

Aluno _____

N.º ____ Turma ____ Data ____ - ____ - ____

1 Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

1.1. $\forall x \in \mathbb{Z}^-, 1 - \frac{1-x}{2} \leq 0$

1.2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

1.3. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$

1.4. $\exists n \in \mathbb{N} : 2n+1$ é um número par

2 Considera em $\mathbb{R}$ as condições:

$a(x) : 12 - 3x \geq 0$, $b(x) : |x| < 3$, $c(x) : \frac{7-2x}{6} < \frac{1}{2}$

Sejam A , B e C os conjuntos-solução das condições $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, respetivamente.

2.1. Representa em extensão:

a) $\{x \in \mathbb{N} : b(x)\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} : a(x) \wedge c(x)\}$

2.2. Representa na forma de intervalo ou reunião de intervalos disjuntos:

a) $A \cap C$

b) $B \setminus C$

c) $A \cap \bar{B}$

2.3. Determina o valor lógico de cada uma das proposições, indicando um contraexemplo no caso de considerares falso.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}^- : a(x)$

b) $\forall x \in \mathbb{N} : \sim c(x)$

c) $\forall x \in \mathbb{C} : -x \in \mathbb{C}$

d) $\forall x \in \mathbb{R} : b(x) \Rightarrow c(x)$

3 Considera as condições $p(x) : \frac{x+1}{2} \leq 5$ e $q(x) : 0,1x < 1$

3.1. Justifica que, em $\mathbb{N}$, as condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes.

3.2. Diz, justificando, qual é o valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \Rightarrow q(x)$.

3.3. Escreve a implicação contrarrecíproca de $\frac{x+1}{2} \leq 5 \Rightarrow 0,1x < 1$.

1

$$1.1. \quad 1 - \frac{1-x}{2} \leq 0 \iff 2 - 1 + x \leq 0 \iff x \leq -1.$$

O valor lógico de $\forall x \in \mathbb{Z}^-, 1 - \frac{1-x}{2} \leq 0$ é verdadeiro.

$$1.2. \quad \text{Se } x=0 \text{ tem-se } 0^2 > 0, \text{ o que é falso.}$$

O valor lógico de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ é falso.

$$1.3. \quad \text{Considerando, por exemplo, } x = -3, \text{ tem-se } \sqrt{(-3)^2} \neq -3.$$

O valor lógico de $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ é falso.

$$1.4. \quad \text{Verifica-se que } \forall n \in \mathbb{N} : 2n+1 \text{ é um número ímpar.}$$

O valor lógico de $\exists n \in \mathbb{N} : 2n+1$ é um número par, é falso.

2

$$12 - 3x \geq 0 \iff -3x \geq -12 \iff x \leq 4; A =]-\infty, 4]$$

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3; B =]-3, 3[$$

$$\frac{7-2x}{6} < \frac{1}{2} \iff 7-2x < 3 \iff -2x < -4 \iff x > 2; C =]2, +\infty[$$

$$2.1. \text{ a) } \{x \in \mathbb{N} : b(x)\} = \{1, 2\}$$

$$\text{ b) } \{x \in \mathbb{N} : a(x) \wedge c(x)\} = \{3, 4\}$$

$$2.2. \text{ a) } A \cap C =]-\infty, 4] \cap]2, +\infty[=]2, 4]$$

$$\text{ b) } B \setminus C = B \cap \bar{C} =]-3, 2]$$

$$\text{ c) } A \cap \bar{B} =]-\infty, 4] \cap (]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[) =]-\infty, -3] \cup [3, 4]$$

$$2.3. \text{ a) } \forall x \in \mathbb{Z}^- : a(x); \text{ verdadeiro.}$$

$$\text{ b) } \exists x \in \mathbb{N} : \sim c(x); \text{ verdadeiro.}$$

$$\text{ c) } \forall x \in C, -x \in C; \text{ falso. Por exemplo, } 3 \in C \text{ e } -3 \notin C.$$

$$\text{ d) } \forall x \in \mathbb{R}, b(x) \Rightarrow c(x); \text{ falso. Por exemplo, } -2 \in B \text{ e } -2 \notin C.$$

3

$$3.1. \quad \frac{x+1}{2} \leq 5 \iff x \leq 9; 0,1x < 1 \iff x < 10;$$

$$\{x \in \mathbb{N} : p(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : q(x)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$3.2. \quad \text{Sejam } P \text{ e } Q \text{ os conjuntos-solução de } p(x) \text{ e } q(x) \text{ em } \mathbb{R}. P =]-\infty, 9] \text{ e } Q =]-\infty, 10[.$$

Como $P \subset Q$, conclui-se que a proposição é verdadeira.

$$3.3. \quad \text{A implicação contrarrecíproca de } \frac{x+1}{2} \leq 5 \Rightarrow 0,1x < 1 \text{ é } 0,1x \geq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2} > 5.$$