5 - \sqrt{3})^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 25 - 10\sqrt{3} + 3 = 28 - 10\sqrt{3}$$

$$\text{Então, } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} =$$

$$= 2 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 7$$

$$(3) \ 2 + \sqrt{3} > 0 \text{ e } 5 - \sqrt{3} > 0$$

Assim sendo, a expressão $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ representa um número natural.

Proposta 36

$$\mathbf{36.1.} \ a^2 \times \left(a^{-1} + b^{\frac{2}{3}}\right) \times \left(\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = a^2 \times \left(\frac{1}{a} + b^{\frac{2}{3}}\right) \times \left(\frac{1}{a} - b^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= a^2 \times \left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^2\right) = a^2 \times \left(\frac{1}{a^2} - b^{\frac{4}{3}}\right) = a^2 \times \frac{1}{a^2} - a^2 \times b^{\frac{4}{3}} =$$

$$= 1 - a^2 \times \sqrt[3]{b^4} = 1 - a^2 \times \sqrt[3]{b^3 \times b} = 1 - a^2 \times b\sqrt[3]{b}$$

36.2. Sendo $a = 3^{\frac{1}{2}}$ e $b = \frac{1}{8}$, então tem-se:

$$1 - a^2 \times b\sqrt[3]{b} = 1 - \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{8} \times \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1 - 3 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Proposta 37

37.1. Designemos por D a medida da diagonal espacial do cubo e por a a medida da sua aresta.

Sabe-se que $D^2 = 3a^2$. Então, tem-se que:

$$\left(\sqrt[6]{108}\right)^2 = 3a^2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{108^{2 \cdot 2}} = 3a^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{108}}{3} = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{3^3 \times 2^2}}{3} = a^2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{3} = a^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2^2} = a^2$$

Como $a > 0$, conclui-se que $a = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$.

$$\mathbf{37.2.} \ V = a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^1 = 2$$

37.3. Atendendo aos cálculos efetuados em 37.1. tem-se:

$$A_t = 6a^2 = 6 \times \sqrt[3]{2^2} = 6 \times \sqrt[3]{4}.$$

Pág. 90

$$\mathbf{1.} \text{ A opção correta é a (C) porque } \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}} = 7^{\frac{8}{12}}.$$

$$\mathbf{2.} \text{ A opção correta é a (D) porque } \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1 \times 3}{3 \times 3}} = a^{\frac{3}{9}}.$$

$$\mathbf{3.} \ P = 2\sqrt{50} + 2\sqrt{18} = 2\sqrt{5^2 \times 2} + 2\sqrt{3^2 \times 2} = 2 \times 5\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{2} =$$

$$= 10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 16\sqrt{2}.$$

A opção correta é a (A) porque $a = 16$.

$$\mathbf{4.} \ \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^8}} = \sqrt[6]{a^8} = \sqrt[6]{a^{8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \times a} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a} = a\sqrt[3]{a}$$

A opção correta é a (B).

5. A opção correta é a (B) porque

$$\sqrt[3]{2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times a}} = \sqrt[6]{2^2 \times a} = \sqrt[6]{4a}.$$

$$\mathbf{6.} \ \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = 2 + \sqrt{1^2 + 1^2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OD}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 \times (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2})} = \frac{2 \times (2 - \sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{2 \times (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 - \sqrt{2}$$

A opção correta é a (C).

Pág. 91

$$\mathbf{1.1.} \ 5\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{96} + \sqrt[4]{6} = 5\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{2^4 \times 6} + \sqrt[4]{6} =$$

$$= 5\sqrt[4]{6} - 2\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6} = 4\sqrt[4]{6}$$

$$\mathbf{1.2.} \ \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{20}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{2^2 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3 \times 5^2}}{\sqrt[6]{2^2 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3 \times 5^2}}{\sqrt[6]{2^2 \times 5^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{200}{20}} = \sqrt[6]{10}$$

$$\mathbf{1.3.} \ \frac{a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{2}}}{(a^5)^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}}{a^{\frac{5 \times 1}{4}}} = \frac{a^{\frac{3}{4} + \frac{6}{4}}}{a^{\frac{5}{4}}} = \frac{a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{5}{4}}} = a^{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}} = a^1 = a$$

$$2.1. c = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4 \times 2]{5^{2 \times 2}} = \sqrt{5}$$

$$2.2. c = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4 \times 2]{5^{2 \times 2}} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$2.3. c = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4 \times 2]{5^{2 \times 2}} = \sqrt[8]{5^4}$$

3.1.

$$A = \frac{(\sqrt{3}-1)^2 - 4}{\sqrt{3}+3} = \frac{3-2\sqrt{3}+1-4}{\sqrt{3}+3} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{-2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3) \times (\sqrt{3}-3)} =$$

$$= \frac{-2 \times 3 + 6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 3^2} = \frac{-6 + 6\sqrt{3}}{3-9} = \frac{-6 + 6\sqrt{3}}{-6} = 1 - \sqrt{3}$$

3.2.

$$B = \frac{8^{\frac{2}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{8^{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{8^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{8}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2 \times 1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$4.1. \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{12}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 3}}}{\sqrt[6]{12}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{12}} = 1 = 2^0$$

4.2.

$$\sqrt{10} \times 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt{10} \times \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{5^1}} = \frac{\sqrt[2 \times 2]{10^{1 \times 2}}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{100}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{100}{5}} = \sqrt[4]{20}$$

5.1. Como o triângulo $[ABE]$ é equilátero, então

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{2 \times 3 \times \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras e atendendo a que E é o ponto médio de $[CD]$, tem-se:

$$(\overline{AD})^2 + (\overline{DE})^2 = (\overline{AE})^2 \Leftrightarrow (\overline{AD})^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AD})^2 + 3 = 4 \times 3 \Leftrightarrow (\overline{AD})^2 = 12 - 3 \Leftrightarrow (\overline{AD})^2 = 9$$

Então conclui-se que $\overline{AD} = \sqrt{9} = 3$.

$$P_{[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 2 \times 3 + 2 \times 2\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3}.$$

$$5.2. A_{[ABE]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 3}{2} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Pág. 95

1.1.

a) Área do quadrado A: $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

b) Área do quadrado B: $(3x)^2 = 9x^2$.

1.2. A expressão que corresponde a um monómio é a da área do quadrado B.

2. A afirmação é falsa. O polinómio dado é do 2.º grau se $a+1=0$, ou seja, se $a=-1$.

No entanto, se $a=-1$ então o polinómio obtido é incompleto $(-x^2-1)$.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad A(x)B(x) &= (2x^2-3x+1) \times (2x-1) = \\ &= 4x^3 - 2x^2 - 6x^2 + 3x + 2x - 1 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad (A(x)+C(x))B(x) &= (2x^2-3x+1-x^3+3x-2) \times (2x-1) = \\ &= (-x^3+2x^2-1) \times (2x-1) = -2x^4 + x^3 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \\ &= -2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \quad A(x) - (B(x))^2 &= (2x^2-3x+1) - (2x-1)^2 = \\ &= 2x^2 - 3x + 1 - (4x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 = \\ &= -2x^2 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4. \quad C(x)(A(x)+B(x)) &= (-x^3+3x-2) \times (2x^2-3x+1+2x-1) = \\ &= (-x^3+3x-2) \times (2x^2-x) = -2x^5 + x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 2x = \\ &= -2x^5 + x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 2x \end{aligned}$$

4. A afirmação é falsa. Se os coeficientes dos termos do 4.º grau dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ forem simétricos então o polinómio $P(x)+Q(x)$ não é do 4.º grau.

Pág. 96

5.1. Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x)P(x)$ seja 5 então $P(x)$ tem de ser um polinómio do 2.º grau. Exemplo: $P(x) = x^2 - x + 1$.

5.2. Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x)+P(x)$ seja 3 então $P(x)$ tem de ser um polinómio de grau menor ou igual a 3. Exemplo: $P(x) = x^3$.

5.3. Como $A(x)$ é um polinómio do 3.º grau, para que o grau do polinómio $A(x)+P(x)$ seja 2 então $P(x)$ tem de ser um polinómio de 3.º grau cujo coeficiente do termo do 3.º grau é simétrico do coeficiente do termo do 3.º grau do polinómio $A(x)$ e cujo coeficiente do termo do 2.º grau é não nulo.

Exemplo: $P(x) = -2x^3 + x^2$.

6.1. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3 e $2x + \frac{5}{3}$ é um polinómio de grau 1, então o polinómio $P(x) = \left(2x + \frac{5}{3}\right)A(x)$ tem grau 4 $(1+3)$.

6.2. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3 e $3x^2 - 1$ é um polinómio de grau 2, então o polinómio $P(x) = (3x^2 - 1)A(x)$ tem grau 5 $(2+3)$.

6.3. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3, então o polinómio $P(x) = (A(x))^3$ tem grau 9 $(3+3+3)$.

Nota: $P(x) = (A(x))^3 = A(x) \times A(x) \times A(x)$.

6.4. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3, então o polinómio $P(x) = A(x) + A(x)$ também é de grau 3.

6.5. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 3, então o polinómio $P(x) = (A(x))^2 + A(x)$ tem grau 6.

Tarefa 1

1.1.

a) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 2 e $D(x)$ é um polinómio de grau 5, então o polinómio $A(x)D(x)$ tem grau 7 $(2+5)$.

b) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 2 e $B(x)$ é um polinómio de grau 1, então o polinómio $A(x)B(x)$ tem grau 3 $(1+2)$.

c) Como $B(x)$ é um polinómio de grau 1 e $C(x)$ é um polinómio de grau 4, então o polinómio $B(x)C(x)$ tem grau 5 $(1+4)$.

d) Como $C(x)$ é um polinómio de grau 4 e $D(x)$ é um polinómio de grau 5, então o polinómio $C(x)D(x)$ tem grau 9 $(4+5)$.

1.2.

a) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 2 e o grau do polinómio $A(x)+E(x)$ é 3, então o polinómio $E(x)$ tem grau 3. Consideremos, por exemplo, $E(x) = x^3$.

b) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 2 e o grau do polinómio $A(x)+E(x)$ é 2, então o polinómio $E(x)$ tem grau menor ou igual a 2. Consideremos, por exemplo, $E(x) = x^2 - 1$.

c) Como $A(x)$ é um polinómio de grau 2 e o grau do polinómio $A(x)+E(x)$ é 1, então o polinómio $E(x)$ tem grau 2, o coeficiente do termo do 2.º grau é -3 e o coeficiente do termo do 1.º grau é diferente de 2. Consideremos, por exemplo, $E(x) = -3x^2 + x$.

d) Como $A(x)$ é um polinômio de grau 2 e o grau do polinômio $A(x) + E(x)$ é 0, então o polinômio $E(x)$ tem grau 2, o coeficiente do termo do 2.º grau é -3 e o coeficiente do termo do 1.º grau é 2. Consideremos, por exemplo, $E(x) = -3x^2 + 2x - 4$.

1.3.

a) Como $P(x)$ é um polinômio de grau 3 e $B(x)$ é um polinômio de grau 1, então o polinômio $P(x) \times B(x)$ tem grau 4 ($3+1$).

b) Como $P(x)$ é um polinômio de grau 3 e $D(x)$ é um polinômio de grau 5, então o polinômio $P(x) \times D(x)$ tem grau 8 ($3+5$).

c) Como $P(x)$ é um polinômio de grau 3 e $A(x) - B(x)$ é um polinômio de grau 2, então o polinômio $P(x) \times (A(x) - B(x))$ tem grau 5 ($3+2$).

d) Como $P(x)$ é um polinômio de grau 3 e $B(x) + C(x)$ é um polinômio de grau 4, então o polinômio $P(x) \times (B(x) + C(x))$ tem grau 7 ($3+4$).

e) Como $P(x)$ é um polinômio de grau 3, $A(x)$ é um polinômio de grau 2 e $B(x)$ é um polinômio de grau 1, então o polinômio $P(x) \times A(x) \times B(x)$ tem grau 6 ($3+2+1$).

1.4.

a) Como $T(x)$ é um polinômio de grau n e $A(x)$ é um polinômio de grau 2, então o polinômio $T(x) \times A(x)$ tem grau $n+2$.

Sabendo que o grau do polinômio $T(x) \times A(x)$ é 6, então tem-se: $n+2=6 \Leftrightarrow n=4$.

b) Como $T(x)$ é um polinômio de grau n e $C(x)$ é um polinômio de grau 4, então o polinômio $T(x) + C(x)$ tem grau menor ou igual ao maior dos graus n ou 4. Sabendo que o grau do polinômio $T(x) + C(x)$ é 5, então $n=5$.

Pág. 97

7.1. Neste caso é possível obter o quociente e o resto indicados na divisão pois $(2x-3) \times (3x+3) + 10 = 6x^2 - 3x + 1$.

7.2. Neste caso não é possível obter o quociente e o resto indicados na divisão pois $(2x) \times \left(\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 1 \neq 7x^2 - x + 1$.

7.3. Neste caso não é possível obter o quociente e o resto indicados na divisão pois $(x^2 + x) \times (x-1) + (x-2) \neq x^3 + 3x - 2$.

7.4. Neste caso é possível obter o quociente e o resto indicados na divisão pois $(x^3 - 2x + 1) \times (2x^2 - x + 4) + (-4x^2 + 9x - 1) = 2x^5 - x^4 + 3$.

8.1. $P(x) = (x^2 + 3x - 1) \times (3x - 2) + (5x + 4) = 3x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x - 3x + 2 + 5x + 4 = 3x^3 + 7x^2 - 4x + 6$

8.2. $P(x) = (x^3 - 1) \times (x^2 - 1) + (x^2 - 1) = x^5 - x^3 - x^2 + 1 + x^2 - 1 = x^5 - x^3$

8.3. $P(x) = (x-1) \times (x^2 + x + 1) + 0 = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

Pág. 98

$$\begin{array}{r} 9.1. \quad 4x^2 - 6x + 5 \quad | \quad 2x + 1 \\ \underline{-4x^2 - 2x} \quad 2x - 4 \\ -8x + 5 \\ \underline{ 8x + 4} \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.2. \quad x^3 - 2x^2 + x - 4 \quad | \quad x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \quad x - 4 \\ -4x^2 + x - 4 \\ \underline{ 4x^2 + 8x} \quad 9x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10.1. \quad 5x^2 + x + 2 \quad | \quad x + 3 \\ \underline{-5x^2 - 15x} \quad 5x - 14 \\ -14x + 2 \\ \underline{ 14x + 42} \quad 44 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 5x - 14$

Resto: $R(x) = 44$

$$\begin{array}{r} 10.2. \quad 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \quad | \quad x^2 + 3x \\ \underline{-2x^3 - 6x^2} \quad 2x - 5 \\ -5x^2 - 3x + 2 \\ \underline{ 5x^2 + 15x} \quad 12x + 2 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x - 5$

Resto: $R(x) = 12x + 2$

$$\begin{array}{r} 10.3. \quad 4x^3 + x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-4x^3 + 8x^2} \quad 4x^2 + 9x + 15 \\ 9x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-9x^2 + 18x} \quad 15x + 1 \\ \underline{ 15x + 30} \quad 31 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 4x^2 + 9x + 15$

Resto: $R(x) = 31$

Pág. 99

$$11.1. \quad 4x^3 + x^2 - x + 5 \quad \overline{) 2x^2 - 3x + 5}$$

$$\begin{array}{r} -4x^3 + 6x^2 - 2x \\ \hline 7x^2 - 3x + 5 \\ -7x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{7}{2} \\ \hline \frac{15}{2}x + \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 2x + \frac{7}{2}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{15}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$11.2. \quad x^3 - 2x^2 + 0x + 3 \quad \overline{) x + 2}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 + 0x + 3 \\ 4x^2 + 8x \\ \hline 8x + 3 \\ -8x - 16 \\ \hline -13 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$\text{Resto: } R(x) = -13$$

$$11.3. \quad x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \quad \overline{) x^2 + 2x}$$

$$\begin{array}{r} -x^4 + 2x^3 \\ \hline x^2 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2$$

$$\text{Resto: } R(x) = x$$

$$12.1. \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 0x + 0 \quad \overline{) x + 1}$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - x^3 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 + 0x + 0 \\ 2x^3 + 2x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

O polinômio $M(x)$ é divisível pelo polinômio $N(x)$ porque o resto da divisão de $M(x)$ por $N(x)$ é zero.

$$12.2. \quad x^5 + x^4 - x^3 - 0x^2 + 0x + 2 \quad \overline{) x^3 - 2x + 2}$$

$$\begin{array}{r} -x^5 + 2x^3 - 2x^2 \\ \hline x^4 + x^3 - 2x^2 + 0x + 2 \\ -x^4 + 2x^2 - 2x \\ \hline x^3 - 2x + 2 \\ -x^3 + 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

O polinômio $M(x)$ é divisível pelo polinômio $N(x)$ porque o resto da divisão de $M(x)$ por $N(x)$ é zero.

$$12.3. \quad x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 0 \quad \overline{) x^3 - x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{array}{r} -x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 \\ \hline x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 0 \\ -x^4 + x^3 - 3x^2 - x \\ \hline 0 \end{array}$$

O polinômio $M(x)$ é divisível pelo polinômio $N(x)$ porque o resto da divisão de $M(x)$ por $N(x)$ é zero.

Pág. 100

$$13.1. \text{ Sendo } k = -2, \text{ então } P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x.$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 0 \quad \overline{) 2x^2 + x} \\ -2x^4 - x^3 \\ \hline -2x^3 + 0x^2 - 2x + 0 \\ 2x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 2x + 0 \\ -x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline -\frac{5}{2}x \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $2x^2 + x$ é $-\frac{5}{2}x$.

$$13.2. \quad 2x^4 - x^3 + 0x^2 + kx + 0 \quad \overline{) x^2 - 3}$$

$$\begin{array}{r} -2x^4 + 6x^2 + kx + 0 \\ \hline -x^3 + 6x^2 + kx + 0 \\ x^3 - 3x \\ \hline 6x^2 + (k-3)x + 0 \\ -6x^2 + 18 \\ \hline (k-3)x + 18 \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 3$ é um polinômio de grau zero se $k-3=0$, ou seja, se $k=3$.

$$14.1. \text{ Se } k = -3, \text{ então } P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 18.$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 3x - 18 \quad \overline{) x + 2} \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 3x - 18 \\ 4x^2 + 8x \\ \hline 5x - 18 \\ -5x - 10 \\ \hline -28 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\text{Resto: } R(x) = -28$$

14.2.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + kx - 2k^2 & x^2 + 1 \\ -x^3 & \\ \hline -x & x-2 \\ -2x^2 + (k-1)x - 2k^2 & \\ 2x^2 & +2 \\ \hline (k-1)x + 2 - 2k^2 & \end{array}$$

$P(x)$ é divisível por $x^2 + 1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 + 1$ for zero, isto é, se $(k-1)x + 2 - 2k^2 = 0$.

$$(k-1)x + 2 - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow k-1=0 \wedge 2-2k^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=1 \wedge k^2=1 \Leftrightarrow k=1 \wedge (k=1 \vee k=-1) \Leftrightarrow k=1$$

b) O resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 + 1$ é um monómio do primeiro grau se: $k-1 \neq 0 \wedge 2-2k^2=0 \Leftrightarrow k \neq 1 \wedge k^2=1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k \neq 1 \wedge (k=1 \vee k=-1) \Leftrightarrow k=-1$.

Pág. 101

$$\begin{array}{r|l} 15.1. & 2 \quad \begin{array}{ccc} 1 & -5 & 7 \\ & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x - 3$

Resto: $R(x) = 1$

$$\begin{array}{r|l} 15.2. & -1 \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 & -3 \\ & -1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline -5 \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 2$

Resto: $R(x) = -5$

$$\begin{array}{r|l} 15.3. & -2 \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 10 \\ & -4 & 6 & -10 \\ \hline & 2 & -3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Resto: $R(x) = 0$

Pág. 102

$$\begin{array}{r|l} 16.1. & 3 \quad \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -12 & -7 \\ & 6 & 15 & 9 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline 2 \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$

Resto: $R(x) = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16.2. & -1 \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^3 + x$

Resto: $R(x) = 1$

16.3.

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{cccc} 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \hline & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \hline \frac{1}{4} \end{array} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$

Resto: $R(x) = \frac{1}{4}$

17.1. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ \hline 2 & & 2 & 6 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

O polinómio $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ é divisível por $x - 2$ porque o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é zero.

17.2. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{cccc} 1 & -3 & \frac{1}{3} & -1 \\ \hline 3 & & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \end{array}$$

O polinómio $Q(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{3}x - 1$ é divisível por $x - 3$ porque o resto da divisão de $Q(x)$ por $x - 3$ é zero.

17.3. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ \hline -2 & & -2 & -2 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 8 & -9 \end{array} \end{array}$$

Proveu-se que o resto da divisão de $M(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7$ por $x + 2$ é -9 .

18.1. O polinómio $P(x) = -2x^3 + x^2 - kx + 1$ é divisível por $x + 1$ se e só se o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é zero.

Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão de $P(x)$ por $x + 1$, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{cccc} -2 & 1 & -k & 1 \\ \hline -1 & & 2 & -3 & k+3 \\ \hline & -2 & 3 & -k-3 & k+4 \end{array} \end{array}$$

O resto da divisão é zero, ou seja, $k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -4$.

18.2. Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão do polinómio $P(x) = x^4 - kx^2 + k - 1$ por $x - 2$, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -k & 0 & k-1 \\ \hline 2 & & 2 & 4 & 8-2k & 16-4k \\ \hline & 1 & 2 & 4-k & 8-2k & 15-3k \end{array} \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x) = x^4 - kx^2 + k - 1$ por $x - 2$ é 3 se e só se $15 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 4$.

18.3. Recorrendo à regra de Ruffini para efetuar a divisão de

$P(x) = -x^3 + kx^2 + 2k^2x + 1$ por $x + 3$, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & -1 & k & 2k^2 & 1 \\ & & 3 & -3k-9 & -6k^2+9k+27 \\ \hline & -1 & k+3 & 2k^2-3k-9 & -6k^2+9k+28 \end{array}$$

O quociente da divisão de $P(x) = -x^3 + kx^2 + 2k^2x + 1$ por $x + 3$ é

$$Q(x) = -x^2 + (k+3)x + 2k^2 - 3k - 9.$$

O termo independente de $Q(x)$ é nulo se e só se

$$2k^2 - 3k - 9 = 0.$$

$$2k^2 - 3k - 9 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-9)}}{4} \Leftrightarrow k = 3 \quad \vee \quad k = -\frac{3}{2}$$

Pág. 103

19. Como o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x + 1$ são, respectivamente, $2x^2 - 3x + 6$ e 4, então

$$\text{sabe-se que } P(x) = (x+1) \times (2x^2 - 3x + 6) + 4.$$

19.1. Sabe-se que $2x + 2 = 2(x + 1)$, logo:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2(x+1) \times \frac{1}{2} \times (2x^2 - 3x + 6) + 4 \\ &= (2x+2) \times \left(x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right) + 4. \end{aligned}$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 2$

são, respectivamente, $x^2 - \frac{3}{2}x + 3$ e 4.

19.2. Sabe-se que $3x + 3 = 3(x + 1)$, logo:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3(x+1) \times \frac{1}{3} \times (2x^2 - 3x + 6) + 4 \\ &= (3x+3) \times \left(\frac{2}{3}x^2 - x + 2\right) + 4. \end{aligned}$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $3x + 3$

são, respectivamente, $\frac{2}{3}x^2 - x + 2$ e 4.

20. Como o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $3x - 2$ são, respectivamente, $x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ e 1,

$$\text{então sabe-se que } P(x) = (3x-2) \times (x^3 - 2x^2 + 6x - 3) + 1.$$

Sabe-se que $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x - 2)$, logo:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{3}(3x-2) \times 3 \times (x^3 - 2x^2 + 6x - 3) + 1 = \\ &= \left(x - \frac{2}{3}\right) \times (3x^3 - 6x^2 + 18x - 9) + 1. \end{aligned}$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{2}{3}$

são, respectivamente, $3x^3 - 6x^2 + 18x - 9$ e 1.

21.1. Atendendo a que $3x - 6 = 3(x - 2)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de $3x^2 + 4x - 2$ por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 3 & 4 & -2 \\ & & 6 & 20 \\ \hline & 3 & 10 & 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } Q(x) = 3x + 10 \\ \text{Resto: } R(x) = 18 \end{array}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $3x^2 + 4x - 2$ por $3x - 6$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{3} \times (3x + 10) = x + \frac{10}{3}$$

$$\text{Resto: } R(x) = 18$$

21.2. Atendendo a que $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de $x^3 - 4x + 5$ por $x - \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 1 & 0 & -4 & 5 \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{15}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{4} & \frac{25}{8} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{25}{8}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $x^3 - 4x + 5$ por $2x - 1$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{2} \times \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{25}{8}$$

21.3. Atendendo a que $3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de $2x^3 + x^2 - 3x$ por $x + \frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 2 & 1 & -3 & 0 \\ & & -\frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{50}{27} \\ \hline & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{25}{9} & \frac{50}{27} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{25}{9}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{50}{27}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $2x^3 + x^2 - 3x$ por $3x + 2$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{3} \times \left(2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{25}{9}\right) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{25}{27}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{50}{27}$$

Pág. 104

22.1. Atendendo a que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, a divisão pode ser feita dividindo primeiro $P(x)$ por $x-1$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Quociente: $Q_1(x) = -x^3 + x^2 + x$

Resto: $R_1(x) = 3$

Então, tem-se: $P(x) = (x-1) \times (-x^3 + x^2 + x) + 3$ (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

Quociente: $Q_2(x) = -x^2 + 2x - 1$

Resto: $R_2(x) = 1$

Então, tem-se: $-x^3 + x^2 + x = (x+1) \times (-x^2 + 2x - 1) + 1$ (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1) \times [(x+1) \times (-x^2 + 2x - 1) + 1] + 3 = \\ &= (x-1) \times (x+1) \times (-x^2 + 2x - 1) + (x-1) \times 1 + 3 = \\ &= (x-1) \times (x+1) \times (-x^2 + 2x - 1) + x + 2 = \\ &= (x^2 - 1) \times (-x^2 + 2x - 1) + x + 2 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que o quociente e o resto da divisão de $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 3$ por $x^2 - 1$ são, respetivamente, $-x^2 + 2x - 1$ e $x + 2$.

22.2. A divisão de $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 3$ por $(x+2)(x-3)$ pode ser feita dividindo primeiro $P(x)$ por $x+2$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & & 2 & -8 & 16 & -30 \\ \hline & -1 & 4 & -8 & 15 & -27 \end{array}$$

Quociente: $Q_1(x) = -x^3 + 4x^2 - 8x + 15$

Resto: $R_1(x) = -27$

Então, tem-se: $P(x) = (x+2) \times (-x^3 + 4x^2 - 8x + 15) - 27$ (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & -8 & 15 \\ 3 & & -3 & 3 & -15 \\ \hline & -1 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q_2(x) = -x^2 + x - 5$

Resto: $R_2(x) = 0$

Então, tem-se: $-x^3 + 4x^2 - 8x + 15 = (x-3) \times (-x^2 + x - 5) + 0$ (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2) \times [(x-3) \times (-x^2 + x - 5)] - 27 = \\ &= (x+2) \times (x-3) \times (-x^2 + x - 5) - 27 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que o quociente e o resto da divisão de $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 3$ por $(x+2)(x-3)$ são, respetivamente, $-x^2 + x - 5$ e -27 .

Pág. 105

23. Sabe-se que a área do retângulo $[ABCD]$ é dada por $\overline{AB} \times \overline{BC}$. Então, tem-se que $3x^3 + x^2 - 2x = (x^2 + x) \times \overline{BC}$.

Como o grau de $3x^3 + x^2 - 2x$ é 3 e o grau de $x^2 + x$ é 2, conclui-se que o grau do polinómio que representa $\overline{BC}$ é 1 ($3-2$).

Assim, $\overline{BC} = ax + b$, sendo a um número real não nulo.

Atendendo à igualdade $3x^3 + x^2 - 2x = (x^2 + x) \times \overline{BC}$, tem-se:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 2x &= (x^2 + x) \times (ax + b) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^3 + x^2 - 2x &= ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^3 + x^2 - 2x &= ax^3 + (b+a)x^2 + bx \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

Então, $\overline{BC} = 3x - 2$.

24. Sejam $Q(x)$ e $R(x)$, respetivamente, os polinómios que representam o quociente e o resto da divisão de $2x^3 - 4x^2 + 9$ por $2x^2 - 4$.

Como o grau de $2x^3 - 4x^2 + 9$ é 3 e o grau de $2x^2 - 4$ é 2, conclui-se que o grau de $Q(x)$ é 1 ($3-2$) e o grau de $R(x)$ é menor ou igual a 1.

Assim, os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ são do tipo:

$Q(x) = ax + b$ e $R(x) = cx + d$, sendo a, b, c, d números reais e $a \neq 0$.

Atendendo à igualdade $2x^3 - 4x^2 + 9 = (2x^2 - 4) \times Q(x) + R(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 4x^2 + 9 &= (2x^2 - 4) \times (ax + b) + cx + d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 9 &= 2ax^3 + 2bx^2 - 4ax - 4b + cx + d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 9 &= 2ax^3 + 2bx^2 + (-4a+c)x + (-4b+d) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2b=-4 \\ -4a+c=0 \\ -4b+d=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \\ d=1 \end{cases}$$

Então, $Q(x) = x - 2$ e $R(x) = 4x + 1$.

25.1. Atendendo à definição de polinómios idênticos, tem-se:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow x^2 + ax + 4 = x^2 - 7x + 2 - k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ a=-7 \\ 4=2-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ a=-7 \\ k=-2 \end{cases}$$

25.2. Atendendo à definição de polinômios idênticos, tem-se:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow x^3 + ax - 5 = x^3 + kx^2 - 5(1+x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax - 5 = x^3 + kx^2 - 5(1+2x+x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax - 5 = x^3 + kx^2 - 5 - 10x - 5x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax - 5 = x^3 + (k-5)x^2 - 10x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 0=k-5 \\ a=-10 \\ -5=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ k=5 \\ a=-10 \\ -5=-5 \end{cases}$$

25.3. Atendendo à definição de polinômios idênticos, tem-se:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow (x+k)^2(x+1) = x^3 - ax^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2kx + k^2)(x+1) = x^3 - ax^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2kx^2 + 2kx + k^2x + k^2 = x^3 - ax^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (1+2k)x^2 + (2k+k^2)x + k^2 = x^3 - ax^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1+2k=-a \\ 2k+k^2=0 \\ k^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ a=-1-2k \\ k=0 \vee k=-2 \\ k=2 \vee k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-2 \times (-2) \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ k=-2 \end{cases}$$

Pág. 106

Proposta 1

1.1. $A(x)$ é um polinômio de grau 3 (5-2).

1.2. $A(x)$ é um polinômio de grau 4 (6-2).

1.3. $A(x)$ é um polinômio de grau 4 (8-4).

Proposta 2

2.1. $D(x) = (3x+1) \times (-2x^2+5x) + 3 =$

$$= -6x^3 + 15x^2 - 2x^2 + 5x + 3 = -6x^3 + 13x^2 + 5x + 3$$

2.2. $D(x) = (x^2 - 3x + 2) \times (2x^3 - x) + (x - 4) =$

$$= 2x^5 - x^3 - 6x^4 + 3x^2 + 4x^3 - 2x + x - 4$$

$$= 2x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 4$$

2.3. $D(x) = (-x^3 + x - 2) \times (-x^2 + 2x) + (x^2 - x) =$

$$= x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x^2 - 4x + x^2 - x$$

$$= x^5 - 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 5x$$

Proposta 3

3.1.

a) $A(x) + B(x) = (3x^2 + x - 1) + (x^2 - 2) =$

$$= 3x^2 + x - 1 + x^2 - 2 = 4x^2 + x - 3$$

b) $A(x) - C(x) = (3x^2 + x - 1) - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) =$

$$= 3x^2 + x - 1 - 10x^4 - 3x^2 - x + 8 = -10x^4 + 7$$

c) $A(x) \times B(x) = (3x^2 + x - 1) \times (x^2 - 2) =$

$$= 3x^4 - 6x^2 + x^3 - 2x - x^2 + 2 = 3x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2$$

d) $(B(x))^2 - C(x) = (x^2 - 2)^2 - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) =$
 $= x^4 - 4x^2 + 4 - 10x^4 - 3x^2 - x + 8$
 $= -9x^4 - 7x^2 - x + 12$

3.2. Mostrar que o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são, respectivamente, 3 e $x+5$ equivale a mostrar que

$$A(x) = B(x) \times 3 + (x+5).$$

Ora, $B(x) \times 3 + (x+5) = (x^2 - 2) \times 3 + x + 5 =$

$$= 3x^2 - 6 + x + 5 = 3x^2 + x - 1 = A(x).$$

3.3. $P(x) = A(x) \times B(x) + 0 = (3x^2 + x - 1) \times (x^2 - 2) =$

$$= 3x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2$$

Proposta 4

4.1. $2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \quad | \quad x^2 + 2x - 1$

$$\begin{array}{r} -2x^3 - 4x^2 + 2x \\ \hline -x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 + 2x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $B(x)$ porque o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

Quociente: $Q(x) = 2x - 1$

4.2. $x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \quad | \quad 2x^2 - 1$

$$\begin{array}{r} -x^3 \\ \hline \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \\ \hline -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $B(x)$ porque o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

Quociente: $Q(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

4.3. $x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad | \quad x - 2$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 \\ \hline 2x^2 + 0x - 8 \\ \hline -2x^2 + 4x \\ \hline 4x - 8 \\ \hline -4x + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $B(x)$ porque o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

Quociente: $Q(x) = x^2 + 2x + 4$

Pág. 107

Proposta 5

$$\begin{array}{r} 5.1. \quad 3x^3 + 5x^2 - x + 2 \quad | \quad x^2 + x - 1 \\ \underline{-3x^3 - 3x^2 + 3x} \quad 3x + 2 \\ 2x^2 + 2x + 2 \\ \underline{-2x^2 - 2x + 2} \\ 4 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 3x + 2$

Resto: $R(x) = 4$

$$\begin{array}{r} 5.2. \quad -4x^3 + 0x^2 + 5x - 3 \quad | \quad 2x + 3 \\ \underline{4x^3 + 6x^2} \quad -2x^2 + 3x - 3 \\ 6x^2 + 5x - 3 \\ \underline{-6x^2 - 9x} \\ -4x - 3 \\ \underline{4x + 6} \\ 3 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -2x^2 + 3x - 2$

Resto: $R(x) = 3$

$$\begin{array}{r} 5.3. \quad x^2 - 4x + 3 \quad | \quad x^2 + x \\ \underline{-x^2 - x} \quad 1 \\ 5x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } Q(x) = 1 \\ \text{Resto: } R(x) = -5x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5.4. \quad 2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \quad | \quad 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 - x^2} \quad x^2 - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\ -x^2 + 3x - 1 \\ x^2 + \frac{x}{2} \\ \underline{\frac{7}{2}x - 1} \\ \frac{7}{2}x - \frac{7}{4} \\ \underline{-\frac{7}{2}x - \frac{7}{4}} \\ -\frac{11}{4} \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{7}{4}$

Resto: $R(x) = -\frac{11}{4}$

$$\begin{array}{r} 5.5. \quad 5x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x^3 - 1 \\ \underline{-5x^5} \quad +5x^2 \quad 5x^2 - 1 \\ -x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \\ \underline{x^3} \quad -1 \\ 5x^2 - 3x \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 5x^2 - 1$

Resto: $R(x) = 5x^2 - 3x$

$$\begin{array}{r} 5.6. \quad 4x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 0 \quad | \quad 2x^2 + 3 \\ \underline{-4x^4} \quad -6x^2 \quad 2x^2 - \frac{x}{2} - 3 \\ -x^3 - 6x^2 + 2x + 0 \\ x^3 + \frac{3}{2}x \\ \underline{-6x^2 + \frac{7}{2}x + 0} \\ 6x^2 + 9 \\ \frac{7}{2}x + 9 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^2 - \frac{x}{2} - 3$

Resto: $R(x) = \frac{7}{2}x + 9$

Proposta 6

$$\begin{array}{r} 6.1. \quad 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 4 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ \underline{-3x^4 + 3x^3 - 3x^2} \quad 3x^2 + 2x + 1 \\ 2x^3 - x^2 - 3x + 4 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2 - 2x} \\ x^2 - 5x + 4 \\ \underline{-x^2 + x - 1} \\ -4x + 3 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Resto: $R(x) = -4x + 3$

$$\begin{array}{r} 6.2. \quad 6x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1 \quad | \quad x^2 + 3x \\ \underline{-6x^5 - 18x^4} \quad 6x^3 - 18x^2 + 56x - 168 \\ -18x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1 \\ \underline{18x^4 + 54x^3} \\ 56x^3 + 0x^2 - x + 1 \\ \underline{-56x^3 - 168x^2} \\ -168x^2 - x + 1 \\ \underline{168x^2 + 504x} \\ 503x + 1 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 6x^3 - 18x^2 + 56x - 168$

Resto: $R(x) = 503x + 1$

$$\begin{array}{r} 6.3. \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 4 \quad | \quad 2x^2 + x \\ \underline{-2x^2 - x^2} \quad x \\ -3x + 4 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x$

Resto: $R(x) = -3x + 4$

6.4. $2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 5x + 0 \quad | \quad 3x^3 + 1$

$$\begin{array}{r} -2x^4 \\ \underline{-\frac{2}{3}x } \\ -\frac{17}{3}x \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = \frac{2}{3}x$

Resto: $R(x) = -\frac{17}{3}x$

Proposta 7

7.1. Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios, tem-se:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 0x + 3 \quad | \quad x^2 + 1 \\ \underline{-x^3 } \\ -2x^2 - x + 3 \\ \underline{2x^2 + 2} \\ -x + 5 \end{array}$$

Então, $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 1} = x - 2 + \frac{-x + 5}{x^2 + 1}$.

7.2. Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios, tem-se:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \quad | \quad x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-2x^4 + 8x^3 - 10x^2} \\ 7x^3 - 10x^2 + 0x + 1 \\ \underline{-7x^3 + 28x^2 - 35x} \\ 18x^2 - 35x + 1 \\ \underline{-18x^2 + 72x - 90} \\ 37x - 89 \end{array}$$

Então, $\frac{2x^4 - x^3 + 1}{x^2 - 4x + 5} = 2x^2 + 7x + 18 + \frac{37x - 89}{x^2 - 4x + 5}$.

7.3. Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios, tem-se:

$$\begin{array}{r} 6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 2 \quad | \quad 2x^4 + 3 \\ \underline{-6x^5 } \\ -10x + 2 \end{array}$$

Então, $\frac{6x^5 - x + 2}{2x^4 + 3} = 3x + \frac{-10x + 2}{2x^4 + 3}$.

Proposta 8

8.1.

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad -2 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \\ \quad | \quad \quad -2 \quad -1 \quad -4 \\ \hline \quad | \quad -2 \quad -1 \quad -4 \quad | \quad 1 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -2x^2 - x - 4$

Resto: $R(x) = 1$

8.2.

$$\begin{array}{r} 3 \quad | \quad -2 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \\ \quad | \quad \quad -6 \quad -15 \quad -54 \\ \hline \quad | \quad -2 \quad -5 \quad -18 \quad | \quad -49 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } Q(x) = -2x^2 - 5x - 18 \\ \text{Resto: } R(x) = -49 \end{array}$$

8.3.

$$\begin{array}{r} -2 \quad | \quad -2 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \\ \quad | \quad \quad 4 \quad -10 \quad 26 \\ \hline \quad | \quad -2 \quad 5 \quad -13 \quad | \quad 31 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quociente: } Q(x) = -2x^2 + 5x - 13 \\ \text{Resto: } R(x) = 31 \end{array}$$

Pág. 108

Proposta 9

9.1. Concluindo a aplicação da regra de Ruffini na divisão do polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, tem-se:

$$\begin{array}{r} 3 \quad -2 \quad 1 \quad -5 \\ 2 \quad | \quad \quad \quad \quad \\ \quad | \quad \quad 6 \quad 8 \quad 18 \\ \hline \quad | \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad | \quad 13 \end{array}$$

Então, $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ e $B(x) = x - 2$.

9.2. Concluindo a aplicação da regra de Ruffini na divisão do polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, tem-se:

$$\begin{array}{r} -1 \quad | \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \\ \quad | \quad \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ \hline \quad | \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \quad | \quad 5 \end{array}$$

Então, $A(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 3$ e $B(x) = x + 1$.

Proposta 10

10.1. Aplicando a regra de Ruffini começa-se por determinar os restos das divisões de $P(x) = ax^2 + bx + 3$ por $(x + 2)$ e por $(x - 1)$.

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad 3 \\ -2 \quad | \quad \quad -2a \quad 4a - 2b \\ \hline \quad | \quad a \quad -2a + b \quad | \quad 4a - 2b + 3 \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 2)$ é $4a - 2b + 3$.

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad 3 \\ 1 \quad | \quad \quad \quad a + b \\ \hline \quad | \quad a \quad a + b \quad | \quad a + b + 3 \end{array}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é $a + b + 3$.

Como os restos das divisões de $P(x)$ por $(x + 2)$ e por $(x - 1)$ são, respectivamente, -3 e 4 , então tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4a - 2b + 3 = -3 \\ a + b + 3 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -3 \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - b) - b = -3 \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b - b = -3 \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = -5 \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

10.2. Aplicando a regra de Ruffini começa-se por determinar o quociente da divisão de $P(x) = ax^2 + bx + 3$ por $(x - 2)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & 3 & \\ 2 & & 2a & 4a+2b & \\ \hline & a & 2a+b & 4a+2b+3 & \end{array}$$

O quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)$ é

$$Q(x) = ax + (2a + b).$$

Como o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)$ é $-3x + 1$, então tem-se:

$$\begin{cases} a = -3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ -6 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$$

Proposta 11

11.1. Atendendo a que $2x + 6 = 2(x + 3)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } x + 3.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & & -12 & 39 & -123 \\ \hline & 4 & -13 & 41 & -122 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 4x^2 - 13x + 41$$

$$\text{Resto: } R(x) = -122$$

Então, o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } 2x + 6 \text{ são:}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{2} \times (4x^2 - 13x + 41) = 2x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{41}{2}$$

$$\text{Resto: } R(x) = -122$$

11.2. Atendendo a que $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } x - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \hline & 4 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 4x^2 + x + \frac{5}{2}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{9}{4}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } 2x - 1 \text{ são:}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{2} \times \left(4x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{9}{4}$$

11.3. Atendendo a que $4x + 2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } x + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & 4 & -3 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 4x^2 - 3x + \frac{7}{2}$$

$$\text{Resto: } R(x) = -\frac{3}{4}$$

Então, o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } 4x + 2 \text{ são:}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{4} \times \left(4x^2 - 3x + \frac{7}{2}\right) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$$

$$\text{Resto: } R(x) = -\frac{3}{4}$$

11.4. Atendendo a que $\frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } x - 2.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & & 8 & 14 & 32 \\ \hline & 4 & 7 & 16 & 33 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 4x^2 + 7x + 16$$

$$\text{Resto: } R(x) = 33$$

Então, o quociente e o resto da divisão de

$$A(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1 \text{ por } \frac{x}{2} - 1 \text{ são:}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = 2 \times (4x^2 + 7x + 16) = 8x^2 + 14x + 32$$

$$\text{Resto: } R(x) = 33$$

Proposta 12

$$\text{12.1. } x^3 - x^2 + 4x + 3 \quad | \quad 2x - 4$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 \\ \hline x^2 + 4x + 3 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 6x + 3 \\ -6x + 12 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$\text{Resto: } R(x) = 15$$

12.2. Atendendo a que $2x - 4 = 2(x - 2)$, começa-se por

determinar o quociente e o resto da divisão de

$$B(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3 \text{ por } x - 2.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & & 2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 15 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2 + x + 6$$

$$\text{Resto: } R(x) = 15$$

Então, o quociente e o resto da divisão de $B(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$ por $C(x) = 2x - 4$ são:

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = \frac{1}{2} \times (x^2 + x + 6) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$\text{Resto: } R(x) = 15$$

12.3. Sejam $Q(x)$ e $R(x)$, respetivamente, os polinómios que representam o quociente e o resto da divisão de

$$B(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3 \text{ por } C(x) = 2x - 4.$$

Como o grau de $B(x)$ é 3 e o grau de $2x - 4$ é 1, conclui-se que o grau de $Q(x)$ é 2 ($3 - 1$) e o grau de $R(x)$ é igual a 0.

Assim, os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ são do tipo:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \text{ e } R(x) = d, \text{ sendo } a, b, c, d \text{ números reais e } a \neq 0.$$

Atendendo à igualdade $x^3 - x^2 + 4x + 3 = (2x - 4) \times Q(x) + R(x)$, tem-se:

$$x^3 - x^2 + 4x + 3 = (2x - 4) \times (ax^2 + bx + c) + d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x + 3 = 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx - 4ax^2 - 4bx - 4c + d$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x + 3 = 2ax^3 + (2b - 4a)x^2 + (2c - 4b)x + (-4c + d)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 4a = -1 \\ 2c - 4b = 4 \\ -4c + d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 3 \\ d = 15 \end{cases}$$

$$\text{Então, } Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \text{ e } R(x) = 15.$$

Pág. 109

Proposta 13

$$\mathbf{13.1.} \quad P(x) = (x - 2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - ax^2 + bx - 8 = (x - 2)^2 \times (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - ax^2 + bx - 8 = (x^2 - 4x + 4) \times (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - ax^2 + bx - 8 = x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - ax^2 + bx - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -a = -6 \\ b = 12 \\ -8 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases}$$

13.2. Aplicando a regra de Ruffini começa-se por determinar o quociente da divisão de $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 8$ por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -a & b & -8 \\ -1 & & -1 & a+1 & -a-b-1 \\ \hline & 1 & -a-1 & a+b+1 & -a-b-9 \end{array}$$

O quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é

$$Q(x) = x^2 + (-a - 1)x + (a + b + 1).$$

Como o quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é $x^2 + 2x + 3$, então tem-se:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -a - 1 = 2 \\ a + b + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Proposta 14

14.1. Pretende-se verificar se existem números reais a e b tais que $P(x) = T(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$P(x) = T(x) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = (x^2 - ax) \times (2x + 3) + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = 2x^3 + 3x^2 - 2ax^2 - 3ax + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = 2x^3 + (3 - 2a)x^2 - 3ax + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 3a = 3 - 2a \\ -b = -3a \\ 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ a = \frac{5}{3} \\ b = 5 \\ 1 = b \end{cases} \text{ Impossível.}$$

Logo, não existem números reais a e b que verifiquem as condições pretendidas.

14.2. Pretende-se verificar se existem números reais a e b tais que $P(x) = T(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$P(x) = T(x) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = (x^2 - ax) \times (2x - 1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = 2x^3 - x^2 - 2ax^2 + ax + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3ax^2 - bx + 1 = 2x^3 + (-1 - 2a)x^2 + ax + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 3a = -1 - 2a \\ -b = a \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Proposta 15

15.1. Atendendo a que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, a divisão pode ser feita dividindo primeiro $A(x)$ por $x - 1$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}$$

Quociente: $Q_1(x) = x^3 + x^2 - 2x$

Resto: $R_1(x) = -1$

Então, tem-se: $A(x) = (x-1) \times (x^3 + x^2 - 2x) + (-1)$ (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

Quociente: $Q_2(x) = x^2 - 2$

Resto: $R_2(x) = 2$

Então, tem-se: $x^3 + x^2 - 2x = (x+1) \times (x^2 - 2) + 2$ (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-1) \times [(x+1) \times (x^2 - 2) + 2] + (-1) = \\ &= (x-1) \times (x+1) \times (x^2 - 2) + (x-1) \times 2 - 1 = \\ &= (x-1) \times (x+1) \times (x^2 - 2) + 2x - 2 - 1 = \\ &= (x^2 - 1) \times (x^2 - 2) + 2x - 3 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $x^2 - 1$ são, respetivamente, $x^2 - 2$ e $2x - 3$.

15.2. A divisão de $A(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $(x-2)(x+1)$

pode ser feita dividindo primeiro $P(x)$ por $x-2$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

Quociente: $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 + x + 4$

Resto: $R_1(x) = 7$

Então, tem-se: $A(x) = (x-2) \times (x^3 + 2x^2 + x + 4) + 7$ (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & & -1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Quociente: $Q_2(x) = x^2 + x$

Resto: $R_2(x) = 4$

Então, tem-se: $x^3 + 2x^2 + x + 4 = (x+1) \times (x^2 + x) + 4$ (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2) \times [(x+1) \times (x^2 + x) + 4] + 7 = \\ &= (x-2) \times (x+1) \times (x^2 + x) + (x-2) \times 4 + 7 = \\ &= (x-2) \times (x+1) \times (x^2 + x) + 4x - 1 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $(x-2)(x+1)$ são, respetivamente, $x^2 + x$ e $4x - 1$.

Proposta 16

16.1. Como $A(x)$ é um polinómio de grau 1 e $B(x)$ é um polinómio de grau n , então o polinómio $C(x) = A(x) \times B(x)$ tem grau $n+1$. O polinómio $C(x)$ tem no máximo $n+2$ termos.

16.2. O termo de maior grau do polinómio $C(x) = A(x) \times B(x)$ obtém-se multiplicando os termos de maior grau dos polinómios $A(x)$ e $B(x)$.

Termo de maior grau de $C(x)$: $x \times b_n x^n = b_n x^{n+1}$.

16.3. O termo independente do polinómio $C(x) = A(x) \times B(x)$ obtém-se multiplicando os termos independentes dos polinómios $A(x)$ e $B(x)$.

Termo independente de $C(x)$: $-a \times b_0 = -ab_0$.

Proposta 17

Aplicando a regra de Ruffini começa-se por determinar o quociente da divisão de $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ por

$B(x) = x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & c & d \\ 1 & & a & a+b & a+b+c \\ \hline & a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{array}$$

O quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são, respetivamente, $Q(x) = ax^2 + (a+b)x + a+b+c$ e

$R(x) = a+b+c+d$.

Ora, $(x-1) \times Q(x) + R(x) =$

$$\begin{aligned} &= (x-1) \times (ax^2 + (a+b)x + a+b+c) + (a+b+c+d) = \\ &= ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x - ax^2 - (a+b)x - (a+b+c) + \\ &+ a+b+c+d = \\ &= ax^3 + (a+b-a)x^2 + (a+b+c-a-b)x - a-b-c+a+b+c+d = \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d = A(x). \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $Q(x) = ax^2 + (a+b)x + a+b+c$ e

$R(x) = a+b+c+d$ são de facto o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

Proposta 18

18.1. Aplicando a regra de Ruffini começa-se por determinar o quociente da divisão de $P(x) = ax^3 - ax - 2$; $a \neq 0$, por $x - a$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & 0 & -a & -2 \\ a & & a^2 & a^3 & a^4 - a^2 \\ \hline & a & a^2 & a^3 + a & a^4 + a - 2 \end{array}$$

O quociente da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é

$Q(x) = ax^2 + a^2x + a^3 - a$; $a \neq 0$.

Como $a \neq 0$, para que o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x-a$ seja um polinômio incompleto, tem-se:

$$a^3 - a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1 \vee a = 1.$$

Sendo $a \neq 0$, então conclui-se que $a = -1 \vee a = 1$.

18.2. $P(x)$ é divisível por $x-a$ se o resto da divisão de $P(x)$

por $x-a$ for igual a zero.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$ é $R(x) = a^4 - a^2 - 2$; $a \neq 0$.

Então, tem-se:

$$a^4 - a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (a^2)^2 - a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2 \quad \vee \quad \underbrace{a^2 = -1}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \quad \vee \quad a = -\sqrt{2}$$

Pág. 110

26.1. O resto da divisão de $-x^3 + 3x - 2$ por $x-1$ é igual a

$$-1^3 + 3 \times 1 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0.$$

26.2. O resto da divisão de $-x^3 + 3x - 2$ por $x+1$ é igual a

$$-(-1)^3 + 3 \times (-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4.$$

26.3. O resto da divisão de $-5x^4 - \frac{1}{2}x + 3$ por x é igual a

$$-5 \times 0^4 - \frac{1}{2} \times 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

26.4. Como $2x-1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, o resto da divisão de $2x^3 - x^2 + x$

$$\text{por } 2x-1 \text{ é igual a } 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

27. A divisão de $2x^3 - 5x^2 + kx + 3$ por $x-3$ é exata se o resto da divisão for igual a 0, ou seja, se: $2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 + k \times 3 + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 54 - 45 + 3k + 3 = 0 \Leftrightarrow 3k = -12 \Leftrightarrow k = -4$$

Pág. 111

28.1. Repara que $3x-6 = 3(x-2)$.

$$A(2) = 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $3x-6$ é igual a $A(2)$, ou seja, 5.

28.2. Repara que $2x+1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 3 = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3 = 3 \end{aligned}$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $2x+1$ é igual a $A\left(-\frac{1}{2}\right)$, ou seja, 3.

28.3. Repara que $2x+2 = 2(x+1) = 2(x - (-1))$.

$$A(-1) = 2 \times (-1)^78 + (-1)^{65} - (-1) + 1 = 2 \times 1 - 1 + 1 + 1 = 3$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $2x+2$ é igual a $A(-1)$, ou seja, 3.

29. Repara que $3x+3 = 3(x+1) = 3(x - (-1))$ e

$$5x-5 = 5(x-1).$$

Os restos da divisão de $P(x)$ por $3x+3$ e por $5x-5$ são dados por $P(-1)$ e $P(1)$.

Como os restos da divisão de $P(x)$ por $3x+3$ e por $5x-5$ são, respectivamente, 2 e -3, então tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-1) = 2 \\ P(1) = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-1)^{2015} - b \times (-1)^{2000} + 1 = 2 \\ a \times 1^{2015} - b \times 1^{2000} + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -a - b = 1 \\ a - b = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ -b - 1 - b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ -2b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} - 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Pág. 112

30.1. $P(x)$ é divisível por $x-2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ for igual a 0, ou seja, se $P(2) = 0$.

$$\begin{aligned} P(2) = 0 &\Leftrightarrow 2^3 - a \times 2^2 - 2 \times 2 + b = 0 \Leftrightarrow 8 - 4a - 4 + b = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = 4a - 4 \end{aligned}$$

30.2. $P(x)$ é divisível por $x-1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ for igual a 0, ou seja, se $P(1) = 0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é dado por $P(-2)$.

Como $P(x)$ dividido por $x+2$ dá resto 1 então $P(-2) = 1$.

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 - a \times 1^2 - 2 \times 1 + b = 0 \\ (-2)^3 - a \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a - 2 + b = 0 \\ -8 - 4a + 4 + b = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + a \\ -4a + 1 + a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + a \\ -3a = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

31.1. $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1) = 0$.

$$\begin{aligned} P(-1) = 0 &\Leftrightarrow (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1)^n \times (-1) + 2 \times (-1)^n = 1 \Leftrightarrow (-1)^n \times [(-1) + 2] = 1 \\ &\Leftrightarrow (-1)^n \times 1 = 1 \Leftrightarrow (-1)^n = 1 \Leftrightarrow n \text{ é par} \end{aligned}$$

31.2. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é dado por $P(-1)$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é igual a -2 , se

$$P(-1) = -2.$$

$$P(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n - 1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \times (-1) + 2 \times (-1)^n = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \times [(-1) + 2] = -1 \Leftrightarrow (-1)^n \times 1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n = -1 \Leftrightarrow n \text{ é ímpar}$$

31.3. $Q(x)$ é divisível por $x-1$ se o resto da divisão de $Q(x)$

por $x-1$ for igual a 0, ou seja, se $Q(1) = 0$.

$$Q(1) = 1^{n+1} - 2 \times 1^n + 1^{n-1} = 1 - 2 + 1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $Q(x)$ é divisível por $x-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

31.4. $Q(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $Q(x)$

por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $Q(-1) = 0$.

$$Q(-1) = (-1)^{n+1} - 2 \times (-1)^n + (-1)^{n-1} =$$

$$= (-1)^n \times (-1) - 2 \times (-1)^n + (-1)^n \times (-1) =$$

$$= -(-1)^n - 2 \times (-1)^n - (-1)^n = -4 \times (-1)^n = \begin{cases} 4, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -4, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Como $Q(-1) \neq 0$, então $Q(x)$ não é divisível por $x+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

32.1. $A(2) = 3 \times 2^3 + 2^2 - 12 \times 2 - 4 = 24 + 4 - 24 - 4 = 0$

Como $A(2) = 0$, 2 é uma raiz do polinômio $A(x)$.

32.2. Sendo 2 uma raiz do polinômio $A(x)$, então $A(x)$ é

divisível por $x-2$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $A(x)$ por $x-2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & 1 & -12 & -4 \\ & & 6 & 14 & 4 \\ \hline & 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Então, o quociente da divisão de $A(x)$ por $x-2$ é

$$Q(x) = 3x^2 + 7x + 2.$$

32.3. Se $A(x)$ é divisível por $x-2$, então $A(x) = (x-2) \times Q(x)$.

$$A(x) = (x-2) \times Q(x) \Leftrightarrow A(x) = (x-2) \times (3x^2 + 7x + 2)$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times (3x^2 + 7x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \quad \vee \quad 3x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2 \quad \vee \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = -2$$

Zeros de $A(x)$: -2 , $-\frac{1}{3}$ e 2

Pág. 113

33.1. $A(1) = 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 10 = 6 + 4 - 10 = 0$

Como $A(1) = 0$, então 1 é uma raiz do polinômio $A(x)$.

33.2. A área lateral do prisma é dada por:

$$A(x) - 2 \times (x-1)^2 = 6x^2 + 4x - 10 - 2(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= 6x^2 + 4x - 10 - 2x^2 + 4x - 2 = 4x^2 + 8x - 12$$

Como o prisma é quadrangular regular, as quatro faces laterais são todas iguais.

Assim sendo, a área de cada face lateral do prisma é dada por:

$$\frac{4x^2 + 8x - 12}{4} = x^2 + 2x - 3$$

33.3. A altura do prisma é dada por $\frac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $A(x)$ por $x-1$.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

O quociente da divisão de $x^2 + 2x - 3$ por $x-1$ é $Q(x) = x+3$.

Então, $x^2 + 2x - 3 = (x-1) \times Q(x) + 0$, ou seja,

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = x+3.$$

33.4. $A(x) = 22 \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 10 = 22 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{8}{3}$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x = 2$.

Então, as dimensões do prisma são $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

Tarefa 2

1.1. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é dado por $P(2)$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é igual a 3, se $P(2) = 3$.

$$P(2) = 3 \Leftrightarrow 2 \times 2^3 - 2^2 + k \times 2 - 1 = 3 \Leftrightarrow 16 - 4 + 2k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = -4$$

1.2. Repara que $(x+1) = (x-(-1))$.

Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é dado por

$P(-1)$. O resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é igual a -4 , se

$P(-1) = -4$.

$$P(-1) = -4 \Leftrightarrow 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 + k \times (-1) - 1 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 - k - 1 = -4 \Leftrightarrow k = 0$$

1.3. $P(x)$ é divisível por $x+2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por

$x+2$ for igual a 0, ou seja, se $P(-2) = 0$.

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-2)^3 - (-2)^2 + k \times (-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -16 - 4 - 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{21}{2}$$

2.1. $P(x)$ é um polinómio completo para $n=1$. Nesse caso,

$$P(x) = x^2 - x - 2.$$

2.2. No caso de $n=2$, então $P(x) = x^4 - x^2 - 2$.

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $(x - \sqrt{2})$.

2.3. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^{2n} - (-1)^n - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$

porque
n é par

Então se n é par, o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é -2 .

2.4. $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1) = 0$.

$$P(-1) = (-1)^{2n} - (-1)^n - 2 = 1 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

porque
n é ímpar

Conclui-se então que $P(x)$ é divisível por $x+1$ qualquer que seja n ímpar.

3. A família de polinómios do 2.º grau cujo coeficiente do termo de maior grau é 3 pode ser definida por:

$$P(x) = 3x^2 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3.1. $P(x)$ é divisível por $x-2$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ for igual a 0, ou seja, se $P(2) = 0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é dado por $P(-1)$.

Como $P(x)$ dividido por $x+1$ dá resto 3 então $P(-1) = 3$.

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-1) = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 2^2 + a \times 2 + b = 0 \\ 3 \times (-1)^2 + a \times (-1) + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 2a + b = 0 \\ 3 - a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + b = -12 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

3.2. Se -2 é zero do polinómio $P(x)$, então $P(-2) = 0$.

$P(x)$ é divisível por $x-1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ for igual a 0, ou seja, se $P(1) = 0$.

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times (-2)^2 + a \times (-2) + b = 0 \\ 3 \times 1^2 + a \times 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2a + b = 0 \\ 3 + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 12 \\ a + 2a - 12 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $P(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

4.1. O resto da divisão de $f(x)$ por $x+1$ é dado por $f(-1)$, ou seja, -4 .

$f(-1) = -4$ porque o ponto $A(-1, -4)$ pertence ao gráfico de f .

4.2. Sabe-se que o ponto $B(3, 0)$ pertence ao gráfico de f , logo 3 é zero de f dado que $f(3) = 0$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $f(x)$ por $x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{9}{2} \\ 3 & & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ \hline & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -0 \end{array}$$

$$Q(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Se $f(x)$ é divisível por $x-3$, então

$$f(x) = (x-3) \times \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \times \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \quad \vee \quad -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \vee \quad -2x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x=3 \quad \vee \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \vee \quad x = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x=1$$

Os zeros da função f são $-\frac{3}{2}$, 1 e 3.

Pág. 114

34.1. Tendo em atenção o esquema apresentado, verifica-se que o maior valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(x) = (x-2)^n \times Q(x)$ é 2.

Então, diz-se que 2 é uma raiz de multiplicidade 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{34.2.} \quad P(-1) &= (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 4 = \\ &= 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Logo, -1 é raiz de $P(x)$.

Para determinar a multiplicidade da raiz -1 vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -3 & 4 & -4 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & \\ -1 & & -1 & 5 & \\ \hline & 1 & -5 & 9 & \end{array}$$

Conclui-se então que -1 é uma raiz de multiplicidade 2.

Pág. 115

35. Para determinar a multiplicidade da raiz -1 do polinómio $P(x)$ vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

	1	2	0	-2	-1
-1		-1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	0
-1		-1	0	1	
	1	0	-1	0	
-1		-1	1		
	1	-1	0		
-1		-1			
	1	-2			

Conclui-se então que -1 é uma raiz de multiplicidade 3.

$$P(x) = (x+1)^3 \times (x-1)$$

36. Pretende-se determinar a multiplicidade da raiz 1 do polinómio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ e para tal vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

	1	-2	0	2	-1
1		1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	0
1		1	0	-1	
	1	0	-1	0	
1		1	1		
	1	1	0		
1		1			
	1	2			

Conclui-se então que 1 é uma raiz de multiplicidade 3.

$$P(x) = (x-1)^3 \times (x+1)$$

Conclui-se então que o maior número natural n e o polinómio $Q(x)$, tal que $P(x) = (x-1)^n Q(x)$, são: $n=3$ e $Q(x) = x+1$.

37. Pretende-se determinar a multiplicidade da raiz -2 do polinómio $P(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ e para tal vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

	1	5	6	-4	-8
-2		-2	-6	0	8
	1	3	0	-4	0
-2		-2	-2	4	
	1	1	-2	0	
-2		-2	2		
	1	-1	0		
-2		-2			
	1	-3			

Conclui-se então que -2 é uma raiz de multiplicidade 3.

$$P(x) = (x+2)^3 \times (x-1)$$

Conclui-se então que o maior número natural n e o polinómio $Q(x)$, tal que $P(x) = (x+2)^n Q(x)$, são: $n=3$ e $Q(x) = x-1$.

38.1. Seja $P(x)$ o polinómio que satisfaz as condições exigidas.

Como $P(x)$ é um polinómio de grau 3 e 2 é um zero simples, então sabe-se que $P(x) = (x-2) \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio de grau 2.

Como 2 é o único zero de $P(x)$, então $Q(x)$ é um polinómio que não tem zeros. Considerando, por exemplo, $Q(x) = x^2 + 1$, tem-se: $P(x) = (x-2) \times (x^2 + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

38.2. Seja $P(x)$ o polinómio que satisfaz as condições exigidas.

Como $P(x)$ é um polinómio do quarto grau e 3 e -1 são os únicos zeros de $P(x)$, então podemos, por exemplo, considerar que $P(x) = (x-3)^2 \times (x+1)^2$.

Simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 6x + 9) \times (x^2 + 2x + 1) = \\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^3 - 12x^2 - 6x + 9x^2 + 18x + 9 \\ &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

39. Sendo $P(x)$ um polinómio de grau 3 que tenha só um zero (seja k esse zero) e esse zero tenha multiplicidade 2, então sabe-se que $P(x) = (x-k)^2 \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio de grau 1. Repara que $Q(x)$ é do tipo $ax+b$, com $a \neq 0$.

$$\text{Ora, } Q(x) = 0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Esta situação é impossível. Basta considerar:

. Se $-\frac{b}{a}$ for diferente de k , então k não seria o único zero.

. Se $-\frac{b}{a}$ for igual a k , então essa raiz não teria multiplicidade 2 (mas 3).

Pág. 116

40.1. Pretende-se determinar a multiplicidade da raiz 1 do polinómio $A(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3$ e para tal vamos aplicar sucessivamente a regra de Ruffini.

	2	1	-5	-1	3
1		2	3	-2	-3
	2	-3	-2	-3	0
1		2	5	3	
	2	5	3	0	
1		2	7		
	2	7	10		

Conclui-se então que 1 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinómio $A(x)$.

40.2. Atendendo aos cálculos efetuados no item anterior, sabe-

-se que $A(x) = (x-1)^2 \times (2x^2 + 5x + 3)$.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \times (2x^2 + 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{41.1.} \quad A(-2) &= 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 18 = \\ &= -16 + 28 + 6 - 18 = 0 \end{aligned}$$

Como $A(-2) = 0$, então -2 é um zero do polinómio $A(x)$.

41.2. Sendo -2 um zero do polinómio $A(x)$, então $A(x)$ é divisível por $x+2$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $A(x)$ por $x+2$.

	2	7	-3	-18
-2		-4	-6	18
	2	3	-9	0

Quociente: $Q(x) = 2x^2 + 3x - 9$

Portanto, $A(x) = (x+2) \times (2x^2 + 3x - 9)$.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2) \times (2x^2 + 3x - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2=0 \quad \vee \quad 2x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -3$$

41.3. Como -3 e $\frac{3}{2}$ são os zeros do polinómio $Q(x)$, então

$$Q(x) = 2(x+3) \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Então, } A(x) = (x+2) \times (2x^2 + 3x - 9) =$$

$$= (x+2) \times 2(x+3) \left(x - \frac{3}{2} \right) = 2(x+2)(x+3) \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

Pág. 117

42.1. Seja $P(x)$ o polinómio que satisfaz as condições exigidas.

$$P(x) = a(x-2) \times (x+3), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$P(-1) = 2 \Leftrightarrow a(-1-2) \times (-1+3) = 2 \Leftrightarrow -6a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Então,

$$P(x) = -\frac{1}{3}(x-2) \times (x+3) = -\frac{1}{3}(x^2 + x - 6) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2.$$

42.2. Seja $P(x)$ o polinómio que satisfaz as condições exigidas.

$$P(x) = a(x-3)^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$P(1) = -2 \Leftrightarrow a(1-3)^2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } P(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}.$$

43.1. Começemos por determinar os zeros do polinómio

$$x^2 + x - 2.$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

$$\text{Então, } x^2 + x - 2 = (x-1) \times (x+2).$$

43.2. Começemos por determinar os zeros do polinómio

$$2x^2 + x - 1.$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

$$\text{Então, } 2x^2 + x - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \times (x+1) = (2x-1) \times (x+1).$$

$$\mathbf{43.3.} \quad x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

$$\mathbf{43.4.} \quad x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 + 2x - 3$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 + 2x - 3 = (x-1) \times (x+3).$$

$$\text{Então, } x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3).$$

$$\mathbf{43.5.} \quad -2x^3 - 3x^2 - x = x(-2x^2 - 3x - 1)$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio

$$-2x^2 - 3x - 1.$$

$$-2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} \Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Assim sendo, } -2x^2 - 3x - 1 = -2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x + 1 \right) = (x+1)(-2x-1).$$

$$\text{Então, } -2x^3 - 3x^2 - x = x(-2x^2 - 3x - 1) = x(x+1)(-2x-1).$$

Pág. 118

44.1. Conjunto dos divisores do termo independente do

polinómio: $D = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D . Temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$P(-1) = (-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$$

Logo, -1 é raiz de $P(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	0	-7	-6
-1		-1	1	6
	1	-1	-6	0

$$\text{Então, } P(x) = (x+1)(x^2 - x - 6).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 - x - 6$.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

$$\text{Então, } P(x) = (x+1)(x-3)(x+2).$$

44.2. Conjunto dos divisores do termo independente do

polinómio: $D = \{-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D . Temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$P(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 - 7 \times (-1) + 10 = -1 - 4 + 7 + 10 = 12 ;$$

$$P(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 10 = 1 - 4 - 7 + 10 = 0$$

Logo, 1 é raiz de $P(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & -10 \\ 1 & & 1 & -3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x-1)(x^2 - 3x - 10).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 - 3x - 10$.

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -2$$

Assim sendo, $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$.

$$\text{Então, } P(x) = (x-1)(x-5)(x+2).$$

44.3. Conjunto dos divisores do termo independente do

polinómio: $D = \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D . Como o polinómio é de grau 4, temos de identificar pelo menos duas dessas raízes.

$$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 8 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) - 9 =$$

$$= 1 - 1 - 8 + 9 - 9 = -8 ;$$

$$P(1) = 1^4 + 1^3 - 8 \times 1^2 - 9 \times 1 - 9 = 1 + 1 - 8 - 9 - 9 = -24 ;$$

$$P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) - 9 =$$

$$= 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0 ;$$

$$P(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \times 3^2 - 9 \times 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$$

Logo, -3 e 3 são raízes de $P(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -9 & -9 \\ -3 & & -3 & 6 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x-3)(x+3)(x^2 + x + 1).$$

Nota: o polinómio $x^2 + x + 1$ não tem zeros.

44.4. Conjunto dos divisores do termo independente do

polinómio: $D = \{-1, 1, -3, 3\}$.

As raízes inteiras do polinómio pertencem ao conjunto D . Temos de identificar pelo menos uma dessas raízes.

$$P(-1) = -(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) + 3 = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$$

Logo, -1 é raiz de $P(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x+1)(-x^2 + 2x + 3).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $-x^2 + 2x + 3$.

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

Assim sendo, $-x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$.

$$\text{Então, } P(x) = (x+1)[-(x+1)(x-3)] = -(x+1)(x+1)(x-3).$$

45.1. Sabe-se que 1 é um zero de f .

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $f(x)$ por $x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Se $f(x)$ é divisível por $x-1$, então

$$f(x) = (x-1) \times \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \right).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \times \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \vee \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x^2 - x - 6=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=-2$$

3 e -2 são os outros zeros de f .

Logo, $A(-2,0)$ e $B(3,0)$.

O ponto C tem abcissa 0 e pertence ao gráfico de f , logo $C(0, f(0))$.

$$f(0) = 3, \text{ então } C(0,3).$$

$$45.2. f(x) = (x-1) \times \frac{1}{2}(x-3)(x+2) = (x-1)(x-3) \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$$

Tarefa 3

1.1. Sendo x_1 e x_2 as raízes inteiras do polinómio

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, então sabe-se que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$\text{Portanto, } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -a(x_1 + x_2) = b.$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto, $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a(x_1 x_2) = c$.

1.2. As raízes inteiras x_1 e x_2 são divisores do termo

independente c porque $\frac{c}{x_1} = a x_2$ e $\frac{c}{x_2} = a x_1$.

Nota: $a x_2$ e $a x_1$ são números inteiros.

2.1. Conjunto dos divisores do termo independente do polinômio: $D = \{-1, 1, -2, 2\}$.

As raízes inteiras do polinômio pertencem ao conjunto D .

$$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 1 - 1 - 2 = -4;$$

$$P(1) = 1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0;$$

$$P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0;$$

$$P(2) = 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 2 = 16 + 8 - 4 + 2 - 2 = 20$$

Logo, -2 e 1 são raízes de $P(x)$.

2.2. Como -2 e 1 são raízes de $P(x)$, aplicando a regra de

Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ & & -2 & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Então, $P(x) = (x+2)(x-1)(x^2+1)$.

Nota: o polinômio x^2+1 não tem zeros.

Pág. 119

46. $P(x) = (x-2)(x+1)x$

	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, 2[$$

47.1. Para resolver a inequação $(x-1)P(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	1		2		4	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	-	-	0	-	0	+
$(x-1)P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x-1)P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$$

47.2. Para resolver a inequação $(3-x)P(x) \leq 0$, vamos

construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
$3-x$	+	+	+	0	-	-	-
$P(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$(3-x)P(x)$	-	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$(3-x)P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$$

47.3. Para resolver a inequação $(x+1)P(x) \geq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-1		2		4	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	-	-	0	-	0	+
$(x+1)P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x+1)P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup \{2\} \cup [4, +\infty[$$

48.1.

a) $P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

Logo, -1 é raiz de $P(x)$ e $P(x)$ é divisível por $x+1$.

b) Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, $P(x) = (x+1)(x^2+x-2)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio x^2+x-2 .

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$$

Assim sendo, $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$.

Então, $P(x) = (x+1)(x-1)(x+2)$.

48.2. Para resolver a inequação $P(x) < 0$, vamos construir uma

tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 1[$$

Pág. 120

49.1. $P(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 12 = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$

Logo, 3 é raiz de $P(x)$ e $P(x)$ é divisível por $x-3$.

49.2. $x^3 - 3x^2 > 4x - 12 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > 0 \Leftrightarrow P(x) > 0$

Como $P(x)$ é divisível por $x-3$, aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $P(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 3 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Então, $P(x) = (x-3)(x^2 - 4)$.

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Portanto, $P(x) = (x-3)(x-2)(x+2)$.

Para resolver a inequação $P(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[\cup]3, +\infty[$

50.1. $A(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 - x - 2$.

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

Assim sendo, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

Então, $A(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$.

50.2. Para resolver a inequação $A(x) \geq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$A(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty[$

51.1. $B(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

Logo, 1 é raiz de $B(x)$ e $B(x)$ é divisível por $x-1$.

51.2. $x^3 + 2x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow B(x) \leq 0$

Como $B(x)$ é divisível por $x-1$, aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $B(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Então, $B(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 2)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + 3x + 2$.

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$

Assim sendo, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.

Portanto, $B(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$.

Para resolver a inequação $B(x) \leq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$B(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$

52.1. Como $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 > 0$, então tem-se:

$(x-2)(x^2 + 3) < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[$

52.2. Como $\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)^4 \geq 0$, então tem-se:

$(1-x)^5 (x-2)^4 < 0 \Leftrightarrow (1-x)^5 < 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow 1-x < 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[\setminus \{2\}$

52.3. Repara que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Como $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 \geq 0$, então tem-se:

$(x^2 + 4x + 4)(3-x)^3 > 0 \Leftrightarrow (3-x)^3 > 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow 3-x > 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\setminus \{-2\}$

52.4. Como $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 - 2 < 0$, então tem-se:

$(-x^2 - 2)(1-x)^5 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)^5 \leq 0 \Leftrightarrow 1-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$

53.1. $P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - (-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

53.2. $P(x) < 2 \Leftrightarrow P(x) - 2 < 0$

$P(x) - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$

-1 é raiz do polinômio $P(x) - 2$ porque $P(-1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Então, $P(x) - 2$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, $P(x) - 2 = (x+1)(x^2 + x - 2)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + x - 2$.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

Assim sendo, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

$$\text{Então, } P(x) - 2 = (x+1)(x-1)(x+2).$$

Para resolver a inequação $P(x) - 2 \leq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)-2$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$P(x) < 2 \Leftrightarrow P(x) - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 1[$$

Tarefa 4

1. Sendo $B(x)$ um polinômio do terceiro grau que admite -2 como raiz dupla e 1 como raiz simples, então

$$B(x) = a(x+2)^2(x-1), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sabe-se que o resto da divisão de $B(x)$ por $x+3$ é 4 , ou seja,

$$B(-3) = 4.$$

$$B(-3) = 4 \Leftrightarrow a(-3+2)^2(-3-1) = 4 \Leftrightarrow -4a = 4 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\text{Então, } B(x) = -(x+2)^2(x-1) = (x+2)^2(-x+1).$$

$$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(-x+1) \leq 0$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 \geq 0$, então tem-se:

$$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(-x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$$

2.1. Como $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 - 1 < 0$, então tem-se:

$$(-x^2 - 1)A(x) \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Nota: Como se sabe que $\forall x \in \mathbb{R}, A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[$, então conclui-se que

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[.$$

2.2. Para resolver a inequação $(3-2x)A(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$3-2x$	+	+	+	0	-	-	-
$A(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$(3-2x)A(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$(3-2x)A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$$

Pág. 121

54.1. Pretende-se determinar as raízes de $A(x)$, ou seja, as soluções da equação $A(x) = 0$.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$4y^2 - 17y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \Leftrightarrow y = 4 \quad \vee \quad y = \frac{1}{4}$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 4 \quad \vee \quad x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

Conclusão: as raízes de $A(x)$ são $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e 2 .

54.2. Atendendo a 54.1., tem-se:

$$A(x) = 4(x-2)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right), \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)(x+2)\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = \\ &= (x-2)(x+2)(2x-1)(2x+1). \end{aligned}$$

54.3. Para resolver a inequação $A(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$2x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$A(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\cup [2, +\infty[$$

55.1. Como $B(x)$ é divisível por $x+1$, vamos aplicar a regra de Ruffini para decompor $B(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -7 & -7 & -18 & -18 \\ -1 & & -1 & 0 & 7 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & 0 & -18 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } B(x) = (x+1)(x^4 - 7x^2 - 18).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^4 - 7x^2 - 18$.

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 7y - 18 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} \Leftrightarrow y = 9 \quad \vee \quad y = -2$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 9 \quad \vee \quad \underbrace{x^2 = -2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Então,

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^4 - 7x^2 - 18) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3.$$

As raízes de $B(x)$ são -3 , -1 e 3 .

55.2. Vamos começar por decompor $B(x)$ em fatores.

$$B(x) = (x+1)(x^4 - 7x^2 - 18) = (x+1)(x-3)(x+3)(x^2+2)$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2 > 0$, então tem-se:

$$B(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+3)(x^2+2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+3) < 0$$

Para resolver a inequação $B(x) < 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		-1		3	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$(x+1)(x-3)(x+3)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 3[$$

Tarefa 5

1.1.

a) Substituindo x^2 por y na equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, obtém-se a seguinte equação do 2.º grau em y :

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

b) Vamos agora resolver a equação do 2.º grau obtida em a).

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 1$$

c) Substituindo y em $x^2 = y$ pelos valores encontrados em b), tem-se:

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1$$

d) Em seguida vamos resolver as equações obtidas em c).

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$$

e) Os zeros de $P(x)$ são -2 , -1 , 1 e 2 .

$$1.2. P(x) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

1.3. Para resolver a inequação $P(x) \geq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$2.1. \text{ Então, } T(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} \Leftrightarrow y = 9 \vee y = -1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 9 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Os zeros de $T(x)$ são -3 e 3 .

$$2.2. T(x) = (x-3)(x+3)(x^2+1)$$

2.3.

$$a) T(x) > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x^2+1) > 0$$

Para resolver a inequação $T(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
x^2+1	+	+	+	+	+
$T(x)$	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$T(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$$

$$b) (-x-1)T(x) > 0 \Leftrightarrow (-x-1)(x-3)(x+3)(x^2+1) > 0$$

Para resolver a inequação $(-x-1)T(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		-1		3	$+\infty$
$-x-1$	+	+	+	0	-	-	-
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
x^2+1	+	+	+	+	+	+	+
$(-x-1)T(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$(-x-1)T(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 3[$$

$$c) (x^2+2x+1)T(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3)(x+3)(x^2+1) \leq 0$$

Para resolver a inequação $(x^2+2x+1)T(x) \leq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		-1		3	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
x^2+1	+	+	+	+	+	+	+
$(x^2+2x+1)T(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x^2+2x+1)T(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 3]$$

3. As abscissas dos pontos A, B, C, D e O correspondem aos zeros

$$\text{do polinômio } Q(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^3 + 2x.$$

Vamos então determinar os zeros de $Q(x)$.

Pág. 124

Proposta 22

22.1.

a) Se -2 é zero do polinômio $P(x)$, então $P(-2) = 0$.

$$\begin{aligned} P(-2) = 0 &\Leftrightarrow (-2)^3 + k \times (-2)^2 + (-2) - k - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -8 + 4k - 2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3k = 12 \Leftrightarrow k = 4 \end{aligned}$$

b) Sendo $k = 4$, então $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Sendo -2 um zero do polinômio $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x + 2$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

Portanto, $P(x) = (x + 2) \times (x^2 + 2x - 3)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x + 2) \times (x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -3 \end{aligned}$$

Os outros zeros de $P(x)$ são -3 e 1 .

22.2. Sendo $k = -2$, então $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & & 3 & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 12 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + x + 4$

Resto: $R(x) = 12$

b) Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinômios, tem-se:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 0 \quad | \quad x^2 + 1 \\ \underline{-x^3} \quad \quad -x \quad \quad x - 2 \\ -2x^2 + 0x + 0 \\ \underline{2x^2} \quad \quad + 2 \\ 2 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x - 2$

Resto: $R(x) = 2$

Proposta 23

23.1. 1 é zero do polinômio $A(x)$, porque $A(1) = 0$.

Sendo 1 um zero do polinômio $A(x)$, então $A(x)$ é divisível por $x - 1$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $A(x)$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + x + 1$

Portanto, $A(x) = (x - 1) \times (x^2 + x + 1)$.

Nota: o polinômio $x^2 + x + 1$ não tem zeros.

23.2. Devemos começar por determinar as raízes de $B(x)$, ou seja, as soluções da equação $B(x) = 0$.

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \quad \vee \quad y = -1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 2 \quad \vee \quad \underbrace{x^2 = -1}_{\text{equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Então, } B(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1).$$

23.3. Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $C(x)$ por $x + 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -2 & & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + x - 6$

Portanto, $C(x) = (x + 2) \times (x^2 + x - 6)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + x - 6$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

$$\text{Então, } C(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 3).$$

23.4. $D(x)$ é divisível por $x - 1$ porque 1 é um zero do polinômio $D(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $D(x)$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & & 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$

Portanto, $D(x) = (x - 1) \times (2x^3 + 3x^2 + x)$.

$$2x^3 + 3x^2 + x = x(2x^2 + 3x + 1)$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $2x^2 + 3x + 1$.

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$\text{Então, } 2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1) = (2x+1)(x+1).$$

Assim sendo, conclui-se que $D(x) = x(x-1)(2x+1)(x+1)$.

Proposta 24

24.1. Atendendo à igualdade dada, sabe-se que o polinómio $P(x)$ é divisível por $x+2$, $x-1$ e $x-2$. Então, -2 , 1 e 2 são zeros de $P(x)$.

Deve-se começar por aplicar sucessivamente a regra de Ruffini de modo a identificar a multiplicidade de cada uma das raízes.

	1	1	-10	-8	32	16	-32
-2		-2	2	16	-16	-32	32
	1	-1	-8	8	16	-16	0
-2		-2	6	4	-24	16	
	1	-3	-2	12	-8	0	
-2		-2	10	-16	8		
	1	-5	8	-4	0		
-2		-2	14	-44			
	1	-7	22	-48			

Daqui resulta que $P(x) = (x+2)^3(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$.

Ao quociente obtido, ou seja, ao polinómio $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, aplica-se a regra de Ruffini para determinar a multiplicidade de outra das raízes e o quociente.

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0
1		1	-3	
	1	-3	-1	

Daqui resulta que $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$.

Sabe-se que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Então, conclui-se que $P(x) = (x+2)^3(x-1)(x-2)^2$, sendo $r=3$, $s=1$ e $t=2$.

24.2. Os zeros de $P(x)$ são -2 , 1 e 2 .

-2 tem multiplicidade 3, 1 tem multiplicidade 1 e 2 tem multiplicidade 2.

Proposta 25

$$\begin{aligned} \mathbf{25.1.} \quad P(-1) &= (-1)^7 - (-1)^6 - 2 \times (-1)^5 - 2 \times (-1)^4 - 7 \times (-1)^3 + \\ &\quad + 7 \times (-1)^2 + 24 \times (-1) + 12 = \\ &= -1 - 1 + 2 - 2 + 7 + 7 - 24 + 12 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^7 - 2^6 - 2 \times 2^5 - 2 \times 2^4 - 7 \times 2^3 + 7 \times 2^2 + 24 \times 2 + 12 = \\ &= 128 - 64 - 64 - 32 - 56 + 28 + 48 + 12 = 0 \end{aligned}$$

Como $P(-1) = 0$ e $P(2) = 0$, conclui-se que -1 e 2 são zeros de $P(x)$.

25.2. Deve-se começar por aplicar sucessivamente a regra de Ruffini de modo a identificar a multiplicidade de um dos zeros de $P(x)$ e o respetivo quociente.

