

Miniteste de Avaliação 3

Aluno _____

N.º ____ Turma ____ Data ____ - ____ - ____

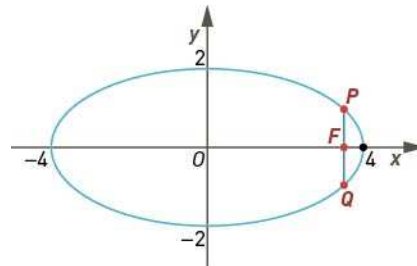
- 1** No plano, em relação a um referencial o.n. Oxy , considera o triângulo $[ABC]$, sendo $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ e $C(-4, 3)$.

- 1.1.** Determina o comprimento do menor lado do triângulo $[ABC]$.
- 1.2.** Mostra que o triângulo $[AMC]$, sendo M o ponto médio de $[AB]$, é retângulo em M .
- 1.3.** Determina uma equação cartesiana, na forma reduzida, da mediatriz de $[AC]$.

- 2** No plano, em relação a um referencial o.n. Oxy , considera a circunferência definida pela equação $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ e o semiplano definido pela inequação $y \leq x+4$.

- 2.1.** Mostra que o centro da circunferência pertence à fronteira do semiplano.
- 2.2.** Sejam A e B os pontos de interseção da circunferência dada com o eixo Oy .
Representa através de uma equação na forma reduzida a circunferência em que $[AB]$ é um dos diâmetros.

- 3** Na figura, em referencial o.n. Oxy , está representada a elipse de centro na origem do referencial e vértices nos pontos de coordenadas $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$.



O ponto F representa o foco da elipse que tem abcissa positiva.

- 3.1.** Representa a elipse por uma equação na forma reduzida.
- 3.2.** Determina as coordenadas do ponto F .
- 3.3.** Mostra que $\overline{PQ} = 2$, sendo P e Q os pontos de interseção da elipse com a reta que passa em F e é paralela a Oy .

- 4** No espaço, em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera a esfera definida pela inequação $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z \leq 4$.

- 4.1.** Determina as coordenadas do centro da esfera e o raio.
- 4.2.** Representa, através de equações cartesianas, todos os planos tangentes à esfera e que sejam paralelos a um dos planos coordenados.

1

$$1.1. \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}; \overline{BC} = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{50};$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50}. \text{ O menor lado é } \overline{AB} = \sqrt{20}.$$

$$1.2. M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0). \text{ Pelo Teorema de Pitágoras,}$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1^2 + 2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{6^2 + (-3)^2}\right)^2 = 50 \Leftrightarrow 5 + 45 = 50.$$

O triângulo $[AMC]$ é retângulo em M .

$$1.3. \text{ Seja } P(x, y) \text{ um ponto da mediatriz de } [AC].$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow -10x + 10y = 20 \Leftrightarrow y = x + 2$$

Mediatriz de $[AC]$: $y = x + 2$

2

$$2.1. \text{ O centro } C \text{ da circunferência de equação } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{ é o ponto } C(-1, 3).$$

A fronteira do semiplano é a reta definida por $y = x + 4$. Verifica-se que $3 = -1 + 4$, ou seja, o ponto C pertence à reta.

$$2.2. \text{ Sejam } A \text{ e } B \text{ os pontos de interseção da circunferência dada com o eixo } Oy.$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 3 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 = \sqrt{3} \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-3 = -\sqrt{3} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 - \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}. \text{ Seja } A(0, 3 + \sqrt{3}) \text{ e } B(0, 3 - \sqrt{3}) \text{ e } M \text{ o}$$

ponto médio de $[AB]$, isto é, $M(0, 3)$. Como A , B e M pertencem ao eixo Oy , a distância entre M e A é a diferença entre as suas ordenadas. $\overline{MA} = \sqrt{3}$.

A circunferência de diâmetro $[AB]$ é definida por $x^2 + (y-3)^2 = 3$.

3

$$3.1. \text{ Sabe-se que } a=4 \text{ e } b=2. \text{ Então, a elipse é representada pela equação } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$3.2. \text{ Seja } F(c, 0), \text{ com } c > 0. \text{ Considere-se } c^2 + b^2 = a^2 \Leftrightarrow c^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow c^2 = 12. \text{ Então } c = \sqrt{12}. \text{ O ponto } F \text{ é } (\sqrt{12}, 0).$$

$$3.3. \text{ A reta que passa em } F \text{ e é paralela a } Oy \text{ é a reta de equação } x = \sqrt{12}.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 4y^2 = 16 \\ x = \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

$$\text{Seja } P(\sqrt{12}, 1) \text{ e } Q(\sqrt{12}, -1). \text{ Então, } \overline{PQ} = \sqrt{(1+1)^2} = 2.$$

4

$$4.1. x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z \leq 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z+2)^2 - 4 \leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \leq 9 \text{ Centro: } (1, 0, -2); \text{ raio: } 3$$

$$4.2. x = -2; x = 4; y = -3; y = 3; z = -5; z = 1$$