

Aluno _____

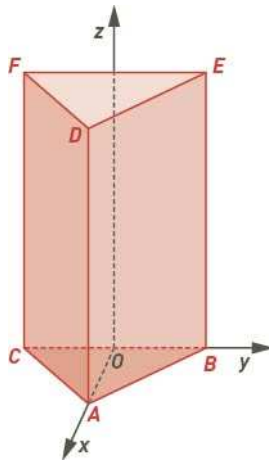
N.º ____ Turma ____ Data ____ - ____ - ____

- 1 No plano, em relação a um referencial o.n., considera os pontos $A(-1, 2)$, $B(-3, 4)$ e $C(3, 2)$.

1.1. Determina o comprimento da mediana do triângulo $[ABC]$ em que uma das extremidades é A .

1.2. Determina as coordenadas de um ponto P da reta AC , não pertencente a $[AC]$, tal que $\overline{BP} = \sqrt{8}$.

- 2 Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto mas não regular.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DE} = \overline{DF}$;
- a base $[ABC]$ está contida no plano xOy ;
- a face $[BEFC]$ está contida no plano yOz ;
- O é o ponto médio de $[BC]$;
- o ponto D tem de coordenadas $(4, 0, 10)$;
- $\overline{AB} = 5$.

2.1. Determina as coordenadas dos vértices B e F .

2.2. Representa por uma equação o plano que passa pelo ponto médio de $[DE]$ e é paralelo ao plano $y = 3$.

2.3. Determina o volume do prisma.

2.4. Determina k de modo que o plano definido pela equação $z = k$ divida o prisma em dois, em que o volume do prisma cujos pontos têm cota não superior a k é 40% do volume do prisma dado.

1

- 1.1. Se A é uma das extremidades da mediana, a outra é o ponto médio do lado oposto a A , isto é, $[BC]$. Seja M esse ponto. $M \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4+2}{2} \right)$, isto é, $M(0, 3)$.

$$\overline{AM} = \sqrt{(0+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}. \text{ O comprimento da mediana é } \sqrt{2}.$$

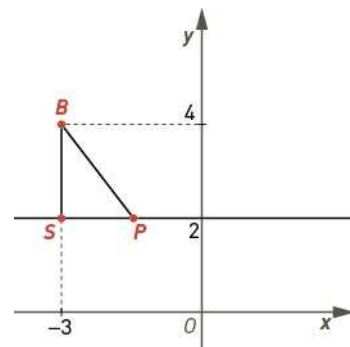
- 1.2. Repara que os pontos A e C têm a mesma ordenada. Então, a reta AC é definida pela equação $y = 2$.

Os pontos cuja distância a B é $\sqrt{8}$ são os pontos $(x, 2)$ tais que:

$$\begin{aligned} \overline{BP}^2 &= 2^2 + (x+3)^2 \\ (\sqrt{8})^2 &= 4 + x^2 + 6x + 9 \iff x^2 + 6x + 5 = 0 \iff \\ \iff x &= \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} \iff x = -1 \vee x = -5 \end{aligned}$$

Os pontos da reta AC tais que $\overline{BP} = \sqrt{8}$ são $(-1, 2)$ e $(-5, 2)$.

O ponto que não pertence a $[AC]$ é $(-5, 2)$.



2

- 2.1. Como o prisma é reto, a projeção ortogonal de D sobre o plano xOy é A . Então, as coordenadas de A são $(4, 0, 0)$.

O triângulo $[OAB]$ é retângulo. Como $\overline{AB} = 5$, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 \iff \overline{OB}^2 + 4^2 = 5^2 \iff \overline{OB}^2 = 9. \text{ Logo, } \overline{OB} = 3 \text{ e } \overline{OC} = 3 \text{ também.}$$

O ponto B tem coordenadas $(0, 3, 0)$ e o ponto F tem coordenadas $(0, -3, 10)$.

- 2.2. Sabe-se que $D(4, 0, 10)$ e $D(0, 3, 10)$.

Sendo S o ponto médio de $[DE]$, tem-se $S\left(4, \frac{3}{2}, 10\right)$. O plano que passa pelo ponto médio de $[DE]$ e é paralelo ao plano $y = 3$ é o plano de equação $y = \frac{3}{2}$.

- 2.3. Seja V o volume do prisma. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} \times \overline{AD}$

$$\text{Então, } V = \frac{6 \times 4}{2} \times 10 = 120.$$

- 2.4. O prisma constituído pelos pontos de cota não superior a k tem base igual à do prisma e altura igual a k , sendo $k > 0$.

Seja V_1 o volume do prisma de altura k .

$$V_1 = 0,4 \times V \iff \frac{6 \times 4}{2} \times k = 0,4 \times 120 \iff 12k = 48 \iff k = \frac{48}{12} \iff k = 4$$