	1	-1	-2	-2	-7	7	24	12
-1		-1	2	0	2	5	-12	-12
	1	-2	0	-2	-5	12	12	0
-1		-1	3	-3	5	0	-12	
	1	-3	3	-5	0	12	0	
-1		-1	4	-7	12	-12		
	1	-4	7	-12	12	0		
-1		-1	5	-12	24			
	1	-5	12	-24	36			

Daqui resulta que a multiplicidade da raiz -1 é 3 e que

$$P(x) = (x+1)^3(x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12).$$

Ao quociente obtido, ou seja, ao polinómio

$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$, aplica-se a regra de Ruffini para determinar a multiplicidade da raiz 2.

	1	-4	7	-12	12
2		2	-4	6	-12
	1	-2	3	-6	0
2		2	0	6	
	1	0	3	0	
2		2	4		
	1	2	7		

Daqui resulta que a multiplicidade da raiz 2 é 2 e que

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x-2)^2(x^2 + 3).$$

$$\mathbf{25.3.} \quad P(x) = (x+1)^3(x-2)^2(x^2 + 3)$$

$$m = 3, \quad n = 2 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^2 + 3.$$

Pág. 125

Proposta 26

26.1. Seja $P(x)$ um polinómio que satisfaz as condições exigidas.

Consideremos, por exemplo:

$$P(x) = (x+1)(x-2)^2 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

26.2. Seja $P(x)$ um polinómio que satisfaz as condições exigidas.

Consideremos, por exemplo:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) = \\ &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

26.3. Seja $P(x)$ um polinómio que satisfaz as condições exigidas.

Consideremos, por exemplo:

$$P(x) = (x-4)(x^2 + 1) = x^3 - 4x^2 + x - 4.$$

Proposta 27

27.1. 1.º Processo de resolução

O resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$ é 3 se $A(-2)=3$.

$$A(-2)=3 \Leftrightarrow -(-2)^3 - 2 \times (-2)^2 + (-2) + |k| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 8 - 2 + |k| = 3 \Leftrightarrow |k| = 5 \Leftrightarrow k = 5 \vee k = -5$$

2.º Processo de resolução

Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar o resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -2 & 1 & |k| \\ -2 & & 2 & 0 & -2 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & |k|-2 \end{array}$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$ é $|k|-2$.

Então, o resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$ é 3 se $|k|-2=3$.

$$|k|-2=3 \Leftrightarrow |k|=5 \Leftrightarrow k=5 \vee k=-5$$

27.2. Sendo $k=2$, então $A(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$.

a) $A(1) = -1^3 - 2 \times 1^2 + 1 + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

Como $A(1)=0$, 1 é raiz de $A(x)$.

Logo, $A(x)$ é divisível por $x-1$, ou seja, $x-1$ é divisor de $A(x)$.

b) Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $A(x)$ por $x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -x^2 - 3x - 2$

Portanto, $A(x) = (x-1)(-x^2 - 3x - 2)$.

c) Vamos determinar os zeros do polinômio $-x^2 - 3x - 2$.

$$-x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$\text{Então, } -x^2 - 3x - 2 = -(x+2)(x+1) = (-x-2)(x+1).$$

Assim sendo, conclui-se que $A(x) = (x-1)(-x-2)(x+1)$.

d) $A(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x-2)(x+1) < 0$

Para resolver a inequação $A(x) < 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$-x-2$	+	0	-	-	-	-	-
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$A(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]1, +\infty[$$

Proposta 28

28.1. $x^3 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0$

	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x(x-2)(x+2)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$x(x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[$$

28.2. $2x(x^2 - 5) < 0 \Leftrightarrow 2x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0$

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$x - \sqrt{5}$	-	-	-	-	-	0	+
$x + \sqrt{5}$	-	0	+	+	+	+	+
$2x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$2x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]0, \sqrt{5}[$$

28.3. $-x^3 + 2x^2 > -3x \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x(x^2 - 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow -x(x-3)(x+1) > 0$$

Nota: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
$-x$	+	+	+	0	-	-	-
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$-x(x-3)(x+1)$	+	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$-x(x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, 3[$$

28.4. $(x-1)x \geq 5(1-x) \Leftrightarrow (x-1)x - 5(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)x + 5(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) \geq 0$$

	$-\infty$	-5		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+5$	-	0	+	+	+
$(x-1)(x+5)$	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x-1)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$$

28.5. $(x^3 - 8)(2-x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4)(2-x) < 0$

Notas:

1) 2 é zero do polinômio $x^3 - 8$. Aplicando a regra de Ruffini, conclui-se que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

2) O polinômio $x^2 + 2x + 4$ não tem zeros.

	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$x^2 + 2x + 4$	+	+	+
$2-x$	+	0	-
$(x-2)(x^2 + 2x + 4)(2-x)$	-	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4)(2-x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$28.6. x^4 > 16 \Leftrightarrow x^4 - 16 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4) > 0$$

Nota: O polinómio $x^2 + 4$ não tem zeros.

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
x^2+4	+	+	+	+	+
$(x-2)(x+2)(x^2+4)$	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$28.7. 2x^3 + 3x^2 \leq 2x \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 + 3x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x(x+2)(2x-1) \leq 0$$

Notas:

$$1) 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}.$$

$$2) 2x^2 + 3x - 2 = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1).$$

	$-\infty$	-2		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x(x+2)(2x-1)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$x(x+2)(2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$28.8. (x^2 + 2x + 1)(3 - x)^3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(3-x)^3 > 0$$

	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
$(3-x)^3$	+	+	+	0	-
$(x+1)^2(3-x)^3$	+	0	+	0	-

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x+1)^2(3-x)^3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 3[$$

$$28.9. (x-1)^4(x+2)^5 < 0$$

	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^4$	+	0	+	+	+
$(x+2)^5$	-	0	+	+	+
$(x-1)^4(x+2)^5$	-	0	+	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$(x-1)^4(x+2)^5 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[$$

$$28.10. x^3 - 2x > x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) > 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1) > 0$$

Notas:

$$1) x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1.$$

$$2) x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x(x-2)(x+1)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$x(x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]2, +\infty[$$

Proposta 29

29.1. Sendo -3 um zero do polinómio $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x+3$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $P(x)$ por $x+3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 11 & 12 & -9 \\ -3 & & -6 & -15 & 9 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\text{Portanto, } P(x) = (x+3) \times (2x^2 + 5x - 3).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $2x^2 + 5x - 3$.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3).$$

$$\text{Então, } P(x) = (x+3) \times (2x^2 + 5x - 3) = (x+3)(x+3)(2x-1).$$

$$29.2. T(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) < 0$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 + x - 6$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$

$$\text{Assim sendo, } x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

$$\text{Então, } T(x) < 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+3) < 0.$$

Para resolver a inequação $T(x) < 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x(x-2)(x+3)$	-	0	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$T(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]0, 2[$$

$$29.3. S(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 16x > 0 \Leftrightarrow 2x(x^3 - 8) > 0$$

Como 2 é zero do polinómio $x^3 - 8$ (pois $2^3 - 8 = 0$), então

$x^3 - 8$ é divisível por $x-2$.

Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente da divisão de $x^3 - 8$ por $x-2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Conclui-se que $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

O polinômio $x^2 + 2x + 4$ não tem zeros.

Então, $S(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) > 0$

Para resolver a inequação $S(x) > 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x^2 + 2x + 4$	+	+	+	+	+
$S(x)$	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$S(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

Pág. 126

Proposta 30

30.1. Se o perímetro de cada um dos quadrados for igual a 4, então $x = 1$.

A área da parte colorida do retângulo é dada por:

$$2 \times (\overline{DE})^2 + \frac{\overline{FG} \times \overline{CE}}{2} = 2 \times 1^2 + \frac{4 \times 7}{2} = 2 + 14 = 16 \text{ (unidades de área).}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{30.2.} \quad A_{\text{colorida}} &= 2 \times (\overline{DE})^2 + \frac{\overline{FG} \times \overline{CE}}{2} = 2 \times x^2 + \frac{(6 - 2x) \times (8 - x)}{2} = \\ &= 2x^2 + \frac{48 - 6x - 16x + 2x^2}{2} = 2x^2 + 24 - 3x - 8x + x^2 = \\ &= 3x^2 - 11x + 24 \end{aligned}$$

$$\mathbf{30.3.} \quad A(x) = 14 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 24 = 14 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{5}{3}$$

Se $x = 2$, então $A_{\text{CFG}} = 14 - 2 \times 2^2 = 14 - 8 = 6$ (unidades de área).

Se $x = \frac{5}{3}$, então $A_{\text{CFG}} = 14 - 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 14 - \frac{50}{9} = \frac{76}{9}$ (unidades de área).

Proposta 31

Como $P(1) = 0$, então 1 é zero do polinômio $P(x)$.

As abscissas dos pontos A e B são os outros zeros do polinômio $P(x)$.

Se 1 é zero do polinômio $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

Aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $P(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 4 \\ & & \frac{1}{2} & -1 & -4 \\ \hline & \frac{1}{2} & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x - 1) \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right).$$

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4.$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 \vee x = -2$$

Os zeros do polinômio $P(x)$ são -2, 1 e 4.

Então, $A(-2, 0)$ e $B(4, 0)$.

C é o ponto de interseção do gráfico de P com o eixo das ordenadas, então $C(0, P(0))$.

Como $P(0) = 4$, então $C(0, 4)$.

$$A_{\text{ABC}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ (unidades de área).}$$

Pág. 127

Proposta 32

$$\mathbf{32.1.} \quad P(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 3 - 32 = 27 - 27 + 3 - 32 = 0$$

Logo, 3 é zero de $P(x)$.

Assim sendo, $P(x)$ é divisível por $x - 3$.

Como $P(x)$ é divisível por $x - 3$, aplicando a regra de Ruffini vamos decompor $P(x)$ em fatores.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -32 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x - 3)(x^2 + 1).$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1.$$

equação impossível

O polinômio $x^2 + 1$ não tem zeros.

Então, 3 é o único zero de $P(x)$.

32.2. A afirmação é falsa. Em 32.1. provou-se que o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 32$ tem apenas uma raiz e essa é uma raiz simples (de multiplicidade 1).

Proposta 33

33.1. Atendendo a que $P(x)$ é divisível por $x^2 - 1$ e

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, conclui-se que $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$.

A divisão de $P(x)$ por $x^2 - 1$ pode ser feita dividindo primeiro $A(x)$ por $x - 1$ e de seguida dividindo o quociente resultante por $x + 1$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	6	4	-5	
1		1	7	11	5
	1	7	11	5	0
-1		-1	-6	-5	
	1	6	5	0	

Quociente: $Q(x) = x^2 + 6x + 5$

Então, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 5)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^2 + 6x + 5$.

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x+1=0 \vee x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=-1 \vee x=-5$$

Zeros de $P(x)$: -5, -1 e 1

$$33.2. P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 5) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+5) < 0$$

Para resolver a inequação $P(x) < 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-5		-1		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x+5$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 + 6x + 5$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por observação do quadro, tem-se:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-5, -1[\cup]-1, 1[$$

Proposta 34

Seja $P(x)$ o polinômio que satisfaz as condições exigidas.

$$P(x) = (x^2 + 1) \times (ax + b), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$P(x)$ dividido por $x-1$ dá resto 2, então $P(1) = 2$.

$P(x)$ dividido por $x+1$ dá resto 1, então $P(-1) = 1$.

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1^2 + 1)(a \times 1 + b) = 2 \\ ((-1)^2 + 1)(a \times (-1) + b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b) = 2 \\ 2(-a+b) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=2 \\ -2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=2-2a \\ -2a+2-2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=2-2a \\ -4a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{4} \\ a=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Então, } P(x) = (x^2 + 1) \times \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Proposta 35

35.1. Conjunto dos divisores do termo independente do polinômio: $D = \{-1, 1, -2, 2\}$.

As raízes inteiras do polinômio pertencem ao conjunto D .

$$P(-1) = -(-1)^{2n+1} + 2 \times (-1)^{2n} + (-1) - 2 = -(-1) + 2 \times 1 - 1 - 2 = 0;$$

$$P(1) = -1^{2n+1} + 2 \times 1^{2n} + 1 - 2 = -1 + 2 \times 1 + 1 - 2 = 0;$$

$$\begin{aligned} P(-2) &= -(-2)^{2n+1} + 2 \times (-2)^{2n} + (-2) - 2 = \\ &= -(-1)^{2n+1} \times 2^{2n+1} + 2 \times (-1)^{2n} \times 2^{2n} - 4 = \\ &= -(-1) \times 2^{2n} \times 2 + 2 \times 1 \times 2^{2n} - 4 = 2^{2n} \times 2 + 2 \times 2^{2n} - 4 = \\ &= 4 \times 2^{2n} - 4 \neq 0; \end{aligned}$$

$$P(2) = -2^{2n+1} + 2 \times 2^{2n} + 2 - 2 = -2^{2n} \times 2 + 2 \times 2^{2n} = 0.$$

Logo, -1, 1 e 2 são as raízes inteiras de $P(x)$.

$$\begin{aligned} 35.2. P(x) &= -x^{2n+1} + 2x^{2n} + x - 2 = -x^{2n} \times x + 2x^{2n} + x - 2 = \\ &= -x^{2n}(x-2) + x - 2 = (x-2)(-x^{2n} + 1) = (x-2)(1^2 - (x^n)^2) = \\ &= (x-2)(1-x^n)(1+x^n) \end{aligned}$$

Proposta 36

Como $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)(-1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

$\forall x \in \mathbb{R}, -1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, conclui-se que

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$$P(x)(x^4 - 3x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 < 0, \text{ porque}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinômio $x^4 - 3x^2 - 4$.

Fazendo $x^2 = y$, tem-se:

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$$

Como $y = x^2$, tem-se:

$$x^2 = 4 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$\text{Então, } x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^2 + 1).$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2 + 1) < 0$$

Para resolver a inequação $(x-2)(x+2)(x^2 + 1) < 0$, vamos

construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$(x-2)(x+2)(x^2 + 1)$	+	0	-	0	+

Por observação do quadro, conclui-se que $x \in]-2, 2[$.

Pág. 128

1. Como $(x^2 - 3x) \times T(x)$ é um polinômio de grau 5 e $x^2 - 3x$ é um polinômio de grau 2, então o polinômio $T(x)$ tem grau 3 $(5-2)$.

Como $P(x)T(x)$ é um polinômio de grau 7 e $T(x)$ é um polinômio de grau 3, então o polinômio $P(x)$ tem grau 4 $(7-3)$.

A opção correta é a (C).

2. Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinómios, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+0x^2-3x+1 & x^2+x \\ -2x^3-2x^2 & 2x-2 \\ \hline & -2x^2-3x+1 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & -x+1 \end{array}$$

Então, $R(x) = -x + 1$.

A opção correta é a (B).

3. Como $(P(x))^2 = P(x) \times P(x)$ e $P(x)$ é um polinómio de grau n , então $(P(x))^2$ é um polinómio de grau $n+n$, ou seja, $2n$.

Sendo $x^2 - 8$ um polinômio de grau 8 e $(P(x))^2$ um polinômio de grau $2n$, então $T(x) = (x^8 - 1)(P(x))^2$ é um polinômio de grau $8 + 2n$.

Assim sendo, $T(x)$ é um polinómio de grau par, superior a 8.

Logo, das quatro opções de resposta só 18 pode corresponder ao grau do polinómio $T(x)$.

A opção correta é a (D).

4. Começemos por determinar os zeros do polinómio $x^2 - x - 2$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

Portanto, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^3(x-2)^2(x^2-x-2) = \\ &= (x-1)^3(x-2)^2(x-2)(x+1) = (x-1)^3(x-2)^3(x+1) \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que 1 e -2 são raízes de $P(x)$ de multiplicidade 3 e -1 é uma raiz simples (de multiplicidade 1) de $P(x)$.

A opção correta é a (C).

5. $P(x)$ é divisível por $x+1$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ for igual a 0, ou seja, se $P(-1)=0$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 0 \Leftrightarrow 2 \times (-1)^4 - 3a \times (-1)^3 + 2a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \times 1 - 3a \times (-1) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2 + 3a + 2a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow a = -0,4 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

6. Seja $P(x)$ o polinómio que satisfaz as condições exigidas.

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x-1) \times (x+2)^2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ P(-1) &= 4 \Leftrightarrow a(-1-1)(-1+2)^2 = 4 \Leftrightarrow a \times (-2) \times 1 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2a = 4 \Leftrightarrow a = -2 \end{aligned}$$

Portanto, $P(0) = -2(0-1) \times (0+2)^2 = 2 \times 4 = 8$.

A opção correta é a (C).

Pág. 129

1.1. Como na divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ o quociente é $Q(x)$ e o resto é $R(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) \\ 2x^3 - 3x^2 + x - 1 &= B(x) \times (2x + 1) + 3x - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + x - 1 - 3x + 1 &= B(x) \times (2x + 1) \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x &= B(x) \times (2x + 1) \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x}{2x + 1} = B(x) \end{aligned}$$

Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinómios, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 2x + 0 & 2x + 1 \\ -2x^3 - x^2 & 2x - 2 \\ \hline & -4x^2 - 2x + 0 \\ & 4x^2 + 2x \\ \hline & 0 \end{array}$$

$B(x)$ é o quociente da divisão de $2x^3 - 3x^2 - 2x$ por $2x + 1$, ou seja, $B(x) = x^2 - 2x$.

1.2. O quociente da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por $R(x)$ é $2x^3 - 6x + 3$, logo tem-se:

$P(x) = (3x - 1) \times (2x^3 - 6x + 3) + R_1(x)$, sendo $R_1(x)$ o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $R(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Ora, } P(x) &= (3x-1) \times (2x^3 - 6x + 3) + R_1(x) = \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \times (2x^3 - 6x + 3) + R_1(x) = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}\right) \times [3 \times (2x^3 - 6x + 3)] + R_1(x) = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}\right) \times (6x^3 - 18x + 9) + R_1(x)\end{aligned}$$

Assim sendo, o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x - \frac{1}{3}$ é $6x^3 - 18x + 9$.

2.1. Aplicando a regra de Ruffini, vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $Q(x)$ por $x-3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & & -3 & -12 & -24 \\ \hline & -1 & -4 & -8 & -20 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = -x^2 - 4x - 8$

Resto: $R(x) = -20$

2.2. Vamos começar por determinar as raízes do polinómio $P(x)$.

$$P(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$$

Temos, agora, de descobrir qual das raízes é comum a $Q(x)$.

$$Q(-2)=-(-2)^3-(-2)^2+4\times(-2)+4=8-4-8+4=0$$

Logo, -2 é raiz comum aos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

Em seguida, vamos decompor em fatores o polinômio $Q(x)$.

Sendo -2 uma raiz do polinômio $Q(x)$, então $Q(x)$ é divisível

por $x+2$.

Aplicando a regra de Ruffini determina-se o quociente da divisão de $Q(x)$ por $x+2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Então, o quociente da divisão de $Q(x)$ por $x+2$ é $-x^2+x+2$.

$$Q(x)=(x+2)\times(-x^2+x+2)$$

Seguidamente vamos determinar as raízes do polinômio

$$-x^2+x+2.$$

$$-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$$

Assim, tem-se: $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)=(x+1)(-x+2)$ e

$$Q(x)=(x+2)(x+1)(-x+2).$$

$$Q(x)\leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(-x+2)\leq 0$$

Para resolver a inequação $Q(x)\leq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$-x+2$	+	+	+	+	+	0	-
$Q(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Por observação do quadro, conclui-se que $Q(x)\leq 0$

$$\Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[2,+\infty[.$$

3.1. Tendo em atenção a resolução apresentada no quadro, conclui-se que $P(x)$ é um polinômio de grau 4, sendo 1, -1 , -7 , 13 e -6 os coeficientes dos termos de grau 4, 3, 2, 1 e 0, respetivamente.

$$\text{Então, } P(x)=x^4-x^3-7x^2+13x-6.$$

3.2. Atendendo à regra de Ruffini apresentada no quadro, tem-se: $P(x)=(x-1)(x-1)(x-2)(x+3)$.

$$\mathbf{3.3.} \quad P(x)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-2)(x+3)\leq 0$$

Para resolver a inequação $P(x)\leq 0$, vamos construir uma tabela onde é apresentado o estudo do sinal de cada um dos fatores e do produto.

	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por observação do quadro, conclui-se que $P(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-3,2]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{4.1.} \quad P(-1) &= 2\times(-1)^4 - (-1)^3 + a\times(-1)^2 + a\times(-1) - 6 = \\ &= 2+1+a-a-6 = -4 \end{aligned}$$

Como $P(-1)\neq 0$, conclui-se que, independentemente do valor de a , -1 não é raiz de $P(x)$.

Portanto, $P(x)$ não é divisível por $x+1$.

4.2. $P(x)$ é divisível por $x-a$ se e só se $P(a)=0$.

$$P(a)=0 \Leftrightarrow 2a^4-a^3+a\times a^2+a\times a-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^4-a^3+a^3+a^2-6=0 \Leftrightarrow 2a^4+a^2-6=0$$

Fazendo $a^2=y$, tem-se:

$$2y^2+y-6=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{2} \vee y=-2$$

Como $y=a^2$, tem-se:

$$a^2=\frac{3}{2} \vee \underset{\text{equação impossível}}{a^2=-2}$$

$$\Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{3}{2}} \vee a=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vee a=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \vee a=-\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{6}}{2} \vee a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Pág. 134

1.1. Atendendo a que as coordenadas do ponto A são $(1, 1)$,

conclui-se que: $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $D(1, -2)$.

1.2. Como $[ACDE]$ é um quadrado, conclui-se que o ponto E tem coordenadas $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$2. \overline{OD} = \overline{OC} = \overline{OB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ e } \overline{OE} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Então, tem-se: $A(1, 2)$, $B(1, 1)$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $D(0, \sqrt{2})$,

$E(\sqrt{2}, -1)$, $F(-1, -1)$, $G(\sqrt{3}, 0)$ e $H(\sqrt{3}, 1)$.

Pág. 135

3. Por observação da figura, sabe-se que:

- os pontos A e F têm abscissa e ordenada positiva pois pertencem ao 1.º Q;
 - a ordenada do ponto A é superior à ordenada do ponto F ;
 - o ponto G tem abscissa nula pois pertence ao eixo das ordenadas;
 - o ponto H tem ordenada nula pois pertence ao eixo das abscissas;
 - o ponto B tem abscissa negativa e ordenada positiva pois pertence ao 2.º Q;
 - o ponto C tem abscissa negativa e ordenada negativa pois pertence ao 3.º Q;
 - os pontos D e E têm abscissa positiva e ordenada negativa pois pertencem ao 4.º Q;
 - a ordenada do ponto E é inferior à ordenada do ponto D .
- Assim sendo, conclui-se que: $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, -2)$, $D(2, -1)$, $E(2, -2)$, $F(4, 2)$, $G(0, 3)$ e $H(-3, 0)$.

4.1. O ponto A situa-se no 4.º Q porque a sua abscissa é positiva e a sua ordenada é negativa.

4.2. O ponto B situa-se no 3.º Q porque a sua abscissa e a sua ordenada são negativas.

4.3. O ponto C situa-se no 2.º Q porque a sua abscissa é negativa e a sua ordenada é positiva.

4.4. O ponto D situa-se no 4.º Q porque a sua abscissa é positiva e a sua ordenada é negativa.

4.5. O ponto E situa-se no 3.º Q porque a sua abscissa e a sua ordenada são negativas.

4.6. O ponto F situa-se no 1.º Q porque a sua abscissa e a sua ordenada são positivas.

$$5.1. P \in 2.º Q \Leftrightarrow k + 5 < 0 \wedge m - 3 > 0 \Leftrightarrow k < -5 \wedge m > 3.$$

$$5.2. R \in 4.º Q \Leftrightarrow k^2 > 0 \wedge 1 + 2k < 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k < -\frac{1}{2}$$

$$5.3. S \in 3.º Q \Leftrightarrow \frac{m}{2} + 3 < 0 \wedge \underbrace{-4 - k^2 < 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow m < -6 \wedge k \in \mathbb{R}$$

Pág. 136

6. Sabe-se que uma reta vertical é definida por uma equação do tipo $x = a$ e uma reta horizontal é definida por uma equação do tipo $y = b$.

Então a correspondência entre as retas e as equações é a seguinte:

$x = 2 \rightarrow$ reta v ; $x = \pi \rightarrow$ reta p ; $y = 2 \rightarrow$ reta s ; $x = -2 \rightarrow$ reta t ;
 $y = 0 \rightarrow$ eixo Ox ; $x = -1 \rightarrow$ reta u ; $y = \pi \rightarrow$ reta r ;
 $x = 0 \rightarrow$ eixo Oy .

7.1. A reta que passa por F e é paralela ao eixo Ox é definida pela equação $y = 2$.

7.2. A reta que passa por F e é paralela ao eixo Oy é definida pela equação $x = -4$.

8.1.

a) Os pontos A e D situam-se sobre uma reta paralela ao eixo Ox porque têm a mesma ordenada.

b) Os pontos B e C situam-se sobre uma reta paralela ao eixo Oy porque têm a mesma abscissa.

8.2.

a) A reta que passa por C e é paralela ao eixo das abscissas é definida pela equação $y = 4$.

O ponto P pertence à reta que passa por C e é paralela ao eixo das abscissas se e só se $5k - 6 = 4$.

$$5k - 6 = 4 \Leftrightarrow 5k = 10 \Leftrightarrow k = 2$$

b) A reta que passa por A e é paralela ao eixo das ordenadas é definida pela equação $x = -5$.

O ponto P pertence à reta que passa por A e é paralela ao eixo das ordenadas se e só se $1 + 4k = -5$.

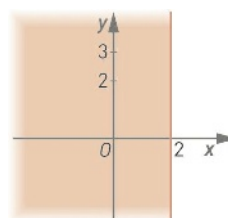
$$1 + 4k = -5 \Leftrightarrow 4k = -6 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

c) O ponto P pertence ao 4.º Q se e só se a sua abscissa é positiva e a sua ordenada é negativa.

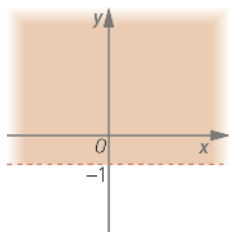
$$1 + 4k > 0 \wedge 5k - 6 < 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{4} \wedge k < \frac{6}{5} \Leftrightarrow k \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{6}{5} \right[$$

Pág. 137

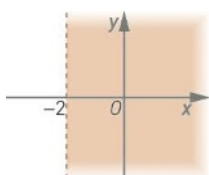
9.1. A representação geométrica do semiplano definido por $\{P(x, y): x \leq 2\}$ é:



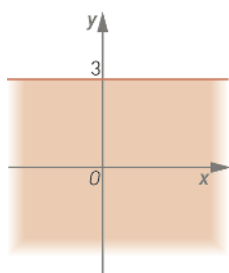
9.2. A representação geométrica do semiplano definido por $\{P(x, y): y > -1\}$ é:



9.3. A representação geométrica do semiplano definido por $\{P(x, y): x > -2\}$ é:



9.4. A representação geométrica do semiplano definido por $\{P(x, y): y \leq 3\}$ é:



10.1. O semiplano representado é definido pela inequação $x \geq -1$.

10.2. O semiplano representado é definido pela inequação $y \geq -1$.

10.3. A diagonal do retângulo representado tem de comprimento $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
Então, o semiplano representado é definido pela inequação $x > \sqrt{13}$.

Pág. 138

11.1. A afirmação é verdadeira porque a abscissa do ponto A verifica a condição $x \geq 4$, ou seja, porque a proposição $5 \geq 4$ é verdadeira.

11.2. A afirmação é falsa porque a ordenada do ponto A não verifica a condição $y < -1$, ou seja, porque a proposição $-1 < -1$ é falsa.

11.3. A afirmação é falsa porque, por exemplo, o ponto de coordenadas $(0, 3)$ pertence à reta $y = 3$ mas não pertence ao semiplano $x > 1$.

11.4. A afirmação é verdadeira porque qualquer ponto da reta $x = 2$ pertence ao semiplano $x > 1$.

12.1. A reta que passa por $A\left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$ e é paralela ao eixo das abscissas é definida pela equação $y = \sqrt{3}$.

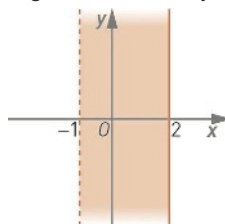
O ponto P pertence à reta que passa por A e é paralela ao eixo das abscissas se e só se $k = \sqrt{3}$.

12.2. Atendendo aos dados da figura, sabe-se que $\overline{OC} = \overline{OB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

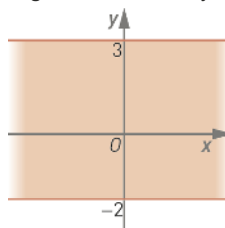
A região sombreada da figura é definida pela inequação $y \leq -\sqrt{5}$.
O ponto P pertence à região sombreada da figura se e só se $k \leq -\sqrt{5}$.

Pág. 139

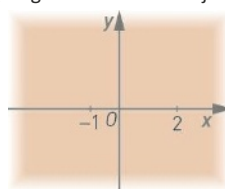
13.1. A representação geométrica do conjunto $A \cap B$ é:



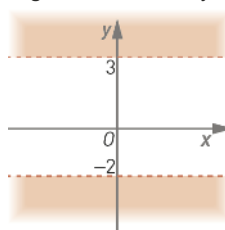
13.2. A representação geométrica do conjunto C é:



13.3. A representação geométrica do conjunto $A \cup B$ é:

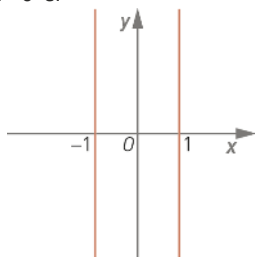


13.4. A representação geométrica do conjunto $\bar{C}$ é:



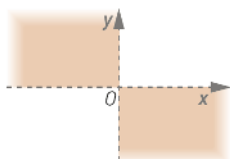
14.1. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $x^2 - 1 = 0$ é:



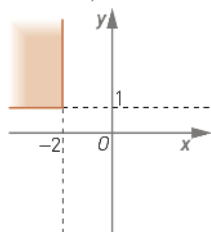
14.2. $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $xy < 0$ é:



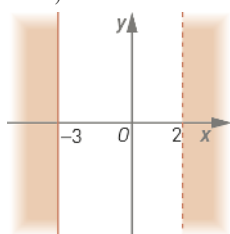
14.3. $\sim(y < 1 \vee x > -2) \Leftrightarrow y \geq 1 \wedge x \leq -2$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $\sim(y < 1 \vee x > -2)$ é:



14.4. $\sim(-3 < x \leq 2) \Leftrightarrow \sim(x > -3 \wedge x \leq 2) \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x > 2$

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido por $\sim(-3 < x \leq 2)$ é:



15.1. O conjunto de pontos assinalados no referencial é definido pela condição $-2 \leq y < 3$.

15.2. O conjunto de pontos assinalados no referencial é definido pela condição $0 < x \leq 2$.

15.3. O conjunto de pontos assinalados no referencial é definido pela condição $-4 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 2$.

15.4. O conjunto de pontos assinalados no referencial é definido pela condição $y = 2 \wedge -1 \leq x < 3$.

Tarefa 1

1.1. As coordenadas dos pontos que correspondem a locais de interesse público são:

$$H(-1,4), P(1,3), M(-1,-2), E(3,3) \text{ e } C(4,1).$$

1.2. O conjunto dos pontos que pertencem à linha do Metro é definido pela condição $y = -2$.

1.3.

a) A reta representativa da rua que passa pela Polícia e pela Escola é definida pela condição $y = 3$.

b) A reta representativa da rua que passa pelo Hospital e pela Estação de Metro é definida pela condição $x = -1$.

1.4. $\overline{PC} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$

Como cada unidade corresponde a 100 metros, conclui-se que o comprimento mínimo do cabo é, aproximadamente, igual a 361 m.

1.5.

a) O conjunto dos pontos situados a norte do Hospital é representado pela condição $y > 4$.

b) O conjunto dos pontos situados a sul da Escola é representado pela condição $y < 3$.

c) O conjunto dos pontos situados a este da Polícia é representado pela condição $x > 1$.

Pág. 140

16.1. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3,5)$ sobre o eixo Ox são $(-3,0)$.

16.2. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3,5)$ sobre o eixo Oy são $(0,5)$.

16.3. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3,5)$ sobre a reta $x = 2$ são $(2,5)$.

16.4. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3,5)$ sobre a reta $y = -1$ são $(-3,-1)$.

17.1. A projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(8,0)$.

Então, o ponto B é a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox se e só se $k + 5 = 8 \wedge k^2 - 9 = 0$.

$$k + 5 = 8 \wedge k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow k = 3 \wedge k^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 3 \wedge (k = 3 \vee k = -3) \Leftrightarrow k = 3$$

17.2. A projeção ortogonal de A sobre o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0,16)$.

Então, o ponto B é a projeção ortogonal de A sobre o eixo Oy se e só se $k + 5 = 0 \wedge k^2 - 9 = 16$.

$$k + 5 = 0 \wedge k^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow k = -5 \wedge k^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -5 \wedge (k = 5 \vee k = -5) \Leftrightarrow k = -5$$

18.1. A projeção ortogonal do segmento de reta $[AB]$ sobre a reta $y=1$ é o segmento de reta definido pela condição $y=1 \wedge -1 \leq x \leq 2$.

18.2. A projeção ortogonal do segmento de reta $[AB]$ sobre o eixo das ordenadas é o segmento de reta definido pela condição $x=0 \wedge 2 \leq y \leq 5$.

Tarefa 2

1.1. a) A projeção ortogonal do ponto $P(4, -2)$ sobre o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(4, 0)$.

b) A projeção ortogonal do ponto $P(4, -2)$ sobre o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0, -2)$.

1.2. a) A projeção ortogonal do ponto $G(-1, 0)$ sobre o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

b) A projeção ortogonal do ponto $G(-1, 0)$ sobre o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

c) A projeção ortogonal do ponto $G(-1, 0)$ sobre a reta $y=4$ é o ponto de coordenadas $(-1, 4)$.

d) A projeção ortogonal do ponto $G(-1, 0)$ sobre a reta $x=-3$ é o ponto de coordenadas $(-3, 0)$.

1.3. a) A projeção ortogonal de $[BC]$ sobre o eixo Ox é definida por $y=0 \wedge 2 \leq x \leq 4$.

b) A projeção ortogonal do triângulo $[ABC]$ sobre o eixo Ox é definida por $y=0 \wedge 2 \leq x \leq 4$.

c) A projeção ortogonal do quadrilátero $[DEFG]$ sobre o eixo Oy é definida por $x=0 \wedge -2 \leq y \leq 2$.

Pág. 142

19.1. As coordenadas dos vértices da caixa são:

$A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $D(0, 4, 4)$, $E(0, 0, 4)$, $F(4, 0, 4)$ e $G(4, 4, 4)$.

19.2. As coordenadas dos vértices do polígono correspondente à planificação da caixa são:

$(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(4, 4, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(4, -4, 0)$, $(0, -4, 0)$, $(-4, 0, 0)$, $(-4, 4, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(4, 8, 0)$, $(12, 4, 0)$ e $(12, 0, 0)$.

Pág. 143

20.1. Para construir a torre foram necessários 14 cubos.

20.2. $A(3, 0, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(0, 2, 2)$, $D(1, 1, 3)$, $E(3, 3, 1)$ e $F(1, 2, 2)$.

21. Seja a a aresta de cada um dos cubos.

$$V = 27 \Leftrightarrow a^3 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow a = 3.$$

As coordenadas dos pontos assinalados na figura são:

$A(0, 3, 0)$, $B(-3, 0, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $D(-3, 3, 3)$, $E(3, -3, 3)$, $F(3, -3, 0)$, $G(6, -3, -3)$, $H(3, 3, -3)$ e $I(3, 6, 0)$.

Pág. 145

22.1. $A \in 2.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow k-1 < 0 \wedge 2 > 0 \wedge k > 0 \Leftrightarrow k < 1 \wedge k > 0 \Leftrightarrow k \in]0, 1[$

22.2. $B \in 6.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow -5 < 0 \wedge 2 - k > 0 \wedge k < 0 \Leftrightarrow k < 2 \wedge k < 0 \Leftrightarrow k < 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, 0[$

22.3. $B \in 7.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow -5 < 0 \wedge 2 - k < 0 \wedge k < 0 \Leftrightarrow \underbrace{k > 2 \wedge k < 0}_{\text{condição impossível}} \Leftrightarrow k \in \{ \}$

23.1.

a) Os pontos que pertencem ao plano yOz são O , C , D , G , H e N (pois têm abscissa nula).

b) Os pontos que pertencem ao plano xOy são O , M e N (pois têm cota nula).

c) Os pontos que pertencem ao plano xOz são O e M (pois têm ordenada nula).

23.2.

a) O vértice E situa-se no $4.^\circ$ octante pois tem abscissa e cota positivas e ordenada negativa.

b) O vértice D situa-se no $8.^\circ$ octante pois tem abscissa positiva e ordenada e cota negativas.

23.3. Como o vértice A se situa no $8.^\circ$ octante, sabe-se que A tem abscissa positiva e ordenada e cota negativas. Então as coordenadas do ponto A podem corresponder à situação III: $(3, -1, -2)$.

Pág. 146

24. Sabe-se que as coordenadas do ponto A são $(3, 0, 3)$, logo os cubos têm aresta igual a 3.

Portanto, conclui-se que $B(-3, 3, 3)$, $C(-3, -3, 6)$ e $D(3, 3, 0)$.

25.1. As coordenadas da projeção ortogonal de $P(3, -5, 2)$ sobre xOy são $(3, -5, 0)$.

25.2. As coordenadas da projeção ortogonal de $Q(-1, 2, 4)$ sobre xOz são $(-1, 0, 4)$.

25.3. As coordenadas da projeção ortogonal de $T(-2, 1, -6)$ sobre yOz são $(0, 1, -6)$.

25.4. As coordenadas da projeção ortogonal de $P(3, -5, 2)$ sobre xOz são $(3, 0, 2)$.

25.5. As coordenadas da projeção ortogonal de $T(-2, 1, -6)$ sobre xOy são $(-2, 1, 0)$.

25.6. As coordenadas da projeção ortogonal de $Q(-1, 2, 4)$ sobre yOz são $(0, 2, 4)$.

Tarefa 3

1.1. Em relação à situação I, as coordenadas dos vértices do cubo são: $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $E(0, 0, 4)$, $F(4, 0, 4)$, $G(4, 4, 4)$ e $H(0, 4, 4)$.

1.2. Em relação à situação II, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$A(2, -2, -2)$, $B(2, 2, -2)$, $C(-2, -2, -2)$, $D(-2, -2, 2)$, $E(-2, 2, 2)$, $F(2, -2, 2)$, $G(2, 2, 2)$ e $H(-2, 2, 2)$.

1.3. O triângulo $[AOB]$ é retângulo em O , então sabe-se que $(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2$.

Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, tem-se:

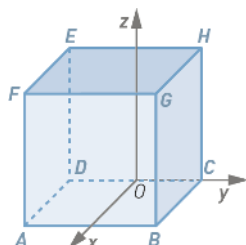
$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2 \Leftrightarrow 2(\overline{OA})^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\overline{OA})^2 = 8$$

Donde se conclui que $\overline{OA} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Então, em relação à situação III, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $C(-2\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -2\sqrt{2}, 0)$, $E(0, -2\sqrt{2}, 4)$, $F(2\sqrt{2}, 0, 4)$, $G(0, 2\sqrt{2}, 4)$ e $H(-2\sqrt{2}, 0, 4)$.

2.1. Atendendo às condições, o referencial aplicado foi o seguinte:



Nota: A origem do referencial coincide com o ponto médio de $[CD]$.

2.2. As coordenadas dos restantes vértices do cubo no referencial considerado são:

$B(4, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, -2, 0)$, $E(0, -2, 4)$, $F(4, -2, 4)$ e $G(4, 2, 4)$.

Pág. 147

26.1. As coordenadas dos vértices do cubo são:

$A(3, 0, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $D(0, 3, 3)$, $E(0, 0, 3)$, $F(3, 0, 3)$ e $G(3, 3, 3)$.

26.2.

a) Os vértices A , B , C e O pertencem ao plano xOy porque têm cota nula.

b) Os vértices C , D , E e O pertencem ao plano yOz porque têm abscissa nula.

c) Os vértices A , O , E e F pertencem ao plano xOz porque têm ordenada nula.

26.3.

a) Por exemplo, os pontos de coordenadas $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$ e $(3, 0, 5; 2, 8)$ não são vértices do cubo e pertencem à face $[ABGF]$.

b) Por exemplo, os pontos de coordenadas $(2, 3, 2)$, $(1, 3, 0)$ e $(0, 3, 1)$ não são vértices do cubo e pertencem à face $[BCDG]$.

c) Por exemplo, os pontos de coordenadas $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 3)$ e $(2, 2, 3)$ não são vértices do cubo e pertencem à face $[FGDE]$.

26.4. Todos os pontos da face $[OABC]$ têm cota 0 e todos os pontos da face $[EFGD]$ têm cota 3.

Todos os pontos da face $[ABGF]$ têm abscissa 3 e todos os pontos da face $[OCDE]$ têm abscissa 0.

Todos os pontos da face $[OAFE]$ têm ordenada 0 e todos os pontos da face $[BCDG]$ têm ordenada 3.

Pág. 149

27.1.

a) As coordenadas dos vértices assinalados na figura são: $A(0, -2, 3)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(1, 3, 0)$, $D(2, -1, 0)$ e $E(0, -2, 1)$.

b) O segmento de reta $[AE]$ é definido pela condição $x = 0 \wedge y = -2 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

c) O plano que passa em B e é paralelo a xOy é definido pela equação $z = 2$.

d) A reta que passa em E e é paralela a Ox é definida pelo sistema de equações $y = -2 \wedge z = 1$.

27.2.

a) A reta que passa em $C(1, 4, -1)$ e é paralela a Oy é definida pelo sistema de equações $x = 1 \wedge z = -1$.

b) A reta que passa em $A(0, -2, 3)$ e é paralela a Ox é definida pelo sistema de equações $y = -1 \wedge z = 2$.

28.1. O vértice A pertence ao eixo Ox , logo tem ordenada e cota nulas.

$[ABCD]$ é um quadrado porque a pirâmide é quadrangular regular.

Como o perímetro da base é 24, conclui-se que $\overline{AB} = \frac{24}{4} = 6$.

O triângulo $[AOB]$ é retângulo em O , então sabe-se que

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2.$$

Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, tem-se:

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2 \Leftrightarrow 2(\overline{OA})^2 = 6^2 \Leftrightarrow (\overline{OA})^2 = 18$$

Donde se conclui que $\overline{OA} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Assim sendo, o vértice A tem abscissa igual a $3\sqrt{2}$.

Então, as coordenadas do vértice A são $(3\sqrt{2}, 0, 0)$.

28.2. As coordenadas dos restantes vértices do sólido são:

$B(0, 3\sqrt{2}, 0)$, $C(-3\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -3\sqrt{2}, 0)$, $E(0, -3\sqrt{2}, -4)$,

$F(3\sqrt{2}, 0, -4)$, $G(0, 3\sqrt{2}, -4)$ e $H(-3\sqrt{2}, 0, -4)$.

28.3. O quadrilátero $[AFHC]$ é definido pela condição

$$y = 0 \wedge -3\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2} \wedge -4 \leq z \leq 0.$$

Tarefa 4

1.1. As coordenadas dos vértices do cubo são:

$A(0, 0, 3)$, $B(0, -2, 3)$, $C(2, -2, 3)$, $D(2, 0, 3)$, $E(2, 0, 1)$,

$F(0, 0, 1)$, $G(0, -2, 1)$ e $H(2, -2, 1)$.

1.2.

a) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[ADEF]$.

b) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(1, -1, 3)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[ABCD]$.

c) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(1, -2, 2)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[BCHG]$.

d) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(0, -1, 2)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[ABGF]$.

e) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(1, -1, 1)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[EFGH]$.

f) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, -1, 2)$ não pertence a qualquer aresta do cubo e pertence à face $[CDEH]$.

1.3.

a) A face $[ADEF]$ é definida pela condição $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

Logo, o ponto de coordenadas $(k, 0, 2)$ pertence à face $[ADEF]$ se e só se $0 \leq k \leq 2$, ou seja, $k \in [0, 2]$.

b) O cubo é definido pela condição $0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

Logo, o ponto de coordenadas $\left(1, -\frac{3}{2}, k\right)$ pertence ao cubo se e

só se $1 \leq k \leq 3$, ou seja, $k \in [1, 3]$.

c) O cubo é definido pela condição $0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

Logo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, k, \sqrt{2}\right)$ pertence ao cubo se e

só se $-2 \leq k \leq 0$, ou seja, $k \in [-2, 0]$.

d) A face $[BCHG]$ é definida pela condição $y = -2 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

Logo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, k, \sqrt{2}\right)$ pertence à face

$[BCHG]$ se e só se $k = -2$.

1.4. $AB: x = 0 \wedge z = 3$; $CD: x = 2 \wedge z = 3$; $EH: x = 2 \wedge z = 1$;

$FG: x = 0 \wedge z = 1$; $AF: x = 0 \wedge y = 0$; $BG: x = 0 \wedge y = -2$;

$CH: x = 2 \wedge y = -2$; $DE: x = 2 \wedge y = 0$; $AD: y = 0 \wedge z = 3$;

$BC: y = -2 \wedge z = 3$; $GH: y = -2 \wedge z = 1$; $EF: y = 0 \wedge z = 1$.

1.5.

a) O cubo é definido pela condição

$0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$ e a reta EH é definida pela condição $x = 2 \wedge z = 1$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, 1, 1)$ não pertence ao cubo mas pertence à reta EH .

b) O cubo é definido pela condição

$0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$ e a reta BG é definida pela condição $x = 0 \wedge y = -2$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $(0, -2, 4)$ não pertence ao cubo mas pertence à reta BG .

c) O cubo é definido pela condição

$0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$ e a reta BC é definida pela condição $y = -2 \wedge z = 3$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $(-1, -2, 3)$ não pertence ao cubo mas pertence à reta BC .

1.6.

a) A face $[ABCD]$ é definida pela condição

$z = 3 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0$.

b) A face $[CDEH]$ é definida pela condição

$x = 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

c) A aresta $[GH]$ é definida pela condição

$y = -2 \wedge z = 1 \wedge 0 \leq x \leq 2$.

d) A aresta $[ED]$ é definida pela condição $x = 2 \wedge y = 0 \wedge 1 \leq z \leq 3$.

Pág. 151

Proposta 1

1.1. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , então sabe-se que

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2.$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$, tem-se:

$$(\overline{AC})^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 8$$

Donde se conclui que $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Assim sendo, tem-se que $B(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $C(0, 1 + 2\sqrt{2})$ e

$$D(-\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

1.2. O triângulo $[AOD]$ é retângulo em O , então sabe-se que

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{OD})^2.$$

Como $\overline{OA} = 1$ e $\overline{AD} = 2$, tem-se:

$$2^2 = 1^2 + (\overline{OD})^2 \Leftrightarrow (\overline{OD})^2 = 3$$

Donde se conclui que $\overline{OD} = \sqrt{3}$.

Assim sendo, tem-se que $B(1 + \sqrt{3}, 1)$, $C(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ e

$$D(0, \sqrt{3}).$$

Proposta 2

2.1. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

Sabe-se ainda que $\overline{AB} = 6 - 2 = 4$.

Designemos por h a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao vértice C .

Então, tem-se $4^2 = 2^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 12$.

Donde se conclui que $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Assim sendo, as coordenadas do vértice C são $(4, 1 + 2\sqrt{3})$.

2.2.

a) A reta AB é definida pela equação $y = 1$.

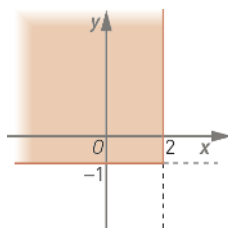
b) A reta r que passa em B e é paralela a Oy é definida pela equação $x = 6$.

c) A reta s que passa em C e é paralela a AB é definida pela equação $y = 1 + 2\sqrt{3}$.

Proposta 3

3.1. A representação geométrica do conjunto de pontos

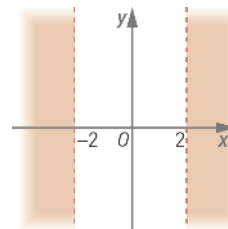
$$\{P(x, y): x \leq 2 \wedge y \geq -1\} \text{ é:}$$



$$3.2. |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

A representação geométrica do conjunto de pontos

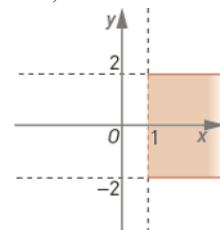
$$\{P(x, y): |x| > 2\} \text{ é:}$$



$$3.3. |y| \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 2 \wedge y \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$$

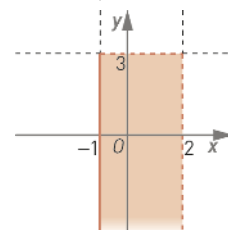
A representação geométrica do conjunto de pontos

$$\{P(x, y): |y| \leq 2 \wedge x > 1\} \text{ é:}$$



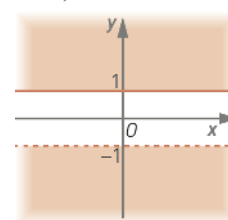
3.4. A representação geométrica do conjunto de pontos

$$\{P(x, y): y < 3 \wedge -1 \leq x < 2\} \text{ é:}$$



3.5. A representação geométrica do conjunto de pontos

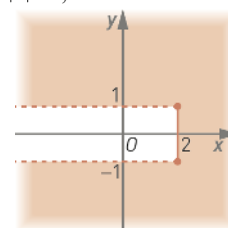
$$\{P(x, y): y \geq 1 \vee y < -1\} \text{ é:}$$



$$3.6. |y| > 1 \Leftrightarrow y > 1 \vee y < -1$$

A representação geométrica do conjunto de pontos

$$\{P(x, y): x \geq 2 \vee |y| > 1\} \text{ é:}$$



Proposta 4

4.1. O conjunto de pontos representado no referencial é definido pela condição $x \geq -2 \wedge y \leq 3$.

4.2. O conjunto de pontos representado no referencial é definido pela condição $x < -2 \vee y > 3$.

4.3. O conjunto de pontos representado no referencial é definido pela seguinte condição: $-2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 3$.

Proposta 5

5.1.

a) O lado $[AB]$ é definido pela condição $y = 1 \wedge -4 \leq x \leq 2$.

b) O lado $[BC]$ é definido pela condição $x = -4 \wedge -2 \leq y \leq 1$.

5.2.

a) Como a reta r passa na origem, a sua equação é do tipo $y = mx$.

O ponto $A(2, 1)$ pertence à reta r , logo tem-se

$$1 = m \times 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Então, a reta r pode ser definida pela equação $y = \frac{1}{2}x$.

b) O lado $[AC]$ é definido pela condição $y = \frac{1}{2}x \wedge -4 \leq x \leq 2$.

Proposta 6

6.1.

a) O plano que passa por A e é paralelo a yOz é definido pela equação $x = -3$.

b) O plano que passa por A e é paralelo a $z = \pi$ é definido pela equação $z = -1$.

c) O plano que passa por A e é paralelo a $y + 5 = 0$ é definido pela equação $y = 2$.

6.2.

a) As coordenadas do ponto B' , projeção ortogonal do ponto $B(5, -2, 3)$ sobre o plano xOy , são $(5, -2, 0)$.

b) As coordenadas do ponto B' , projeção ortogonal do ponto $B(5, -2, 3)$ sobre o plano $z = -2$, são $(5, -2, -2)$.

c) As coordenadas do ponto B' , projeção ortogonal do ponto $B(5, -2, 3)$ sobre o plano $x = 1$, são $(1, -2, 3)$.

d) As coordenadas do ponto B' , projeção ortogonal do ponto $B(5, -2, 3)$ sobre o plano $y = 5$, são $(5, 5, 3)$.

6.3.

a) $P \in 2.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow -4 < 0 \wedge 1 - k > 0 \wedge k + 2 > 0 \wedge k > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k < 1 \wedge k > -2 \Leftrightarrow k \in]-2, 1[$

b) $P \in 6.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow -4 < 0 \wedge 1 - k > 0 \wedge k + 2 < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k < 1 \wedge k < -2 \Leftrightarrow k < -2 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -2[$

c) $P \in 3.^\circ \text{ octante} \Leftrightarrow -4 < 0 \wedge 1 - k < 0 \wedge k + 2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k > 1 \wedge k > -2 \Leftrightarrow k > 1 \Leftrightarrow k \in]1, +\infty[$

Proposta 7

7.1.

a) Em relação ao referencial 1, as coordenadas dos pontos assinalados são:

$A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(-1, 1, 2)$, $E(-1, 2, 1)$ e $F(0, 2, 0)$.

b) Em relação ao referencial 2, as coordenadas dos pontos assinalados são:

$A(1, -1, 0)$, $B(2, 0, -1)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(0, 1, 0)$ e $F(1, 1, -1)$.

c) Em relação ao referencial 3, as coordenadas dos pontos assinalados são:

$A(1, -2, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(1, -1, 1)$, $D(0, -1, 2)$, $E(0, 0, 1)$ e $F(1, 0, 0)$.

7.2.

a) Em relação ao referencial 1, o plano ACF é definido pela equação $x = 0$.

b) Em relação ao referencial 1, o plano BCD é definido pela equação $y = 1$.

c) Em relação ao referencial 1, o plano ACE é definido pela equação $z = 1$.

7.3. O referencial relativamente ao qual o plano BCD pode ser definido pela equação $y = -1$ é o 3.

Proposta 8

8.1. As coordenadas dos vértices assinalados na figura são:

$A(1, -1, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(-1, 0, 2)$, $E(1, 1, -1)$ e $F(0, 1, -1)$.

8.2.

a) A aresta $[AB]$ é definida pela condição $x = 1 \wedge z = 1 \wedge -1 \leq y \leq 0$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ não é vértice de qualquer cubo e pertence à aresta $[AB]$.

b) A aresta $[CD]$ é definida pela condição $x = -1 \wedge y = 0 \wedge 1 \leq z \leq 2$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $\left(-1, 0, \frac{3}{2}\right)$ não é vértice de qualquer cubo e pertence à aresta $[CD]$.

c) A aresta $[EF]$ é definida pela condição $y = 1 \wedge z = -1 \wedge 0 \leq x \leq 1$.

Então, por exemplo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{5}, 1, -1\right)$ não é vértice de qualquer cubo e pertence à aresta $[EF]$.

8.3.

a) A reta AB é definida pelo seguinte sistema de equações:
 $x=1 \wedge z=1$.

b) A reta CD é definida pelo seguinte sistema de equações:
 $x=-1 \wedge y=0$.

c) A reta EF é definida pelo seguinte sistema de equações:
 $y=1 \wedge z=-1$.

Proposta 9

9.1. Sendo I o ponto de coordenadas $(0, 0, \sqrt{8})$, então conclui-se

que a medida da aresta do cubo é $\sqrt{8}$.

O triângulo $[AOB]$ é retângulo em O , então sabe-se que

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2.$$

Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, tem-se:

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 = (\overline{AB})^2 \Leftrightarrow 2(\overline{OA})^2 = (\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow (\overline{OA})^2 = 4$$

Donde se conclui que $\overline{OA} = \sqrt{4} = 2$.

Então, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$$A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(2, 0, \sqrt{8}),$$

$$F(0, 2, \sqrt{8}), G(-2, 0, \sqrt{8}) \text{ e } H(0, -2, \sqrt{8}).$$

9.2.

a) O segmento de reta $[BF]$ é definido pela condição
 $x=0 \wedge y=2 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{8}$.

b) O segmento de reta $[EG]$ é definido pela condição
 $y=0 \wedge z=\sqrt{8} \wedge -2 \leq x \leq 2$.

9.3. O ponto $P(|3-k|-5, 0, \sqrt{8})$ pertence ao segmento de reta

$[EG]$ se e só se $-2 \leq |3-k|-5 \leq 2$.

$$-2 \leq |3-k|-5 \leq 2 \Leftrightarrow |3-k|-5 \geq -2 \wedge |3-k|-5 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3-k| \geq 3 \wedge |3-k| \leq 7$$

$$\Leftrightarrow (3-k \geq 3 \vee 3-k \leq -3) \wedge (3-k \leq 7 \wedge 3-k \geq -7)$$

$$\Leftrightarrow (-k \geq 0 \vee -k \leq -6) \wedge (-k \leq 4 \wedge -k \geq -10)$$

$$\Leftrightarrow (k \leq 0 \vee k \geq 6) \wedge (k \geq -4 \wedge k \leq 10) \Leftrightarrow k \in [-4, 0] \cup [6, 10]$$

Então, o conjunto de todos os valores inteiros de k para os quais o ponto P pertence ao segmento de reta $[EG]$ é

$$\{-4, -3, -2, -1, 0, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Pág. 154

Proposta 10

$$\sim (|x-1| > 2 \vee |y-3| > 1) \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \wedge |y-3| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1 \leq 2 \wedge x-1 \geq -2) \wedge (y-3 \leq 1 \wedge y-3 \geq -1)$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 3 \wedge x \geq -1) \wedge (y \leq 4 \wedge y \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 4$$

Assim sendo, conclui-se que as coordenadas dos vértices do retângulo são:

$$A(-1, 2), B(3, 2), C(3, 4) \text{ e } D(-1, 4).$$

Proposta 11

11.1.

a) O ponto D tem a mesma abscissa e a mesma ordenada que o ponto B .

Atendendo às dimensões do reservatório inicial, conclui-se que a cota do ponto D é 40.

Assim sendo, as coordenadas do ponto D são $(60, 80, 40)$.

$$b) V_{\text{liquido}} = 60 \times 40 \times 60 = 144000 \text{ cm}^3$$

Designemos por h a altura do líquido no reservatório colocado na segunda posição.

Então, tem-se: $60 \times 80 \times h = 144000 \Leftrightarrow 4800 \times h = 144000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h = \frac{144000}{4800} \Leftrightarrow h = 30 \text{ cm}.$$

Então, conclui-se que $P(60, 0, 30)$, $Q(60, 80, 30)$, $R(0, 80, 30)$ e $S(0, 0, 30)$.

$$11.2. \overline{AB} \times 10 = 4 \times 10 = 40 \text{ e } \overline{BC} \times 10 = 8 \times 10 = 80.$$

Designemos por h_1 a altura do líquido no reservatório colocado na terceira posição.

Então, tem-se: $40 \times 80 \times h_1 = 144000 \Leftrightarrow 3200 \times h_1 = 144000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h_1 = \frac{144000}{3200} \Leftrightarrow h_1 = 45$$

Como a unidade do referencial corresponde a 10 cm e

$h_1 : 10 = 45 : 10 = 4,5$, conclui-se que a equação do plano JLM é

$$z = 4,5.$$

Então, $J(4; -2; 4,5)$, $L(4; 2; 4,5)$, $M(-4; 2; 4,5)$ e

$$N(-4; -2; 4,5).$$

Pág. 155

$$29. \overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(7-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}.$$

Como $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$, conclui-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A.

Quanto aos lados, o triângulo é isósceles porque $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Pág. 156

$$30.1. \overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}.$$

30.2. A projeção ortogonal do ponto $A(-1,3)$ sobre o eixo Ox é o ponto $A'(-1,0)$.

$$\overline{A'B} = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}.$$

30.3. A projeção ortogonal do ponto $B(2,-3)$ sobre o eixo Oy é o ponto $B'(0,-3)$.

$$\overline{AB'} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}.$$

$$30.4. \overline{A'B'} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

$$31.1. \overline{AD} = \sqrt{(2+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ e}$$

$$\overline{ED} = \sqrt{(-3+1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$P_{[ABCD]} = 4\overline{AD} = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ e } P_{[DEFG]} = 4\overline{ED} = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\text{Ora, } \frac{P_{[ABCD]}}{P_{[DEFG]}} = \frac{12\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donde se conclui que } P_{[ABCD]} = \frac{3}{2} P_{[DEFG]}.$$

31.2. O triângulo $[ADC]$ é retângulo em D, então sabe-se que

$$(\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 = (\overline{AC})^2.$$

Como $\overline{AD} = \overline{DC}$, tem-se:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 36.$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{AC} = \sqrt{36} = 6.$$

De forma análoga se conclui que

$$(\overline{GE})^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow (\overline{GE})^2 = 16, \text{ ou seja, que}$$

$$\overline{GE} = \sqrt{16} = 4.$$

Então, os outros vértices dos quadrados têm as seguintes coordenadas:

$B(-1+6,4)$, $C(2,1+6)$, $F(-1-4,4)$ e $G(-3,6-4)$, ou seja,

$B(5,4)$, $C(2,7)$, $F(-5,4)$ e $G(-3,2)$.

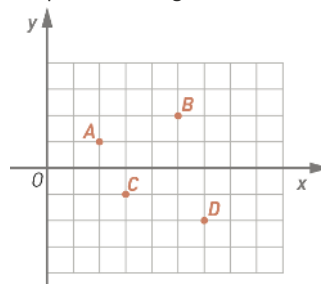
$$31.3. \overline{EC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{26}.$$

$$P_{[ACEG]} = \overline{AC} + \overline{EG} + 2\overline{EC} = 6 + 4 + 2\sqrt{26} = 10 + 2\sqrt{26}$$

(unidades de comprimento).

Tarefa 5

1.1. O referencial aplicado é o seguinte:



1.2. Em relação ao referencial aplicado, sabe-se que $B(5,2)$, $C(3,-1)$ e $D(6,-2)$.

1.3.

$$a) d(A,D) = \sqrt{(2-6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$b) d(B,C) = \sqrt{(5-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Pág. 157

32.1. O perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por:

$$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}.$$

$$P = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} + \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(1-2)^2} = \sqrt{8} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

(unidades de comprimento).

32.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C porque

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2.$$

33.1. Por aplicação do Teorema de Pitágoras tem-se:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = a^2 + b^2.$$

Também por aplicação do Teorema de Pitágoras, se conclui que:

$$(\overline{AH})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CH})^2 \Leftrightarrow (\overline{AH})^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{AH} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

33.2.

a) Relativamente ao referencial aplicado, sabe-se que $A(b,0,0)$ e $H(0,a,c)$.

$$\text{Então, } \overline{AH} = \sqrt{(b-0)^2 + (0-a)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{b^2 + a^2 + c^2}.$$

b) Relativamente ao referencial aplicado, sabe-se que $A(0,-a,-c)$ e $H(-b,0,0)$.

$$\text{Então, } \overline{AH} = \sqrt{(0+b)^2 + (-a-0)^2 + (-c-0)^2} = \sqrt{b^2 + a^2 + c^2}.$$

Pág. 158

34.1.

$$a) \overline{AB} = \sqrt{(-2+1)^2 + (0+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}.$$

$$b) \overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

34.2.

$$a) \overline{AO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13};$$

$$\overline{BO} = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\overline{CO} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Logo, o ponto mais próximo da origem é o B.

b) O ponto mais afastado da origem é o C.

35. Cada uma das faces do tetraedro é um triângulo equilátero.

$$\overline{AD} = \sqrt{(5-8)^2 + (-2-2)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Logo, o perímetro de cada face do tetraedro é dado por:

$$P = 3\overline{AD} = 3 \times 13 = 39 \text{ (unidades de comprimento)}.$$

Pág. 159

36.1. Como $B(3, 6\sqrt{3}, 0)$, conclui-se que $\overline{OB} = 3$ e

$$\overline{AB} = \overline{OC} = 6\sqrt{3}.$$

Seja P a projeção ortogonal de E sobre [AB].

Como as bases do prisma são triângulos equiláteros, então

$$\overline{BE} = 6\sqrt{3}.$$

O triângulo [BEP] é retângulo em P, então sabe-se que

$$(\overline{BE})^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PB})^2.$$

$$(\overline{BE})^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PB})^2 \Leftrightarrow (6\sqrt{3})^2 = (\overline{EP})^2 + (3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 108 = (\overline{EP})^2 + 27 \Leftrightarrow (\overline{EP})^2 = 81.$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{EP} = \sqrt{81} = 9.$$

Então, as coordenadas do ponto E são $(3, 3\sqrt{3}, 9)$.

36.2. $A_{[BCDE]} = \overline{BC} \times \overline{BE} = 3 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (unidades de área).

36.3. $V_{\text{prisma}} = \frac{6\sqrt{3} \times 9}{2} \times 3 = 81\sqrt{3}$ (unidades de volume).

Tarefa 6

1.1. Designemos por ap o apótema da pirâmide. Então, tem-se:

$$a_p^2 = 60^2 + 25^2 \Leftrightarrow a_p^2 = 60^2 + 25^2 \Leftrightarrow a_p^2 = 4225.$$

$$\text{Donde se conclui que } a_p = \sqrt{4225} = 65.$$

Relativamente ao referencial aplicado, sabe-se que a cota do ponto V é 77 (65+12) e que $A(50, 12)$ e $V(25, 77)$.

$$\text{Então, } \overline{AV} = \sqrt{(50-25)^2 + (12-77)^2} = \sqrt{625 + 4225} = \sqrt{4850} = 5\sqrt{194} \text{ cm}.$$

$$1.2. A_{\text{planificação}} = 4 \times \left(50 \times 12 + \frac{50 \times 65}{2} \right) = 4 \times (600 + 1625) = 8900 \text{ cm}^2.$$

2.1. Sabe-se que $A(25, 25, 0)$, $B(-25, 25, 0)$, $C(-25, -25, 0)$, $D(25, -25, 0)$, $E(25, -25, -12)$ e $V(0, 0, 60)$.

2.2.

$$a) \overline{EB} = \sqrt{(25+25)^2 + (-25-25)^2 + (-12-0)^2} = \sqrt{2500 + 2500 + 144} = \sqrt{5144} \text{ cm}.$$

$$b) V_{\text{poliedro}} = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirâmide}} = 50^2 \times 12 + \frac{1}{3} \times 50^2 \times 60 = 30000 + 50000 = 80000 \text{ cm}^3$$

Pág. 161

37.1. Seja M o ponto médio de [AB]. As coordenadas de M são

$$\left(\frac{4+(-1)}{2}, \frac{-2+6}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 2 \right).$$

37.2.

a) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto D.

$$\text{Como C é o ponto médio de [AD], tem-se: } (1, 3) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{4+x}{2} = 1 \\ \frac{-2+y}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $D(-2, 8)$.

b) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto D.

$$\text{Como C é o ponto médio de [BD], tem-se: } (1, 3) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{6+y}{2} \right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 1 \\ \frac{6+y}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $D(3, 0)$.

38. Sejam (x_1, y_1) as coordenadas do ponto B.

Como M é o ponto médio de [CB], tem-se:

$$\left(\frac{3}{2}, 2 \right) = \left(\frac{-2+x_1}{2}, \frac{3+y_1}{2} \right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{-2+x_1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{3+y_1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 1 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $B(5, 1)$.

Sejam (x_2, y_2) as coordenadas do ponto A.

Como N é o ponto médio de [BA], tem-se:

$$\left(1, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5+x_2}{2}, \frac{1+y_2}{2} \right).$$

Daqui resulta que:
$$\begin{cases} \frac{5+x_2}{2} = 1 \\ \frac{1+y_2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $A(-3, 0)$.

Como P é o ponto médio de $[AC]$, as coordenadas de P são

$$\left(\frac{-3+(-2)}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

39.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$. As coordenadas de M são

$$\left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

39.2.

a) Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto D .

Como C é o ponto médio de $[AD]$, tem-se:

$$(1, -1, 2) = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{3+z}{2} \right).$$

Daqui resulta que:
$$\begin{cases} \frac{2+x}{2} = 1 \\ \frac{1+y}{2} = -1 \\ \frac{3+z}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $D(0, -3, 1)$.

b) Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto D .

Como C é o ponto médio de $[BD]$, tem-se:

$$(1, -1, 2) = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{2+z}{2} \right).$$

Daqui resulta que:
$$\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 1 \\ \frac{0+y}{2} = -1 \\ \frac{2+z}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $D(5, -2, 2)$.

Pág. 162

40.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$. As coordenadas de M são

$$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (2, 1).$$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 16x = 32 \Leftrightarrow x = 2$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida pela equação $x = 2$.

40.2. Seja M o ponto médio de $[AC]$. As coordenadas de M são

$$\left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(-2, \frac{5}{2} \right).$$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PC}$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 6y = 15 \Leftrightarrow y = \frac{15}{6} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

Então, a mediatriz de $[AC]$ é definida pela equação $y = \frac{5}{2}$.

40.3. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x-6)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 6y = 16x - 17 \Leftrightarrow y = \frac{16x-17}{6} \Leftrightarrow y = \frac{8}{3}x - \frac{17}{6}$$

Então, a mediatriz de $[BC]$ é definida pela equação $y = \frac{8}{3}x - \frac{17}{6}$.

$$41. \overline{DA} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} \text{ e}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{(5-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}.$$

Como $\overline{DA} = \overline{DC}$, conclui-se que o ponto D pertence à mediatriz de $[AC]$.

$$\overline{BA} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ e}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Como $\overline{BA} \neq \overline{BC}$, conclui-se que o ponto B não pertence à mediatriz de $[AC]$.

42.1. Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$, então C é equidistante de A e B , ou seja, pertence à mediatriz de $[AB]$.

Vamos então começar por determinar uma equação da mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 2y = -8x - 5 \Leftrightarrow y = -4x - \frac{5}{2}$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida pela equação $y = -4x - \frac{5}{2}$.

Em seguida vamos determinar a ordenada do ponto da mediatriz de $[AB]$ que tem abscissa 0.

Se $x = 0$, então $y = -\frac{5}{2}$.

Assim sendo, o ponto C tem coordenadas $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

42.2. Pretende-se determinar a ordenada do ponto da mediatriz de $[AB]$ que tem abscissa -2 .

Se $x = -2$, então $y = -4 \times (-2) - \frac{5}{2} = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$.

Assim sendo, o ponto C tem coordenadas $\left(-2, \frac{11}{2}\right)$.

42.3. Pretende-se determinar a ordenada do ponto da mediatriz de $[AB]$ que tem ordenada -4 .

Se $y = -4$, então $-4 = -4x - \frac{5}{2}$.

$$-4 = -4x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow -8 = -8x - 5 \Leftrightarrow 8x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$$

Assim sendo, o ponto C tem coordenadas $\left(\frac{3}{8}, -4\right)$.

Pág. 164

43.1. $\overline{PA} = \sqrt{(-3+4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$ e

$$\overline{PB} = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Como $\overline{PA} < \overline{PB}$, conclui-se que o ponto P está mais próximo do ponto A do que do B , ou seja, pertence ao semiplano inferior aberto definido pela reta r .

43.2. A reta r é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 6y = -12x - 15 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{5}{2}$$

Então, a reta r é definida pela equação $y = -2x - \frac{5}{2}$.

44.1. Vamos começar por determinar a equação reduzida da mediatriz de $[BC]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 8y = -2x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

Equação reduzida da mediatriz de $[BC]$: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.

Então, o semiplano superior fechado definido pela mediatriz de $[BC]$ é representado pela inequação $y \geq -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.

44.2. Vamos começar por determinar a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 6y = 2x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$$

Equação reduzida da mediatriz de $[AB]$: $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$.

Então, o semiplano inferior aberto definido pela mediatriz de $[AB]$ é representado pela inequação $y < \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$.

44.3. Vamos começar por determinar a equação reduzida da reta BC .

O declive da reta é dado por $m_{BC} = \frac{2-(-2)}{1-0} = 4$ e a ordenada na

origem é -2 .

Equação reduzida da reta BC : $y = 4x - 2$.

Então, o semiplano inferior fechado definido pela reta BC é representado pela inequação $y \leq 4x - 2$.

Tarefa 7

1.1. A reta r é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \text{ Então, tem-se que:}$$

$$(x-0)^2 + (y+3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 10y = -2x - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{5} - \frac{2}{5}$$

Então, a reta r é definida pela equação reduzida $y = -\frac{x}{5} - \frac{2}{5}$.

1.2. O semiplano superior aberto determinado pela reta r é definido pela inequação $y > -\frac{x}{5} - \frac{2}{5}$.

1.3. O semiplano inferior fechado determinado pela reta r é definido pela inequação $y \leq -\frac{x}{5} - \frac{2}{5}$.

Pretende-se determinar o conjunto das ordenadas de todos os pontos que têm abscissa 2.

Ora, se $x = 2$, tem-se:

$$y \leq -\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow y \leq -\frac{4}{5}$$

$$\text{Então, } y \in \left] -\infty, -\frac{4}{5} \right].$$

1.4. A reta BC pode ser definida por uma equação do tipo

$$y = mx + b.$$

$$\text{O declive da reta é dado por: } m_{BC} = \frac{1-2}{-3-1} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Então, a equação é da forma } y = \frac{1}{4}x + b.$$

Como o ponto $B(1,2)$ pertence à reta, tem-se:

$$2 = \frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4} = b \Leftrightarrow \frac{7}{4} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } BC: y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}.$$

1.5. Então, o semiplano inferior aberto determinado pela reta BC

$$\text{é definido pela inequação } y < \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}.$$

2.1. Sendo B o ponto de interseção da reta t , definida por

$$y = -3x + 6, \text{ com o eixo } Oy, \text{ então } B(0,6).$$

A é o ponto de interseção da reta t com o eixo Ox , então $A(x,0)$

$$\text{e } 0 = -3x + 6.$$

$$\text{Ora, } 0 = -3x + 6 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Então, } A(2,0).$$

Como C é o ponto médio de $[AB]$, as suas coordenadas são

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (1,3).$$

2.2. A reta s é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36$$

$$\Leftrightarrow 12y = 4x + 32 \Leftrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\text{Então, a reta } s \text{ é definida pela equação reduzida } y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}.$$

Então, o semiplano superior aberto determinado pela reta s é

$$\text{definido pela inequação } y > \frac{x}{3} + \frac{8}{3}.$$

Pág. 165

45. Designemos por r_1 , r_2 e r_3 os raios das circunferências de centros A , B e C , respetivamente.

A circunferência de centro A passa em B , então

$$r_1 = \overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}.$$

A circunferência de centro $B(-3,3)$ é tangente aos eixos coordenados, então $r_2 = 3$.

A circunferência de centro C passa pela origem do referencial,

$$\text{então } r_3 = \overline{CO} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Pág. 166

46. Um ponto pertence à circunferência de centro C e raio 5 se a sua distância a C é igual a 5.

$$\overline{PC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{QC} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 25} = \frac{\sqrt{109}}{2};$$

$$\overline{RC} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}.$$

Conclui-se que apenas o ponto P pertence à circunferência de centro C e raio 5 porque $\overline{PC} = 5$.

47. As circunferências representadas pela equações I, II, III e IV têm centros de coordenadas, respetivamente,

$$(4,-1), (-4,1), (0,0) \text{ e } (0,-4).$$

Então, a correspondência entre as circunferências representadas e as equações é a seguinte:

$$C_1 \rightarrow III, C_2 \rightarrow I, C_3 \rightarrow IV \text{ e } C_4 \rightarrow II.$$

48.1. Começa-se por determinar o raio r .

$$r = \overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{73}$$

Então, a circunferência de centro $A(-1,3)$ e que passa em B é definida pela equação:

$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{73})^2, \text{ ou seja, } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 73.$$

48.2. Começa-se por determinar o raio r .

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(0+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

Então, a circunferência de centro em O e que passa em A é definida pela equação:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{10})^2, \text{ ou seja, } x^2 + y^2 = 10.$$

48.3. Sendo $[AB]$ um dos diâmetros da circunferência, então o centro é o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-5)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -1 \right).$$

Em seguida determina-se o raio r .

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-1-2)^2 + (3+5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Então, a circunferência de diâmetro $[AB]$ é definida pela equação:

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{\sqrt{73}}{2} \right)^2, \text{ ou seja,}$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y+1)^2 = \frac{73}{4}.$$

Pág. 167

49.1.

$$x^2 + y^2 + 10y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y + 5^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+5)^2 = 25$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + y^2 + 10y = 0$ é uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, -5)$ e raio 5.

$$49.2. \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Conclui-se, então, que o lugar geométrico dos pontos que verificam a condição $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ é uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 1)$ e raio 2.

50. Começa-se por determinar os centros, A e B , de cada uma das circunferências C_1 e C_2 .

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 + y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 = -25$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 3^2 - 3^2 = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 1$$

Então os centros são os pontos $A(5, -2)$ e $B(0, 3)$.

Seguidamente determina-se o raio r da circunferência pedida.

$$r = \overline{AB} = \sqrt{(5-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50}$$

Então, a circunferência de centro $A(5, -2)$ e que passa por B é definida pela equação:

$$(x-5)^2 + (y-(-2))^2 = (\sqrt{50})^2, \text{ ou seja, } (x-5)^2 + (y+2)^2 = 50.$$

51. Começa-se por determinar o raio r de cada uma das circunferências.

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-4-8)^2 + (3+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{144+25}}{2} = \frac{13}{2}$$

Então, a circunferência de centro A é representada pela equação $(x+4)^2 + (y-3)^2 = \frac{169}{4}$ e a circunferência de centro B é definida por $(x-8)^2 + (y+2)^2 = \frac{169}{4}$.

Pág. 168

52.1. O centro da circunferência é o ponto $P(-3, 1)$ e o raio é igual a 3.

$$\overline{AP} = \sqrt{(-2+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(-4+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5} \text{ e}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(-5+3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Assim sendo, o ponto A é exterior à circunferência porque $\overline{AP} > 3$ e os pontos B e C são interiores à circunferência pois $\overline{BP} < 3$ e $\overline{CP} < 3$.

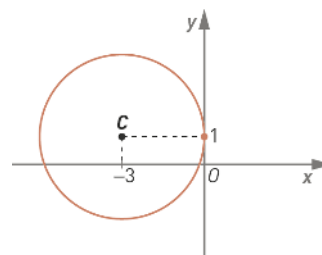
52.2. Começa-se por determinar o raio r .

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(-5+2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Então, a circunferência de centro $C(-5, 0)$ e que passa em A é definida pela equação:

$$(x-(-5))^2 + (y-0)^2 = 5^2, \text{ ou seja, } (x+5)^2 + y^2 = 25.$$

52.3.



53.1. O círculo de centro $B(1, 2)$ e raio 2 é definido pela inequação $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$.

53.2. Sendo $[AB]$ um diâmetro do círculo, então o centro é o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1).$$

Em seguida determina-se o raio r .

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Então, o círculo de diâmetro $[AB]$ é definido pela inequação $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 5$.

53.3. O círculo tem centro $A(-3, 0)$ e é tangente ao eixo das ordenadas, então $r = 3$.

Esse círculo é definido pela inequação $(x+3)^2 + y^2 \leq 9$.

53.4. O círculo tem centro $B(1, 2)$ e é tangente à reta $y = -2$, então $r = 2 - (-2) = 4$.

Esse círculo é definido pela inequação $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 16$.

54.1. A coroa circular tem centro no ponto $C(2, 3)$ e é limitada por duas circunferências. A menor tem raio 2 e a maior tem raio 3.

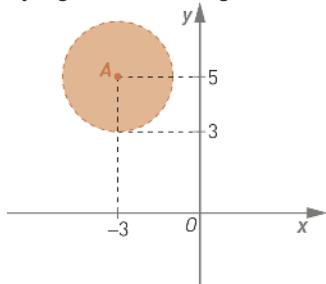
Então, a coroa circular representada é definida pela condição $4 \leq (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 9$.

54.2. A parte da coroa circular que pertence ao 2.º quadrante pode ser definida pela condição:

$$4 \leq (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad x < 0$$

55.1. O conjunto de pontos do plano cuja distância a A é inferior a 2 é definido pela condição: $(x+3)^2 + (y-5)^2 < 4$.

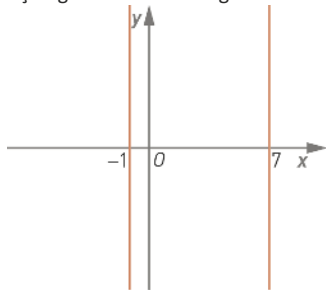
A sua representação geométrica é a seguinte:



55.2. O conjunto de pontos do plano cuja distância a r é 4 é definido pela condição:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow x-3 = 4 \vee x-3 = -4 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$$

A sua representação geométrica é a seguinte:



56.1. O ponto D é o centro das circunferências e é o ponto médio de $[OB]$.

Então, as coordenadas do ponto D são $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$.

O diâmetro da circunferência inscrita ao quadrado é igual ao lado do quadrado, ou seja, é igual a 4. Logo, o seu raio é igual a 2. A região azul da figura, incluindo a fronteira, é representada pela condição:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 4.$$

56.2. O raio da circunferência circunscrita ao quadrado é igual à distância de D a B .

$$\overline{DB} = \sqrt{(2-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8}$$

A região verde da figura, excluindo a fronteira, é representada pela condição:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 > 8 \quad \wedge \quad (x < 0 \vee x > 4) \quad \wedge \quad (y < 0 \vee y > 4).$$

Tarefa 8

1.1. O raio do círculo C_1 é $r_1 = \sqrt{5}$ e o raio do círculo C_2 é $r_2 = \sqrt{10}$.

Então, o raio do círculo C_2 não é o dobro do raio do círculo C_1 porque $\sqrt{10} \neq 2\sqrt{5}$.

1.2.

a) O ponto $C(-1, -3)$ pertence apenas ao círculo C_2 porque a proposição $(-1-1)^2 + (-3+1)^2 \leq 5$ é falsa e a proposição $(-1-1)^2 + (-3+1)^2 \leq 10$ é verdadeira.

b) O ponto $D(-3, -1)$ não pertence a qualquer um dos dois círculos porque as proposições $(-3-1)^2 + (-1+1)^2 \leq 5$ e $(-3-1)^2 + (-1+1)^2 \leq 10$ são ambas falsas.

c) O ponto $A(0, 2)$ pertence à circunferência que limita o círculo C_2 porque a proposição $(0-1)^2 + (2+1)^2 = 10$ é verdadeira.

2.1. Começa-se por determinar o raio r da circunferência de centro C .

$$r = \overline{OC} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$$

Então, a circunferência de centro em C e que passa em O é definida pela equação:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{8})^2, \text{ ou seja, } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8.$$

2.2. O ponto A pertence ao eixo das abscissas, logo $A(x, 0)$.

Como A pertence à circunferência de centro C , tem-se:

$$(x-2)^2 + (0-2)^2 = 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2 \vee x-2 = -2 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$$

Conclui-se, então, que $A(4, 0)$.

O ponto B pertence ao eixo das ordenadas, logo $B(0, y)$.

Como B pertence à circunferência de centro C , tem-se:

$$(0-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow y-2 = 2 \vee y-2 = -2 \Leftrightarrow y = 4 \vee y = 0$$

Conclui-se, então, que $B(0, 4)$.

2.3.

a) O raio da circunferência de centro O é igual a $\overline{OA}$, ou seja, é igual a 4.

Então, a circunferência de centro O e que passa em A é definida pela equação $x^2 + y^2 = 16$.

A região azul da figura, incluindo a fronteira, é representada pela condição:

$$x^2 + y^2 \geq 16 \quad \wedge \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8.$$

b) O arco BOA , incluindo os extremos, é representado pela condição:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \quad \wedge \quad (x \leq 0 \vee y \leq 0).$$

3.1. O ponto $C(3, -2)$ é o centro das circunferências e como estas são tangentes aos eixos coordenadas, então os seus raios são 2 e 3.

A região colorida da figura está contida numa coroa circular definida pela condição:

$$4 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9.$$

A região colorida da figura também está no retângulo de diagonal $[OC]$ definido pela condição:

$$-2 \leq y \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 3.$$

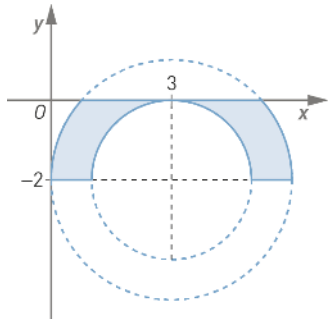
Assim sendo, a região colorida da figura é definida pela condição:

$$4 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad -2 \leq y \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 3.$$

A condição que corresponde à região colorida da figura, incluindo a fronteira, é a II.

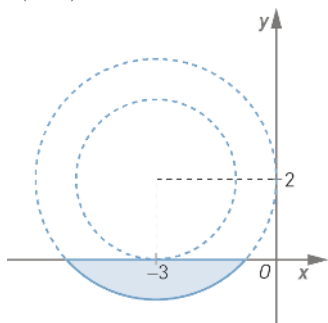
3.2. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano correspondente à condição

I: $4 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad -2 \leq y \leq 0$ é a seguinte:



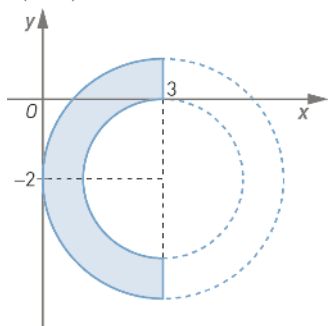
A representação geométrica do conjunto de pontos do plano correspondente à condição

III: $4 \leq (x+3)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad -2 \leq y \leq 0$ é a seguinte:



A representação geométrica do conjunto de pontos do plano correspondente à condição

IV: $4 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 3$ é a seguinte:



57.1. O lugar geométrico dos pontos P do plano que verificam a condição $\overline{PA} = 8$ é uma circunferência de centro A e raio 8.

