

Teste de Avaliação 2

 Unidade 5
Funções

Aluno _____

N.º ____ Turma ____ Data ____ - ____ - ____

- 1 Relativamente à função definida por $f(x) = -(x-a)^2 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sabe-se que o seu contradomínio é $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ e que $x=3$ é o eixo de simetria do seu gráfico. Então, pode concluir-se que:

(A) $a = \frac{5}{2}$ e $b = 3$

(B) $a = \frac{5}{2}$ e $b = -3$

(C) $a = -3$ e $b = \frac{5}{2}$

(D) $a = 3$ e $b = \frac{5}{2}$

- 2 De uma função quadrática g , sabe-se que satisfaz as seguintes condições:

▪ $f(-1) = f(5) = 0$

▪ $\mathbb{R}^+ \subset D'_f$

▪ $f(a) > 0$, $a \in \mathbb{R}$

Então, pode concluir-se que:

(A) $a \in]-1, 5[$

(B) $a \in \mathbb{R}^+$

(C) $a \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

(D) $a \in]5, +\infty[$

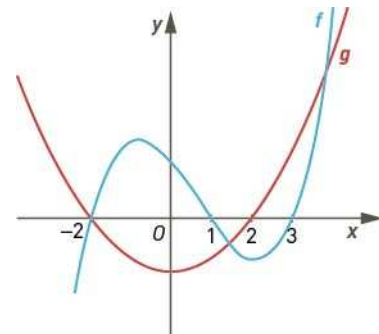
- 3 No referencial da figura estão representadas graficamente duas funções f e g , definidas por polinómios do 3.º e 2.º grau, respetivamente. Pode concluir-se que o conjunto-solução da condição $f(x) \times g(x) \geq 0$ é:

(A) $]-\infty, 3]$

(B) $]1, 2[\cup]3, +\infty[$

(C) $[1, 2] \cup [3, +\infty[$

(D) $[1, 2] \cup [3, +\infty[\cup \{-2\}$



- 4 De uma função quadrática f sabe-se que tem vértice $(2, -4)$ e $f(5) > 0$.

Sendo g uma função tal que $g(x) = |f(x)| - 1$, pode concluir-se que o contradomínio de g é:

(A) $[3, +\infty[$

(B) $[-1, +\infty[$

(C) $[1, +\infty[$

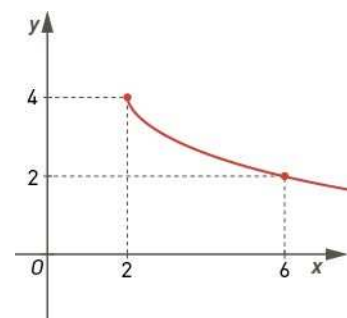
(D) $[-5, +\infty[$

- 5 Na figura está representada graficamente uma função h definida por uma expressão do tipo $h(x) = a + b\sqrt{x-c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

A partir da informação dada na figura conclui-se que os valores de a , b e c são:

(A) $a = 2$, $b = 4$ e $c = 2$ (B) $a = 4$, $b = 6$ e $c = 2$

(C) $a = 4$, $b = -1$ e $c = 2$ (D) $a = 4$, $b = 1$ e $c = 2$



- 6** Seja f uma função quadrática definida por $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$ e a família de funções g do tipo $g(x) = k(x-1)^2 + k^2 - 9$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.1. Relativamente à função f , identifica:

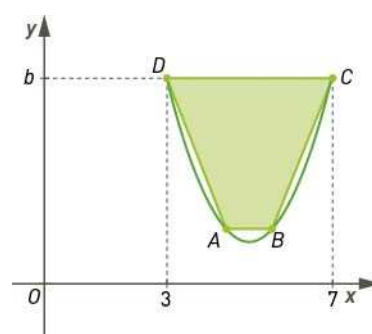
- a) o seu domínio e contradomínio;
- b) coordenadas do vértice e eixo de simetria do seu gráfico.

6.2. Considera $k = 1$ e determina os valores de x para os quais $g(x) \leq 0$.

6.3. Determina o(s) valor(es) de k para o(s) qual(ais) o contradomínio de g é $]-\infty, 16]$.

- 7** Na figura está representada uma função f definida em $[3, 7]$ por $f(x) = (x-5)^2 + 1$.

Sabe-se que os pontos C e D , de abcissas respetivamente 3 e 7, têm ordenada b .



7.1. Determina o contradomínio de f .

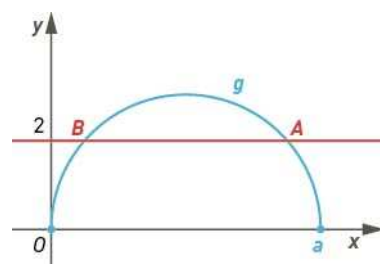
7.2. Considera os pontos A e B pertencentes ao gráfico de f e com a mesma ordenada.

Seja x a abcissa de A .

- a) Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $A(x) = x^3 - 17x^2 + 91x - 147$.
- b) Recorrendo à calculadora gráfica, determina as coordenadas do ponto A para as quais a área do trapézio $[ABCD]$ é máxima.

Apresenta o resultado arredondado às décimas (nos cálculos intermédios, se procederes a arredondamentos, conserva pelo menos 3 casas decimais).

