

Matemática A

CADERNO DE ACTIVIDADES

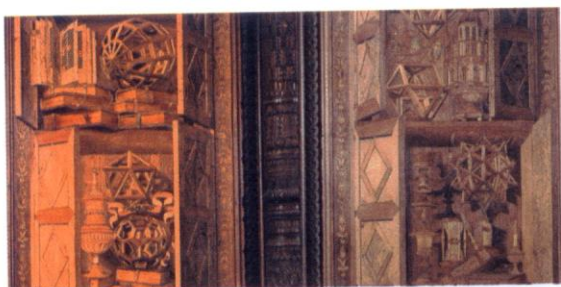
10.^{ano}

Casa da Aula

Projecto **Desafios**

Santillana
CONSTÂNCIA

Índice



MÓDULO INICIAL

SÍNTESE	4
RESPOSTA ABERTA	6
Auto-avaliação 1	10



TEMA 1

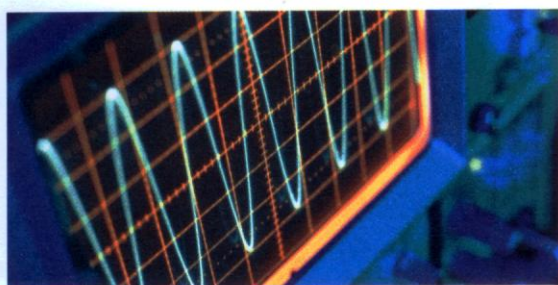
Geometria no plano e no espaço I

Resolução de problemas

SÍNTESE	12
ESCOLHA MÚLTIPLA	14
RESPOSTA ABERTA	16

Geometria Analítica

SÍNTESE (1.ª parte)	18
ESCOLHA MÚLTIPLA	20
RESPOSTA ABERTA	22
SÍNTESE (2.ª parte)	24
ESCOLHA MÚLTIPLA	25
RESPOSTA ABERTA	26
Auto-avaliação 2	28



TEMA 2

Funções e gráficos

30

Generalidades sobre funções

SÍNTESE	30
ESCOLHA MÚLTIPLA	32
RESPOSTA ABERTA	34

Função afim e função quadrática

SÍNTESE	37
ESCOLHA MÚLTIPLA	38
RESPOSTA ABERTA	40

Transformações de funções e função módulo

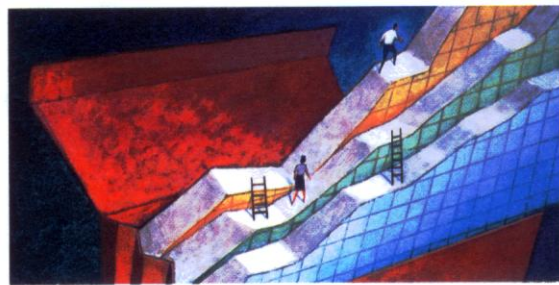
SÍNTESE	42
ESCOLHA MÚLTIPLA	44
RESPOSTA ABERTA	46

Funções polinomiais

SÍNTESE	48
ESCOLHA MÚLTIPLA	49
RESPOSTA ABERTA	50

Auto-avaliação 3

52



TEMA 3

Estatística

54

Organização de dados

SÍNTESE	54
ESCOLHA MÚLTIPLA	56
RESPOSTA ABERTA	57

Medidas de localização e dispersão

SÍNTESE	59
ESCOLHA MÚLTIPLA	62
RESPOSTA ABERTA	63

Distribuições bidimensionais

SÍNTESE	66
ESCOLHA MÚLTIPLA	67
RESPOSTA ABERTA	68

Auto-avaliação 4

70



72

ESCOLHA MÚLTIPLA 72

RESPOSTA ABERTA 73

SOLUÇÕES 76

SÍNTESE

■ POLÍGONOS SEMELHANTES

Dois polígonos são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência entre os lados de um e de outro e se os lados correspondentes têm medidas directamente proporcionais e os ângulos correspondentes são geometricamente iguais.

A razão entre as medidas dos lados correspondentes de polígonos semelhantes denomina-se **razão de semelhança**.

■ SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

- Se dois triângulos têm, entre si, dois ângulos geometricamente iguais, são semelhantes.



- Se dois triângulos têm, entre si, dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado é geometricamente igual, são semelhantes.



- Se dois triângulos têm, entre si, os três lados proporcionais, são semelhantes.



■ ÁREAS, VOLUMES E SEMELHANÇA DE FIGURAS

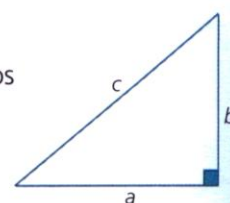
Se duas figuras são semelhantes, com razão de semelhança r , a razão entre as suas áreas é r^2 e a razão entre os seus perímetros é r .

Se dois sólidos são semelhantes, com razão de semelhança r , a razão entre os seus volumes é r^3 .

■ TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo rectângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



■ OPERAÇÕES COM RADICAIS

Propriedade	Exemplo
$(\sqrt[n]{a})^n = a, \forall a \geq 0$	$(\sqrt{3})^2 = 3$
$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a + b)\sqrt[n]{x}, \forall x \geq 0$	$2\sqrt[3]{6} - 5\sqrt[3]{6} = -3\sqrt[3]{6}$
$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \forall a, b \geq 0$	$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt[n]{a^n \times b} = a\sqrt[n]{b}, \forall a, b \geq 0$	$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \forall a \geq 0, \forall b > 0$	$\frac{\sqrt[3]{32}}{2} = \sqrt[3]{\frac{32}{8}} = \sqrt[3]{4}$

■ RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES — RADICAIS QUADRÁTICOS

Caso geral	Exemplo
$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{c\sqrt{a} \mp c\sqrt{b}}{a - b}$	$\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{5} - 2$

■ POLIEDROS

Um **poliedro** é um sólido geométrico limitado por faces que são polígonos planos.