57.2. O lugar geométrico dos pontos P do plano que verificam a condição $\overline{PA} + \overline{PB} = 8$, sendo $\overline{AB} < 8$, é uma elipse de focos nos pontos A e B e eixo maior igual a 8.

Pág. 171

58. Como L é um dos pontos de interseção da elipse com o eixo das ordenadas, sabe-se que $\overline{LQ} + \overline{LR} = 12$ e $\overline{LQ} = \overline{LR}$.

Então, conclui-se que $\overline{LR} + \overline{LR} = 12 \Leftrightarrow 2\overline{LR} = 12 \Leftrightarrow \overline{LR} = 6$.

Pág. 172

59. Como a corda tem 12 metros de comprimento, conclui-se que o eixo maior da elipse tem comprimento 12 metros, ou seja, o canteiro retangular tem 12 metros de comprimento.

Como o canteiro tem 108 metros quadrados de área e 12 metros de comprimento, conclui-se que tem 9 metros de largura ($108 : 12 = 9$).

Logo, o perímetro P do canteiro é dado por

$$P = 2 \times 12 + 2 \times 9 = 42 \text{ m}.$$

Então, o jardineiro não tem rede suficiente para vedar o canteiro (só possui 40 metros de rede).

No mínimo são necessários 42 metros de rede para vedar o canteiro.

60.1. O eixo maior da elipse é 16, logo tem-se: $2a = 16 \Leftrightarrow a = 8$.

O ponto de coordenadas $(-5, 0)$ é um dos focos da elipse, então $c = 5$.

Sabe-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Neste caso, tem-se:

$$8^2 = b^2 + 5^2 \Leftrightarrow b^2 = 39$$

Como $b > 0$, conclui-se que $b = \sqrt{39}$.

Distância focal: $2c = 10$

Vértices: $(8, 0)$; $(-8, 0)$; $(0, \sqrt{39})$ e $(0, -\sqrt{39})$

60.2. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

61.1. Sendo $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $25 = 16 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 9$

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$a = 5, \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = 3.$$

Eixo maior: $2a = 10$

Eixo menor: $2b = 8$

Vértices: $(5, 0)$; $(-5, 0)$; $(0, 4)$ e $(0, -4)$

Focos: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$

61.2. Sendo $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $4 = 1 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 3$

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$a = 2, \quad b = 1 \quad \text{e} \quad c = \sqrt{3}.$$

Eixo maior: $2a = 4$

Eixo menor: $2b = 2$

Vértices: $(2,0)$; $(-2,0)$; $(0,1)$ e $(0,-1)$

Focos: $(\sqrt{3},0)$ e $(-\sqrt{3},0)$

Pág. 173

62.1. $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10 \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

Então, tem-se $A(-5,0)$ e $B(5,0)$.

62.2. Sendo $(0,3)$ um dos pontos da elipse, conclui-se que $b = 3$.

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

63.1. Dividindo ambos os membros da equação $x^2 + 6y^2 = 18$ por 18, obtém-se:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{6y^2}{18} = \frac{18}{18} \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ (equação reduzida da elipse).}$$

63.2. Sendo $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3} = 1$ a equação reduzida da elipse, sabe-se

que $a^2 = 18$ e $b^2 = 3$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que

$$a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ e } b = \sqrt{3}.$$

Pontos de interseção da elipse com os eixos coordenados:

$(3\sqrt{2},0)$; $(-3\sqrt{2},0)$; $(0,\sqrt{3})$ e $(0,-\sqrt{3})$

63.3. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $18 = 3 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 15$

Como $c > 0$, conclui-se que $c = \sqrt{15}$.

Focos: $(\sqrt{15},0)$ e $(-\sqrt{15},0)$

Pág. 174

64.1. O plano mediador de $[AB]$ é paralelo ao plano xOz e passa no ponto médio de $[AB]$.

Então, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é $y = 1$.

64.2. O plano mediador de $[EF]$ é paralelo ao plano yOz e passa no ponto médio de $[EF]$.

Então, uma equação do plano mediador de $[EF]$ é $x = 1$.

64.3. O plano mediador de $[EB]$ é paralelo ao plano xOy e passa no ponto médio de $[EB]$.

Então, uma equação do plano mediador de $[EB]$ é $z = \frac{3}{2}$.

64.4. Sabe-se que $A(2,0,0)$ e $C(0,2,0)$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AC]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PC}$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AC]$ é $x = y$.

65. Vamos começar por determinar as distâncias entre os pontos R, S e T .

$$\overline{RS} = \sqrt{(5-8)^2 + (-2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\overline{RT} = \sqrt{(5-7)^2 + (-2+3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{6}.$$

$$\overline{ST} = \sqrt{(8-7)^2 + (0+3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Como $\overline{RS} = \overline{ST}$, conclui-se que S é equidistante de R e de T , ou seja, S pertence ao plano mediador do segmento de reta $[RT]$.

Pág. 175

66.1. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 10z + 25 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4x - 6y + 10z + 2z + 35 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6y + 12z + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2z + 5 = 0$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é

$$x - y + 2z + 5 = 0.$$

66.2. O ponto $P(k^2, 0, 4k+1)$ pertence ao plano mediador de $[AB]$ se e só se:

$$k^2 - 0 + 2(4k+1) + 5 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 8k + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-8 \pm \sqrt{64-28}}{2} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = -7$$

Então, as coordenadas do ponto P são $(1,0,-3)$ ou $(49,0,-27)$.

67.1. Como α é o plano mediador de $[AB]$, então intersecta o segmento de reta $[AB]$ no seu ponto médio.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1,0,2).$$

67.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 &= (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 &= \\ = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \\ \Leftrightarrow -4x + 2y + 2y - 6z + 2z &= 2 - 14 \\ \Leftrightarrow -4x + 4y - 4z &= -12 \\ \Leftrightarrow x - y + z &= 3\end{aligned}$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é $x - y + z = 3$.

Logo, as coordenadas de qualquer ponto que pertença ao plano α satisfazem a condição $x - y + z = 3$.

67.3. Seja P o ponto de interseção do plano α com o eixo Ox , então tem-se: $P(x, 0, 0)$ e $x - y + z = 3$.

Donde se conclui que $x - 0 + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Então, $P(3, 0, 0)$.

Seja Q o ponto de interseção do plano α com o eixo Oy , então tem-se: $Q(0, y, 0)$ e $x - y + z = 3$.

Donde se conclui que $0 - y + 0 = 3 \Leftrightarrow y = -3$.

Então, $Q(0, -3, 0)$.

Seja R o ponto de interseção do plano α com o eixo Oz , então tem-se: $R(0, 0, z)$ e $x - y + z = 3$.

Donde se conclui que $0 - 0 + z = 3 \Leftrightarrow z = 3$.

Então, $R(0, 0, 3)$.

Pág. 176

68.1. O lugar geométrico dos pontos P do espaço que verificam a condição $\overline{AP} = 5$ é uma superfície esférica de centro A e raio 5.

68.2. O lugar geométrico dos pontos P do espaço que verificam a condição $\overline{AP} \leq 3$ é uma esfera de centro A e raio 3.

69. Vamos começar por determinar o raio r da superfície esférica centrada em E e que passa pelo ponto F .

$$r = \overline{EF} = \sqrt{(0-1)^2 + (1+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{30}$$

Então, a superfície esférica centrada em E e que passa pelo ponto F é definida pela equação:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-(-3))^2 = (\sqrt{30})^2, \text{ ou seja,}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 30.$$

70.1. A superfície esférica tem centro em $C(4, 5, 3)$ e é tangente ao plano xOy , logo conclui-se que o raio é igual a 3.

Assim sendo, a superfície esférica é definida pela equação

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

70.2. Para conhecer a posição dos pontos $P(6, 7, 2)$ e $R(5, 4, 5)$ relativamente à superfície esférica, basta determinar a distância de cada um deles ao centro $C(4, 5, 3)$.

$$\overline{PC} = \sqrt{(6-4)^2 + (7-5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e}$$

$$\overline{RC} = \sqrt{(5-4)^2 + (4-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6}.$$

Como $\overline{PC} = 3$ e $\overline{RC} < 3$, conclui-se que o ponto P pertence à superfície esférica e o ponto R é interior à superfície esférica.

70.3. Os planos paralelos a xOz e que são tangentes à superfície esférica são os planos de equações:

$$y = 5 - 3 \quad \text{e} \quad y = 5 + 3, \text{ ou seja, } y = 2 \quad \text{e} \quad y = 8.$$

Pág. 177

71.1. A esfera de centro $C(-2, 3, -1)$ e raio $\sqrt{7}$ é definida por

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \leq 7.$$

71.2. A esfera de centro $C(-2, 3, -1)$ e tangente ao plano α ,

definido pela equação $x = 1$, tem raio igual a $|-2-1| = 3$.

Então, essa esfera é definida pela inequação

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \leq 9.$$

$$\mathbf{72.1.} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4(y-z) = 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 + z^2 - 4z + 2^2 - 2^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 20$$

A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas

$$(3, -2, 2) \quad \text{e} \quad \text{raio } \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

72.2. Os planos do tipo $y = k$ que são tangentes à superfície esférica são os planos de equações

$$y = -2 - 2\sqrt{5} \quad \text{e} \quad y = -2 + 2\sqrt{5}.$$

Então, conclui-se que $k = -2 - 2\sqrt{5} \quad \vee \quad k = -2 + 2\sqrt{5}$.

$$\mathbf{73.1.} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 10x \leq -16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 5^2 - 5^2 + y^2 + z^2 \leq -16$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

A esfera tem centro no ponto de coordenadas $(-5, 0, 0)$ e raio 3.

$$\mathbf{73.2.} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4z \leq 3 + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 + z^2 + 4z + 2^2 - 2^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \leq 8$$

A esfera tem centro no ponto de coordenadas $(0, 1, -2)$ e raio

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Pág. 178

$$\mathbf{74.1.} \quad \overline{CA} = \sqrt{(0+2)^2 + (1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e}$$

$$\overline{CB} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Como $\overline{CA} = \overline{CB}$, conclui-se que C pertence ao plano mediador de $[AB]$.

Seja M o ponto médio de $[AB]$. As coordenadas do ponto médio

$$\text{de } [AB] \text{ são } \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right).$$

A altura do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\overline{CM} = \sqrt{\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + (1-1)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34}.$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2} = \frac{\sqrt{34} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{68}}{4} = \frac{2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(unidades de área).

74.2. O plano que passa em $A(-2, -1, 1)$ e é paralelo ao plano

xOy é definido pela equação $z=1$.

Seguidamente vamos determinar a interseção da superfície esférica com o plano de equação $z=1$.

$$x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 2z = 4 \quad \wedge \quad z=1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 1^2 + 2 \times 1 = 4 \quad \wedge \quad z=1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 + 3 = 4 \quad \wedge \quad z=1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 5 \quad \wedge \quad z=1$$

Conclui-se que a interseção da superfície esférica com o plano de equação $z=1$ é a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(2, 0, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.

Como o perímetro da circunferência é dado por $P=2\pi r$,

conclui-se que:

$$P=2\sqrt{5}\pi \text{ (unidades de comprimento).}$$

75.1. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , então sabe-se que

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2.$$

$\overline{AC} = \overline{OC} = 5$ porque o reservatório esférico tem raio 5.

$\overline{OB} = 8$ porque a cota da superfície superior do líquido é 8.

Então, $\overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OC} = 8 - 5 = 3$.

Assim sendo, tem-se:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 16$$

Donde se conclui que $\overline{AB} = \sqrt{16} = 4$.

Então, o ponto A tem ordenada 4, tem abcissa 0 pois pertence ao plano yOz e tem cota 8 pois pertence ao plano que contém a superfície superior do líquido, ou seja, $A(0, 4, 8)$.

75.2. A superfície superior do líquido é o círculo resultante da interseção da esfera de centro $C(0, 0, 5)$ e raio 5 com o plano de equação $z=8$, sendo definido pela seguinte condição:

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \quad \wedge \quad z=8.$$

Tarefa 9

$$1.1. \quad x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 + z^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $(2, -1, 0)$ e raio 2.

1.2. Seja A um ponto de interseção da superfície esférica E com o eixo Ox , então tem-se: $A(x, 0, 0)$ e $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$.

$$\text{Donde se conclui que } (x-2)^2 + (0+1)^2 + 0^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{3} \vee x-2 = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3}.$$

Então, $A(2 + \sqrt{3}, 0, 0)$ ou $A(2 - \sqrt{3}, 0, 0)$.

Seja B o ponto de interseção da superfície esférica E com o eixo

Oy , então tem-se: $B(0, y, 0)$ e $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$.

$$\text{Donde se conclui que } (0-2)^2 + (y+1)^2 + 0^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Então, $B(0, -1, 0)$.

Seja C o ponto de interseção da superfície esférica E com o eixo

Oz , então tem-se: $C(0, 0, z)$ e $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$.

$$\text{Donde se conclui que } (0-2)^2 + (0+1)^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \underbrace{z^2 = -1}_{\text{condição impossível}}.$$

Donde se conclui que a superfície esférica E não intersesta o eixo Oz .

1.3. Designemos por C_1 e C_2 os centros da superfície esférica S e da esfera E , respetivamente.

Ora, $C_1(2, -1, 0)$ e $C_2(-2, 0, 4)$.

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{33}.$$

Sabe-se que a superfície esférica tem raio 2 e a esfera tem raio 1.

Como $\overline{C_1C_2} > 2+1$, conclui-se que a superfície esférica S e a esfera E não têm pontos em comum.

1.4. O plano $y=k$ intersesta a superfície esférica num só ponto se for tangente a essa superfície, ou seja, se

$$k = -1-2 \quad \text{ou} \quad k = -1+2.$$

Conclui-se, então, que $k = -3 \vee k = 1$.

1.5. Os planos paralelos a xOy e que são tangentes à esfera E são os planos de equações:

$$z = 4-1 \quad \text{e} \quad z = 4+1, \text{ ou seja, } z = 3 \quad \text{e} \quad z = 5.$$

Pág. 179

Proposta 12

$$12.1. \quad \overline{AB} = 5+3=8 \quad \text{e} \quad \overline{BC} = 2+3=5.$$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , então sabe-se que

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2.$$

Assim sendo, tem-se:

$$(\overline{AC})^2 = 8^2 + 5^2 \Leftrightarrow (\overline{AC})^2 = 89$$

$$\text{Donde se conclui que } \overline{AC} = \sqrt{89}.$$

$$12.2. \quad \text{Recorrendo ao Teorema de Tales, sabe-se que } \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{EB}}.$$

Assim sendo, tem-se:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{89}}{8} = \frac{\overline{FC}}{5} \Leftrightarrow \overline{FC} = \frac{5\sqrt{89}}{8}$$

12.3. O declive da reta AC é dado por: $m = \frac{2 - (-3)}{5 - (-3)} = \frac{5}{8}$.

Uma equação da reta AC é do tipo $y = \frac{5}{8}x + b$.

Como o ponto $C(5, 2)$ pertence à reta, tem-se:

$$2 = \frac{5}{8} \times 5 + b \Leftrightarrow 2 - \frac{25}{8} = b \Leftrightarrow -\frac{9}{8} = b$$

Então, a equação reduzida da reta AC é $y = \frac{5}{8}x - \frac{9}{8}$.

F é o ponto de interseção da reta AC com o eixo Oy, então

$$F\left(0, -\frac{9}{8}\right).$$

G é o ponto de interseção da reta AC com o eixo Ox, então

$$G(x, 0) \text{ e } 0 = \frac{5}{8}x - \frac{9}{8}.$$

$$\text{Ora, } 0 = \frac{5}{8}x - \frac{9}{8} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Então, $G\left(\frac{9}{5}, 0\right)$.

12.4.

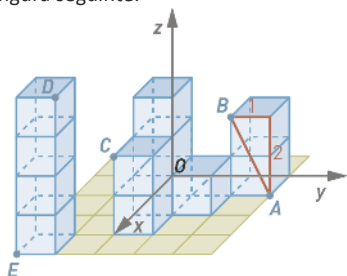
$$\text{a) } \overline{DF} = \sqrt{(-3-0)^2 + \left(2 + \frac{9}{8}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{625}{64}} = \sqrt{\frac{1201}{64}} = \frac{\sqrt{1201}}{8}$$

$$\text{b) } \overline{BG} = \sqrt{\left(5 - \frac{9}{5}\right)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} + 9} = \sqrt{\frac{481}{25}} = \frac{\sqrt{481}}{5}$$

Proposta 13

13.1.

a) Observa a figura seguinte.

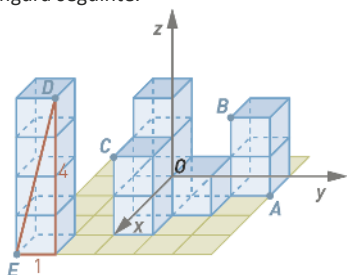


Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{AB})^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow (\overline{AB})^2 = 5$$

Donde se conclui que $\overline{AB} = \sqrt{5}$.

b) Observa a figura seguinte.

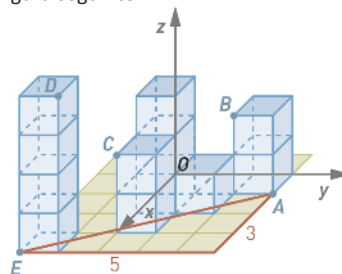


Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{DE})^2 = 1^2 + 4^2 \Leftrightarrow (\overline{DE})^2 = 17$$

Donde se conclui que $\overline{DE} = \sqrt{17}$.

c) Observa a figura seguinte.



Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{AE})^2 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{AE})^2 = 34$$

Donde se conclui que $\overline{AE} = \sqrt{34}$.

13.2. Atendendo ao referencial que foi colocado e à unidade de comprimento, tem-se:

$$A(-1, 2, -1), B(-1, 1, 1), C(1, -1, 1), D(2, -2, 3) \text{ e } E(2, -3, -1)$$

13.3.

$$\text{a) } \overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{b) } \overline{CE} = \sqrt{(1-2)^2 + (-1+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{c) } \overline{AD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{d) } \overline{BE} = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{29}$$

Pág. 180

Proposta 14

14.1. As faces do octaedro regular são triângulos equiláteros geometricamente iguais.

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6}.$$

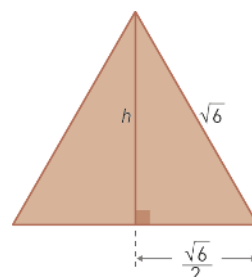
Assim sendo, o perímetro P do octaedro é dado por:

$$P = 3AB = 3\sqrt{6} \text{ (unidades de comprimento).}$$

14.2. A área da superfície total do octaedro é dada por

$$A = 8 \times A_{\text{face}}.$$

Cada uma das faces é um triângulo equilátero com lado igual a $\sqrt{6}$.



Atendendo ao esquema em cima e aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\sqrt{6})^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 6 - \frac{6}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{18}{4}$$

$$\text{Donde se conclui que } h = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{2 \times 3^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Então, } A = 8 \times \frac{\sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = 8 \times \frac{3\sqrt{12}}{4} = 6\sqrt{2^2 \times 3} = 6 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

(unidades de área).

Proposta 15

$$15.1. A_{[ACHIF]} = A_{[ACHF]} + A_{[HIF]}$$

Os vértices I e A têm de coordenadas $(0,0,2)$ e $(3,0,-8)$, então conclui-se que: $\overline{OF} = 3$, $\overline{AF} = 8$ e $\overline{OI} = 2$.

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \overline{FH} = 2\overline{OF} = 2 \times 3 = 6.$$

$$\text{Assim sendo, } A_{[ACHIF]} = 6 \times 8 + \frac{6 \times 2}{2} = 54 \text{ (unidades de área).}$$

15.2. A base do prisma e da pirâmide é um quadrado cuja área é dada por $(\overline{FG})^2$.

$$(\overline{FG})^2 = (\overline{FO})^2 + (\overline{OG})^2 \Leftrightarrow (\overline{FG})^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow (\overline{FG})^2 = 18$$

Ora, sabe-se que:

$$V_{\text{prisma}} = 18 \times 8 = 144 \text{ (unidades de volume).}$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 18 \times 2 = 12 \text{ (unidades de volume).}$$

$$V_{\text{sólido}} = 144 + 12 = 156 \text{ (unidades de volume).}$$

Um plano de equação $z = k$, $k \in \mathbb{R}$ divide o sólido em duas partes com igual volume.

O sólido inferior resultante da divisão do sólido em duas partes é um prisma quadrangular com 78 unidades de volume, com a mesma base que o inicial e de altura h .

$$\text{Então, tem-se: } 18 \times h = 78 \Leftrightarrow h = \frac{78}{18} \Leftrightarrow h = \frac{13}{3}.$$

$$\text{Conclui-se, então, que } k = -8 + \frac{13}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{11}{3}.$$

Proposta 16

16.1. Como $A(5,0,0)$ e $E(5,6,3)$, então as coordenadas do ponto M , ponto médio de $[AE]$, são

$$\left(\frac{5+5}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(5, 3, \frac{3}{2}\right).$$

16.2. O plano α é paralelo a xOz , logo é do tipo $y = k$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Como } \alpha \text{ passa por } M\left(5, 3, \frac{3}{2}\right), \text{ então tem-se que } k = 3.$$

Assim sendo, o plano α pode ser representado pela equação $y = 3$.

16.3. O plano α divide o prisma dado em dois sólidos, sendo um deles um prisma triangular.

A base desse prisma é um triângulo semelhante ao triângulo da base do prisma inicial e a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$.

$$\text{Como } A_{[ABE]} = \frac{6 \times 3}{2} = 9, \text{ então a área da base do prisma}$$

$$\text{resultante da divisão do sólido é igual a } 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

A altura do novo prisma é igual á altura do prisma inicial, ou seja, 5.

$$\text{Conclui-se, então, que o volume, } V_1, \text{ desse prisma é igual a } \frac{9}{4} \times 5 = \frac{45}{4}.$$

O volume, V_2 , do outro sólido é dado pela diferença entre os volumes dos dois prismas triangulares.

$$V_2 = \frac{6 \times 3}{2} \times 5 - \frac{45}{4} = \frac{135}{4}.$$

Pág. 181

Proposta 17

17.1. Seja $M1$ o ponto médio de $[AC]$. As coordenadas de $M1$ são

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-4+3}{2}\right) = \left(2, -\frac{1}{2}\right).$$

17.2. Sejam (x, y) as coordenadas do ponto D .

Como B é o ponto médio de $[AD]$, tem-se:

$$(-2, 2) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right).$$

$$\text{Daqui resulta que: } \begin{cases} \frac{3+x}{2} = -2 \\ \frac{-4+y}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Conclui-se, então, que $D(-7, 8)$.

$$17.3. \text{ O declive da reta } BC \text{ é dado por } m_{BC} = \frac{3-2}{1-(-2)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{A reta } BC \text{ é do tipo } y = \frac{1}{3}x + b.$$

O ponto $C(1, 3)$ pertence à reta, logo tem-se:

$$3 = \frac{1}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{3} = b \Leftrightarrow \frac{8}{3} = b$$

$$\text{Equação reduzida da reta } BC: y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Então, o semiplano superior aberto definido pela reta BC é representado pela inequação $y > \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

17.4. Seja r a reta que passa em A e é paralela à reta BC . Sabe-se que $m_r = m_{BC} = \frac{1}{3}$.

$$\text{A reta } r \text{ é do tipo } y = \frac{1}{3}x + b.$$

O ponto $A(3, -4)$ pertence à reta r , logo tem-se:

$$-4 = \frac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow -4 - 1 = b \Leftrightarrow -5 = b$$

Equação reduzida da reta r : $y = \frac{1}{3}x - 5$.

M é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox , então

$$M(x, 0) \text{ e } 0 = \frac{1}{3}x - 5.$$

$$\text{Ora, } 0 = \frac{1}{3}x - 5 \Leftrightarrow x = 15.$$

Então, $M(15, 0)$.

Como N é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy , então $N(0, -5)$.

As coordenadas do ponto médio de $[MN]$ são

$$\left(\frac{15+0}{2}, \frac{0+(-5)}{2} \right) = \left(\frac{15}{2}, -\frac{5}{2} \right).$$

Proposta 18

18.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow 2y = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Então, a mediatriz de $[AB]$ é definida pela equação $y = -x + 2$.

18.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PC}$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -2y = -6x \Leftrightarrow y = 3x$$

Então, a mediatriz de $[AC]$ é definida pela equação $y = 3x$.

O ponto $B(0, 3)$ pertence ao semiplano superior definido pela

mediatriz de $[AC]$ porque $3 > 3 \times 0$.

Então, o semiplano superior fechado definido pela mediatriz de $[AC]$ é representado pela inequação $y \geq 3x$.

18.3. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -4y = -4x - 4 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Então, a mediatriz de $[BC]$ é definida pela equação $y = x + 1$.

O ponto $A(-1, 2)$ pertence ao semiplano superior definido pela

mediatriz de $[BC]$ porque $2 > -1 + 1$.

Então, o semiplano aberto definido pela mediatriz de $[BC]$ e que não contém o ponto A é o semiplano inferior, e é representado pela inequação $y < x + 1$.

Proposta 19

19.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r , ou seja, da mediatriz de $[AO]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PO}$.

$$\overline{PA} = \overline{PO} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -4y = 6x - 13 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$$

Então, a reta r é definida pela seguinte equação reduzida:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4}.$$

19.2. Começa-se por determinar o raio r da circunferência.

$$r = \overline{AO} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

Então, a circunferência de centro $A(3, 2)$ e que passa em O é

definida pela equação: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

19.3. A região colorida da figura, incluindo a fronteira, é definida pela condição:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 13 \wedge y \leq -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4}.$$

Pág. 182

Proposta 20

20.1.

a) Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $C(1, y)$.

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(2-1)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-y)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(2-1)^2 + (-3-y)^2 = (-1-1)^2 + (4-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 9 + 6y + y^2 = 4 + 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{7}$$

Então, conclui-se que $C\left(1, \frac{5}{7}\right)$.

b) Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $C(x, -2)$.

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{(-1-x)^2 + (4+2)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(2-x)^2 + (-3+2)^2 = (-1-x)^2 + (4+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + 1 = 1 + 2x + x^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow -6x = 32 \Leftrightarrow x = -\frac{16}{3}$$

Então, conclui-se que $C\left(-\frac{16}{3}, -2\right)$.

20.2.

a) A circunferência de centro em $A(2, -3)$ e é tangente ao eixo

Ox tem raio $r = 3$.

Essa circunferência é definida pela equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

b) O raio da circunferência que passa em $A(2, -3)$ e tem centro

na origem do referencial é $r = \overline{AO} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{13}$.

Essa circunferência é definida pela equação $x^2 + y^2 = 13$.

c) Sendo $[AB]$ um diâmetro da circunferência, então o centro é o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + 4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Em seguida determina-se o raio, r , da circunferência.

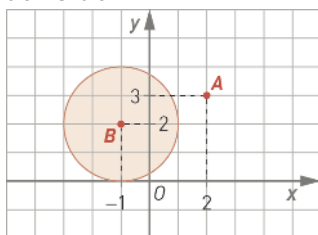
$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(2 + 1)^2 + (-3 - 4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$

Então, a circunferência de diâmetro $[AB]$ é definida pela equação:

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{2} \right)^2, \text{ ou seja, } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{29}{2}.$$

Proposta 21

22.1. O conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overline{PB} \leq 2$ é o círculo de centro B e raio 2.

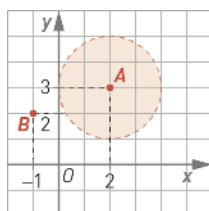


Esse lugar geométrico é representado pela condição $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$.

22.2. O conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overline{PA} < 2$ é o interior do círculo de centro A e raio 2.

Esse lugar geométrico é representado pela condição

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 4.$$



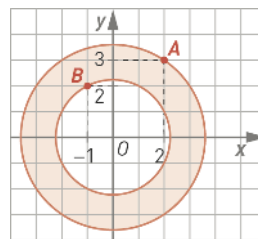
22.3. O conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que

$\overline{OB} \leq \overline{OP} \leq \overline{OA}$ é a coroa circular de centro O e raios $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$.

Ora, $\overline{OB} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{5}$ e

$$\overline{OA} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{13}.$$

Então, esse lugar geométrico é representado pela condição $5 \leq x^2 + y^2 \leq 13$.



Proposta 22

$$22.1. x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 - 2^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ e o raio é igual a 3.

$$22.2. x^2 + y^2 = 6x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 1$$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(3, 0)$ e o raio é igual a 1.

$$22.3. x^2 + y^2 + 2y \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 \leq 4$$

O centro do círculo é o ponto de coordenadas $(0, -1)$ e o raio é igual a 2.

$$22.4. x^2 + x + y^2 - 2y \leq \frac{11}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 \leq \frac{11}{4}$$

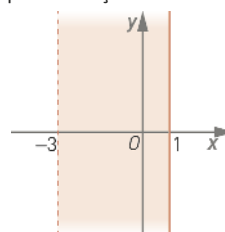
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$$

O centro do círculo é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$ e o raio é igual a 2.

Pág. 183

Proposta 23

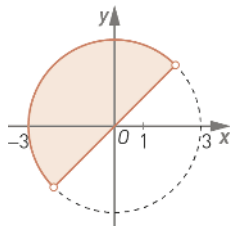
23.1. A representação geométrica do conjunto de pontos do plano caracterizado pela condição $-3 < x \leq 1$ é:



23.2. A condição $x^2 + y^2 \leq 9$ representa o círculo de centro na origem do referencial e raio 3.

A condição $y > x$ representa o semiplano superior aberto definido pela reta de equação $y = x$.

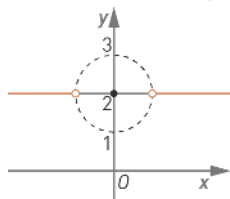
A representação geométrica do conjunto de pontos do plano caracterizado pela condição $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y > x$ é:



23.3. A condição $y = 2$ representa a reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto $(0, 2)$.

A condição $x^2 + (y - 2)^2 > 1$ representa o exterior do círculo de centro no ponto $(0, 2)$ e raio 1.

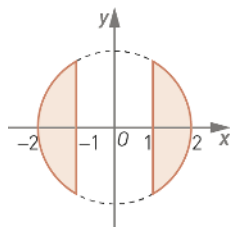
A representação geométrica do conjunto de pontos do plano caracterizado pela condição $y = 2 \wedge x^2 + (y - 2)^2 > 1$ é:



23.4. $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1$

A condição $x^2 + y^2 \leq 4$ representa o círculo de centro na origem do referencial e raio 2.

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano caracterizado pela condição $|x| \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$ é:



23.5. $x^2 + y^2 + 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 \leq 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 \leq 9$

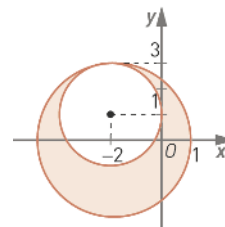
A condição $(x + 2)^2 + y^2 \leq 9$ representa o círculo de centro no ponto $(-2, 0)$ e raio 3.

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 \geq -1$
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$

A condição $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$ representa o exterior do círculo de centro no ponto $(-2, 1)$ e raio 2, incluindo a circunferência.

A representação geométrica do conjunto de pontos do plano caracterizado pela condição

$x^2 + y^2 + 4x - 5 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 \geq 0$ é:



Proposta 24

24.1. A equação reduzida da reta AB é $y = 1$.

A circunferência tem centro no ponto $C(2, 0)$ e raio 2 (pois passa na origem).

A região colorida do plano é definida através da seguinte condição: $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 1$.

24.2. C é o ponto médio de $[AB]$, sendo as suas coordenadas

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+0}{2} \right) = (2, -1).$$

Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, o raio da

circunferência é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$.

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(0-4)^2 + (-2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

A equação reduzida da reta OB é $y = 0$.

A reta AB tem declive $m = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{1}{2}$ e ordenada na origem igual a -2 .

A equação reduzida da reta AB é $y = \frac{1}{2}x - 2$.

A região colorida do plano é definida através da seguinte condição:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 5 \wedge \left(y \geq 0 \vee y \leq \frac{1}{2}x - 2 \right).$$

24.3. A circunferência tem centro na origem do referencial e raio 2.

A equação reduzida da reta AB é $y = 2$.

As equações das retas paralelas ao eixo Oy que são tangentes à circunferência são $x = -2$ e $x = 2$.

A região colorida do plano é definida através da seguinte condição:

$$x^2 + y^2 \geq 4 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2.$$

Proposta 25

25.1. O eixo maior da elipse é 8, logo tem-se: $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

O eixo menor da elipse é 4, logo tem-se: $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$.

Vértices da elipse: $(-4, 0)$; $(4, 0)$; $(0, -2)$ e $(0, 2)$

25.2. Sabe-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Neste caso, tem-se:

$$4^2 = 2^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 12$$

Como $c > 0$, conclui-se que $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Distância focal: $2c = 4\sqrt{3}$

Focos: $(-2\sqrt{3}, 0)$ e $(2\sqrt{3}, 0)$

25.3. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

25.4. O ponto R tem abscissa 3 e pertence à elipse, então tem-se:

$$\frac{3^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 9 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Como a ordenada do ponto R é positiva, conclui-se que

$$R\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right).$$

O ponto S tem ordenada -1 e pertence à elipse, então tem-se:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(-1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$$

Como a abscissa do ponto S é negativa, conclui-se que

$$S(-2\sqrt{3}, -1).$$

Pág. 184

Proposta 26

26.1.

a) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} + \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49 + \frac{144}{25}} + \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1369}{25}} + \sqrt{\frac{169}{25}} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{37}{5} + \frac{13}{5} = 2a \Leftrightarrow 10 = 2a \Leftrightarrow a = 5$$

Eixo maior da elipse: $2a = 10$

b) Os focos da elipse são os pontos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, então

$$c = 3.$$

Sabe-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Neste caso, tem-se:

$$5^2 = b^2 + 3^2 \Leftrightarrow b^2 = 16$$

Como $b > 0$, conclui-se que $b = 4$.

Vértices da elipse: $(-5, 0)$; $(5, 0)$; $(0, -4)$ e $(0, 4)$

26.2. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Neste caso, tem-se: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Proposta 27

27.1.

a) Sendo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 9$ e $b^2 = 3$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $9 = 3 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 6$

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$a = 3, b = \sqrt{3} \text{ e } c = \sqrt{6}.$$

Então, as coordenadas dos focos são $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$.

b) Sejam P e Q os pontos da elipse que têm abscissa 1. Então tem-se:

$$\frac{1^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow 1 + 3y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{8}{3}} \vee y = -\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vee y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{6}}{3} \vee y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Assim sendo, os pontos P e Q têm coordenadas $\left(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ e

$$\left(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

27.2.

a) Sendo $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 16$ e $b^2 = 1$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $16 = 1 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 15$

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$a = 4, b = 1 \text{ e } c = \sqrt{15}.$$

Então, as coordenadas dos vértices são

$$(4, 0), (-4, 0), (0, 1) \text{ e } (0, -1).$$

b) Distância focal: $2c = 2\sqrt{15}$.

27.3. Dividindo ambos os membros da equação $x^2 + 8y^2 = 4$ por 4, obtém-se:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{8y^2}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (equação reduzida da elipse)}.$$

Sendo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se que

$$a^2 = 4 \text{ e } b^2 = \frac{1}{2}.$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se: $4 = \frac{1}{2} + c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{2}$

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$a = 2, b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } c = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Vértices da elipse: $(-2, 0)$; $(2, 0)$; $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Focos da elipse: $\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{14}}{2}, 0\right)$

Proposta 28

28.1. Designemos por M_1 e M_2 os pontos médios das arestas $[AB]$ e $[BV]$.

As coordenadas de M_1 são $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}, 0\right)$ e as

coordenadas de M_2 são $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{0+5}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

28.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AV]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PV}$.

$$\overline{PA} = \overline{PV} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 10z + 25$$

$$\Leftrightarrow -8x + 4x + 4y + 10z + 16 - 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y + 10z - 17 = 0$$

Então, uma equação do plano mediador de $[AV]$ é

$$-4x + 4y + 10z - 17 = 0.$$

28.3. Sendo $V(2, 2, 5)$, então as coordenadas da projeção ortogonal de V sobre o plano xOy são $(2, 2, 0)$.

$$\mathbf{28.4.} \quad V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2} \times 5 = 10 \text{ (unidades de volume).}$$

Pág. 185**Proposta 29**

29.1. O vértice R do cubo tem de coordenadas $(4, 4, 4)$, então a aresta do cubo tem 4 unidades de comprimento.

Então, as coordenadas dos pontos assinalados na figura são:

$A(2, 0, 4)$, $B(0, 2, 4)$, $C(2, 4, 4)$, $D(4, 2, 4)$, $E(4, 0, 2)$,

$F(2, 0, 0)$, $G(0, 4, 2)$, $H(4, 4, 2)$, $I(4, 2, 0)$, $L(2, 4, 0)$ e

$R(4, 4, 4)$.

29.2.

$$\mathbf{a)} \quad \overline{ER} = \sqrt{(4-4)^2 + (0-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\mathbf{b)} \quad \overline{AG} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\mathbf{c)} \quad \overline{BI} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

29.3. $V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64$ (unidades de volume).

$$V_{\text{cuboctaedro}} = V_{\text{cubo}} - 9 \times V_{\text{pirâmide triangular}} = 64 - 8 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 2\right) =$$

$$= 64 - \frac{32}{3} = \frac{160}{3} \text{ (unidades de volume).}$$

$$\text{Então, tem-se que: } \frac{V_{\text{cubo}}}{V_{\text{cuboctaedro}}} = \frac{64}{\frac{160}{3}} = \frac{192}{160} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Proposta 30

30.1. A esfera definida pela inequação

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \leq 25 \text{ tem centro no ponto de coordenadas } (-2, 3, 1) \text{ e raio } 5.$$

Os planos tangentes à esfera que são paralelos ao plano xOy são os planos de equações:

$$z = 1 - 5 \text{ e } z = 1 + 5, \text{ ou seja, } z = -4 \text{ e } z = 6.$$

Os planos tangentes à esfera que são paralelos ao plano xOz são os planos de equações:

$$y = 3 - 5 \text{ e } y = 3 + 5, \text{ ou seja, } y = -2 \text{ e } y = 8.$$

Os planos tangentes à esfera que são paralelos ao plano yOz são os planos de equações:

$$x = -2 - 5 \text{ e } x = -2 + 5, \text{ ou seja, } x = -7 \text{ e } x = 3.$$

30.2. Sendo $[AB]$ o segmento de reta constituído pelos pontos da esfera que pertencem ao eixo Ox , então A e B são os pontos de interseção da superfície esférica que delimita a esfera com o eixo Ox .

Vamos começar por determinar as coordenadas dos pontos A e B .

Sejam (x, y, z) as coordenadas dos pontos pertencente à

superfície esférica e ao eixo Ox .

Então, tem-se:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25 \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (0-3)^2 + (0-1)^2 = 25 \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 9 + 1 = 25 \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 15 \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = \sqrt{15} \vee x+2 = -\sqrt{15}) \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 + \sqrt{15} \vee x = -2 - \sqrt{15}) \quad \wedge \quad y=0 \quad \wedge \quad z=0$$

Logo, $A(-2 + \sqrt{15}, 0, 0)$ e $B(-2 - \sqrt{15}, 0, 0)$.

Portanto, $\overline{AB} = 2\sqrt{15}$.

Proposta 31

31.1. Como o centro de uma das bases da caixa é o ponto de coordenadas $(3, 0, 3)$ e os diâmetros das esferas e das bases da caixa são iguais, conclui-se que o raio de cada esfera é 3.

O centro da esfera que se encontra no meio da caixa é o ponto de coordenadas $(3, 9, 3)$.

Então, a esfera que se encontra no meio da caixa é definida por $(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 \leq 9$.

31.2. Por exemplo, o ponto de coordenadas $(3, 6, 1)$ está no interior da caixa mas não pertence a qualquer uma das três esferas.

31.3.

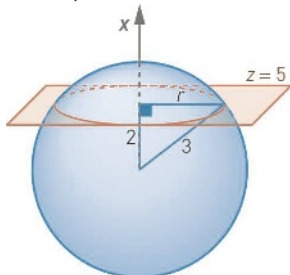
a) A interseção da caixa (vazia) com o plano de equação $y = 9$ é a circunferência de centro $(3, 9, 3)$ e raio 3. O perímetro dessa circunferência é $P = 2\pi \times 3 = 6\pi$ (unidades de comprimento).

b) A interseção da caixa (vazia) com o plano de equação $x = 3$ é a linha que delimita um retângulo de base 18 e altura 6. O perímetro dessa linha é $P = 2 \times 18 + 2 \times 6 = 48$ (unidades de comprimento).

Nota: o cilindro tem de altura 18 porque as suas bases estão contidas nos planos de equações $y = 0$ e $y = 18$.

c) $3^2 = 2^2 + r^2 \Leftrightarrow r^2 = 5$

Como $r > 0$, conclui-se que $r = \sqrt{5}$.



A interseção da caixa (vazia) com o plano de equação $z = 5$ é a linha que delimita um retângulo de base 18 e altura $2\sqrt{5}$. O perímetro dessa linha é $P = 2 \times 18 + 2 \times 2\sqrt{5} = 36 + 4\sqrt{5}$ (unidades de comprimento).

Pág. 186

Proposta 32

32.1. O centro da circunferência C_1 , definida pela condição $x^2 + y^2 = 16$, é a origem do referencial, ou seja, é o ponto $O(0,0)$.

O ponto $O(0,0)$ pertence à circunferência C_3 porque a proposição $(0+4)^2 + (0+3)^2 = 25$ é verdadeira.

32.2. O centro da circunferência C_2 , definida pela condição $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$, é o ponto $A(-2,1)$ e o centro da circunferência C_3 , definida pela condição $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$, é o ponto $B(-4,-3)$.

Os pontos O , A e B são vértices de um triângulo. Pretende-se mostrar que o triângulo $[OAB]$ é retângulo. Para tal, vamos começar por determinar o comprimento de cada um dos seus lados.

$$\overline{AO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$

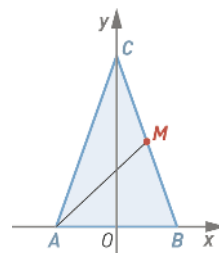
$$\overline{BO} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ e}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2+4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Como $(\overline{BO})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{AB})^2$, conclui-se que o triângulo $[OAB]$ é retângulo em A .

Proposta 33

33.1. Consideremos um referencial com centro no ponto médio de $[AB]$, conforme ilustra a figura seguinte.



Em relação a este referencial, sabe-se que

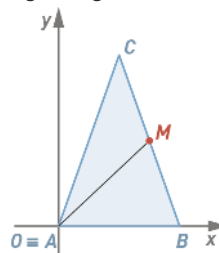
$$A(-2,0), B(2,0) \text{ e } C(0,4\sqrt{2}).$$

Sendo M o ponto médio de $[BC]$, então as suas coordenadas são

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4\sqrt{2}}{2} \right) = (1, 2\sqrt{2}).$$

$$\text{Então, } \overline{MA} = \sqrt{(1+2)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17} \text{ cm.}$$

33.2. Consideremos agora um outro referencial, com centro em A , conforme ilustra a figura seguinte.



Em relação a este novo referencial, sabe-se que

$$A(0,0), B(4,0) \text{ e } C(2,4\sqrt{2}).$$

Sendo M o ponto médio de $[BC]$, então as suas coordenadas são

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+4\sqrt{2}}{2} \right) = (3, 2\sqrt{2}).$$

$$\text{Então, } \overline{MA} = \sqrt{(3-0)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17} \text{ cm.}$$

Proposta 34

34.1. Sendo $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se que $a^2 = 2$ e $b^2 = 1$.

Sendo $a > 0$ e $b > 0$, então conclui-se que $a = \sqrt{2}$ e $c = 1$.

Então, as coordenadas dos vértices são $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

O quadrilátero cujos vértices coincidem com os vértices da elipse é um losango cujas diagonais coincidem com o eixo maior e o eixo menor da elipse. O comprimento da diagonal maior é $2\sqrt{2}$ e o da menor é 2.

Assim sendo, a área desse quadrilátero é dada por:

$$A = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (unidades de área).}$$

34.2. O ponto $P(k, \sqrt{3}k^2)$, $k \in \mathbb{R}$ pertence à elipse se e só se

$$\frac{k^2}{2} + (\sqrt{3}k^2)^2 = 1.$$

$$\frac{k^2}{2} + (\sqrt{3}k^2)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{k^2}{2} + 3k^4 = 1 \Leftrightarrow 6k^4 + k^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Seja $k^2 = y$, então tem-se:

$$6y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{2}{3}$$

Como $y = k^2$, então tem-se:

$$k^2 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \underbrace{k^2 = -\frac{2}{3}}_{\text{equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Proposta 35

Seja C um ponto do eixo Oy , então $C(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$.

1.º Caso: $\overline{CA} = \overline{CB}$

$$\overline{CA} = \overline{CB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(0-2)^2 + (y+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (0+1)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(0-2)^2 + (y+1)^2 + (0-3)^2 = (0+3)^2 + (y-2)^2 + (0+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + y^2 + 2y + 1 + 9 = 9 + y^2 - 4y + 4 + 1 \Leftrightarrow y = 0$$

Então, neste caso, $C(0, 0, 0)$.

2.º Caso: $\overline{BA} = \overline{BC}$

$$\overline{BA} = \overline{BC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-y)^2 + (-1-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(-3-2)^2 + (2+1)^2 + (-1-3)^2 = (-3-0)^2 + (2-y)^2 + (-1-0)^2$$

$$\Leftrightarrow 25 + 9 + 16 = 9 + (2-y)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 40 = (2-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{40} = 2-y \quad \vee \quad -\sqrt{40} = 2-y$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{40} \quad \vee \quad y = 2 + \sqrt{40}$$

Então, neste caso, $C(0, 2 - \sqrt{40}, 0)$ ou $C(0, 2 + \sqrt{40}, 0)$.

3.º Caso: $\overline{AB} = \overline{AC}$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+3)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-y)^2 + (3-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(2+3)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2 = (2-0)^2 + (-1-y)^2 + (3-0)^2$$

$$\Leftrightarrow 25 + 9 + 16 = 4 + (-1-y)^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 37 = (-1-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{37} = -1-y \quad \vee \quad -\sqrt{37} = -1-y$$

$$\Leftrightarrow y = -1 - \sqrt{37} \quad \vee \quad y = -1 + \sqrt{37}$$

Então, neste caso, $C(0, -1 - \sqrt{37}, 0)$ ou $C(0, -1 + \sqrt{37}, 0)$.

Proposta 36

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq -4x + 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 + z^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 4$$

A esfera tem centro no ponto de coordenadas $(-2, 1, 0)$ e raio 2.

Sabe-se que a esfera está inscrita num cubo, então a aresta desse cubo é igual ao diâmetro da esfera, ou seja, a aresta do cubo é igual 4.

Assim sendo, $V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64$ (unidades de volume).

Pág. 187

76. Os segmentos de reta orientados $[B,A]$ e $[M,L]$ representam o mesmo vetor porque têm a mesma direção, sentido e comprimento.

Os segmentos de reta orientados $[F,C]$ e $[J,G]$ também representam o mesmo vetor porque têm a mesma direção, sentido e comprimento.

77. $\|\vec{t}\| = 3$; $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ e $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Pág. 188

78.1.

a) $\|\vec{BG}\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

b) $\|\vec{AF}\| = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$

c) $\|\vec{GA}\| = \sqrt{(\sqrt{136})^2 + 8^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

78.2.

a) Por exemplo, $\vec{FC}$.

b) Por exemplo, $\vec{GD}$.

c) Por exemplo, $\vec{HA}$.

d) Por exemplo, $\vec{AC}$.

79.1. $A + \vec{OH} = A + \vec{AX} = X$.

79.2. $X + \vec{XO} = O$.

79.3. $H + \vec{HA} = A$.

79.4. Como $\vec{XA} = \vec{HO}$, então $H + \vec{XA} = O$.

Pág. 189

80.1. $A + \vec{GR} = A + \vec{AL} = L$.

80.2. $J + \vec{MZ} = J + \vec{JO} = O$.

80.3. Como $\vec{TR} = \vec{VY}$, então $V + \vec{TR} = Y$.

80.4. Como $\vec{ND} = \vec{VF}$, então $V + \vec{ND} = F$.

80.5. $S + \vec{EA} = S + \vec{SX} = X$.

Pág. 190

81.1. Um representante de $-\vec{u}$ é, por exemplo, $\vec{PA}$.

81.2. Um representante de $-\vec{v}$ é, por exemplo, $\vec{OP}$.

81.3. Um representante de $\vec{u} + \vec{v}$ é, por exemplo, $\vec{OC}$.

81.4. Um representante de $\vec{u} - \vec{v}$ é, por exemplo, $\vec{OB}$.

Nota: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

81.5. Um representante de $\vec{v} - \vec{u}$ é, por exemplo, $\vec{OD}$.

Nota: $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$

81.6. Um representante de $-\vec{u} - \vec{v}$ é, por exemplo, $\vec{OA}$.

Nota: $-\vec{u} - \vec{v} = (-\vec{u}) + (-\vec{v})$

82.1. $B + \vec{BD} = D$.

82.2. Como $\vec{JP} = \vec{GM}$, então $G + \vec{JP} = M$.

82.3. Como $-\vec{NP} = \vec{PN} = \vec{HF}$, então $H - \vec{NP} = F$.

82.4. $B + \vec{BM} = M$.

82.5. $\vec{BC} + \vec{GJ} = \vec{BC} + \vec{CF} = \vec{BF}$.

82.6. $\vec{AH} + \vec{LI} = \vec{AH} + \vec{HF} = \vec{AF}$.

82.7. $\vec{HF} - \vec{LJ} = \vec{HF} + \vec{JL} = \vec{HF} + \vec{FG} = \vec{HG}$.

82.8. $\vec{PG} - \vec{OG} = \vec{PO}$.

82.9. $\vec{DC} + \vec{GP} + \vec{PO} = \vec{DC} + \vec{CL} + \vec{PO} = \vec{DL} + \vec{PO} = \vec{DL} + \vec{LJ} = \vec{DJ}$.

82.10. $\vec{NJ} + \vec{BD} + \vec{HE} = \vec{NJ} + \vec{BD} + \vec{DA} = \vec{NJ} + \vec{BA} = \vec{NJ} + \vec{JI} = \vec{NI}$.

82.11. $\vec{IO} + \vec{GP} = \vec{AF} + \vec{FO} = \vec{AO}$.

82.12. $\vec{FQ} + \vec{QF} = \vec{0}$.

Pág. 191

83.1.

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

b) $\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{DB} + \vec{ED} = \vec{ED} + \vec{DB} = \vec{EB}$.

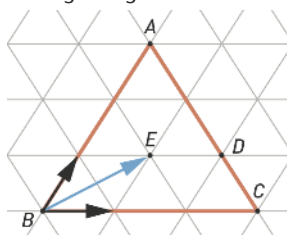
c) $3\vec{CD} + \vec{AE} = \vec{CA} + \vec{AE} = \vec{CE}$.

d) $\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD}$.

83.2.

a) Atendendo à figura, tem-se que:

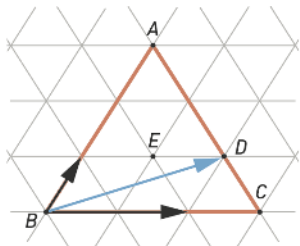
$$\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BA}.$$



Então, conclui-se que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

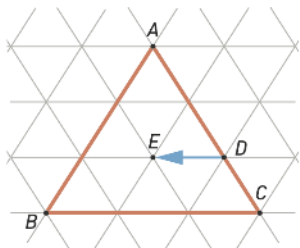
b) Atendendo à figura, tem-se que:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}.$$



Então, conclui-se que $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

c) Atendendo à figura inicial, tem-se que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Então, conclui-se que $a = -\frac{1}{3}$ e $b = 0$.

84.1.

a) $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BG}$.

b) $\overrightarrow{GN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH}$.

c) $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{N}$.

d) $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{J}$.

e) $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{RO} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB}$.

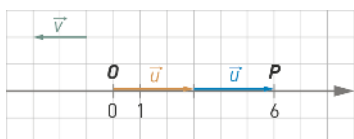
84.2.

a) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{SQ}$ b) $\overrightarrow{ML} = -2\overrightarrow{ON}$

c) $\overrightarrow{ML} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{MJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$

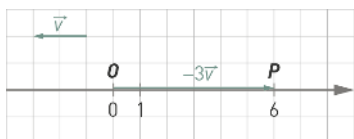
Pág. 193

85.1.



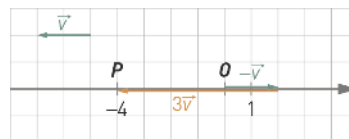
A abscissa do ponto P é 6.

85.2.



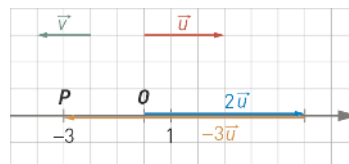
A abscissa do ponto P é 6.

85.3.



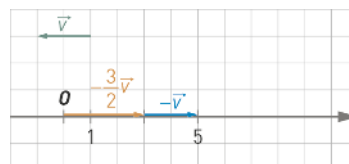
A abscissa do ponto P é -4.

85.4.



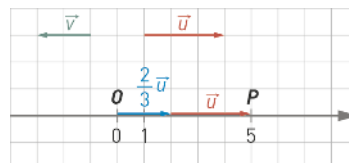
A abscissa do ponto P é -3.

85.5.



A abscissa do ponto P é 5.

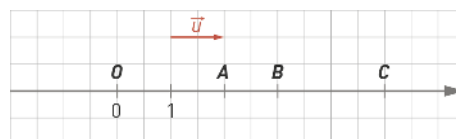
85.6.



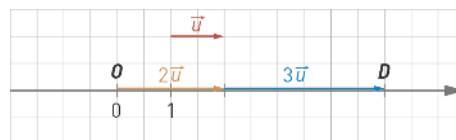
A abscissa do ponto P é 5.

Tarefa 10

1.1.

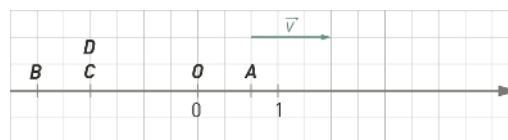


1.2.

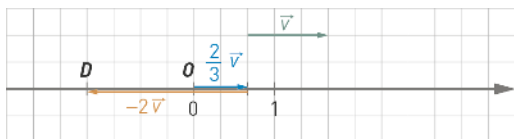


1.3. Conclui-se que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

2.1.



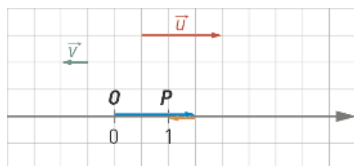
2.2.



2.3. Conclui-se que $\overline{OC} = \overline{OD}$.

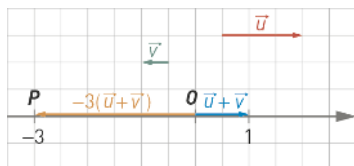
Pág. 194

86.1.



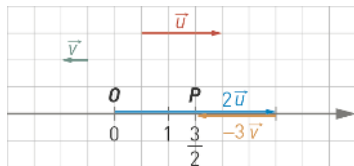
A abscissa do ponto P é 1.

86.2.



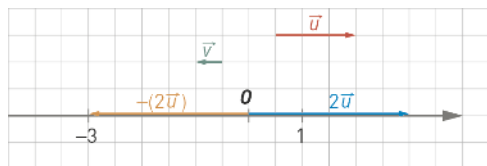
A abscissa do ponto P é -3.

86.3.



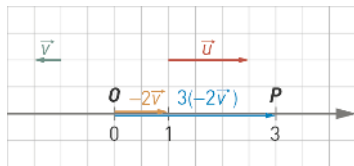
A abscissa do ponto P é $\frac{3}{2}$.

86.4.



A abscissa do ponto P é -3.

86.5.



A abscissa do ponto P é 3.

Tarefa 11

1.1. $\overline{BC} = \vec{v}$ porque se recorreu à regra do paralelogramo para obter um representante do vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

1.2. Como $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}$, então, atendendo ao recíproco do teorema de Tales, conclui-se que as retas BC e EF são paralelas.

1.3. Os triângulos $[ABC]$ e $[AEF]$ são semelhantes porque, de um para o outro, têm dois lados diretamente proporcionais e o ângulo por eles formado geometricamente igual.

1.4. Atendendo a que os triângulos $[ABC]$ e $[AEF]$ são

semelhantes, sabe-se que $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$.

Como $\overline{AE} = 2\overline{AB}$, então sabe-se que $\overline{AE} = 2\overline{AB}$.

Logo, tem-se que $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = 2$, ou seja, $\overline{EF} = 2\overline{BC}$.

Dado que os vetores $\overline{EF} = 2\vec{v}$ e $\overline{BC} = \vec{v}$ são colineares e têm o mesmo sentido, conclui-se que $\overline{EF} = 2\vec{v} = 2\overline{BC} = \vec{v}$, ou seja, $\overline{EF} = 2\vec{v}$.

1.5. $\overline{AE} = 2\overline{AB} = 2\vec{u}$, $\overline{EF} = 2\vec{v}$ e $\overline{AF} = 2(\vec{u} + \vec{v})$, então tem-se: $\overline{AE} + \overline{EF} = \overline{AF} \Leftrightarrow 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2(\vec{u} + \vec{v})$.

2.1. Os vetores $\vec{v} = 3(2\vec{u})$ e $\vec{w} = 6\vec{u}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.

2.2. Os vetores $\vec{v} = 4(-\vec{u})$ e $\vec{w} = -4\vec{u}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.

2.3. Os vetores $\vec{v} = -2(4\vec{u})$ e $\vec{w} = -8\vec{u}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.

2.4. Os vetores $\vec{v} = -5(-2\vec{u})$ e $\vec{w} = 10\vec{u}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.

Pág. 195

87. $2\overline{AC} + 2\overline{BC} + 2\overline{CH} = 2(\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{CH}) = 2(\overline{AB} + \overline{CH}) = 2\overline{AH}$

Tarefa 12

1.1.

a) $\overline{CD} + (\overline{BA} + \overline{EF}) = \overline{CD} + (\overline{BA} + \overline{AE}) = \overline{CD} + \overline{BE} = \overline{CD} + \overline{DF} = \overline{CF}$

b) $\overline{BA} - 2\overline{DE} = \overline{BA} - \overline{CA} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

c) $(\overline{EA} + \overline{AB}) - (\overline{DC} + \overline{CB}) = \overline{EB} - \overline{DB} = \overline{EB} + \overline{BD} = \overline{ED}$

1.2. Por exemplo, os vetores $\overline{AB}$, $\overline{BE}$ e $\overline{DB}$ são não colineares (não são paralelos) e a sua soma é o vetor nulo.

De facto, $\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{DB} = \overline{AE} + \overline{DB} = \overline{AE} + \overline{EA} = \overline{AA} = \vec{0}$.

2.1. $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{s}$

2.2. $\|\vec{w}\| = 2\|\vec{s}\|$

2.3. $\vec{t} = -\frac{1}{2}\vec{v}$

2.4. $\vec{z} = 5\vec{t}$

2.5. $\vec{v} = -\frac{2}{5}\vec{z}$

2.6. $\|\vec{s}\| = \frac{2}{3}\|\vec{u}\|$

3.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

3.2. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

3.3. $\overrightarrow{EB} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{EB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ED}$

Pág. 196

88. Sendo $[ABCD]$ um paralelogramo, os lados opostos são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Então, sabe-se que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Como M é o ponto médio de $[AD]$ e N é o ponto médio de $[BC]$,

então tem-se que: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ora, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DN}$ e

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN}.$$

Como $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ e $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$, conclui-se que $[MBND]$ é um paralelogramo.

89. Para provar que $[MBND]$ é um paralelogramo, basta provar que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ e $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB}$$

Então, $[MBND]$ é um paralelogramo.

Pág. 197

90. Com base no referencial da figura, sabe-se que:

$$\vec{a} = (-2, 2); \vec{b} = (0, 2); \vec{c} = (3, 0); \vec{d} = (1, 2); \vec{e} = (-1, 1);$$

$$\vec{f} = (-2, 0); \vec{g} = (3, -1); \vec{h} = (-1, -3); \vec{i} = (1, 0); \vec{j} = (0, 1);$$

$$\vec{l} = (0, -1).$$

Pág. 199

91. Por observação da figura representada, conclui-se que

$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}, \overrightarrow{CD} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} \text{ e } \overrightarrow{OE} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Então, $\overrightarrow{AB}(-3, -3, 6)$, $\overrightarrow{CD}(-3, 3, 0)$ e $\overrightarrow{OE}(3, -3, 3)$.

92.1. Sendo $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então as coordenadas do ponto A são (a, b) . Como $A(5, 2)$, conclui-se que $a = 5 \wedge b = 2$.

92.2. Sendo $\overrightarrow{OB} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então as coordenadas do ponto B são (a, b) . Como $B(-3, 4)$, conclui-se que $a = -3 \wedge b = 4$.

92.3. Sendo $\overrightarrow{OC} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então as coordenadas do ponto C são (a, b) . Como $C(2, -6)$, conclui-se que $a = 2 \wedge b = -6$.

92.4. Sendo $\overrightarrow{OD} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então as coordenadas do ponto D são (a, b) . Como $D(3, 0)$, conclui-se que $a = 3 \wedge b = 0$.

92.5. Sendo $\overrightarrow{OF} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então as coordenadas do ponto F são (a, b) . Como $F(0, -7)$, conclui-se que $a = 0 \wedge b = -7$.

93.1. Sabe-se que $\vec{u}(2, -3)$ e $\vec{v}(2, 4k + 1)$. Então, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge -3 = 4k + 1 \Leftrightarrow -4 = 4k \Leftrightarrow k = -1$$

93.2. Sabe-se que $\vec{u}(k, 3)$ e $\vec{v}(5, k - 2)$. Então, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow k = 5 \wedge 3 = k - 2 \Leftrightarrow k = 5 \wedge 5 = k \Leftrightarrow k = 5$$

93.3. Sabe-se que $\vec{u}(2k - 3, -1)$ e $\vec{v}(k, k - 2)$. Então, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow 2k - 3 = k \wedge -1 = k - 2 \Leftrightarrow k = 3 \wedge k = 1$$

condição
impossível

Conclui-se, então, que não existe nenhum valor de k para o qual $\vec{u} = \vec{v}$.

93.4. Sabe-se que $\vec{u}(k + 1, 4 - k^2)$ e $\vec{v}(3, 0)$. Então, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow k + 1 = 3 \wedge 4 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \wedge k^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \wedge (k = 2 \vee k = -2) \Leftrightarrow k = 2$$

Pág. 200

94.1. $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} = (4, -1) + (-2, 5) = (4 - 2, -1 + 5) = (2, 4)$

94.2. $\vec{t} = \vec{w} - \vec{v} = (-2, 1) - (-2, 5) = (-2 - (-2), 1 - 5) = (0, -4)$

94.3. $\vec{t} = -2\vec{w} = -2(-2, 1) = (-2 \times (-2), -2 \times 1) = (4, -2)$

94.4. $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} = \frac{1}{2}(4, -1) - (-2, 5) =$
 $= \left(2, -\frac{1}{2}\right) - (-2, 5) = \left(2 + 2, -\frac{1}{2} - 5\right) = \left(4, -\frac{11}{2}\right)$

94.5. Se $\vec{w} = \vec{t} + 2\vec{u}$, então $\vec{t} = \vec{w} - 2\vec{u}$.

$$\vec{t} = \vec{w} - 2\vec{u} = (-2, 1) - 2(4, -1) = (-2, 1) - (8, -2) =$$

$$= (-2 - 8, 1 + 2) = (-10, 3)$$

94.6. Se $\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{t}$, então $\vec{t} = -\frac{1}{2}(\vec{v} - 3\vec{w} - \vec{u})$.

$$\vec{t} = -\frac{1}{2}[(-2, 5) - 3(-2, 1) - (4, -1)] =$$

$$= -\frac{1}{2}[(-2, 5) - (-6, 3) - (4, -1)] = -\frac{1}{2}[(-2 + 6, 5 - 3) - (4, -1)] =$$

$$= -\frac{1}{2}[(4, 2) - (4, -1)] = -\frac{1}{2}(4 - 4, 2 + 1) = -\frac{1}{2}(0, 3) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

95.1. $\vec{t} = \vec{v} + 2\vec{w} = (2, -3, 1) + 2(1, 1, 2) = (2, -3, 1) + (2, 2, 4) =$
 $= (4, -1, 5)$

$$\begin{aligned} 95.2. \vec{t} &= \vec{u} - 2\vec{v} = (0, -2, 1) - 2(2, -3, 1) = \\ &= (0, -2, 1) - (4, -6, 2) = (-4, 4, -1) \end{aligned}$$

95.3. Se $\vec{u} = \vec{t} + \vec{w}$, então $\vec{t} = \vec{u} - \vec{w}$.

$$\vec{t} = \vec{u} - 2\vec{w} = (0, -2, 1) - (1, 1, 2) = (-1, -3, -1)$$

95.4. Se $\frac{1}{3}\vec{w} = \vec{t} + \frac{1}{2}\vec{u}$, então $\vec{t} = \frac{1}{3}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u}$.

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{1}{3}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{3}(1, 1, 2) - \frac{1}{2}(0, -2, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0, \frac{1}{3} + 1, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Pág. 201

96. Sabe-se que $\vec{u}(1, -2)$, $\vec{v} = -2\vec{i}$ e $\vec{w} = 3\vec{j}$. Então, conclui-se que $\vec{v}(-2, 0)$ e $\vec{w}(0, 3)$.

96.1. Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{s}$ colinear com $\vec{u}$.

Atendendo à definição de vetores colineares, consideremos, por exemplo, $\vec{s} = 2\vec{u}$.

$$\text{Então, } \vec{s} = 2\vec{u} = 2(1, -2) = (2, -4).$$

96.2. Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{s}$ colinear com $\vec{v}$.

Atendendo à definição de vetores colineares, consideremos, por exemplo, $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

$$\text{Então, } \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 0) = (-1, 0).$$

96.3. Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{s}$ colinear com $\vec{w}$.

Atendendo à definição de vetores colineares, consideremos, por exemplo, $\vec{s} = -4\vec{w}$.

$$\text{Então, } \vec{s} = -4\vec{w} = -4(0, 3) = (0, -12).$$

97.1. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares pois $\vec{v} = 3\vec{w}$.

97.2. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \left(2, \frac{1}{3}\right) = \lambda(6, 3) \Leftrightarrow \left(2, \frac{1}{3}\right) = (6\lambda, 3\lambda) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 &= 6\lambda \\ \frac{1}{3} &= 3\lambda \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{3} \\ \lambda &= \frac{1}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Este sistema é impossível.

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Pág. 202

98.1. Os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$.

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \lambda\vec{u} \Leftrightarrow (-4, k, -6) = \lambda(2, -1, 3) \Leftrightarrow (-4, k, -6) = (2\lambda, -\lambda, 3\lambda) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4 &= 2\lambda \\ k &= -\lambda \\ -6 &= 3\lambda \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -2 \\ k &= 2 \\ \lambda &= -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são colineares se $k = 2$.

98.2. Os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0, k\right) = \lambda(3, 0, -2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0, k\right) = (3\lambda, 0, -2\lambda) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} &= 3\lambda \\ 0 &= 0 \\ k &= -2\lambda \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{6} \\ 0 &= 0 \\ k &= -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$ são colineares se $k = -\frac{1}{3}$.

98.3. Não existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de modo que o vetor $\vec{w}(0, 0, k)$ seja colinear com $\vec{v}$. Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o vetor $\vec{w}(0, 0, k)$ não é colinear com o vetor $\vec{v} = (3, 0, -2)$, pois, nesse caso, o vetor $\vec{w}$ é paralelo ao eixo das cotas e o vetor $\vec{v}$ é perpendicular ao eixo das cotas.

Pág. 203

$$99.1. \overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{3}{2}, -2\right) - (-1, 2) = \left(\frac{5}{2}, -4\right)$$

$$99.2. \overrightarrow{CB} = B - C = \left(\frac{3}{2}, -2\right) - (-3, 1) = \left(\frac{9}{2}, -3\right)$$

99.3. Como $\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 1) - (-1, 2) = (-2, -1)$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{5}{2}, -4\right), \text{ então tem-se: } \vec{u} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -(-2, -1) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}, -4\right) = (2, 1) + \left(\frac{5}{4}, -2\right) = \left(\frac{13}{4}, -1\right) \end{aligned}$$

100.1. As coordenadas dos pontos A e D são, respetivamente, $(-2, 1, 1)$ e $(1, 0, 2)$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{AD} = D - A = (1, 0, 2) - (-2, 1, 1) = (3, -1, 1).$$

100.2. As coordenadas dos pontos E e C são, respetivamente, $(2, -1, 3)$ e $(1, 4, -1)$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{EC} = C - E = (1, 4, -1) - (2, -1, 3) = (-1, 5, -4).$$

100.3. As coordenadas dos pontos D e B são, respectivamente, $(1,0,2)$ e $(1,3,1)$.

Então, $\overrightarrow{DB} = B - D = (1,3,1) - (1,0,2) = (0,3,-1)$.

Pág. 204

101.1.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,3) - (-2,1) = (3,2)$

b) $\overrightarrow{BC} = C - B = (2,2) - (1,3) = (1,-1)$

c) $\overrightarrow{DC} = C - D = (2,2) - (3,-1) = (-1,3)$

d) $\overrightarrow{DE} = E - D = (-1,0) - (3,-1) = (-4,1)$

e) $\overrightarrow{DF} = F - D = (-2,-1) - (3,-1) = (-5,0)$

f) $\overrightarrow{FA} = A - F = (-2,1) - (-2,-1) = (0,2)$

101.2. $\overrightarrow{AB} = (3,2)$ e $\overrightarrow{CE} = E - C = (-1,0) - (2,2) = (-3,-2)$.

Então, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CE}$ não são iguais pois têm coordenadas diferentes.

101.3. $\overrightarrow{DB} = B - D = (1,3) - (3,-1) = (-2,4)$

$\overrightarrow{FP} = P - F = \left(3k-1, \frac{m+3}{2}\right) - (-2,-1) = \left(3k+1, \frac{m+5}{2}\right)$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FP} \Leftrightarrow -2 = 3k+1 \wedge 4 = \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 = 3k \wedge 8 = m+5 \Leftrightarrow k = -1 \wedge m = 3$

102.1.

a) $\overrightarrow{OE} = E - O = (2,4,3) - (0,0,0) = (2,4,3)$

b) $\overrightarrow{CG} = G - C = (0,0,3) - (0,4,0) = (0,-4,3)$

c) $\overrightarrow{CD} = D - C = (2,0,3) - (0,4,0) = (2,-4,3)$

102.2. As coordenadas do ponto P são do tipo (x,y,z) .

a) $\overrightarrow{EP} = \vec{u} \Leftrightarrow P - E = \vec{u} \Leftrightarrow (x,y,z) - (2,4,3) = (-4,3,-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2, y-4, z-3) = (-4,3,-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-4 \\ y-4=3 \\ z-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \\ z=2 \end{cases}$

Então, $P(-2,7,2)$.

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CG} \Leftrightarrow P - A = G - C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) - (2,0,0) = (0,0,3) - (0,4,0)$

$\Leftrightarrow (x-2, y, z) = (0,-4,3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=-4 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \\ z=3 \end{cases}$

Então, $P(2,-4,3)$.

Pág. 205

103. D é o quarto vértice do paralelogramo, então há três localizações possíveis para o vértice D :

$D = C + \overrightarrow{AB}$ ou $D = A + \overrightarrow{CB}$ ou $D = A + \overrightarrow{BC}$.

Seguidamente vamos determinar as possíveis coordenadas do ponto D .

$D = C + \overrightarrow{AB} = C + (B - A) = (3,1) + ((0,3) - (-2,1)) = (3,1) + (2,2) = (5,3)$

ou $D = A + \overrightarrow{CB} = A + (B - C) = (-2,1) + ((0,3) - (3,1)) = (-2,1) + (-3,2) = (-5,3)$

ou $D = A + \overrightarrow{BC} = A - \overrightarrow{CB} = (-2,1) - (-3,2) = (1,-1)$

104.1. $[AB]$ é um diâmetro da circunferência de centro E , então E é o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas do ponto E são: $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (2,4)$.

104.2. Como E é o ponto médio de $[CD]$, então

$D = E + \overrightarrow{ED} = E + \overrightarrow{CE}$.

$D = E + \overrightarrow{CE} = (2,4) + ((2,4) - (1,1)) = (2,4) + (1,3) = (3,7)$

105. Sendo $[RS]$ um dos diâmetros da circunferência, então o centro é o ponto médio de $[RS]$.

As coordenadas do ponto médio de $[RS]$ são

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (3,2)$.

Em seguida determina-se o raio r da circunferência.

$r = \frac{RS}{2} = \frac{\sqrt{(2-4)^2 + (-1-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Então, a circunferência de diâmetro $[AB]$ é definida pela equação:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{10})^2$, ou seja, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Pág. 206

106.1. Como $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, então $\vec{u}(3,-4)$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

106.2.

a) Seja $\vec{w}$ um vetor paralelo a $\vec{u}$ e de norma 10.

Sabe-se que $\vec{w} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\|\vec{w}\| = 10$.

$\vec{w} = \lambda \vec{u} = \lambda(3,-4) = (3\lambda, -4\lambda)$

$\|\vec{w}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2} = 10 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 10$

Então, tem-se:

$25\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$

Assim sendo, $\vec{w} = (3 \times 2, -4 \times 2)$ ou $\vec{w} = (3 \times (-2), -4 \times (-2))$, isto é, $\vec{w} = (6,-8)$ ou $\vec{w} = (-6,8)$.

b) Seja $\vec{t}$ um vetor colinear com $\vec{u}$ e de norma 2.

Sabe-se que $\vec{t} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\|\vec{t}\| = 2$.

$$\vec{r} = \lambda \vec{u} = \lambda(3, -4) = (3\lambda, -4\lambda)$$

$$\|\vec{r}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 2$$

Então, tem-se:

$$25\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4}{25} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5} \vee \lambda = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Assim sendo, } \vec{r} = \left(3 \times \frac{2}{5}, -4 \times \frac{2}{5}\right) \text{ ou } \vec{r} = \left(3 \times \left(-\frac{2}{5}\right), -4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)\right),$$

$$\text{isto é, } \vec{r} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right) \text{ ou } \vec{r} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

$$\mathbf{106.3.} \quad \|\vec{v}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3})^2 + a^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3+a^2} = 2$$

Elevando ao quadrado cada um dos membros da equação

$$\sqrt{3+a^2} = 2, \text{ tem-se:}$$

$$(\sqrt{3+a^2})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 3+a^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$$

106.4. As coordenadas do ponto P são do tipo (x, y) .

$$\vec{AP} = P - A = (x, y) - (-2, 1) = (x+2, y-1) \text{ e } \vec{i}(1, 0).$$

Então, tem-se:

$$\vec{AP} = \vec{u} + 2\vec{i} \Leftrightarrow (x+2, y-1) = (3, -4) + 2(1, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2, y-1) = (5, -4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=5 \\ y-1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

Assim sendo, $P(3, -3)$.

Como as coordenadas do ponto P são simétricas, P pertence à reta de equação $y = -x$ (bissetriz dos quadrantes pares).

107.1.

$$\mathbf{a)} \quad \vec{AB} = B - A = (2, 4) - (-3, 2) = (5, 2)$$

$$\mathbf{b)} \quad \vec{BC} - \vec{OE} = (C - B) - (E - O) = ((6, 2) - (2, 4)) - ((4, -3) - (0, 0)) = (4, -2) - (4, -3) = (0, 1)$$

$$\mathbf{c)} \quad 2(B - D) - \frac{1}{2}\vec{AE} = 2((2, 4) - (-2, -2)) - \frac{1}{2}(E - A) = 2(4, 6) - \frac{1}{2}((4, -3) - (-3, 2)) = (8, 12) - \frac{1}{2}(7, -5) = (8, 12) - \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(8 - \frac{7}{2}, 12 + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{29}{2}\right)$$

107.2. As coordenadas do ponto médio de $[AE]$ são

$$\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\mathbf{107.3.} \quad \vec{AD} - 2\vec{OC} = (D - A) - 2(C - O) =$$

$$= ((-2, -2) - (-3, 2)) - 2((6, 2) - (0, 0)) =$$

$$= (1, -4) - 2(6, 2) = (1, -4) - (12, 4) = (-11, -8)$$

$$\|\vec{AD} - 2\vec{OC}\| = \sqrt{(-11)^2 + (-8)^2} = \sqrt{185}$$

107.4. Como o ponto P pertence ao eixo das abscissas, então é da forma $P(x, 0)$.

$$\vec{AP} = P - A = (x, 0) - (-3, 2) = (x+3, -2)$$

$$\|\vec{AP}\| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (-2)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4} = 4$$

Elevando ao quadrado cada um dos membros da equação

$$\sqrt{(x+3)^2 + 4} = 4, \text{ tem-se:}$$

$$(\sqrt{(x+3)^2 + 4})^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 12 \Leftrightarrow x+3 = \sqrt{12} \vee x+3 = -\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{12} \vee x = -3 - \sqrt{12}$$

$$\text{Então, } P(-3 + \sqrt{12}, 0) \text{ ou } P(-3 - \sqrt{12}, 0).$$

107.5. Em primeiro lugar vamos determinar uma equação da mediatriz de $[AB]$.

Seja $R(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$$\text{Sabe-se que } \vec{RA} = \vec{RB}.$$

$$\vec{RA} = \vec{RB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 4y = -10x + 7 \Leftrightarrow y = \frac{-10x+7}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{4}$$

$$\text{Então, a mediatriz de } [AB] \text{ é definida pela equação } y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Designemos por I o ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ com a reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

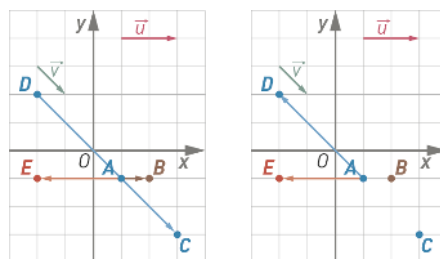
Para determinar as coordenadas de I , vamos resolver um sistema de duas equações a duas incógnitas.

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{4} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{4} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -10x + 7 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x = 7 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Então, conclui-se que } I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Pág. 207

108.

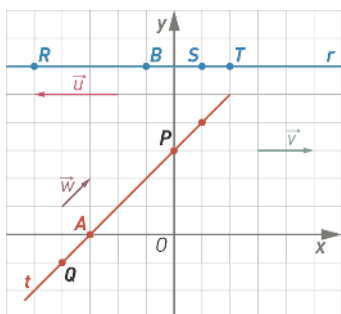


Pág. 208

109.1. Atendendo à figura apresentada, sabe-se que a reta r tem a mesma direção dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e a reta t tem a direção do vetor $\vec{w}$.

Então, conclui-se que os pontos R, S e T pertencem à reta r e os pontos P e Q pertencem à reta t .

109.2.



110.1. Uma equação vetorial da reta que passa em $L(-2, 4)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(3, -1)$ é:

$$(x, y) = (-2, 4) + k(3, -1), k \in \mathbb{R}.$$

110.2. A reta que passa em L e em M tem a direção do vetor $\vec{LM}$.

$$\vec{LM} = M - L = (1, 2) - (-2, 4) = (3, -2)$$

Então, uma equação vetorial da reta que passa em $L(-2, 4)$ e em $M(1, 2)$ é:

$$(x, y) = (-2, 4) + k(3, -2), k \in \mathbb{R}.$$

111.1. A reta r é definida pela equação

$$(x, y) = (-1, 4) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}.$$

a) Para obter dois pontos da reta basta atribuir dois valores reais a k (por exemplo, 0 e 1).

Se $k = 0$, tem-se $(x, y) = (-1, 4)$.

Se $k = 1$, tem-se $(x, y) = (-1, 4) + (3, 1) = (2, 5)$.

Então, os pontos de coordenadas $(-1, 4)$ e $(2, 5)$ são pontos da reta r .

b) Por exemplo, os vetores de coordenadas $(3, 1)$ e $(6, 2)$ são dois vetores diretores da reta r .

111.2. Pretende-se determinar o ponto da reta r que tem abscissa 5. Para tal, substitui-se x por 5 na equação da reta e obtém-se:

$$(5, y) = (-1, 4) + k(3, 1) \Leftrightarrow (5, y) = (-1 + 3k, 4 + k)$$

$$\begin{cases} 5 = -1 + 3k \\ y = 4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $(5, 6)$.

111.3. Pretende-se saber se o ponto de coordenadas $(-4, 3)$ pertence à reta r , ou seja, se $\exists k \in \mathbb{R} : (-4, 3) = (-1, 4) + k(3, 1)$.

$$(-4, 3) = (-1, 4) + k(3, 1) \Leftrightarrow (-4, 3) = (-1 + 3k, 4 + k)$$

$$\begin{cases} -4 = -1 + 3k \\ 3 = 4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Conclusão: o ponto de coordenadas $(-4, 3)$ pertence à reta r .

111.4. Se a reta é paralela a r , então tem a direção do vetor de coordenadas $(3, 1)$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, 3)$, uma equação vetorial da reta é: $(x, y) = (0, 3) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}$.

Pág. 209

112.1. Como $[OABC]$ é um quadrado, sabe-se que $C = O + \vec{AB}$.

$$\vec{AB} = B - A = (1, 5) - (3, 2) = (-2, 3)$$

$$\text{Então, } C = O + \vec{AB} = (0, 0) + (-2, 3) = (-2, 3).$$

112.2. A reta AB passa em A e tem a direção do vetor $\vec{AB}$.

Então, pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (3, 2) + k(-2, 3), k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 210

113.1. A reta AB passa no ponto $B(6, 3)$ e tem a direção do vetor $\vec{j}(0, 1)$ pois é paralela ao eixo Oy .

Então, uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y) = (6, 3) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}.$$

$$\textbf{113.2. } \vec{AC} = C - A = (0, 3) - (6, 0) = (-6, 3)$$

A diagonal $[AC]$ do retângulo $[OABC]$ é definida pela condição $(x, y) = (6, 0) + k(-6, 3), k \in [0, 1]$.

O ponto $D(2, 2)$ pertence à diagonal $[AC]$ se

$$\exists k \in [0, 1] : (2, 2) = (6, 0) + k(-6, 3).$$

$$(2, 2) = (6, 0) + k(-6, 3) \Leftrightarrow (2, 2) = (6 - 6k, 3k)$$

$$\begin{cases} 2 = 6 - 6k \\ 2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusão: o ponto $D(2, 2)$ pertence à diagonal $[AC]$ do retângulo $[OABC]$.

113.3. Uma equação vetorial da reta AC é

$$(x, y) = (6, 0) + k(-6, 3), k \in \mathbb{R}.$$

Pretende-se determinar o ponto da reta AC que tem abscissa -3 .

Para tal, substitui-se x por -3 na equação da reta e obtém-se:

$$(-3, y) = (6, 0) + k(-6, 3) \Leftrightarrow (-3, y) = (6 - 6k, 3k)$$

$$\begin{cases} -3 = 6 - 6k \\ y = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

A ordenada do ponto da reta AC que tem abscissa -3 é $\frac{9}{2}$.

114.1. Se a reta é paralela à reta r então tem igual declive.

O declive da reta r é igual a 3.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{u}(1,3)$.

Uma equação vetorial da reta que passa por $A(2,3)$ e é paralela

à reta r é: $(x,y) = (2,3) + k(1,3)$, $k \in \mathbb{R}$.

114.2. Se a reta tem a direção do vetor $\vec{u}(-3,1)$, então o seu

declive é igual a $-\frac{1}{3}$.

A equação reduzida da reta é do tipo $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Como o ponto $A(2,3)$ pertence à reta, tem-se:

$$3 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow \frac{11}{3} = b.$$

Equação reduzida da reta: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

115.1. O declive da reta r é igual a -2 e o declive da reta s é igual a 2.

Então, as retas r e s não são paralelas porque têm declives diferentes.

115.2. $3x - y = 5 \Leftrightarrow 3x - 5 = y$ e $2y = 6x + 1 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{1}{2}$.

As retas r e s são paralelas porque têm o mesmo declive ($m_r = m_s = 3$).

115.3. Um vetor diretor da reta r é $\vec{u}(2,4)$.

O declive da reta r é igual a 2 $\left(m_r = \frac{4}{2} = 2\right)$.

$$y - 2x = 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

O declive da reta s é igual a 2.

As retas r e s são paralelas porque têm o mesmo declive

($m_r = m_s = 2$).

Pág. 211

116.1. O declive da reta r é igual a -3 .

Um vetor diretor da reta r é $\vec{u}(1,-3)$.

A reta r intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas

$$\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

A reta r passa pelo ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e tem a direção

do vetor $\vec{u}(1,-3)$. Então, pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + k \\ y = \frac{1}{2} - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

116.2. A reta s tem a direção do vetor $\vec{v}(6,-2)$, então o seu

declive é igual a $-\frac{1}{3}$ $\left(m_s = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}\right)$.

A equação reduzida da reta s é do tipo $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(2,-3)$ pertence à reta s , tem-se:

$$-3 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow -3 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow -\frac{7}{3} = b.$$

Equação reduzida da reta s : $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$.

116.3. Atendendo às equações paramétricas da reta t , conclui-se que um vetor diretor da reta t é $\vec{t}(6,-2)$.

Então, o declive da reta t é igual a $-\frac{1}{3}$ $\left(m_t = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}\right)$.