- 8** No referencial da figura encontra-se representada graficamente uma função g definida por $g(x) = \sqrt{6x - x^2}$ e a reta $y = 2$ que intersesta o gráfico de g nos pontos A e B .



8.1. Sabendo que o domínio de g é um intervalo do tipo $[0, a]$, calcula a .

8.2. Determina as coordenadas dos pontos A e B .

8.3. Seja h a função afim definida por $h(x) = 3 - 2x$.

- a) Resolve a inequação $|h(x)| = g\left(\frac{3}{5}\right)$.
- b) Determina os valores de x para os quais $g(x) - h(x) < 0$.

1 $f(x) = -(x-3)^2 + \frac{5}{2}$

Opção: (D)

2 Se $\mathbb{R}^+ \subset D'_f$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Como -1 e 5 são zeros da função, então $f(a) > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

Opção: (C)

3

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) \times g(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Opção: (D)

4 Se o vértice é $(2, -4)$ e $f(5) > 0$, então o contradomínio de f é $[-4, +\infty[$.

Assim, pode concluir-se que o contradomínio de g é $[-1, +\infty[$.

Opção: (B)

5 O domínio de h é caracterizado por $x \geq c$. Então, $c = 2$.

Atendendo a que $h(2) = 4$, então $a = 4$. Por outro lado, $h(6) = 2$. Então, $b = -1$.

Opção: (C)

6

6.1. a) $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]-\infty, -3]$

b) Vértice: $(-1, -3)$; eixo de simetria: $x = -1$.

6.2. Para $k = 1$, tem-se $g(x) = (x-1)^2 - 8$.

$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 \leq 0$. Zeros de g : $1-2\sqrt{2}$ e $1+2\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$1-2\sqrt{2}$		$1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Então, $x \in [1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}]$.

6.3. Para o contradomínio de g ser $]-\infty, 16]$, deve verificar-se $k^2 - 9 = 16 \wedge k < 0$.

$k^2 = 25 \wedge k < 0 \Leftrightarrow (k = 5 \vee k = -5) \wedge k < 0 \Leftrightarrow k = -5$.

7

7.1. $f(3) = f(7) = 5$. O vértice tem coordenadas $(5, 1)$. Então, $D_f' = [1, 5]$.

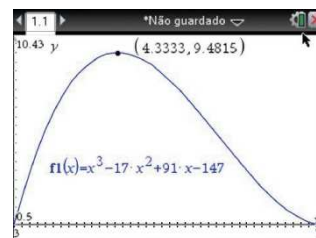
a) Sabe-se que $b = 5$ e $\overline{CD} = 7 - 3 = 4$. Atendendo à simetria da parábola, $\overline{AB} = 4 - 2(x - 3) = 10 - 2x$. A altura do trapézio é dada por $4 - f(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Então, } A(x) &= \frac{4 + 10 - 2x}{2} \times (5 - f(x)) = \frac{14 - 2x}{2} \times (5 - (x - 5)^2 - 1) = \\ &= (7 - x) \times (-x^2 + 10x - 21) = -7x^2 + 70x - 147 + x^3 - 10x^2 + 21x = \\ &= x^3 - 17x^2 + 91x - 147\end{aligned}$$

b) Inserindo na calculadora a expressão da área $A(x) = x^3 - 17x^2 + 91x - 147$ e definindo uma janela de visualização ajustada ao domínio $[3, 7]$, visualiza-se uma representação gráfica da função da qual se identifica o máximo.

A abscissa de A é 4,3333. Então:

$$f(4,3333) = (4,3333 - 5)^2 + 1 \approx 1,4. \text{ Tem-se } A(4,3; 1,4).$$



8

8.1. $6x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 6]$.

x	$-\infty$	0		6	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

Conclui-se que $a = 6$.

8.2. $g(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6x - x^2} = 2 \Leftrightarrow 6x - x^2 = 4 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 4 = 0 \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{-2} \wedge 0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{5} \vee x = 3 + \sqrt{5}$$

$$A(3 - \sqrt{5}, 2) \text{ e } B(3 + \sqrt{5}, 2)$$

8.3. a) $|h(x)| = g\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow |3 - 2x| = \sqrt{6 \times \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \Leftrightarrow |3 - 2x| = \frac{9}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3 - 2x = \frac{9}{5} \vee 3 - 2x = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow 15 - 10x = 9 \vee 15 - 10x = -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0,6 \vee x = 2,4$$

b) $g(x) - h(x) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{6x - x^2} < 3 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{6x - x^2} < 3 - 2x \Leftrightarrow$

$$6x - x^2 < (3 - 2x)^2 \wedge 0 \leq x \leq 6 \wedge 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - x^2 < 9 - 12x + 4x^2 \wedge 0 \leq x \leq 6 \wedge x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -5x^2 + 18x - 9 < 0 \wedge 0 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\text{Cálculo auxiliar: } -5x^2 + 18x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \vee x = 3$$

$$\text{Então, } -5x^2 + 18x - 9 < 0 \wedge 0 \leq x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{3}{5} \wedge 0 \leq x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{5}$$

$$x \in \left[0, \frac{3}{5}\right[$$