

Aluno _____

N.º ____ Turma ____ Data ____ - ____ - ____

1 Considera as proposições:

p : “O Tiago pratica voleibol.”

q : “O Tiago pratica *surf*.”

s : “O Tiago não pratica ténis.”



1.1. Qual das seguintes expressões é a tradução simbólica da proposição:

“Se o Tiago não pratica *surf*, então o Tiago pratica ténis ou pratica voleibol”.

(A) $q \wedge (p \vee \sim s)$

(B) $\sim q \Rightarrow (\sim s \wedge p)$

(C) $(\sim s \vee p) \Rightarrow \sim q$

(D) $\sim q \Rightarrow (\sim s \vee p)$

1.2. Sabendo que a proposição $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (s \vee \sim p)$ é verdadeira, pode afirmar-se que:

(A) O Tiago pratica voleibol, não pratica *surf* e não pratica ténis.

(B) O Tiago pratica voleibol e ténis mas não pratica *surf*.

(C) O Tiago não pratica voleibol, nem ténis nem *surf*.

(D) O Tiago pratica voleibol e *surf* mas não pratica ténis.

2 Considera a seguinte tabela de verdade:

a	b	p
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A proposição p é equivalente a:

(A) $a \vee \sim b$

(B) $\sim a \wedge b$

(C) $b \Rightarrow a$

(D) $\sim a \vee b$

3 Considera em $\mathbb{R}$ as condições:

$$p(x) : 20 - 3x \geq 47 ; \quad q(x) : |x| < 4 \wedge x^2 + 5 < 0$$

Das seguintes proposições indica a que é verdadeira.

(A) $\exists x \in \mathbb{N} : p(x)$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}, \sim q(x)$

(C) $\forall x \in \mathbb{R}^-, p(x)$

(D) $\exists x \in \mathbb{R} : q(x)$

4 Sejam a , b , c e d proposições elementares.

4.1. Admite que a e b são proposições verdadeiras e c e d são proposições falsas.

Indica o valor lógico de:

a) $\sim(a \vee c) \Rightarrow \sim(b \wedge c)$

b) $\sim(\sim a) \Rightarrow \sim[(c \wedge d) \vee (a \wedge b)]$

4.2. Mostra que $a \wedge [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)]$ é uma contradição por cada um dos seguintes processos:

a) Completando a seguinte tabela de verdade:

a	b	$\sim a$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow \sim a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)$	$a \wedge [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)]$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

b) Utilizando as propriedades das operações lógicas e simplificando a expressão.

5 Sejam p , q e r proposições elementares.

Considera a proposição: $[(q \wedge r) \Rightarrow r] \Rightarrow \sim q$

5.1. Mostra que a proposição dada é equivalente a $\sim q \vee (p \wedge \sim r)$.

5.2. Determina o valor lógico da proposição dada, sabendo que a proposição q tem valor lógico falso.

6 Considera os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq \pi\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{4} - \frac{3x-1}{2} < 3\right\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 = 0\}$$

6.1. Representa na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

a) $B \setminus A$

b) $A \cap \bar{B}$

6.2. Representa em extensão cada um dos conjuntos:

a) $D = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A \wedge x \in B\}$

6.3. Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}^-, x \notin B$

b) $\exists x \in C : x \in A$

6.4. Escreve a negação de cada uma das proposições referidas em 6.3.

1 1.1. $\sim q \Rightarrow (\sim s \vee p)$

Opção: (D)

1.2. Se $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (s \vee \sim p)$ é verdadeira, pode afirmar-se que $\sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira e $(s \vee \sim p)$ também.

Assim, $p \Rightarrow q$ é falsa, sendo por isso p verdadeira e q falsa.

Como $(s \vee \sim p)$ é verdadeira e $\sim p$ é falsa, então s é verdadeira.

Conclui-se que p é verdadeira, q é falsa e s é verdadeira, ou seja, o Tiago pratica voleibol e não pratica *surf* nem ténis.

Opção: (A)

2 Verifica-se que $\sim a \vee b$ é equivalente a p .

a	b	$\sim a$	$\sim a \vee b$	p
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Opção: (D)

3 $20 - 3x \geq 47 \Leftrightarrow -3x \geq 27 \Leftrightarrow x \leq -9$

$|x| < 4 \wedge x^2 + 5 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4 \wedge x^2 < -5$. Condição impossível em $\mathbb{R}$.