As retas s e t são paralelas porque têm o mesmo declive.

116.4. Sejam A e B os pontos de interseção da reta t com o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respetivamente. Então, $A(x,0)$ e $B(0,y)$.

Para determinar a abscissa do ponto A basta substituir y por 0 nas equações paramétricas da reta t .

$$\begin{cases} x = -1 + 6k \\ 0 = 3 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 6k \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 6 \times \frac{3}{2} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto A são $(8,0)$.

Para determinar a ordenada do ponto B basta substituir x por 0 nas equações paramétricas da reta t .

$$\begin{cases} 0 = -1 + 6k \\ y = 3 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ y = 3 - 2 \times \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ y = 3 - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto B são $\left(0, \frac{8}{3}\right)$.

116.5. Sabe-se que o declive da reta t é igual a $-\frac{1}{3}$.

A equação reduzida da reta t é do tipo $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Atendendo às equações paramétricas, conclui-se que o ponto de coordenadas $(-1,3)$ pertence à reta t . Então, tem-se:

$$3 = -\frac{1}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{3} = b \Leftrightarrow \frac{8}{3} = b.$$

Equação reduzida da reta t : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

Pág. 212

117.1. $\vec{VB}$ é um vetor diretor da reta VB .

$$\vec{VB} = B - V = (-2, 5, 0) - (0, 0, 2) = (-2, 5, -2).$$

A reta VB passa no ponto $V(0,0,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{VB}$.

Então, uma equação vetorial da reta VB é:

$$(x,y,z) = (0,0,2) + k(-2,5,-2), k \in \mathbb{R}.$$

117.2. Qualquer ponto da aresta $[AD]$ tem abscissa 2 e ordenada 5.

Sendo P o ponto de cota 1 da aresta $[AD]$, então $P(2, 5, 1)$.

A reta VP passa no ponto $V(0, 0, 2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{VP}$.

$$\overrightarrow{VP} = P - V = (2, 5, 1) - (0, 0, 2) = (2, 5, -1)$$

Então, uma equação vetorial da reta VP é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(2, 5, -1), k \in \mathbb{R}.$$

117.3. Qualquer ponto da aresta $[DC]$ tem ordenada 5 e cota 4.

Sendo Q o ponto de abscissa -1 da aresta $[DC]$, então $Q(-1, 5, 4)$.

A reta VQ passa no ponto $V(0, 0, 2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{VQ}$.

$$\overrightarrow{VQ} = Q - V = (-1, 5, 4) - (0, 0, 2) = (-1, 5, 2)$$

Então, uma equação vetorial da reta VQ é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(-1, 5, 2), k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 213

118.1. A é o ponto de interseção da reta AD com o eixo das abscissas. Então, $A(x, 0)$.

Substituindo y por 0 na equação da reta AD , tem-se:
 $0 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Assim, as coordenadas do ponto A são $(1, 0)$.

118.2. Como o quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio, sabe-se que os segmentos de reta $[BC]$ e $[AD]$ são paralelos. Então, as retas BC e AD também são paralelas.

Como a reta AD tem declive -1 e retas paralelas têm o mesmo declive, conclui-se que a reta BC tem declive igual a -1 .

Assim, a reta BC é definida por uma equação do tipo $y = -x + b$.

Como o ponto $B(5, 0)$ pertence à reta BC , tem-se:

$$0 = -5 + b \Leftrightarrow b = 5.$$

Equação reduzida da reta BC : $y = -x + 5$.

118.3. Sendo 5 a ordenada na origem da reta BC , conclui-se que o ponto C tem coordenadas $(0, 5)$.

118.4. A reta CD tem a direção do vetor $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-1, 2) - (0, 5) = (-1, -3)$$

O declive da reta CD é igual a $3 \left(m = \frac{-3}{-1} = 3 \right)$ e a ordenada na origem é 5.

Equação reduzida da reta CD : $y = 3x + 5$.

118.5. O conjunto de pontos do trapézio que têm abscissa negativa é definido pela condição:

$$y \geq -x + 1 \wedge y \leq 3x + 5 \wedge x < 0.$$

119.1. C é o ponto de interseção das retas r e t .

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2}{3}x \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Então, conclui-se que $C(3, 2)$.

Como as circunferências são tangentes aos eixos coordenados, os seus raios são 2 e 3.

A equação da circunferência maior é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$.

A região sombreada da figura representada por S_1 é definida pela condição:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \wedge y \geq 2 \wedge y \geq \frac{2}{3}x.$$

119.2. A equação da circunferência menor é

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

A região sombreada da figura representada por S_2 é definida pela condição:

$$4 \leq (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge x \geq 3.$$

Tarefa 13

1.1. A equação reduzida da reta BC é $y = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{2}$.

Sendo B o ponto de interseção da reta BC com o eixo das

ordenadas, então $B\left(0, \frac{11}{2}\right)$.

O ponto E é a projeção ortogonal do ponto $G\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$ sobre o

eixo das abscissas. Então, $E\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

1.2. Os pontos C e F têm a mesma abscissa pois a reta FC é paralela ao eixo Oy .

Então, $C\left(\frac{7}{2}, y\right)$.

Como C pertence à reta BC , tem-se:

$$y = -\frac{5}{7} \times \frac{7}{2} + \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{6}{2} \Leftrightarrow y = 3$$

Conclui-se que $C\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

A altura da parede representada por $[FC]$ é dada pela distância entre os pontos $F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ e $C\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

Ora, $\overline{FC} = 3$.

2. O vetor $\overrightarrow{BG}$ é um vetor diretor da reta BG .

$$\overrightarrow{BG} = G - B = \left(-\frac{7}{2}, 3\right) - \left(0, \frac{11}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

O declive da reta BG é igual a $\frac{5}{7} \left(m = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{7} \right)$.

A equação reduzida da reta BG é $y = \frac{5}{7}x + \frac{11}{2}$.

O quadrilátero $[ADEG]$ é um trapézio.

Sabe-se que $A_{[ADEG]} = \frac{\overline{EG} + \overline{DA}}{2} \times \overline{DE}$.

$$\overline{EG} = 3 \text{ e } \overline{DE} = \sqrt{\left(-6 + \frac{7}{2}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

O ponto A tem a mesma abscissa que o ponto D pois a reta AD é paralela ao eixo Oy .

Então, $A(-6, y)$.

Como A pertence à reta BG , tem-se:

$$y = \frac{5}{7} \times (-6) + \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{30}{7} + \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{17}{14}$$

Conclui-se que $A\left(-6, \frac{17}{14}\right)$ e $\overline{DA} = \frac{17}{14}$.

$$\text{Então, } A_{\{ADEG\}} = \frac{3 + \frac{17}{14}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{59}{28} \times \frac{5}{2} = \frac{295}{56} \text{ (unidades de área).}$$

3. Designemos por H o ponto do prolongamento do telhado que contém $[BC]$ com o solo.

O ponto H é da forma $H(x, 0)$, pois H pertence ao eixo Ox .

Como H pertence à reta BC , tem-se:

$$0 = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{7}x = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \times \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = \frac{77}{10}$$

$$\text{Então, } H\left(\frac{77}{10}, 0\right) \text{ e } \overline{FH} = \frac{77}{10} - \frac{7}{2} = \frac{77}{10} - \frac{35}{10} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}.$$

Pretende-se determinar a área da frente da nova garagem, ou seja, do triângulo $[CFH]$.

$$\text{Ora, } A_{\{CFH\}} = \frac{\overline{FH} \times \overline{FC}}{2} = \frac{\frac{21}{5} \times 3}{2} = \frac{63}{10} = 6,3 \text{ (unidades de área).}$$

4. O novo referencial é obtido do referencial representado na figura através de uma translação associada ao vetor

$$\overline{OD} = (-6, 0).$$

Então, no novo referencial, as coordenadas dos pontos B e E são,

respetivamente, $\left(0 + 6, \frac{11}{2}\right)$ e $\left(-\frac{7}{2} + 6, 0\right)$, ou seja, $\left(6, \frac{11}{2}\right)$ e

$$\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

Pág. 216

Proposta 37

37.1. Como o quadrado $[EFGH]$ é uma ampliação, de razão 2, do quadrado $[ABCD]$ e a área do quadrado $[ABCD]$ é 50 cm^2 , então a área do quadrado $[EFGH]$ é 200 cm^2 (50×2^2).

37.2. Como o quadrado $[EFGH]$ é uma ampliação, de razão 2, do quadrado $[ABCD]$ e o perímetro do quadrado $[EFGH]$ é 76 cm , então o perímetro do quadrado $[ABCD]$ é 38 cm ($76 : 2$).

37.3.

a) $E + 2\overline{DC} = E + \overline{EF} = F$

b) $\overline{AD} - \overline{FG} = \overline{AD} + \overline{GF} = \overline{CB}$

c) $\overline{CG} + \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{CG} + \overline{FB} = \overline{BC}$

d) $\frac{1}{4}\overline{EG} + \overline{BD} = \overline{EA} + \overline{BD} = \overline{AH}$

e) $-\frac{2}{3}\overline{AG} + \frac{1}{2}\overline{HF} = \frac{2}{3}\overline{GA} + \overline{DB} = \overline{CA} + \overline{DB} = \overline{GF}$

f) $D + \frac{1}{2}\overline{EF} = D + \overline{DC} = C$

g) $D + (\overline{AC} + \overline{GF}) = D + \overline{DB} = B$

h) $\overline{EA} - \frac{1}{3}\overline{AG} = \overline{EA} + \frac{1}{3}\overline{GA} = \overline{EA} + \overline{GC} = \overline{EA} + \overline{AE} = \overline{EE} = \overline{0}$

Proposta 38

38.1.

a) $\overline{AC} - \overline{DC} + \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$

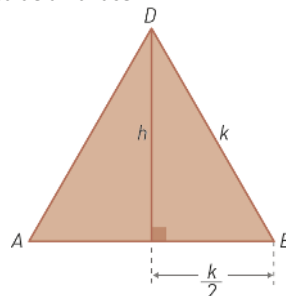
b) $\overline{DB} - (\overline{CA} - \overline{BA}) = \overline{DB} - (\overline{CA} + \overline{AB}) = \overline{DB} - \overline{CB} = \overline{DB} + \overline{BC} = \overline{DC}$

38.2. $\overline{DC} + \overline{BA} = \overline{DA} + \overline{AC} + \overline{BA} = \overline{DA} + (\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{DA} + \overline{BC} = \overline{DA} - \overline{CB}$

38.3.

a) O tetraedro é constituído por 4 faces iguais que são triângulos equiláteros.

Assim sendo, para calcular a área total do tetraedro basta determinar a área de uma face.



Tendo em atenção o esquema em cima e aplicando o teorema de Pitágoras, sabe-se que:

$$k^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow k^2 - \frac{k^2}{4} = h^2 \Leftrightarrow \frac{3k^2}{4} = h^2$$

Donde se conclui que $h = \frac{\sqrt{3}k}{2}$.

Então, $A_t = 4 \times \frac{k \times \frac{\sqrt{3}k}{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}k^2}{4} = \sqrt{3}k^2$.

b) $A_t = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}k^2 = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$

Como $k > 0$, conclui-se que $k = 2$.

Então, o perímetro P de cada face é dado por: $P = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$.

Proposta 39

39.1. Como o vértice D do cubo tem coordenadas $(6, 6, 6)$, conclui-se que o cubo tem aresta 6.

Então, $\overline{NP} = P - N = (6, 3, 6) - (3, 0, 6) = (3, 3, 0)$ e

$\overline{GM} = M - G = (6, 0, 3) - (0, 6, 0) = (6, -6, 3)$.

39.2. O triângulo $[MPN]$ é equilátero e a medida do comprimento do seu lado é dada por $\|\overline{NP}\|$.

$$\|\overline{NP}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}.$$

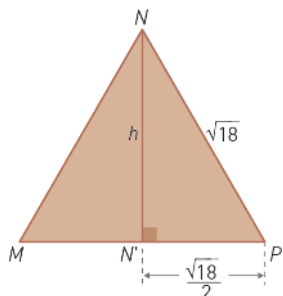
Designemos por h a altura do triângulo $[MPN]$.

Tendo em atenção o esquema seguinte e aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\sqrt{18})^2 = \left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow 18 - \frac{18}{4} = h^2 \Leftrightarrow \frac{54}{4} = h^2$$

$$\text{Donde se conclui que } h = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Então, } V_{[MPN]} = \frac{\frac{\sqrt{18} \times 3\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{4}}{4} = \frac{9\sqrt{12}}{4} = \frac{9 \times 3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$



39.3. $V_{peça} = 6^3 = 216$ (unidades de volume).

$$V_{[MNPA]} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (unidades de volume).}$$

$$\frac{V_{[MNPA]}}{V_{peça}} = \frac{4,5}{216} \approx 0,02 \text{ (2\%)}$$

Pág. 217

Proposta 40

40.1. Um ponto colinear com A e B pertence à reta AB .

Consideremos então, por exemplo, $T = A + 2\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = B - A = (4, 0) - (1, 3) = (3, -3).$$

$$\text{Logo, } T = A + 2\overline{AB} = (1, 3) + 2(3, -3) = (1, 3) + (6, -6) = (7, -3).$$

40.2. Como $\vec{u} = -\vec{e} + 3\vec{f}$, as coordenadas do vetor $\vec{u}$ são $(-1, 3)$.

$$\overline{AC} = C - A = (-2, -1) - (1, 3) = (-3, -4).$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\overline{AC}$ são colineares se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} = \lambda \overline{AC}.$$

$$\vec{u} = \lambda \overline{AC} \Leftrightarrow (-1, 3) = \lambda(-3, -4) \Leftrightarrow (-1, 3) = (-3\lambda, -4\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -3\lambda \\ 3 = -4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{Este sistema é impossível.}$$

Assim sendo, conclui-se que os vetores $\vec{u}$ e $\overline{AC}$ não são colineares, pois não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \overline{AC}$.

$$\mathbf{40.3.} \quad \|\overline{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ e}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

40.4. As coordenadas do ponto médio de $[AC]$ são

$$\left(\frac{1 + (-2)}{2}, \frac{3 + (-1)}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right).$$

40.5. D é o quarto vértice do paralelogramo, então há três localizações possíveis para o vértice D :

$$D = C + \overline{AB} \text{ ou } D = A + \overline{CB} \text{ ou } D = A + \overline{BC}.$$

Seguidamente vamos determinar as possíveis coordenadas do ponto D .

$$D = C + \overline{AB} = (-2, -1) + (3, -3) = (1, -4)$$

$$\text{ou } D = A + \overline{CB} = A + (B - C) = (1, 3) + ((4, 0) - (-2, -1)) = (1, 3) + (6, 1) = (7, 4)$$

$$\text{ou } D = A + \overline{BC} = A - \overline{CB} = (1, 3) - (6, 1) = (-5, 2)$$

40.6. Seja $\vec{v}$ um vetor colinear com $\vec{u}$, de sentido oposto e de norma igual a 5.

Sabe-se que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}^-$ e $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} = \lambda(-1, 3) = (-\lambda, 3\lambda)$$

$$\|\vec{v}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 9\lambda^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{10\lambda^2} = 5$$

Então, tem-se:

$$10\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25}{10} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{\sqrt{10}} \vee \lambda = -\frac{5}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{10}}{2} \vee \lambda = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Como $\lambda \in \mathbb{R}^-$, conclui-se que $\lambda = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Então, conclui-se que, $\vec{v} = \left(-1 \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \right), 3 \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \right) \right)$, ou seja,

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{3\sqrt{10}}{2} \right).$$

Proposta 41

$$\mathbf{41.1.} \quad \overline{AB} = B - A = (-3, 1, 1) - (1, 2, 0) = (-4, -1, 1).$$

A reta AB passa no ponto $A(1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\overline{AB}$.

Então, uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-4, -1, 1), k \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{41.2.} \quad \overline{BC} = C - B = (5, 3, -1) - (-3, 1, 1) = (8, 2, -2)$$

Os vetores $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ são colineares porque $\overline{BC} = 2\overline{AB}$.

Então, os pontos A , B e C também são colineares.

Logo a afirmação é falsa pois os pontos A , B e C sendo colineares não definem um plano (definem uma reta).

41.3.

a) A esfera E_1 de centro $D(4,0,2)$ e raio 5 pode ser definida pela seguinte condição:

$$(x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25.$$

b) Vamos determinar a distância dos pontos C e B ao centro da esfera E_1 e, em seguida, comparar os valores obtidos com o valor do raio da esfera.

$$\overline{CD} = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(-3-4)^2 + (1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{49+1+1} = \sqrt{51}$$

O ponto C pertence à esfera E_1 porque $\overline{CD} < 5$ e o ponto D não pertence à esfera E_1 porque $\overline{BD} > 5$.

Proposta 42

42.1. Como $B(4,4,0)$, conclui-se que $\overline{OA} = 4$, ou seja, a medida do comprimento da aresta do octaedro é igual a 4.

Seja P a projeção ortogonal do ponto M sobre o plano xOy .

Então, $P(2,2,0)$.

O triângulo $[MPO]$ é isósceles e retângulo em P .

Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{MO})^2 = (\overline{MP})^2 + (\overline{PO})^2$$

$$\Leftrightarrow 4^2 = 2(\overline{MP})^2$$

$$\Leftrightarrow 8 = (\overline{MP})^2$$

Então, $\overline{MP} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Assim sendo, o ponto M tem cota igual a $2\sqrt{2}$ e as suas coordenadas são $(2,2,2\sqrt{2})$.

$$42.2. \overline{BM} = M - B = (2,2,2\sqrt{2}) - (4,4,0) = (-2,-2,2\sqrt{2}).$$

A reta BM passa no ponto $B(4,4,0)$ e tem a direção do vetor

$\overline{BM}$.

Então, uma equação vetorial da reta BM é:

$$(x,y,z) = (4,4,0) + k(-2,-2,2\sqrt{2}), k \in \mathbb{R}.$$

42.3. Substituindo k por um número real entre 0 e 1, na equação vetorial da reta BM , obtém-se as coordenadas de um ponto que pertence à aresta $[BM]$ e não é vértice do octaedro.

Se, por exemplo, $k = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$(x,y,z) = (4,4,0) + \frac{1}{2}(-2,-2,2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (4,4,0) + (-1,-1,\sqrt{2}) \Leftrightarrow (x,y,z) = (3,3,\sqrt{2}).$$

Então, o ponto de coordenadas $(3,3,\sqrt{2})$ pertence à aresta $[BM]$ e não é vértice do octaedro.

Proposta 43

43.1. As coordenadas do ponto P são do tipo (x,y) .

$$\overline{AP} = P - A = (x,y) - (2,-4) = (x-2,y+4) \text{ e } \vec{e}_2(0,1).$$

Então, tem-se:

$$\vec{u} = \overline{AP} - 2\vec{e}_2 \Leftrightarrow (-1,3) = (x-2,y+4) - 2(0,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1,3) = (x-2,y+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-1 \\ y+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Assim sendo, $P(1,1)$.

Como as coordenadas do ponto P são iguais, P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

43.2.

$$a) (a+1)x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = -(a+1)x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{-(a+1)}{2}x + \frac{1}{2}$$

Se a reta tem a direção do vetor $\vec{u} = (-1,3)$, então tem declive igual a -3 .

Então, tem-se que:

$$\frac{-(a+1)}{2} = -3 \Leftrightarrow a+1 = 6 \Leftrightarrow a = 5.$$

A equação da reta pertencente à família dada que tem a direção do vetor $\vec{u}$ é $6x + 2y = 1$.

b) Se a reta é paralela ao eixo Ox , então tem declive igual a 0.

Então, tem-se que:

$$\frac{-(a+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

A equação da reta pertencente à família dada que é paralela ao eixo Ox é $2y = 1$, ou seja, $y = \frac{1}{2}$.

43.3. Para $a = -2$, obtém-se a reta de equação $-x + 2y = 1$.

a) Sejam B e C os pontos de interseção da reta com o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente. Então, $B(x,0)$ e $C(0,y)$.

Para determinar a abscissa do ponto B substitui-se y por 0 na equação da reta e obtém-se:

$$-x + 2 \times 0 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Assim, as coordenadas do ponto B são $(-1,0)$.

Para determinar a ordenada do ponto C substitui-se x por 0 na equação da reta e obtém-se:

$$-0 + 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Assim, as coordenadas do ponto C são $(0,\frac{1}{2})$.

$$b) -x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

O declive da reta é igual a $\frac{1}{2}$.

Um vetor diretor da reta é $\vec{u}(2,1)$.

A reta passa no ponto de coordenadas $(-1,0)$.

Então, uma equação vetorial da reta é:

$$(x,y) = (-1,0) + k(2,1), k \in \mathbb{R}.$$

Proposta 44

44.1. As coordenadas dos outros vértices do prisma são:

$$A(10,0,0), C(0,4,0), O(0,0,0), D(10;0;2,5), F(0;4;2,5), G(0;0;2,5) \text{ e } H(10,2,3).$$

44.2.

a) $A_{\{EFIH\}} = \overline{EF} \times \overline{IF}.$

$$\overline{EF} = 10 \text{ e } \overline{IF} = \sqrt{(0-0)^2 + (2-4)^2 + (3-2,5)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Então, } A_{\{EFIH\}} = 10 \times \frac{\sqrt{17}}{2} = 5\sqrt{17} \text{ m}^2$$

b) A secção produzida no prisma pelo plano $y=2$ é o retângulo $[HIMN]$, sendo M e N os pontos médios das arestas $[OC]$ e $[AB]$, respectivamente.

$$\text{Então, } A_{\text{secção}} = 3 \times 10 = 30 \text{ m}^2.$$

c) A secção produzida no prisma pelo plano $x=3$ é um pentágono geometricamente igual ao pentágono $[ABEHD]$.

$$\text{Então, } A_{\text{secção}} = A_{\{ABED\}} + A_{\{EHD\}} = 4 \times 2,5 + \frac{4 \times 0,5}{2} = 10 + 1 = 11 \text{ m}^2.$$

44.3. $V_{\text{sólido}} = A_b \times h = 11 \times 10 = 110 \text{ m}^3$

O corte provocado no prisma pelo plano $z=k$ divide-o em dois sólidos. Se esses sólidos têm igual volume, então o sólido inferior é um prisma quadrangular e o sólido superior é um prisma pentagonal.

$$V_{\text{sólido inferior}} = 55 \Leftrightarrow 10 \times 4 \times k = 55 \Leftrightarrow k = \frac{55}{40} \Leftrightarrow k = \frac{11}{8}$$

44.4. $\overline{HE}$ é um vetor diretor da reta HE .

$$\overline{HE} = E - H = (10;4;2,5) - (10,2,3) = (0;2;-0,5)$$

A reta HE passa no ponto $H(10,2,3)$ e tem a direção do vetor

$$\overline{HE}.$$

Então, uma equação vetorial da reta HE é:

$$(x,y,z) = (10,2,3) + k(0;2;-0,5), k \in \mathbb{R}.$$

44.5. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[BI]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PI}.$

$$\begin{aligned} \overline{PB} = \overline{PI} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-10)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2} = \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \end{aligned}$$

Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} (x-10)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 &= (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 8y + 16 + z^2 &= x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\ \Leftrightarrow -20x - 8y + 4y + 6z + 100 + 16 - 4 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow -20x - 4y + 6z + 103 &= 0 \end{aligned}$$

Então, uma equação do plano mediador de $[BI]$ é $-20x - 4y + 6z + 103 = 0.$

Pág. 219

Proposta 45

45.1. Por observação da figura, conclui-se que:

$$\overline{AD} = (3, -1), \overline{HG} = (1, -1), \overline{BC} = (0, -3), \overline{GE} = (-4, 0) \text{ e } \overline{FG} = (2, 4).$$

45.2. As coordenadas do ponto médio de $[FH]$ são

$$\left(\frac{3+4}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{ e as coordenadas do ponto médio de}$$

$$[AB] \text{ são } \left(\frac{-4+(-3)}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = \left(-\frac{7}{2}, 1 \right).$$

45.3. A reta CD passa em $D(-1,1)$ e tem a direção do vetor

$$\overline{CD} = (2, 4).$$

Então, a reta CD pode ser definida pela seguinte equação vetorial: $(x,y) = (-1,1) + k(2,4), k \in \mathbb{R}.$

A reta BD passa em $B(-3,0)$ e tem a direção do vetor

$$\overline{BD} = (2, 1).$$

Então, a reta BD pode ser definida pela seguinte equação vetorial: $(x,y) = (-3,0) + k(2,1), k \in \mathbb{R}.$

A reta r passa em $E(1,3)$ e, como é paralela à reta HF , tem a direção do vetor $\overline{HF} = (-1, -5).$

Então, a reta r pode ser definida pela seguinte equação vetorial: $(x,y) = (1,3) + k(-1, -5), k \in \mathbb{R}.$

45.4. A reta AE tem a direção do vetor $\overline{AE} = (5, 1)$, então o seu

declive é igual a $\frac{1}{5}.$

A equação reduzida da reta AE é do tipo $y = \frac{1}{5}x + b.$

Como o ponto $E(1,3)$ pertence à reta AE , tem-se:

$$3 = \frac{1}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{5} = b \Leftrightarrow \frac{14}{5} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AE: y = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}.$$

A reta DG tem a direção do vetor $\overline{DG} = (6, 2)$, então o seu declive

é igual a $\frac{1}{3} \left(m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \right).$

A equação reduzida da reta DG é do tipo $y = \frac{1}{3}x + b.$

Como o ponto $G(5,3)$ pertence à reta DG , tem-se:

$$3 = \frac{1}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow 3 - \frac{5}{3} = b \Leftrightarrow \frac{4}{3} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } DG: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

A reta FE tem a direção do vetor $\overline{FE} = (-2, 4)$, então o seu

declive é igual a $-2 \left(m = \frac{4}{-2} = -2 \right).$

A reta que passa na origem e é paralela à reta FE , tem ordenada na origem igual a 0 e tem declive -2 (pois retas paralelas têm o mesmo declive).

Equação reduzida da reta que passa na origem e é paralela à reta FE : $y = -2x$.

45.5. As projeções ortogonais dos segmentos de reta $[EH]$ e $[HG]$ sobre o eixo das ordenadas são definidas pela condição $x = 0 \wedge 3 \leq y \leq 4$.

45.6. A afirmação é falsa. Segmentos de reta distintos podem ter a mesma projeção ortogonal, como se verificou na questão anterior.

Proposta 46

46.1. Sendo $[AB]$ um dos diâmetros da circunferência, então o centro é o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = (1, 1).$$

Em seguida determina-se o raio r da circunferência.

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(3+1)^2 + (-2-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

Então, a circunferência de diâmetro $[AB]$ é definida pela equação:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

46.2. A reta AB passa em $A(3, -2)$ e tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4) - (3, -2) = (-4, 6)$$

Então, a reta AB pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 - 4k \\ y = -2 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

46.3.

a) A reta paralela a Oy e que passa por A é definida pela equação $x = 3$.

O ponto P pertence à reta de equação $x = 3$ se:

$$1 - 2k = 3 \Leftrightarrow k = -1$$

b) A projeção ortogonal do ponto $B(-1, 4)$ sobre a reta de equação $x = 9$ é o ponto de coordenadas $(9, 4)$.

Assim sendo, o ponto P é a projeção ortogonal do ponto B sobre a reta de equação $x = 9$ se:

$$1 - 2k = 9 \wedge k^2 + 3k = 4 \Leftrightarrow -2k = 8 \wedge k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$k = -4 \wedge k = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -4 \wedge (k = 1 \wedge k = -4) \Leftrightarrow k = -4$$

Proposta 47

$$47.1. m_{AB} = \frac{5-1}{7-3} = \frac{4}{4} = 1.$$

Sendo P o ponto médio do lado $[BC]$, então as suas coordenadas

$$\text{são } \left(\frac{7+1}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (4, 4).$$

Q é o ponto médio do lado $[AC]$, então as suas coordenadas são

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (2, 2).$$

$$m_{PQ} = \frac{2-4}{2-4} = 1.$$

As retas AB e PQ são paralelas porque têm o mesmo declive.

$$47.2. m_{AC} = \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1.$$

R é o ponto médio do lado $[AB]$, então as suas coordenadas são

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (5, 3).$$

$$m_{PR} = \frac{3-4}{5-4} = -1.$$

As retas AC e PR são paralelas porque têm o mesmo declive.

$$47.3. m_{BC} = \frac{3-5}{1-7} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \text{ e } m_{QR} = \frac{3-2}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

As retas BC e QR são paralelas porque têm o mesmo declive.

Proposta 48

$$48.1. \text{ O declive da reta } AB \text{ é dado por } m_{AB} = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

$$x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

A reta de equação $x + y - 2 = 0$ tem declive -1 .

Então, a reta AB é paralela à reta de equação $x + y - 2 = 0$ pois têm o mesmo declive.

$$48.2. 2y - kx + 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = kx - 5 \Leftrightarrow y = \frac{k}{2}x - \frac{5}{2}.$$

A reta de equação $2y - kx + 5 = 0$ é paralela à reta AB se

$$\frac{k}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -2.$$

Proposta 49

Designemos por r a reta que passa nos pontos de coordenadas $(3, 1)$ e $(0, -2)$ e por s a reta que passa nos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 2)$.

$$m_r = \frac{-2-1}{0-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \text{ e } m_s = \frac{2-0}{0-1} = -2.$$

A reta r é definida pela equação $y = x - 2$ e a reta s é definida pela equação $y = -2x + 2$.

P é o ponto de interseção das retas r e s .

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} - 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

O ponto P tem de coordenadas $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

A reta OP passa em $O(0,0)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{OP}$.

$$\overrightarrow{OP} = P - O = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Então, a reta OP pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (0, 0) + k \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 221

Proposta 50

50.1. Como $B(6,6)$, conclui-se que o quadrado $[OABC]$ tem 6 unidades de comprimento. Então, o ponto C tem de coordenadas $(0,6)$.

Como P é o ponto médio de $[BC]$, as suas coordenadas são

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{6+6}{2}\right) = (3,6).$$

S é o ponto de interseção das diagonais do quadrado $[OABC]$, então é o ponto médio de $[OB]$.

As coordenadas do ponto S são $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (3,3)$.

50.2. Os pontos P e S têm abscissa igual 3. Então, a reta PS pode ser definida pela equação $x = 3$.

50.3. A reta RP passa nos pontos $P(3,6)$ e $A(6,0)$.

O declive da reta RP é dado por $\frac{0-6}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2$.

A equação reduzida da reta RP é do tipo $y = -2x + b$.

Como o ponto $A(6,0)$ pertence à reta RP , tem-se:

$$0 = -2 \times 6 + b \Leftrightarrow 12 = b.$$

Conclusão: o declive da reta RP é -2 e a ordenada na origem é 12 .

50.4. $s \parallel RP \Leftrightarrow m_s = m_{RP} \Leftrightarrow m_s = -2$

A equação reduzida da reta s é do tipo $y = -2x + b$.

Como o ponto $B(6,6)$ pertence à reta RP , tem-se:

$$6 = -2 \times 6 + b \Leftrightarrow 18 = b.$$

Equação reduzida da reta s : $y = -2x + 18$.

50.5. As retas OA e OS são definidas pelas equações $y = 0$ e $y = x$, respetivamente.

$m_{AS} = \frac{3-0}{3-6} = \frac{3}{-3} = -1$ e a ordenada na origem da reta AS é 6

porque a reta passa em $C(0,6)$.

A reta AS é definida por $y = -x + 6$.

Assim sendo, o triângulo $[OAS]$ é definido pela seguinte condição: $y \geq 0 \wedge y \leq x \wedge y \leq -x + 6$.

50.6. A reta OP passa em $O(0,0)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{OP}$.

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (3,6) \text{ e } m_{OP} = \frac{6}{3} = 2.$$

Equação reduzida da reta OP : $y = 2x$.

A reta AC passa em $C(0,6)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,6) - (6,0) = (-6,6) \text{ e } m_{AC} = \frac{6}{-6} = -1.$$

Equação reduzida da reta AC : $y = -x + 6$.

Q é o ponto de interseção das retas OP e AC .

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2 \end{cases}$$

O ponto Q tem de coordenadas $(2,4)$.

50.7.

$$\text{a) } A_{\{OQC\}} = \frac{\overline{OC} \times x_Q}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6 \text{ (unidades de área).}$$

$$\text{b) } A_{\{ASR\}} = A_{\{ABS\}} - A_{\{ABR\}} = \frac{6 \times 3}{2} - \frac{6 \times 2}{2} = 3 \text{ (unidades de área).}$$

$$\text{c) } A_{\{PQSR\}} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PS}}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ (unidades de área).}$$

Proposta 51

51.1. Equação do plano xOy : $z = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2k \\ 0 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ k = -2 \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano xOy no ponto de coordenadas $(-5,4,0)$.

Equação do plano xOz : $y = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ 0 = -2k \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano xOz no ponto de coordenadas $(1,0,2)$.

Equação do plano yOz : $x = 0$

$$\begin{cases} 0 = 1 + 3k \\ y = -2k \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano yOz no ponto de coordenadas

$$\left(0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

51.2. A reta AB passa pelo ponto de coordenadas $A(1, -2, 4)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 2, 5) - (1, -2, 4) = (-4, 4, 1)$$

A reta AB pode ser representada pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - 4k \\ y = -2 + 4k \\ z = 4 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

51.3. Os pontos A , B e C não definem um plano se forem colineares, isto é, se o ponto C pertencer à reta AB .

Vamos então determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $C(-1, 0, \lambda)$ pertença à reta AB .

$$\begin{cases} -1 = 1 - 4k \\ 0 = -2 + 4k \\ \lambda = 4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = k \\ \frac{1}{2} = k \\ \lambda = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Pág. 222

Proposta 52

52.1.

a) A reta AB passa em $A(-2, 5)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1) - (-2, 5) = (5, -4)$$

Então, o segmento de reta $[AB]$ pode ser definido pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (-2, 5) + k(5, -4), k \in [0, 1].$$

b) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$

A semirreta BA pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (3, 1) + k(-5, 4), k \geq 0.$$

c) Sendo C o ponto da reta r de abscissa 6, então a sua ordenada é igual a $-\frac{2}{3} \times 6 + 1 = -3$.

Se D é o ponto da reta r de ordenada $\frac{1}{2}$, então a sua abscissa é a

$$\text{solução da equação } \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x + 1.$$

$$\text{Ora, } \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x + 1 \Leftrightarrow 3 = -4x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Então, } C(6, -3) \text{ e } D\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) - (6, -3) = \left(-\frac{21}{4}, \frac{7}{2}\right)$$

O segmento de reta $[CD]$ pode ser definido pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y) = (6, -3) + k\left(-\frac{21}{4}, \frac{7}{2}\right), k \in [0, 1].$$

52.2.

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3, -2) - (2, 0, -3) = (-1, 3, 1)$$

Então, o segmento de reta $[AB]$ pode ser definido pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (2, 0, -3) + k(-1, 3, 1), k \in [0, 1].$$

b) A semirreta AB pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (2, 0, -3) + k(-1, 3, 1), k \geq 0$$

Proposta 53

53.1. Designemos por r e s as retas de equações $y = 3x + 1$ e $2y + 6x = 3$, respetivamente.

$$2y + 6x = 3 \Leftrightarrow 2y = -6x + 3 \Leftrightarrow y = -3x + \frac{3}{2}$$

As retas r e s não são paralelas (são concorrentes) porque têm declives diferentes ($m_r = 3$ e $m_s = -3$).

Em seguida vamos determinar as coordenadas do ponto de interseção das retas.

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -3x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 3x + 1 = -3x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 6x + 2 = -6x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 12x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{12} \end{cases}$$

As retas r e s interseitam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{4}\right)$.

53.2. Designemos por r e s as retas de equações $y - 2x = 0$ e $2x - y - 5 = 0$, respetivamente.

$$y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x \text{ e } 2x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5.$$

As retas r e s são paralelas porque têm o mesmo declive ($m_r = m_s = 2$).

53.3. Designemos por r e s as retas de equações $y = 3$ e $3x - 1 = 0$, respetivamente.

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

As retas r e s são concorrentes no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

53.4. Designemos por r e s as retas de equações $\sqrt{2}x + 2y = 1$ e $\sqrt{2}y + x = 0$, respetivamente.

$$\sqrt{2}x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = -\sqrt{2}x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\sqrt{2}y + x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

As retas r e s são paralelas porque têm o mesmo declive

$$\left(m_r = m_s = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

53.5. Designemos por r e s as retas de equações $\pi x - y = 2$ e

$$y = \frac{\pi}{2}x, \text{ respectivamente.}$$

$$\pi x - y = 2 \Leftrightarrow y = \pi x - 2$$

As retas r e s não são paralelas (são concorrentes) porque têm declives diferentes $\left(m_r = \pi \text{ e } m_s = \frac{\pi}{2}\right)$.

Em seguida vamos determinar as coordenadas do ponto de interseção das retas.

$$\begin{cases} y = \pi x - 2 \\ y = \frac{\pi}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi x - 2 \\ \pi x - 2 = \frac{\pi}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi x - 2 \\ 2\pi x - 4 = \pi x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi x - 2 \\ \pi x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{4}{\pi} \end{cases}$$

As retas r e s intersectam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{4}{\pi}, 2\right)$.

Proposta 54

54.1. A reta de equação $2x - y = 1$ tem declive 2 pois

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

Sabe-se que retas paralelas têm o mesmo declive, então obtém-se uma reta paralela quando $m = 2$.

54.2. A reta de equação $(x, y) = (-1, 2) + k(2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$ tem

$$\text{declive } -\frac{3}{2}.$$

Sabe-se que retas concorrentes têm declives diferentes, então obtém-se uma reta concorrente quando $m \neq -\frac{3}{2}$.

Pág. 223

Proposta 55

Como a circunferência de centro em C é definida pela equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$, o ponto C tem coordenadas $(2, 3)$.

Para definir por uma condição a região sombreada é necessário determinar as equações reduzidas das retas AC e BC .

Reta AC

$$m_{AC} = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2} \text{ e a ordenada na origem é } 2.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AC: y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Reta BC

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-3} = -2.$$

A equação reduzida da reta BC é do tipo $y = -2x + b$.

Como o ponto $B(3, 1)$ pertence à reta, tem-se:

$$1 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow 7 = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } BC: y = -2x + 7.$$

A região sombreada, incluindo a fronteira, pode ser definida pela condição:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 5 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2 \wedge y \geq -2x + 7$$

Proposta 56

56.1. A reta AB é definida pela equação $x + 2y - 2 = 0$.

$$x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = -x + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

A reta AB tem declive $-\frac{1}{2}$.

Como retas paralelas têm o mesmo declive, sabe-se que a equação reduzida da reta paralela a AB e que passa pelo ponto C é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

O ponto $C(-4, 0)$ pertence à reta, logo tem-se:

$$0 = -\frac{1}{2} \times (-4) + b \Leftrightarrow b = -2$$

Então, a equação da reta pedida é $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

56.2. $B(0, 1)$ pois é o ponto de interseção da reta AB com o eixo das ordenadas.

O ponto A tem ordenada igual a zero pois pertence ao eixo das abcissas.

Como A pertence à reta AB , então tem-se:

$$x + 2 \times 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Então, $A(2, 0)$.

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \text{ cm}^2$$

56.3. Os pontos do plano equidistantes dos pontos $C(-4, 0)$ e

$O(0, 0)$ constituem a mediatriz do segmento de reta $[CO]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[CO]$.

Sabe-se que $\overline{PC} = \overline{PO}$.

$$\overline{PC} = \overline{PO} \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+4)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Então, a mediatriz de $[CO]$ é definida pela equação $x = -2$.

56.4. O triângulo $[OAB]$ pode ser definido pela seguinte

$$\text{condição: } x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 1.$$

Pág. 224

Proposta 57

57.1. A circunferência representada tem centro $C(-2, 3)$ e

passa pela origem do referencial, então o seu raio é igual a $\overline{CO}$.

$$\overline{CO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

A circunferência é definida pela equação $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$.

As coordenadas do ponto A são da forma $(x, 0)$ pois A pertence ao eixo Ox .

Como A pertence à circunferência, tem-se:

$$(x+2)^2 + (0-3)^2 = 13 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x+2=2 \vee x+2=-2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-4$$

Como o ponto A tem abscissa negativa, conclui-se que $A(-4,0)$.

As coordenadas do ponto B são da forma $(0,y)$ pois B pertence ao eixo Oy .

Como B pertence à circunferência, tem-se:

$$(0+2)^2 + (y-3)^2 = 13 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 9 \Leftrightarrow y-3=3 \vee y-3=-3 \Leftrightarrow y=6 \vee y=0$$

Como o ponto B tem ordenada positiva, conclui-se que $B(0,6)$.

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{3}{2} \text{ e a ordenada na origem é } 6.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AB: y = \frac{3}{2}x + 6.$$

57.2. A parte sombreada da figura pode ser definida pela

$$\text{condição: } (x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 13 \wedge y \geq \frac{3}{2}x + 6 \wedge y \geq 3$$

57.3. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+4)^2 + y^2 = x^2 + (y-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36$$

$$\Leftrightarrow 12y = -8x + 20$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

O declive da mediatriz de $[AB]$ é igual a $-\frac{2}{3}$.

Então, um vetor diretor da mediatriz de $[AB]$ é $\vec{u}(3,-2)$.

O ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $\overline{CA} = \overline{CB}$.

Uma equação vetorial da mediatriz de $[AB]$ é:

$$(x,y) = (-2,3) + k(3,-2), k \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{57.4.} \begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (-x-3)^2 = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 10x = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 10x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+5) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \vee x+5 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5 \\ y = 5 \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com a reta $y = -x$ são $(0,0)$ e $(-5,5)$.

Proposta 58

58.1. O ponto C pertence ao eixo das ordenadas, então $C(0,y)$.

Designemos por M o ponto médio de $[BC]$. As coordenadas de M

$$\text{são } \left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+y}{2} \right) = \left(2, 1 + \frac{y}{2} \right).$$

Como M pertence à reta r (mediatriz de $[BC]$), tem-se:

$$1 + \frac{y}{2} = 2 \times 2 - 1 \Leftrightarrow y = 4.$$

Então, $C(0,4)$.

58.2. Determinação da equação reduzida da reta AB

$$m_{AB} = \frac{2-0}{4-(-1)} = \frac{2}{5}.$$

A equação reduzida da reta AB é da forma $y = \frac{2}{5}x + b$.

Como o ponto $B(4,2)$ pertence à reta, tem-se:

$$2 = \frac{2}{5} \times 4 + b \Leftrightarrow \frac{2}{5} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AB: y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}.$$

Determinação da equação reduzida da reta AC

$$m_{AC} = \frac{4-0}{0-(-1)} = 4 \text{ e a ordenada na origem é igual a } 4.$$

Equação reduzida da reta AC : $y = 4x + 4$.

Determinação da equação reduzida da reta BC

$$m_{BC} = \frac{4-2}{0-4} = -\frac{1}{2} \text{ e a ordenada na origem é igual a } 4.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } BC: y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

58.3. A equação reduzida da reta r é $y = 2x - 1$.

Como o seu declive é igual a 2, um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1,2)$.

A ordenada na origem é -1 , então a reta r passa no ponto de coordenadas $(0,-1)$.

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y) = (0,-1) + k(1,2), k \in \mathbb{R}.$$

58.4. A região sombreada, incluindo a fronteira, pode ser definida pela condição:

$$y \leq 2x - 1 \wedge y \geq \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 4.$$

Proposta 59

59.1. $m_{DC} = \frac{6-5}{4-(-1)} = \frac{1}{5}$. A equação reduzida da reta DC é da

$$\text{forma } y = \frac{1}{5}x + b.$$

Como o ponto $C(4,6)$ pertence à reta, tem-se:

$$6 = \frac{1}{5} \times 4 + b \Leftrightarrow \frac{26}{5} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } DC: y = \frac{1}{5}x + \frac{26}{5}.$$

$$59.2. m_{AB} = \frac{3-1}{9-(-2)} = \frac{2}{11}.$$

59.3. O Pedro não tem razão na sua afirmação porque o quadrilátero $[ABCD]$ não é um trapézio (pois não tem um par de lados paralelos).

Repara que os declives das retas AB e CD são diferentes. Assim sendo, os lados $[AB]$ e $[CD]$ do quadrilátero $[ABCD]$ não são paralelos.

Proposta 60

Como o vértice D pertence ao eixo das ordenadas, então $D(0, y)$.

O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio se $[AB] \parallel [CD]$, ou seja, se $m_{AB} = m_{CD}$.

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{1-(-1)} = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad m_{CD} = \frac{y-(-3)}{0-5} = -\frac{y+3}{5}.$$

$$m_{CD} = m_{AB} \Leftrightarrow -\frac{y+3}{5} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2y+6=15 \Leftrightarrow y=\frac{9}{2}.$$

Assim sendo, o quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio se $D\left(0, \frac{9}{2}\right)$.

Pág. 226

Proposta 61

61.1. Determinação da equação reduzida da reta r (mediatriz de $[AB]$)

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow 10y = -12x + 17$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{17}{10}$$

$$\text{Equação reduzida da reta } r: y = -\frac{6}{5}x + \frac{17}{10}.$$

Determinação da equação reduzida da reta s que passa nos pontos de coordenadas $(4, 0)$ e $(0, 3)$

$$m_s = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4} \quad \text{e a ordenada na origem é igual a } 3.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } s: y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

A região colorida pode ser definida pela condição:

$$\left(y \leq -\frac{6}{5}x + \frac{17}{10} \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(y \geq -\frac{6}{5}x + \frac{17}{10} \wedge y \leq -\frac{3}{4}x + 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \right)$$

61.2. A circunferência tem centro $C(2, 1)$ e é tangente à reta $y = -2$, então o seu raio é igual a 3 ($1 - (-2) = 3$).

A circunferência é definida pela condição $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Em seguida vamos determinar a equação reduzida da reta OC .

$$m_{OC} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} \quad \text{e a ordenada na origem é igual a } 0.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } OC: y = \frac{x}{2}.$$

A região colorida pode ser definida pela condição

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 9 \wedge y < \frac{x}{2} \wedge y \geq -2 \wedge x \geq 2.$$

61.3. Como a circunferência tem centro C e passa por A , então o raio é igual a $\overline{CA}$.

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}.$$

A circunferência é definida pela condição $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$.

Em seguida vamos determinar a equação reduzida da mediatriz de $[BC]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

Sabe-se que $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

Então, tem-se que: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 4y = 8x + 8$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 2$$

Equação reduzida da mediatriz de $[BC]$: $y = 2x + 2$.

A reta OA tem declive 1 ($m_{OA} = \frac{3-0}{3-0} = 1$) e passa na origem,

então é definida por $y = x$.

A região colorida pode ser definida pela condição

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 20 \wedge y < 2x + 2 \wedge y > x.$$

61.4. Designemos por r_1 o raio da circunferência de centro C e que passa por B e por r_2 o raio da circunferência de centro C e que passa por A .

$$r_1 = \overline{CB} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \quad \text{e}$$

$$r_2 = \overline{CA} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}.$$

A circunferência de centro C e que passa por B é definida pela equação $x^2 + (y-1)^2 = 5$ e a circunferência de centro C e que

passa por A é definida pela equação $x^2 + (y-1)^2 = 10$.

A reta AC tem declive $-\frac{1}{3}$ ($m_{AC} = \frac{1-0}{0-3} = -\frac{1}{3}$) e tem ordenada

na origem igual a 1 , então é definida pela equação $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

O ponto D pertence à circunferência de centro C e que passa por B e ao eixo das ordenadas. Então, por observação da figura, conclui-se que $D(0, 1 + \sqrt{5})$.

A equação reduzida da reta paralela ao eixo Ox e que passa pelo ponto D é $y = 1 + \sqrt{5}$.

A região colorida pode ser definida pela condição

$$5 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 10 \wedge y \leq 1 + \sqrt{5} \wedge y \geq -\frac{1}{3}x + 1.$$

Proposta 62

Para provar que $[ABFD]$ é um paralelogramo, basta provar que $\overline{DF} = \overline{AB}$ e $\overline{BF} = \overline{AD}$.

Como D é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$ e E é o ponto médio dos segmentos de reta $[BC]$ e $[DF]$, então tem-se que:

$$\overline{AC} = 2\overline{DC}, \overline{CB} = 2\overline{CE} \text{ e } \overline{DF} = 2\overline{DE}.$$

$$\text{Ora, } \overline{DF} = 2\overline{DE} = 2(\overline{DC} + \overline{CE}) = 2\overline{DC} + 2\overline{CE} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} \text{ e}$$

$$\overline{BF} = \overline{BE} + \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{DF}) = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AD}.$$

Então, $[ABFD]$ é um paralelogramo.

Proposta 63

Sejam M, N, S e T os pontos médios dos lados do quadrilátero

$$[ABCD], \text{ sabe-se que } \overline{SD} = \frac{1}{2}\overline{CD}, \overline{DT} = \frac{1}{2}\overline{DA}, \overline{NB} = \frac{1}{2}\overline{CB} \text{ e}$$

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA}.$$

$$\overline{ST} = \overline{SD} + \overline{DT} = \frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{DA}) = \frac{1}{2}\overline{CA}$$

$$\overline{NM} = \overline{NB} + \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BA} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{BA}) = \frac{1}{2}\overline{CA}$$

$$\text{Como } \overline{ST} = \frac{1}{2}\overline{CA} \text{ e } \overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{CA}, \text{ conclui-se que } \overline{ST} = \overline{NM}.$$

$$\overline{SN} = \overline{SC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{DB}$$

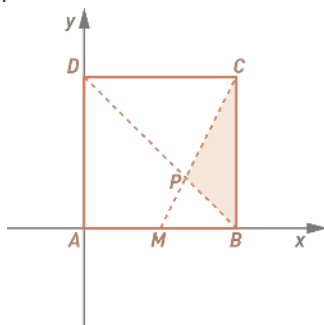
$$\overline{TM} = \overline{TA} + \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{DB}$$

$$\text{Como } \overline{SN} = \frac{1}{2}\overline{DB} \text{ e } \overline{TM} = \frac{1}{2}\overline{DB}, \text{ conclui-se que } \overline{SN} = \overline{TM}.$$

Como $\overline{ST} = \overline{NM}$ e $\overline{SN} = \overline{TM}$, então $[MNST]$ é um paralelogramo.

Proposta 64

Ao quadrado $[ABCD]$ da figura vamos aplicar um referencial o.n. xOy , em que a unidade de comprimento seja o centímetro, de forma que o ponto A coincida com a origem do referencial e os lados $[AB]$ e $[AD]$ estejam contidos nos eixos, conforme ilustra a figura seguinte.



Relativamente ao referencial aplicado, sabe-se que:

$$B(8,0), C(8,8), D(0,8) \text{ e } M(4,0).$$

P é o ponto de interseção das retas BD e MC .

O declive da reta BD é $m_{BD} = \frac{8-0}{0-8} = -1$ e a ordenada na origem

é igual a 8.

A reta BD é definida pela equação $y = -x + 8$.

O declive da reta MC é $m_{MC} = \frac{8-0}{8-4} = 2$.

A equação da reta MC é da forma $y = 2x + b$ e ao ponto M pertence à reta, então tem-se:

$$0 = 2 \times 4 + b \Leftrightarrow b = -8$$

A reta MC é definida pela equação $y = 2x - 8$.

As coordenadas do ponto P obtêm-se resolvendo o sistema formado pelas equações das retas BD e MC .

$$\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ -x + 8 = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ -3x = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{16}{3} + 8 \\ x = \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{3} \\ x = \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\text{Então, } A_{[BCP]} = \frac{8 \times \left(8 - \frac{16}{3}\right)}{2} = \frac{64}{2} = \frac{32}{3} \text{ cm}^2.$$

Proposta 65

Em primeiro lugar vamos determinar as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s .

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

As retas r e s intersectam-se no ponto $A(1,3)$, sendo esse ponto um dos vértices do triângulo.

Como as retas r e s contêm dois lados iguais de um triângulo que medem $\sqrt{10}$ unidades, os outros dois vértices do triângulo

pertencem à circunferência de centro A e raio $\sqrt{10}$ e às retas r e s .

A circunferência de centro A e raio $\sqrt{10}$ é definida pela equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Em seguida vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com as retas r e s .

Interseção da circunferência com a reta r :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (x+2-3)^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 5 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{5} \vee x-1 = -\sqrt{5} \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

A circunferência intersecta a reta r nos pontos de coordenadas $(1 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$ e $(1 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$.

Interseção da circunferência com a reta s :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (3x-3)^2 = 10 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 18x + 9 = 10 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 - 20x = 0 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x(x-2) = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 0 \vee x-2 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

A circunferência interseca a reta s nos pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(2,6)$.

Conclui-se, então, que as possíveis coordenadas dos vértices do triângulo são:

$$(1,3), (1+\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}) \text{ e } (0,0) \text{ ou}$$

$$(1,3), (1+\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}) \text{ e } (2,6) \text{ ou}$$

$$(1,3), (1-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}) \text{ e } (0,0) \text{ ou}$$

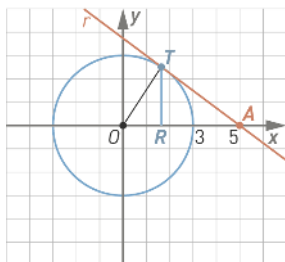
$$(1,3), (1-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}) \text{ e } (2,6).$$

Proposta 66

A circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 9$ tem centro na origem do referencial e raio 3.

Seja r a reta que passa pelo ponto $A(5,0)$ e é tangente a essa circunferência no ponto $T(x,y)$ pertencente ao primeiro quadrante.

Designemos por R a projeção ortogonal de T sobre o eixo das abscissas.



Sabe-se que T pertence à circunferência, logo $\overline{OT} = 3$.

Como o triângulo $[AOT]$ é retângulo em T , aplicando o teorema de Pitágoras tem-se:

$$(\overline{OA})^2 = (\overline{OT})^2 + (\overline{TA})^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + (\overline{TA})^2 \Leftrightarrow 16 = (\overline{TA})^2$$

$$\text{Então, } \overline{TA} = \sqrt{16} = 4.$$

Os triângulos $[AOT]$ e $[ATR]$ são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais (um reto e outro comum de vértice A).

Assim sendo, tem-se:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{RT}} \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = \frac{15-3x}{4}$$

Como o ponto $T(x,y)$ pertence à circunferência sabe-se que $x^2 + y^2 = 9$.

Então, tem-se:

$$x^2 + \left(\frac{15-3x}{4}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{225-90x+9x^2}{16} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 225 - 90x + 9x^2 = 144 \Leftrightarrow 25x^2 - 90x + 81 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5x-9)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x-9=0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$$

$$\text{Sendo } x = \frac{9}{5}, \text{ então } y = \frac{15-3 \times \frac{9}{5}}{4} = \frac{12}{5}.$$

As coordenadas do ponto T são $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Pretende-se determinar a equação da reta r (reta que passa por A e por T).

$$m_r = \frac{\frac{12}{5} - 0}{\frac{9}{5} - 5} = \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{16}{5}} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

A equação reduzida da reta r é do tipo $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Como o ponto $A(5,0)$ pertence à reta, tem-se:

$$0 = -\frac{3}{4} \times 5 + b \Leftrightarrow \frac{15}{4} = b.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } r: y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

No caso de o ponto $T(x,y)$ pertencer ao segundo quadrante, de

modo análogo se conclui que $T\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ e que a equação

reduzida da reta pedida é $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$.

Pág. 228

1. Como $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, então $\vec{v}(2,1)$.

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(-3,2) - (2,1) = (-6,4) - (2,1) = (-8,3)$$

A opção correta é a (C).

2. Sendo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ a equação reduzida da elipse, conclui-se

que $a^2 = 9$.

Sendo $a > 0$, então $a = 3$.

Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse. Então, tem-se:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow 4 + \overline{PF_2} = 6 \Leftrightarrow \overline{PF_2} = 2$$

A opção correta é a (A).

3. O centro da superfície esférica de equação

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18 \text{ é o ponto } C \text{ de coordenadas } (-1,2,0).$$

Sejam (x,y,z) as coordenadas do ponto B .

Sendo $[AB]$ um diâmetro da superfície esférica, então C é o ponto médio de $[AB]$ e tem-se:

$$\frac{0+x}{2} = -1 \wedge \frac{3+y}{2} = 2 \wedge \frac{-4+z}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 1 \wedge z = 4.$$

Então, $B(-2,1,4)$.

A opção correta é a (A).

4. A circunferência representada tem centro no ponto de coordenadas $(0, 2)$ e raio 2. Então, é definida pela seguinte

equação: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Designemos por r a reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(2, 2)$ e por s a reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(-2, 2)$.

$$m_r = \frac{2-0}{2-0} = 1 \text{ e } m_s = \frac{2-0}{-2-0} = -1.$$

As retas r e s são definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$, respetivamente.

A região sombreada da figura é definida pela condição:

$$x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y > -x \wedge y > x$$

A opção correta é a (B).

5. $2x - y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 5$

A reta r tem declive 2, logo as condições apresentadas nas opções (B) e (D) estão excluídas pois nessas situações o declive é igual a $\frac{1}{2}$.

O ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence à reta r porque a proposição $1 = 2 \times (-2) + 5$ é verdadeira.

A opção correta é a (C).

6. Se o ponto $C(k, k+1)$ é equidistante de A e de B , então pertence à mediatriz de $[AB]$.

Assim, tem-se:

$$k + 1 = \frac{k}{2} - 1 \Leftrightarrow 2k + 2 = k - 2 \Leftrightarrow k = -4.$$

A opção correta é a (B).

Pág. 229

1.1. O círculo de centro $A(-3, 4)$ e raio 5 é definido pela inequação $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 25$.

1.2. Reta r : $3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

A reta r tem declive $\frac{3}{2}$ e um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 3)$.

Reta s : $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ 2y = -4 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -2 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$

Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(3, 3)$ e o seu declive é igual a 1

$$\left(m = \frac{3}{3} = 1\right).$$

1.3. A reta r passa no ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e tem a direção do vetor $\vec{r}(2, 3)$.

Equações paramétricas da reta r :

$$\begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = \frac{1}{2} + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = \frac{1}{2} + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

2.1. A reta paralela a Ox e que passa no ponto $A(2, 4)$ é definida pela equação $y = 4$.

O ponto $B(2k, -3 + k)$ pertence a essa reta se:

$$-3 + k = 4 \Leftrightarrow k = 7.$$

2.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2k, -3 + k) - (2, 4) = (2k - 2, -7 + k)$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ 2y = 1 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor da reta definida anteriormente é $\vec{u}(2, 2)$.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem a direção da reta se for colinear com o vetor $\vec{u}(2, 2)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} // \vec{u} &\Leftrightarrow (2k - 2) \times 2 = (-7 + k) \times 2 \Leftrightarrow 4k - 4 = -14 + 2k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2k = -10 \Leftrightarrow k = -5 \end{aligned}$$

2.3. Como a circunferência tem centro O e passa em A , o seu raio é igual a $\overline{AO}$.

$$\overline{AO} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{20}.$$

A circunferência tem centro O e passa em A é definida pela equação $x^2 + y^2 = 20$.

O ponto $B(2k, -3 + k)$ pertence a essa circunferência se:

$$(2k)^2 + (-3 + k)^2 = 20 \Leftrightarrow 4k^2 + 9 - 6k + k^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5k^2 - 6k - 11 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 220}}{10}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{6 \pm 16}{10} \Leftrightarrow k = \frac{11}{5} \vee k = -1$$

3.1. C é o ponto de interseção da reta BC , de equação

$$y = -\frac{1}{3}x + 2, \text{ com o eixo das ordenadas. Então, } C(0, 2).$$

Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, $D = C + \overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (3, -2) - (6, 0) = (-3, -2).$$

$$\text{Logo, } D = (0, 2) + (-3, -2) = (-3, 0).$$

3.2. A circunferência tem centro $C(0, 2)$ e passa na origem do referencial, então tem raio igual a 2.

A circunferência é definida pela seguinte equação:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

$$\text{Equação reduzida da reta } BC: y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

A reta r é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2}$$

Então, tem-se que:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = (x - 6)^2 + (y - 0)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y = -6x + 23 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{23}{4}$$

Equação reduzida da reta r : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{23}{4}$.

A região colorida da figura, incluindo a fronteira, é definida pela condição: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{3}{2}x + \frac{23}{4}$.

4.1. Como o ponto D pertence ao eixo Oz e à face $[ABCD]$, que está contida no plano $z = -4$, então o ponto D tem coordenadas $(0, 0, -4)$.

Como a origem do referencial é o ponto médio de $[DE]$, então $E(0, 0, 4)$.

Assim, o plano EFG é definido pela equação $z = 4$.

A esfera de centro $R(0, 10, 0)$ que é tangente ao plano EFG tem raio 4 e é definida pela condição $x^2 + (y-10)^2 + z^2 \leq 16$.

4.2. O cubo tem aresta 8 porque $\overline{DE} = 4 + 4 = 8$.

Então, $F(8, 0, 4)$ e $G(8, 8, 4)$.

$\overline{FG} = G - F = (8, 8, 4) - (8, 0, 4) = (0, 8, 0)$.

A aresta $[FG]$ é definida pela seguinte equação vetorial:

$(x, y, z) = (8, 0, 4) + k(0, 8, 0)$, $k \in [0, 1]$.

4.3. O ponto P é a interseção da reta AR com a face $[BCHG]$.

Vamos começar por determinar uma equação da reta AR .

$\overline{AR} = R - A = (0, 10, 0) - (8, 0, -4) = (-8, 10, 4)$.

Uma equação vetorial da reta AR é:

$(x, y, z) = (0, 10, 0) + k(-8, 10, 4)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto P tem ordenada 8 pois pertence à face $[BCHG]$ que está contida no plano de equação $y = 8$.

Como P pertence à reta AR , tem-se:

$(x, 8, z) = (0, 10, 0) + k(-8, 10, 4)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 0 - 8k \\ 8 = 10 + 10k \\ z = 0 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8k \\ \frac{1}{5} = k \\ z = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} = k \\ z = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

O ponto P tem de coordenadas $\left(-\frac{8}{5}, 8, -\frac{4}{5}\right)$.

Então, $\overline{PE} = E - P = (0, 0, 4) - \left(-\frac{8}{5}, 8, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, -8, \frac{24}{5}\right)$.

Pág. 9

- 1.1.** A correspondência é unívoca porque a cada aluno corresponde uma e uma só idade.
- 1.2.** A correspondência não é unívoca porque a cada idade pode corresponder mais do que um aluno.
- 2.** O gráfico que relaciona o tempo gasto na deslocação à farmácia com a distância percorrida é o **(B)**.
De facto, a distância percorrida nunca diminui com o passar do tempo e quando $t = 0$ a distância percorrida é nula.

Tarefa 1

- 1.1.** Vamos começar por determinar a área e o perímetro de cada um dos retângulos.

Retângulo	Área	Perímetro
R	$4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$	$2 \times 4 + 2 \times 2 = 12 \text{ cm}$
S	$4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$	$2 \times 4 + 2 \times 3 = 14 \text{ cm}$
T	$2 \times 8 = 16 \text{ cm}^2$	$2 \times 2 + 2 \times 8 = 20 \text{ cm}$
U	$2 \times 7 = 14 \text{ cm}^2$	$2 \times 2 + 2 \times 7 = 18 \text{ cm}$
V	$6 \times 2 = 12 \text{ cm}^2$	$2 \times 6 + 2 \times 2 = 16 \text{ cm}$

Então, $A = \{8, 12, 14, 16\}$ e $P = \{12, 14, 16, 18, 20\}$.

1.2.

- a)** Atendendo aos dados da tabela anterior, conclui-se que $a = 14$, $b = 16$, $c = 12$, $d = 14$ e $e = 20$.
- b)** Atendendo aos dados da tabela anterior, conclui-se que $f = 8$, $g = 12$, $h = 14$ e $i = 16$.

1.3. Analisando as correspondências apresentadas, conclui-se que é na correspondência representada no gráfico I que cada elemento do conjunto de partida corresponde uma e uma só imagem.

No gráfico II, o original 12 tem duas imagens (14 e 16).

Pág. 10

- 3.1.** $D_f = \{-1, 0, 1, 2\}$
- 3.2.** A imagem de -1 é -2 .
- 3.3.** O objeto que tem imagem 2 é o 1.
- 3.4.** $D_g = \{-2, 0, 2, 4\}$
- 3.5.** Observando os objetos e as respetivas imagens, facilmente se conclui que as imagens são o dobro dos objetos. Então, a expressão $f(x) = 2x$ permite determinar as imagens.

4.1. $D_g = \{-3, 0, 1, 3\}$

4.2. A imagem de 1 é -3 .

4.3. $D_g = \{-3, 1\}$

4.4. O objeto que tem imagem -3 é o 1.

Pág. 11

5. As correspondências II e IV são funções porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

6.1.

- a)** $A \times B = \{(-2, -4), (-2, 2), (-2, 5), (-1, -4), (-1, 2), (-1, 5), (1, -4), (1, 2), (1, 5), (3, -4), (3, 2), (3, 5)\}$.
- b)** $B \times A = \{(-4, -2), (-4, -1), (-4, 1), (-4, 3), (2, -2), (2, -1), (2, 1), (2, 3), (5, -2), (5, -1), (5, 1), (5, 3)\}$.

6.2.

- a)** Por exemplo, a função f tal que $G_f = \{(-2, -4), (-1, 2), (1, -4), (3, 5)\}$.
- b)** Por exemplo, a função f tal que $G_f = \{(-2, 2), (-1, 2), (1, -4), (3, 5)\}$.

7.1. Sabe-se que

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 7), (2, 3), (2, 7), (4, 3), (4, 7)\}.$$

Então, por exemplo, o conjunto $C = \{(1, 3), (2, 7), (4, 3)\}$ é um subconjunto de $A \times B$ que é o gráfico de uma função de A em B porque todo o elemento de A tem como imagem um e um só elemento de B .

7.2. Por exemplo, o conjunto $D = \{(1, 3), (1, 7), (2, 3)\}$ é um subconjunto de $A \times B$ que não é o gráfico de uma função de A em B pois a correspondência não é unívoca. Basta observar que o elemento 1 do conjunto A tem duas imagens, o 3 e o 7.

7.3. Sabe-se que:

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 4)\}.$$

Então, por exemplo, o conjunto $E = \{(3, 1), (7, 4)\}$ é um subconjunto de $B \times A$ que é o gráfico de uma função de B em A porque todo o elemento de B tem como imagem um e um só elemento de A .

Pág. 13

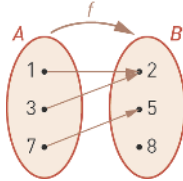
8.1. O contradomínio da restrição de f ao conjunto B é $\{0, 1\}$.

8.2. O contradomínio da restrição de g ao conjunto C é $\{g(-1), g(1), g(2)\} = \{0, 4, 9\}$.

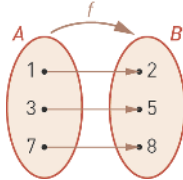
Pág. 14

9.1.

a) Por exemplo, a função definida por:

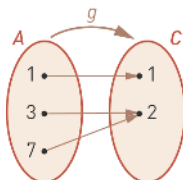


b) Por exemplo, a função definida por:

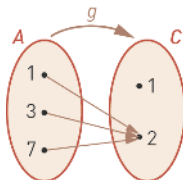


9.2.

a) Por exemplo, a função definida por:

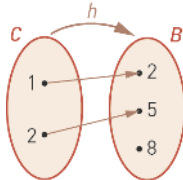


b) Por exemplo, a função definida por:

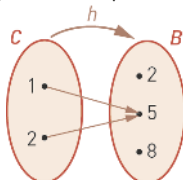


9.3.

a) Por exemplo, a função definida por:



b) Por exemplo, a função definida por:



9.4.

a) Não existe uma função j de C em A que seja sobrejetiva porque, tendo o conjunto C dois elementos, o contradomínio tem no máximo dois elementos. Assim sendo, o contradomínio nunca pode coincidir com o conjunto de chegada (pois este tem três elementos).

b) Não existe uma função j de B em C que seja injetiva porque pelo menos dois dos elementos do conjunto B têm de ter a mesma imagem dado que o conjunto B tem 3 elementos e o conjunto C só tem 2 elementos.

Pág. 15

$$10.1. f(x) = 6 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -6.$$

Os objetos cuja imagem é 6 são -6 e 6 .

10.2. A função f não é injetiva porque objetos simétricos têm a mesma imagem.

10.3. A função f não é sobrejetiva porque o contradomínio $(\mathbb{Z}_0^+)$ não coincide com o conjunto de chegada $(\mathbb{Z})$.

11.1. O domínio da função f é $\left\{-3, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ e o conjunto de chegada é $(\mathbb{R})$.

$$11.2. f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

A imagem de $-\frac{1}{2}$ é $-\frac{3}{4}$.

$$11.3. f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) = 9 - 6 = 3 \text{ e}$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3.$$

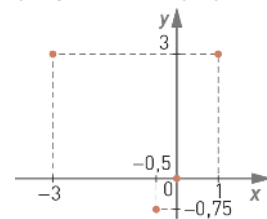
$$\text{Então, } f(-3) = f(1).$$

Conclui-se que f não é injetiva pois objetos diferentes têm a mesma imagem.

$$11.4. f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}, f(-3) = f(1) = 3 \text{ e } f(0) = 0^2 + 2 \times 0 = 0.$$

$$D_f = \left\{-\frac{3}{4}, 0, 3\right\}$$

11.5. A representação gráfica da função f é a seguinte:



$$12.1. f \text{ é injetiva se } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 5x_1 + \frac{1}{2} = 5x_2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

A função f é injetiva.

$$f \text{ é sobrejetiva se } \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = y.$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 5x + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow 10x + 1 = 2y \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{10}$$

A função f é sobrejetiva.

Sendo f injetiva e sobrejetiva é bijetiva.

12.2. f é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2-3x_1}{4} = \frac{2-3x_2}{4} \Leftrightarrow 2-3x_1 = 2-3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

A função f é injetiva.

f é sobrejetiva se $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2-3x}{4} = y \Leftrightarrow 2-3x = 4y \Leftrightarrow x = \frac{2-4y}{3}$$

A função f é sobrejetiva.

Sendo f injetiva e sobrejetiva é bijetiva.

Pág. 17

13.1. $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(1) = 0$

13.2. $g \circ f(3) = g(f(3)) = g(0) = 1$

13.3. $f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(2) = 1$

13.4. $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(0) = 3$

13.5. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} =$
 $= \{x \in \{0, 1, 2, 3\} : f(x) \in \{-1, 0, 1, 3\}\} = \{0, 2, 3\}$

13.6. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} =$
 $= \{x \in \{-1, 0, 1, 3\} : g(x) \in \{0, 1, 2, 3\}\} =$
 $= \{-1, 0, 1, 3\}$

Pág. 18

14.1.

a) $D_{f \circ Id_A} = \{x \in D_{Id_A} : Id_A(x) \in D_f\} =$
 $= \{x \in \{-2, 0, 1, 3\} : Id_A(x) \in \{-2, 0, 1, 3\}\} =$
 $= \{-2, 0, 1, 3\}$

b) $D_{Id_A \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_{Id_A}\} =$
 $= \{x \in \{-2, 0, 1, 3\} : f(x) \in \{-2, 0, 1, 3\}\} = \{1\}$

Cálculo auxiliar: $f(-2) = 2 + 2 = 4$; $f(0) = 2 - 0 = 2$;

$f(1) = 2 - 1 = 1$ e $f(3) = 2 - 3 = -1$.

14.2. $f \circ Id_A(x) = f(Id_A(x)) = f(x) = 2 - x$ e

$Id_A \circ f(x) = Id_A(f(x)) = Id_A(2 - x) = 2 - x$.

Conclui-se, então, que $f \circ Id_A(x) = Id_A \circ f(x)$.

No entanto, $f \circ Id_A \neq Id_A \circ f$ porque $D_{f \circ Id_A} \neq D_{Id_A \circ f}$.

Pág. 19

15.1.

a) $f(2) = 6$

b) $f^{-1}(2) = 6$ porque $f(6) = 2$.

c) $f^{-1}(5) = 4$ porque $f(4) = 5$.

d) $f(4) = 5$

e) $f^{-1}(-3) = 8$ porque $f(8) = -3$.

15.2. $D_{f^{-1}} = D_f' = [-3, 6]$ e $D_{f^{-1}}' = D_f = [2, 8]$.

16.1. Como o ponto $P\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ pertence ao gráfico de g , sabe-se que $g\left(\frac{2}{3}\right) = 3$. Então, $g^{-1}(3) = \frac{2}{3}$.

16.2. Sabe-se que o ponto $B(x, 2)$, tal que $g(x) = 2$.

$g(x) = 2 \Leftrightarrow 3x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Portanto, $g\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ e $g^{-1}(2) = \frac{1}{3}$.

Pág. 20

17.1. A função h não é injetiva porque há objetos diferentes que têm a mesma imagem. Por exemplo, a reta de equação $y = 4$ interseca o gráfico da função h em dois pontos.

17.2.

a) A representação gráfica de f é o segmento de reta $[AB]$. Então, $f(x) = mx + b$.

$m = \frac{6-3}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$ e $b = 3$ porque o ponto $A(0, 3)$ pertence ao gráfico de f .
 Então, $f(x) = x + 3$.

b) $f(x) = y \Leftrightarrow x + 3 = y \Leftrightarrow x = y - 3$

Então, $f^{-1}(x) = x - 3$.

17.3.

a) $D_{g^{-1}} = D_g' = [2, 6]$ e $D_{g^{-1}}' = D_g = [3, 5]$.

b) $g(x) = mx + b$, em que $m = \frac{2-6}{5-3} = \frac{-4}{2} = -2$.

Como o ponto $B(3, 6)$ pertence ao gráfico de g , então tem-se:

$g(3) = 6 \Leftrightarrow -2 \times 3 + b = 6 \Leftrightarrow b = 12$

Então, $g(x) = -2x + 12$.

$g(x) = y \Leftrightarrow -2x + 12 = y \Leftrightarrow -2x = y - 12 \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2} + 6$

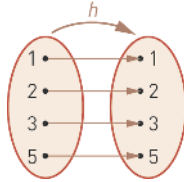
Então, $g^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + 6$.

Pág. 21

18.1. $G_{f^{-1}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1)\}$

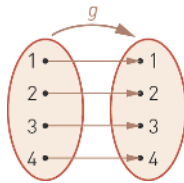
18.2. $h = f^{-1} \circ f = Id_A$, sendo $A = \{1, 2, 3, 5\}$.

Então, a função representa-se pelo seguinte diagrama:



18.3. $g = f \circ f^{-1} = Id_B$, sendo $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Então, a função representa-se pelo seguinte diagrama:



19.1.

$$\begin{aligned} \text{a) } g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{3x-1}{2}\right) = 3 - 5 \times \left(\frac{3x-1}{2}\right) = \\ &= 3 - \frac{15x-5}{2} = \frac{6-15x+5}{2} = \frac{11-15x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(3-5x) = \frac{3(3-5x)-1}{2} = \frac{9-15x-1}{2} = \\ &= \frac{8-15x}{2} = 4 - \frac{15x}{2} \end{aligned}$$

19.2.

$$\text{a) } f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} = y \Leftrightarrow 3x-1 = 2y \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{3}$$

$$\text{Então, } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}.$$

$$\text{b) } g(x) = y \Leftrightarrow 3-5x = y \Leftrightarrow 3-y = 5x \Leftrightarrow x = \frac{3-y}{5}$$

$$\text{Então, } g^{-1}(x) = \frac{3-x}{5}.$$

19.3.

a)

$$g^{-1} \circ g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(3-5x) = \frac{3-(3-5x)}{5} = \frac{3-3+5x}{5} = x$$

b)

$$g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{3-x}{5}\right) = 3 - 5 \times \frac{3-x}{5} = 3 - (3-x) = x$$

20.1.

$$\begin{aligned} \text{a) } g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{3} + 1\right) = \frac{3\left(\frac{2x}{3} + 1\right) - 3}{2} = \\ &= \frac{2x+3-3}{2} = \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f \circ g(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{3x-3}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{3x-3}{2}\right)}{3} + 1 = \frac{3x-3}{3} + 1 = \\ &= x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

20.2.

$$\text{a) } f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x}{3} + 1 = y \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y-3}{2}$$

$$\text{Então, } f^{-1}(x) = \frac{3x-3}{2}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ e } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

As funções f^{-1} e g são funções bijetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que têm a mesma expressão analítica.

Assim sendo, conclui-se que $f^{-1} = g$.

$$\text{b) } g(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} = y \Leftrightarrow 3x-3 = 2y \Leftrightarrow x = \frac{2y+3}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2y}{3} + 1$$

$$\text{Então, } g^{-1}(x) = \frac{2x}{3} + 1, D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \text{ e } D_{g^{-1}} = \mathbb{R}.$$

As funções g^{-1} e f são funções bijetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que têm a mesma expressão analítica.

Assim sendo, conclui-se que $g^{-1} = f$.

Pág. 22

21.1. Como a função f não é injetiva (porque há cidades diferentes às quais corresponde a mesma temperatura máxima), então não tem inversa.

21.2. As cidades a sul de Leiria são Santarém, Portalegre, Lisboa, Setúbal, Évora, Beja e Faro, cujas temperaturas máximas são 17° , 17° , 19° , 21° , 18° , 19° e 21° , respetivamente.

Então, o contradomínio da restrição de f às cidades a sul de Leiria é $\{17^\circ, 18^\circ, 19^\circ, 21^\circ\}$.

Pág. 23

Proposta 1

1.1. Por observação do gráfico apresentado sabe-se que o tempo máximo de estacionamento é de 120 minutos.

1.2.

a) Se o tempo de estacionamento for de 25 minutos, o preço a pagar é de 0,30 euros.

b) Se o tempo de estacionamento for de 50 minutos, o preço a pagar é de 0,60 euros.

c) Se o tempo de estacionamento for de 1 hora, ou seja de 60 minutos, então o preço a pagar é de 0,60 euros.

d) Se o tempo de estacionamento for de 1 hora e 20 minutos, ou seja de 80 minutos, então o preço a pagar é de 1 euro.

1.3. Se o Sr. Silva pagou 60 centimos pelo estacionamento do seu automóvel, conclui-se que o tempo de estacionamento foi superior a 30 minutos e não superior a 1 hora.

1.4. A afirmação é falsa pois o preço a pagar não é diretamente proporcional ao tempo de estacionamento. Basta reparar que, por exemplo, o valor a pagar por 15 minutos de estacionamento é o mesmo que por 5 minutos e não três vezes mais.

Proposta 2

As representações B , E e F correspondem a funções porque são correspondências unívocas, ou seja, porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Pág. 24

Proposta 3

A representação gráfica que corresponde à função f que satisfaz todas as condições dadas no enunciado é a B .

A representação C não satisfaz a primeira condição

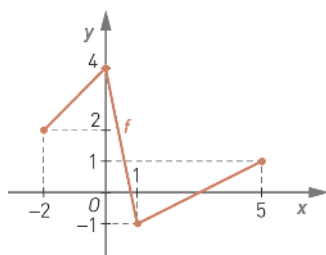
$$(D' \neq [-1, 3]).$$

A representação A não satisfaz a terceira condição

$$(f(-1) < 0 \text{ e } f(3) > 0, \text{ logo } f(-1) \times f(3) < 0).$$

Proposta 4

Por exemplo, a representação gráfica a seguir apresentada corresponde a uma função f que satisfaz as condições dadas.



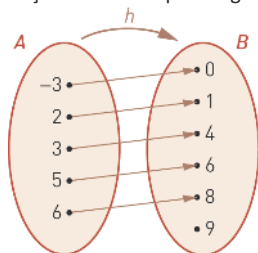
Proposta 5

$$5.1. \quad f(-3) = -3 + 4 = 1, \quad f(2) = 2 + 4 = 6, \quad f(3) = 3 + 4 = 7, \\ f(5) = 5 + 4 = 9 \text{ e } f(6) = 6 + 4 = 10.$$

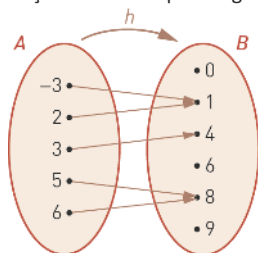
$$\text{Então, } G_f = \{(-3, 1), (2, 6), (3, 7), (5, 9), (6, 10)\}.$$

5.2.

a) Por exemplo, a função h definida pelo seguinte diagrama:



b) Por exemplo, a função h definida pelo seguinte diagrama:



5.3. Como o conjunto A tem 5 elementos e o conjunto B tem 6 elementos, existirá sempre, pelo menos, um elemento do conjunto B que não é imagem de nenhum elemento do conjunto A .

Portanto, não existe uma função de A em B que seja sobrejetiva.

5.4. Como conjunto B tem 6 elementos e o conjunto A tem 5 elementos, existirão sempre, pelo menos, dois elementos do conjunto B que têm a mesma imagem.

Portanto, não existe uma função de B em A que seja injetiva (se fosse injetiva o contradomínio teria o mesmo número de elementos que o domínio).

Pág. 25

Proposta 6

6.1.

a) Por observação gráfica, sabe-se que $D_f' = [-2, 4]$.

b) As soluções da equação $f(x) = 0$ são -1 e 3 pois correspondem às abscissas dos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

c) A equação $f(x) = \sqrt{2}$ tem três soluções pois a reta de equação $y = \sqrt{2}$ interseca o gráfico da função f em três pontos.

d) A equação $f(x) = k$ tem uma e uma só solução quando $k \in [-2, 0[\cup]2, 4]$ pois, nestes casos, a reta de equação $y = k$ só interseca o gráfico da função f uma única vez.

6.2.

a) Por observação gráfica, sabe-se que $f(-2) = -1$, logo o ponto do gráfico de f que tem abscissa -2 é o ponto de coordenadas $(-2, -1)$.

b) Vamos começar por determinar a expressão analítica da função f quando $x \in [3, 5]$.

Sabe-se que se $x \in [3, 5]$, então $f(x) = mx + b$.

$$\text{Como } f(3) = 0 \text{ e } f(5) = 4, \text{ então } m = \frac{4-0}{5-3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como o ponto de coordenadas $(3, 0)$ pertence ao gráfico de f , então tem-se:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3 + b = 0 \Leftrightarrow b = -6$$

Logo, se $x \in [3, 5]$, tem-se $f(x) = 2x - 6$.

$$\text{Então, } f\left(\frac{9}{2}\right) = 2 \times \frac{9}{2} - 6 = 3.$$

O ponto do gráfico de f que tem abscissa $\frac{9}{2}$ é o ponto de

coordenadas $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$.

c) Por observação gráfica, sabe-se que $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 5$. Então, o ponto do gráfico de f que tem ordenada 4 é o ponto de coordenadas $(5, 4)$.

d) Vamos começar por determinar a expressão analítica da função f quando $x \in [-3, 1]$.

Sabe-se que se $x \in [-3, 1]$, então $f(x) = mx + b$.

Como $f(-3) = -2$ e $f(1) = 2$, então $m = \frac{2 - (-2)}{1 - (-3)} = \frac{4}{4} = 1$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f , então tem-se:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 \times 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1$$

Logo, se $x \in [-3, 1]$, tem-se $f(x) = x + 1$.

$$\text{Ora, } f(x) = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow x + 1 = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4} - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{4}.$$

O ponto do gráfico de f que tem ordenada $-\frac{7}{4}$ é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{11}{4}, -\frac{7}{4}\right)$.

Proposta 7

7.1.

a) f é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{2x_1 - 1}{3} = \frac{2x_2 - 1}{3} \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

A função f é injetiva.

f é sobrejetiva se $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{3} = y \Leftrightarrow 2x - 1 = 3y \Leftrightarrow 2x = 3y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y + 1}{2}$$

A função f é sobrejetiva.

Sendo f injetiva e sobrejetiva é bijetiva.

b) A função g não é injetiva porque objetos simétricos têm sempre a mesma imagem. Por exemplo, $g(-1) = g(1) = 1$.

Sabe-se que $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

Assim sendo, a função g não é sobrejetiva porque o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada ($\mathbb{R}$).

7.2.

a) Sabe-se que $h = g|_{\mathbb{R}^-}$.

h é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ conclui-se que $x_1 = x_2$.

Então, a função h é injetiva.

b) Pretende-se determinar $x \in D_h$, isto é, $x \in \mathbb{R}^-$, tal que $h(x) = 64$.

$$\begin{aligned} h(x) = 64 \wedge x \in \mathbb{R}^- &\Leftrightarrow x^2 = 64 \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 8 \vee x = -8) \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow x = -8 \end{aligned}$$

$$\text{c) } h(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

Como $x \in \mathbb{R}^-$, conclui-se que $x = -\sqrt{5}$.

