

## Teste de Avaliação 2

Aluno \_\_\_\_\_

N.º \_\_\_\_ Turma \_\_\_\_ Data \_\_\_\_ - \_\_\_\_ - \_\_\_\_

N

- 1 o plano, em relação a um referencial o.n.  $Oxy$ , são dados dois vetores não nulos tais que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Sabe-se que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . Podes concluir que:

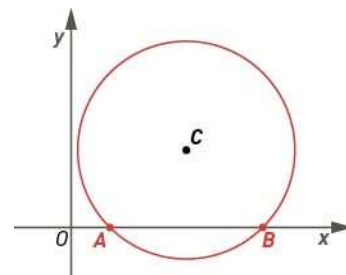
- (A) A soma dos vetores é o vetor nulo.  
 (B) Os vetores são não colineares.  
 (C) Os vetores são colineares e têm o mesmo sentido.  
 (D) Os vetores são colineares e têm sentidos opostos.

- 2 Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , está representada uma circunferência de raio  $r$  e centro no ponto  $C$ .

Sabe-se que a circunferência interseca o eixo  $Ox$  nos pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $\overline{AB} = 4$ .

Qual dos seguintes valores pode corresponder ao raio da circunferência?

- (A) 2 (B)  $\sqrt{5}$   
 (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$



- 3 No plano, em referencial o.n.  $Oxy$ , uma reta  $r$  é definida pela equação  $y = -2x + 3$ . Uma equação vetorial da reta  $r$  pode ser:

- (A)  $(x, y) = (1, 2) + k(1, -2), k \in \mathbb{R}$  (B)  $(x, y) = (1, 1) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$   
 (C)  $(x, y) = (-1, 5) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$  (D)  $(x, y) = (-1, 5) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$

- 4 Em relação a um referencial o.n.  $Oxy$  uma elipse é definida por uma equação do tipo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $a > 2$ . Sabe-se que a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos é  $4\sqrt{3}$ . Podes concluir que o valor de  $a$  é:

- (A)  $2\sqrt{3}$  (B) 12 (C)  $4\sqrt{3}$  (D) 48

- 5 No espaço, em referencial cartesiano  $Oxyz$ , uma superfície esférica, em que  $A$  e  $B$  são extremos de um dos diâmetros, é definida pela equação  $x^2 + y^2 + 4y + z^2 = 0$ .

Uma equação do plano mediador de  $[AB]$  pode ser:

- (A)  $-x + y - z = 1$  (B)  $2x - y + z = 0$   
 (C)  $x - 3y + z = 6$  (D)  $2x + y + z = 1$

6 No plano, em relação a um referencial o.n.  $Oxy$ , considera os pontos  $A(1, -2)$  e  $B(-2, 0)$ .

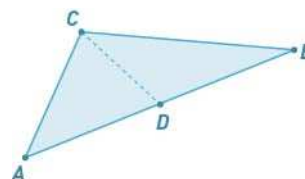
6.1. Determina uma equação na forma reduzida da:

- a) mediatriz de  $[AB]$ ;
- b) circunferência de diâmetro  $[AB]$ ;

6.2. Determina as coordenadas do ponto  $P$ , sabendo que  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$ .

7 Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ , sendo  $[CD]$  uma mediana do triângulo.

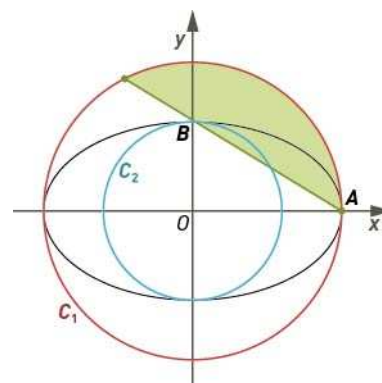
Mostra que  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD}$ .



8 Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , estão representadas uma elipse e duas circunferências com centros em  $O$  (origem do referencial).

Sabe-se que:

- o eixo maior da elipse é diâmetro da circunferência  $C_1$ ;
- o eixo menor é diâmetro da circunferência  $C_2$ ;
- os pontos  $A$  e  $B$  são vértices da elipse;
- a elipse é definida pela equação  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .



