

Aluno \_\_\_\_\_

N.º \_\_\_\_ Turma \_\_\_\_ Data \_\_\_\_ - \_\_\_\_ - \_\_\_\_

- 1** Considera as funções  $f$  e  $g$  de  $A = \{-3, -2, 1, 3, 4\}$  em  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- $G_f = \{(-3, 1), (-2, 4), (1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$
- $g(x) = 2x^2 + x$

- 1.1.** Diz, justificando, se a função  $f$  é ou não injetiva.
- 1.2.** Identifica o domínio e o contradomínio da restrição de  $f$  a  $\mathbb{N}$ .
- 1.3.** Identifica, na forma de conjunto, o gráfico da função  $g \circ f$ .

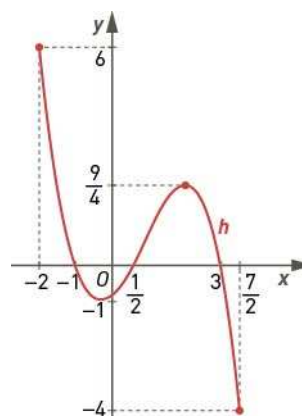
- 2** Considera a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{3x-7}{2}$  e a função  $g$  de domínio  $\{-5, -3, -1, 0, 2, 4\}$  tal que  $g(x) = 3 - 4x$ .

- 2.1.** Mostra que a função  $f$  é bijetiva.
- 2.2.** Determina  $f^{-1}(-8)$ .
- 2.3.** Caracteriza a função  $f^{-1}$ , inversa de  $f$ .
- 2.4.** Determina  $x$  de modo que  $(g \circ f)(x) = 23$ .
- 2.5.** Identifica o domínio e o contradomínio de  $f \circ g$ .
- 2.6.** Representa por uma expressão algébrica  $(f \circ g)(x)$ .

- 3** Na figura está representada em referencial o.n. Oxy parte do gráfico de uma função  $h$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que o domínio é  $\left[-2, \frac{7}{2}\right]$ , o contradomínio é  $[-4, 6]$  e o gráfico de  $h$  interseja o eixo Ox nos pontos de abcissas  $-1$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $3$ .

Sabe-se ainda que cada uma das equações  $h(x) = -1$  e  $h(x) = -\frac{9}{4}$  têm exatamente duas soluções.



- 3.1.** Indica as soluções da equação  $h(x) = 0$ .
- 3.2.** Diz se a função admite inversa. Justifica.
- 3.3.** Indica os valores de  $k$  para os quais a equação  $h(x) = k$  tem uma e só uma solução.

1

- 1.1.** A função  $f$  não é injetiva porque há dois objetos distintos com a mesma imagem.  
Por exemplo,  $f(1) = f(4) = 3$ .
- 1.2.** O domínio da restrição de  $f$  a  $\mathbb{N}$  é  $D_f \cap \mathbb{N}$ . Então,  $D_f \cap \mathbb{N} = \{1, 3, 4\}$ .  
 $f(1) = 3$ ;  $f(3) = 1$ ;  $f(4) = 3$ . O contradomínio de  $f|_{\mathbb{N}}$  é  $\{1, 3\}$ .
- 1.3.**  $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = 3$ . Procedendo da mesma forma para os restantes elementos,  
 $(g \circ f)(-2) = 36$ ;  $(g \circ f)(1) = 21$ ;  $(g \circ f)(3) = 3$ ;  $(g \circ f)(4) = 21$   
 $G_{g \circ f} = \{(-3, 3), (-2, 36), (1, 21), (3, 3), (4, 21)\}$

2

- 2.1.** Função injetiva:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$   
Pela implicação contrarrecíproca tem-se  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .  
 $\frac{3x_1 - 7}{2} = \frac{3x_2 - 7}{2} \Leftrightarrow 3x_1 - 7 = 3x_2 - 7 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ . Então,  $f$  é injetiva.  
Função sobrejetiva:  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$   
 $\frac{3x - 7}{2} = y \Leftrightarrow 3x - 7 = 2y \Leftrightarrow x = \frac{7 + 2y}{3}$ . A função  $f$  é sobrejetiva.  
Então  $f$  é bijetiva.
- 2.2.** Seja  $f^{-1}(-8) = x$ . Então,  $f(x) = -8 \Leftrightarrow \frac{3x - 7}{2} = -8 \Leftrightarrow x = -3$
- 2.3.** Como  $\frac{3x - 7}{2} = y \Leftrightarrow x = \frac{7 + 2y}{3}$ , tem-se  $f^{-1}(x) = \frac{7 + 2x}{3}$ , sendo  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ .
- 2.4.**  $(g \circ f)(x) = 23 \Leftrightarrow g(f(x)) = 23 \Leftrightarrow 3 - 4f(x) = 23 \Leftrightarrow f(x) = -5$   
Note-se que  $-5 \in D_g$ . Então,  $\frac{3x - 7}{2} = -5 \Leftrightarrow 3x - 7 = -10 \Leftrightarrow x = -1$ .
- 2.5.**  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{-5, -3, -1, 0, 2, 4\}$   
 $(f \circ g)(-5) = f(23) = 31$ ;  $(f \circ g)(-3) = f(15) = 19$ ;  $(f \circ g)(-1) = f(7) = 7$ ;  
 $(f \circ g)(0) = f(3) = 1$ ;  
 $(f \circ g)(2) = f(-5) = -11$ ;  $(f \circ g)(4) = f(-13) = -23$   
 $D'_{f \circ g} = \{-23, -11, 1, 7, 19, 31\}$
- 2.6.**  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{3(3 - 4x) - 7}{2} = 1 - 6x$ . Assim,  $(f \circ g)(x) = 1 - 6x$ .

3

- 3.1.**  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 3$ . As soluções são  $-1, \frac{1}{2}, 3$ .
- 3.2.** A função não tem inversa porque não é injetiva. Por exemplo,  $h(-1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = h(3) = 0$
- 3.3.**  $h(x) = k$  tem uma só solução se  $k \in \left[-4, 1 \left[ \cup \right] \frac{9}{4}, 6 \right]$ .