Proposta 8

$$\text{8.1. } g \circ f(3) = g(f(3)) = g(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{8.2. } g \circ f(5) = g(f(5)) = g(5) = 5 - 1 = 4$$

$$\text{8.3. } f \circ g(6) = f(g(6)) = f(6 - 1) = f(5) = 5$$

$$\text{8.4. } f \circ g(2) = f(g(2)) = f(2 - 1) = f(1) = 4$$

8.5.

$$\begin{aligned} \text{a) } D_{g \circ f} &= \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in A : f(x) \in B\} = A = \\ &= \{1, 3, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in B : g(x) \in A\} = \{2, 4, 6\}$$

Pág. 26

Proposta 9

$$\text{9.1. } f \circ g(1) = f(g(1)) = f(2 \times 1 + 1) = f(3) = 1$$

$$\text{9.2. } f \circ g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f\left(2 \times \frac{3}{2} + 1\right) = f(4) = 3$$

$$\text{9.3. } g \circ f(1) = g(f(1)) = g(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$\text{9.4. } g \circ f(3) = g(f(3)) = g(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Proposta 10

10.1.

a) Sabe-se que $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{3} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \times \frac{x}{3} = x$$

Como $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ e $f \circ g(x) = x$, conclui-se que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$.

b) Sabe-se que $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : 3x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x) = \frac{3x}{3} = x$$

Como $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ e $g \circ f(x) = x$, conclui-se que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

10.2.

$$\text{a) } f^{-1}(6) = a \Leftrightarrow f(a) = 6 \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2.$$

Então, $f^{-1}(6) = 2$.

$$\text{b) } g^{-1}(4) = b \Leftrightarrow g(b) = 4 \Leftrightarrow \frac{b}{3} = 4 \Leftrightarrow b = 12.$$

Então, $g^{-1}(4) = 12$.

10.3.

a) Atendendo às conclusões obtidas em 10.1., sabe-se que $f^{-1} = g$.

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

b) Atendendo às conclusões obtidas em 10.1., sabe-se que $g^{-1} = f$.

Portanto, $g^{-1}(x) = 3x$.

Proposta 11

11.1.

a) $f^{-1}(7) = a \Leftrightarrow f(a) = 7 \Leftrightarrow 4a + 3 = 7 \Leftrightarrow a = 1$.

Então, $f^{-1}(7) = 1$.

b) $g^{-1}(5) = b \Leftrightarrow g(b) = 5 \Leftrightarrow 1 - 2b = 5 \Leftrightarrow b = -2$.

Então, $g^{-1}(5) = -2$.

11.2.

a) $f(x) = y \Leftrightarrow 4x + 3 = y \Leftrightarrow 4x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{4}$

Então, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}$.

b) $g(x) = y \Leftrightarrow 1 - 2x = y \Leftrightarrow -2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-y+1}{2}$

Então, $g^{-1}(x) = \frac{-x+1}{2}$.

11.3.

a) $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = 1 - 2(4x + 3) = 1 - 8x - 6 = -8x - 5$

b)

$h(x) = y \Leftrightarrow -8x - 5 = y \Leftrightarrow -8x = y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{-8} \Leftrightarrow x = -\frac{y+5}{8}$

Então, $h^{-1}(x) = -\frac{x+5}{8}$.

Proposta 12

12.1. Por observação gráfica, sabe-se que

$b = f(4) = 4^2 - 2 \times 4 - 3 = 5$.

$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$

Sabe-se que $D_f = [0, 4]$, ou seja, $0 \leq x \leq 4$, e que a representação gráfica da função f é parte de uma parábola de vértice $V(1, -4)$.

Como $1 \in [0, 4]$, conclui-se, então, que $a = -4$ (corresponde ao mínimo absoluto da função).

12.2. Não existe função inversa de f porque f não é uma função bijetiva (uma vez que não é injetiva).

12.3.

a) $f(x) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -1) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 3$

Então, $D_g = [3, 4]$.

b) $g^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) = x \Leftrightarrow g(x) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 12 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 21 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 4 \times (-21)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{400}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{8+20}{8} \vee x = \frac{8-20}{8} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$

Ora, $\frac{7}{2} \in D_g$ e $-\frac{3}{2} \notin D_g$.

Então, $g^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{7}{2}$.

Proposta 13

Se g uma função bijetiva, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$,

então sabe-se que $g = f^{-1}$.

$f^{-1}(-1) = -2$ porque $f(-2) = -1$.

$f^{-1}(3) = 0$ porque $f(0) = 3$.

$f^{-1}(4) = 2$ porque $f(2) = 4$.

Designemos por h a restrição de g ao conjunto $A = \{-1, 3, 4\}$.

Então, $G_h = \{(-1, -2), (3, 0), (4, 2)\}$.

Proposta 14

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+2}{4} = y \Leftrightarrow x+2 = 4y \Leftrightarrow x = 4y-2$

Então, $f^{-1}(x) = 4x-2$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

$g(x) = y \Leftrightarrow 4x+2 = y \Leftrightarrow 4x = y-2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{4}$

Então, $g^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$ e $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

$D_{f^{-1} \circ g^{-1}} = \{x \in D_{g^{-1}} : g^{-1}(x) \in D_{f^{-1}}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{4} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$

$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right) = 4 \times \frac{x-2}{4} - 2 = x - 2 - 2 = x - 4$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{4} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{4}\right) = 4 \times \frac{x+2}{4} + 2 = x + 2 + 2 = x + 4$

$g \circ f(x) = y \Leftrightarrow x + 4 = y \Leftrightarrow x = y - 4$

Então, $(g \circ f)^{-1}(x) = x - 4$ e $D_{(g \circ f)^{-1}} = \mathbb{R}$.

Assim sendo, conclui-se que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposta 15

$$\begin{aligned}
 g \circ f(1) = 0 &\Leftrightarrow g(f(1)) = 0 \Leftrightarrow g(a+b) = 0 \Leftrightarrow a(a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a = 0 \vee (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a+b = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -b
 \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, conclui-se que $a = -b$.

Pág. 29

$$\begin{aligned}
 22.1. D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq -1\} = \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}
 \end{aligned}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$22.2. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Nota: A condição $x^2 + 1 \neq 0$ é universal.

$$22.3. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x \geq 0\}$$

$$1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

$$22.4. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq 0 \wedge \sqrt{x-4} \neq 0\}$$

$$x - 4 \geq 0 \wedge \sqrt{x-4} \neq 0 \Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

$$D_f =]4, +\infty[$$

$$22.5. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge 1 - x \geq 0\}$$

$$x \neq 0 \wedge 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge -x \geq -1 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \leq 1$$

$$D_f =]-\infty, 1] \setminus \{0\}$$

$$22.6. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0 \wedge |x| - 2 \neq 0\}$$

$$1 - x \geq 0 \wedge |x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \wedge |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge$$

$$\wedge \sim(x = 2 \vee x = -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \neq -2$$

$$D_f =]-\infty, 1] \setminus \{-2\}$$

$$22.7. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 12 \neq 0\}$$

$$x^2 + x - 12 \neq 0 \Leftrightarrow \sim(x^2 + x - 12 = 0) \Leftrightarrow \sim\left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim\left(x = \frac{-1 \pm 7}{2}\right) \Leftrightarrow \sim\left(x = \frac{-1+7}{2} \vee x = \frac{-1-7}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sim(x = 3 \vee x = -4) \Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -4$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$$

$$22.8. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 5 \geq 0 \wedge x^2 - 3x \neq 0\}$$

$$3x + 5 \geq 0 \wedge x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge \sim(x^2 - 3x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge \sim(x^2 - 3x = 0) \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge \sim[x(x-3) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge \sim(x = 0 \vee x - 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge \sim(x = 0 \vee x = 3) \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$$

$$D_f = \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[\setminus \{0, 3\}$$

Pág. 30**23.1.**

x	-2		-1		2		5		6
f(x)	+	+	0	-	0	+	0	-	-

23.2.

$$a) f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2] \cup [5, 6]$$

$$b) f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-2, -1[\cup]2, 5[$$

23.3.

$$a) \text{ Como } f(\pi) > 0 \text{ e } f(\sqrt{2}) < 0, \text{ então } f(\pi) \times f(\sqrt{2}) < 0.$$

$$b) f\left(\frac{11}{2}\right) < 0 \text{ e } f\left(-\frac{3}{2}\right) > 0, \text{ então } f\left(\frac{11}{2}\right) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0.$$

$$\text{Como } f(1) < 0 \text{ e } f\left(\frac{11}{2}\right) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0, \text{ então}$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(1) < 0.$$

24.1. Para determinar os zeros da função f é necessário começar por definir cada uma das semirretas analiticamente.

1.º) Definir a semirreta com origem no ponto $(2, -2)$ e que passa no ponto $(-4, 1)$.

Sabe-se que a semirreta é definida por uma condição do tipo

$$y = mx + b, \text{ em que } m = \frac{1 - (-2)}{-4 - 2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

Como o ponto de coordenadas $(2, -2)$ pertence à semirreta, então tem-se:

$$-2 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow -2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Assim sendo, a semirreta é definida pela condição $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

2.º) Definir a semirreta com origem no ponto $(2, -2)$ e que passa no ponto $(4, 2)$.

Sabe-se que a semirreta é definida por uma condição do tipo

$$y = mx + b, \text{ em que } m = \frac{2 - (-2)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como o ponto de coordenadas $(2, -2)$ pertence à semirreta, então tem-se:

$$-2 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow -2 = 4 + b \Leftrightarrow b = -6$$

Assim sendo, a semirreta é definida pela condição $y = 2x - 6$.

3.º) Determinar os pontos de interseção das semirretas com o eixo das abscissas.

$$0 = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow 0 = -x - 2 \Leftrightarrow x = -2$$

$$0 = 2x - 6 \Leftrightarrow 6 = 2x \Leftrightarrow x = 3$$

4.º) Indicar os zeros da função f : -2 e 3 .

24.2.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

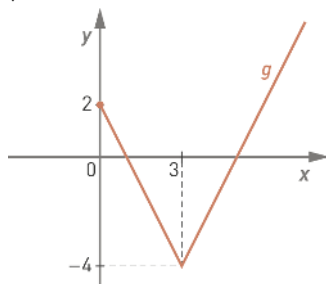
Pág. 31

25.1.

x	-5		-2		0		4
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2

25.2. A equação $f(x) = k$ tem 3 soluções quando $k \in]0, 1[$. De facto, quando $k \in]0, 1[$, a reta horizontal de equação $y = k$ interseca o gráfico da função f em três pontos.

26.1. Por exemplo:



26.2.

a) $g(1) > g(2)$ porque a função g é estritamente decrescente no intervalo $[0, 3]$.

Então, $g(1) - g(2) > 0$.

b) $g(\pi) < g(5)$ porque a função g é estritamente crescente no intervalo $[4, +\infty[$.

Então, $g(\pi) - g(5) < 0$, ou seja, $g(5) - g(\pi) > 0$.

Pág. 32

27.1. Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Conclui-se, então, que a função f é (estritamente) decrescente.

27.2. Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 5x_1 < 5x_2 \Leftrightarrow 5x_1 - 3 < 5x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Conclui-se, então, que a função f é (estritamente) crescente.

27.3. Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \Leftrightarrow \frac{3x_1 - 2}{4} < \frac{3x_2 - 2}{4} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Conclui-se, então, que a função f é (estritamente) crescente.

28.1. $g(x) = 3x + kx - 2 = (3 + k)x - 3$

A função g representa uma função afim decrescente se o seu declive for negativo, isto é, se $3 + k < 0$.

$$3 + k < 0 \Leftrightarrow k < -3 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -3[$$

28.2. $h(x) = x - 2kx + 1 = (1 - 2k)x + 1$

A função h representa uma função afim crescente se o seu declive for positivo, isto é, se $1 - 2k > 0$.

$$1 - 2k > 0 \Leftrightarrow -2k > -1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in]-\infty, \frac{1}{2}[$$

28.3. $j(x) = k^2x + 2kx - 5 = (k^2 + 2k)x - 5$

A função j representa uma função constante se o seu declive for nulo, isto é, se $k^2 + 2k = 0$.

$$k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k(k + 2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -2 \Leftrightarrow k \in \{-2, 0\}$$

29.1. Sabendo que o gráfico de uma função afim é uma reta estritamente crescente se o seu declive for positivo e estritamente decrescente se o seu declive for negativo e que o gráfico da função f passa pela origem, estabelece-se a seguinte correspondência entre as expressões indicadas e as representações gráficas dadas:

$f \rightarrow I$, $g \rightarrow III$ e $h \rightarrow II$.

29.2. A é o ponto de interseção da função h com o eixo das abcissas.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Então, $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

C é o ponto de interseção de interseção dos gráficos das funções g e h .

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x = 3 + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2 \times \frac{4}{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Então, $C\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(3 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{3} - \frac{5}{2} \times \frac{5}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} - \frac{25}{6}}{2} = \frac{\frac{25}{6} - \frac{25}{6}}{2} = \frac{25}{12}$$

29.3. $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow -x + 3 \geq 2x \Leftrightarrow -3x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 1$

Então, $x \in]-\infty, 1]$.

29.4. Designemos por i a função afim cujo gráfico é uma reta paralela à reta III e que passa por A .

Como retas paralelas têm o mesmo declive, a expressão da função i é do tipo $i(x) = -x + b$.

Como o ponto $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pertence ao gráfico da função i , tem-se:

$$i\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Então, $i(x) = -x + \frac{1}{2}$.

Pág. 33

30. $D_f = [1, 3]$ e $D_g = [-1, 3]$.

Sabe-se que $f(x) = mx + b$, em que $m = \frac{3 - (-1)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$.

Como $f(3) = 3$, tem-se:

$$2 \times 3 + b = 3 \Leftrightarrow 6 + b = 3 \Leftrightarrow b = -3$$

Então, $f(x) = 2x - 3$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Zero de f : $\frac{3}{2}$

31.1. O Sr. Silva pagou 18 euros pela deslocação e 30 euros pelas 2,5 horas de trabalho ($2,5 \times 12$).

Então, no total pagou 48 euros.

31.2. $C(t) = 18 + 12t$

31.3. $C(t) = 60 \Leftrightarrow 18 + 12t = 60 \Leftrightarrow 12t = 42 \Leftrightarrow t = 3,5$

O técnico gastou três horas e meia na reparação em casa da D. Amélia.

Tarefa 2

1.1. Após 1 h 30 min, o comboio que partiu de A encontra-se a 255 km ($1,5 \times 170$) da localidade A e o comboio que partiu de B encontra-se a 270 km ($1,5 \times 180$) da localidade B, ou seja, a 189 km ($459 - 270$) da localidade A.

1.2.

a) $f(t) = 170t$ e $g(t) = 459 - 180t$

b) A função f é crescente (declive positivo). A função g é decrescente (declive negativo).

À medida que o tempo passa a distância a A do comboio que parte de A aumenta, enquanto que a distância a A do comboio que parte de B diminui.

c) $g(t_1) = 0 \Leftrightarrow 459 - 180t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{459}{180} \Leftrightarrow t_1 = 2,55$

$$f(t_2) = 459 \Leftrightarrow 170t_2 = 459 \Leftrightarrow t_2 = \frac{459}{170} \Leftrightarrow t_2 = 2,7$$

No contexto apresentado significa que o comboio que parte de B chega a A ao fim de 2,55 horas e que o que parte de A chega a B ao fim de 2,7 horas.

d) Para determinar as coordenadas do ponto P temos de resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = 170t \\ y = 459 - 180t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 170t \\ 170t = 459 - 180t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 170t \\ 350t = 459 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 170t \\ t = \frac{459}{350} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 170 \times \frac{459}{350} \\ t = \frac{459}{350} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \approx 222,94 \\ t \approx 1,31 \end{cases}$$

(utilizando valores arredondados às centésimas)

Então, $P(1,31; 222,94)$.

A abscissa do ponto P indica que os comboios se cruzam após 1,31 horas, aproximadamente, da partida e estão a, aproximadamente, 222,94 km da localidade A.

32.1. Sejam $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tais que $x_1 < x_2$.

Então, $x_1^2 < x_2^2$.

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow a x_1^2 > a x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Então f é decrescente em $[0, +\infty[$.

32.2. Sejam $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ tais que $x_1 < x_2$.

$-x_1 > -x_2$ (representando $-x_1$ e $-x_2$ números não negativos).

Então, $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, ou seja, $x_1^2 > x_2^2$.

$$x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow a x_1^2 < a x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Então f é crescente em $] -\infty, 0]$.

Pág. 35

33.1. Por observação da representação gráfica, constata-se que a família A teve um consumo máximo no mês de agosto.

33.2. Entre setembro e dezembro, a família B teve o maior consumo no mês de outubro. No entanto, o consumo máximo absoluto ocorreu no mês de agosto.

33.3. O consumo das duas famílias foi igual nos meses de março e setembro.

33.4. O consumo da família B foi inferior ao da família A entre os meses de abril e agosto inclusivé.

Pág. 36

34.1. Em $\mathbb{R}$, a função f não é limitada pois o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

34.2. Em $\mathbb{R}_0^+$ tem-se:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \leq 0 \Leftrightarrow -2x + 3 \leq 0 + 3 \Leftrightarrow f(x) \leq 3.$$

Portanto, em $\mathbb{R}_0^+$ a função f é majorada (3 é um majorante) mas não é limitada (pois não é minorada).

34.3. Sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, então tem-se:

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Portanto, em $\mathbb{R}_0^+$ a função g é majorada (0 é um majorante) mas não é minorada.

34.4. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 \geq 0$

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0.$$

Portanto, em $\mathbb{R}_0^+$ a função g é majorada (0 é um majorante) mas não é limitada (pois não é minorada).

Pág. 37

35.1. a) $D_g = [-6, 6]$ e $D_g' = [-4, 7]$.

b) Os zeros da função g são $-4, 1$ e 5 (abscissas dos pontos de interseção do gráfico de g com o eixo das abscissas).

35.2. a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = 5$

Então, o conjunto-solução da condição $g(x) = 0$ é $\{-4, 1, 5\}$.

b) $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-6, -4] \cup [-4, 1] \cup [1, 5], 6]$

Então, o conjunto-solução da condição $g(x) > 0$ é

$$[-6, -4] \cup [-4, 1] \cup [1, 5], 6].$$

c) $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 5[$

Então, o conjunto-solução da condição $g(x) < 0$ é $]1, 5[$.

35.3. Quadro de variação da função g :

x	-6		-4		-2		3		6
$g(x)$	3		0		5		-4		7

A função g é estritamente decrescente nos intervalos $[-6, -4]$ e $[-2, 3]$ e é estritamente crescente nos intervalos $[-4, -2]$ e $[3, 6]$.

Máximo absoluto: 7. Máximos relativos (locais): 3, 5 e 7.
Mínimo absoluto: -4. Mínimos relativos (locais): 0 e -4.

Pág. 38

36. $m_{AB} = \frac{4-0}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$ e $m_{BC} = \frac{3-4}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$.

Assim sendo, $m_{AB} > m_{BC}$.

37. $m_{AB} = \frac{-3-5}{4-0} = \frac{-8}{4} = -2$ e $m_{BC} = \frac{0-(-3)}{5-4} = \frac{3}{1} = 3$.

Assim sendo, $m_{AB} < m_{BC}$.

Pág. 39

38.1. Como P_1 e P_2 são pontos distintos do gráfico de f , de abscissas x_1 e x_2 , respectivamente, sabe-se que

$$P_1(x_1, f(x_1)) = (x_1, ax_1^2) \text{ e } P_2(x_2, f(x_2)) = (x_2, ax_2^2).$$

Seja m o declive da reta P_1P_2 , então tem-se:

$$m = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

38.2. Como P_2 e P_3 são pontos distintos do gráfico de f , de abscissas x_2 e x_3 , respectivamente, sabe-se que

$$P_2(x_2, f(x_2)) = (x_2, ax_2^2) \text{ e } P_3(x_3, f(x_3)) = (x_3, ax_3^2).$$

Seja m' o declive da reta P_2P_3 , então tem-se:

$$m' = \frac{ax_3^2 - ax_2^2}{x_3 - x_2} = \frac{a(x_3^2 - x_2^2)}{x_3 - x_2} = \frac{a(x_3 - x_2)(x_3 + x_2)}{x_3 - x_2} = a(x_3 + x_2).$$

38.3. Sabe-se que $x_1 < x_2$ e $x_2 < x_3$.

Então, $x_1 + x_2 < x_2 + x_2$ e $x_2 + x_2 < x_2 + x_3$.

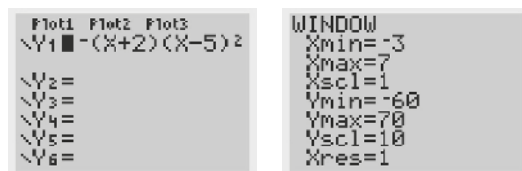
Daqui resulta que $x_1 + x_2 < x_2 + x_3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $a < 0$, obtém-se $a(x_1 + x_2) > a(x_2 + x_3)$, ou seja, $m > m'$.

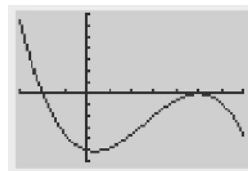
Conclui-se, então, que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

Pág. 40

39. Recorrendo à calculadora gráfica, começa-se por inserir a expressão algébrica da função f e escolhe-se uma janela de visualização adequada.



Obtém-se, então, a seguinte representação do gráfico de f :



Pág. 41

40.1. $f(0) = \frac{7-3 \times 0}{2} = \frac{7}{2}$ e

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{7-3x}{2} = 0 \Leftrightarrow 7-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

O gráfico da função f intersesta o eixo das abscissas no ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ e o eixo das ordenadas no ponto de

coordenadas $\left(0, \frac{7}{2}\right)$.

$$g(0) = -0^2 + 4 \times 0 - 3 = -3 \text{ e}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

O gráfico da função g intersesta o eixo das abscissas nos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(3, 0)$ e o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -3)$.

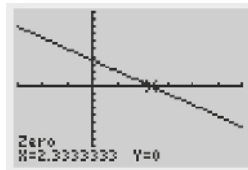
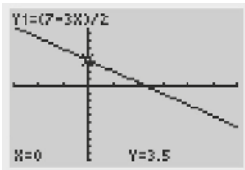
$$h(0) = 0^2 + 10 \times 0 + 25,5 = 25,5 \text{ e}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25,5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 102}}{2}$$

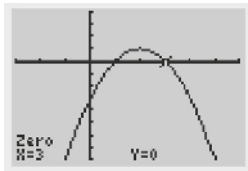
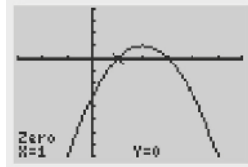
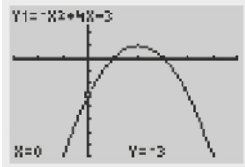
(equação impossível).

O gráfico da função h não intersesta o eixo das abscissas e intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0; 25,5)$.

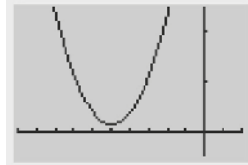
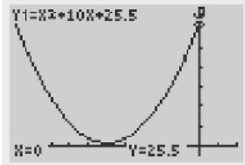
40.2. Função f :



. Função g :

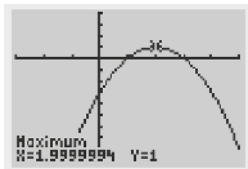


. Função h :

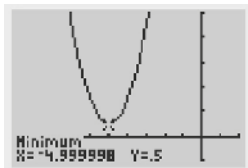


40.3. A função f não tem extremos pois a sua representação gráfica é uma reta não paralela aos eixos coordenados.

Função g



Função h

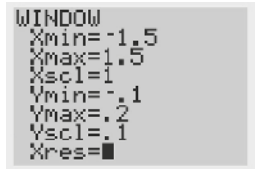
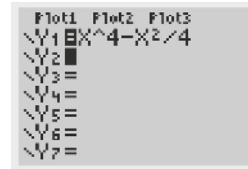


Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que a função g tem máximo absoluto igual a 1 e a função h tem mínimo absoluto igual a 0,5.

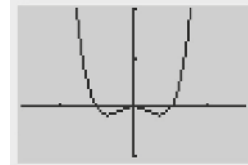
$$41.1. f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, começa-se por inserir a expressão algébrica da função f e, em seguida, escolhe-se uma janela de visualização adequada.



Obtém-se, então, a seguinte representação do gráfico de f :

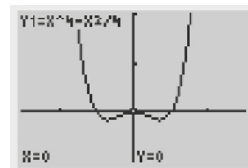
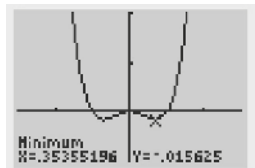
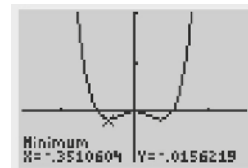


Recorrendo à calculadora gráfica para estudar o sinal da função, conclui-se que:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$$

41.2. Recorrendo à calculadora gráfica determinam-se os extremos da função.



Mínimo absoluto: $-0,02$; Máximo relativo: 0 .

41.3. Por observação gráfica, sabe-se que a função f é negativa e crescente no intervalo $] -0,2; 0[$ (por exemplo).

Pág. 42

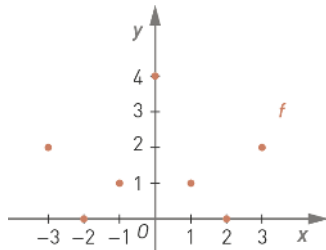
42.1. Como $f(3) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 4$ e f é uma função par, então sabe-se que: $f(-3) = f(3)$, $f(2) = f(-2)$ e $f(1) = f(-1)$. Assim sendo,

$$G_f = \{(-3, 2), (-2, 0), (-1, 1), (0, 4), (1, 1), (2, 0), (3, 2)\}.$$

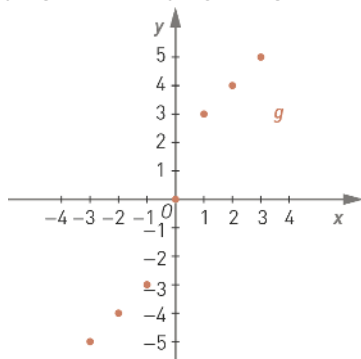
42.2. Sabe-se que os pontos do gráfico de g de abscissa positiva pertencem à reta de equação $y = x + 2$, ou seja, que $g(1) = 1 + 2 = 3$, $g(2) = 2 + 2 = 4$ e $g(3) = 3 + 2 = 5$.

Como g é uma função ímpar, então $g(-1) = -g(1) = -3$,
 $g(-2) = -g(2) = -4$, $g(-3) = -g(3) = -5$ e $g(0) = 0$.
 Assim sendo,
 $G_g = \{(-3, -5), (-2, -4), (-1, -3), (0, 0), (1, 3),$
 $(2, 4), (3, 5)\}$

42.3. A representação gráfica da função f é a seguinte:



A representação gráfica da função g é a seguinte:



43.1. $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) = 3x^2 + 2x$

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, logo a função f não é par nem é ímpar.

43.2. $g(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1} = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -g(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$

Então, a função g é ímpar.

43.3. $h(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = h(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$

Então, a função h é par.

Pág. 45

44.1. A função f não é ímpar porque, por exemplo,
 $f(-2) \neq -f(2)$. Se f fosse uma função ímpar então as imagens
 de -2 e 2 teriam de ser simétricas e não são pares pois
 $f(-2) = f(2) = 1$.

44.2.

a) No intervalo $[-4, -2]$ a função é definida por um segmento
 de reta. Assim sendo, é definida por uma condição do tipo

$y = mx + b$, em que $m = \frac{1-3}{-2-(-4)} = \frac{-2}{2} = -1$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence a esse
 segmento, então tem-se:

$1 = -1 \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1$

Logo, no intervalo $[-4, -2]$ a função é definida por
 $f(x) = -x - 1$.

Então, $f(-3) = 3 - 1 = 2$.

b) $f\left(\frac{7}{3}\right) = f\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$
porque f é par

c) $f(-1) = f(1)$
porque f é par

No intervalo $[0, 2]$ a função é definida por um segmento de
 reta. Assim sendo, é definida por uma condição do tipo

$y = mx + b$, em que $m = \frac{1-4}{2-0} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$.

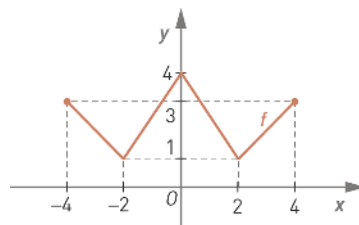
Como o ponto de coordenadas $(0, 4)$ pertence a esse
 segmento, então tem-se $b = 4$.

Logo, no intervalo $[0, 2]$ a função é definida por

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$.

Então, $f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2} \times 1 + 4 = \frac{5}{2}$.

44.3.



45. Sabe-se que g é uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Se g é uma função ímpar, então $g(-x) = -g(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$.

Em particular, $g(0) = -g(0)$.

Ora, $g(0) = -g(0) \Leftrightarrow g(0) + g(0) = 0 \Leftrightarrow 2g(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$.

46. Como a função h tem zeros e $h(0) \neq 0$, significa que

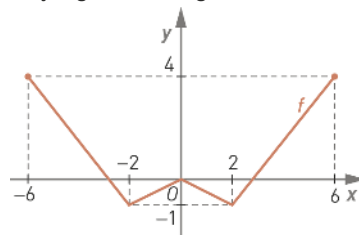
$\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: h(a) = 0$.

Como a função h é par, $-a$ também é zero da função porque
 $h(-a) = h(a) = 0$.

Portanto, a função h tem no mínimo dois zeros: $-a$ e a .

Tarefa 3

1.1. Tendo em atenção que a função f é par de domínio $[-6, 6]$,
 a sua representação gráfica é a seguinte:



1.2.

a) $D_f' = [-1, 4]$.

b) A equação $f(x) = \pi$ tem duas soluções pois a reta de equação $y = \pi$ intersesta o gráfico da função f em dois pontos.

c) A equação $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem quatro soluções pois a reta de

equação $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ intersesta o gráfico da função f em quatro pontos.

1.3. Se $-6 \leq x \leq -2$ a representação gráfica é um segmento de reta. Assim sendo, a função f é definida por uma expressão do tipo $y = mx + b$, em que $m = \frac{-1-4}{-2-(-6)} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, -1)$ pertence a esse segmento, então tem-se:

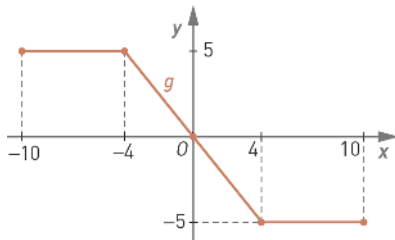
$$-1 = -\frac{5}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow -1 = \frac{5}{2} + b \Leftrightarrow -1 - \frac{5}{2} = b \Leftrightarrow -\frac{7}{2} = b.$$

Logo, no intervalo $[-6, -2]$ a função é definida por

$$f(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}.$$

Então, $f(4) = \underset{\substack{\text{porque} \\ f \text{ é par}}}{f(-4)} = -\frac{5}{4} \times (-4) - \frac{7}{2} = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}.$

2.1. Tendo em atenção que a função g é ímpar de domínio $[-10, 10]$, a sua representação gráfica é a seguinte:



2.2.

a) $D_g' = [-5, 5]$

b) A equação $g(x) = k$; com $k \in]-5, 5[$ tem uma única solução.

De facto, basta verificar graficamente que, quando $k \in]-5, 5[$, a reta de equação $y = k$ intersesta o gráfico da função g num único ponto.

2.3. Se $-4 \leq x \leq 0$ a representação gráfica é um segmento de reta. Assim sendo, a função g é definida por uma expressão do tipo $y = mx + b$, em que $m = \frac{0-5}{0-(-4)} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$ e $b = 0$ (pois a origem do referencial pertence ao segmento de reta).

Logo, no intervalo $[-4, 0]$ a função é definida por $g(x) = -\frac{5}{4}x$.

Então, $g(2) = \underset{\substack{\text{porque} \\ g \text{ é ímpar}}}{-g(-2)} = -\left[-\frac{5}{4} \times (-2)\right] = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$

Pág. 46

47.1.

a) Se $g(x) = f(x) + 2$, $D_g = D_f$ e $D_f' = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$, então

$$D_g' = \left[-\frac{5}{2} + 2, \frac{5}{2} + 2\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

b) Se $g(x) = f(x) - 1$, $D_g = D_f$ e $D_f' = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$, então

$$D_g' = \left[-\frac{5}{2} - 1, \frac{5}{2} - 1\right] = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

c) Se $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, $D_g = D_f$ e $D_f' = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$, então

$$D_g' = \left[-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right] = [-3, 2].$$

47.2. Se $h(x) = f(x) + k$, $D_h = D_f$ e $D_f' = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$, então

$$D_h' = \left[-\frac{5}{2} + k, \frac{5}{2} + k\right].$$

Como $D_h' = \left[-\frac{17}{6}, \frac{13}{6}\right]$, conclui-se que:

$$\begin{cases} -\frac{5}{2} + k = -\frac{17}{6} \\ \frac{5}{2} + k = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{17}{6} + \frac{5}{2} \\ k = \frac{13}{6} - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

Pág. 48

48.1. Se $g(x) = f(x) - 2$ e $D_f' = [-4, 3]$, então

$$D_g' = [-4 - 2, 3 - 2] = [-6, 1].$$

48.2. Se $g(x) = f(x + 1)$ e $D_f' = [-4, 3]$, então

$$D_g' = D_f' = [-4, 3].$$

48.3. Se $g(x) = f(x - 1) + 1$ e $D_f' = [-4, 3]$, então

$$D_g' = [-4 + 1, 3 + 1] = [-3, 4].$$

48.4. Se $g(x) = 3 + f(x - 2)$ e $D_f' = [-4, 3]$, então

$$D_g' = [-4 + 3, 3 + 3] = [-1, 6].$$

49.1. Se $g(x) = f(x + 1)$, então o gráfico da função g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$.

a) Sendo $D_f = [-3, 2]$, então $D_g = [-3 - 1, 2 - 1] = [-4, 1]$.

b) Sendo -3 e 1 os zeros da função f , então os zeros da função g são -4 e 0 .

c) Como a função f atinge extremos absolutos nos pontos de coordenadas $(-1; -1,5)$ e $(2, 2)$, então a função g atinge extremos absolutos nos pontos de coordenadas $(-2; -1,5)$ e $(1, 2)$.

49.2. Se $h(x) = f(x-2) + \frac{3}{2}$, então o gráfico da função h é a

imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

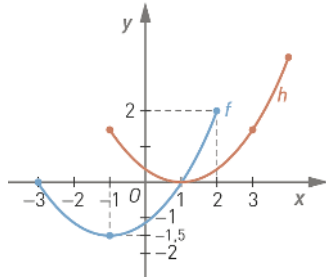
a) Como $-1,5$ é mínimo absoluto e 2 é máximo absoluto da função f , então $0\left(-1,5 + \frac{3}{2}\right)$ é mínimo absoluto e $\frac{7}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right)$ é máximo absoluto da função h .

b) Como a função f atinge o mínimo absoluto no ponto de coordenadas $(-1; -1,5)$, então a função h , definida por

$h(x) = f(x-2) + \frac{3}{2}$, atinge o mínimo absoluto no ponto de

coordenadas $\left(-1+2; -1,5 + \frac{3}{2}\right)$, ou seja, em $(1, 0)$.

Conclui-se, então, que 1 é o único zero da função h . A representação gráfica da função h permite facilmente comprovar que 1 é zero de h .



Tarefa 4

1.1. Sabe-se que o máximo absoluto da função f é 4 e f é uma função ímpar, então -4 é o mínimo absoluto. Assim sendo, $D_f' = [-4, 4]$.

a) Se $g(x) = f(x-2) + \frac{1}{2}$ e $D_f' = [-4, 4]$, então

$$D_g' = \left[-4 + \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

b) Se $h(x) = f(x+1) - 2$ e $D_f' = [-4, 4]$, então $D_h' = [-4-2, 4-2] = [-6, 2]$.

1.2.

a) Sendo $j(x) = f(x+1)$, então o gráfico da função j é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$.

Se $j(x) = f(x+1)$ e $D_f = [-3, 3]$, então

$$D_j = [-3-1, 3-1] = [-4, 2].$$

b) Sendo $i(x) = f(x-3)$, então o gráfico da função i é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(3, 0)$.

Se $i(x) = f(x-3)$ e $D_f = [-3, 3]$, então

$$D_i = [-3+3, 3+3] = [0, 6].$$

1.3. Sendo $m(x) = f(x-5)$, então o gráfico da função m é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(5, 0)$.

a) Se $m(x) = f(x-5)$ e $D_f = [-3, 3]$, então

$$D_m = [-3+5, 3+5] = [2, 8].$$

b) Como 0 é o zero da função f , então o zero da função m é 5 ($0+5$).

c) Os extremos da função m são os extremos da função f .

Máximo absoluto: 4 ; mínimo absoluto: -4 ; mínimos relativos: $\frac{11}{4}$

e -4 ; máximos relativos: $-\frac{11}{4}$ e 4 .

1.4. Se $p(x) = f(x-a) + b$, então o gráfico da função p é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$.

Como a função f atinge o máximo absoluto no ponto $A\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, a função p atinge o máximo absoluto no ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2} + a, 4 + b\right)$.

Sendo $C\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ o ponto onde a função p atinge o máximo absoluto então conclui-se que:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + a = -\frac{1}{2} \\ 4 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ b = 3 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Pág. 50

50.1. Sabe-se que A é o conjunto que é imagem geométrica de G_f pela dilatação vertical de coeficiente 3 . Sendo G_f constituído por todos os pontos $P(x, y)$, então A é constituído por todos os pontos $P'(x, 3y)$.

Então, $A = \{(0, 6), (1, 12), (4, 24), (5, 18)\}$.

50.2. Sendo $g(x) = 3f(x)$, então $D_g = D_f$ e

$$G_g = \{(x, g(x)) : \forall x \in D_g\} = \{(x, 3f(x)) : \forall x \in D_f\}.$$

Assim sendo, $G_g = \{(0, 6), (1, 12), (4, 24), (5, 18)\} = A$.

51.1. Designemos por k o coeficiente da dilatação vertical que aplica o gráfico de g no gráfico de f . Então, $f(x) = kg(x), \forall x \in D_f$.

Em particular, tem-se:

$$f(1) = kg(1) \Leftrightarrow 3 = k \times 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

51.2. Sendo $a \in D_f$, sabe-se que $f(a) = 3g(a)$.

Como $f(a) = \frac{15}{2}$, tem-se:

$$\frac{15}{2} = 3g(a) \Leftrightarrow \frac{15}{6} = g(a) \Leftrightarrow g(a) = \frac{5}{2}$$

51.3. Sendo $a \in D_f$, sabe-se que $f(a) = 3g(a)$.

Como $g(a) = \sqrt{5}$, tem-se:

$$f(a) = 3 \times \sqrt{5} \Leftrightarrow f(a) = 3\sqrt{5}$$

Pág. 51

52.1. Se $P(x, y) \in G_f$ então a imagem de P pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ é $P'\left(\frac{x}{2}, y\right)$. Se designarmos a imagem de G_f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ por G'_f , tem-se:

$$G'_f = \{(-2, 2), (1, 6), (3, 7)\}.$$
52.2.

a) Como $D_f = \{-4, 2, 6\}$, então

$$D_g = \left\{\frac{x}{2} : x \in D_f\right\} = \left\{\frac{x}{2} : x \in \{-4, 2, 6\}\right\} = \{-2, 1, 3\}.$$

b) Ora, $g(-2) = f(-4) = 2$, $g(1) = f(2) = 6$ e $g(3) = f(6) = 7$.

Então, $G_g = \{(-2, 2), (1, 6), (3, 7)\}$.

52.3. Comparando, conclui-se que o gráfico da função g é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Pág. 53

53.1.

a) Sendo $g(x) = f(4x)$, sabe-se que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$.

b) Sendo $h(x) = f(3x)$, sabe-se que o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$.

c) O gráfico de f é a imagem do gráfico de g pela dilatação horizontal de coeficiente 4.

d) O gráfico de f é a imagem do gráfico de h pela dilatação horizontal de coeficiente 3.

53.2.

$$\mathbf{a)} \quad D_g = \left\{\frac{x}{4} : x \in D_f\right\} = \left\{\frac{x}{4} : x \in [0, 5]\right\} = \left[0, \frac{5}{4}\right]$$

$$\text{Conjunto dos zeros de } g: \left\{x \in \left[0, \frac{5}{4}\right] : g(x) = 0\right\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{3}{2} \vee 4x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8} \vee x = 1$$

Zeros de g : $\frac{3}{8}$ e 1.

$$\mathbf{b)} \quad D_h = \left\{\frac{x}{3} : x \in D_f\right\} = \left\{\frac{x}{3} : x \in [0, 5]\right\} = \left[0, \frac{5}{3}\right]$$

$$\text{Conjunto dos zeros de } h: \left\{x \in \left[0, \frac{5}{3}\right] : h(x) = 0\right\}$$

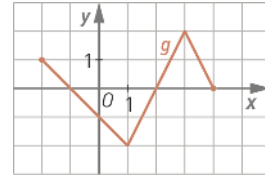
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{2} \vee 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{4}{3}$$

Zeros de h : $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3}$.

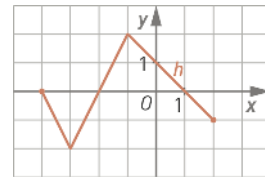
Pág. 55

54.1.

a) Sendo $g(x) = -f(x)$, sabe-se que o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox . Então, a representação gráfica da função g é a seguinte:



b) Sendo $h(x) = f(-x)$, sabe-se que o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Oy . Então, a representação gráfica da função h é a seguinte:



54.2. Sendo $i(x) = -f(x) + 2$, o gráfico de i é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox seguida da translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 2)$.

Ora, o contradomínio da função f é $[-2, 2]$.

$$\text{Então, } D_i = \{-f(x) + 2 : x \in D_f\} = [-2 + 2, 2 + 2] = [0, 4].$$

54.3. Os zeros da função f são $-1, 2$ e 4 .

$$D_h = \{-x : x \in D_f\} = \{-x : x \in [-2, 4]\} = [-4, 2]$$

Conjunto dos zeros de h : $\{x \in [-4, 2] : h(x) = 0\}$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \vee -x = 2 \vee -x = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \vee x = -4$$

Zeros de h : $-4, -2$ e 1 .

54.4. Sendo $j(x) = k f(x) - 1, k \in \mathbb{R}^+$, então

$$D_j = \{k f(x) - 1 : x \in D_f\} = [-2k - 1, 2k - 1].$$

Como se sabe que $D_j = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$, tem-se:

$$\begin{cases} -2k - 1 = -\frac{7}{2} \\ 2k - 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k = -\frac{5}{2} \\ 2k = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ k = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Pág. 56

Proposta 16**16.1.**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$16.2. D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{1-x} \neq 0\}$$

$$\sqrt[3]{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{1-x} = 0) \Leftrightarrow \neg \pi(1-x=0) \Leftrightarrow \neg (x=1) \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$16.3. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x+1 \neq 0\}$$

$$x \geq 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \neg (x+1=0) \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \neg (x=-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$D_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$16.4. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Nota: A condição $x^2 + 4 \neq 0$ é universal.

$$16.5. D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \frac{1-2x}{2} \geq 0\right\}$$

$$x - \frac{1-2x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

$$16.6. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0 \wedge x \neq 0\}$$

$$1-x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \neq 0$$

$$D_f =]-\infty, 1] \setminus \{0\}$$

Proposta 17

$$17.1. D_f = \left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

17.2.

Atendendo ao contradomínio da função f sabe-se que, se

$$a, b \in D_f \text{ então } -\frac{9}{2} \leq f(a) \leq \frac{7}{2} \text{ e } -\frac{9}{2} \leq f(b) \leq \frac{7}{2}.$$

$$\text{Ora, se } -\frac{9}{2} \leq f(b) \leq \frac{7}{2} \text{ então tem-se } -\frac{7}{2} \leq -f(b) \leq \frac{9}{2}.$$

$$-\frac{9}{2} \leq f(a) \leq \frac{7}{2}$$

$$-\frac{7}{2} \leq -f(b) \leq \frac{9}{2}$$

Adicionando membro a membro, tem-se:

$$-8 \leq f(a) - f(b) \leq 8$$

Então, a proposição $\exists a, b \in D_f : f(b) - f(a) = \frac{17}{2}$ é falsa

$$\left(\text{pois } \frac{17}{2} > 8\right).$$

$$17.3. \text{ Como } f(\sqrt{2}) < 0 \text{ e } f(\pi) > 0, \text{ então } f(\sqrt{2}) \times f(\pi) < 0.$$

$$17.4. D_g = \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \{x \in [-3, 4] : x \neq -2 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 3\} \\ = [-3, 4] \setminus \{-2, 1, 3\}$$

Proposta 18

18.1.

a) Para determinar $f(5)$ os zeros da função f é necessário definir a semirreta com origem no ponto $(-1, -2)$ e que passa no ponto $(3, 1)$.

Sabe-se que a semirreta é definida por uma condição do tipo

$$y = mx + b, \text{ em que } m = \frac{1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}.$$

Como o ponto de coordenadas $(3, 1)$ pertence à semirreta, então tem-se:

$$1 = \frac{3}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow 1 = \frac{9}{4} + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{4}$$

Assim sendo, a semirreta é definida pela condição $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

$$\text{Portanto, se } x \geq -1 \text{ tem-se } f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Então, } f(5) = \frac{3}{4} \times 5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

b) Para determinar $f(-7)$ os zeros da função f é necessário definir a semirreta com origem no ponto $(-1, -2)$ e que passa no ponto $(-4, 2)$.

Sabe-se que a semirreta é definida por uma condição do tipo

$$y = mx + b, \text{ em que } m = \frac{2 - (-2)}{-4 - (-1)} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Como o ponto de coordenadas $(-4, 2)$ pertence à semirreta, então tem-se:

$$2 = -\frac{4}{3} \times (-4) + b \Leftrightarrow 2 = \frac{16}{3} + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{16}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{10}{3}$$

Assim sendo, a semirreta é definida pela condição $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$.

$$\text{Portanto, se } x < -1 \text{ tem-se } f(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}.$$

$$\text{Então, } f(-7) = -\frac{4}{3} \times (-7) - \frac{10}{3} = \frac{28}{3} - \frac{10}{3} = 6.$$

$$c) f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} = 0 \wedge x \geq -1\right) \vee \left(-\frac{4}{3}x - \frac{10}{3} = 0 \wedge x < -1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5}{3} \wedge x \geq -1\right) \vee \left(x = -\frac{5}{2} \wedge x < -1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{5}{2}$$

Zeros da função f : $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{3}$.

18.2.

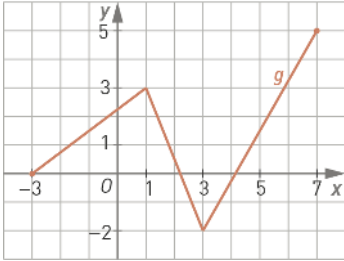
x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	-

$$18.3. D_g = \{x \in D_f : -f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right]$$

Pág. 57

Proposta 19

19.1. Uma possível representação gráfica da função g é a seguinte:



19.2. O máximo absoluto é 5 e o respetivo maximizante é 7. O mínimo absoluto é -2 e o respetivo minimizante é 3.

19.3.

a) Como a função g é estritamente decrescente em $[1, 3]$, então $g(2) < g(1)$.

Logo, $g(2) - g(1) < 0$.

b) Como a função g é estritamente crescente em $[3, 7]$, então $g(6) > g(4)$, ou seja, $g(6) - g(4) > 0$.

Como a função g é estritamente crescente em $[-3, 1]$, então $g(-2) > g(-3)$, ou seja, $g(-2) > 0$.

Sendo $g(6) - g(4) > 0$ e $g(-2) > 0$, então $\frac{g(6) - g(4)}{g(-2)} > 0$.

Proposta 20

20.1.

a) Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Conclui-se, então, que a função f é estritamente decrescente.

b) Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5 \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 5}{3} < \frac{2x_2 - 5}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Conclui-se, então, que a função f é estritamente crescente.

$$\text{c) } f(x) = (2x - 1)^2 - 4(x^2 + x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 4x = -8x + 1$$

Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -8x_1 > -8x_2 \Leftrightarrow -8x_1 + 1 > -8x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Conclui-se, então, que a função f é estritamente decrescente.

20.2.

$$\text{a) } g(x) = 2kx - 3x + k = (2k - 3)x + k$$

a1) Uma função afim é estritamente crescente se o declive for negativo.

Então a função g é estritamente crescente se $2k - 3 > 0$.

$$2k - 3 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{3}{2} \Leftrightarrow k \in \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

a2) Uma função afim é linear se o declive for nulo.

Então a função g é linear se $2k - 3 = 0$.

$$2k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

b) Como o ponto $P(-1, 3)$ pertence ao gráfico de uma das funções da família, tem-se $g(-1) = 3$.

$$g(-1) = 3 \Leftrightarrow (2k - 3) \times (-1) + k = 3 \Leftrightarrow -2k + 3 + k = 3 \Leftrightarrow -k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Então, $g(x) = -3x$.

Vamos provar que a função é estritamente decrescente (pois o declive é negativo).

Consideremos dois objetos quaisquer, x_1 e x_2 , pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Conclui-se, então, que a função g é estritamente decrescente. Como o gráfico da função g passa na origem, o zero da função é 0.

Proposta 21

21.1.

a) Sejam $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ tais que $x_1 < x_2$.

Logo, $-x_1 > -x_2$ (representando $-x_1$ e $-x_2$ números não negativos).

$$\text{Então, } (-x_1)^2 > (-x_2)^2, \text{ ou seja, } x_1^2 > x_2^2.$$

$$x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -5x_1^2 < -5x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Então f é crescente em $]-\infty, 0]$.

Sejam agora $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tais que $x_1 < x_2$.

$$\text{Então, } x_1^2 < x_2^2.$$

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -5x_1^2 > -5x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Então f é decrescente em $[0, +\infty[$.

b) Sejam $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tais que $x_1 < x_2$.

$$\text{Então, } x_1^2 < x_2^2.$$

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 < \frac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$. Então g é crescente em $[0, +\infty[$.

Sejam agora $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ tais que $x_1 < x_2$.

Logo, $-x_1 > -x_2$ (representando $-x_1$ e $-x_2$ números não negativos).

$$\text{Então, } (-x_1)^2 > (-x_2)^2, \text{ ou seja, } x_1^2 > x_2^2.$$

$$x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 > \frac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Assim, $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$. Então g é decrescente em $]-\infty, 0]$.

21.2.

a) Como $k < -2$ e f é crescente em $]-\infty, 0]$, então

$$f(k) < f(-1), \text{ ou seja, } f(k) - f(-1) < 0.$$

b) Como $\lambda > 5$ e g é crescente em $[0, +\infty[$, então

$$g(\lambda) > g(5), \text{ ou seja, } g(5) - g(\lambda) < 0.$$

Pág. 58

Proposta 22

22.1.

a) A distância da bola à bandeira decorridos 25 s é dada, em metros, por $2 \times 25 + 5$, ou seja, é igual a 55 metros.

Nota: Da Física sabe-se que $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow d = v \times t$.

b) 2 min e 12 s = 72 s

A distância da bola à bandeira decorridos 72 s é dada, em metros, por $2 \times 72 + 5$, ou seja, é igual a 149 metros.

$$22.2. d(t) = 5 + 2t$$

$$22.3. d(t) = 35 \Leftrightarrow 5 + 2t = 35 \Leftrightarrow 2t = 30 \Leftrightarrow t = 15$$

Decorreram 15 segundos até que a bola se encontre a 35 metros da bandeira.

22.4. Se o ponto P é o ponto de gráfico de d de ordenada 145 então $P(t, 145)$, tal que $d(t) = 145$.

$$d(t) = 145 \Leftrightarrow 5 + 2t = 145 \Leftrightarrow 2t = 140 \Leftrightarrow t = 70.$$

Então, a abscissa do ponto P é 70.

Proposta 23

23.1.

a) Observando a representação gráfica da função f constata-se que $\forall x \in D_f, f(x) \leq 6$, ou seja, $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(8)$.

Então, $a = 8$.

b) Observando a representação gráfica da função f constata-se que $\forall x \in D_f, f(x) \geq -2$, ou seja, $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(6)$.

Então, $b = 6$.

c) Observando a representação gráfica da função f constata-se que $\forall x \in]1, 3[, f(x) \leq 3$, ou seja, $\forall x \in]1, 3[, f(x) \leq f(2)$.

Então, $c = 2$.

d) Observando a representação gráfica da função f constata-se que $\forall x \in [1, 2[, f(x) \geq \frac{3}{2}$, ou seja, $\forall x \in [1, 2[, f(x) \geq f(1)$.

Então, $d = 1$.

e) Máximos relativos: 3 e 6; Máximo absoluto: 6; mínimos relativos: -2 e $\frac{3}{2}$; mínimo absoluto: -2 .

23.2. A função f é limitada porque $\forall x \in D_f, -2 \leq f(x) \leq 6$.

Proposta 24

24.1. Seja $x \in D_f$, então $x \leq 2$.

$$x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \geq -1 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} + 3 \geq -1 + 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$$

Assim sendo, a função f é minorada mas não é majorada. Logo, a função f não é limitada.

O mínimo absoluto é 2.

24.2. Seja $x \in D_f$, então $x \leq 2$.

$$x \leq 2 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 6 - 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$$

Assim sendo, a função f é majorada mas não é minorada. Logo, a função f não é limitada.

O máximo absoluto é 5.

24.3. Seja $x \in D_f$, então $x \leq 2$.

Consideremos $x \in D_f \wedge x < 0$.

Ora, $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$. Então $(-x)^2 > 0^2$, ou seja, $x^2 > 0$.

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow -2x^2 < -2 \times 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

Então, $\forall x < 0, f(x) < 0$.

Consideremos agora $x \in D_f : 0 \leq x \leq 2$.

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \wedge x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0 \wedge -2x^2 \geq -8 \\ \Leftrightarrow -8 \leq -2x^2 \leq 0$$

Então, $\forall x \in [0, 2], -8 \leq f(x) \leq 0$.

Como $\forall x < 0, f(x) < 0$ e $\forall x \in [0, 2], -8 \leq f(x) \leq 0$, conclui-se que $\forall x \in D_f, f(x) \leq 0$.

Assim sendo, a função f é majorada mas não é minorada. Logo, a função f não é limitada.

O máximo absoluto é 0.

24.4. Seja $x \in D_f$, então $x \leq 2$.

Consideremos $x \in D_f \wedge x < 0$.

Ora, $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$. Então $(-x)^2 > 0^2$, ou seja, $x^2 > 0$.

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} > \frac{0}{3} \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Então, $\forall x < 0, f(x) > 0$.

Consideremos agora $x \in D_f : 0 \leq x \leq 2$.

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{0}{3} \leq \frac{x^2}{3} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2}{3} \leq \frac{4}{3}$$

Então, $\forall x \in [0, 2], 0 \leq f(x) \leq \frac{4}{3}$.

Como $\forall x < 0, f(x) > 0$ e $\forall x \in [0, 2], 0 \leq f(x) \leq \frac{4}{3}$, conclui-se

que $\forall x \in D_f, f(x) \geq 0$.

Assim sendo, a função f é minorada mas não é majorada. Logo, a função f não é limitada.

O mínimo absoluto é 0.

Pág. 59

Proposta 25**25.1.**

a) Para determinar o zero da função f compreendido entre 2 e 5 é necessário definir o segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(2, 4)$ e $(5, -2)$.

Sabe-se que o segmento de reta é definido por uma condição do tipo $y = mx + b$, em que $m = \frac{-2-4}{5-2} = \frac{-6}{3} = -2$.

Como o ponto de coordenadas $(2, 4)$ pertence ao segmento de reta, então tem-se:

$$4 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 4 = -4 + b \Leftrightarrow b = 8$$

Assim sendo, o segmento de reta é definido pela condição $y = -2x + 8$, ou seja, $\forall x \in [2, 5]$, $f(x) = -2x + 8$.

$$f(x) = 0 \wedge x \in [2, 5] \Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \wedge x \in [2, 5] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 4 \wedge x \in [2, 5] \Leftrightarrow x = 4$$

Então, os zeros da função f no intervalo $[0, 5]$ são 0 e 4.

Como $D_f = [-5, 5]$ e f é uma função ímpar, conclui-se que os zeros de f são $-4, 0$ e 4 .

Como $D_g = [-5, 5]$, $f(x) = g(x)$ quando $x \in [0, 5]$ e g é uma função par, conclui-se que os zeros de g também são $-4, 0$ e 4 .

b) Como f é uma função ímpar, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Se $x \in [0, 2]$, então $f(x) = mx$.

$$m = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2.$$

Logo, $\forall x \in [0, 2]$, $f(x) = 2x$.

Assim, tem-se: $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(2 \times \frac{3}{2}\right) = -3$.

c) Se $x \in [0, 5]$, $f(x) = g(x)$.

Então, $g(3) = f(3) = -2 \times 3 + 8 = 2$.

25.2. Quadro de variação e extremos relativo à função f :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

Quadro de variação e extremos relativo à função g :

x	-5		-2		0		2		5
$g(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

Proposta 26

26.1. $D_f' = [-4, 6]$

26.2. Por exemplo, no intervalo $[0, 4]$ a função f é decrescente porque $\forall x_1, x_2 \in [0, 4]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

26.3. 2 é um mínimo não absoluto, ou seja, um mínimo relativo, e -4 é o respetivo minimizante.

26.4. A equação $f(x) = k$ tem exatamente três soluções quando $k \in [2, 4]$ pois nestes casos a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico da função f em três pontos.

26.5. Por observação gráfica sabe-se que

$$f(x) < 4 \Leftrightarrow x \in]-6, -2[\cup]4, 10].$$

26.6.

a) Sendo $g(x) = f(x+2) - 1$, então o gráfico da função g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-2, -1)$.

Se $g(x) = f(x+2) - 1$ e $D_f = [-6, 10]$, então

$$D_g = [-6-2, 10-2] = [-8, 8].$$

Se $g(x) = f(x+2) - 1$ e $D_f' = [-4, 6]$, então

$$D_g' = [-4-1, 6-1] = [-5, 5].$$

b) Sendo $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$, então o gráfico da função h é a imagem

do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Se $D_f = [-6, 10]$, então $D_h = D_f = [-6, 10]$.

Se $D_f' = [-4, 6]$, então $D_h' = \left[-4 \times \frac{1}{2}, 6 \times \frac{1}{2}\right] = [-2, 3]$.

Conjunto dos zeros de h : $\{x \in [-2, 3]: h(x) = 0\}$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 9$$

Zeros de h : 5 e 9.

Pág. 60

Proposta 27

27.1. O gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico da função f através da reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$.

O gráfico da função h pode ser obtido a partir do gráfico da função f através da translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$.

O gráfico da função i pode ser obtido a partir do gráfico da função f através da dilatação vertical de coeficiente 2.

O gráfico da função j pode ser obtido a partir do gráfico da função f através da dilatação horizontal de coeficiente 4.

27.2.

a) Se $D_f' = [-3, 2]$, então $D_g' = [-2+1, 3+1] = [-1, 4]$.

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

c) Se $D_f' = [-3, 2]$, então $D_i' = [-3 \times 2, 2 \times 2] = [-6, 4]$.

d) Conjunto dos zeros de j : $\{x \in [0, 16]: j(x) = 0\}$

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} = 2 \Leftrightarrow x = 8$$

Zero de j : 8.

27.3. O gráfico da função m pode ser obtido a partir do gráfico da função f através da reflexão de eixo Oy . Então, o quadro de sinais relativo à função m é o seguinte:

x	-4		-2		0
$m(x)$	-3	-	0	+	2

Proposta 28

28.1. Como a temperatura foi registada entre as 8 horas e as 12 horas e h representa o tempo, em horas, decorrido após as 8 horas, então h varia entre 0 e 4.

Portanto, $D=[0, 4]$.

28.2. Ora, $10\text{ h }30\text{ min} = 10,5\text{ h}$ e $10,5 - 8 = 2,5$.

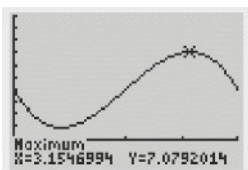
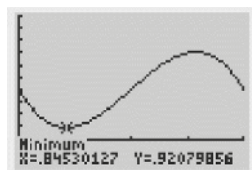
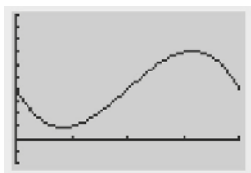
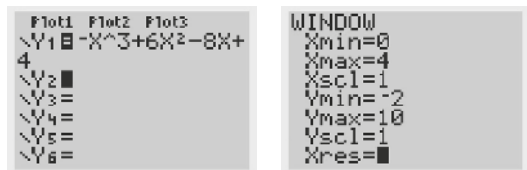
A temperatura às 10 h e 30 min é dada, em graus Celsius, por $T(2,5)$.

$$T(2,5) = -2,5^3 + 6 \times 2,5^2 - 8 \times 2,5 + 4 = 5,875.$$

Às 10 h e 30 min a temperatura era de $5,875^\circ\text{C}$.

28.3.

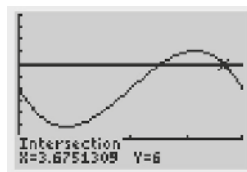
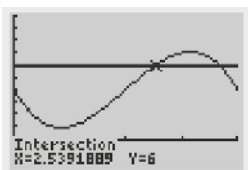
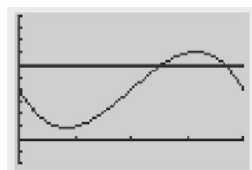
a) Escolhendo uma janela de visualização adequada, começa-se por obter uma representação gráfica da função. Em seguida determinam-se os extremos absolutos da função.



No período de tempo considerado a temperatura máxima foi de, aproximadamente, $7,1^\circ\text{C}$ e a temperatura mínima foi de, aproximadamente, $0,9^\circ\text{C}$.

Então, a amplitude térmica foi de, aproximadamente, $6,2^\circ\text{C}$ ($7,1 - 0,9$).

b) Representam-se, no mesmo referencial, os gráficos das funções $y=T(h)$ e $y=6$, quando $x \in [0, 4]$, e, em seguida, determinam-se as abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.



Utilizando valores aproximados às centésimas, conclui-se que $T(h) > 6 \Leftrightarrow 2,54 < h < 3,68$

Sabe-se que $3,68\text{ h} - 2,54\text{ h} = 1,14\text{ h}$ e

$$0,14\text{ h} = 0,14 \times 60\text{ min} = 8,4\text{ min}.$$

Então, a afirmação é falsa pois, no período considerado, a temperatura foi superior a 6°C durante, aproximadamente, 1 h e 8,4 min.

Pág. 61

Proposta 29

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 \neq 0\}$$

Como 1 não pertence ao domínio sabe-se que 1 é zero do polinómio $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

Então, $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$, sendo a, b e c números reais e $a \neq 0$.

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-a=-7 \\ c-b=2 \\ -c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ 2=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

Portanto, $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1)(2x^2 - 5x - 3)$.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Assim sendo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 1, 3\right\}$.

Proposta 30

Sabe-se que $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ e $g(x) = f(x+2)$.

Como a reta que representa o gráfico de g , intersesta o eixo Ox no

ponto $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e o eixo Oy no ponto $B(0, 1)$, tem-se:

$$\begin{cases} g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = 0 \\ f(0 + 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times \frac{3}{2} + b = 0 \\ a \times 2 + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ 2a - \frac{3}{2}a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ 4a - 3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \times 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Proposta 31

Sabe-se que 2 é uma raiz do polinômio $2x^3 + x^2 - 13x + 6$, então tem-se: $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$, sendo a, b e c números reais e $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 13x + 6 &= (x-2)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 13x + 6 = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 13x + 6 = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2a=1 \\ c-2b=-13 \\ -2c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ -13=-13 \\ c=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

Conjunto dos zeros da função f : $\left\{-3, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow f(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \vee 2x = \frac{1}{2} \vee 2x = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{4} \vee x = 1 \end{aligned}$$

Zeros da função g : $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ e 1 .

Proposta 32

32.1. Sendo $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ e $D_f = [a, b]$, então $D_g = [2a, 2b]$.

Sabe-se, ainda, que $D_g = [-3, 9]$.

$$\text{Então, tem-se } 2a = -3 \wedge 2b = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \wedge b = \frac{9}{2}.$$

32.2. Sendo $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, então $f(x) = g(2x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow g(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x = 6 \vee 2x = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

32.3. Sendo h a função cujo gráfico se obtém a partir do gráfico da função g , por aplicação da translação de vetor $\vec{u}(2, 0)$, então $h(x) = g(x-2)$.

a) Como $D_g = [-3, 9]$ e $h(x) = g(x-2)$, então $D_h = [-3+2, 9+2] = [-1, 11]$.

b) Conjunto dos zeros de h : $\{x \in [-1, 11] : h(x) = 0\}$.
 $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x-2 = 6 \vee x-2 = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 8 \vee x = 11$

Zeros de h : 2, 8 e 11.

32.4. Sendo i a função cujo gráfico se obtém a partir do gráfico da função g , por aplicação da translação de vetor $\vec{v}(0, k)$ $k \in \mathbb{R}$, então $i(x) = g(x) + k$.

Como $D'_g = [-2, 2]$ e $i(x) = g(x) + k$, então $D'_i = [-2+k, 2+k]$.

A função i não tem zeros se $-2+k > 0 \vee 2+k < 0$.

$$-2+k > 0 \vee 2+k < 0 \Leftrightarrow k > 2 \vee k < -2.$$

Então, a função i não tem zeros se $k \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Pág. 62

55. A representação gráfica de uma função do tipo

$y = ax^2$, $a \neq 0$, é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e que tem a concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Para além disso, sabe-se que quanto maior é o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola.

Então pode-se estabelecer a seguinte correspondência entre as funções e as representações gráficas:

$$I \rightarrow P_1; II \rightarrow P_4; III \rightarrow P_2; IV \rightarrow P_5 \text{ e } V \rightarrow P_3.$$

56. O gráfico de g situa-se na região sombreada se $2p > 0 \wedge 2p < 3$.

$$2p > 0 \wedge 2p < 3 \Leftrightarrow p > 0 \wedge p < \frac{3}{2} \Leftrightarrow p \in \left]0, \frac{3}{2}\right[.$$

Pág. 63

57.1. Como g é a função cujo gráfico é a imagem geométrica do gráfico da função f , definida por $f(x) = 3x^2$, pela translação de vetor $\vec{u}(4, 0)$, então $g(x) = 3(x-4)^2$.

57.2. O eixo de simetria da parábola que representa o gráfico de g é a reta de equação $x = 4$.

58.1. O vértice da parábola é o ponto $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Então, a

função é do tipo $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, $a \neq 0$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função, tem-se:

$$a\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a \times \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 4.$$

Conclui-se, então, que a função é definida por $y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

58.2. O vértice da parábola é o ponto $V(3, 0)$. Então, a função é do tipo $y = a(x-3)^2$, $a \neq 0$.

Como o ponto de coordenadas $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$ pertence ao gráfico da função, tem-se:

$$a(0-3)^2 = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a \times 9 = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Conclui-se, então, que a função é definida por $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$.

Pág. 64

59.1. $D_f = \mathbb{R}$ e $D_{f'} = \mathbb{R}_0^+$.

O quadro de variação relativo à função f é o seguinte:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

A função f tem um mínimo absoluto igual a 0.

$D_g = \mathbb{R}$ e $D_{g'} = \mathbb{R}_0^-$.

O quadro de variação relativo à função g é o seguinte:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

A função g tem um máximo absoluto igual a 0.

59.2. O vértice da parábola representativa da função f é o ponto

$V(2, 0)$. Então, $f(x) = a(x-2)^2$.

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a(0-2)^2 = 2 \Leftrightarrow a \times 4 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Conclui-se, então, que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

O vértice da parábola representativa da função g é o ponto

$V(-1, 0)$. Então, $g(x) = a(x+1)^2$.

$$g(-3) = -4 \Leftrightarrow a(-3+1)^2 = -4 \Leftrightarrow a \times 4 = -4 \Leftrightarrow a = -1.$$

Conclui-se que $g(x) = -(x+1)^2$.

60.1. Como a parábola que representa o gráfico da função f é simétrica em relação à reta $x = -3$, conclui-se que $h = -3$. Então,

$$f(x) = a(x+3)^2.$$

Como o ponto $P(-5, -1)$ pertence ao gráfico de f , então

$$f(-5) = -1.$$

$$f(-5) = -1 \Leftrightarrow a(-5+3)^2 = -1 \Leftrightarrow a \times 4 = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Conclui-se, então, que $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2$.

O quadro de variação relativo à função f é o seguinte:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$$60.2. f(x) = -9 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+3)^2 = -9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 6 \vee x+3 = -6 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -9$$

Pág. 65

61. $A(0, f(0))$ e $f(0) = 3$, então $A(0, 3)$.

$C(0, g(0))$ e $g(0) = -1$, então $C(0, -1)$.

$E(0, h(0))$ e $h(0) = 1$, então $E(0, 1)$.

$B(x, 0)$, tal que $f(x) = 0 \wedge x < 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

Então, $B(-\sqrt{6}, 0)$.

$D(x, 0)$, tal que $h(x) = 0 \wedge x > 0$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

62.1. O vértice da parábola representativa da função é o ponto de coordenadas $(0, 2)$. Então, a função é definida por uma expressão do tipo $y = ax^2 + 2$.

O gráfico passa no ponto de coordenadas $(2, 4)$, logo tem-se:

$$a \times 2^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow a \times 4 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Conclui-se, então, que a expressão da função é $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

62.2. O vértice da parábola representativa da função é o ponto de coordenadas $(0, 5)$. Então, a função é definida por uma expressão do tipo $y = ax^2 + 5$.

O gráfico passa no ponto de coordenadas $(3, 0)$, logo tem-se:

$$a \times 3^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow a \times 9 = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{9}.$$

Conclui-se, então, que a expressão da função é $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$.

Pág. 66

63. A representação gráfica da função definida por $y = 3x^2$ é uma parábola de vértice $V(0, 0)$, então corresponde à função f .

Como o gráfico de j é a imagem do gráfico de f pela translação horizontal de vetor $\vec{u}(4, 0)$, então $j(x) = 3(x-4)^2$.

Como o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 4)$, então $g(x) = -3x^2 + 4$.

Como o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação horizontal de vetor $\vec{u}(-3, 0)$, então $h(x) = -3(x+3)^2$.

Como o gráfico de i é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação vertical de vetor $\vec{u}(0, -2)$, então $i(x) = -3x^2 - 2$.

64.

Parábola	Coordenadas do vértice	Contradomínio
$y = -x^2 + 5$	$(0, 5)$	$]-\infty, 5]$
$y = 3x^2 + \sqrt{3}$	$(0, \sqrt{3})$	$[\sqrt{3}, +\infty[$
$y = -2x^2 - \frac{1}{2}$	$(0, -\frac{1}{2})$	$]-\infty, -\frac{1}{2}]$
$y = -4(x-3)^2$	$(3, 0)$	$]-\infty, 0]$

65.1.

	Coordenadas do vértice	Equação do eixo de simetria
$f(x)$	$(0, 3)$	$x = 0$
$g(x)$	$(5, 0)$	$x = 5$
$h(x)$	$(-1, -4)$	$x = -1$

65.2. Função f

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $]-\infty, 3]$

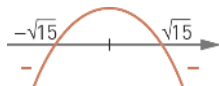
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$$

Zeros: $-\sqrt{15}$ e $\sqrt{15}$

Sinal:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{15}, \sqrt{15}[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{15}[\cup]\sqrt{15}, +\infty[$$



Monotonia:

f é crescente em $]-\infty, 0]$.

f é decrescente em $[0, +\infty[$.

Extremos:

f tem máximo absoluto igual a 3.

Função g

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $[0, +\infty[$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Zero: 5

Sinal:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Monotonia:

g é decrescente em $]-\infty, 5]$.

g é crescente em $[5, +\infty[$.

Extremos:

g tem mínimo absoluto igual a 0.

Função h

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $]-\infty, -4]$

Zeros: A função não tem zeros pois $0 \notin D_h$.

Sinal:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

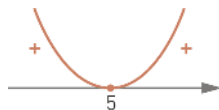
Monotonia:

h é crescente em $]-\infty, -1]$.

h é decrescente em $[-1, +\infty[$.

Extremos:

f tem máximo absoluto igual a -4.



Então, a função é definida por uma expressão do tipo

$$y = a(x+1)^2 + 2.$$

O gráfico passa no ponto de coordenadas $(1, 0)$, logo tem-se:

$$a \times (1+1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a \times 4 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Conclui-se, então, que a expressão da função é

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2.$$

66.2. O vértice da parábola representativa da função é o ponto

de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$. Então, a função é definida por uma

expressão do tipo $y = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$.

O gráfico passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, logo tem-se:

$$a \times \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a \times 4 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Conclui-se, então, que a expressão da função é $y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$.

66.3. Designemos por o vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola

representativa da função. Sabe-se que $y_v = -2$ e atendendo à

$$x_v = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Então, a função é definida por uma expressão do tipo

$$y = a(x-2)^2 - 2.$$

O gráfico passa no ponto de coordenadas $(5, 0)$, logo tem-se:

$$a \times (5-2)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a \times 9 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}.$$

Conclui-se, então, que a expressão da função é $y = \frac{2}{9}(x-2)^2 - 2$.

$$67.1. f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x-3)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Sinal

Atendendo a que a representação gráfica da função tem a concavidade para baixo e aos zeros, podemos tirar as seguintes conclusões quanto ao sinal da função:

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$67.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -\frac{5}{2}$$

equação impossível

Então, a função não tem zeros.

Sinal

Como a função não tem zeros e atendendo a que a representação gráfica da função tem a concavidade para cima, podemos concluir que a função é sempre positiva.

66.1. Designemos por $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola

representativa da função. Sabe-se que $y_v = 2$ e atendendo à

$$x_v = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

$$67.3. f(x) = 0 \Leftrightarrow -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$$

Sinal

Atendendo a que a representação gráfica da função tem a concavidade para baixo e aos zeros, podemos tirar as seguintes conclusões quanto ao sinal da função:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f(x)	-	0	+	0	-

67.4.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Sinal

Atendendo a que a representação gráfica da função tem a concavidade para baixo e só tem um zero, podemos tirar as seguintes conclusões quanto ao sinal da função:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	-	0	-

Pág. 68

68.1. As abscissas dos pontos A e B correspondem aos zeros da função f.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

Então, A(-2, 0) e B(1, 0).

68.2.

a) $C(0, f(0))$ e $f(0) = -2$, então $C(0, -2)$.

$$A_{[ABV]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$

b) Designemos por $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola representativa da função. Atendendo à simetria da parábola em relação à reta $x = x_v$, conclui-se que $x_v = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Então, } y_v = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

$$A_{[ABV]} = \frac{\overline{AB} \times |y_v|}{2} = \frac{3 \times \frac{9}{4}}{2} = \frac{27}{8}.$$

68.3. Como o vértice da parábola é o ponto e a concavidade é

voltada para cima, conclui-se que $D_f' = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right]$ e que $x = -\frac{1}{2}$

é uma equação do eixo de simetria.

Pág. 69

69. No caso das parábolas P_2 e P_3 a concavidade está voltada para cima, então conclui-se que $a > 0$.

No caso das parábolas P_1 e P_4 a concavidade está voltada para baixo, então conclui-se que $a < 0$.

As funções cujas representações gráficas são as parábolas P_1 e P_3 têm dois zeros, então $\Delta > 0$.

A função cuja representação gráfica é a parábola P_2 não tem zeros, então $\Delta < 0$.

A função cuja representação gráfica é a parábola P_4 tem um único zero, então $\Delta = 0$.

Resumindo, tem-se:

Parábola $y = ax^2 + bx + c$	Sinal de a	Sinal ou valor de Δ
P_1	-	+
P_2	+	-
P_3	+	+
P_4	-	0

Pág. 70

70.1.

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 2 = -3(x^2 - 2x) + 2 = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2 = \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 2 = -3(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

70.2. As coordenadas do vértice são (1, 5).

70.3. Uma equação do eixo de simetria é $x = 1$.

70.4. A parábola tem a concavidade voltada para baixo pois $a < 0$ e o vértice é $V(1, 5)$, logo a função é crescente em $]-\infty, 1]$.

71.1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9 - 9) + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8 = \\ &= (x-3)^2 - 1 \end{aligned}$$

Contradomínio: $[-1, +\infty[$

Zeros:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x-3 = 1 \vee x-3 = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Sinal:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, 4[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$$

Monotonia:

f é decrescente em $]-\infty, 3]$.

f é crescente em $[3, +\infty[$.

Extremos:

f tem mínimo absoluto igual a -1.

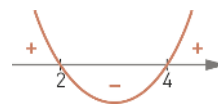
$$71.2. f(x) = -x^2 - 4x = -(x^2 + 4x) = -(x^2 + 4x + 4 - 4) =$$

$$= -(x^2 + 4x + 4) + 4 = -(x+2)^2 + 4$$

Contradomínio: $]-\infty, 4]$

$$\text{Zeros: } f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow -x(x+4) = 0 \Leftrightarrow$$

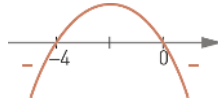
$$\Leftrightarrow -x = 0 \vee x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$



Sinal:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 0[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$$



Monotonia:

f é decrescente em $[-2, +\infty[$.

f é crescente em $]-\infty, -2]$.

Extremos:

f tem máximo absoluto igual a 4.

Tarefa 5

1.1. Como a parábola P_1 é a imagem da parábola P pela translação horizontal de vetor $\vec{u}(4, 0)$, então $f_1(x) = 2(x-4)^2$.

Como a parábola P_2 é a imagem da parábola P pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(-3, 2)$, então

$$f_2(x) = -2(x+3)^2 + 2.$$

Como a parábola P_3 é a imagem da parábola P pela translação de vetor $\vec{u}(-4, 3)$, então $f_3(x) = 2(x+4)^2 + 3$.

Como a parábola P_4 é a imagem da parábola P pela translação de vetor $\vec{u}(8, 4)$, então $f_4(x) = 2(x-8)^2 + 4$.

Como a parábola P_5 é a imagem da parábola P pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(6, 2)$, então

$$f_5(x) = -2(x-6)^2 + 2.$$

Como a parábola P_6 é a imagem da parábola P pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(-1, -2)$, então

$$f_6(x) = -2(x+1)^2 - 2.$$

Como a parábola P_7 é a imagem da parábola P pela translação de vetor $\vec{u}(-7, -3)$, então $f_7(x) = 2(x+7)^2 - 3$.

1.2. $D_{f_1}' = [0, +\infty[$ e 0 é mínimo absoluto.

$D_{f_2}' =]-\infty, 2]$ e 2 é máximo absoluto.

$D_{f_3}' = [3, +\infty[$ e 3 é mínimo absoluto.

$D_{f_4}' = [4, +\infty[$ e 4 é mínimo absoluto.

$D_{f_5}' =]-\infty, 2]$ e 2 é máximo absoluto.

$D_{f_6}' =]-\infty, -2]$ e -2 é máximo absoluto.

$D_{f_7}' = [-3, +\infty[$ e -3 é mínimo absoluto.

1.3.

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
$f_2(x)$	-	0	+	-

1.4.

x		8	
$f_4(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

1.5.

a) Sabe-se que $f_1(x) = 2(x-4)^2$ e $f_2(x) = -2(x+3)^2 + 2$.

Pretende-se determinar os valores de a , de b e de c , de modo que $f_2(x) = af_1(x-b) + c$.

A parábola P_1 tem a concavidade voltada para cima e a parábola P_2 tem a concavidade voltada para baixo, mas ambas têm a mesma abertura. Donde se pode concluir que $a = -1$.

Os vértices das parábolas P_1 e P_2 são os pontos de coordenadas $V_1(4, 0)$ e $V_2(-3, 2)$, respetivamente.

Como $\vec{V_1V_2} = V_2 - V_1 = (-3, 2) - (4, 0) = (-7, 2)$, conclui-se que $b = -7$ e $c = 2$.

Assim sendo, tem-se que $a = -1$, $b = -7$ e $c = 2$.

b) Sabe-se que $f_5(x) = -2(x-6)^2 + 2$ e $f_4(x) = 2(x-8)^2 + 4$.

Pretende-se determinar os valores de a , de b e de c , de modo que $f_4(x) = af_5(x-b) + c$.

A parábola P_5 tem a concavidade voltada para baixo e a parábola P_4 tem a concavidade voltada para cima, mas ambas têm a mesma abertura. Donde se pode concluir que $a = -1$.

Os vértices das parábolas P_5 e P_4 são os pontos de coordenadas $V_5(6, 2)$ e $V_4(8, 4)$, respetivamente.

Como $\vec{V_5V_4} = V_4 - V_5 = (8, 4) - (6, 2) = (2, 2)$, conclui-se que $b = 2$ e $c = 2$.

Assim sendo, tem-se que $a = -1$, $b = 2$ e $c = 2$.

c) Sabe-se que $f_7(x) = 2(x+7)^2 - 3$ e $f_3(x) = 2(x+4)^2 + 3$.

Pretende-se determinar os valores de a , de b e de c , de modo que $f_3(x) = af_7(x-b) + c$.

As parábolas P_7 e P_3 têm a concavidade voltada para cima e a mesma abertura. Donde se pode concluir que $a = 1$.

Os vértices das parábolas P_7 e P_3 são os pontos de coordenadas $V_7(-7, -3)$ e $V_3(-4, 3)$, respetivamente.

Como $\vec{V_7V_3} = V_3 - V_7 = (-4, 3) - (-7, -3) = (3, 6)$, conclui-se que $b = 3$ e $c = 6$. Assim sendo, tem-se que $a = 1$, $b = 3$ e $c = 6$.

d) Sabe-se que $f_5(x) = -2(x-6)^2 + 2$ e $f_6(x) = -2(x+1)^2 - 2$.

Pretende-se determinar os valores de a , de b e de c , de modo que $f_6(x) = af_5(x-b) + c$.

As parábolas P_5 e P_6 têm a concavidade voltada para baixo e a mesma abertura. Donde se pode concluir que $a = 1$.

Os vértices das parábolas P_5 e P_6 são os pontos de coordenadas $V_5(6, 2)$ e $V_6(-1, -2)$, respetivamente.

Como $\vec{V_5V_6} = V_6 - V_5 = (-1, -2) - (6, 2) = (-7, -4)$, conclui-se que $b = -7$ e $c = -4$.

Assim sendo, tem-se que $a = 1$, $b = -7$ e $c = -4$.

Pág. 71

$$\begin{aligned} 72.1. \quad f(x) &= x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) + 5 = \\ &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4 \end{aligned}$$

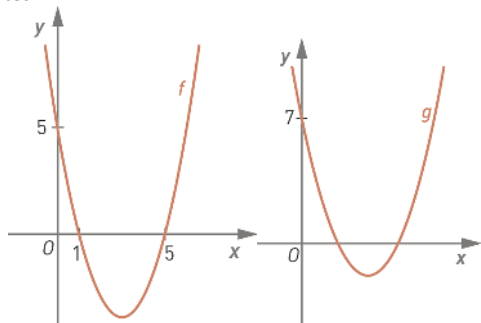
A representação gráfica da função f é uma parábola de vértice $V(3, -4)$ cuja concavidade está voltada para cima, então o mínimo de f é -4 . Como $f(0) = 5$, o gráfico de f intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $f(0) = 5$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1 \end{aligned}$$

O gráfico de f intersesta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(5, 0)$.

72.2. O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 2)$.

Então, as representações gráficas das funções f e g são as seguintes:



72.3. As coordenadas do vértice da parábola representativa da função g são $(3, -4) + (0, 2)$, ou seja, $(3, -2)$.

73.1. Como -1 e 3 são os zeros da função f , então $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

Sabe-se que o ponto de coordenadas $(-3, -6)$ pertence ao gráfico de f , logo tem-se:

$$f(-3) = -6 \Leftrightarrow a(-3+1)(-3-3) = -6 \Leftrightarrow 12a = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Assim sendo, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + x - 3) = \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Como a representação gráfica da função f é uma parábola de vértice $V(1, 2)$ cuja concavidade está voltada para baixo, então $D_f' =]-\infty, 2]$.

73.2. O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(1, 2)$.

O quadro de variação da função g é o seguinte:

x		2	
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

A função g é crescente em $] -\infty, 2]$, decrescente em $[2, +\infty[$ e tem máximo absoluto igual a 4.

73.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -f(2x) = 0 \Leftrightarrow f(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \vee 2x = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow -f(2x) > 0 \Leftrightarrow f(2x) < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \vee 2x > 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

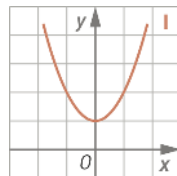
$$h(x) < 0 \Leftrightarrow -f(2x) < 0 \Leftrightarrow f(2x) > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \wedge 2x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \wedge x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$$

Tarefa 6

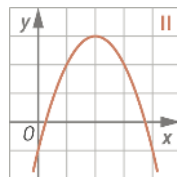
1.1. No caso I a parábola tem vértice no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

Então, o referencial a aplicar é o seguinte:



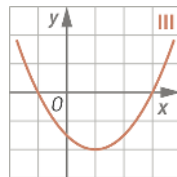
No caso II a parábola tem vértice no ponto de coordenadas $(2, 3)$.

Então, o referencial a aplicar é o seguinte:



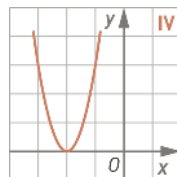
No caso III a parábola interseca o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 3 .

Então, o referencial a aplicar é o seguinte:



No caso IV a parábola tem vértice no ponto de coordenadas $(-2, 0)$.

Então, o referencial a aplicar é o seguinte:



1.2. Situação I

A parábola interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não interseca o eixo das abscissas.

Situação II

Se $x = 0$, então $y = -(0-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$.