8.1. Determina as coordenadas dos focos da elipse.

8.2. Representa a circunferência  $C_2$  por uma equação na forma reduzida.

8.3. Define por uma condição o conjunto de pontos da região colorida, incluindo a fronteira.

9 Na figura, em referencial o.n.  $Oxyz$ , está representada uma pirâmide quadrangular regular.

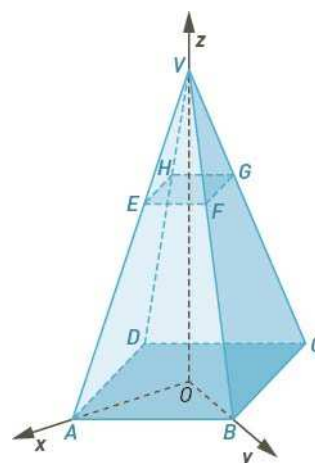
Sabe-se que:

- a base está contida no plano  $xOy$ ;
- os vértices  $A$  e  $V$  têm coordenadas, respetivamente,  $(4, 0, 0)$  e  $(0, 0, 9)$ ;
- o plano  $EFG$  é definido pela equação  $z = 6$ .

9.1. Escreve uma equação vetorial da reta  $AV$  e determina as coordenadas do ponto  $E$ .

9.2. Define por uma inequação a esfera de centro  $V$  e tangente ao plano  $EFG$ .

9.3. Determina o volume da pirâmide  $[EFGHV]$ .



- 1 Se os vetores fossem não colineares ter-se-ia  $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

Se os vetores são colineares com sentidos opostos ocorre uma das seguintes situações:

- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  e, neste caso,  $\vec{u} = -\vec{v}$  e  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{0}\| = 0$  ;
- $\|\vec{u}\| \neq \|\vec{v}\|$  e, neste caso,  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

Se os vetores são colineares com o mesmo sentido, tem-se  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

**Opção: (A)**

- 2 Em qualquer circunferência o raio é sempre maior ou igual a metade do comprimento de qualquer corda. O raio é igual a metade da corda no caso de a corda ser um diâmetro, não sendo esse o caso.

Como  $\overline{AB} = 4$  e  $[AB]$  não é um diâmetro conclui-se que o raio é maior do que 2.

**Opção: (B)**

- 3 A reta de equação  $y = -2x + 3$  tem declive  $-2$ .

Na opção (A), o declive da reta é  $-2$  mas o ponto  $(1, 2)$  não pertence à reta dada.

Na opção (B), o declive da reta é  $-\frac{1}{2}$ .

Na opção (C), o declive da reta é  $-\frac{1}{2}$ .

Na opção (D), o declive da reta é  $-2$  e o ponto  $(-1, 5)$  pertence à reta dada.

**Opção: (D)**

- 4 Sabe-se que o eixo maior é igual à soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos.

$$\text{Então, } 2a = 4\sqrt{3} \iff a = 2\sqrt{3}.$$

**Opção: (A)**

- 5 Sendo  $[AB]$  um diâmetro, o ponto médio é o centro da superfície esférica que terá de pertencer ao plano mediador de  $[AB]$ .

$$x^2 + y^2 + 4y + z^2 = 0 \iff x^2 + (y^2 + 4y + 4) + z^2 = 4 \iff x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 4$$

Centro da superfície esférica:  $(0, -2, 0)$

O centro pertence apenas ao plano dado na opção (C).

**Opção: (C)**

6

6.1. a) Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer da mediatriz de  $[AB]$ .

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

b) Centro da circunferência: ponto médio de  $[AB]$ .

$$\left( \frac{1-2}{2}, \frac{-2+0}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

$$\text{Raio: } \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(1+2)^2 + (-2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Equação da circunferência: } \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{4}$$

6.2. Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $P$ .

$$\overline{BA} = B - A = (-2, 0) - (1, -2) = (-3, 2)$$

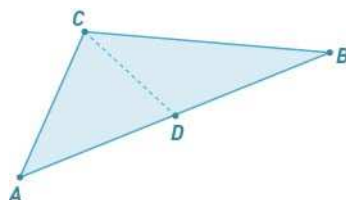
$$\overline{OP} = -\frac{1}{2} \overline{BA} \Leftrightarrow (x, y) = -\frac{1}{2}(-3, 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left( \frac{3}{2}, -1 \right)$$

As coordenadas do ponto  $P$  são:  $\left( \frac{3}{2}, -1 \right)$

7

Mostra que  $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CD}$ .