Se $q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$, então $\sim q(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sim q(x)$ é verdadeira.

Opção: (B)

4 4.1. a) $\sim(a \vee c) \Rightarrow \sim(b \wedge c)$

Se a e b são proposições verdadeiras e c e d são falsas, então:

$a \vee c$ é verdadeira, ou seja, $\sim(a \vee c)$ é falsa.

Na implicação $\sim(a \vee c) \Rightarrow \sim(b \wedge c)$ tem-se o antecedente falso, pelo que a implicação é verdadeira.

Valor lógico: verdadeiro.

b) $\sim(\sim a) \Rightarrow \sim[(c \wedge d) \vee (a \wedge b)]$

$a \Rightarrow \sim[(c \wedge d) \vee (a \wedge b)]$

Se a e b são verdadeiras, $a \wedge b$ é verdadeira. Então $(c \wedge d) \vee (a \wedge b)$ é verdadeira e $\sim[(c \wedge d) \vee (a \wedge b)]$ é falsa. Como a é verdadeira, a implicação

$a \Rightarrow \sim[(c \wedge d) \vee (a \wedge b)]$ é falsa, pois o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Valor lógico: falso

4.2. a)

a	b	$\sim a$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow \sim a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)$	$a \wedge [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)]$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F

A proposição é sempre falsa, logo, é uma contradição.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } a \wedge [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \sim a)] &\Leftrightarrow a \wedge (\sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee \sim a) \Leftrightarrow \\
 &[(a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b)] \wedge (\sim b \vee \sim a) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge (\sim b \vee \sim a) \Leftrightarrow \\
 &\underbrace{\quad}_{\text{F}} \\
 &(a \wedge b \wedge \sim b) \vee (a \wedge b \wedge \sim a) \Leftrightarrow F
 \end{aligned}$$

Conclui-se que a proposição é uma contradição.

$$\begin{aligned}
 \text{5 5.1. } [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow \sim q &\Leftrightarrow \sim[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee \sim q \Leftrightarrow \\
 &[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee \sim q \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee \sim q] \wedge (\sim r \vee \sim q) \Leftrightarrow \\
 &(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee \sim q) \\
 &\text{Pondo } \sim q \text{ em evidência obtém-se } \sim q \vee (p \wedge \sim r).
 \end{aligned}$$

5.2. Se q é falsa, $\sim q$ é verdadeira. Então, a disjunção $\sim q \vee (p \wedge \sim r)$ é verdadeira, independentemente do valor lógico de $p \wedge \sim r$.

A proposição é verdadeira.

$$\text{6 } A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq \pi\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{4} - \frac{3x-1}{2} < 3\right\} \text{ e } C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 = 0\}$$

$$\text{6.1. a) } A =]-5, \pi];$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{3x-1}{2} < 3 \Leftrightarrow x-1-6x+2 < 12 \Leftrightarrow -5x < 11 \Leftrightarrow x > -\frac{11}{5}.$$

$$\text{Então, } B = \left]-\frac{11}{5}, +\infty\right[; \quad B \setminus A = B \cap \bar{A} =]\pi, +\infty[$$

$$\text{b) } \bar{B} = \left]-\infty, -\frac{11}{5}\right]; \quad A \cap \bar{B} =]-5, \pi] \cap \left]-\infty, -\frac{11}{5}\right] = \left]-5, -\frac{11}{5}\right]$$

$$\text{6.2. a) } D = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{b) } E = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A \wedge x \in B\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{6.3. a) } \forall x \in \mathbb{Z}^-, x \notin B.$$

Por exemplo, $-1 \in \mathbb{Z}^-$ e $-1 \in B$. O valor lógico é Falso.

$$\text{b) } x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5. \text{ Então, } C = \{-5, 5\}. \\
 \exists x \in C : x \in A \text{ é uma proposição falsa.}$$

6.4. Escreve a negação de cada uma das proposições referidas em 6.3.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{Z}^-, x \notin B) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}^- : x \in B$$

$$\sim(\exists x \in C : x \in A) \Leftrightarrow \forall x \in C : x \notin A$$