Se $y = 0$, então tem-se:

$$\begin{aligned} -(x-2)^2 + 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{3} \vee x-2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim sendo, conclui-se que a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e o eixo das abscissas nos pontos $(2 - \sqrt{3}, 0)$ e $(2 + \sqrt{3}, 0)$.

Situação III

Se $x = 0$, então $y = 0,5(0 - 3)(0 + 1) = -1,5$.

Se $y = 0$, então tem-se:

$$0,5(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1.$$

Assim sendo, conclui-se que a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1,5)$ e o eixo das abscissas nos pontos $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

Situação IV

Se $x = 0$, então $y = 3(0 + 2)^2 = 12$.

Se $y = 0$, então tem-se:

$$3(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Assim sendo, conclui-se que a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 12)$ e o eixo das abscissas no pontos $(-2, 0)$.

1.3.

a) Designando por f a função representada na situação III tem-se $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 1)$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 0,5(x - 3)(x + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x - 3x - 3) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{2 - 2\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{6} \vee x = 1 - \sqrt{6}$$

Conjunto-solução: $\{1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}\}$

$$\text{b) } f(x) < 6 \Leftrightarrow 0,5(x - 3)(x + 1) < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x - 3x - 3) < 6 \Leftrightarrow$$

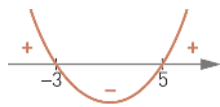
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 12 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-3, 5[$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 + 8}{2} \vee x = \frac{2 - 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3$$



Então, $x^2 - 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 5[$.

Pág. 72

$$\text{74.1. } y = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3x) = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) =$$

$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

$$\text{Vértice: } \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$\text{Eixo de simetria: } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Contradomínio: } \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$$

$$\text{74.2. } y = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x) + 1 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 =$$

$$= -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 1 = -(x - 1)^2 + 2$$

$$\text{Vértice: } (1, 2)$$

$$\text{Eixo de simetria: } x = 1$$

$$\text{Contradomínio: }]-\infty, 2]$$

$$\text{74.3. } y = -3x^2 + x - 1 = -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - 1 =$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) - 1 =$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \frac{1}{12} - 1 = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{11}{12}$$

$$\text{Vértice: } \left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$$

$$\text{Eixo de simetria: } x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Contradomínio: } \left]-\infty, -\frac{11}{12}\right]$$

$$\text{74.4. } y = x^2 - 5x - 2 = (x^2 - 5x) - 2 = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) - 2 =$$

$$= \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$$

$$\text{Vértice: } \left(\frac{5}{2}, -\frac{33}{4}\right)$$

$$\text{Eixo de simetria: } x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Contradomínio: } \left[-\frac{33}{4}, +\infty\right[$$

$$\text{74.5. } y = \frac{x^2}{2} + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$\text{Vértice: } (0, 3)$$

$$\text{Eixo de simetria: } x = 0$$

$$\text{Contradomínio: } [3, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 74.6. \quad y &= -2x^2 + 8x - 1 = -2(x^2 - 4x) - 1 = \\ &= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 1 = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 - 1 = \\ &= -2(x - 2)^2 + 7 \end{aligned}$$

Vértice: (2, 7)

Eixo de simetria: $x = 2$

Contradomínio: $]-\infty, 7]$

Pág. 73

$$\begin{aligned} 75.1. \quad f(x) &= -2x^2 + 6x + k = -2\left(x^2 - 3x\right) + k = \\ &= -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + k = \\ &= -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{18}{4} + k = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} + k \end{aligned}$$

A representação gráfica de qualquer uma das funções da família é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice

$$V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2} + k\right).$$

O contradomínio é $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ se:

$$\frac{9}{2} + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{8}{2} \Leftrightarrow k = -4$$

75.2. A função tem dois zeros distintos se $\Delta > 0$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 6^2 - 4 \times (-2) \times k > 0 \Leftrightarrow 36 + 8k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{36}{8}$$

$$\Leftrightarrow k > -\frac{9}{2} \Leftrightarrow k \in \left]-\frac{9}{2}, +\infty\right[$$

76.1.

a) Em primeiro lugar vamos determinar a equação reduzida da reta r .

Como a reta passa nos pontos $A(4, 0)$ e $B(0, 8)$, tem-se

$$m = \frac{8-0}{0-4} = -2.$$

Então a reta é definida pela equação $y = -2x + 8$.

$$\text{Sabe-se que } A_{[OAPQ]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{PQ}}{2} \times \overline{OQ}.$$

Sendo P um ponto do gráfico de f com abscissa $x \in]0, 4[$, então

$$P(x, -2x + 8).$$

Se $[OAPQ]$ é um trapézio, então $Q(0, -2x + 8)$.

Como g é a função de domínio $]0, 4[$ que representa a área do trapézio $[OAPQ]$, então tem-se:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4+x}{2} \times (-2x+8) = \frac{(4+x) \times (-2x+8)}{2} = \frac{-8x+32-2x^2+8x}{2} = \\ &= -x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\text{b) Sabe-se que } A_{[PBQ]} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{BQ}}{2}.$$

Como h é a função de domínio $]0, 4[$ que representa a área do triângulo $[PBQ]$, então tem-se:

$$h(x) = \frac{x \times (8 - (-2x + 8))}{2} = \frac{x \times (8 + 2x - 8)}{2} = \frac{x \times 2x}{2} = x^2$$

$$\begin{aligned} 76.2. \quad g(x) &= h(x) \Leftrightarrow -x^2 + 16 = x^2 \Leftrightarrow -2x^2 = -16 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como $x \in]0, 4[$, conclui-se que $x = 2\sqrt{2}$.

Então, $P(2\sqrt{2}, -4\sqrt{2} + 8)$.

Tarefa 7

1.1. Como o balão foi lançado do cimo de um prédio, para determinar a altura do prédio basta calcular $A(0)$.

Como $A(0) = 90$, conclui-se que o prédio tem 90 metros de altura.

$$\begin{aligned} 1.2. \quad A(t) &= -7,5t^2 + 30t + 90 = -7,5(t^2 - 4t) + 90 = \\ &= -7,5(t^2 - 4t + 4 - 4) + 90 = \\ &= -7,5(t^2 - 4t + 4) + 30 + 90 = -7,5(t - 2)^2 + 120 \end{aligned}$$

O vértice da parábola representativa da função é $V(2, 120)$ e a concavidade é voltada para baixo.

Então, conclui-se que o balão atingiu a altura máxima de 120 metros, duas horas após ter sido lançado, ou seja, às 11 horas.

$$\begin{aligned} 1.3. \quad A(t) &= 0 \Leftrightarrow -7,5(t - 2)^2 + 120 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t - 2 = 4 \vee t - 2 = -4 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -2 \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$, conclui-se que $t = 6$.

Significa que o balão demorou 6 horas a atingir o solo.

2.1. Se $x = 4$, então cada triângulo tem 4 cm de base e 6 cm de altura.

$$\text{A área é dada por: } A = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

2.2. Sendo f a função que a cada valor de x faz corresponder a área de cada triângulo, tem-se:

$$f(x) = \frac{x \times (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = -0,5x^2 + 5x.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 10 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 10\} =]0, 10[$$

$$2.3. \quad f(x) = 10,5 \Leftrightarrow -0,5x^2 + 5x = 10,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 5x - 10,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-0,5) \times (-10,5)}}{2 \times (-0,5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{4}}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 2}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 + 2}{-1} \vee x = \frac{-5 - 2}{-1} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 7$$

Como $x \in]0, 10[$, conclui-se que $x = 3 \vee x = 7$.

$$\begin{aligned}
 2.4. \quad f(x) &= -0,5x^2 + 5x = -0,5(x^2 - 10x) = \\
 &= -0,5(x^2 - 10x + 25 - 25) = \\
 &= -0,5(x^2 - 10x + 25) + 12,5 = \\
 &= -0,5(x-5)^2 + 12,5
 \end{aligned}$$

O vértice da parábola representativa da função é $V(5; 12,5)$ e a concavidade é voltada para baixo. Então, conclui-se que a área do triângulo é máxima para $x=5$.

2.5. Como a altura de um triângulo equilátero de lado x é dada por $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, conclui-se que os triângulos são equiláteros se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}}{2}x &= 10 - x \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 20 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 2x = 20 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3} + 2} \Leftrightarrow x \approx 5,36.
 \end{aligned}$$

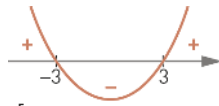
Pág. 74

77.1. $x^2 - 9 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

$$\text{Então, } x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[.$$

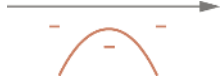


77.2. $-2x^2 + x - 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$$-2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-4}$$

equação impossível

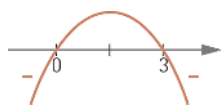


$$\text{Então, } -2x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

77.3. $-x(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x \geq 0$

Cálculo auxiliar:

$$-x(x-3) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \vee x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

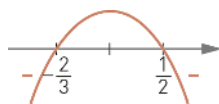


$$\text{Então, } -x(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 3].$$

77.4. $2(1-3x^2) \leq x \Leftrightarrow 2-6x^2 \leq x \Leftrightarrow -6x^2 - x + 2 \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 -6x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{-12} \Leftrightarrow x = \frac{1+7}{-12} \vee x = \frac{1-7}{-12} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

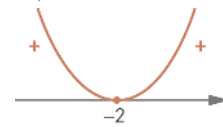


$$\text{Então, } 2(1-3x^2) \leq x \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[.$$

$$\begin{aligned}
 77.5. \quad 5 + \frac{(x-2)(x+2)}{4} &> 3-x \Leftrightarrow 5 + \frac{x^2-4}{4} > 3-x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 20 + x^2 - 4 > 12 - 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 0
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

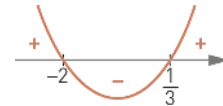


$$\text{Então, } 5 + \frac{(x-2)(x+2)}{4} > 3-x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

77.6. $x^2 + 2x > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 6x > x+2 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-5+7}{6} \vee x = \frac{-5-7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -2
 \end{aligned}$$



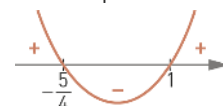
$$\text{Então, } x^2 + 2x > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[.$$

77.7. $\frac{(2x+1)^2}{3} \geq x+2 \Leftrightarrow \frac{4x^2+4x+1}{3} \geq x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 3x + 6 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 4x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-1+9}{8} \vee x = \frac{-1-9}{8} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

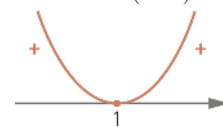


$$\text{Então, } \frac{(2x+1)^2}{3} \geq x+2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{5}{4}] \cup [1, +\infty[.$$

77.8. $x(x-1) < \frac{(x-1)(x+1)}{2} \Leftrightarrow x^2 - x < \frac{x^2-1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x < x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0$$

Cálculo auxiliar: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



$$\text{Então, } x(x-1) < \frac{(x-1)(x+1)}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Pág. 75

78.1. O instante inicial corresponde a $t = 0$.

Como $h(0) = 1$, conclui-se que no instante inicial a bola se encontrava a 1 metro de altura.

78.2. $h(2) = -5 \times 2^2 + 30 \times 2 + 1 = -20 + 60 + 1 = 41$

Significa que 2 segundos após o lançamento, a bola encontra-se a 41 metros do solo.

78.3. $h(t) = -5t^2 + 30t + 1 = -5(t^2 - 6t) + 1 =$
 $= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 1 = -5(t^2 - 6t + 9) + 45 + 1 =$
 $= -5(t - 3)^2 + 46$

O vértice da parábola representativa da função é $V(3, 46)$ e a concavidade é voltada para baixo. Então, conclui-se que a bola atingiu a altura máxima de 46 metros, 3 segundos após o seu lançamento.

78.4. $h(t) > 26 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 1 > 26 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t - 25 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -t^2 + 6t - 5 > 0$

Cálculo auxiliar:

$-t^2 + 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{-6 + 4}{-2} \vee t = \frac{-6 - 4}{-2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5$

Assim, $h(t) > 26 \Leftrightarrow t \in]1, 5[$.

78.5. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 20}}{-10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = \frac{-30 + \sqrt{920}}{-10} \vee t = \frac{-30 - \sqrt{920}}{-10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t \approx -0,03 \vee t \approx 6$

Como $t \geq 0$, conclui-se que $t \approx 6$.

Significa que a bola atingiu o solo, aproximadamente, 6 segundos após o lançamento.

Pág. 76

79.1. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

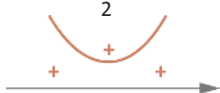


Então, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 4]$.

79.2. $i(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 > 0$

Cálculo auxiliar:

$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$
 equação impossível



Então, $i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, +\infty[$.

79.3. $g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 > 0$

Cálculo auxiliar:

$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + 8}{2} \vee x = \frac{-4 - 8}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -6$



Então, $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -6[\cup]2, +\infty[$.

79.4. $g(x) > j(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 > -x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 0$

Cálculo auxiliar: $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Então, $g(x) > j(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.



79.5. $f(x) \leq g(x) - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x \leq x^2 + 4x - 12 - 8 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{12 + 8}{2} \vee x = \frac{12 - 8}{2} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 2$

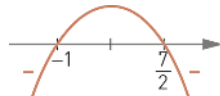


Então, $f(x) \leq g(x) - 8 \Leftrightarrow x \in [2, 10]$.

80.1. $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 7 > 0$

Cálculo auxiliar:

$-2x^2 + 9x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 + 5}{-4} \vee x = \frac{-9 - 5}{-4}$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{7}{2}$



Então, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1, \frac{7}{2}[$.

80.2. Para resolver a inequação vamos construir uma tabela de sinais.

x	$-\infty$	-4		1		2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
Sinal de $f(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
Sinal de $g(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de $f(x) \cdot g(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Então, $f(x) \cdot g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [1, 2] \cup [\frac{7}{2}, +\infty[$.

Tarefa 8

1.1. A função f é uma função afim que interseja o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$, logo $f(x) = mx + 1$.

Sabe-se que o ponto $(-2, 0)$ também pertence ao gráfico de f ,

$$\text{então } m = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Portanto, } f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

1.2. A representação gráfica da função quadrática g é uma da parábola de vértice $V(-1, 9)$. Então, $g(x) = a(x+1)^2 + 9$.

$$g(0) = 8 \Leftrightarrow a(0+1)^2 + 9 = 8 \Leftrightarrow a \times 1 = -1 \Leftrightarrow a = -1.$$

Conclui-se que

$$g(x) = -(x+1)^2 + 9 = -(x^2 + 2x + 1) + 9 = -x^2 - 2x - 1 + 9 = -x^2 - 2x + 8.$$

2.1. Por exemplo, $a = 0$.

Ora, sendo $f(0) > 0$ e $g(0) > 0$, tem-se $f(0) \times g(0) > 0$.

2.2. Por exemplo, $a = 5$.

Ora, sendo $f(\pi) > 0$ e $g(5) < 0$, tem-se $f(\pi) \times g(5) < 0$.

2.3. Por exemplo, $a = -4$.

Ora, sendo $f(\pi) > 0$ e $g(-4) = 0$, tem-se $f(-3) \times g(-4) = 0$.

3.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Sinal de $f(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
Sinal de $g(x)$	-	0	+	0	-

4.

x	$-\infty$	-4		-2		2	$+\infty$
Sinal de $f(x)$	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de $g(x)$	-	0	+	+	+	0	-
Sinal de $f(x) \times g(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Então, $f(x) \times g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]-2, 2[$.

Pág. 77

$$\begin{aligned} \mathbf{81.1.} \quad g(x) &= 2x^2 + 4x + 5 = 2(x^2 + 2x) + 5 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 + 5 = 2(x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

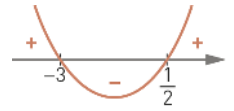
O vértice da parábola representativa da função g é $V(-1, 3)$ e a concavidade é voltada para cima, logo o contradomínio é $[3, +\infty[$.

$$\mathbf{81.2.} \quad g(x) \leq 8 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 5 \leq 8 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 + 7}{4} \vee x = \frac{-5 - 7}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } g(x) \leq 8 - x \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right].$$



82. Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e têm abscissa 5.

Resolvendo a equação $f(x) = 5$, determinamos as suas abscissas.

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2+6}{2} \vee x = \frac{2-6}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

Assim sendo, $A(-2, 5)$ e $B(4, 5)$. Como $[AB]$ é um diâmetro do círculo, o raio do círculo é o ponto médio de $[AB]$.

$$\text{Coordenadas do ponto médio de } [AB]: \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = (1, 5).$$

$$\text{Sendo } r \text{ o raio do círculo, tem-se } r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

A parte sombreada do círculo, incluindo a fronteira, é definida por: $(x-1)^2 + (y-5)^2 \leq 9 \wedge y \geq 5$.

Tarefa 9

1.1. Sendo x a medida, em metros, do lado do canteiro perpendicular à casa e sabendo que são necessários 40 metros de rede para vedar o canteiro, conclui-se que a medida, em metros, do lado do canteiro paralelo à casa é dado por $40 - 2x$.

$$\text{Então, } f(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1.2.} \quad f(x) &= -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x) = \\ &= -2(x^2 - 20x + 100 - 100) = -2(x^2 - 20x + 100) + 200 \\ &= -2(x-10)^2 + 200 \end{aligned}$$

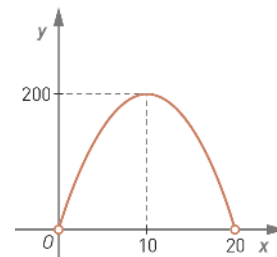
O vértice da parábola representativa da função f é $V(10, 200)$ e a concavidade é voltada para baixo.

Então, conclui-se que a área do canteiro é máxima para $x = 10$. Nesse caso, $40 - 2x = 40 - 2 \times 10 = 20$. Por isso, quando a área é máxima o lado do canteiro encostado à casa mede 20 m.

1.3. Atendendo a que $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 40 - 2x > 0\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 20\} =]0, 20[\text{ e aos cálculos efetuados}$$

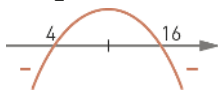
anteriormente, conclui-se que a representação gráfica da função f é a seguinte:



$$1.4. f(x) \geq 128 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x \geq 128 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 128 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 64 \geq 0$$

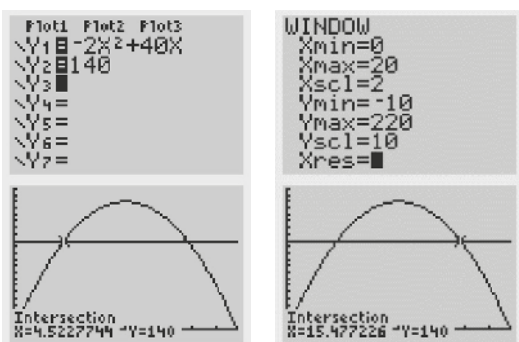
Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 20x - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 256}}{-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-20 + 12}{-2} \vee x = \frac{-20 - 12}{-2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 16$$



Então, $f(x) \geq 128 \Leftrightarrow x \in [4, 16]$.

1.5.



$$f(x) < 140 \Leftrightarrow x \in]0, a[\cup]b, 20[$$

Por observação gráfica, conclui-se que $a \approx 4,5$ e $b \approx 15,5$.

2.1. Altura, em metros, do primeiro poste:

$$f(0) = \frac{1}{8}(0-4)^2 + 3 = \frac{1}{8} \times 16 + 3 = 5.$$

Altura, em metros, do segundo poste:

$$f(12) = \frac{1}{8}(12-4)^2 + 3 = \frac{1}{8} \times 64 + 3 = 11.$$

Então, o primeiro poste tem 5 metros de altura e o segundo poste tem 11 metros de altura.

2.2. Para determinar o pedido, temos de calcular o mínimo absoluto da função f .

Como as coordenadas do vértice da parábola representativa da função f são $(4, 3)$ e a concavidade é voltada para cima, conclui-se que o mínimo da função é igual a 3 e verifica-se para $x = 4$. Assim sendo, o ponto do fio que está à distância mínima do solo encontra-se a 4 metros do primeiro poste, logo esse ponto está a 8 metros do segundo poste.

2.3. Sabe-se que um ponto do fio está a 7,5 m do solo, então tem-se $f(x) = 7,5$.

$$f(x) = 7,5 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x-4)^2 + 3 = 7,5 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x-4)^2 = 4,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 36 \Leftrightarrow x-4 = 6 \vee x-4 = -6 \Leftrightarrow x = 10 \vee x = -2$$

Como $x \in [0, 12]$, conclui-se que $x = 10$.

Então, o ponto do fio que está a 7,5 m do solo encontra-se a 10 metros do primeiro poste, logo esse ponto está a 2 metros do segundo poste.

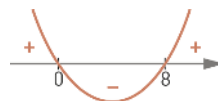
$$2.4. f(x) > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x-4)^2 + 3 > 5 \wedge 0 \leq x \leq 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x-4)^2 - 2 > 0 \wedge 0 \leq x \leq 12$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{8}(x-4)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

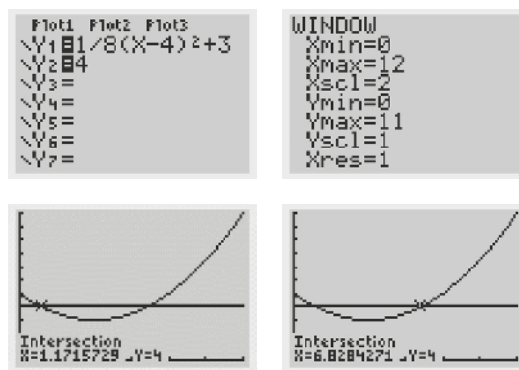
$$\Leftrightarrow x-4 = 4 \vee x-4 = -4 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 0$$



Então,

$$f(x) > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]8, +\infty[\wedge x \in [0, 12] \Leftrightarrow x \in]8, 12].$$

2.5. Pretende-se resolver graficamente a inequação $f(x) \leq 4$.



$$f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x \in [a, b]$$

Por observação gráfica, conclui-se que $a \approx 1,17$ e $b \approx 6,83$.

Pág. 78

83.1.

• Se $x \leq 0$, então $f(x) = mx + b$.

A ordenada na origem é 2, então $b = 2$.

Considerando os pontos $A(-2, 4)$ e $B(0, 2)$, tem-se

$$m = \frac{2-4}{0-(-2)} = -1.$$

Conclui-se que se $x \leq 0$, então $f(x) = -x + 2$.

• Se $x > 0$, então $f(x) = mx + b$.

A ordenada na origem é -2, então $b = -2$.

Considerando os pontos $C(0, -2)$ e $D(1, 0)$, tem-se

$$m = \frac{0-(-2)}{1-0} = 2.$$

Conclui-se que se $x > 0$, então $f(x) = 2x - 2$.

$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x-2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

83.2.

• Se $x < 1$, então $f(x) = mx + b$.

A ordenada na origem é 1, então $b=1$.

Considerando os pontos $A(-1, 0)$ e $B(1, 2)$, tem-se

$$m = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1.$$

Conclui-se que se $x < 1$, então $f(x) = x + 1$.

• Se $x = 1$, então $f(x) = -1$.

• Se $x > 1$, então $f(x) = mx + b$.

Considerando os pontos $C(1, 1)$ e $D(2, 0)$, tem-se

$$m = \frac{0-1}{2-1} = -1.$$

$f(x) = -x + b$ e sabe-se que $f(2) = 0$, então tem-se:

$$-2 + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

Conclui-se que se $x > 1$, então $f(x) = -x + 2$.

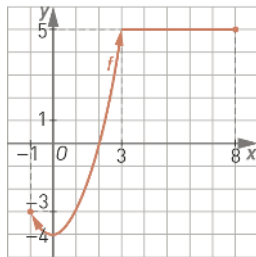
$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Pág. 79

84.1.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3 \vee 3 < x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 8\} = [-1, 8]$$

84.2. O gráfico da função f é constituído por parte de uma parábola, de vértice $(0, -4)$ e que contém os pontos $(-1, -3)$ e $(3, 5)$, e um segmento de reta.



84.3. Por observação gráfica, conclui-se que a função tem um único zero e que esse zero pertence ao intervalo $[-1, 3]$.

Então tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2) \wedge -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

85.1.

$$\text{a) } f(4,5) = 4,5 \times 0,80 = 3,6$$

$$\text{b) } f(8) = 5 \times 0,80 + (8 - 5) \times 0,50 = 4 + 1,5 = 5,5$$

85.2. • Se $0 < x \leq 5$, então $f(x) = 0,80x$.

• Se $x > 5$, então

$$f(x) = 5 \times 0,80 + (x - 5) \times 0,50 = 4 + 0,50x - 2,5 = 0,50x + 1,5.$$

$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} 0,80x & \text{se } 0 < x \leq 5 \\ 0,50x + 1,5 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

Pág. 80

86.1. • Se $-3 \leq x < 0$, então $f(x) = -\frac{4}{3}x + 2$.

• Se $0 \leq x \leq 5$, então $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ porque a representação gráfica é parte de uma parábola de vértice $(2, 5)$.

Como $f(0) = 1$, então tem-se:

$$a(0-2)^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$$

Conclui-se que se $0 \leq x \leq 5$, então $f(x) = -(x-2)^2 + 5$.

$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x + 2 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ -(x-2)^2 + 5 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

86.2. $a = f(5) = -(5-2)^2 + 5 = -4$,

$b = f(-3) = -\frac{4}{3} \times (-3) + 2 = 4 + 2 = 6$ e $c = 2$ porque a reta que

contém o segmento de reta que constitui parte do gráfico tem ordenada na origem igual a 2.

86.3.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = 4 &\Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}x + 2 = 4 \wedge -3 \leq x < 0 \right) \vee \\ &\vee \left(-(x-2)^2 + 5 = 4 \wedge 0 \leq x \leq 5 \right) \end{aligned}$$

$$\cdot -\frac{4}{3}x + 2 = 4 \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = 2 \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\cdot -(x-2)^2 + 5 = 4 \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2 = 1 \vee x-2 = -1) \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = 1) \wedge 0 \leq x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1 \vee x = 3$.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}x + 2 = \frac{1}{2} \wedge -3 \leq x < 0 \right) \vee \\ &\vee \left(-(x-2)^2 + 5 = \frac{1}{2} \wedge 0 \leq x \leq 5 \right) \end{aligned}$$

$$\cdot -\frac{4}{3}x + 2 = \frac{1}{2} \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow -8x + 12 = 3 \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{8} \wedge -3 \leq x < 0 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

$$\cdot -(x-2)^2 + 5 = \frac{1}{2} \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{9}{2} \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2 = \sqrt{\frac{9}{2}} \vee x-2 = -\sqrt{\frac{9}{2}} \right) \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \vee x = 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \wedge 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

Conclui-se, então, que $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$.

Pág. 82

$$87.1. f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

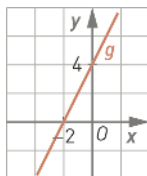
$$87.2. f(x) = |3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{se } 3-x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \leq 3 \\ -3+x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

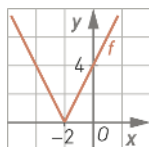
$$87.3. f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{se } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

88.1. Uma representação gráfica da função afim g , definida por $g(x) = 2x + 4$, é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, 4)$.



88.2. Uma representação gráfica da função f , definida por $f(x) = |g(x)|$, é:



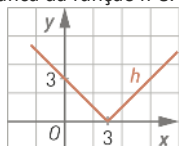
89.1. Se o gráfico de f é a imagem do gráfico de g pela translação de vetor $\vec{u} = (-3, 0)$, então o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{v} = (3, 0)$.

Como a função f é definida por $f(x) = |x+5|$, então a função g é definida por $g(x) = f(x-3) = |x-3+5| = |x+2|$.

Assim sendo, uma equação do eixo de simetria do gráfico de g é $x = -2$.

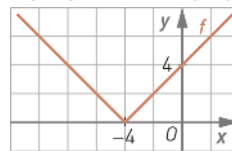
$$89.2. h(x) = f(x-8) = |x-8+5| = |x-3|$$

Uma representação gráfica da função h é:



Pág. 83

90.1. Uma representação gráfica da função f é:



Uma equação do eixo de simetria do gráfico da função f é $x = -4$.

90.2. Sabe-se que $D_f' = [0, +\infty[$ e que $x = -4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de f .

a) O gráfico da função h definida por $h(x) = -2 + f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função f através da translação vertical de vetor $\vec{u} = (0, -2)$.

Então, $D_h' = [-2, +\infty[$ e $x = -4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

b) O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x-2) + 3$ pode ser obtido do gráfico da função f através da translação de vetor $\vec{u} = (2, 3)$.

Então, $D_h' = [3, +\infty[$ e $x = -2$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

c) O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x+1) - \frac{1}{2}$ pode ser obtido do gráfico da função f através da translação de vetor $\vec{u} = (-1, -\frac{1}{2})$.

Então, $D_h' = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ e $x = -5$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

d) O gráfico da função h definida por $h(x) = 2f(x) - 1$ pode ser obtido do gráfico da função f através da dilatação vertical de coeficiente 2 seguida da translação vertical de vetor $\vec{u} = (0, -1)$.

Então, $D_h' = [-1, +\infty[$ e $x = -4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

e) O gráfico da função h definida por pode ser obtido do gráfico da função f aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) translação horizontal de vetor $\vec{u} = (3, 0)$;

2.º) contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$;

3.º) translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 2)$.

Então, $D_h' = [2, +\infty[$ e $x = -1$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

91.1.

$$a) |f(x)| = |2x-6| = |2(x-3)| = |2| \times |x-3| = 2|x-3|$$

$$b) |g(x)| = |3x+1| = \left| 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \right| = |3| \times \left| x + \frac{1}{3} \right| = 3 \left| x + \frac{1}{3} \right|$$

91.2. O gráfico de $|f|$ pode ser obtido a partir do gráfico de

$y = |x|$, aplicando a seguinte sequência de transformações:

I – translação horizontal de vetor $\vec{u} = (3, 0)$ e obtém-se o gráfico

de $y = |x - 3|$;

II – dilatação vertical de coeficiente 2 e obtém-se o gráfico de

$y = 2|x - 3|$.

Pág. 84

92.1. Para obter o gráfico da função f a partir do gráfico de

$y = |x|$, deve-se aplicar a seguinte sequência de transformações:

I – translação horizontal de vetor $\vec{u} = (3, 0)$ e obtém-se o gráfico

de $y = |x - 3|$;

II – dilatação vertical de coeficiente 2 e obtém-se o gráfico de

$y = 2|x - 3|$;

III – translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, -1)$ e obtém-se o gráfico

de $y = 2|x - 3| - 1$.

92.2. Para obter o gráfico da função f a partir do gráfico de

$y = |x|$, deve-se aplicar a seguinte sequência de transformações:

I – translação horizontal de vetor $\vec{u} = (-1, 0)$ e obtém-se o gráfico

de $y = |x + 1|$;

II – dilatação vertical de coeficiente 3 e obtém-se o gráfico de

$y = 3|x + 1|$;

III – reflexão de eixo Ox e obtém-se o gráfico de $y = -3|x + 1|$;

IV – translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 2)$ e obtém-se o gráfico

de $y = -3|x + 1| + 2$.

92.3. Para obter o gráfico da função f a partir do gráfico de

$y = |x|$, deve-se aplicar a seguinte sequência de transformações:

I – translação horizontal de vetor $\vec{u} = (-2, 0)$ e obtém-se o gráfico

de $y = |x + 2|$;

II – contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$ e obtém-se o gráfico de

$y = \frac{1}{2}|x + 2|$;

III – translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 4)$ e obtém-se o gráfico

de $y = \frac{1}{2}|x + 2| + 4$.

93.1.

a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \vee 2x = 6 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

b) Por observação gráfica sabe-se que $x = 4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de f .

Como o gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f através da

contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, então $x = 2$ é uma

equação do eixo de simetria do gráfico de g .

93.2. Como $x = 4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico

de f conclui-se que $b = 4$.

Então, $f(x) = a|x - 4| + c$.

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a|0 - 4| + c = 2 \\ a|2 - 4| + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + c = 2 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 4a \\ 2a + 2 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 4a \\ -2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim sendo, $f(x) = |x - 4| - 2$.

93.3. $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}f(x) \leq -\frac{1}{2} \times (-2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}f(x) + 1 \leq 1 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, $D_h =]-\infty, 2]$.

Pág. 85

94.1. Como $x = 1$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de f conclui-se que $b = 1$.

Então, $f(x) = a|x - 1| + c$.

Como $D_f = [-3, +\infty[$, conclui-se que $a > 0$ e que $c = -3$.

Assim, $f(x) = a|x - 1| - 3$.

$$f(0) = -1 \Leftrightarrow a|0 - 1| - 3 = -1 \Leftrightarrow a - 3 = -1 \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\mathbf{94.2.} \quad f(x) = 2|x - 1| - 3 = \begin{cases} 2(x - 1) - 3 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ 2(-x + 1) - 3 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

95.1. Como $f(x) = 2|x + 1| + k$, sabe-se que $D_f = [k, +\infty[$.

A função não tem zeros se $k > 0$ pois nesse caso $0 \notin D_f$.

95.2. O mínimo absoluto da função f é k .

Então, o mínimo absoluto da função f é -3 se $k = -3$.

95.3. O gráfico de f intersesta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 3 se $f(0) = 3$.

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow 2|0 + 1| + k = 3 \Leftrightarrow 2 + k = 3 \Leftrightarrow k = 1.$$

Pág. 86

96.1. Como f é uma função afim, então $f(x) = mx + b$.

Sabe-se que os pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, 1)$ pertencem ao gráfico

$$\text{de } f, \text{ então } m = \frac{1 - 3}{2 - (-1)} = -\frac{2}{3}.$$

Portanto, $f(x) = -\frac{2}{3}x + b$.

Como $B(2, 1)$ pertence ao gráfico de f , então $f(2) = 1$.

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \times 2 + b = 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

Assim sendo, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

96.2.

$$\begin{aligned} \text{a) } g(x) &= |f(x)| - 2 = \left| -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \right| - 2 = \left| -\frac{2}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right) \right| - 2 = \\ &= \left| -\frac{2}{3} \right| \times \left| x - \frac{7}{2} \right| - 2 = \frac{2}{3} \left| x - \frac{7}{2} \right| - 2 \end{aligned}$$

Então, uma equação do eixo de simetria do gráfico de f é $x = \frac{7}{2}$.

$$\text{b) } D'_g = [-2, +\infty[$$

97.1. Sendo f a função definida por $f(x) = -2|x - 1| + 4$, sabe-se

que o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$ e que

$$D'_f =]-\infty, 4]$$

a) O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x - 3) + 1$ pode ser obtido do gráfico da função f aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) translação horizontal de vetor $\vec{u} = (3, 0)$;

2.º) translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 1)$.

Então, $D'_h =]-\infty, 5]$ e $x = 4$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

b) O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x - 3) + 1$ pode ser obtido do gráfico da função f através da reflexão de eixo Oy . Então, $D'_h =]-\infty, 4]$ e $x = -1$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h .

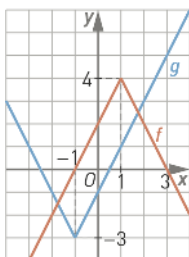
97.2. O gráfico da função g definida por $g(x) = -f(x + 2) + 1$

pode ser obtido do gráfico da função f aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) translação horizontal de vetor $\vec{u} = (-2, 0)$;

2.º) reflexão de eixo Ox ;

3.º) translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 1)$.



Relativamente aos intervalos de monotonia e extremos da função g , tem-se:

g é crescente em $[-1, +\infty[$;

g é decrescente em $]-\infty, -1]$.

g tem mínimo absoluto igual a -3 .

Tarefa 10

1.1. Sendo f é uma função afim, então $f(x) = mx + b$.

Sabe-se que os pontos $A(-2, 0)$ e $B(0, 6)$ pertencem ao

gráfico de f , então $b = 6$ e $m = \frac{6-0}{0-(-2)} = 3$.

Portanto, $f(x) = 3x + 6$.

1.2. Sabe-se que $g(x) = a|x - b|$.

Por outro lado, tem-se que

$$g(x) = |f(x)| = |3x + 6| = |3(x + 2)| = |3| \times |x + 2| = 3|x + 2| = 3|x - (-2)|$$

Então, conclui-se que $a = 3$ e $b = -2$.

2.1.

a) Por observação gráfica conclui-se que os zeros da função h são -6 e 10 .

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow h(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = -6 \vee 4x = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

b) Por observação gráfica sabe-se que $D'_h =]-\infty, 4]$.

O gráfico da função p definida por $p(x) = -h(x - 2) + 1$ pode ser obtido do gráfico da função h aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) translação horizontal de vetor $\vec{u} = (2, 0)$;

2.º) reflexão de eixo Ox ;

3.º) translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 1)$.

Então, $D'_p = [-3, +\infty[$.

2.2. Como $x = 2$ é uma equação do eixo de simetria do gráfico de h conclui-se que.

Então, $h(x) = a|x - 2| + c$.

Como $D'_h =]-\infty, 4]$, conclui-se que $a < 0$ e que $c = 4$.

Assim, $h(x) = a|x - 2| + 4$.

$$h(10) = 0 \Leftrightarrow a|10 - 2| + 4 = 0 \Leftrightarrow 8a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

3.1.

a) Sendo m a função definida por $m(x) = -|x + 2| - 4$, sabe-se que o eixo de simetria é a reta de equação $x = -2$.

O gráfico da função s definida por $s(x) = -\frac{1}{3}m(x)$ pode ser

obtido do gráfico da função m aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$;

2.º) reflexão de eixo Ox .

Então, o eixo de simetria da função s é a reta de equação $x = -2$.

b) Sendo m a função definida por $m(x) = -|x + 2| - 4$, sabe-se que $D'_m =]-\infty, -4]$.

O gráfico da função q definida por $q(x) = m(-x) + 1$ pode ser obtido do gráfico da função m aplicando a seguinte sequência de transformações:

1.º) reflexão de eixo Oy ;

2.º) translação vertical de vetor $\vec{v} = (0, 1)$.

Então, $D'_q =]-\infty, -3]$.

3.2.

$$\text{a) } r(x) = m(x+3) - 5 = -|x+3+2| - 4 - 5 = -|x+5| - 9$$

Como a função r é do tipo $r(x) = a|x-b|+c$, conclui-se que $a=-1$, $b=-5$ e $c=-9$.

$$\text{b) } r(x) = 3m(x) - 5 = 3(-|x+2|-4) - 5 = -3|x+2| - 12 - 5 = -3|x+2| - 17$$

Como a função r é do tipo $r(x) = a|x-b|+c$, conclui-se que $a=-3$, $b=-2$ e $c=-17$.

Pág. 87

$$\text{98.1. } |3-x|=2 \Leftrightarrow 3-x=2 \vee 3-x=-2 \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$

Conjunto-solução: $\{1, 5\}$

98.2.

$$|2x+4|=1 \Leftrightarrow 2x+4=1 \vee 2x+4=-1 \Leftrightarrow 2x=-3 \vee 2x=-5 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{3}{2} \vee x = -\frac{5}{2}$$

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

$$\text{98.3. } 5-|3-2x|=0 \Leftrightarrow |3-2x|=5 \Leftrightarrow 3-2x=5 \vee 3-2x=-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x=2 \vee -2x=-8 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=4$$

Conjunto-solução: $\{-1, 4\}$

$$\text{98.4. } |x+3|+2=0 \Leftrightarrow |x+3|=-2 \text{ Equação impossível.}$$

Conjunto-solução: $\{\}$

$$\text{98.5. } 3-2|3x-1|=1 \Leftrightarrow -2|3x-1|=-2 \Leftrightarrow |3x-1|=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-1=1 \vee 3x-1=-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=0$$

Conjunto-solução: $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

$$\text{98.6. } |x^2-3|=1 \Leftrightarrow x^2-3=1 \vee x^2-3=-1 \Leftrightarrow x^2=4 \vee x^2=2 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \vee x=-2 \vee x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$$

Conjunto-solução: $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$

$$\text{99.1. } f(x)=0 \Leftrightarrow 3-|x+2|=0 \Leftrightarrow |x+2|=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2=3 \vee x+2=-3 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-5$$

Os zeros da função f são -5 e 1 .

99.2.

$$f(x)=1 \Leftrightarrow 3-|x+2|=1 \Leftrightarrow |x+2|=2 \Leftrightarrow x+2=2 \vee x+2=-2 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee x=-4$$

Conjunto-solução: $\{-4, 0\}$

Pág. 88

100.1.

$$\text{a) } f(x)=g(-4) \Leftrightarrow |1-2x|=-4+2 \Leftrightarrow |1-2x|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x=2 \vee 1-2x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{3}{2}$$

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

$$\text{b) } g(x)=f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow |x+2|=1-2 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x+2|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2=2 \vee x+2=-2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-4$$

Conjunto-solução: $\{-4, 0\}$

100.2. Determinar as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g corresponde a resolver a equação $f(x)=g(x)$.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow |1-2x|=|x+2| \Leftrightarrow 1-2x=x+2 \vee 1-2x=-(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=3$$

Os gráficos das funções f e g intersectam-se nos pontos de abscissas $-\frac{1}{3}$ e 3 .

$$\text{101.1. } f(x)=0 \Leftrightarrow (5-2|x+1|=0 \wedge x < 0) \vee (|1-x|=0 \wedge x \geq 0)$$

$$\cdot 5-2|x+1|=0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |x+1|=\frac{5}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1=\frac{5}{2} \vee x+1=-\frac{5}{2}\right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{3}{2} \vee x=-\frac{7}{2}\right) \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$$

$$\cdot |1-x|=0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x=1$$

Conclui-se, então, que $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2} \vee x=1$.

101.2.

$$\text{a) } f(x)=2 \Leftrightarrow (5-2|x+1|=2 \wedge x < 0) \vee (|1-x|=2 \wedge x \geq 0)$$

$$\cdot 5-2|x+1|=2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |x+1|=\frac{3}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1=\frac{3}{2} \vee x+1=-\frac{3}{2}\right) \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{5}{2}\right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$$

$$\cdot |1-x|=2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (1-x=2 \vee 1-x=-2) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=3) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x=3$$

Conclui-se, então, que $f(x)=2 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \vee x=3$.

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{5}{2}, 3\right\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) = -3 &\Leftrightarrow (5 - 2|x+1| = -3 \wedge x < 0) \vee (|1-x| = -3 \wedge x \geq 0) \\ 5 - 2|x+1| &= -3 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |x+1| = 4 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1 = 4 \vee x+1 = -4) \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -5) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -5 \end{aligned}$$

$$\bullet \underbrace{|1-x| = -3 \wedge x \geq 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x \in \{ \} \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

Conclui-se, então, que $f(x) = -3 \Leftrightarrow x = -5$.

Conjunto-solução: $\{-5\}$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) = 4 &\Leftrightarrow (5 - 2|x+1| = 4 \wedge x < 0) \vee (|1-x| = 4 \wedge x \geq 0) \\ 5 - 2|x+1| &= 4 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |x+1| = \frac{1}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x+1 = \frac{1}{2} \vee x+1 = -\frac{1}{2} \right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2} \right) \wedge x < 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet |1-x| = 4 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (1-x = 4 \vee 1-x = -4) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 5) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = 5$.

Conjunto-solução: $\left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 5 \right\}$

$$\text{102.1. } |4x+1| = |x-1| \Leftrightarrow 4x+1 = x-1 \vee 4x+1 = -x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = -2 \vee 5x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = 0$$

Conjunto-solução: $\left\{ -\frac{2}{3}, 0 \right\}$

$$\text{102.2. } |x-3| - |2x+1| = 0 \Leftrightarrow |x-3| = |2x+1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2x+1 \vee x-3 = -2x-1 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{2}{3}$$

Conjunto-solução: $\left\{ -4, \frac{2}{3} \right\}$

102.3.

$$|2x^2| = |x| \Leftrightarrow 2x^2 = x \vee 2x^2 = -x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \vee 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \vee x(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x-1 = 0 \vee x = 0 \vee 2x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Conjunto-solução: $\left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$

Pág. 89

103.1.

$$|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow x-3 \leq 2 \wedge x-3 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 5 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$$

$$\text{103.2. } |x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 > 1 \vee x-2 < -1 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{103.3. } |1-5x| + 3 \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{|1-5x| \geq -2}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

103.4.

$$\begin{aligned} 1 - |1-x| \geq -2 &\Leftrightarrow -|1-x| \geq -3 \Leftrightarrow |1-x| \leq 3 \Leftrightarrow 1-x \leq 3 \wedge 1-x \geq -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \geq -2 \wedge x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4] \end{aligned}$$

$$\text{103.5. } |2x+3| > 5 \Leftrightarrow 2x+3 > 5 \vee 2x+3 < -5 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$$

$$\text{103.6. } 3 - |x+3| > 5 \Leftrightarrow -|x+3| > 2 \Leftrightarrow \underbrace{|x+3| < -2}_{\text{condição impossível}} \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

$$\text{104.1. } 3 - |x+3| > 5 \Leftrightarrow -|x+3| > 2 \Leftrightarrow \underbrace{|x+3| < -2}_{\text{condição impossível}} \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 6 \\ -x+11 & \text{se } x < 6 \end{cases}$$

104.2. A função g é decrescente, por exemplo, em $]-\infty, 6]$

porque nesse intervalo é definida por uma função afim de declive negativo.

104.3.

a)

$$\begin{aligned} g(x) \leq 8 &\Leftrightarrow 5 + |x-6| \leq 8 \Leftrightarrow |x-6| \leq 3 \Leftrightarrow x-6 \leq 3 \wedge x-6 \geq -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \leq 9 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, 9] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) > 6 &\Leftrightarrow 5 + |x-6| > 6 \Leftrightarrow |x-6| > 1 \Leftrightarrow x-6 > 1 \vee x-6 < -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > 7 \vee x < 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[\cup]7, +\infty[\end{aligned}$$

Pág. 90

105.1. O ponto P pertence ao gráfico da função e tem ordenada 5. Como o outro ponto do gráfico de ordenada 5 tem abscissa 0 e

a reta de equação $x = \frac{5}{2}$ é eixo de simetria, então o ponto P tem abscissa 5.

Assim sendo, $P(5, 5)$.

105.2. A função representada é definida por uma expressão do tipo $y = |ax + b|$ e o gráfico da função passa nos pontos de

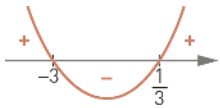
coordenadas $(0, 5)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Então, tem-se:

$$\begin{cases} |a \times 0 + b| = 5 \\ |a \times \frac{5}{2} + b| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 5 \\ \frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \vee b = -5 \\ a = -\frac{2}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -5 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 106.1. \quad f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow |2x+1| \leq |2-x| \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq (2-x)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

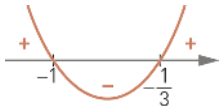
$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-8 + 10}{6} \vee x = \frac{-8 - 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -3 \end{aligned}$$


Então, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{1}{3}\right]$.

106.2.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + 2}{6} \vee x = \frac{-4 - 2}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -1 \end{aligned}$$



Então, $f(x) > |x| \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, +\infty[$.

$$106.3. \quad g(x) \leq |x+1| \Leftrightarrow |2-x| \leq |x+1| \Leftrightarrow (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -6x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$107.1. \quad |x^2 - 3x| \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 4 \wedge x^2 - 3x \geq -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \wedge x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

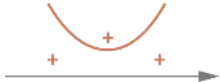
Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \cdot \quad x^2 - 3x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + 5}{2} \vee x = \frac{3 - 5}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1 \end{aligned}$$



$$\cdot \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Equação impossível



Então, tem-se:

$$\begin{aligned} |x^2 - 3x| \leq 4 &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \wedge x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 4] \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in [-1, 4] \end{aligned}$$

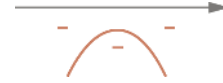
$$107.2. \quad |x - 2x^2| > 1 \Leftrightarrow x - 2x^2 > 1 \vee x - 2x^2 < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 > 0 \vee -2x^2 + x + 1 < 0$$

Cálculos auxiliares:

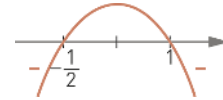
$$\cdot \quad -2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-4}$$

Equação impossível



$$\cdot \quad -2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 3}{-4} \vee x = \frac{-1 - 3}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$



Então, tem-se:

$$|x - 2x^2| > 1 \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 > 0 \vee -2x^2 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{ \} \vee x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup]1, +\infty[$$

Pág. 91

108.1. A função f não é injetiva porque existem objetos diferentes que têm a mesma imagem. Por exemplo, $f(-1) = f(1) = 2$.

$$108.2. \quad x^2 + 1 \geq 1, \quad \forall x \in D_f, \text{ isto é, } D_f = [1, +\infty[$$

Então, a função f não é sobrejetiva porque o seu contradomínio não coincide com o conjunto de chegada $(\mathbb{R})$.

108.3.

$$x^2 \geq 4, \quad \forall x \in D_g \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 4 + 1, \quad \forall x \in D_g \Leftrightarrow g(x) \geq 5,$$

$$\forall x \in D_g \Leftrightarrow D_g' = [5, +\infty[$$

Então, a função g não é sobrejetiva porque o seu contradomínio não coincide com o conjunto de chegada $(\mathbb{R}^+)$.

$$108.4. \quad g \text{ é injetiva se } \forall x_1, x_2 \in [2, +\infty[, g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

impossível pois
 $x_1, x_2 \in [2, +\infty[$

Então, a função g é injetiva.

$$109.1. \quad \text{Como } x \in \mathbb{R}_0^+, \text{ então } |x| = x. \text{ Logo,}$$

$$h(x) = x + |x| = x + x = 2x.$$

$$h \text{ é injetiva se } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

A função h é injetiva.

h é sobrejetiva se $\forall y \in \mathbb{R}_0^+, \exists x \in \mathbb{R}_0^+ : h(x) = y$.

$$h(x) = y \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$$

A função h é sobrejetiva.

Como a função h é injetiva e sobrejetiva, conclui-se que h é bijetiva.

109.2. Sendo h uma função bijetiva então admite função inversa definida de $\mathbb{R}_0^+$ em $\mathbb{R}_0^+$.

Como $h(x) = y \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$, conclui-se que $h^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Assim, tem-se:

$$h^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \rightarrow \frac{x}{2}$$

Pág. 92

110.1. $f(9) = \sqrt{9} = 3$, logo o ponto $A(9, 3)$ pertence ao gráfico de f .

110.2. Designemos por A' a imagem do ponto $A(9, 3)$ pela translação de vetor $\vec{u} = (5, 2)$.

$$\text{Então, } A' = A + \vec{u} = (9, 3) + (5, 2) = (14, 5).$$

O ponto A' pertence ao gráfico de g porque

$$g(14) = \sqrt{14-5} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

110.3. Designemos por B' a imagem do ponto $B(-1, 2)$ pela translação de vetor $\vec{u} = (5, 2)$.

$$\text{Então, } B' = B + \vec{u} = (-1, 2) + (5, 2) = (4, 4).$$

O ponto não pertence ao gráfico de g porque $g(4)$ não existe visto que $4 \notin D_g$.

$$\mathbf{111.1.} \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[.$$

Sendo $x \in [-1, +\infty[$, sabe-se que $\sqrt{x+1} \geq 0$.

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - 3 \geq -3 \Leftrightarrow g(x) \geq -3$$

Então, $D_g' = [-3, +\infty[$ e -3 é o mínimo absoluto de g .

111.2. O gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$, por aplicação sucessiva das seguintes transformações:

Translação de vetor $\vec{u} = (-1, 0)$;

Dilatação vertical de coeficiente 2;

Translação de vetor $\vec{v} = (0, -3)$.

Pág. 93

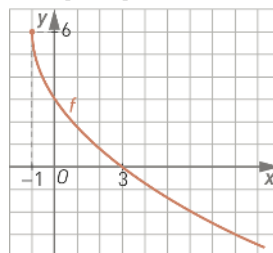
$$\mathbf{112.1.} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[.$$

112.2. $f(3) = -3\sqrt{3+1} + 6 = -3 \times 2 + 6 = -6 + 6 = 0$, logo 3 é zero da função f .

Como f é uma função do tipo $y = a\sqrt{x-b} + c$, com $a < 0$, é estritamente decrescente. Então, f não tem qualquer outro zero.

112.3. Sabe-se que $f(-1) = 6$ e que $f(3) = 0$.

Em seguida apresenta-se uma representação gráfica da função f . O contradomínio de f é $]-\infty, 6]$.



113.1. Analisando a representação gráfica de f , constata-se que $D_f = [-2, +\infty[$ e que $D_f' = [-1, +\infty[$. Então, conclui-se que $b = -2$ e que $c = -1$.

$$\text{Assim, } f(x) = a\sqrt{x+2} - 1.$$

Sabe-se que $f(2) = 0$, então tem-se:

$$a\sqrt{2+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

113.2. Analisando a representação gráfica de f , constata-se que $D_f = [3, +\infty[$ e que $D_f' =]-\infty, 2]$. Então, conclui-se que $b = 3$ e que $c = 2$.

$$\text{Assim, } f(x) = a\sqrt{x-3} + 2.$$

Sabe-se que $f(7) = -2$, então tem-se:

$$a\sqrt{7-3} + 2 = -2 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2.$$

113.3. Analisando a representação gráfica de f , constata-se que $D_f = [-2, +\infty[$ e que $D_f' = [-2, +\infty[$. Então, conclui-se que $b = -2$ e que $c = -2$.

$$\text{Assim, } f(x) = a\sqrt{x+2} - 2.$$

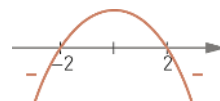
Sabe-se que $f(2) = 3$, então tem-se:

$$a\sqrt{2+2} - 2 = 3 \Leftrightarrow 2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Pág. 94

$$\mathbf{114.1.} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 8 - 2x^2 \geq 0\}.$$

$$\text{Cálculo auxiliar: } 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



Então, $D_f = [-2, 2]$.

$$\mathbf{114.2.} \quad f(-x) = 1 + \sqrt{8 - 2(-x)^2} = 1 + \sqrt{8 - 2x^2} = f(x)$$

Como $f(-x) = f(x)$, $\forall x, -x \in D_f$, conclui-se que f é uma função par.

114.3. A função f não admite função inversa porque não é injetiva. Por exemplo, $f(-2) = f(2) = 1$.

115.1. Sabe-se que o semieixo maior da elipse tem comprimento 2 e que o semieixo menor tem comprimento 1, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$.

Então, a elipse é definida pela seguinte equação reduzida:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

115.2.

a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \wedge y \leq 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \wedge y \leq 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$

Então, $f(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$

b) $f(-x) = -\sqrt{1 - \frac{(-x)^2}{4}} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = f(x).$

Como $f(-x) = f(x)$, $\forall x, -x \in D_f$, conclui-se que f é uma função par.

c) $f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \wedge 1 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 - x^2 = 1 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}.$

Assim sendo, os pontos do gráfico de f que têm abscissa $-\frac{1}{2}$ são:

$P_1\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e $P_2\left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right).$

Tarefa 11

1.1.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[.$

b) O ponto $P(3, k)$ pertence ao gráfico de f se $f(3) = k$.

$f(3) = k \Leftrightarrow \sqrt{3+1} = k \Leftrightarrow 2 = k$

c) O ponto $Q(k, 4)$ pertence ao gráfico de f se $f(k) = 4$.

$f(k) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{k+1} = 4 \Leftrightarrow k+1 = 16 \wedge k+1 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = 15 \wedge k \geq -1 \Leftrightarrow k = 15$

d) Analisando a representação gráfica de g , constata-se que

$D_g = [1, +\infty[$ e que $D_g' = [2, +\infty[$. Então, conclui-se que $b = 1$ e que $c = 2$.

Assim, $g(x) = a\sqrt{x-1} + 2$.

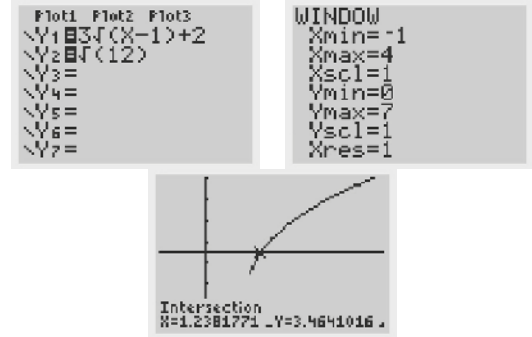
Sabe-se que $g(2) = 5$, então tem-se:

$a\sqrt{2-1} + 2 = 5 \Leftrightarrow 1a = 3 \Leftrightarrow a = 3.$

1.2. $f(11) = \sqrt{11+1} = \sqrt{12}$

Então, $g(x) = f(11) \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{12} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{12}.$

Resolução gráfica da equação:



A solução da equação, arredondada às centésimas, é 1,24.

Como a função g é do tipo $y = a\sqrt{x-b} + c$, em que $a > 0$, sabe-se que g é uma função estritamente crescente. Então, a equação $g(x) = f(11)$ tem uma única solução.

2.1. A circunferência representada no referencial tem centro na origem e raio 2. Então, pode ser representada pela seguinte equação reduzida: $x^2 + y^2 = 4$.

2.2.

a) $x^2 + y^2 = 4 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}.$

Então, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$

b) $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x).$

Como $f(-x) = f(x)$, $\forall x, -x \in D_f$, conclui-se que f é uma função par.

c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 1 \wedge 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}.$

Assim sendo, os pontos do gráfico de f que têm abscissa 1 são:

$P_1(\sqrt{3}, 1)$ e $P_2(-\sqrt{3}, 1).$

Pág. 95

116.1. Se o gráfico da função f , definida por $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$, é a imagem pela translação de vetor $\vec{u} = (1, 3)$ do gráfico de uma função g , então $g(x) = \sqrt{x}.$

Como $g(4) = \sqrt{4} = 2$ e $f(5) = 3 + \sqrt{5-1} = 3 + 2 = 5$, então $A(4, 2)$ e $B(5, 5).$

$m_{AB} = \frac{5-2}{5-4} = 3$ e a reta passa no ponto A , então é definida por:

$y - 2 = 3(x - 4) \Leftrightarrow y - 2 = 3x - 12 \Leftrightarrow y = 3x - 10.$

116.2.

$f(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3 + \sqrt{x-1} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \wedge x-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + 1 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

A abscissa do ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{7}{2}$ é $\frac{5}{4}.$

116.3. $f^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{4}$ porque $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{7}{2}$.

Pág. 96

117.1.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 2 \Leftrightarrow x-4 = 4 \wedge x-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow x = 8 ; \text{Conjunto-solução: } \{8\}$$

117.2.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{x-4} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 5 \Leftrightarrow x-4 = 25 \wedge x-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 29 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow x = 29 ; \text{Conjunto-solução: } \{29\}$$

117.3.

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{x-4} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 1 \Leftrightarrow x-4 = 1 \wedge x-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Conjunto-solução: } \{5\}$$

118.1. Sabe-se que $A_{[OAPB]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AP}}{2} \times \overline{OA}$.

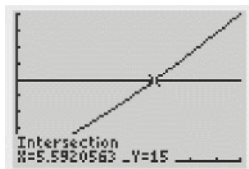
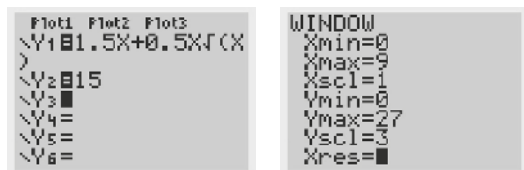
Seja P um ponto pertencente à curva $y = \sqrt{x}$ com abscissa $x \in]0, 9]$, então $P(x, \sqrt{x})$.

Se $[OAPB]$ é um trapézio, então $[AP] \parallel Oy$. Logo, $A(x, 0)$.

Seja A a função de domínio $]0, 9]$ que representa a área do trapézio $[OAPB]$, então tem-se:

$$A(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{2} \times x = \frac{3x + x\sqrt{x}}{2} = 1,5x + 0,5x\sqrt{x}.$$

118.2. Pretende-se determinar graficamente a solução da equação $A(x) = 15$.



Conclui-se, então, que $A(x) = 15 \Leftrightarrow x \approx 5,59$.

Pág. 97

119.1. O ponto A pertence ao gráfico de f^{-1} e tem ordenada 2, então $A(x, 2)$ e $f^{-1}(x) = 2$.

$$f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow x = f(2) \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2-2} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Então, } A(2, 2).$$

O ponto B pertence ao gráfico de f^{-1} e tem abscissa 8, então $B(8, y)$ e $f^{-1}(8) = y$.

$$f^{-1}(8) = y \Leftrightarrow 8 = f(y) \Leftrightarrow 8 = y + \sqrt{y-2} \Leftrightarrow 8 - y = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8 - y)^2 = y - 2 \wedge y - 2 \geq 0 \wedge 8 - y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16y + y^2 = y - 2 \wedge y \geq 2 \wedge y \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 17y + 66 = 0 \wedge 2 \leq y \leq 8$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2} \wedge 2 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y = 6 \vee y = 11) \wedge 2 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow y = 6$$

Então, $B(8, 6)$.

119.2. Seja P o ponto do gráfico de f^{-1} de abscissa 14, então $P(14, y)$ e $f^{-1}(14) = y$.

$$f^{-1}(14) = y \Leftrightarrow 14 = f(y) \Leftrightarrow 14 = y + \sqrt{y-2} \Leftrightarrow 14 - y = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (14 - y)^2 = y - 2 \wedge y - 2 \geq 0 \wedge 14 - y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 196 - 28y + y^2 = y - 2 \wedge y \geq 2 \wedge y \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 29y + 198 = 0 \wedge 2 \leq y \leq 14 \Leftrightarrow$$

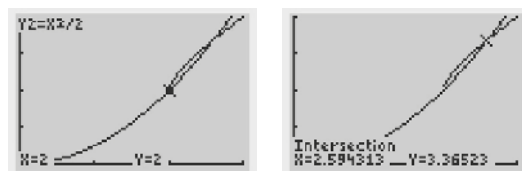
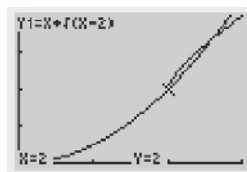
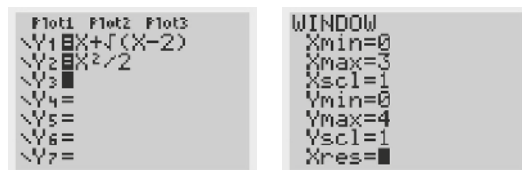
$$y = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 792}}{2} \wedge 2 \leq y \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{29 \pm 7}{2} \wedge 2 \leq y \leq 14 \Leftrightarrow (y = 18 \vee y = 11) \wedge 2 \leq y \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 11$$

Então, $P(14, 11)$.

119.3. Pretende-se determinar, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com a curva de equação $y = \frac{x^2}{2}$.



As coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com a curva de equação $y = \frac{x^2}{2}$, são $(2, 2)$ e $(2,594; 3,365)$.

$$120.1. \sqrt{x-3} = x+1 \Leftrightarrow x-3 = (x+1)^2 \wedge x-3 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 = x^2 + 2x + 1 \wedge x \geq 3 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}}_{\text{equação impossível}} \wedge x \geq 3$$

Conjunto-solução da equação: $\{\}$

120.2.

$$\sqrt{2x+1} = x-1 \Leftrightarrow 2x+1 = (x-1)^2 \wedge 2x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow (x=0 \vee x-4=0) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=4) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x=4$$

Conjunto-solução da equação: $\{4\}$

120.3.

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (1 + \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x+2 = 1 + 2\sqrt{x} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = x$$

Verificação

Substituindo x por $\frac{1}{4}$ na equação dada, tem-se:

$$\sqrt{\frac{1}{4}+2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{4}}, \text{ ou seja, } \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \text{ (Proposição verdadeira).}$$

Conjunto-solução da equação: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

$$102.4. \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 3 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{x+1} - 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = x+1 - 6\sqrt{x+1} + 9 \Leftrightarrow 6\sqrt{x+1} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (2)^2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x=3$$

Verificação

Substituindo x por 3 na equação dada, tem-se:

$$\sqrt{3-2} = \sqrt{3+1} - 3, \text{ ou seja, } 1 = -1 \text{ (Proposição falsa).}$$

A equação dada é impossível.

Conjunto-solução da equação: $\{\}$

$$120.5. \sqrt{x-3} + \sqrt{x} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow (\sqrt{x-3} + \sqrt{x})^2 = (\sqrt{2x+1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 + 2\sqrt{x^2-3x} + x = 2x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x^2-3x})^2 = (2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Verificação

Substituindo x por 4 na equação dada, tem-se:

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 4 + 1}, \text{ ou seja, } 3 = 3 \text{ (Proposição verdadeira).}$$

Substituindo x por -1 na equação dada, tem-se:

$$\sqrt{-1-3} + \sqrt{-1} = \sqrt{2 \times (-1) + 1} \text{ (Proposição falsa).}$$

Conjunto-solução: $\{4\}$

Tarefa 12

1. O fio tem comprimento máximo quando o ponto C coincide com o ponto D e tem comprimento mínimo quando C coincide com o ponto B .

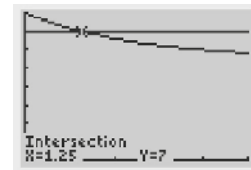
$$\text{Comprimento máximo: } \overline{AD} + \overline{DB} = 3 + 5 = 8 \text{ m}$$

$$\text{Comprimento mínimo: } \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ m}$$

2.1. Sendo $\overline{CD} = x$, então $\overline{CB} = 5 - x$ e $\overline{CB} = 5 - x$.

$$\text{Assim, tem-se: } f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + 5 - x.$$

2.2. Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = 7$.



O comprimento do fio é 7 m se $x = 1,25$ m.

$$2.3. f(1,6) = \sqrt{1,6^2 + 9} + 5 - 1,6 = \sqrt{11,56} + 3,4 = 3,4 + 3,4 = 6,8.$$

Interpretação: Se o ponto C estiver a 1,6 m do ponto D , então o comprimento do fio é 6,8 m.

$$2.4. f(x) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} + 5 - x = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + 9})^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = 4$$

Verificação

Substituindo x por 4 na equação dada, tem-se:

$$\sqrt{4^2 + 9} + 5 - 4 = 6, \text{ ou seja, } 5 + 1 = 6 \text{ (Proposição verdadeira).}$$

Então, 4 é solução da equação dada.

Conclusão: Se o fio tem 6 m de comprimento então $x = 4$ m.

Pág. 98

$$121.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = [3, +\infty[$$

121.2.

a)

$$f(x) < 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} + 1 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < 2 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \wedge x-3 < 2^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x-3 < 4 \Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x < 7 \Leftrightarrow x \in [3, 7[$$

b)

$$f(x) < 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} + 1 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < 4 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \wedge x-3 < 4^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x-3 < 16 \Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x < 19 \Leftrightarrow x \in [3, 19[$$

$$c) f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < x + 1 \Leftrightarrow$$

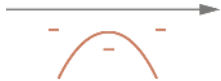
$$\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x \geq -1 \wedge -x^2 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x \geq -1 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar: $-x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{-2}$

equação impossível



Então, $-x^2 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Pág. 100

122.1. $D_f = \mathbb{R}$

122.2. O gráfico de f pode ser obtido a partir do gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$, aplicando a seguinte sequência de transformações:

I – translação horizontal de vetor $\vec{u} = (-2, 0)$ e obtém-se o gráfico

de $y = \sqrt[3]{x+2}$;

II – dilatação vertical de coeficiente 3 e obtém-se o gráfico de $y = 3\sqrt[3]{x+2}$;

III – reflexão de eixo Ox e obtém-se o gráfico de $f(x) = -3\sqrt[3]{x+2}$.

122.3. Como $f(-3) = -3\sqrt[3]{-3+2} = -3\sqrt[3]{-1} = -3 \times (-1) = 3$, conclui-se que o ponto $A(-3, 3)$ pertence ao gráfico de f .

123.1. Se $x \in]-\infty, 2]$ a concavidade do gráfico é voltada para baixo e se $x \in [2, +\infty[$ a concavidade do gráfico é voltada para cima. Então, conclui-se que $b = 2$.

Assim sendo, $g(x) = a\sqrt[3]{x-2} + c$.

Sabe-se que o gráfico de g passa nos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(1, 1)$, então tem-se:

$$\begin{cases} g(2) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt[3]{2-2} + c = 0 \\ a\sqrt[3]{1-2} + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + c = 0 \\ a \times (-1) + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

123.2. Atendendo aos valores determinados no item anterior, sabe-se que $g(x) = -\sqrt[3]{x-2}$.

$$\text{Então, } g(0) = -\sqrt[3]{0-2} = -\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{-1 \times 2} = -\sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{2} = -(-1) \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}.$$

O gráfico de g interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, \sqrt[3]{2})$.

Pág. 101

124.1.

$$\sqrt[3]{2-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2-x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$$

Conjunto-solução da equação: $\left\{\frac{15}{8}\right\}$

124.2. $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x = 3$

Conjunto-solução da equação: $\{3\}$

124.3.

$$3 - \sqrt[3]{1-x} = 2 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{1-x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 1^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Conjunto-solução da equação: $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right]$

124.4.

$$\sqrt[3]{3x-2} < -1 \Leftrightarrow 3x-2 < (-1)^3 \Leftrightarrow 3x-2 < -1 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Conjunto-solução da inequação: $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

124.5. $\sqrt[3]{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Conjunto-solução da inequação: $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

125. $f(x) = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} = 2 \wedge x > 1) \vee (\sqrt{1-x} = 2 \wedge x \leq 1)$

$$\bullet \sqrt[3]{x+2} = 2 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x+2 = 2^3 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 6 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\bullet \sqrt{1-x} = 2 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow 1-x = 4 \wedge 1-x \geq 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow -x = 3 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x = -3 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x = -3$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 6$.

Conjunto-solução da equação: $\{-3, 6\}$

Pág. 102

126.1. Pretende-se determinar os pontos do gráfico de g que têm abscissa igual à ordenada, ou seja, os pontos da forma $(x, g(x))$ em que $x = g(x)$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+x} = x \Leftrightarrow x^2+x = x^3 \Leftrightarrow -x^3+x^2+x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Então, os pontos do gráfico de g que têm abscissa igual à ordenada são os pontos de coordenadas $(0, 0)$,

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} 126.2. f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2 + x} \Leftrightarrow (2\sqrt[3]{x})^3 = (\sqrt[3]{x^2 + x})^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x = x^2 + x \Leftrightarrow 7x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7-x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7 \end{aligned}$$

Conjunto-solução da equação: $\{0, 7\}$

127.1.

$$V_{\text{esfera}} = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 12 \Leftrightarrow \pi r^3 = 3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

127.2.

a) Sendo V o volume da esfera e r o raio, sabe-se que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Então, tem-se:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 3V \Leftrightarrow r^3 = \frac{3V}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$\text{Assim sendo, } f(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

b)

$$\begin{aligned} f(V) = 4 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 4 \Leftrightarrow \frac{3V}{4\pi} = 4^3 \Leftrightarrow \frac{3V}{4\pi} = 64 \Leftrightarrow 3V = 64 \times 4\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V = \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

Tarefa 13

1.1. Designando por a a aresta da caixa com a forma de cubo, tem-se:

$$a^3 = x \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{x}.$$

1.2. Designando por h a altura da caixa com a forma de cilindro, tem-se:

$$\pi \times \left(\frac{h}{4}\right)^2 \times h = x \Leftrightarrow \pi \times \frac{h^3}{16} = x \Leftrightarrow h^3 = \frac{16x}{\pi} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{16x}{\pi}}.$$

2. As funções f e g de domínio $[8, 40]$ são definidas por

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ e } g(x) = \sqrt[3]{\frac{16x}{\pi}}, \text{ respetivamente.}$$

2.1. Como o domínio da função f é $[8, 40]$, conclui-se que o menor volume que a caixa pode ter é 8.

A aresta da caixa do tipo A que tem menor volume é 2 porque $f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$.

$$A_{\text{total}} = 6 \times A_{\text{face}} = 6 \times 2^2 = 24.$$

$$2.2. g(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{16x}{\pi}} = 4 \Leftrightarrow \frac{16x}{\pi} = 4^3 \Leftrightarrow 16x = 64\pi \Leftrightarrow x = \frac{64\pi}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4\pi$$

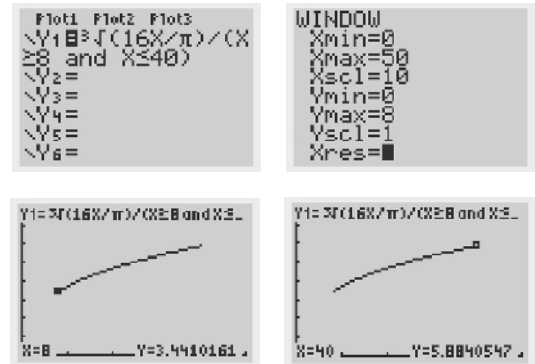
Neste caso a caixa do tipo B tem volume 4π e altura 4. Então, tem-se:

$$A_b \times 4 = 4\pi \Leftrightarrow A_b = \frac{4\pi}{4} \Leftrightarrow A_b = \pi.$$

2.3.

a) Sabe-se que $D_g' = [a, b]$ e, por observação gráfica, conclui-se que $D_g' = [g(8); g(40)]$.

Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar $g(8)$ e $g(40)$.



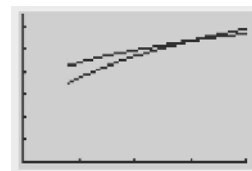
Recorrendo à calculadora gráfica sabe-se que $g(8) \approx 3,44$ e $g(40) \approx 5,88$.

Então, $a \approx 3,44$ e $b \approx 5,88$.

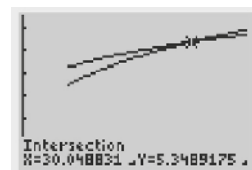
b) Sabe-se que $\overline{AB} = 2,24$ e $g(x) = f(x) + \overline{AB}$, então tem-se $g(x) = f(x) + 2,24$.

Representando graficamente as funções $y_1 = g(x)$ e

$y_2 = f(x) + 2,24$, tem-se:



Usando as capacidades gráficas da calculadora determina-se a abscissa do ponto de interseção dos dois gráficos.



Os gráficos interseitam-se no ponto de abscissa 30 (com arredondamento às unidades).

Então, a abscissa comum a A e B é 30.

Pág. 103

Proposta 33

33.1. A representação gráfica da função f é uma parábola de vértice no ponto de coordenadas $(0; 1,6)$.

Então, $f(x) = ax^2 + 1,6$.

$$f(4) = 0 \Leftrightarrow a \times 4^2 + 1,6 = 0 \Leftrightarrow 16a = -1,6 \Leftrightarrow a = -\frac{1,6}{16} \Leftrightarrow a = -0,1$$

Conclui-se que $f(x) = -0,1x^2 + 1,6$.

33.2. $f(2) = -0,1 \times 2^2 + 1,6 = -0,4 + 1,6 = 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Logo, o ponto $P\left(2, \frac{5}{6}\right)$ pertence ao gráfico da função f .

Como qualquer ponto que pertença ao tabuleiro da ponte tem ordenada 1,6 e atendendo a que a unidade de comprimento corresponde a 10 m, a distância do ponto P ao tabuleiro da ponte é dada, em metros, por $(1,6 - 1,2) \times 10 = 0,4 \times 10 = 4$.

Portanto, a distância do ponto P ao tabuleiro da ponte é igual a 4 metros.

33.3. Relativamente ao novo referencial sabe-se que o vértice V da parábola tem ordenada 1,6 e abscissa dada por $x_v = \frac{0+8}{2} = 4$.

Então, $V(4; 1,6)$ e $g(x) = a(x-4)^2 + 1,6$.

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow a \times (0-4)^2 + 1,6 = 0 \Leftrightarrow 16a = -1,6 \Leftrightarrow a = -\frac{1,6}{16} \Leftrightarrow a = -0,1$$

Conclui-se que $g(x) = -0,1(x-4)^2 + 1,6$.

Para obter o gráfico de g deve-se aplicar a translação de vetor $\vec{u} = (4, 0)$ ao gráfico de f .

Proposta 34

34.1.

$$f(x) = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x-2)^2 - 4$$

O gráfico de f é uma parábola de vértice $V(2, -4)$ e com a concavidade voltada para cima.

Então, $D_f = [-4, +\infty[$.

34.2.

a) O gráfico da função g definida por $g(x) = -f(x) + 1$ pode ser obtido do gráfico da função f através da reflexão de eixo Ox seguida da translação vertical de vetor $\vec{u} = (0, 1)$.

Então, $D_g =]-\infty, 5]$.

b) O gráfico da função g definida por $g(x) = |f(x)| - 2$ pode ser obtido do gráfico da função f através da seguinte sequência de transformações:

- 1.º) Função módulo da função f ;
- 2.º) vertical de vetor $\vec{u} = (0, -2)$.

Então, $D_g = [-2, +\infty[$.

c) O gráfico da função g definida por $g(x) = 2f(x-3)$ pode ser obtido do gráfico da função f através da translação horizontal de vetor $\vec{u} = (3, 0)$ seguida da dilatação vertical de coeficiente 2.

Então, $D_g = [-8, +\infty[$.

d) O gráfico da função g definida por $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função f através da contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida da reflexão de eixo Ox .

Então, $D_g =]-\infty, 2]$.

34.3.

a) Vamos começar por determinar os zeros da função f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Agora facilmente se determinam os zeros da função h .

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 0 \vee \frac{x}{3} = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$

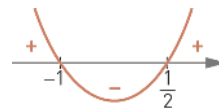
Pág. 104

Proposta 35

35.1. $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{4} \vee x = \frac{-1-3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$



Então, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

35.2. Os zeros da função f são -1 e $\frac{1}{2}$.

Como $g(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$, sabe-se que -1 é o zero comum a f e a g .

Logo, -1 é raiz de $g(x)$ e $g(x)$ é divisível por $x+1$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, $g(x) = (x+1)(x^2 + x - 2)$.

Em seguida, vamos determinar os zeros do polinómio $x^2 + x - 2$.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

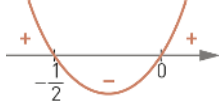
Assim sendo, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$.

$$35.3. D_h = \{x \in D_f : 1 + f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1\}$$

$$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \geq -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$



$$\text{Então, } f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \in \left[-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, +\infty\right[.$$

$$\text{Conclui-se que } D_h = \left[-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, +\infty\right[.$$

Proposta 36

36.1.

a) Observando a representação gráfica da função f apresentada, sabe-se que $x = -3$ é eixo de simetria do gráfico e que

$$D_f =]-\infty, 3]. \text{ Donde se conclui que } b = -3 \text{ e } c = 3.$$

$$\text{Então, } f(x) = a|x+3|+3.$$

Sabe-se ainda que $f(0) = -3$, então tem-se:

$$a|0+3|+3 = -3 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2.$$

b) A função f é definida por $f(x) = -2|x+3|+3$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2|x+3|+3 = 0 \Leftrightarrow |x+3| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x+3 = \frac{3}{2} \vee x+3 = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -\frac{9}{2}$$

$$c) h(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = -\frac{3}{2} \vee -x = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{9}{2}$$

$$36.2. f(x) = -2|x+3|+3 = \begin{cases} -2(x+3)+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -2(-x-3)+3 & \text{se } x+3 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{se } x \geq -3 \\ 2x+9 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

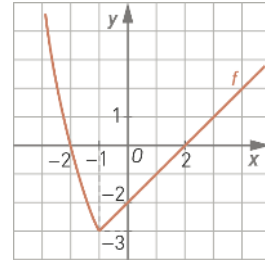
Proposta 37

37.1. Sabe-se que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}.$$

$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x < -1 \\ |x+1|-3 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x < -1 \\ x+1-3 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x < -1 \\ x-2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}.$$

37.2. O gráfico da função f é constituído por parte de uma parábola, de vértice $(0, -4)$ e que contém os pontos $(-1, -3)$ e $(-2, 0)$, e um segmento de reta de origem no ponto $(-1, -3)$ e que passa em $(0, -2)$.



$$37.3. f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4 = 0 \wedge x < -1) \vee (x - 2 = 0 \wedge x \geq -1)$$

$$\bullet x^2 - 4 = 0 \wedge x < -1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2) \wedge x < -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\bullet x - 2 = 0 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 2$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$.

Zeros de f : -2 e 2 .

$$37.4. f(x) = 5 \Leftrightarrow (x^2 - 4 = 5 \wedge x < -1) \vee (x - 2 = 5 \wedge x \geq -1)$$

$$\bullet x^2 - 4 = 5 \wedge x < -1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \wedge x < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -3) \wedge x < -1 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\bullet x - 2 = 5 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 7 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 7$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 7 \Leftrightarrow x \in \{-3, 7\}$.

Proposta 38

$$38.1. |1-3x| = |x+1| \Leftrightarrow 1-3x = x+1 \vee 1-3x = -x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x = 0 \vee -2x = -2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Conjunto-solução: $\{0, 1\}$

$$38.2. 5 - |1-4x| = 1 \Leftrightarrow |1-4x| = 4 \Leftrightarrow 1-4x = 4 \vee 1-4x = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x = 3 \vee -4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \vee x = \frac{5}{4}$$

Conjunto-solução: $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$

38.3.

$$|5x+2| < 3 \Leftrightarrow 5x+2 < 3 \wedge 5x+2 > -3 \Leftrightarrow 5x < 1 \wedge 5x > -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{5} \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in \left]-1, \frac{1}{5}\right[$$

Conjunto-solução: $\left]-1, \frac{1}{5}\right[$

$$38.4. |2+3x|-3 \geq 1 \Leftrightarrow |2+3x| \geq 4 \Leftrightarrow 2+3x \geq 4 \vee 2+3x \leq -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 2 \vee 3x \leq -6 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \vee x \leq -2 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

Conjunto-solução: $\left]-\infty, -2\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

38.5.

$$|x-4| < |x+3| \Leftrightarrow (x-4)^2 < (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -14x < -7 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Conjunto-solução: $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

38.6. $|-2x-3|+3 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{-2x-3}_{\text{condição universal}} > -3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Conjunto-solução: $\mathbb{R}$

Pág. 105

Proposta 39

39.1. A Rita pagou 2 euros de taxas fixas, 10 euros (2×5) relativos à parcela correspondente aos 2 kg e 20 euros ($2,5 \times 8$) relativos à parcela correspondente aos 2,5 kg que ultrapassam os 2 kg.
Então, no total a Rita pagou 32 euros.

39.2.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2+5x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2+5 \times 2 + 8 \times (x-2) & \text{se } 2 < x \leq 10 \end{cases} = \\ = \begin{cases} 2+5x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2+10+8x-16 & \text{se } 2 < x \leq 10 \end{cases} = \begin{cases} 2+5x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 8x-4 & \text{se } 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

b) $f(1,2) = 2 + 5 \times 1,2 = 2 + 6 = 8$ e

$f(5,4) = 8 \times 5,4 - 4 = 43,2 - 4 = 39,2$.

c) Se o envio da encomenda teve um custo de 20 euros então o seu peso era superior a 2 kg (o transporte uma encomenda de 2 kg custa 12 euros).

$$f(x) = 20 \Leftrightarrow 8x - 4 = 20 \wedge 2 < x \leq 10 \Leftrightarrow x = \frac{24}{8} \wedge 2 < x \leq 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 3 \wedge 2 < x \leq 10 \Leftrightarrow x = 3$$

Se foram pagos 20 euros pelo envio de uma encomenda, então essa encomenda tinha 3 kg de peso.

Proposta 40

40.1.

$$g(x) = 2|x|-2 = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2(-x)-2 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

40.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 3x + 4 = 2x - 2 \wedge x \geq 0) \vee (-x^2 + 3x + 4 = -2x - 2 \wedge x < 0)$$

$$\bullet -x^2 + 3x + 4 = 2x - 2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 3) \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\bullet -x^2 + 3x + 4 = -2x - 2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 6) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Conclui-se, então, que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Ora, $g(-1) = -2 \times (-1) - 2 = 0$ e $g(3) = 2 \times 3 - 2 = 4$.

Assim sendo os gráficos de f e g interseccionam-se nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(3, 4)$.

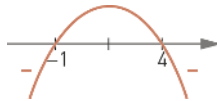
40.3.

a) $D_h = \{x \in D_f : f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$



Então, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 4]$.

Conclui-se que $D_h = [-1, 4]$.

b) $D_h = \{x \in D_g : 1 - g(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 1\}$

$$g(x) \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq 3 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \wedge x \geq -\frac{3}{2}$$

Então, $D_h = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Proposta 41

41.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\} = [-3, +\infty[$

41.2.

$$f(x) < 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} - 1 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3 \Leftrightarrow x+3 \geq 0 \wedge x+3 < 3^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x+3 < 9 \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x < 6 \Leftrightarrow x \in [-3, 6[$$

41.3. $D_f = [-3, +\infty[$ e $D_f' = [-1, +\infty[$.

O gráfico da função h definida por $h(x) = f(x+1) + 2$ pode ser obtido do gráfico da função f através da translação horizontal de vetor $\vec{u} = (-1, 0)$ seguida da translação vertical de vetor

$$\vec{v} = (0, 2).$$

Então, $D_h = [-4, +\infty[$ e $D_h' = [1, +\infty[$.

41.4. $g(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 1} = g(x)$.

Como $g(-x) = g(x)$, $\forall x, -x \in D_g$, conclui-se que g é uma função par.

41.5.

a)

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x+3 \geq 0 \wedge x+3 = 2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x+3 = 4 \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

b) $g(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Proposta 42

42.1. B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy , então $B(0, f(0))$.

Como $f(0) = 4$, tem-se $B(0, 4)$.