$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD}$$

Como  $\overline{AD} = \overline{DB}$ , tem-se  $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{DB}$ . (1)

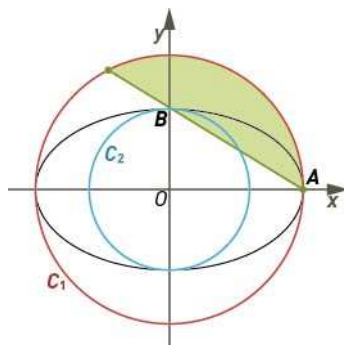
Repara que  $\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB}$ . Substituindo em (1), tem-se:  $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{DC} + \overline{CB}$ .

Daqui resulta que  $\overline{CD} - \overline{DC} = \overline{CA} + \overline{CB}$ , ou seja,  $\overline{CD} + \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$ ,

concluindo-se que  $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CD}$ .

8

8.1. Seja  $2c$  a distância focal.



Então, as coordenadas dos focos são do tipo  $(c, 0)$  e  $(-c, 0)$ .

Sabe-se que  $b^2 + c^2 = a^2$ .

Neste caso,  $9 + c^2 = 25 \iff c^2 = 16$ . Então,  $c = 4$ .

Coordenadas dos focos:  $(4, 0)$  e  $(-4, 0)$

8.2. Em relação à circunferência  $C_2$  sabe-se que o centro é o ponto de coordenadas  $(0, 0)$  e o raio é igual ao semieixo menor da elipse, ou seja, o raio é 3.

Equação da circunferência:  $x^2 + y^2 = 9$

8.3. Em relação à circunferência  $C_1$  sabe-se que:

- o centro tem de coordenadas  $(0, 0)$ ;
- o raio é igual ao semieixo maior da elipse, ou seja, 5.

Equação da circunferência  $C_1$ :  $x^2 + y^2 = 25$

Em relação à reta  $AB$  sabe-se que:

- coordenadas do ponto  $A$ :  $(5, 0)$
- coordenadas do ponto  $B$ :  $(0, 3)$
- um vetor diretor da reta é  $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3) - (5, 0) = (-5, 3)$ .

Declive da reta  $AB$ :  $-\frac{3}{5}$

Ordenada na origem da reta  $AB$  é 3.

Equação na forma reduzida da reta  $AB$ :  $y = -\frac{3}{5}x + 3$

O conjunto de pontos da região colorida da figura é definido pela condição:

$$x^2 + y^2 \leq 25 \wedge y \geq -\frac{3}{5}x + 3$$

9

- 9.1. Um vetor diretor da reta  $AV$  é  $\overrightarrow{AV} = V - A = (0, 0, 9) - (4, 0, 0) = (-4, 0, 9)$ .

Uma equação vetorial:

$$(x, y, z) = A + k\overrightarrow{AV}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (4, 0, 0) + k(-4, 0, 9), \quad k \in \mathbb{R}$$

Em relação ao ponto  $E$  sabe-se que a cota é 6 e pertence à reta  $AV$ .

$$(x, y, 6) = (4, 0, 0) + k(-4, 0, 9) \iff (x, y, 6) = (4 - 4k, 0, 9k)$$

$$\begin{cases} x = 4 - 4k \\ y = 0 \\ 6 = 9k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - \frac{8}{3} \\ y = 0 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 0 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto  $E$  são:  $\left(\frac{4}{3}, 0, 6\right)$

- 9.2. Centro da esfera  $V(0, 0, 9)$  e raio 3 (diferença entre a cota de  $V$  e a cota de qualquer ponto do plano  $z = 9$ ):

$$x^2 + y^2 + (z - 9)^2 \leq 3^2 \iff x^2 + y^2 + (z - 9)^2 \leq 9$$

- 9.3.  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \iff 2\overline{AB}^2 = 64 \iff \overline{AB}^2 = 32$

$$\text{Volume da pirâmide } [ABCDV]: \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \times 9 = \frac{1}{3} \times 32 \times 9 = 96$$

Altura da pirâmide “grande” 9 e a altura da pirâmide “pequena” é 3.

Se a altura da pirâmide “pequena” é  $\frac{1}{3}$  da altura da pirâmide “grande”, então o volume da pirâmide “pequena” é  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$  do volume da pirâmide “grande”.

$$\text{Assim, tem-se: } \frac{1}{27} \times 96 = \frac{32}{9}$$

O volume da pirâmide  $[EFGHV]$  é  $\frac{32}{9}$ .