A é o ponto de interseção do gráfico de f com o semieixo positivo Ox , então $A(x, 0)$, $x > 0$ e $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

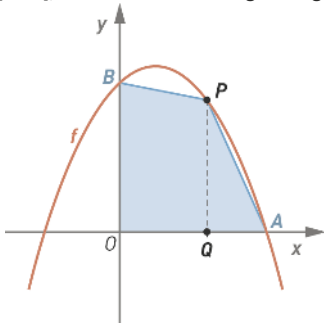
Como $x > 0$, conclui-se que $x = 4$ e $A(4, 0)$.

Sendo P um ponto do gráfico de f , sabe-se que $P(x, f(x))$, ou

$$\text{seja, } P\left(x, -\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right).$$

Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas. Então, $Q(x, 0)$.

O quadrilátero $[OAPB]$ pode ser decomposto no trapézio $[OQPB]$ e no triângulo $[APQ]$, conforme ilustra a figura seguinte.



$$\text{Então, } A_{[OAPB]} = A_{[OQPB]} + A_{[APQ]}.$$

Como g é a função de domínio $]0, a[$ que à abscissa do ponto P faz corresponder a área do quadrilátero $[OAPB]$, então tem-se:

$$g(x) = \frac{4 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right)}{2} \times x + \frac{(4-x) \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + x + 8}{2} \times x + \frac{-2x^2 + 4x + 16 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 8x}{2} + \frac{\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 16}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 8x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 16}{2} = \frac{-2x^2 + 8x + 16}{2} =$$

$$= -x^2 + 4x + 8$$

42.2.

$$g(x) = -x^2 + 4x + 8 = -(x^2 - 4x) + 8 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 8 =$$

$$= -(x^2 - 4x + 4) + 4 + 8 = -(x-2)^2 + 12.$$

A área do quadrilátero $[OAPB]$ é máxima quando $x = 2$.

Nesse caso, $P\left(2, -\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 + 4\right)$, ou seja, $P(2, 4)$.

Proposta 43

43.1. Sendo A e B pontos do gráfico de f de abscissas simétricas, então $A(x, f(x))$ e $B(-x, f(-x))$.

$$\text{Ora, } f(x) = x^3 - 3x \text{ e } f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x.$$

$$\text{Então, } A(x, x^3 - 3x) \text{ e } B(-x, -x^3 + 3x).$$

O ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas

$$\left(\frac{x + (-x)}{2}, \frac{x^3 - 3x + (-x^3 + 3x)}{2} \right),$$

ou seja, é o ponto $O(0, 0)$.

$$\mathbf{43.2.} \quad D_g = \{x \in D_f : f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x \geq 0\}$$

Cálculo auxiliar:

Para resolver a inequação $x^3 - 3x \geq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

$$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
Sinal de x	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de $x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de $x^3 - 3x$	-	0	+	0	-	0	+

$$x^3 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$$

$$\text{Então, } D_g = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[.$$

43.3.

$$|f(x)| \leq 2x^2 \Leftrightarrow |x^3 - 3x| \leq 2x^2 \Leftrightarrow \underset{(a)}{x^3 - 3x \leq 2x^2 \wedge x^3 - 3x \geq -2x^2} \Leftrightarrow$$

(a) porque $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 \geq 0$

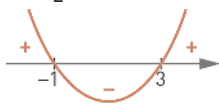
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x \leq 0 \wedge x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \wedge x(x^2 + 2x - 3) \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

• Para resolver a inequação $x(x^2 - 2x - 3) \leq 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$



x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
Sinal de x	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de $x^2 - 2x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de $x(x^2 - 2x - 3)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, 3].$$

• Para resolver a inequação $x(x^2 + 2x - 3) \geq 0$ vamos também recorrer a um quadro de sinais.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$



x	$-\infty$	-3		0		1	$+\infty$
Sinal de x	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de $x^2 + 2x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de $x(x^2 + 2x - 3)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x(x^2 + 2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [1, +\infty[.$$

Então, conclui-se que:

$$x(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \wedge x(x^2 + 2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (]-\infty, -1] \cup [0, 3]) \wedge x \in ([-3, 0] \cup [1, +\infty[) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup [1, 3] \cup \{0\}$$

Proposta 44

44.1. Sendo x a área de uma superfície esférica de raio r , sabe-se que $x = 4\pi r^2$.

Então, tem-se:

$$4\pi r^2 = x \Leftrightarrow r^2 = \frac{x}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{x}{4\pi}} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Sendo V o volume de uma esfera de raio r , sabe-se que

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Como f é a função que a cada valor de x faz corresponder o volume da esfera, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3 = \\ &= \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} \times \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2 \times \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} \times \frac{x}{\pi} \times \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{4\pi x}{24\pi} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}}. \end{aligned}$$

44.2. No caso de a esfera ter raio 2, tem-se:

$$x = 4\pi \times 2^2 \Leftrightarrow x = 16\pi.$$

No caso de a esfera ter raio 2, o ponto do gráfico de f tem coordenadas $(16\pi, f(16\pi))$.

$$f(16\pi) = \frac{16\pi}{6} \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} = \frac{8\pi}{3} \times \sqrt{16} = \frac{8\pi}{3} \times 4 = \frac{32\pi}{3}.$$

Então, as coordenadas do ponto são $\left(16\pi, \frac{32\pi}{3}\right)$.

Proposta 45

Sendo P um ponto do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \sqrt{4-x}, \text{ então } P(x, \sqrt{4-x}).$$

Como A é o ponto de interseção do gráfico de f com Ox , então $A(x, 0)$ tal que $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Leftrightarrow 4-x \geq 0 \wedge 4-x = 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Então, $A(4, 0)$.

$$A_{[OAP]} = 8 \Leftrightarrow \frac{4 \times \sqrt{4-x}}{2} = 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-x \geq 0 \wedge 4-x = 16$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x = -12 \Leftrightarrow x = -12$$

Assim sendo, as coordenadas do ponto P são $(-12, \sqrt{4+12})$, ou seja, $(-12, 4)$.

Pág. 107

128.1.

a) $D_f = [-2, 4]$

b) $D_g = [-1, 5]$

c) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 4] \cap [-1, 5] = [-1, 4]$

d) $D_{g-f} = D_g \cap D_f = [-1, 5] \cap [-2, 4] = [-1, 4]$

128.2.

a) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \frac{2^2}{2} + (-2+3) = 2+1=3$

b) $(f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \left(-\frac{1}{2}+3\right) = \frac{1}{8} - \frac{5}{2} = -\frac{19}{8}$

128.3. $(f+g)(a) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow f(a) + g(a) = \frac{5}{2} \wedge a \in [-1, 4] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + (-a+3) = \frac{5}{2} \wedge a \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \wedge a \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge a \in [-1, 4] \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \wedge a \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

128.4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = -x + 3 \wedge x \in [-1, 4] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \wedge x \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} \wedge x \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} \wedge x \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 + \sqrt{7} \vee x = -1 - \sqrt{7}) \wedge x \in [-1, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{7}$$

$$g(-1 + \sqrt{7}) = -(-1 + \sqrt{7}) + 3 = 1 - \sqrt{7} + 3 = 4 - \sqrt{7}$$

Então, $P(-1 + \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7})$.

Assim sendo, a soma das coordenadas do ponto P é $-1 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} = 3$.

Pág. 108

129.1. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3] \cap [-1, 4] = [-1, 3]$

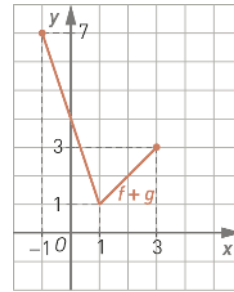
129.2.

$$f(x) = 2|x-1| = \begin{cases} 2(x-1) & \text{se } x-1 \geq 0 \\ 2(-x+1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x-2-x+2 & \text{se } x \geq 1 \wedge x \in D \\ -2x+2-x+2 & \text{se } x < 1 \wedge x \in D \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ -3x+4 & \text{se } -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

129.3.



130.1.

a) $(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - \sqrt{1-1} - (1^2 - 1) = 2 - 0 = 2$

b) $(g-f)(2) = g(2) - f(2) = 2^2 - 2 - (2^3 - 2 + 1) = 2 - 7 = -5$

c) $(f+g)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) = 2 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} =$
 $= 2 - \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = \frac{21}{16}$

130.2. Sendo $a \in \mathbb{R}^+$, então tem-se:

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{1-a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} = 2 \Leftrightarrow 1-a \geq 0 \wedge 1-a = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \leq 1 \wedge a = -3 \Leftrightarrow a = -3$$

Então,

$$(g-f)(a) = g(a) - f(a) = g(-3) - 0 = (-3)^2 - (-3) = 9 + 3 = 12.$$

Tarefa 14

1. $f(6) = 2 \times 6 = 12$ e $g(6) = \frac{6^2}{4} = 9$.

Conclui-se que a máquina A produziu 12 m de tecido e a B produziu 9 m.

2. A expressão $f(2) + g(2)$ indica a quantidade de tecido, em metros, produzida pelas máquinas A e B duas horas após o início do funcionamento.

3. A expressão que representa a quantidade de tecido, em metros, produzida pelas duas máquinas ao fim de x horas de

funcionamento é $y = f(x) + g(x) = 2x + \frac{x^2}{4}$.

4. a : quantidade de tecido, em metros, produzida pela máquina A durante as 6 horas de produção.

b : quantidade de tecido, em metros, produzida pela máquina B durante as 6 horas de produção.

$a+b$: quantidade de tecido, em metros, produzida pelas máquinas A e B durante as 6 horas de produção.

Assim sendo, sabe-se que $c = a+b$.

$$\begin{aligned}
 5. \quad f(x) + g(x) &= 12 \Leftrightarrow 2x + \frac{x^2}{4} = 12 \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 16}{2} \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -12) \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

As duas máquinas tinham produzido, no total, 12 m de tecido ao fim de 4 horas.

Pág. 109

131.1. Por exemplo, $g(x) = -5x$.

131.2. Por exemplo, $g(x) = -x$.

131.3. Por exemplo, $g(x) = -2x$.

132. Designemos por a, b, c e d as abscissas dos pontos A, B, C e D , respetivamente.

O ponto que pertence ao gráfico de $f \times g$ é o B .

Sendo $g(a) = 0$, então $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0$. Logo o ponto A não pertence ao gráfico de $f \times g$ pois tem ordenada positiva.

Sendo $f(c) < 0$ e $g(c) > 0$, então $f(c)g(c) < 0$, isto é,

$(fg)(c) < 0$. Logo o ponto C não pertence ao gráfico de $f \times g$ pois tem ordenada positiva.

Sendo $f(d) > 0$ e $g(d) > 0$, então $f(d)g(d) > 0$, isto é,

$(fg)(d) > 0$. Logo o ponto D não pertence ao gráfico de $f \times g$ pois tem ordenada negativa.

Pág. 110

133. A função f tem um zero igual a a e a função g tem um zero igual a b . Então a função $f \times g$ tem dois zeros: a e b .

Assim sendo, a representação gráfica (A) não pode corresponder à função $f \times g$.

Recorrendo a um quadro, estuda-se o sinal da função $f \times g$.

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
Sinal de f	+	+	+	0
Sinal de g	-	0	+	+
Sinal de $f \times g$	-	0	+	0

A representação gráfica que pode corresponder à função $f \times g$ é a (B).

134.1. Se f e g são funções pares então a função fg é par.

Ora, sendo f e g funções pares, de domínio $\mathbb{R}$, tem-se:

$$f(-x) = f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R} \text{ e } g(-x) = g(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

Conclui-se, então, que a função fg é par.

134.2. Se f é par e g é ímpar então a função fg é ímpar.

Como f e g são funções de domínio $\mathbb{R}$, sendo f par e g ímpar sabe-se que:

$$f(-x) = f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R} \text{ e } g(-x) = -g(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (fg)(-x) &= f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = \\
 &= -(fg)(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que a função fg é ímpar.

134.3. Se f e g são funções ímpares então a função fg é par.

Ora, sendo f e g funções ímpares, de domínio $\mathbb{R}$, tem-se:

$$f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R} \text{ e } g(-x) = -g(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (fg)(-x) &= f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = \\
 &= (fg)(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que a função fg é par.

Pág. 111

$$135.1. (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$135.2. \left(\frac{g}{f}\right)(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{4}{2-1} = 4$$

$$135.3. \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

136.1.

$$a) D_f = \mathbb{R} \text{ e } D_g = \{x \in \mathbb{R} : 5 - 2x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{5}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
 b) D_{\frac{g}{f}} &= D_g \cap D_f \setminus \{x : f(x) = 0\} = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] \cap \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} = \\
 &= \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] \setminus \{-2\}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] \setminus \{-2\} \\
 &= \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] \setminus \{-2\}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 g(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 - \sqrt{5-2x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-2x} = 3 \Leftrightarrow 5-2x \geq 0 \wedge 5-2x = 9 \\
 &\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \wedge x = -2 \Leftrightarrow x = -2
 \end{aligned}$$

136.2.

$$a) \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2^2 - 2 - 6}{3 - \sqrt{5 - 2 \times 2}} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$b) (f \circ g)(-10) = f(g(-10)) = f(3 - \sqrt{5 - 2 \times (-10)}) = f(3 - \sqrt{25}) = f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

Pág. 112

137.1.

$$a) D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$b) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{4\} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$c) D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \setminus \{x : f(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0, 4\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

137.2.

$$a) f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

Conjunto-solução: $[-2, 4]$.

$$b) (f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

Conjunto-solução: $\{-2, 4\}$.

138.1. f é uma função afim, então $f(x) = mx + b$.

$$m = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2 \text{ e } b = -4 \text{ porque o ponto de coordenadas } (0, -4) \text{ pertence ao gráfico de } f.$$

Então, $f(x) = 2x - 4$.

g é uma função afim, então $g(x) = mx + b$.

$$m = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1 \text{ e } b = 2 \text{ porque o ponto de coordenadas } (0, 2) \text{ pertence ao gráfico de } g.$$

Então, $g(x) = -x + 2$.

Assim sendo, tem-se:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 4 + (-x + 2) = x - 2 = -(x - 2) = -g(x)$$

$$138.2. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 4}{-x + 2} = \frac{2(x - 2)}{-(x - 2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$138.3. (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x - 4) \times (-x + 2) = -2x^2 + 4x + 4x - 8 = -2x^2 + 8x - 8 = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x - 2)^2$$

Pág. 113

$$139.1. g(-1) = 9 \Leftrightarrow k f(-1) = 9 \Leftrightarrow k((-1)^3 - 4(-1)) = 9 \Leftrightarrow k(-1 + 4) = 9 \Leftrightarrow 3k = 9 \Leftrightarrow k = 3$$

$$139.2. g(x) = 0 \Leftrightarrow k f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

140.1.

a) Sabe-se que $D_f' = [-2, 1]$ e $g(x) = \frac{5}{2}f(x)$, então

$$D_g' = \left[-2 \times \frac{5}{2}, 1 \times \frac{5}{2}\right] = \left[-5, \frac{5}{2}\right].$$

b) Sabe-se que $D_f' = [-2, 1]$ e $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$, então

$$D_g' = \left[-2 \times \frac{1}{2}, 1 \times \frac{1}{2}\right] = \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

c) Sabe-se que $D_f' = [-2, 1]$ e $g(x) = -2f(x)$, então

$$D_g' = [-2 \times 1, -2 \times (-2)] = [-2, 4].$$

140.2.

a) $h(x) = 0 \Leftrightarrow k f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 3$

b) Sabe-se que $D_f' = [-2, 1]$.

Se $k > 0$, então $D_g' = [-2k, k]$.

Sendo $D_g' = \left[-3, \frac{3}{2}\right]$, tem-se:

$$-2k = -3 \wedge k = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge k = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Se $k < 0$, então $D_g' = [-k, 2k]$.

Sendo $D_g' = \left[-3, \frac{3}{2}\right]$, tem-se:

$$-k = -3 \wedge 2k = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = 3 \wedge k = \frac{3}{4} \text{ impossível}$$

Conclusão: $k = \frac{3}{2}$.

Pág. 114

141.1. Em relação à função $g = f^{\frac{1}{2}}$ tem-se:

$$g(x) = f^{\frac{1}{2}}(x) = (x - 2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x - 2}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[$$

141.2. Sabe-se que $A(x, 2)$, tal que $h(x) = 2$ e que $B(x, 2)$, tal que $g(x) = 2$.

$$h(x) = 2 \Leftrightarrow 3g(x) = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \wedge x - 2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x = \frac{22}{9} \Leftrightarrow x = \frac{22}{9}$$

Então, $A\left(\frac{22}{9}, 2\right)$.

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \wedge x - 2 = 4 \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x = 6 \Leftrightarrow x = 6$$

Então, $B(6, 2)$.

$$\overline{AB} = 6 - \frac{22}{9} = \frac{32}{9}.$$

Portanto, o perímetro do quadrado é dado por:

$$P = 4\overline{AB} = 4 \times \frac{32}{9} = \frac{128}{9}.$$

$$141.3. (h-g)(x) = 6 \Leftrightarrow h(x) - g(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \wedge x-2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x = 11 \Leftrightarrow x = 11$$

142.1.

a) Sabe-se que $D_f = \mathbb{R}$ e

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 3+x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\} = [-3, +\infty[.$$

$$\text{Então, } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : f(x) = 0\} = [-3, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{0, 4\} =$$

$$= [-3, +\infty[\setminus \{0, 4\}$$

Cálculo auxiliar:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

b) Então,

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap [-3, +\infty[\setminus \{-3\} = [-3, +\infty[.$$

Cálculo auxiliar:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} = 0 \Leftrightarrow 3+x \geq 0 \wedge 3+x = 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \wedge x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

c) Em relação à função $f^{\frac{3}{2}}$ tem-se:

$$f^{\frac{3}{2}}(x) = (x^2 - 4x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(x^2 - 4x)^3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 4x)^{\frac{3}{2}} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \geq 0\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$\text{Então, } x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[.$$

$$\text{Conclui-se que } D =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[.$$

142.2.

$$a) (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{3+1}) = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 = -4$$

$$b) D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-3, +\infty[\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -3\}$$

$$f(x) \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$$\text{Então, } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[.$$

$$\text{Conclui-se que } D_{g \circ f} =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[.$$

Pág. 115

$$143.1. \text{ Ora, } f(0) = (2 \times 0)^{\frac{1}{2}} + 16 = 0 + 16 = 16 \text{ e}$$

$$g(0) = -2f(0) + 66 = -2 \times 16 + 66 = -32 + 66 = 34.$$

Então, no início da experiência, a temperatura do líquido A era de 16 graus Celsius e do líquido B era de 34 graus Celsius.

$$143.2. \text{ Ora, } f(8) = (2 \times 8)^{\frac{1}{2}} + 16 = \sqrt{16} + 16 = 4 + 16 = 20 \text{ e}$$

$$g(8) = -2f(8) + 66 = -2 \times 20 + 66 = -40 + 66 = 26.$$

Assim sendo, 8 minutos após o início da experiência, a diferença de temperaturas entre os dois líquidos era de 6 graus Celsius.

$$143.3. f(t) = g(t) \Leftrightarrow (2t)^{\frac{1}{2}} + 16 = -2 \left((2t)^{\frac{1}{2}} + 16 \right) + 66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2t} + 16 = -2\sqrt{2t} - 32 + 66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2t} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{2t} = 6 \Leftrightarrow 2t \geq 0 \wedge 2t = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq 0 \wedge t = 18 \Leftrightarrow t = 18$$

A experiência decorreu durante 18 minutos.

Tarefa 15

1.1

$$a) f(t) = 0 \Leftrightarrow 0,4t^2 - 18t = 0 \Leftrightarrow t(0,4t - 18) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,4t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 45$$

$$g(t) = 0 \Leftrightarrow 0,34t^2 - 20,4t = 0 \Leftrightarrow t(0,34t - 20,4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,34t - 20,4 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 60$$

Conclui-se, então, que a baleia-de-bossa esteve submersa durante 45 minutos e que a baleia-austral esteve submersa durante 60 minutos.

b) Designemos por V_1 e V_2 os vértices das parábolas representativas das funções f e g , respetivamente.

$$\text{Sabe-se que } V_1 \left(\frac{45}{2}, f \left(\frac{45}{2} \right) \right) \text{ e que } V_2 (30, g(30)).$$

$$\text{Como } f \left(\frac{45}{2} \right) = 0,4 \times \left(\frac{45}{2} \right)^2 - 18 \left(\frac{45}{2} \right) = -202,5 \text{ e}$$

$$g(30) = 0,34 \times 30^2 - 20,4 \times 30 = -306, \text{ tem-se:}$$

$$V_1 \left(\frac{45}{2}; 202,5 \right) \text{ e } V_2 (30, -306).$$

Conclui-se que a profundidade máxima atingida pela baleia-de-bossa foi de -202,5 metros e que a profundidade máxima atingida pela baleia-austral foi de -306 metros.

$$1.2. \text{ Ora, } f(15) = 0,4 \times 15^2 - 18 \times 15 = -180 \text{ e}$$

$$g(15) = 0,34 \times 15^2 - 20,4 \times 15 = -229,5.$$

$$f(15) - g(15) = -180 - (-229,5) = -180 + 229,5 = 49,5$$

Assim sendo, 15 minutos após o início de um mergulho, a diferença entre as profundidades atingidas pelos dois tipos de baleias é de 49,5 metros.

1.3.

a) Atendendo aos resultados obtidos em 1.1. conclui-se que $D_f = [0, 45]$ e $D_g = [0, 60]$.

Então, $D_{g-f} = D_g \cap D_f = [0, 60] \cap [0, 45] = [0, 45]$.

$$(g-f)(t) = g(t) - f(t) = 0,34t^2 - 20,4t - (0,4t^2 - 18t) = \\ = 0,34t^2 - 20,4t - 0,4t^2 + 18t = -0,06t^2 - 2,4t$$

Assim sendo, a função $g-f$ é definida por:

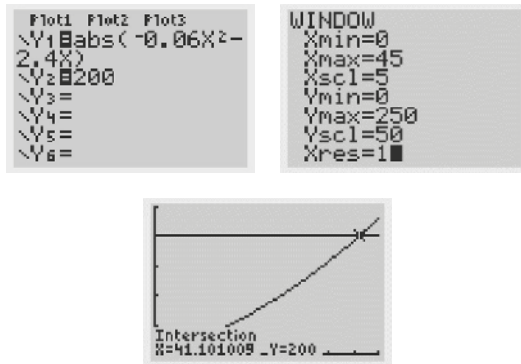
$$g-f: [0, 45] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow -0,06t^2 - 2,4t$$

b) $(g-f)(30) = -0,06 \times 30^2 - 2,4 \times 30 = -126$.

O resultado obtido indica que, 30 minutos após o início de um mergulho, a diferença entre as profundidades atingidas pelos dois tipos de baleias é de 126 metros (a baleia austral é a que está a uma profundidade maior).

1.4. $|(g-f)(t)| = 200 \Leftrightarrow |-0,06t^2 - 2,4t| = 200 \wedge t \in [0, 45]$

Pretende-se resolver graficamente a equação anterior.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $t \approx 41,101$ min.

Como $0,101 \times 60 \approx 6$, então $t \approx 41$ min e 6 s.

Pág. 118

Proposta 46

46.1.

a) O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f por aplicação da translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$.

Como $D_f = [-4, 5]$, então $D_g = [-4-1, 5-1] = [-5, 4]$.

O gráfico da função i obtém-se a partir do gráfico da função f através de uma dilatação horizontal de coeficiente 2.

Como $D_f = [-4, 5]$, então $D_i = [-4 \times 2, 5 \times 2] = [-8, 10]$.

b) Como $D'_f = [-3, 4]$ e $h(x) = |f(x)|$, então $D'_h = [0, 4]$.

O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f através de reflexão de eixo Ox seguida de uma translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 3)$.

Como $D'_f = [-3, 4]$, então $D'_j = [-4+3, 3+3] = [-1, 6]$.

c) $i(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \wedge x \in [-8, 10] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = -3 \vee \frac{x}{2} = 0 \vee \frac{x}{2} = 4\right) \wedge x \in [-8, 10] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -6 \vee x = 0 \vee x = 8) \wedge x \in [-8, 10] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 0 \vee x = 8$$

46.2.

a) $g(-2) - h(-4) \times i(4) = f(-2+1) - |f(-4)| \times f\left(\frac{4}{2}\right) = \\ = f(-1) - |f(-4)| \times f(2) = 1 - |-3| \times (-2) = 1 + 6 = 7$

b) $j(5) \times i(-6) + g(1) = (-f(5)+3) \times f\left(\frac{-6}{2}\right) + f(1+1) = \\ = (-4+3) \times f(-3) + f(2) = -1 \times 0 + (-2) = -2$

Proposta 47

47.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \neq 0\}$

Cálculo auxiliar: $|x-1| = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Então, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

47.2.

a) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = -1 + \frac{1}{|2-1|} = -1 + 1 = 0$

b) $(fg)(-3) = f(-3)g(-3) = 1 \times \frac{1}{|-3-1|} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{\frac{1}{|0-1|}} = \frac{2}{1} = 2$

d) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1) = \frac{1}{|-1-1|} = \frac{1}{2}$

47.3. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$

Pág. 119

Proposta 48

48.1. Atendendo à semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{10-x}{10} = \frac{b}{3} \Leftrightarrow b = \frac{3(10-x)}{10}$$

Então, $l(x) = 2 \times \frac{3(10-x)}{10} = \frac{6(10-x)}{10} = \frac{3(10-x)}{5} = \frac{3}{5}(10-x)$.

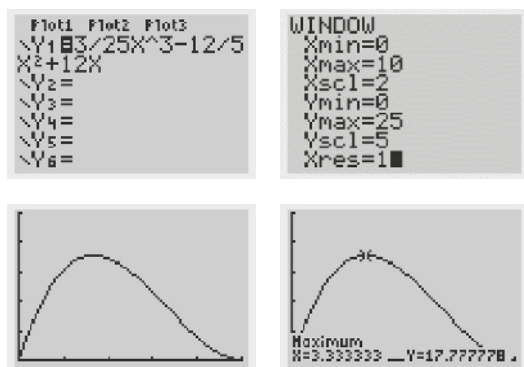
48.2. Sabe-se que $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$.

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3} \times \left[\frac{3}{5} (10-x) \right]^2 \times x = \frac{1}{3} \times \frac{9}{25} (10-x)^2 \times x = \\ &= \frac{9}{75} (100 - 20x + x^2) \times x = \frac{3}{25} (100x - 20x^2 + x^3) = \\ &= 12x - \frac{12}{5} x^2 + \frac{3}{25} x^3 \end{aligned}$$

$$x > 0 \wedge 10 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 10 \Leftrightarrow x \in]0, 10[$$

48.3. Utilizando uma janela de visualização adequada à situação, obtém-se uma representação gráfica da função V .



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que o volume é máximo quando $x \approx 3,33$.

48.4.

a) O volume limitado pelas superfícies das duas pirâmides é igual à diferença entre o volume da pirâmide $[ABCDR]$ e o volume da pirâmide $[EFGHO]$.

Assim sendo, tem-se:

$$S(x) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 10 - V(x) = \frac{1}{3} \times 36 \times 10 - V(x) = 120 - V(x).$$

b) O gráfico da função S pode ser obtido do gráfico da função V através de uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 120)$.

Pág. 120

Proposta 49

49.1.

a) Sabe-se que $D_f' = [-3, 7]$ e $g = 2f$, então

$$D_g' = [-3 \times 2, 7 \times 2] = [-6, 14].$$

b) $D_{f^{-1}} = D_f' = [-3, 7]$

49.2. Não é possível calcular $(f \circ f)(3)$ porque $f(3) \notin D_f$

(nota: $f(3) = 7$ e $D_f = [-3, 3]$).

Proposta 50

50.1.

$$\mathbf{a)} \ D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \wedge x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) = 0 \vee g(x) = 0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 2 \vee x = 4) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$$

$$\mathbf{b)} \ D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \setminus \{2, 4\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \wedge x \in D_{\frac{f}{g}} \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\} \Leftrightarrow x = 3$$

50.2. Em relação à função g^{-2} tem-se:

$$g^{-2}(x) = (g(x))^{-2} = \frac{1}{(g(x))^2}. \text{ Então:}$$

$$D = \{x \in D_g : (g(x))^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : g(x) \neq 0\} =$$

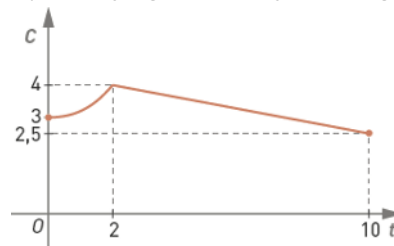
$$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x \neq 2 \wedge x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}.$$

Proposta 51

$$\mathbf{51.1.} \ C(0) = \frac{0^2}{4} + 3 = 3$$

O preço de lançamento da revista foi de 3 euros.

51.2. Uma representação gráfica da função C é a seguinte:



Partindo da representação gráfica anterior, é possível construir o seguinte quadro de variação e extremos:

t	0		2		10
c	3	↗	4	↘	2,5
	↓		↓		↓
	Mínimo relativo		Máximo absoluto		Mínimo absoluto

Pág. 121

Proposta 52

52.1. $C(0) = -0,5 \times 0^2 + 0 + 0,2 = 0,2$

Um animal dessa espécie quando nasce tem habitualmente 0,2 m, ou seja, 20 cm.

52.2. 3 meses = $\frac{3}{12}$ ano = 0,25 ano.

$C(0,25) = -0,5 \times 0,25^2 + 0,25 + 0,2 \approx 0,42$

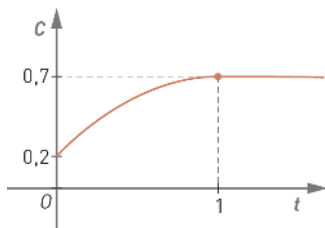
Aos 3 meses o comprimento previsto é de, aproximadamente, 0,42 m, ou seja, 42 cm.

52.3.

a) Atendendo às expressões algébricas que definem o crescimento em função do tempo, conclui-se que o animal passa à idade adulta ao fim de 1 ano.

b) O comprimento dos animais adultos desta espécie é de 0,7 m, ou seja, 70 cm.

52.4.



Proposta 53

53.1. A Joana e o Pedro saíram de casa às 14 h, logo às 14 h 30 min tinham passado 30 min, ou seja, 0,5 h, após a saída.

$f(0,5) = -2 \times 0,5^2 + 6 \times 0,5 = 2,5$ e $g(0,5) = 1,8 \times 0,5 = 0,9$.

Assim sendo, às 14 h 30 min a Joana encontrava-se a 2,5 km de casa e o Pedro encontrava-se a 0,9 km, ou seja, 900 m, de casa.

53.2. Por observação gráfica, sabe-se que a Joana chegou primeiro a casa. Para saber a hora a que chegou temos de resolver a equação $f(t) = 0$.

$f(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow 2t(-t + 3) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \vee -t + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 3$

Conclui-se que a Joana chegou a casa 3 h após ter saído, ou seja, às 17 h.

53.3. $g(3) = 1,8 \times 3 = 5,4$. No instante em que a Joana chegou a casa, o Pedro encontrava-se a 5,4 km de casa.

53.4. Designemos por V o vértice da parábola representativa da função f.

Como os zeros da função f são 0 e 3, sabe-se que a abscissa do vértice é $x_v = \frac{0+3}{2} = 1,5$ e que a ordenada do vértice é

$y_v = f(1,5) = -2 \times 1,5^2 + 6 \times 1,5 = 4,5$. Então, tem-se

$V(1,5; 4,5)$.

A distância máxima que a Joana esteve de casa foi de 4,5 km e ocorreu 1 h 30 min após ter saído, ou seja, às 15 h 30 min.

53.5. $g(t) < 4,5 \Leftrightarrow 1,8t < 4,5 \Leftrightarrow t < \frac{4,5}{1,8} \Leftrightarrow t < 2,5$

O Pedro esteve a uma distância de casa inferior a 4,5 km durante 2 h e 30 min.

53.6. $f(t) > 2 \Leftrightarrow -2t^2 + 6t > 2 \wedge t \in [0, 3] \Leftrightarrow$

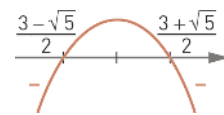
$\Leftrightarrow -2t^2 + 6t - 2 > 0 \wedge t \in [0, 3]$

$\Leftrightarrow -t^2 + 3t - 1 > 0 \wedge t \in [0, 3]$

Cálculo auxiliar:

$-t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$



Então, $-t^2 + 3t - 1 > 0 \Leftrightarrow t \in \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[$.

Logo, $f(t) > 2 \Leftrightarrow t \in \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[\wedge t \in [0, 3] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \in \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[$.

$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$\sqrt{5} \text{ h} \approx 2,236 \text{ h}$ e $0,236 \text{ h} = 0,236 \times 60 \text{ min} \approx 14 \text{ min}$.

A Joana esteve a mais de 2 km de casa durante, aproximadamente, 2 h e 14 min.

53.7. O ponto P é o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g cuja abscissa é não nula.

$f(t) = g(t) \Leftrightarrow -2t^2 + 6t = 1,8t \Leftrightarrow -2t^2 + 4,2t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t(-t + 2,1) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \vee -t + 2,1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2,1$

Como a abscissa de P é não nula, conclui-se que é igual a 2,1.

Então, $P(2,1; g(2,1))$.

Como $g(2,1) = 1,8 \times 2,1 = 3,78$, tem-se $P(2,1; 3,78)$.

No contexto do problema significa que 2,1 h após a saída, ou seja, às 16 h 6 min, os dois irmãos encontravam-se a 3,78 km de casa.

Pág. 122

Proposta 54

54.1. Como $A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2}$, então tem-se:

$$g(b) = \frac{b \times f(b)}{2} = \frac{b \times \left(-\frac{1}{2}b^2 + 3b + 8 \right)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}b^3 + 3b^2 + 8b}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{2}b^2 + 4b.$$

$$54.2. g(b) = 24 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{2}b^2 + 4b = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{2}b^2 + 4b - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 + 6b^2 + 16b - 96 = 0$$

Sendo $g(6) = 24$, então 6 é raiz do polinômio

$$-b^3 + 6b^2 + 16b - 96.$$

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 6 & 16 & -96 \\ 6 & & -6 & 0 & 96 \\ \hline & -1 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

Conclui-se que $-b^3 + 6b^2 + 16b - 96 = (b-6)(-b^2 + 16)$.

Assim, tem-se:

$$-b^3 + 6b^2 + 16b - 96 = 0 \Leftrightarrow (b-6)(-b^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b-6 = 0 \vee -b^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow b = 6 \vee b^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 6 \vee b = 4 \vee b = -4$$

Como $b \in]0, 8[$, conclui-se que $b = 6 \vee b = 4$.

Então, as soluções da equação $g(b) = 24$ são 4 e 6.

Proposta 55

55.1.

a) A afirmação $\exists x \in]a, b[: f(x) - g(x) = 0$ é verdadeira pois os gráficos das funções f e g interseitam-se num ponto de abscissa pertencente ao intervalo $]a, b[$.

b) A afirmação $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$ é falsa porque, por exemplo, $f(b) < g(b)$.

c) A afirmação “Se $x > a$, então $f(x) \times g(x) > 0$ ” é falsa porque, por exemplo, $b > a \wedge f(b) \times g(b) = 0$.

d) A afirmação “ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times g(b) = 0$ ” é verdadeira porque sendo b zero da função g então $g(b) = 0$.

55.2. Recorrendo a uma tabela para fazer o estudo do sinal da função $f \times g$, conclui-se que a representação gráfica que pode corresponder a $f \times g$ é a (C).

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
Sinal de f	+	0	-	-	-
Sinal de g	-	-	-	0	-
Sinal de $f \times g$	-	0	+	0	+

Proposta 56

56.1.

$$a) (f+g)(10) = f(10) + g(10) = 10^2 + 2 \times 10 + 10 \times 10 = 220.$$

No contexto apresentado significa que 10 minutos após a abertura das saídas de água, as saídas A e B libertaram em conjunto 220 litros de água.

$$b) (g-f)(6) = g(6) - f(6) = 10 \times 6 - (6^2 + 2 \times 6) = 60 - 48 = 12$$

No contexto apresentado significa que 6 minutos após a abertura das saídas de água, a saída B libertou mais 12 litros de água do que a saída A.

$$56.2. (f-g)(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 10x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-8) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x-8=0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=8) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x=8$$

No contexto apresentado significa que 8 minutos após a abertura das saídas de água, as saídas A e B libertaram a mesma quantidade de água.

Proposta 57

57.1.

a) O ponto A pertence ao gráfico da função f e tem abscissa 1, logo a sua ordenada é dada por $f(1)$.

$$f(1) = 3 - 2\sqrt{1-1} = 3 - 2 \times 0 = 3.$$

Então, a ordenada do ponto A é 3.

b) O ponto B pertence ao gráfico da função f e tem ordenada 2, logo a sua abscissa é a solução da equação $f(x) = 2$.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \wedge x-1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Então, a abscissa do ponto B é $\frac{5}{4}$.

c) O ponto C é a interseção do gráfico da função f com o eixo Ox , logo tem ordenada 0 e a sua abscissa é a solução da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \wedge x-1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$$

Então, a abscissa do ponto C é $\frac{13}{4}$.

Portanto, $C\left(\frac{13}{4}, 0\right)$.

57.2.

$$a) D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty[\text{ e } D_g = \mathbb{R}.$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = [1, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{0, 12\} = [1, +\infty[\setminus \{12\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(12 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$$

$$b) D_{\frac{f}{g}} = D_g \cap D_f \setminus \{x : f(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[\setminus \left\{\frac{13}{4}\right\} = [1, +\infty[\setminus \left\{\frac{13}{4}\right\}.$$

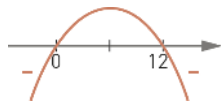
$$c) g^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{24x - 2x^2}$$

Seja $h = g^{\frac{1}{2}} \times f$, então

$$D_h = \{x \in D_g : g(x) \geq 0\} \cap D_f = \{x \in [1, +\infty[: 24x - 2x^2 \geq 0\} \cap \mathbb{R}.$$

Cálculo auxiliar:

$$24x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(12 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$$



$$24x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 12]$$

$$\text{Conclusão: } D_h = \{x \in [1, +\infty[: x \in [0, 12]\} \cap \mathbb{R} = [1, 12]$$

57.3.

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x-1} = 1 + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x-1} + x - 1 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x-1} + x - 1 = x \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Verificação:

Substituindo x por 1 na equação inicial, tem-se:

$$3 - 2\sqrt{1-1} = 1 + 2\sqrt{1}, \text{ ou seja,}$$

$$3 - 0 = 1 + 2 \text{ (Proposição verdadeira).}$$

Assim sendo, conclui-se que 1 é solução da equação

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x}.$$

Pág. 124

Proposta 58

58.1.

$$a) h(0) = 0,2 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 5 = 5 \text{ e}$$

$$h(8) = 0,2 \times 8^2 - 1,6 \times 8 + 5 = 5.$$

A altura máxima da rampa é de 5 m.

$$h(x) = 0,2x^2 - 1,6x + 5 = 0,2(x^2 - 8x) + 5 = 0,2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 5 = 0,2(x^2 - 8x + 16) - 3,2 + 5 = 0,2(x - 4)^2 + 1,8$$

O vértice da parábola representativa da função h tem coordenadas $(4; 1,8)$ e a concavidade da parábola é voltada para cima.

Então, a altura mínima da rampa é de 1,8 m.

b) Como as paredes A e B distam 8 m entre si, sabe-se que o ponto da rampa que dista 1,5 m da parede B dista 6,5 m da parede A.

$$h(6,5) = 0,2 \times 6,5^2 - 1,6 \times 6,5 + 5 = 3,05.$$

Então, a altura do ponto da rampa que dista 1,5 m da parede B é 3,05 m.

$$c) h(x) = 2 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 1,6x + 5 = 2 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 1,6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1,6 \pm \sqrt{2,56 - 4 \times 0,2 \times 3}}{0,4} \Leftrightarrow x = \frac{1,6 \pm \sqrt{0,16}}{0,4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1,6 + 0,4}{0,4} \vee x = \frac{1,6 - 0,4}{0,4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 3$$

Os pontos da rampa que estão a 2 m de altura distam 3 m e 5 m, respectivamente, da parede A.

Então, a distância entre eles é de 2 m $(5 - 3 = 2)$.

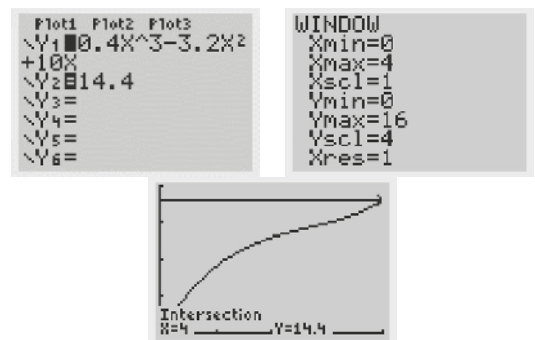
58.2.

a) Como os painéis são geometricamente iguais, tem-se:

$$A(x) = 2(xh(x)) = 2x(0,2x^2 - 1,6x + 5) = 0,4x^3 - 3,2x^2 + 10x.$$

$$b) A(x) = 14,4 \Leftrightarrow 0,4x^3 - 3,2x^2 + 10x = 14,4 \wedge 0 \leq x \leq 8$$

Recorrendo à calculadora gráfica, resolve-se graficamente a equação anterior.



A solução da equação $A(x) = 14,4$ é 4.

Geometricamente conclui-se que quando a área conjunta dos dois painéis é igual a $14,4 \text{ m}^2$, os dois painéis ficam unidos, formando um único painel com 8 m $(4 + 4 = 8)$ de largura e 1,8 m $(14,4 : 8 = 1,8)$ de altura.

Proposta 59

59.1. Os triângulos $[CDE]$ e $[ABC]$ são semelhantes porque os seus ângulos internos são geometricamente iguais.

Atendendo à semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{CP}{CR} = \frac{DE}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{DE}{12} \Leftrightarrow DE = \frac{12x}{3} \Leftrightarrow DE = 4x.$$

59.2. Como $A_{\text{retângulo}} = \overline{DE} \times \overline{PR}$, então a área A do retângulo é dada em função de x por:

$$A(x) = 4x \times (3 - x) = 12x - 4x^2 = -4x^2 + 12x.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{59.3.} \quad A(x) &= -4x^2 + 12x = -4(x^2 - 3x) = \\ &= -4(x^2 - 3x + 1,5^2 - 1,5^2) = -4(x^2 - 3x + 1,5^2) + 4 \times 2,25 = \\ &= -4(x - 1,5)^2 + 9 \end{aligned}$$

O vértice da parábola representativa da função A tem coordenadas $(1,5; 9)$ e a concavidade da parábola é voltada para baixo. Então, a área do retângulo é máxima quando $x = 1,5$ cm. Neste caso, o retângulo tem 6 cm ($4 \times 1,5 = 6$) de comprimento e 1,5 cm ($3 - 1,5 = 1,5$) de largura.

Conclui-se que $\overline{DE} = 6$ cm e $\overline{PR} = 1,5$ cm.

Proposta 60

60.1. Sendo f uma função polinomial do 1.º grau, então

$$f(x) = mx + b.$$

$$m = \frac{0,75 - 0}{0 - (-2)} = \frac{0,75}{2} = 0,375 = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad b = 0,75 = \frac{3}{4} \quad \text{porque o ponto}$$

de coordenadas $(0; 0,75)$ pertence ao gráfico de f .

$$\text{Então, } f(x) = \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}.$$

60.2. O ponto P pertence aos gráficos das funções f e g e tem abcissa 1, logo a sua ordenada é dada por $f(1)$.

$$f(1) = \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Então, } P\left(1, \frac{9}{8}\right).$$

60.3. g é uma função polinomial do 3.º grau cujos zeros são -2 (zero simples) e 2 (zero duplo), então

$$g(x) = a(x+2)(x-2)^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Como } g(0) = 3, \text{ tem-se:}$$

$$a(0+2)(0-2)^2 = 3 \Leftrightarrow a \times 2 \times 4 = 3 \Leftrightarrow 8a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Então, } g(x) = \frac{3}{8}(x+2)(x-2)^2.$$

60.4.

$$\mathbf{a)} \quad f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}x + \frac{3}{4} = \frac{3}{8}(x+2)(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}(x+2) - \frac{3}{8}(x+2)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}(x+2)[1 - (x-2)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}(x+2) = 0 \vee 1 - (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \vee (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x-2 = 1 \vee x-2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3 \vee x = 1$$

b) Por análise gráfica, e atendendo ao resultado obtido no item anterior, conclui-se que $f(x) > g(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in]1, 3[$.

$$\mathbf{60.5.} \quad h(x) = -2 + f(x-1) = -2 + \frac{3}{8}(x-1) + \frac{3}{4} = -2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{13}{8}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{13}{8} = 0 \Leftrightarrow 3x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}.$$

O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f por aplicação da translação de vetor $\vec{u}(1, -2)$. Então, a tabela de sinais da função h é a seguinte:

x	$-\infty$	$\frac{13}{3}$	$+\infty$
Sinal de h	-	0	+

Proposta 61

61.1.

$$\mathbf{a)} \quad -2h(x+5) < 0 \Leftrightarrow h(x+5) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5 > -3 \wedge x+5 < 1) \vee (x+5 > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x > -8 \wedge x < -4) \vee (x > -3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-8, -4[\cup]-3, +\infty[$$

$$\mathbf{b)} \quad h(2x) > 0 \Leftrightarrow (2x > -3 \wedge 2x < 1) \vee (2x > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x > -\frac{3}{2} \wedge x < \frac{1}{2}\right) \vee (x > 1) \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$$

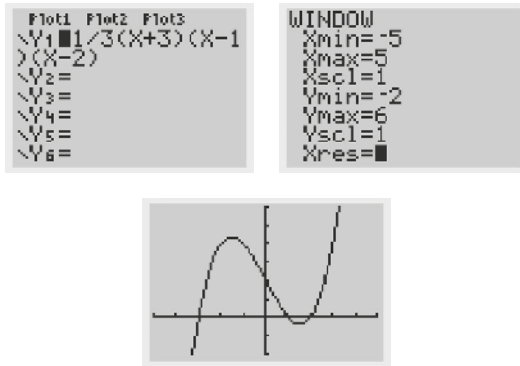
61.2. h é uma função polinomial do 3.º grau cujos zeros são -3 , 1 e 2 , então $h(x) = a(x+3)(x-1)(x-2)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $h(0) = 2$, tem-se:

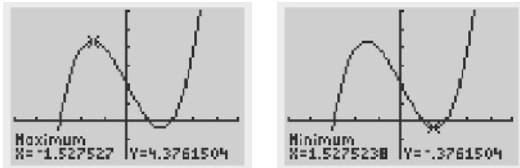
$$a(0+3)(0-1)(0-2) = 2 \Leftrightarrow 6a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Então, } h(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-1)(x-2).$$

a) Em seguida apresenta-se a representação gráfica da função h na calculadora gráfica.

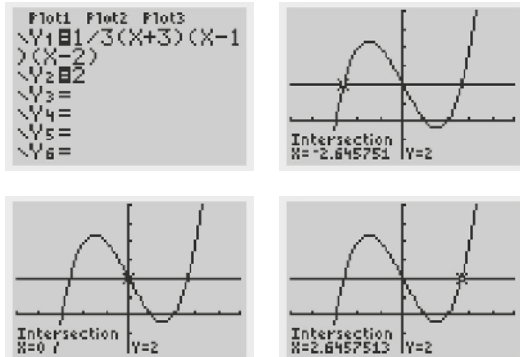


Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinam-se os extremos relativos da função.



Máximo relativo: 4,38;
Mínimo relativo: -0,38.

b)



Por observação gráfica, conclui-se que $h(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,65; 0] \cup [2,65; +\infty[$.

O conjunto-solução da condição $h(x) \geq 2$ é $[-2,65; 0] \cup [2,65; +\infty[$.

Proposta 62

62.1. O ponto A pertence ao gráfico da função f e tem abscissa -1 , então $A(-1, f(-1))$.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Portanto, $A(-1, 0)$.

O ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abscissa 8 , então $B(8, f(8))$.

$$f(8) = 7 - \sqrt{8+1} = 7 - \sqrt{9} = 7 - 3 = 4.$$

Portanto, $B(8, 4)$.

62.2. Um vetor com a direção da reta AB é o vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 4) - (-1, 0) = (9, 4).$$

A reta AB pode ser representada através das seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 9k \\ y = 0 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

62.3.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \wedge x < 0) \vee (7 - \sqrt{x+1} = 0 \wedge x \geq 0)$$

· Como -1 é um zero de f , então o polinómio $x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível por $x + 1$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Conclui-se que $x^3 - 4x^2 + x - 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Assim, tem-se:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2} \right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3 \vee x = 2) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\cdot 7 - \sqrt{x+1} = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 7 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \wedge +1 = 49 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x = 48 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 48$$

Conclui-se, então, que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 48$.

Para além de -1 , a função f só tem mais um zero (48).

Pág. 126

1. Sendo f uma função par, então o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy , isto é, a reta de equação $x = 0$ é eixo de simetria do seu gráfico.

Como f é uma função quadrática de contradomínio $[-1, +\infty[$ e $x = 0$ é eixo de simetria do seu gráfico, conclui-se que a parábola representativa do gráfico de f tem a concavidade voltada para cima (logo $a > 0$) e vértice $V(0, -1)$.

Como o vértice é o ponto $V(0, -1)$, então conclui-se que $b = 0$ e $c = -1$.

A opção correta é a (D).

2. Sendo 3 o único zero da função quadrática f , então

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) > 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) < 0$, consoante a concavidade está voltada para cima ou para baixo.

Assim sendo $f(1)$ e $f(0)$ tomam sempre o mesmo sinal (são ambos positivos ou ambos negativos). Logo, $f(1) \times f(0) > 0$.

A opção correta é a (C).

3. Sendo f uma função par e $f(5) = 1$, então $f(-5) = f(5) = 1$.

Como h uma função ímpar e $h(-2) = 3$, então

$$h(2) = -h(-2) = -3.$$

Assim sendo, $f(-5) + h(2) = 1 + (-3) = -2$.

A opção correta é a (B).

4. Sabe-se que $V_{cilindro} = A_b \times h$ e que $V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$.

Atendendo aos dados da figura, tem-se:

$$\begin{aligned} V_{sólido} &= V_{cilindro} + V_{cone} = \pi r^2 \times 2r + \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times (r+1) = \\ &= 2\pi r^3 + \frac{\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^2}{3} = \frac{7\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^2}{3}. \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

5. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9 = 0 \wedge x \geq 1) \vee (x^2 + 1 = 0 \wedge x < 1)$

$$\cdot x^2 - 9 = 0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -3) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\cdot x^2 + 1 = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x^2 = -1 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

equação impossível

Conclusão: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

A opção correta é a (C).

6. Sendo f uma função do tipo $y = a|x - b| + c$, então sabe-se que:

$$- D_f' = [c, +\infty[\text{ se } a > 0;$$

$$- D_f' =]-\infty, c] \text{ se } a < 0.$$

Como $D_f' = [-2, +\infty[$, pode-se concluir que $a > 0$ e $c = -2$.

Então, $a < 0$.

A opção correta é a (A).

Pág. 127

1.1. Como a temperatura foi observada nas quatro horas seguintes após a Rita ter acordado (às 5 h), então às 5 h sabe-se que $h = 0$.

$$T(0) = -0,5(0^2 - 4 \times 0) + 38 = 38.$$

A temperatura observada às 5 h foi de 38 graus Celsius.

$$1.2. T(h) = -0,5(h^2 - 4h) + 38 = -0,5(h^2 - 4h + 4 - 4) + 38 =$$

$$= -0,5(h^2 - 4h + 4) + 2 + 38 = -0,5(h - 2)^2 + 40$$

A representação gráfica da função T é parte de uma parábola ($0 \leq h \leq 4$) com a concavidade voltada para baixo e de vértice $V(2, 40)$.

Então, a temperatura máxima atingida no período de observação foi de 40 graus Celsius.

1.3. A temperatura começou a baixar 2 h após a Rita ter acordado, ou seja, às 7 h. Por outro lado, sabe-se que a temperatura começou a baixar 20 min após a administração de um medicamento. Donde se conclui que o medicamento foi administrado às 6 h 40 min.

1.4. Para provar o pedido, vamos estudar a variação da temperatura entre as 6 h ($h = 1$) e as 8 h ($h = 3$).

$$1 < h < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < h - 2 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (h - 2)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 0,5(h - 2)^2 < 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0,5 < -0,5(h - 2)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5 + 40 < -0,5(h - 2)^2 + 40 \leq 0 + 40$$

$$\Leftrightarrow 39,5 < T(h) \leq 40$$

Então, a temperatura entre as 6 h e as 8 h manteve-se superior a 39,5 °C.

1.5. O gráfico da função T_1 , definida por $T_1(h) = T(h + 2)$,

obtem-se a partir do gráfico da função T por aplicação da translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$.

Assim sendo, conclui-se que a temperatura da Sónia foi superior a 39,5 °C entre as 4 h e as 6 h.

2.1.

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \mathbb{R} \cap [2, +\infty[= [2, +\infty[$$

$$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) = 0 \vee g(x) = 0) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - |2 - x| = 0 \vee \sqrt{x - 2} = 0) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [|2 - x| = 1 \vee (x - 2 \geq 0 \wedge x - 2 = 0)] \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(2 - x = 1 \vee 2 - x = -1) \vee (x \geq 2 \wedge x = 2)] \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 3 \vee x = 2) \wedge x \in D \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

2.2.

$$a) g(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 1 - |2 - x| \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \wedge x - 2 = 1 \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$b) f(x) = g\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow 1 - |2 - x| = \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \Leftrightarrow 1 - |2 - x| = \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - |2 - x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2 - x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{2} \vee 2 - x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x = -\frac{3}{2} \vee -x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

3.1. O ponto A pertence ao gráfico da função f , tem ordenada -3 e abcissa positiva. Logo, $A(x, -3)$ tal que $f(x) = -3 \wedge x > 0$.

$$f(x) = -3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x - 2 = 0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Então, $A(2, -3)$.

3.2. O ponto $A(2, -3)$ pertence ao gráfico da função h , definida por $h(x) = g(x) + k$, se $h(2) = -3$.

$$h(2) = -3 \Leftrightarrow g(2) + k = -3 \Leftrightarrow |2 - 2| - 1 + k = -3 \Leftrightarrow 0 - 1 + k = -3 \\ \Leftrightarrow k = -2$$

3.3. Como $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 = (x - 1)^2 - 4$, a reta de equação $x = 1$ é eixo de simetria do gráfico de f .

Sendo i a função definida por $i(x) = f(x - c)$, conclui-se que o

eixo de simetria do gráfico de i é a reta de equação $x = 1 + c$.

A reta de equação $x = 2$ é eixo de simetria do gráfico da função g definida por $g(x) = |x - 2| - 1$.

Assim sendo, os gráficos de i e de g têm o mesmo eixo de simetria se $1 + c = 2$, ou seja, se $c = 1$.

4.1.

$$\text{a) } \left(\frac{g}{f}\right)(-6) = \frac{g(-6)}{f(-6)} = \frac{(-6)^2 - 4}{\sqrt[3]{2 - (-6)}} = \frac{36 - 4}{\sqrt[3]{8}} = \frac{32}{2} = 16$$

$$\text{b) } (gh)(9) = g(9) \times h(9) = (9^2 - 4) \times \sqrt{9} = 77 \times 3 = 231$$

$$\text{c) } (g \circ h)(9) = g(h(9)) = g(\sqrt{9}) = g(3) = 3^2 - 4 = 5$$

4.2.

$$\text{a) } \left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$$

$$\text{b) } (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$\text{c) } (gh)(x) = g(x) \times h(x) = (x^2 - 4) \times \sqrt{x} = x^2 \sqrt{x} - 4\sqrt{x}$$

Pág. 131

$$1.1. 3+6+9+12=3 \times 1+3 \times 2+3 \times 3+3 \times 4=\sum_{i=1}^4 3i$$

$$1.2. 4+9+16+25+36=2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=\sum_{i=2}^6 i^2$$

$$1.3. \sum_{i=1}^3 2^i=2^1+2^2+2^3=2+4+8$$

$$1.4. 5+7+9+11+13= \\ = (2 \times 1+3)+(2 \times 2+3)+(2 \times 3+3)+(2 \times 4+3)+(2 \times 5+3)= \\ = \sum_{k=1}^5 (2k+3)$$

$$1.5. 5+7+9+11+13= \\ = (2 \times 3-1)+(2 \times 4-1)+(2 \times 5-1)+(2 \times 9-1)+(2 \times 7-1)= \\ = \sum_{k=3}^7 (2k-1)$$

$$1.6. \sum_{k=2}^5 \frac{2}{k-1}=\frac{2}{2-1}+\frac{2}{3-1}+\frac{2}{4-1}+\frac{2}{5-1}=2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$

$$1.7. 1-3i=-5 \Leftrightarrow -3i=-6 \Leftrightarrow i=2$$

$$\sum_{i=2}^5 (1-3i)=-5-8-11-14$$

Pág. 132

2.1. Substituindo n por 12 no termo geral obtém-se o termo de ordem 12.

$$\text{Ora, } \frac{2 \times 12}{12+1} = \frac{24}{13}.$$

O termo de ordem 12 é igual a $\frac{24}{13}$.

2.2.

a) A soma dos 30 primeiros termos da sequência pode ser

$$\text{representada por } \sum_{n=1}^{30} \frac{2n}{n+1}.$$

b) Pretende-se representar na forma de somatório a soma dos 15 termos consecutivos a começar no 8.º termo, então o último termo dessa soma é o 22.º (pois $8+15-1=22$).

Então, soma dos 15 termos consecutivos a começar no 8.º termo

$$\text{pode ser representada por } \sum_{n=8}^{22} \frac{2n}{n+1}.$$

c) Pretende-se representar na forma de somatório a soma dos 40 últimos termos da sequência. Como a sequência tem 65 termos, então o último termo dessa soma é o 65.º e o primeiro termo é o 26.º (pois $65+1-40=26$).

Então, soma dos 40 últimos termos da sequência pode ser

$$\text{representada por } \sum_{n=26}^{65} \frac{2n}{n+1}.$$

3.1. Sabe-se que o último termo da sequência é 84. Vamos, então, determinar a sua ordem.

$$n^2-5n=84 \Leftrightarrow n^2-5n-84=0 \Leftrightarrow n=\frac{5 \pm \sqrt{25+336}}{2} \Leftrightarrow$$

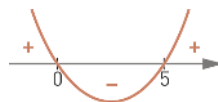
$$\Leftrightarrow n=\frac{5 \pm 19}{2} \Leftrightarrow n=12 \vee n=-7$$

Como $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $n=12$.

Então, a soma dos termos da sequência pode ser representada

$$\text{por } \sum_{n=1}^{12} (n^2-5n).$$

$$3.2. n^2-5n=0 \Leftrightarrow n(n-5)=0 \Leftrightarrow n=0 \vee n-5=0 \Leftrightarrow n=0 \vee n=5$$



Como $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 12$, conclui-se que

$$n^2-5n > 0 \Leftrightarrow n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Então, a soma dos termos positivos da sequência pode ser

$$\text{representada por } \sum_{n=6}^{12} (n^2-5n).$$

4.1. Por exemplo, a soma dos números de todas as fichas pode

$$\text{ser representada por } \sum_{i=1}^{90} i.$$

4.2. Por exemplo, a soma dos números pares do conjunto das

$$\text{fichas pode ser representada por } \sum_{i=1}^{45} 2i.$$

4.3. Por exemplo, a soma dos números ímpares do conjunto das

$$\text{fichas pode ser representada por } \sum_{i=1}^{45} (2i-1).$$

Pág. 133

5.1. A medida do comprimento da linha poligonal constituída pelos primeiros 10 segmentos de reta pode ser representada por

$$\sum_{i=1}^{10} i.$$

5.2.

a) $\sum_{i=1}^{40} i$ representa a medida do comprimento da linha poligonal.

$$\sum_{i=1}^{40} i = \frac{40^2+40}{2} = \frac{1600+40}{2} = 820.$$

b) $\sum_{i=1}^{15} i$ representa a medida do comprimento da linha poligonal constituída pelos primeiros 15 segmentos de reta.

$$\sum_{i=1}^{15} i = \frac{15^2+15}{2} = \frac{225+15}{2} = 120.$$

c) $\sum_{i=21}^{40} i$ representa a medida do comprimento da linha poligonal constituída pelos últimos 20 segmentos de reta.

$$\sum_{i=21}^{40} i = \sum_{i=1}^{40} i - \sum_{i=1}^{20} i = 820 - \frac{20^2+20}{2} = 820 - 210 = 610.$$

Tarefa 1

1.1. O primeiro termo da sequência é -2 e a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é igual a 3 .

Assim, o termo de ordem n é igual a $3n - 5$.

A soma dos termos da sequência pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^{10} (3n - 5).$$

1.2. O termo de ordem n é igual a $\frac{7}{2n}$.

A soma dos termos da sequência pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^5 \frac{7}{2n}.$$

1.3. O termo de ordem n é igual a $\frac{n}{n+1}$.

A soma dos termos da sequência pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^7 \frac{n}{n+1}.$$

1.4. Qualquer termo da sequência é uma potência de base 2 .

Assim, o termo de ordem n é igual a 2^n .

A soma dos termos da sequência pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^6 2^n.$$

$$\begin{aligned} 2.1. \quad \sum_{i=1}^4 \frac{2i}{i+1} &= \frac{2 \times 1}{1+1} + \frac{2 \times 2}{2+1} + \frac{2 \times 3}{3+1} + \frac{2 \times 4}{4+1} = \\ &= 1 + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{8}{5} = \frac{30}{30} + \frac{40}{30} + \frac{45}{30} + \frac{48}{30} = \frac{163}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. \quad \sum_{i=2}^5 (i^2 - 3i) &= \\ &= (2^2 - 3 \times 2) + (3^2 - 3 \times 3) + (4^2 - 3 \times 4) + (5^2 - 3 \times 5) = \\ &= -2 + 0 + 4 + 10 = 12 \end{aligned}$$

3.1. Sabe-se que $u_1 = 1^2 = 1$, $u_2 = 3^2 = 9$, $u_3 = 5^2 = 25$ e

$u_4 = 7^2 = 49$. Então, $u_5 = 9^2 = 81$.

Sabe-se que $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 4 = 5$, $a_3 = 5 + 4 = 9$ e

$a_4 = 9 + 4 = 13$. Então, $a_5 = 13 + 4 = 17$.

Sabe-se que $b_1 = u_1 - a_1 = 1 - 1 = 0$, $b_2 = u_2 - a_2 = 9 - 5 = 4$,

$b_3 = u_3 - a_3 = 25 - 9 = 16$ e $b_4 = u_4 - a_4 = 49 - 13 = 36$. Então,

$b_5 = u_5 - a_5 = 81 - 17 = 64$.

3.2.

a) $\sum_{n=1}^{15} u_n$ representa o número total de azulejos utilizados nas 15 primeiras figuras da sequência.

b) $\sum_{n=10}^{15} a_n$ representa o número de azulejos azuis utilizados em 6 figuras consecutivas da sequência a começar na 10.^a.

c) $\sum_{n=1}^7 (a_n + b_n)$ representa o número total de azulejos utilizados nas 7 primeiras figuras da sequência.

3.3.

a) $u_n = (2n - 1)^2$

b) $a_n = 4n - 3$

c) $b_n = (2n - 2)^2$

3.4. O número total de azulejos brancos utilizados em 20 figuras consecutivas a começar na 5.^a figura pode ser representado por

$$\sum_{n=5}^{24} (2n - 2)^2.$$

Pág. 134

6.1. Por exemplo, $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \sum_{i=1}^6 5$.

6.2. Por exemplo, $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{3}$.

6.3. Por exemplo, $a + a + a + a + a + a = \sum_{i=1}^7 a$.

6.4. Por exemplo, $-2 - 2 - 2 - 2 - 2 = \sum_{i=1}^5 (-2)$.

7.1. $\sum_{i=1}^{10} 6 = (10 - 1 + 1) \times 6 = 10 \times 6 = 60$

7.2. $\sum_{k=1}^{25} k = (25 - 1 + 1) \times k = 25k$

7.3. $\sum_{i=1}^{15} \frac{1}{5} = (15 - 1 + 1) \times \frac{1}{5} = 15 \times \frac{1}{5} = 3$

7.4. $\sum_{i=15}^{80} 2 = (80 - 15 + 1) \times 2 = 66 \times 2 = 132$

8.1. $\sum_{k=1}^{15} 4 = 60$ porque $60 = 15 \times 4 = (15 - 1 + 1) \times 4 = \sum_{k=1}^{15} 4$.

8.2. $\sum_{k=3}^{12} (-3) = -30$ porque $-30 = 10 \times (-3) = (12 - 3 + 1) \times (-3) =$
 $= \sum_{k=3}^{12} (-3).$

8.3. $\sum_{k=5}^{24} \frac{3}{2} = 30$ porque $30 = 20 \times \frac{3}{2} = (24 - 5 + 1) \times \frac{3}{2} = \sum_{k=5}^{24} \frac{3}{2}$.

9.1. $\sum_{i=1}^{2n+1} 3 = 57 \Leftrightarrow (2n + 1 - 1 + 1) \times 3 = 57 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2n + 1) \times 3 = 57 \Leftrightarrow 6n + 3 = 57 \Leftrightarrow 6n = 54 \Leftrightarrow n = 9$

$$9.2. \sum_{i=5}^{6n} \frac{5}{2} = 155 \Leftrightarrow (6n-5+1) \times \frac{5}{2} = 155 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (6n-4) \times \frac{5}{2} = 155 \Leftrightarrow 15n-10 = 155 \Leftrightarrow 15n = 165 \Leftrightarrow n = 11$$

$$9.3. \sum_{i=3}^{n+8} a = 18a \Leftrightarrow (n+8-3+1) \times a = 18a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (n+6) \times a = 18a \Leftrightarrow n+6 = \frac{18a}{a} \Leftrightarrow n+6 = 18 \Leftrightarrow n = 12$$

Pág. 135

$$10.1. \sum_{i=1}^{20} i = \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{3}(3i) \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{20} (3i) = \frac{1}{3} \times 630 = 210$$

$$10.2. \sum_{i=1}^{20} 5i = \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{5}{3}(3i) \right) = \frac{5}{3} \sum_{i=1}^{20} (3i) = \frac{5}{3} \times 630 = 1050$$

$$10.3. 2 \sum_{i=1}^{20} 2i = 4 \sum_{i=1}^{20} i = 4 \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{3}(3i) \right) = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{20} (3i) = \frac{4}{3} \times 630 = 840$$

$$11.1. \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2} + \sum_{i=n}^{2n} 3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i + (2n-n+1) \times 3 = \\ = \frac{1}{2} \times A + (n+1) \times 3 = \frac{A}{2} + 3n + 3$$

$$11.2. 4 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 2x_i + \sum_{i=3}^n A = 4A - 2 \sum_{i=1}^n x_i + (n-3+1) \times A = \\ = 4A - 2A + (n-2) \times A = 2A + nA - 2A = nA$$

12.1. $\sum_{i=1}^{12} 10t_i$ representa a soma das alturas, em milímetros, dos líquidos em 12 tubos de ensaio.

$$\sum_{i=1}^{12} 10t_i = 10 \sum_{i=1}^{12} t_i = 10 \times 86 = 860$$

12.2. $\sum_{i=1}^{12} 0,01t_i$ representa a soma das alturas, em metros, dos líquidos em 12 tubos de ensaio.

$$\sum_{i=1}^{12} 0,01t_i = 0,01 \sum_{i=1}^{12} t_i = 0,01 \times 86 = 0,86$$

Pág. 136

$$13.1. \sum_{i=1}^{25} (2i+3) = \sum_{i=1}^{25} 2i + \sum_{i=1}^{25} 3 = 2 \sum_{i=1}^{25} i + \sum_{i=1}^{25} 3 = \\ = 2 \times 325 + (25-1+1) \times 3 = 650 + 75 = 725$$

$$13.2. \sum_{i=1}^{25} (2i-5) = \sum_{i=1}^{25} 2i - \sum_{i=1}^{25} 5 = 2 \sum_{i=1}^{25} i - \sum_{i=1}^{25} 5 = \\ = 2 \times 325 - (25-1+1) \times 5 = 650 - 125 = 525$$

$$13.3. \sum_{i=1}^{25} \left(\frac{2i-5}{2} \right) = \sum_{i=1}^{25} \left(i - \frac{5}{2} \right) = \sum_{i=1}^{25} i - \sum_{i=1}^{25} \frac{5}{2} = \\ = 325 - (25-1+1) \times \frac{5}{2} = 325 - \frac{125}{2} = \frac{525}{2}$$

$$13.4. \sum_{i=1}^{25} (1+i)^2 - \sum_{i=1}^{25} i^2 = \sum_{i=1}^{25} [(1+i)^2 - i^2] = \\ = \sum_{i=1}^{25} (1+2i+i^2-i^2) = \sum_{i=1}^{25} (1+2i) = \sum_{i=1}^{25} 1 + 2 \sum_{i=1}^{25} i = \\ = (25-1+1) \times 1 + 2 \times 325 = 25 + 650 = 675$$

14.1. Sabe-se que $\sum_{i=1}^{35} x_i = 24$ e $\sum_{i=1}^{35} 2y_i = 30$, então tem-se:

$$\sum_{i=1}^{35} 2y_i = 30 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{35} y_i = 30 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{35} y_i = 15.$$

$$\text{Logo, } \sum_{i=1}^{35} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=1}^{35} y_i = 24 + 15 = 39$$

14.2.

$$\sum_{i=1}^{35} (2x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{35} 2x_i - \sum_{i=1}^{35} y_i = 2 \sum_{i=1}^{35} x_i - \sum_{i=1}^{35} y_i = 2 \times 24 - 15 = \\ = 48 - 15 = 33$$

$$14.3. \sum_{i=1}^{35} (2x_i + 3 + y_i) = \sum_{i=1}^{35} 2x_i + \sum_{i=1}^{35} 3 + \sum_{i=1}^{35} y_i = \\ = 2 \sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=1}^{35} 3 + \sum_{i=1}^{35} y_i = 2 \times 24 + (35-1+1) \times 3 + 15 = \\ = 48 + 105 + 15 = 168$$

$$15.1. 10 + \sum_{i=1}^{25} 2i = 25 \times \frac{10}{25} + \sum_{i=1}^{25} 2i = (25-1+1) \times \frac{2}{5} + \sum_{i=1}^{25} 2i = \\ = \sum_{i=1}^{25} \frac{2}{5} + \sum_{i=1}^{25} 2i = \sum_{i=1}^{25} \left(\frac{2}{5} + 2i \right)$$

$$15.2. 9 + \sum_{i=1}^5 (i+3) + 3 \sum_{i=1}^5 2i = 5 \times \frac{9}{5} + \sum_{i=1}^5 (i+3) + \sum_{i=1}^5 6i = \\ = (5-1+1) \times \frac{9}{5} + \sum_{i=1}^5 (i+3+6i) = \sum_{i=1}^5 \frac{9}{5} + \sum_{i=1}^5 (7i+3) \\ = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{9}{5} + 7i + 3 \right) = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{24}{5} + 7i \right)$$

Pág. 137

$$16.1. \sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_i$$

$$16.2. \sum_{i=1}^{25} x_i = \sum_{i=1}^{15} x_i + \sum_{i=16}^{20} x_i + \sum_{i=21}^{25} x_i$$

$$17.1. \sum_{i=1}^{12} 3i + \sum_{i=1}^{15} i = \sum_{i=1}^{12} 3i + \sum_{i=1}^{12} i + \sum_{i=13}^{15} i = \sum_{i=1}^{12} (3i+i) + 13+14+15 = \\ = \sum_{i=1}^{12} 4i + 42 = \sum_{i=1}^{12} 4i + 12 \times \frac{42}{12} = \sum_{i=1}^{12} 4i + \sum_{i=1}^{12} \frac{7}{2} = \sum_{i=1}^{12} \left(4i + \frac{7}{2} \right)$$

$$17.2. \sum_{i=1}^{12} 3i + \sum_{i=1}^{15} i = \sum_{i=1}^{15} 3i - \sum_{i=13}^{15} 3i + \sum_{i=1}^{15} i = \sum_{i=1}^{15} 3i - 39 - 42 - 45 + \sum_{i=1}^{15} i = \\ = \sum_{i=1}^{15} 3i + \sum_{i=1}^{15} i - 126 = \sum_{i=1}^{15} (3i+i) - 15 \times \frac{126}{15} = \\ = \sum_{i=1}^{15} 4i - \sum_{i=1}^{15} \frac{42}{5} = \sum_{i=1}^{15} \left(4i - \frac{42}{5} \right)$$

Pág. 138

Proposta 1

1.1. Por exemplo, $3+6+9+12+15+18+21+24+27=$

$$= 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 + 3 \times 6 + 3 \times 7 + 3 \times 8 + 3 \times 9 = \sum_{i=1}^9 3i.$$

1.2. Por exemplo,

$$2+5+8+11+14+17+20+23+26+29+32 = \sum_{i=1}^{11} (3i-1).$$

1.3. Por exemplo,

$$5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7+5^8+5^9+5^{10} = \sum_{i=1}^{10} 5^i.$$

1.4. Por exemplo,

$$3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+4 \times 3^4+5 \times 3^5+6 \times 3^6 = \sum_{i=1}^6 i \times 3^i.$$

1.5. Por exemplo, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} = \sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{i+2}.$

Proposta 2

2.1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sum_{i=1}^5 (3i-2) &= \\ &= (3 \times 1 - 2) + (3 \times 2 - 2) + (3 \times 3 - 2) + (3 \times 4 - 2) + (3 \times 5 - 2) = \\ &= 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{2}{i+1} \right) &= \frac{2}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{3+1} + \frac{2}{4+1} = \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{30}{30} + \frac{20}{30} + \frac{15}{30} + \frac{12}{30} = \frac{77}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \sum_{k=1}^6 2(-1)^{k+1} &= \\ &= 2(-1)^{1+1} + 2(-1)^{2+1} + 2(-1)^{3+1} + 2(-1)^{4+1} + 2(-1)^{5+1} + 2(-1)^{6+1} = \\ &= 2(-1)^2 + 2(-1)^3 + 2(-1)^4 + 2(-1)^5 + 2(-1)^6 + 2(-1)^7 = \\ &= 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

2.2.

$$\text{a)} \sum_{k=1}^3 (2k-3) = (2 \times 1 - 3) + (2 \times 2 - 3) + (2 \times 3 - 3) = -1 + 1 + 3 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sum_{k=24}^{25} (2k-3) &= (2 \times 24 - 3) + (2 \times 25 - 3) + (2 \times 3 - 3) = \\ &= 45 + 47 = 92 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \sum_{k=5}^7 (2k-3) = (2 \times 5 - 3) + (2 \times 6 - 3) + (2 \times 7 - 3) = 7 + 9 + 11 = 27$$

Proposta 3

3.1. O primeiro termo da sequência é 4 e qualquer um dos termos é igual a um múltiplo de 5 menos 1.

Assim, o termo de ordem n é igual a $5n-1$.

3.2.

a) A sequência é constituída por 11 termos.

A soma dos termos da sequência pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^{11} (5n-1).$$

b) A soma dos sete primeiros termos da sequência pode ser

$$\text{representada por } \sum_{n=1}^7 (5n-1).$$

c) A soma dos últimos seis termos da sequência pode ser

$$\text{representada por } \sum_{n=6}^{11} (5n-1).$$

Proposta 4

4.1. $6+7+8+9+10=$

$$= (2+4) + (3+4) + (4+4) + (5+4) + (6+4) = \sum_{i=2}^6 (i+4)$$

4.2. $16+22+28+34+40=$

$$\begin{aligned} &= (6 \times 6 - 20) + (6 \times 7 - 20) + (6 \times 8 - 20) + (6 \times 9 - 20) + (6 \times 10 - 20) \\ &= \sum_{i=6}^{10} (6i - 20) \end{aligned}$$

4.3. $15+19+23+27+31=$

$$\begin{aligned} &= (4 \times 3 + 3) + (4 \times 4 + 3) + (4 \times 5 + 3) + (4 \times 6 + 3) + (4 \times 7 + 3) \\ &= \sum_{i=3}^7 (4i + 3) \end{aligned}$$

Pág. 139

Proposta 5

5.1.

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{30} i = \frac{(1+30) \times 30}{2} = 465$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sum_{i=1}^{42} (3+i) &= \sum_{i=1}^{42} 3 + \sum_{i=1}^{42} i = (42-1+1) \times 3 + \frac{(1+42) \times 42}{2} = \\ &= 126 + 903 = 1029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \sum_{i=1}^{36} (2i-1) &= \sum_{i=1}^{36} 2i - \sum_{i=1}^{36} 1 = 2 \sum_{i=1}^{36} i - \sum_{i=1}^{36} 1 = \\ &= 2 \times \frac{(1+36) \times 36}{2} - (36-1+1) \times 1 = 1332 - 36 = 1296 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \sum_{i=15}^{50} i &= \sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{14} i = \frac{(1+50) \times 50}{2} - \frac{(1+14) \times 14}{2} = \\ &= 1275 - 105 = 1170 \end{aligned}$$

$$\text{5.2. } \sum_{i=1}^n i = 120 \Leftrightarrow \frac{(1+n) \times n}{2} = 120 \Leftrightarrow \frac{n+n^2}{2} = 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+960}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 31}{2} \Leftrightarrow n = 15 \vee n = -16$$

Como $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $n = 15$.

Assim sendo, o somatório tem 15 parcelas $(15-1+1)$.

Proposta 6

$$6.1. \sum_{i=1}^{75} (x_i^2 + 2x_i) = \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + \sum_{i=1}^{75} 2x_i = \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{75} x_i = b + 2a$$

$$6.2. \sum_{i=1}^{75} (x_i + 2)^2 = \sum_{i=1}^{75} (x_i^2 + 4x_i + 4) = \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + \sum_{i=1}^{75} 4x_i + \sum_{i=1}^{75} 4 = \\ = \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + 4 \sum_{i=1}^{75} x_i + \sum_{i=1}^{75} 4 = b + 4a + (75 - 1 + 1) \times 4 = b + 4a + 300$$

$$6.3. \sum_{i=1}^{75} [(x_i - 2)(x_i + 2)] = \sum_{i=1}^{75} (x_i^2 - 4) = \sum_{i=1}^{75} x_i^2 - \sum_{i=1}^{75} 4 = \\ = b - (75 - 1 + 1) \times 4 = b - 300$$

$$6.4. \sum_{i=1}^{75} (2x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{75} (4x_i^2 - 4x_i + 1) = \sum_{i=1}^{75} 4x_i^2 - \sum_{i=1}^{75} 4x_i + \sum_{i=1}^{75} 1 = \\ = 4 \sum_{i=1}^{75} x_i^2 - 4 \sum_{i=1}^{75} x_i + \sum_{i=1}^{75} 1 = 4b - 4a + (75 - 1 + 1) \times 1 = 4b - 4a + 75$$

$$6.5. \sum_{i=1}^{75} \left(\frac{x_i + 1}{2} \right)^2 = \sum_{i=1}^{75} \left(\frac{x_i^2 + 2x_i + 1}{4} \right) = \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{4} x_i^2 + \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{2} x_i + \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{4} = \\ = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{75} x_i + \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} b + \frac{1}{2} a + (75 - 1 + 1) \times \frac{1}{4} = \\ = \frac{b + 2a + 75}{4}$$

$$6.6. \sum_{i=1}^{75} [(3x_i + 1)^2 - 2x_i^2] = \sum_{i=1}^{75} (9x_i^2 + 6x_i + 1 - 2x_i^2) = \\ = \sum_{i=1}^{75} (7x_i^2 + 6x_i + 1) = \sum_{i=1}^{75} 7x_i^2 + \sum_{i=1}^{75} 6x_i + \sum_{i=1}^{75} 1 = \\ = 7 \sum_{i=1}^{75} x_i^2 + 6 \sum_{i=1}^{75} x_i + \sum_{i=1}^{75} 1 = 7b + 6a + 75$$

Proposta 7

$$7.1. 45 + \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{2} \right) = 20 \times \frac{45}{20} + \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{2} \right) = \sum_{k=1}^{20} \frac{45}{20} + \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2} = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{9}{4} + \frac{k}{2} \right)$$

$$7.2. \sum_{i=1}^{23} i^2 + \sum_{i=24}^{50} i^2 - \sum_{i=1}^{50} (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - \sum_{i=1}^{50} (i^2 + 2i + 1) = \\ = \sum_{i=1}^{50} [i^2 - (i^2 + 2i + 1)] = \sum_{i=1}^{50} (-2i - 1)$$

$$7.3. \sum_{k=1}^{15} (2k) + 2 \sum_{k=16}^{47} (1+k) = \sum_{k=1}^{15} (2k) + \sum_{k=16}^{47} (2+2k) = \\ = \sum_{k=1}^{15} (2k) + \sum_{k=16}^{47} (2k) + \sum_{k=16}^{47} (2) = \sum_{k=1}^{47} (2k) + (47 - 16 + 1) \times 2 = \\ = \sum_{k=1}^{47} (2k) + 64 = \sum_{k=1}^{47} (2k) + 47 \times \frac{64}{47} = \\ = \sum_{k=1}^{47} (2k) + \sum_{k=1}^{47} \left(\frac{64}{47} \right) = \sum_{k=1}^{47} \left(2k + \frac{64}{47} \right)$$

Proposta 8

8.1. O número de bolas da figura de ordem 10 é igual a

$$\frac{10(10+1)}{2}, \text{ ou seja, } 55.$$

8.2. O número de bolas que são utilizadas para construir as 10

primeiras figuras pode ser representado por $\sum_{i=1}^{10} \frac{i(i+1)}{2}$.

$$8.3. \frac{n(n+1)}{2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n = 156 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+624}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 25}{2} \Leftrightarrow n = 12 \vee n = -13$$

Como $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $n = 12$.

Assim sendo, a sequência construída pela Rita tinha 12 figuras.

O número total de bolas utilizadas pela Rita pode ser

representado por $\sum_{i=1}^{12} \frac{i(i+1)}{2}$.

8.4. Se a soma do número das bolas que formam o último termo

é igual a $\sum_{i=1}^{120} 3$, então o último termo tem 120 bolas.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 120 \Leftrightarrow n^2 + n = 240 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+960}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 31}{2} \Leftrightarrow n = 15 \vee n = -16$$

Como $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $n = 15$.

Assim sendo, a sequência tem 15 termos.

Proposta 9

9.1.

a) O termo geral da sequência dos números naturais múltiplos de 5 é $5n$.

O maior número natural múltiplo de 5 e inferior a 100 é o 95.

$$5n = 95 \Leftrightarrow n = \frac{95}{5} \Leftrightarrow n = 19$$

Então, $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 85 + 90 + 95 = \sum_{i=1}^{19} 5i$.

b) A soma dos múltiplos de 4 compreendidos entre 15 e 82 pode ser representada por:

$$16 + 20 + 24 + 28 + \dots + 72 + 76 + 80 = \sum_{i=4}^{20} 4i.$$

9.2.

a) O termo geral da sequência dos números naturais múltiplos de 3 é $3n$.

$$20 < 3n < 110 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{20}{3} < n < \frac{110}{3} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in \{7, 8, 9, \dots, 35, 36\}$$

Então, a sequência tem 30 termos $(36 - 7 + 1)$.

b) $21 + 24 + 27 + 30 + \dots + 102 + 105 + 108 = \sum_{i=3}^{32} (3i + 12)$

Proposta 10

10.1. $A = \sum_{k=1}^{20} 2k + \sum_{k=1}^{20} 3k = \sum_{k=1}^{20} (2k + 3k) = \sum_{k=1}^{20} 5k$

10.2.

a) $A = \sum_{i=1}^{20} 5i = \sum_{i=1}^{11} 5i + \sum_{i=12}^{15} 5i + \sum_{i=16}^{20} 5i$

b) $A = \sum_{i=1}^{20} 5i = \sum_{i=1}^1 5i + \sum_{i=2}^{10} 5i + \sum_{i=11}^{20} 5i = 5 + \sum_{i=2}^{10} 5i + \sum_{i=11}^{20} 5i$

Pág. 141

Proposta 11

11.1. O termo geral da sequência dos números naturais múltiplos de 3 é $3n$.

O maior número natural múltiplo de 3 e inferior a 50 é o 48.

$$3n = 48 \Leftrightarrow n = \frac{48}{3} \Leftrightarrow n = 16$$

Então, $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 42 + 45 + 48 = \sum_{i=1}^{16} 3i = 3 \sum_{i=1}^{16} i =$

$$= 3 \times \frac{(1+16) \times 16}{2} = 408.$$

11.2. $12 + 14 + 16 + 18 + \dots + 70 + 72 + 74 = \sum_{i=6}^{37} 2i = \sum_{i=1}^{37} 2i - \sum_{i=1}^5 2i =$

$$= 2 \sum_{i=1}^{37} i - 2 \sum_{i=1}^5 i = 2 \times \frac{(1+37) \times 37}{2} - 2 \times \frac{(1+5) \times 5}{2} = 1406 - 30 = 1376$$

Proposta 12

$$A = 3 + \sum_{i=3}^{15} (2i+1) = 3 + \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - \sum_{i=1}^2 (2i+1) =$$

$$= 3 + \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - (2 \times 1 + 1) - (2 \times 2 + 1) =$$

$$= 3 + \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - 3 - 5 = \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - 5 = \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - 15 \times \frac{5}{15} =$$

$$= \sum_{i=1}^{15} (2i+1) - \sum_{i=1}^{15} \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{15} \left(2i + 1 - \frac{1}{3} \right) = \sum_{i=1}^{15} \left(2i + \frac{2}{3} \right)$$

Proposta 13

$$\begin{aligned} 13.1. \sum_{i=1}^8 i^2 + \sum_{i=8}^{20} i^2 &= \sum_{i=1}^8 i^2 + \sum_{i=8}^8 i^2 + \sum_{i=9}^{20} i^2 = \sum_{i=1}^8 i^2 + 8^2 + \sum_{i=9}^{20} i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^8 i^2 + \sum_{i=9}^{20} i^2 + 64 = \sum_{i=1}^{20} i^2 + 20 \times \frac{64}{20} = \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} \frac{64}{20} = \\ &= \sum_{i=1}^{20} \left(i^2 + \frac{64}{20} \right) = \sum_{i=1}^{20} \left(i^2 + \frac{16}{5} \right) \end{aligned}$$

13.2. A soma dos primeiros 100 números múltiplos de a é

representada por $\sum_{i=1}^{100} ai$, a soma dos primeiros 100 números

múltiplos de b é representada por $\sum_{i=1}^{100} bi$ e a soma dos primeiros

100 números múltiplos de $a+b$ é representada por

$$\sum_{i=1}^{100} [(a+b)i].$$

$$\sum_{i=1}^{100} ai + \sum_{i=1}^{100} bi = \sum_{i=1}^{100} (ai+bi) = \sum_{i=1}^{100} [(a+b)i].$$

Proposta 14

14.1. $\sum_{k=1}^{20} [(k-3)(k+3)] = \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 9) = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} 9 =$

$$= \frac{20 \times (20+1) \times (2 \times 20 + 1)}{6} - (20 - 1 + 1) \times 9 =$$

$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 20 \times 9 = 2870 - 180 = 2690$$

14.2. $10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 25^2 =$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) = \sum_{k=1}^{25} k^2 - \sum_{k=1}^9 k^2 =$$

$$= \frac{25 \times (25+1) \times (2 \times 25 + 1)}{6} - \frac{9 \times (9+1) \times (2 \times 9 + 1)}{6} =$$

$$= 5525 - 285 = 5240$$

Proposta 15

Repara que a soma começa no 4.º termo da sequência.

Assim, tem-se:

$$\sum_{n=4}^{15} 8(n-3)$$

Pág. 142

18. As questões que fazem parte do questionário e que estão

associadas a variável estatística quantitativa são as **A, C e D**

porque podem ser avaliadas (medidas) e traduzidas através de números.

Pág. 143

$$19. \text{Luís: } \bar{x} = \frac{3+5+2+3+1+4+6+5}{8} = \frac{29}{8} = 3,625$$

$$\text{Rita: } \bar{x} = \frac{5+1+1+6+1+2+6+3}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

$$\text{Tiago: } \bar{x} = \frac{2+5+4+6+6+1+2+3}{8} = \frac{29}{8} = 3,625$$

20.1. Atendendo à distribuição das idades dos 160 alunos, sabe-se que:

$$22 + y + 30 + 12 = 160 \Leftrightarrow y = 160 - 64 \Leftrightarrow y = 96$$

Então, há 96 alunos com 15 anos de idade.

$$20.2. \bar{x} = \frac{22 \times 14 + 96 \times 15 + 30 \times 16 + 12 \times 17}{160} = \frac{2432}{160} = 15,2$$

A média das idades dos 160 alunos é de 15,2 anos.

Pág. 144

21.1.

$\tilde{x}_i$	n_i
1	2
2	4
3	2
4	3
5	1

$$21.2. \bar{x} = \frac{2 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4}{12} = \frac{33}{12} = 2,75$$

A média da amostra $\tilde{x}$ é 2,75.

$$22.1. 13 + 24 + 9 + 7 + 3 + 2 = 58$$

Dirigiram-se à bilheteira 58 pessoas.

$$22.2. 13 \times 1 + 24 \times 2 + 9 \times 3 + 7 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times 6 = 143$$

No total foram comprados 143 bilhetes.

$$22.3. \bar{x} = \frac{143}{58} \approx 2,5$$

Em média, cada pessoa comprou 2,5 bilhetes.

Pág. 145

$$23.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{13+15+17+18+15}{5} = \frac{78}{5} = 15,6$$

A média aritmética das classificações obtidas é de 15,6.

23.2.

a) Designemos por a a classificação que a Rita deverá ter na última ficha.

A média das classificações obtidas passa a ser 16 se:

$$\frac{13+15+17+18+15+a}{6} = 16 \Leftrightarrow \frac{78+a}{6} = 16 \Leftrightarrow 78+a=96 \Leftrightarrow a=18$$

A Rita deverá ter a classificação de 18 nessa ficha.

b) Se a média das classificações obtidas passa a ser 17 então:

$$\frac{13+15+17+18+15+a}{6} = 17 \Leftrightarrow \frac{78+a}{6} = 17 \Leftrightarrow 78+a=102 \Leftrightarrow a=24$$

A afirmação é verdadeira. Para ficar com média de 17 a Rita teria de obter classificação 24 na última ficha, o que é impossível.

24.1. Relativamente a cada jogador fez-se o registo do número de jogos do torneiro em que participou. Como há 15 registos, conclui-se que da equipa fazem parte 15 jogadores.

24.2. Organizando os dados numa tabela de frequências absolutas, tem-se:

$\tilde{x}_i$	n_i
0	1
1	1
2	2
5	2
8	9

$$\text{Então, } \bar{x} = \frac{1 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 5 + 9 \times 8}{15} = \frac{87}{15} = 5,8.$$

Cada jogador participou em média em 5,8 jogos.

Tarefa 2

1.1. Seja n a dimensão da amostra.

$$n = 4 + 7 + 4 + 9 + 5 = 29$$

A amostra tem dimensão 29.

$$1.2. 4 \times 0,10 + 7 \times 0,20 + 4 \times 0,50 + 9 \times 1 + 5 \times 2 = 22,80$$

As moedas retiradas do mealheiro têm o valor de 22,80 €. Esse valor não é suficiente para comprar o livro, pois este custa 25 €.

$$1.3. \bar{x} = \frac{22,80}{29} \approx 0,79$$

Em média, o valor de cada uma das moedas retiradas do mealheiro é de, aproximadamente, 0,79 €.

2.1. A amostra tem dimensão 10 pois é constituída por 10 elementos e toma seis valores distintos, a saber 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

2.2.

$\tilde{x}_i$	n_i
2	1
3	3
4	1
5	3
6	1
7	1

$$2.3. \bar{x} = \frac{1 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 5 + 1 \times 6 + 1 \times 7}{10} = \frac{43}{10} = 4,3$$

2.4. Sobre a amostra y , sabe-se que $y_i = 3x_i$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Então, $y = (9, 15, 9, 12, 21, 18, 6, 9, 15, 15)$.

$$\bar{y} = \frac{1 \times 6 + 3 \times 9 + 1 \times 12 + 3 \times 15 + 1 \times 18 + 1 \times 21}{10} = \frac{129}{10} = 12,9$$

Como $\bar{x} = 4,3$ e $\bar{y} = 12,9$, conclui-se que $\bar{y} = 3\bar{x}$.

2.5. Sobre a amostra z , sabe-se que

$$z_i = (2x_i + 1), i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}.$$

Então, $z = (7, 11, 7, 9, 15, 13, 5, 7, 11, 11)$.

$$\bar{z} = \frac{1 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 9 + 3 \times 11 + 1 \times 13 + 1 \times 15}{10} = \frac{96}{10} = 9,6$$

Como $\bar{x} = 4,3$ e $\bar{z} = 9,6$, conclui-se que $\bar{z} = 2\bar{x} + 1$.

Pág. 147

$$25. \bar{x} = \frac{32 \times 10,3 + 25 \times 15,2 + 17 \times 13,4}{32 + 25 + 17} = \frac{937,4}{74} \approx 12,7$$

A classificação média conjunta das três turmas é de, aproximadamente, 12,7.

$$26.1. \bar{x} = \frac{3 \times 14 + 8 \times 15 + 7 \times 16 + 2 \times 17}{3 + 8 + 7 + 2} = \frac{308}{20} = 15,4$$

A média das idades dos alunos na turma do 10.º ano era de 15,4 anos.

26.2. Atendendo a uma propriedade da média, sabe-se que a média das idades dos alunos na turma do 12.º ano, isto é, passados 2 anos, é de 17,4 anos $(14,4 + 3)$.

$$27.1. \bar{x} = \frac{1 \times 50 + 6 \times 80 + 3 \times 110 + 2 \times 140}{1 + 6 + 3 + 2} = \frac{1140}{12} = 95$$

Em média, cada funcionário recebeu um prémio no valor de 95 €.

27.2. Seja $\bar{y}$ a média dos prémios se estes tivessem um aumento de 20 € e um suplemento de 5 €.

$$\bar{y} = 1,20\bar{x} + 5 = 1,20 \times 95 + 5 = 119.$$

O valor da média seria de 119 €.

Pág. 149

28. Como a turma é constituída por 25 alunos e a média das classificações é igual a 11, sabe-se que a soma das classificações iniciais é dada por $11 \times 25 = 275$.

Após a retificação do engano, a soma das classificações passou a ser dada por $275 - 5 + 15 = 285$.

A média das classificações retificadas passou a ser: $\frac{285}{25} = 11,4$.

29.1. Seja $\bar{x}$ a média das classificações atribuídas inicialmente e $\bar{y}$ a média das classificações finais.

Sabe-se que $\bar{y} = 0,8\bar{x} + 1 = 0,8 \times 10,5 + 1 = 9,4$.

A média após as alterações foi igual a 9,4.

$$29.2. C_F > C_A \Leftrightarrow 0,85C_A + 1 > C_A \Leftrightarrow 0,8C_A - C_A > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2C_A > -1 \Leftrightarrow C_A < \frac{1}{0,2} \Leftrightarrow C_A < 5$$

A alteração foi vantajosa para classificações inferiores a 5.

Pág. 150

30.1. A amplitude do conjunto de dados é a diferença entre o valor máximo do conjunto de dados (neste caso, 10:25) e o valor mínimo do conjunto de dados (neste caso, 1:35).

$$10:25 - 1:35 = 9:85 - 1:35 = 8:50.$$

Assim sendo, a amplitude do conjunto de dados é igual a 8:50.

30.2.

a) Vamos começar por determinar o valor da média das últimas oito chamadas efetuadas pela Joana.

$$\bar{x} = \frac{2:00 + 8:20 + 3:15 + 5:15 + 10:25 + 4:00 + 6:30 + 1:35}{8} = \frac{39:140}{8} = \frac{40:80}{8} = 5:10$$

O desvio em relação à média da chamada com a duração de 3:15 é dado por:

$$3:15 - 5:10 = 3:15 - 4:70 = -1:55.$$

b) O desvio em relação à média da chamada com a duração de 6:30 é dado por:

$$6:30 - 5:10 = 1:20.$$

Pág. 151

$$31.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{5 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 2 + 4}{8} = \frac{30}{8} = 3,75$$

31.2.

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
5	$5 - 3,75 = 1,25$	$1,25^2 = 1,5625$
1	$1 - 3,75 = -2,75$	$(-2,75)^2 = 7,5625$
3	$3 - 3,75 = -0,75$	$(-0,75)^2 = 0,5625$
4	$4 - 3,75 = 0,25$	$0,25^2 = 0,0625$
5	$5 - 3,75 = 1,25$	$1,25^2 = 1,5625$
6	$6 - 3,75 = 2,25$	$2,25^2 = 5,0625$
2	$2 - 3,75 = -1,75$	$(-1,75)^2 = 3,0625$
4	$4 - 3,75 = 0,25$	$0,25^2 = 0,0625$
		$SS_x = 19,5$

Pág. 152

$$32.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{7 + 5 + 2 + 4 + 3 + 1}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$32.2. SS_x = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2 =$$

$$= (7^2 + 5^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2) - 6 \times \left(\frac{11}{3}\right)^2 =$$

$$= (49 + 25 + 4 + 16 + 9 + 1) - 6 \times \frac{121}{9} = 104 - \frac{242}{3} = \frac{70}{3}$$

$$33. SS_y = \sum_{i=1}^{20} y_i^2 - 20\bar{y}^2 = 2500 - 20 \times 8^2 = 2500 - 1280 = 1220$$

Pág. 153

34.1.

$$a) d_3 = x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow 2,5 = 7,5 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 7,5 - 2,5 \Leftrightarrow \bar{x} = 5$$

b) $d_1 = x_1 - \bar{x} = 7 - 5 = 2$ e

$d_4 = -d_1 - d_2 - d_3 = -2 - (-1,5) - 2,5 = -3$ porque a soma dos desvios é nula.

34.2. $x_1 = 7$, $x_3 = 7,5$, $x_2 = d_2 + \bar{x} = -1,5 + 5 = 3,5$ e

$x_4 = d_4 + \bar{x} = -3 + 5 = 2$.

Então, $x_{(1)} = 2$, $x_{(2)} = 3,5$, $x_{(3)} = 7$ e $x_{(4)} = 7,5$.

Assim sendo, a amostra ordenada é $(2; 3,5; 7; 7,5)$.

Tarefa 3

1.1.

a) $\sum_{i=1}^5 d_i = 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 - 7 + 1 + d_4 - 13 = 0 \Leftrightarrow d_4 = 5$

b) $\sum_{i=1}^5 d_i^2 = 14^2 + (-7)^2 + 1^2 + 5^2 + (-13)^2 =$

$= 196 + 49 + 1 + 25 + 169 = 440$

1.2.

a) $d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = x_2 - d_2 \Leftrightarrow \bar{x} = 54 - (-7) \Leftrightarrow \bar{x} = 61$

b) $x_1 = d_1 + \bar{x} = 14 + 61 = 75$, $x_2 = 54$, $x_3 = d_3 + \bar{x} = 1 + 61 = 62$,

$x_4 = d_4 + \bar{x} = 5 + 61 = 66$ e $x_5 = d_5 + \bar{x} = -13 + 61 = 48$.

Então, $\underline{x} = (75, 54, 62, 66, 48)$.

2.1. x_i : Temperatura mínima observada no dia i ,

$i \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$.

$d_3 = x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow 1,5 = x_3 - 2,5 \Leftrightarrow x_3 = 4$

A temperatura mínima observada no dia 3 foi de 4 °C.

2.2. $d_1 = x_1 - \bar{x} = 4 - 2,5 = 1,5$; $d_2 = x_2 - \bar{x} = 1 - 2,5 = -1,5$;

$d_3 = 1,5$; $d_4 = x_4 - \bar{x} = 2 - 2,5 = -0,5$;

$d_5 = x_5 - \bar{x} = -1 - 2,5 = -3,5$; $d_6 = x_6 - \bar{x} = 3 - 2,5 = 0,5$;

$d_7 = x_7 - \bar{x} = 2 - 2,5 = -0,5$.

Como a soma dos desvios em relação à média é igual a zero, conclui-se que:

$d_8 = -\sum_{i=1}^7 d_i = -(1,5 - 1,5 + 1,5 - 0,5 - 3,5 + 0,5 - 0,5) = 2,5$.

Pág. 154

35.1. Se $\underline{y} = \underline{x} + 2$, então $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 5,6 + 2 = 7,6$ e

$SS_y = SS_x = 29,2$.

35.2. Se $\underline{y} = 0,1\underline{x}$, então $\bar{y} = 0,1\bar{x} = 0,1 \times 5,6 = 0,56$ e

$SS_y = 0,1^2 SS_x = 0,01 \times 29,2 = 0,292$.

35.3. Se $\underline{y} = 100\underline{x}$, então $\bar{y} = 100\bar{x} = 100 \times 5,6 = 560$ e

$SS_y = 100^2 SS_x = 10\,000 \times 29,2 = 292\,000$.

36.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{27 + 18 + 35 + 12 + 28}{5} = \frac{120}{5} = 24$.

$SS_x = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 =$

$= (27 - 24)^2 + (18 - 24)^2 + (35 - 24)^2 + (12 - 24)^2 + (28 - 24)^2 =$

$= 9 + 36 + 121 + 144 + 16 = 326$

36.2. A Francisca comprou cinco artigos todos com 20% de desconto.

Então, $\underline{x} = 0,8\underline{y}$. Donde se conclui que $\underline{y} = 1,25\underline{x}$.

Assim sendo, $\bar{y} = 1,25\bar{x} = 1,25 \times 24 = 30$ e

$SS_y = 1,25^2 SS_x = 1,5625 \times 326 = 509,375$.

36.3. $\underline{z} = 0,6\underline{x} = (25,2; 15,6; 21; 9; 16,2)$.

Então, $\bar{z} = \frac{25,2 + 15,6 + 21 + 9 + 16,2}{5} = 17,4$

$SS_z = (25,2 - 17,4)^2 + (15,6 - 17,4)^2 + (21 - 17,4)^2$

$+ (9 - 17,4)^2 + (16,2 - 17,4)^2 = 149,04$

Pág. 155

Tarefa 4

1.1. Suponhamos que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = a$, então $\bar{x} = a$ e

$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = a - a = 0$.

Donde se conclui que $SS_x = \sum_{i=1}^4 d_i^2 = 0$.

1.2. $SS_x = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 d_i^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2 = 0, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\Leftrightarrow x_i - \bar{x} = 0, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow x_i = \bar{x}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Afirmar que $x_i = \bar{x}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, é o mesmo que dizer que a amostra é constante.

2.1. Sendo 10 o valor mínimo e 16 o valor máximo de uma amostra, então é possível que $\bar{x} = 12$. Basta considerar a amostra $\underline{x} = (15, 16, 13, 11, 10, 10, 13, 11, 11, 10)$.

De facto, tem-se: $\bar{x} = \frac{15 + 16 + 13 \times 2 + 11 \times 3 + 10 \times 3}{10} = \frac{120}{10} = 12$.

2.2. Não é possível ter-se $SS_x = 0$. Se a soma dos quadrados dos desvios em relação à média é nula, então a amostra é constante (o que não acontece neste caso pois o valor mínimo é diferente do valor máximo).

2.3. Como todos os elementos da amostra $\underline{y}$ são iguais a 12, sabe-se que $\bar{y} = 12$ e $SS_y = 0$.

Pág. 156

37.1. Seja $\tilde{x}$ a amostra constituída pelas temperaturas mínimas.

Representando por $\tilde{x}_j$ os valores da amostra e por n_j a respetiva frequência absoluta, vamos organizar os dados numa tabela de frequências absolutas e calcular a soma dos quadrados dos desvios em relação à média.

$\tilde{x}_j$	n_j	$\tilde{x}_j n_j$	$(\tilde{x}_j - \bar{x})^2 \times n_j$
-2	1	-2	$(-2 - 5,95)^2 \times 1$
1	2	2	$(1 - 5,95)^2 \times 2$
3	1	3	$(3 - 5,95)^2 \times 1$
4	4	16	$(4 - 5,95)^2 \times 4$
5	4	20	$(5 - 5,95)^2 \times 4$
6	3	18	$(6 - 5,95)^2 \times 3$
7	1	7	$(7 - 5,95)^2 \times 1$
13	1	13	$(13 - 5,95)^2 \times 1$
14	3	42	$(14 - 5,95)^2 \times 3$
$\sum_{j=1}^9 \tilde{x}_j n_j = 119$		$\sum_{j=1}^9 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = 384,95$	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^9 \tilde{x}_j n_j}{20} = \frac{119}{20} = 5,95$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^9 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = 384,95$$

37.2. Seja $\tilde{y}$ a amostra constituída pelas temperaturas máximas.

Representando por $\tilde{y}_j$ os valores da amostra e por n_j a respetiva frequência absoluta, vamos organizar os dados numa tabela de frequências absolutas e calcular a soma dos quadrados dos desvios em relação à média.

$\tilde{y}_j$	n_j	$\tilde{y}_j n_j$	$(\tilde{y}_j - \bar{y})^2 \times n_j$
8	2	16	$(8 - 14,4)^2 \times 2$
12	2	24	$(12 - 14,4)^2 \times 2$
13	2	26	$(13 - 14,4)^2 \times 2$
14	2	28	$(14 - 14,4)^2 \times 2$
15	4	60	$(15 - 14,4)^2 \times 4$
16	4	64	$(16 - 14,4)^2 \times 4$
17	2	34	$(17 - 14,4)^2 \times 2$
18	2	36	$(18 - 14,4)^2 \times 2$
$\sum_{j=1}^8 \tilde{y}_j n_j = 288$		$\sum_{j=1}^8 (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = 148,8$	

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^8 \tilde{y}_j n_j}{20} = \frac{288}{20} = 14,4$$

$$SS_y = \sum_{j=1}^8 (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = 148,8$$

Pág. 157

$$38.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{12+8+3+5+6+8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = \frac{10+9+3+6+4+7}{6} = \frac{39}{6} = 6,5$$

$$38.2. SS_x = \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = (12-7)^2 + (8-7)^2 + (3-7)^2 + (5-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 = 25+1+16+4+1+1=48$$

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{48}{5} = 9,6$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = (10-6,5)^2 + (9-6,5)^2 + (3-6,5)^2 + (6-6,5)^2 + (4-6,5)^2 + (7-6,5)^2 = 12,25+6,25+12,25+0,25+6,25+0,25=37,5$$

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} = \frac{37,5}{5} = 7,5$$

$$38.3. s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{9,6} \approx 3,10 \text{ e } s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{7,5} \approx 2,74.$$

Pág. 158

39. Recorrendo à calculadora gráfica começa-se por inserir os valores da amostra numa lista e os respetivos valores das frequências noutra lista, seguindo os seguintes procedimentos:

STAT – EDIT – 1:Edit

Em seguida obtêm-se os cálculos estatísticos.

STAT – CALC – 1: 1-Vars Stats – L1,L2 – ENTER

L1	L2	L3	1
10.2			1-Var Stats
10.9			$\bar{x}=9.957142857$
11			$\Sigma x=139.4$
10.8			$\Sigma x^2=1401.58$
10.4			$Sx=1.021096157$
10.4			$\sigma x=.9839528776$
10			$\downarrow n=14$
L1(L)=11.7			

Conclui-se que $\bar{x} \approx 9,96$ e $s_x \approx 1,02$.

Pág. 159

$$40.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 x_i = 6 \times 12,8 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 x_i = 76,8$$

$$40.2. s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} \Leftrightarrow SS_x = (6-1) \times 5,76 \Leftrightarrow SS_x = 28,8$$

$$40.3. s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{5,76} = 2,4$$

$$41.1. \text{ Se } y = x + 0,25, \text{ então } s_y = s_x = 1,2.$$

$$41.2. \text{ Se } y = 0,25x, \text{ então}$$

$$s_y = |0,25| s_x = 0,25 s_x = 0,25 \times 1,2 = 0,3.$$

$$41.3. \text{ Se } y = -0,16x, \text{ então}$$

$$s_y = |-0,16| s_x = 0,16 s_x = 0,16 \times 1,2 = 0,192.$$

Tarefa 5

1.1.

$$a) \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^4 \tilde{x}_j n_j}{10} = \frac{15 \times 3 + 20 \times 3 + 25 \times 2 + 30 \times 2}{10} = \frac{215}{10} = 21,5 \text{ min}$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^4 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (15 - 21,5)^2 \times 3 + (20 - 21,5)^2 \times 3 + (25 - 21,5)^2 \times 2 + (30 - 21,5)^2 \times 2 = 302,5$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{302,5}{9}} = \sqrt{\frac{605}{18}} \text{ min}$$

$$b) \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^4 \tilde{y}_j n_j}{10} = \frac{20 \times 3 + 25 \times 3 + 30 \times 2 + 35 \times 2}{10} = \frac{265}{10} = 26,5 \text{ min}$$

$$SS_y = \sum_{j=1}^4 (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = (25 - 26,5)^2 \times 3 + (25 - 26,5)^2 \times 3 + (30 - 26,5)^2 \times 2 + (35 - 26,5)^2 \times 2 = 302,5$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{302,5}{9}} = \sqrt{\frac{605}{18}} \text{ min}$$

$$c) \bar{z} = \frac{\sum_{j=1}^4 \tilde{z}_j n_j}{10} = \frac{18 \times 3 + 24 \times 3 + 30 \times 2 + 36 \times 2}{10} = \frac{258}{10} = 25,8 \text{ min}$$

$$SS_z = \sum_{j=1}^4 (\tilde{z}_j - \bar{z})^2 n_j = (18 - 25,8)^2 \times 3 + (24 - 25,8)^2 \times 3 + (30 - 25,8)^2 \times 2 + (36 - 25,8)^2 \times 2 = 435,6$$

$$s_z = \sqrt{\frac{SS_z}{n-1}} = \sqrt{\frac{435,6}{9}} = \sqrt{\frac{242}{5}} \text{ min}$$

1.2.

a) Comparando s_y e s_x , conclui-se que $s_y = s_x$.

b) Comparando s_z e s_x , conclui-se que $s_z = 1,2 s_x$.

Pág. 160

42.1. x: classificações obtidas pelos alunos da versão 1 do teste

$\tilde{x}_i$	n_i
8	3
9	1
10	3
11	1
12	2
15	3

y: classificações obtidas pelos alunos da versão 2 do teste

$\tilde{y}_i$	n_i
6	2
7	1
8	1
10	3
12	1
14	1
15	1
17	2

42.2.

$$a) \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^6 \tilde{x}_j n_j}{13} = \frac{8 \times 3 + 9 \times 1 + 10 \times 3 + 11 \times 1 + 12 \times 2 + 15 \times 3}{13} = \frac{143}{13} = 11$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^8 \tilde{y}_j n_j}{13} = \frac{6 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 10 \times 3 + 12 \times 1 + 14 \times 1}{13} + \frac{15 \times 1 + 17 \times 2}{13} = \frac{143}{13} = 11$$

Então, $\bar{x} = \bar{y} = 11$.

$$b) SS_x = \sum_{j=1}^6 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (8 - 11)^2 \times 3 + (9 - 11)^2 \times 1 + (10 - 11)^2 \times 3 + (11 - 11)^2 \times 1 + (12 - 11)^2 \times 2 + (15 - 11)^2 \times 3 = 84$$

$$SS_y = \sum_{j=1}^8 (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = (6 - 11)^2 \times 2 + (7 - 11)^2 \times 1 + (8 - 11)^2 \times 1 + (10 - 11)^2 \times 3 + (12 - 11)^2 \times 1 + (14 - 11)^2 \times 1 + (15 - 11)^2 \times 1 + (17 - 11)^2 \times 2 = 176$$

Comparando, conclui-se que $SS_x < SS_y$.

$$c) s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{84}{13-1} = \frac{84}{12} = 7$$

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} = \frac{176}{12-1} = \frac{176}{11} = 16$$

Comparando, conclui-se que $s_x^2 < s_y^2$.

$$d) s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{7} \approx 2,65$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{16} = 4,00$$

Comparando, conclui-se que $s_x < s_y$.

42.3. Como $s_x < s_y$, conclui-se que houve maior variabilidade das classificações na versão 2.

42.4. z: classificações obtidas pelos alunos da turma no teste

$$\bar{z} = \frac{13 \times 11 + 12 \times 11}{13 + 12} = \frac{275}{25} = 11$$

$$\mathbf{42.5.} \quad s_z = \sqrt{\frac{SS_z}{n-1}} = \sqrt{\frac{84 + 176}{24}} = \sqrt{\frac{260}{24}} \approx 3,29$$

Pág. 161

43.1. Amplitude da amostra x_A : $525 - 480 = 45$ g

Amplitude da amostra x_B : $525 - 480 = 45$ g

$$\text{Média da amostra } x_A: \bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_A)_i}{15} = \frac{7530}{15} = 502 \text{ g}$$

$$\text{Média da amostra } x_B: \bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_B)_i}{15} = \frac{7530}{15} = 502 \text{ g}$$

Assim sendo, está provado que as amostras x_A e x_B têm a mesma amplitude e a mesma média.

$$\begin{aligned} \mathbf{43.2.} \quad SS_{x_A} &= (480 - 502)^2 + (495 - 502)^2 + (515 - 502)^2 + \\ &+ (510 - 502)^2 \times 2 + (505 - 502)^2 + (485 - 502)^2 + (525 - 502)^2 + \\ &+ (500 - 502)^2 + (503 - 502)^2 + (490 - 502)^2 + (520 - 502)^2 + \\ &+ (512 - 502)^2 + (492 - 502)^2 + (488 - 502)^2 = 2526 \text{ g}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Desvio-padrão da amostra } x_A: s_{x_A} = \sqrt{\frac{SS_{x_A}}{n-1}} = \sqrt{\frac{2526}{15-1}} \approx 13,43 \text{ g}$$

$$\begin{aligned} SS_{x_B} &= (491 - 502)^2 + (493 - 502)^2 + (525 - 502)^2 + (487 - 502)^2 + \\ &+ (480 - 502)^2 + (500 - 502)^2 + (495 - 502)^2 + (520 - 502)^2 + \\ &+ (513 - 502)^2 + (519 - 502)^2 + (512 - 502)^2 + (523 - 502)^2 + \\ &+ (490 - 502)^2 \times 2 + (492 - 502)^2 = 3156 \text{ g}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Desvio-padrão da amostra } x_B: s_{x_B} = \sqrt{\frac{SS_{x_B}}{n-1}} = \sqrt{\frac{3156}{15-1}} \approx 15,01 \text{ g}$$

Como $s_{x_B} > s_{x_A}$, conclui-se que os valores estão mais dispersos na amostra x_B .

43.3.

Relativamente à amostra x_A :

$$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x] = [502 - 13,43; 502 + 13,43] = [488,57; 515,43]$$

Há 10 elementos da amostra x_A que pertencem ao intervalo $[488,57; 515,43]$, a saber: 495, 515, 510, 505, 500, 503, 490, 510, 512 e 492.

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Então, sabe-se que aproximadamente 66,7% dos elementos da amostra x_A pertencem ao intervalo $[488,57; 515,43]$.

Relativamente à amostra x_B :

$$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x] = [502 - 15,01; 502 + 15,01] = [486,99; 517,01]$$

Há 10 elementos da amostra x_B que pertencem ao intervalo $[486,99; 517,01]$, a saber: 491, 493, 487, 500, 495, 513, 512, 490, 490 e 492.

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Então, sabe-se que aproximadamente 66,7% dos elementos da amostra x_B pertencem ao intervalo $[486,99; 517,01]$.

Pág. 162

$$\begin{aligned} \mathbf{44.1.} \quad [15 - 2k, 15 + 2k] &= [10, 20] \Leftrightarrow 15 - 2k = 10 \wedge 15 + 2k = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = 2,5 \wedge k = 2,5 \Leftrightarrow k = 2,5 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2,5^2} = \frac{1}{6,25} = 0,16$$

A percentagem de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[10, 20]$ é inferior a 16%.

Então, no mínimo 84% dos elementos da amostra pertencem ao intervalo $[10, 20]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{44.2.} \quad [15 - 2k, 15 + 2k] &= [12, 18] \Leftrightarrow 15 - 2k = 12 \wedge 15 + 2k = 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = 1,5 \wedge k = 1,5 \Leftrightarrow k = 1,5 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1,5^2} = \frac{1}{2,25} \approx 0,444$$

A percentagem de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[12, 18]$ é inferior a 44,4%.

Como $0,444 \times 200 = 88,8$, conclui-se, então, que no máximo há 88 sacos com um número de laranjas inferior a 12 ou superior a 18.

Pág. 163

45. Amostra ordenada:

$$(5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 12, 12, 15, 15, 15, 18, 20, 20).$$

Dimensão da amostra: 20 ($n = 20$).

$$P_{15} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{15 \times 20}{100} = 3 \quad (\text{inteiro})$$

$$P_{15} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{6 + 7}{2} = 6,5$$

$$P_{57} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{57 \times 20}{100} = 11,4 \quad (\text{não é inteiro})$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [11,4] + 1 = 11 + 1 = 12$$

$$P_{57} = x_{(12)} = 10$$

$$P_{65} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{65 \times 20}{100} = 13 \quad (\text{inteiro})$$

$$P_{65} = \frac{x_{(13)} + x_{(14)}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12$$

46. Dimensão da amostra: 30 ($n=30$)

46.1.

a) $P_{10} = ?$

$$\frac{kn}{100} = \frac{10 \times 30}{100} = 3 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{10} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{13 + 15}{2} = 14$$

b) $P_{35} = ?$

$$\frac{kn}{100} = \frac{35 \times 30}{100} = 10,5 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left\lceil \frac{kn}{100} \right\rceil + 1 = [10,5] + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$P_{35} = x_{(11)} = 27$$

c) $P_{40} = ?$

$$\frac{kn}{100} = \frac{40 \times 30}{100} = 12 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{40} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{35 + 37}{2} = 36$$

d) $P_{85} = ?$

$$\frac{kn}{100} = \frac{85 \times 30}{100} = 25,5 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left\lceil \frac{kn}{100} \right\rceil + 1 = [25,5] + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$P_{85} = x_{(26)} = 61$$

46.2. Vamos começar por determinar o percentil 70.

$$P_{70} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{70 \times 30}{100} = 21 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{70} = \frac{x_{(21)} + x_{(22)}}{2} = \frac{52 + 53}{2} = 52,5$$

Sabe-se que pelo menos 70% dos elementos da amostra têm valor menor ou igual a 52,5 e no máximo 30% dos elementos da amostra têm valores superiores a 52,5.

Assim sendo, dos 30% dos elementos da amostra com maior valor, o que tem menor valor é o 53.

46.3.

a) A ordem da unidade estatística 49 é 19 porque a unidade estatística 49 corresponde na amostra ordenada ao elemento $x_{(19)}$.

b) Se $P_k = 49 = x_{(19)}$, então $\frac{kn}{100}$ representa um número não inteiro e sabe-se que $18 < \frac{kn}{100} < 19$.

$$18 < \frac{kn}{100} < 19 \Leftrightarrow 18 < \frac{k \times 30}{100} < 19$$

$$\text{c) } 18 < \frac{30k}{100} < 19 \Leftrightarrow 180 < 3k < 190 \Leftrightarrow 60 < k < \frac{190}{3}$$

Como $\frac{190}{3} = 63,3$ e $k \in \mathbb{N}$, conclui-se que $k \in \{61, 62, 63\}$.

À unidade estatística 49 correspondem os percentis 61, 62 e 63.

Pág. 164

47.1. Começa-se por ordenar os dados:

1	1	1,2	1,25	1,28
1,3	1,48	1,7	1,76	1,8
2,18	2,2	2,25	2,3	2,5
2,65	2,75	2,8	2,9	3,1
3,15	3,2	3,3	3,4	3,45

$$P_{40} = ?$$

$$\frac{40 \times 25}{100} = 10. \text{ Então, } P_{40} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{1,8 + 2,18}{2} = 1,99.$$

$$P_{60} = ?$$

$$\frac{60 \times 25}{100} = 15. \text{ Então, } P_{60} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{2,5 + 2,65}{2} = 2,575.$$

$$P_{85} = ?$$

$$\frac{85 \times 25}{100} = 21,25. \text{ Então, } P_{85} = x_{(21+1)} = x_{(22)} = 3,2.$$

47.2.

$$P_{34} = ?$$

$$\frac{34 \times 25}{100} = 8,5. \text{ Então, } P_{34} = x_{(8+1)} = x_{(9)} = 1,76.$$

Na amostra, há 8 dias em que o consumo foi inferior a

$$P_{34} = 1,76.$$

Pág. 165

48.1. O percentil 100 é igual ao valor máximo da amostra. Neste caso é igual a 20.

48.2.

a) Amostra ordenada:

(5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 15, 16, 18, 20, 20).

A dimensão da amostra é 16 ($n=16$).

5 5 6 6 7 8 8 10 10 12 12 15 16 18 20 20
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 α_1 $\bar{x} = Q_2$ α_3

Q_1 é a mediana dos elementos da amostra ordenada que são menores que a mediana da amostra.

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6,5.$$

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{25 \times 16}{100} = 4 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{25} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{6+7}{2} = 6,5. \text{ Então, } Q_1 = P_{25} = 6,5.$$

b) 5 5 6 6 7 8 8 10 10 12 12 15 16 18 20 20

$\downarrow \hat{Q}_1$ $\downarrow \hat{x} = Q_2$ $\downarrow \hat{Q}_3$

A mediana dos elementos da amostra ordenada é

$$\tilde{x} = Q_2 = \frac{10+10}{2} = 10.$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 16}{100} = 8 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{50} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$$

$$\text{Então, } Q_2 = P_{50} = 10.$$

c) 5 5 6 6 7 8 8 10 10 12 12 15 16 18 20 20

$\downarrow \hat{Q}_1$ $\downarrow \hat{x} = Q_2$ $\downarrow \hat{Q}_3$

Q_3 é a mediana dos elementos da amostra ordenada que são

$$\text{maiores que a mediana da amostra. } Q_3 = \frac{15+16}{2} = 15,5.$$

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{75 \times 16}{100} = 12 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{75} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{15+16}{2} = 15,5$$

$$\text{Então, } Q_3 = P_{75} = 15,5.$$

Pág. 166

49.1. Amostra ordenada:

(439, 473, 487, 492, 508, 514, 519, 526, 533, 540, 557, 592).

A dimensão da amostra é 12 ($n=12$).

$$P_{40} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{40 \times 12}{100} = 4,8 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [4,8] + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$P_{40} = x_{(5)} = 508$$

$$P_{65} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{65 \times 12}{100} = 7,8 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [7,8] + 1 = 7 + 1 = 8$$

$$P_{65} = x_{(8)} = 526$$

49.2. Vamos começar por determinar o percentil 25.

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{25 \times 12}{100} = 3 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{25} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{487 + 492}{2} = 489,5$$

Sabe-se que 25% dos elementos da amostra têm valor menor ou igual a 489,5 e que 75% dos elementos da amostra têm valores superiores a 489,5.

O menor valor da amostra superior a 489,5 é o 492.

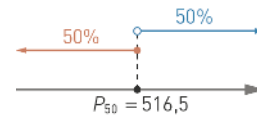
49.3. Vamos começar por determinar o percentil 50.

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 12}{100} = 6 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{50} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{514 + 519}{2} = 516,5$$

Então, pode-se afirmar que 50% dos elementos da amostra têm valor menor ou igual a 516,5.



Assim, dos 50% de anos com menos bandeiras azuis, o maior número de bandeiras é 514.

49.4. A ordem do dado estatístico 526 é 8 porque 526

corresponde na amostra ordenada ao elemento $x_{(8)}$.

Se $P_k = 526 = x_{(8)}$, então $\frac{kn}{100}$ representa um número não inteiro

e sabe-se que $7 < \frac{kn}{100} < 8$.

$$7 < \frac{12k}{100} < 8 \Leftrightarrow 700 < 12k < 800 \Leftrightarrow \frac{700}{12} < k < \frac{800}{12}$$

Como $\frac{700}{12} = 58,3$, $\frac{800}{12} = 66,6$ e $k \in \mathbb{N}$, conclui-se que

$$k \in \{59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}.$$

Então, o dado 526 pertence aos percentis 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65 e 66.

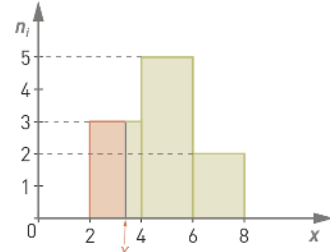
Pág. 167

50.1. Designemos por A_i a área total do histograma, que é igual à soma dos três retângulos em que está dividido.

$$A_i = 2 \times 3 + 2 \times 5 + 2 \times 2 = 6 + 10 + 4 = 20.$$

50.2.

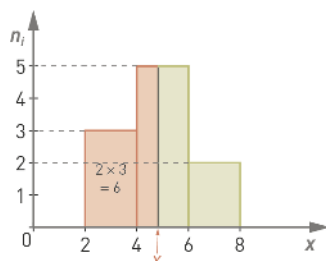
a) Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 18% da área total, ou seja, $0,18 \times 20 = 3,6$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$(x-2) \times 3 = 3,6 \Leftrightarrow 3x - 6 = 3,6 \Leftrightarrow 3x = 9,6 \Leftrightarrow x = \frac{9,6}{3} \Leftrightarrow x = 3,2$$

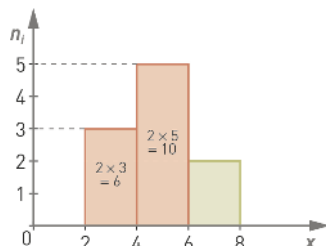
b) Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 50% da área total, ou seja, $0,5 \times 20 = 10$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

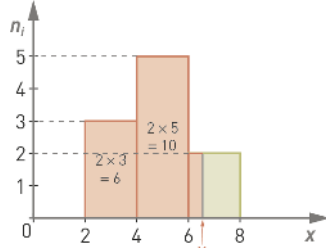
$$6 + (x - 4) \times 5 = 10 \Leftrightarrow 5x - 20 = 4 \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5} \Leftrightarrow x = 4,8$$

c) Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 80% da área total, ou seja, $0,8 \times 20 = 16$.



Tendo em atenção que a soma das áreas dos dois primeiros retângulos que constituem o histograma é igual a 16, conclui-se que $x = 6$.

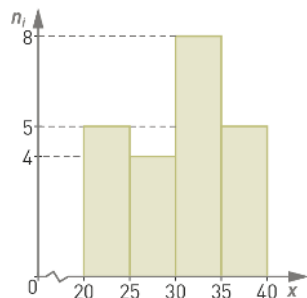
d) Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 85% da área total, ou seja, $0,85 \times 20 = 17$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$6 + 10 + (x - 6) \times 2 = 17 \Leftrightarrow 2x - 12 = 1 \Leftrightarrow 2x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} \Leftrightarrow x = 6,5$$

51.1.



51.2. Área total do histograma é dada por:
 $5 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 8 + 5 \times 5 = 110$.

Para determinar P_{20} , começa-se por calcular 20% da área total do histograma.

$$0,2 \times 110 = 22$$

De seguida, determina-se o valor de x de modo que:

$$(x - 20) \times 5 = 22 \Leftrightarrow x = \frac{122}{5} \Leftrightarrow x = 24,4$$

$$P_{20} = 24,4$$

Para determinar P_{60} , procede-se de forma semelhante ao caso anterior.

$$0,6 \times 110 = 66 \Leftrightarrow 25 + 20 + (x - 30) \times 8 = 66 \Leftrightarrow 8x = 261 \Leftrightarrow x = 32,625$$

$$P_{60} = 32,625$$

Pág. 170

Proposta 16

16.1.

$$\bar{x} = \frac{1135 + 1094 + 850 + 854 + 776 + 737 + 741 + 689 + 573 + 518}{10} = \frac{7967}{10} = 796,7$$

16.2. O desvio em relação à média foi negativo durante os anos em que o número de vítimas mortais foi inferior à média, ou seja, durante 6 anos (de 2008 a 2013).

16.3. Seja a o número de vítimas mortais em 2014.

Como a média no final de 2014 passou a ser 768, então tem-se:

$$\frac{7967 + a}{11} = 768 \Leftrightarrow 7967 + a = 768 \times 11 \Leftrightarrow a = 8448 - 7967 \Leftrightarrow a = 481$$

Então, o número de vítimas mortais em 2014 foi 481.

16.4.

$\tilde{x}_i$	n_i
1,7	1
1,9	1
2,1	3
2,3	1
2,4	2
2,9	1
3,0	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^7 \tilde{x}_j n_j}{10} = \frac{1,7 + 1,9 + 2,1 \times 3 + 2,3 + 2,4 \times 2 + 2,9 + 3}{10} = \frac{22,9}{10} = 2,29$$

Proposta 17

$$\mathbf{17.1.} \quad \bar{x} = \frac{40 + 45 + 50 \times 3 + 51 \times 2 + 52 \times 2 + 60}{10} = \frac{501}{10} = 50,1$$

Há 5 elementos da amostra com valor inferior à média (são os 5 primeiros elementos da amostra).

17.2. Substituindo o elemento da amostra com valor mínimo por um elemento com valor 1, a média passa a ser dada por:

$$\bar{y} = \frac{501 - 40 + 1}{10} = \frac{462}{10} = 46,2$$

Neste caso só há 2 elementos da amostra com valor inferior à média (1 e 45).

17.3. Substituindo o elemento da amostra com valor máximo por um elemento com valor 100, a média passa a ser dada por:

$$\bar{z} = \frac{501 - 60 + 100}{10} = \frac{541}{10} = 54,1$$

Neste caso há 9 elementos da amostra com valor inferior à média (todos exceto o último).

17.4. Os resultados obtidos nas questões anteriores sugerem que a média é uma característica amostral não resistente à mudança de valores da amostra.

Pág. 171

Proposta 18

18.1.

a) A amostra tem dimensão 20 pois é constituída por 20 elementos.

b) Os diferentes valores da amostra são 21 €, 23 €, 24 €, 25 €, 27 € e 28 €.

18.2. Tabela de frequências absolutas:

$\tilde{x}_i$ (euros)	n_i
21	1
23	3
24	4
25	6
27	3
28	3

$$\begin{aligned} \text{18.3. } \bar{x} &= \frac{\sum_{j=1}^6 \tilde{x}_j n_j}{20} = \frac{21 + 23 \times 3 + 24 \times 4 + 25 \times 6 + 27 \times 3 + 28 \times 3}{20} = \\ &= \frac{501}{20} = 25,05 \end{aligned}$$

Em média o produto custa 25,05 €.

18.4.

a) Se cada valor tiver um acréscimo de 23%, então cada um dos valores da amostra será multiplicado por 1,23. Nesse caso, o valor da média passa a ser $25,05 \times 1,23 = 30,8115 \approx 30,81$ €.

b) Se cada valor tiver um desconto de 0,75 €, então a cada um dos valores da amostra será subtraído 0,75. Nesse caso, o valor da média passa a ser $25,05 - 0,75 = 24,30$ €.

Proposta 19

$$\begin{aligned} \text{19.1. } \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{7 + 6 + 15 + 20 + 10 + 8 + 10 + 15 + 8}{9} = \frac{99}{9} = \\ &= 11 \text{ min} \end{aligned}$$

$$\text{19.2. } d_i = x_i - \bar{x} \Leftrightarrow 4 = x_i - 11 \Leftrightarrow x_i = 15$$

O Bernardo esperou 15 min até ser atendido.

19.3. A amostra $\tilde{x}$ ordenada por ordem crescente é (6, 7, 8, 8, 10, 10, 15, 15, 20).

Então, $y = (6, 7, 8, 8, 10, 10, 15, 15, 20 + k)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\bar{y} > x_{(8)} \Leftrightarrow \frac{99 + k}{9} > 15 \Leftrightarrow 99 + k > 135 \Leftrightarrow k > 36$$

Portanto, o menor valor inteiro de k de modo que $\bar{y} > x_{(8)}$ é o 37.

Pág. 172

Proposta 20

20.1.

$$\text{a) } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{132}{6} = 22$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{i=1}^6 d_i &= 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 - 4 - 7 - 2 + 4 + d_6 = 0 \Leftrightarrow d_6 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } SS_x &= \sum_{i=1}^6 d_i^2 = 0 \Leftrightarrow d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 = \\ &= 2^2 + (-4)^2 + (-7)^2 + (-2)^2 + 4^2 + 7^2 = \\ &= 4 + 16 + 49 + 4 + 16 + 49 = 138 \end{aligned}$$

$$\text{20.2. } x_1 = d_1 + \bar{x} = 2 + 22 = 24, \quad x_2 = d_2 + \bar{x} = -4 + 22 = 18,$$

$$x_3 = d_3 + \bar{x} = -7 + 22 = 15, \quad x_4 = d_4 + \bar{x} = -2 + 22 = 20,$$

$$x_5 = d_5 + \bar{x} = 4 + 22 = 26 \text{ e } x_6 = d_6 + \bar{x} = 7 + 22 = 29.$$

Proposta 21

$$\text{21.1. } \bar{x}_A = \frac{3 \times 9 + 5 \times 10 + 6 \times 11 + 1 \times 12 + 2 \times 13 + 5 \times 15 + 1 \times 16}{26} +$$

$$+ \frac{1 \times 17 + 2 \times 18}{26} = \frac{325}{26} = 12,5$$

$$\bar{x}_B = \frac{1 \times 8 + 2 \times 9 + 8 \times 10 + 4 \times 11 + 3 \times 12 + 1 \times 13 + 4 \times 14}{28} +$$

$$+ \frac{3 \times 17 + 2 \times 18}{28} = \frac{342}{28} \approx 12,2$$

$$\bar{x}_C = \frac{2 \times 9 + 2 \times 10 + 6 \times 11 + 4 \times 12 + 3 \times 13 + 2 \times 14 + 4 \times 15}{26} +$$

$$+ \frac{1 \times 16 + 2 \times 19}{26} = \frac{333}{26} \approx 12,8$$

$$\text{21.2. } \bar{x} = \frac{325 + 342 + 333}{80} = \frac{1000}{80} = 12,5$$

21.3.

$$\begin{aligned} \text{a) } SS_y &= \sum_{j=1}^9 (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = (9 - 12,5)^2 \times 3 + (10 - 12,5)^2 \times 5 + \\ &+ (11 - 12,5)^2 \times 6 + (12 - 12,5)^2 \times 1 + (13 - 12,5)^2 \times 2 + \\ &+ (15 - 12,5)^2 \times 5 + (16 - 12,5)^2 \times 1 + (17 - 12,5)^2 \times 1 + \\ &+ (18 - 12,5)^2 \times 2 = 206,5 \end{aligned}$$

$$b) s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} = \frac{206,5}{26-1} = \frac{206,5}{25} = 8,26$$

$$c) s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{8,26} \approx 2,874$$

Pág. 173

Proposta 22

$$22.1. \bar{x} = \frac{46+48+49+50 \times 2 + 51+52+54}{8} = \frac{400}{8} = 50$$

$$\bar{y} = \frac{10+18+30+50 \times 2 + 70+82+90}{8} = \frac{400}{8} = 50$$

Assim sendo, $\bar{x} = \bar{y} = 50$.

$$22.2. SS_x = (46-50)^2 + (48-50)^2 + (49-50)^2 + (50-50)^2 \times 2 + (51-50)^2 + (52-50)^2 + (54-50)^2 = 42$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{42}{8-1}} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

$$SS_y = (10-50)^2 + (18-50)^2 + (30-50)^2 + (50-50)^2 \times 2 + (70-50)^2 + (82-50)^2 + (90-50)^2 = 6048$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{6048}{8-1}} = \sqrt{864} \approx 29,39$$

22.3. Sendo $s = \min\{s_x, s_y\}$, então $s = 2,45$.

$$a)]\bar{x} - s, \bar{x} + s[=]50 - 2,45; 50 + 2,45[=]47,55; 52,45[$$

Há 6 valores da amostra x que pertencem ao intervalo

$$]47,55; 52,45[. \text{Esses valores são } 48, 49, 50, 50, 51 \text{ e } 52.$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Conclui-se, então, que 75% das unidades estatísticas da amostra x têm valores pertencentes ao intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$.

$$b)]\bar{y} - s, \bar{y} + s[=]50 - 2,45; 50 + 2,45[=]47,55; 52,45[$$

Há apenas 2 valores da amostra y que pertencem ao intervalo

$$]47,55; 52,45[. \text{Esses valores são } 50 \text{ e } 50.$$

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Conclui-se, então, que 25% das unidades estatísticas da amostra y têm valores pertencentes ao intervalo $]\bar{y} - s, \bar{y} + s[$.

Proposta 23

23.1. O Luís e a Rita utilizaram o aparelho A.

O Luís fez o registo em metros e obteve a amostra x . A Rita fez o registo em centímetros e obteve a amostra y .

Então, $y = 100x$.

A Sílvia utilizou o aparelho B, fez o registo em centímetros, obtendo a amostra z , tendo-se verificado que $z = y + 1$.

Sabe-se que o valor registado pela Sílvia para a altura do Gustavo foi 167, então o valor registado pela Rita para a altura do Gustavo foi $167 - 1$, ou seja, 166 e o valor registado pelo Luís para a altura do Gustavo foi $166 : 100$, ou seja, 1,66.

23.2.

a) Como $y = 100x$, então $\bar{y} = 100\bar{x} = 100 \times 1,62 = 162$ e

$$SS_y = 100^2 SS_x = 10\,000 \times 0,36 = 3600.$$

b) Como $z = y + 1$, então $\bar{z} = \bar{y} + 1 = 162 + 1 = 163$ e

$$SS_z = SS_y = 3600.$$

23.3. Amostra x :

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{0,36}{26-1} = \frac{0,36}{25} = 0,0144$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{0,0144} = 0,12$$

Amostra y :

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} = \frac{3600}{26-1} = \frac{3600}{25} = 144$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{144} = 12$$

Amostra z :

$$s_z^2 = \frac{SS_z}{n-1} = \frac{3600}{26-1} = \frac{3600}{25} = 144$$

$$s_z = \sqrt{\frac{SS_z}{n-1}} = \sqrt{144} = 12$$

Pág. 174

Proposta 24

24.1. $n = 37 + 48 + 28 + 20 + 12 = 145$.

A amostra tem dimensão 145.

Os valores da amostra são: 1, 2, 3, 4 e 5.

24.2. Recorrendo à calculadora gráfica começa-se por inserir os valores da amostra numa lista e os respetivos valores das frequências noutra lista, seguindo os seguintes procedimentos:

STAT – EDIT – 1:Edit

L1	L2	L3	3
1	27		
2	48		
3	28		
4	20		
5	12		
-----	-----		
L3(1)=			

Em seguida obtêm-se os cálculos estatísticos.

STAT – CALC – 1: 1-Vars Stats – L1,L2 – ENTER

1-Var Stats
$\bar{x} = 2,462068966$
$\Sigma x = 357$
$\Sigma x^2 = 1101$
$Sx = 1,241754413$
$\sigma x = 1,237465093$
$n = 145$

Conclui-se que $\bar{x} \approx 2,46$ e $s_x \approx 1,24$.

$$24.3.]\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x[=]2,46 - 1,24; 2,46 + 1,24[=]1,22; 3,7[$$

Por análise do gráfico de barras, conclui-se que, no período de tempo considerado, houve 76 (48+28) automóveis que atravessaram a ponte transportando um número de passageiros pertencente ao intervalo $]1,22; 3,7[$.

O que corresponde a, aproximadamente, 52% pois $\frac{76}{145} \approx 0,52$.

Proposta 25

$$[250 - 30k, 250 + 30k] = [190, 310] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 250 - 30k = 190 \wedge 250 + 30k = 310 \Leftrightarrow k = 2 \wedge k = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

A percentagem de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[190, 310]$ é inferior a 25%.

Então, no mínimo 75% dos elementos da amostra pertencem ao intervalo $[190, 310]$.

A amostra tem dimensão 36. Então, 75% dos elementos da amostra correspondem a $0,75 \times 36 = 27$.

Assim sendo, o número mínimo de meses em que o número de vendas pertence ao intervalo $[190, 310]$ é 27.

Pág. 175

Proposta 26

$$26.1. [12 - 2,5k; 12 + 2,5k] = [6, 18] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2,5k = 6 \wedge 12 + 2,5k = 18 \Leftrightarrow k = 2,4 \wedge k = 2,4 \Leftrightarrow k = 2,4$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2,4^2} = \frac{1}{5,76} \approx 0,174$$

A percentagem de dados da amostra que não pertencem ao intervalo $[6, 18]$ é inferior a 17,4%.

Então, no mínimo 82,6% dos dados da amostra pertencem ao intervalo $[6, 18]$.

26.2. Pretende-se construir um intervalo centrado na média que contenha pelo menos 85% dos elementos da amostra. Então, a percentagem de elementos da amostra que não pertencem a esse intervalo é inferior a 15%.

Sabe-se que a percentagem de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo $[12 - 2,5k; 12 + 2,5k]$ é inferior a $\frac{1}{k^2}$.

$$\frac{1}{k^2} = 0,15 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{0,15} \Leftrightarrow k^2 = \frac{20}{3}$$

Como $k > 0$, conclui-se que $k = \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2,6$.

$$\text{Então, } [12 - 2,5k; 12 + 2,5k] = [12 - 2,5 \times 2,6; 12 + 2,5 \times 2,6] = [5,5; 18,5].$$

Os extremos do intervalo são 5,5 e 18,5.

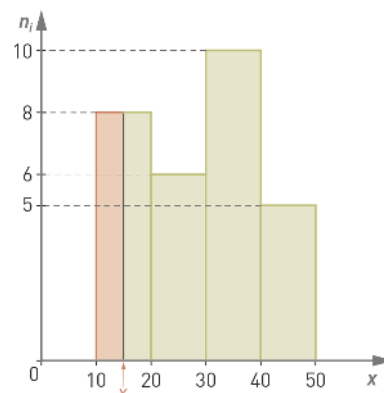
Proposta 27

27.1. Designemos por A a área do histograma, que é igual à soma dos quatro retângulos em que está dividido.

$$A = 10 \times 8 + 10 \times 6 + 10 \times 10 + 10 \times 5 = 80 + 60 + 100 + 50 = 290.$$

$$27.2. P_{10} = ?$$

Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 10% da área total, ou seja, $0,10 \times 290 = 29$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

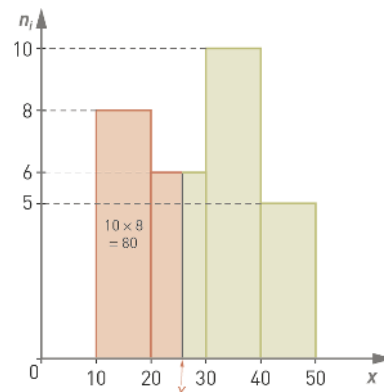
$$(x - 10) \times 8 = 29 \Leftrightarrow 8x - 80 = 29 \Leftrightarrow 8x = 109 \Leftrightarrow x = \frac{109}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 13,625$$

Então, $P_{10} = 13,625$.

$$P_{40} = ?$$

Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 40% da área total, ou seja, $0,40 \times 290 = 116$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

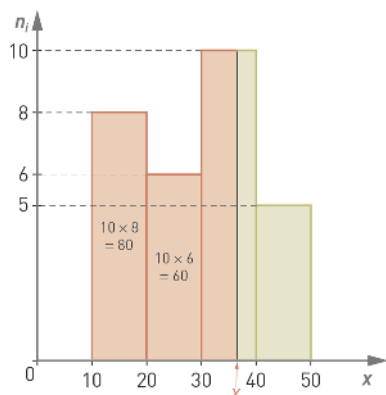
$$80 + (x - 20) \times 6 = 116 \Leftrightarrow 6x - 120 = 36 \Leftrightarrow 6x = 156 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{156}{6} \Leftrightarrow x = 26$$

Então, $P_{40} = 26$.

$$P_{70} = ?$$

Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 70% da área total, ou seja, $0,70 \times 290 = 203$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$80 + 60 + (x - 30) \times 10 = 203 \Leftrightarrow 10x - 300 = 63 \Leftrightarrow 10x = 363 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{363}{10} \Leftrightarrow x = 36,3$$

Então, $P_{70} = 36,3$.

Proposta 28

28.1. A amostra ordenada por ordem crescente é a seguinte:

(10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 18).

28.2. Dimensão da amostra: 15 ($n = 15$).

$$P_{16} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{16 \times 15}{100} = 2,4 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [2, 4] + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$P_{16} = x_{(3)} = 12$$

$$P_{20} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{20 \times 15}{100} = 3 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{20} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12$$

$$P_{35} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{35 \times 15}{100} = 5,25 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [5, 25] + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$P_{35} = x_{(6)} = 13$$

$$P_{40} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{40 \times 15}{100} = 6 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{40} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{13 + 13}{2} = 13$$

28.3. Organizando os dados numa tabela de frequências absolutas, tem-se:

$\tilde{x}_j$	n_j
10	1
11	1
12	2
13	3
14	3
15	3
16	1
18	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^8 \tilde{x}_j n_j}{15} = \frac{10 \times 1 + 11 \times 1 + 12 \times 2 + 13 \times 3 + 14 \times 3 + 15 \times 3 + 16 \times 1 + 18 \times 1}{15} = \frac{205}{15} = \frac{41}{3} \approx 13,67$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^8 (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$$

$$= \left(10 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 1 + \left(11 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 1 + \left(12 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 2 +$$

$$+ \left(13 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 3 + \left(14 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 3 + \left(15 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 3 +$$

$$+ \left(16 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 1 + \left(18 - \frac{41}{3}\right)^2 \times 1 = 57,3335$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{57,3335}{14}} \approx 2,02$$

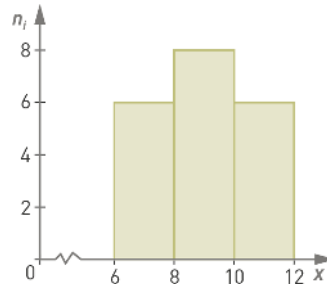
Pág. 176

Proposta 29

29.1. Relativamente aos automóveis movidos a gasolina, agrupando os dados em classes de amplitude 2, sendo o limite inferior da primeira classe 6, obtém-se a seguinte tabela:

Classes	n_i
$[6, 8[$	6
$[8, 10[$	8
$[10, 12[$	6

O histograma relativo aos dados organizados na tabela anterior é o seguinte:



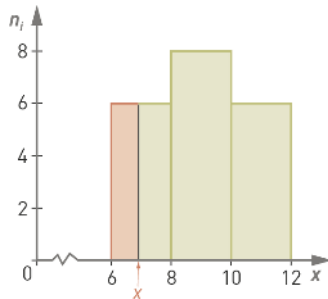
29.2. Utilizando o histograma vamos determinar estimativas para os percentis de ordem 12, 30 e 50.

Designemos por A a área do histograma.

$$A = 2 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 6 = 12 + 16 + 12 = 40.$$

$$P_{12} = ?$$

Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 12% da área total, ou seja, $0,12 \times 40 = 4,8$.



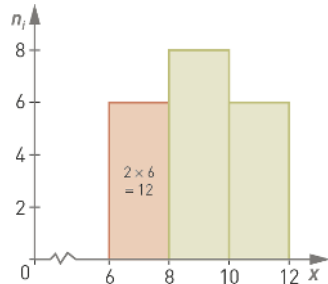
Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$(x - 6) \times 6 = 4,8 \Leftrightarrow 6x - 36 = 4,8 \Leftrightarrow 6x = 40,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40,8}{6} \Leftrightarrow x = 6,8. \text{ Então, } P_{12} = 6,8.$$

$$P_{30} = ?$$

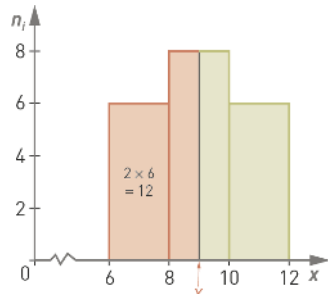
Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 30% da área total, ou seja, $0,30 \times 40 = 12$.



Tendo em atenção que a área do primeiro retângulo que constitui o histograma é igual a 12, pode concluir-se que $x = 8$, isto é, $P_{30} = 8$.

$$P_{50} = ?$$

Pretende-se determinar o valor de x de modo que a área do histograma à esquerda de x seja igual a 50% da área total, ou seja, $0,50 \times 40 = 20$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$12 + (x - 8) \times 8 = 20 \Leftrightarrow 8x - 64 = 8 \Leftrightarrow 8x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{8} \Leftrightarrow x = 9$$

Então, $P_{50} = 9$.

Em seguida vamos determinar os valores exatos dos percentis de ordem 12, 30 e 50.

Para tal, devemos começar por ordenar os 20 valores da amostra por ordem crescente.

(6,0; 6,3; 6,6; 7,5; 7,5; 7,8; 8,0; 8,2; 8,2; 8,4; 9,2; 9,3; 9,5; 9,9; 10,1; 10,5; 10,9; 11,1; 11,1; 11,7).

$$P_{12} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{12 \times 20}{100} = 2,4 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [2,4] + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$P_{12} = x_{(3)} = 6,6$$

$$P_{30} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{30 \times 20}{100} = 6 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{30} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{7,8 + 8,0}{2} = 7,9$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 20}{100} = 10 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{50} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{8,4 + 9,2}{2} = 8,8$$

Comparando os resultados obtidos, constata-se que as estimativas dos percentis de ordem 12, 30 e 50, são superiores aos valores exatos desses percentis.

29.3. O percentil de ordem 100 é igual ao valor máximo da amostra. Neste caso, $P_{100} = 14,9$.

Dimensão da amostra: 20 ($n = 20$).

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{25 \times 20}{100} = 5 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{25} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{10,2 + 10,3}{2} = 10,25$$

$$P_{40} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{40 \times 20}{100} = 8 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{40} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{10,7 + 10,8}{2} = 10,75$$

$$P_{64} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{64 \times 20}{100} = 12,8 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [12,8] + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$P_{64} = x_{(13)} = 12,3$$

Proposta 30

30.1. Representando por $\tilde{x}_j$ os valores da amostra $\tilde{x}$ e por n_j as respectivas frequências absolutas, vamos organizar os dados numa tabela de frequências absolutas.

$\tilde{x}_j$ (s)	n_j	$\tilde{x}_j \cdot n_j$	$(\tilde{x}_j - \bar{x})^2 \times n_j$
62	1	62	$(62 - 73,9)^2 \times 1$
64	2	128	$(64 - 73,9)^2 \times 2$
65	1	65	$(65 - 73,9)^2 \times 1$
68	2	136	$(68 - 73,9)^2 \times 2$
70	1	70	$(70 - 73,9)^2 \times 1$
72	1	72	$(72 - 73,9)^2 \times 1$
73	1	73	$(73 - 73,9)^2 \times 1$
74	1	74	$(74 - 73,9)^2 \times 1$
75	2	150	$(75 - 73,9)^2 \times 2$
77	1	77	$(77 - 73,9)^2 \times 1$
78	1	78	$(78 - 73,9)^2 \times 1$
80	2	160	$(80 - 73,9)^2 \times 2$
81	1	81	$(81 - 73,9)^2 \times 1$
84	3	252	$(84 - 73,9)^2 \times 3$
$\sum_{j=1}^{14} \tilde{x}_j n_j = 1478$		$\sum_{j=1}^{14} (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = 965,8$	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{14} \tilde{x}_j n_j}{20} = \frac{1478}{20} = 73,9 \text{ s}$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^{14} (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j = 965,8 \text{ s}^2$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{965,8}{20-1}} = \sqrt{\frac{965,8}{19}} \approx 7,13 \text{ s}$$

Representando por $\tilde{y}_j$ os valores da amostra $\tilde{y}$ e por n_j as respectivas frequências absolutas, vamos organizar os dados numa tabela de frequências absolutas.

$\tilde{y}_j$ (s)	n_j	$\tilde{y}_j \cdot n_j$	$(\tilde{y}_j - \bar{y})^2 \times n_j$
63	2	126	$(63 - 73,9)^2 \times 2$
64	1	64	$(64 - 73,9)^2 \times 1$
65	2	130	$(65 - 73,9)^2 \times 2$
67	1	67	$(67 - 73,9)^2 \times 1$
69	1	69	$(69 - 73,9)^2 \times 1$
71	1	71	$(71 - 73,9)^2 \times 1$
73	1	73	$(73 - 73,9)^2 \times 1$
74	1	74	$(74 - 73,9)^2 \times 1$
75	1	75	$(75 - 73,9)^2 \times 1$
78	2	156	$(78 - 73,9)^2 \times 2$
79	1	79	$(79 - 73,9)^2 \times 1$
80	1	80	$(80 - 73,9)^2 \times 1$
81	2	162	$(81 - 73,9)^2 \times 2$
83	1	83	$(83 - 73,9)^2 \times 1$
84	1	84	$(84 - 73,9)^2 \times 1$
85	1	85	$(85 - 73,9)^2 \times 1$
$\sum_{j=1}^{16} \tilde{y}_j n_j = 1478$		$\sum_{j=1}^{16} (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = 1081,8$	

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{16} \tilde{y}_j n_j}{20} = \frac{1478}{20} = 73,9 \text{ s}$$

$$SS_y = \sum_{j=1}^{16} (\tilde{y}_j - \bar{y})^2 n_j = 1081,8 \text{ s}^2$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{1081,8}{20-1}} = \sqrt{\frac{1081,8}{19}} \approx 7,55 \text{ s}$$

Como $s_y > s_x$, conclui-se que há maior dispersão dos dados em relação à média na amostra $\tilde{y}$.

30.2. Amostra $\tilde{x}$ ordenada: (62, 64, 64, 65, 68, 68, 70, 72, 73, 74, 75, 75, 77, 78, 80, 80, 81, 84, 84, 84) .

Dimensão da amostra: 20 ($n=20$) .

$$P_{18} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{18 \times 20}{100} = 3,6 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [3,6] + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$P_{18} = x_{(4)} = 65$$

$$P_{83} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{83 \times 20}{100} = 16,6 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [16,6] + 1 = 16 + 1 = 17 ; P_{83} = x_{(17)} = 81$$

30.3. Amostra y ordenada: (63, 63, 64, 65, 65, 67, 69, 71, 73, 74, 75, 78, 78, 79, 80, 81, 81, 83, 84, 85).

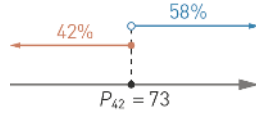
Vamos começar por determinar o percentil 42.

$$P_{42} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{42 \times 20}{100} = 8,4 \quad (\text{não é inteiro})$$

$$\left\lceil \frac{kn}{100} \right\rceil + 1 = [8,4] + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$P_{42} = x_{(9)} = 73$$



Dos 58% dos elementos da amostra com maior valor, o que tem menor valor é o 74.

Pág. 177

Proposta 31

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^p x_i}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=p+1}^n x_i}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{\sum_{i=p+1}^n x_i}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \times \frac{n}{p} - \frac{A}{p} = \\ &= \bar{x} \times \frac{n}{p} - \frac{A}{p} = \frac{n\bar{x} - A}{p} \end{aligned}$$

Proposta 32

32.1. Sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n e

$y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, então a amostra y tem dimensão n e

$$y_i = ax_i + b, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Sendo $\bar{x}$ a média da amostra x e $\bar{y}$ a média da amostra y , então $\bar{y} = a\bar{x} + b$.

$$\begin{aligned} SS_y &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - (a\bar{y} + b))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{y} - b)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i - a\bar{x})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (a(x_i - \bar{x}))^2 = \sum_{i=1}^n [a^2(x_i - \bar{x})^2] = \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= a^2 SS_x \end{aligned}$$

32.2. Sendo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ uma amostra dos raios de

círculos expressos em centímetros e y a amostra com os

diâmetros dos mesmos círculos expressos em metros, então

$$y = 0,02x.$$

$$\text{Logo, } SS_y = 0,02^2 SS_x = 0,0004 \times 27,04 = 0,010816 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} \\ &= \sqrt{\frac{0,010816}{5-1}} = \sqrt{\frac{0,010816}{4}} \approx 0,052 \text{ m} \end{aligned}$$

Proposta 33

$$33.1. \begin{cases} a + 11 + 20 + 11 + b + 4 = 60 \\ a \times 0 + 11 \times 1 + 20 \times 2 + 11 \times 3 + b \times 4 + 4 \times 5 = 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ 11 + 40 + 33 + 4b + 20 = 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ 4b + 104 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ 4b = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 10 = 14 \\ b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 10 \end{cases}$$

33.2. Dimensão da amostra: 60 ($n=60$).

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{75 \times 60}{100} = 45 \quad (\text{é inteiro})$$

$$P_{75} = \frac{x_{(45)} + x_{(46)}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

$\tilde{x}_i$	n_i	N_i
0	4	4
1	11	15
2	20	35
3	11	46
4	10	56
5	4	60

← 45 e 46

$$P_{94} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{94 \times 60}{100} = 56,4 \quad (\text{não é inteiro})$$

$$\left\lceil \frac{kn}{100} \right\rceil + 1 = [56,4] + 1 = 56 + 1 = 57$$

$$P_{94} = x_{(57)} = 5$$

$\tilde{x}_i$	n_i	N_i
0	4	4
1	11	15
2	20	35
3	11	46
4	10	56
5	4	60

← 57

Como o número de filhos do casal Silva é maior do que o percentil 75 e menor do que o percentil 94, conclui-se que o casal Silva tem 4 filhos.

Proposta 34

Deve-se começar por ordenar os valores da amostra:

(1, 2, 5, 7, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 20).

Dimensão da amostra: 12 ($n=12$).

A ordem da unidade estatística 11 é 8 porque a unidade estatística 11 corresponde na amostra ordenada ao elemento $x_{(8)}$.

Se $P_k = 11 = x_{(8)}$, então $\frac{kn}{100}$ representa um número não inteiro e

sabe-se que $7 < \frac{kn}{100} < 8$.

$$7 < \frac{k \times 12}{100} < 8 \Leftrightarrow 700 < 12k < 800 \Leftrightarrow \frac{700}{12} < k < \frac{800}{12}$$

Como $\frac{700}{12} = 58,3$, $\frac{800}{12} = 66,6$ e $k \in \mathbb{N}$, conclui-se que

$$k \in \{29, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}.$$

À unidade estatística 11 correspondem os percentis 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65 e 66.

Pág. 178

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^{30} 2i - 3 = A &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30} 2i - \sum_{i=1}^{30} 3 = A \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{30} i - (30 - 1 + 1) \times 3 = A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{30} i - 90 = A \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{30} i = 90 + A \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30} i = \frac{90 + A}{2} \end{aligned}$$

A opção correta é a (B).

$$2. \text{Sabe-se que } \sum_{i=1}^4 d_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 d_i + \sum_{i=4}^4 d_i = 0 \Leftrightarrow 2,5 + d_4 = 0 \Leftrightarrow d_4 = -2,5$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow -2,5 = x_4 - 3 \Leftrightarrow -2,5 + 3 = x_4 \Leftrightarrow x_4 = -0,5$$

A opção correta é a (D).

$$3. [20 - 2,5k; 20 + 2,5k] = [15, 25] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 - 2,5k = 15 \wedge 20 - 2,5k = 25 \Leftrightarrow k = 2 \wedge k = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

A percentagem de dados da amostra que não pertencem ao intervalo $[15, 25]$ é inferior a 25%.

Então, no mínimo 75% dos dados da amostra pertencem ao intervalo $[15, 25]$.

$$\frac{15}{50} = 0,3, \text{ logo a afirmação (A) é falsa.}$$

$$\frac{30}{50} = 0,6, \text{ logo a afirmação (B) é falsa.}$$

$$\frac{10}{50} = 0,2, \text{ logo a situação (C) pode ocorrer.}$$

$$\frac{35}{50} = 0,7, \text{ logo a afirmação (D) é falsa.}$$

A opção correta é a (C).

$$4. s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} \Leftrightarrow 4^2 = \frac{SS_x}{20-1} \Leftrightarrow 16 = \frac{SS_x}{19} \Leftrightarrow SS_x = 16 \times 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 304$$

A opção correta é a (A).

5. Amostra ordenada:

(20, 20, 21, 23, 45, 46, 46, 57, 57, 59, 59, 61, 62, 62, 65, 67).

Dimensão da amostra: 16 ($n = 16$)

$$P_{30} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{30 \times 16}{100} = 4,8 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [4,8] + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$P_{30} = x_{(5)} = 45$$

O maior valor da amostra que é inferior ao percentil 30 é o 23.

A opção correta é a (B).

Pág. 179

1.1.

a) Dimensão da amostra: 10 ($n = 10$).

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{12 + 20 + 8 + 15 + 25 + 14 + 10 + 15 + 25 + 18}{10} = \\ &= \frac{162}{10} = 16,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) SS_x &= (12 - 16,2)^2 + (20 - 16,2)^2 + (8 - 16,2)^2 + (15 - 16,2)^2 + \\ &+ (25 - 16,2)^2 + (14 - 16,2)^2 + (10 - 16,2)^2 + (15 - 16,2)^2 + \\ &+ (25 - 16,2)^2 + (18 - 16,2)^2 = 303,6 \end{aligned}$$

$$c) s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{303,6}{10-1} = \frac{303,6}{9} \approx 33,73$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{303,6}{9}} \approx 5,81$$

d) Amostra ordenada: (8, 10, 12, 14, 15, 15, 18, 20, 25, 25).

$$P_{35} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{35 \times 10}{100} = 3,5 \text{ (não é inteiro)}$$

$$\left[\frac{kn}{100} \right] + 1 = [3,5] + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$P_{35} = x_{(4)} = 14$$

$$P_{60} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{60 \times 10}{100} = 6 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{60} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{15 + 18}{2} = 16,5$$

1.2. A ordem da unidade estatística 14 é 4 porque 14

corresponde na amostra ordenada ao elemento de ordem 4, isto

é, a $x_{(4)}$.

Se $P_k = 14 = x_{(4)}$, então $\frac{kn}{100}$ representa um número não inteiro e

sabe-se que $3 < \frac{kn}{100} < 4$.

$$3 < \frac{10k}{100} < 4 \Leftrightarrow 3 < \frac{k}{10} < 4 \Leftrightarrow 30 < k < 40$$

Como $k \in \mathbb{N}$, conclui-se que

$$k \in \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}.$$

Então, a unidade estatística 14 pertence aos percentis 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 e 39.

2.1.

a) Dimensão da amostra: 40 ($n = 40$).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^5 \tilde{x}_j n_j}{40} = \frac{1 \times 7 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 5 + 5 \times 3}{40} = \frac{102}{40} = 2,55$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^5 (\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_j = (1 - 2,55)^2 \times 7 + (2 - 2,55)^2 \times 15 + \\ + (3 - 2,55)^2 \times 10 + (4 - 2,55)^2 \times 5 + (5 - 2,55)^2 \times 3 = 51,9$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{51,9}{40-1}} = \sqrt{\frac{51,9}{39}} \approx 1,15$$

$$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x] = [2,55 - 1,15; 2,55 + 1,15] = [1,4; 3,7]$$

Os valores da amostra que pertencem ao intervalo

$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x]$ são o 2 e o 3.

Dos 40 apartamentos que a agência imobiliária tem para alugar há 25 que têm 2 ou 3 assoalhadas.

Como $\frac{25}{40} = 0,625$, conclui-se que 62,5% dos apartamentos têm

um número de assoalhadas pertencente ao intervalo

$[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x]$.

b) $P_{80} = ?$

$$\frac{kn}{100} = \frac{80 \times 40}{100} = 32 \text{ (é inteiro)}$$

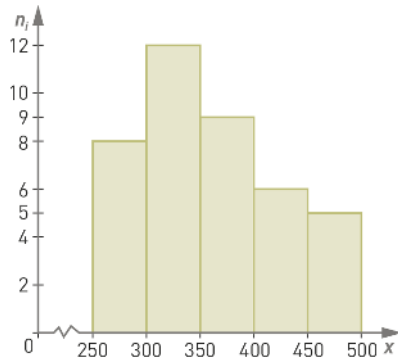
$$P_{80} = \frac{x_{(32)} + x_{(33)}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$$

Nota: $x_{(1)} = x_{(2)} = \dots = x_{(7)} = 1$; $x_{(8)} = x_{(9)} = \dots = x_{(22)} = 2$;

$x_{(23)} = x_{(24)} = \dots = x_{(32)} = 3$;

$x_{(33)} = x_{(34)} = \dots = x_{(37)} = 4$ e $x_{(38)} = x_{(39)} = x_{(40)} = 5$.

2.2. O histograma correspondente à distribuição das rendas é o seguinte:

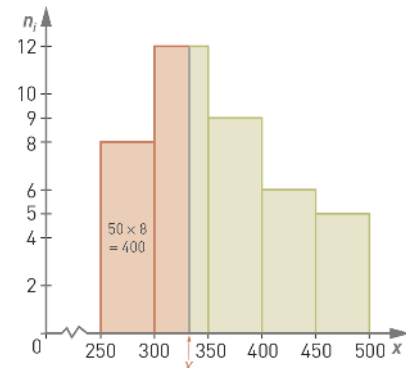


Seja A_t a área total do histograma (igual à soma dos cinco retângulos em que está dividido).

$$A_t = 50 \times 8 + 50 \times 12 + 50 \times 9 + 50 \times 6 + 50 \times 5 = \\ = 400 + 600 + 450 + 300 + 250 = 2000$$

P_{40} : percentil de ordem 40.

Seja x o valor de P_{40} . Então, a área do histograma à esquerda de x é igual a 40% da área total, ou seja, $0,4 \times 2000 = 800$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

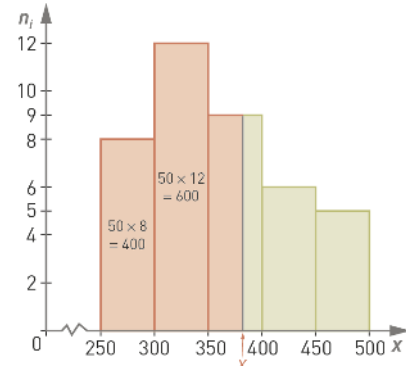
$$400 + (x - 300) \times 12 = 800 \Leftrightarrow 12x - 3600 = 400 \Leftrightarrow 12x = 4000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4000}{12} \Leftrightarrow x = 333,(\overline{3})$$

Então, $P_{40} = 333,(\overline{3})$.

P_{65} : percentil de ordem 65.

Seja x o valor de P_{65} . Então, a área do histograma à esquerda de x é igual a 65% da área total, ou seja, $0,65 \times 2000 = 1300$.



Tal como é sugerido pela figura, tem-se:

$$400 + 600 + (x - 350) \times 9 = 1300 \Leftrightarrow 9x - 3150 = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 3450 \Leftrightarrow x = \frac{3450}{9} \Leftrightarrow x = 383,(\overline{3})$$

Então, $P_{65} = 383,(\overline{3})$.

3.1. Tensão sistólica:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{113 + 120 + 115 + 130 + 148 + 154 + 124 + 100 + 141}{20} + \\ + \frac{136 + 125 + 117 + 118 + 160 + 155 + 123 + 137 + 150 + 130 + 146}{20} = \\ = \frac{2642}{20} = 132,1 \text{ mmHg}$$

$$SS_x = (113 - 132,1)^2 + (120 - 132,1)^2 + (115 - 132,1)^2 + \\ + (130 - 132,1)^2 + (148 - 132,1)^2 + (154 - 132,1)^2 + \\ + (124 - 132,1)^2 + (100 - 132,1)^2 + (141 - 132,1)^2 + \\ + (136 - 132,1)^2 + (125 - 132,1)^2 + (117 - 132,1)^2 + \\ + (118 - 132,1)^2 + (160 - 132,1)^2 + (155 - 132,1)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (123 - 132,1)^2 + (137 - 132,1)^2 + (150 - 132,1)^2 + \\
 &+ (130 - 132,1)^2 + (146 - 132,1)^2 = 5135,8 \\
 s_x &= \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{5135,8}{20-1}} = \sqrt{\frac{5135,8}{19}} \approx 16,44 \text{ mmHg.}
 \end{aligned}$$

Tensão diastólica:

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = \frac{80+82+56+79+90+92+60+61+78}{20} + \\
 &+ \frac{85+78+61+70+86+102+89+75+98+86+102}{20} = \\
 &= \frac{1610}{20} = 80,5 \text{ mmHg} \\
 SS_y &= (80-80,5)^2 + (82-80,5)^2 + (56-80,5)^2 + (79-80,5)^2 + \\
 &+ (90-80,5)^2 + (92-80,5)^2 + (60-80,5)^2 + (61-80,5)^2 + \\
 &+ (78-80,5)^2 + (85-80,5)^2 + (78-80,5)^2 + (61-80,5)^2 + \\
 &+ (70-80,5)^2 + (86-80,5)^2 + (102-80,5)^2 + (89-80,5)^2 + \\
 &+ (75-80,5)^2 + (98-80,5)^2 + (86-80,5)^2 + (102-80,5)^2 = \\
 &= 3545 \\
 s_y &= \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{3545}{20-1}} = \sqrt{\frac{3545}{19}} \approx 13,66 \text{ mmHg.}
 \end{aligned}$$

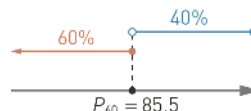
A variabilidade é maior na tensão sistólica porque o desvio-padrão é maior.

3.2. Relativamente aos 20 registos da tensão diastólica (em mmHg), a amostra ordenada é: (56, 60, 61, 61, 70, 75, 78, 78, 79, 80, 82, 85, 86, 86, 89, 90, 92, 98, 102, 102) .

$$P_{60} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{60 \times 20}{100} = 12 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{60} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{85 + 86}{2} = 85,5$$



Dos 40% dos elementos da amostra com maior valor, o que tem menor valor é o 86 mmHg.

3.3. Relativamente aos 20 registos da tensão sistólica (em mmHg), a amostra ordenada é: (100, 113, 115, 117, 118, 120, 123, 124, 125, 130, 130, 136, 137, 141, 146, 148, 150, 154, 155, 160) .

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{kn}{100} = \frac{75 \times 20}{100} = 15 \text{ (é inteiro)}$$

$$P_{75} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{146 + 148}{2} = 147$$

Analisando os valores da amostra ordenada, constata-se que só há 5 registos da tensão sistólica superiores a 147 mmHg (valor do percentil 75).

Logo, os registos da tensão sistólica que têm valor inferior ao percentil 75 são 15.