Um poliedro diz-se **convexo** se está todo do mesmo lado de um qualquer plano que contenha uma face.

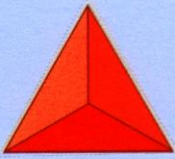
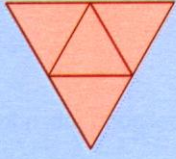
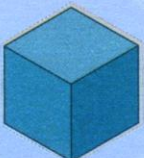
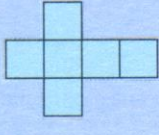
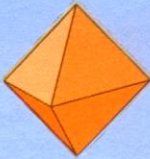
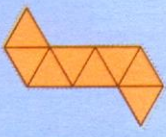
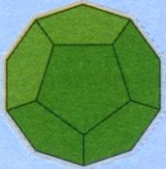
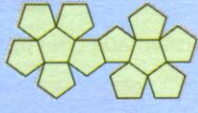
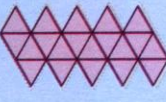
Um **poliedro** convexo diz-se **regular** se as suas faces são polígonos regulares geometricamente iguais e se em todos os vértices concorre o mesmo número de faces e de arestas.

■ IGUALDADE DE EULER

Num poliedro convexo, a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas mais dois.

$$F + V = A + 2$$

■ SÓLIDOS PLATÓNICOS

Tetraedro	Quatro faces, triângulos equiláteros		
Cubo	Seis faces, quadrados		
Octaedro	Oito faces, triângulos equiláteros		
Dodecaedro	Doze faces, pentágonos regulares		
Icosaedro	Vinte faces, triângulos equiláteros		

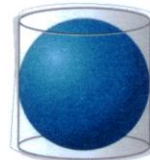
RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

O diâmetro da base e a altura de um cilindro são iguais ao diâmetro de uma esfera. Determine a razão entre:

- a) a área dos dois sólidos;
- b) os seus volumes.



2.

A área de um polígono é de 20 cm^2 . Calcule a área de outro polígono, semelhante àquele, se a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de cinco.

3.

Dois octógonos semelhantes têm perímetros de 24 cm e 80 cm, respectivamente. Quantas vezes é maior a área do segundo relativamente à área do primeiro?

4.

Um terreno tem a forma de um triângulo equilátero de 180 m de lado. Dividiu-se o terreno em duas parcelas traçando uma paralela a um dos lados contendo os pontos médios dos outros dois lados. Calcule a área da parte que tem forma de trapézio.



5.

Calcule a área do polígono sabendo que o raio da circunferência é de 6 cm.



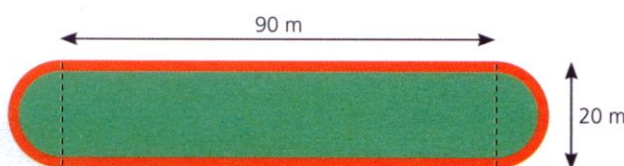
6.

Uma empresa que vende sumo, em embalagens com a forma de paralelepípedos cujas medidas são 11 cm por 6 cm por 15 cm, decidiu mudar para outras embalagens, com menos 10% de área da base e mais 10% de altura. Se a empresa mantiver o preço, a nova embalagem é vantajosa para o cliente? Justifique a sua resposta.



7.

Na figura está representada uma pista de atletismo formada por um rectângulo e dois semicírculos. De acordo com os dados, determine:



- a) o perímetro da pista;
- b) o número de voltas completas que um atleta tem de dar à pista numa prova de 1500 metros.

8.

Simplifique:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{27}$

c) $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} + \frac{\sqrt{18}}{3}$

e) $(2 - \sqrt{3})^2$

b) $3\sqrt{2} + \sqrt{32}$

d) $\sqrt{80} - \frac{15}{\sqrt{5}}$

f) $(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})$

9.

Escreva as seguintes fracções com denominador racional:

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

e) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

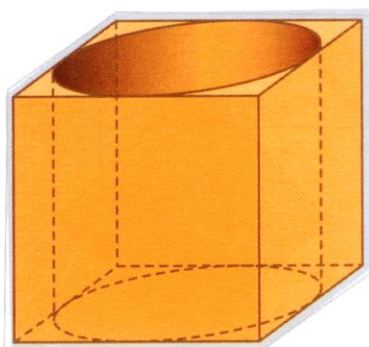
b) $\frac{-2}{3\sqrt{7}}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{5}}$

f) $\frac{5}{7 - \sqrt{2}}$

10.

O sólido da figura é um cubo de aresta 10 cm onde foi escavado um cilindro cuja base tem um raio de 5 cm. Calcule o valor exacto do volume do sólido.

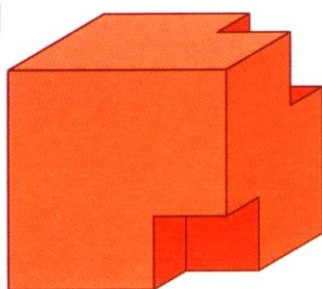


11.

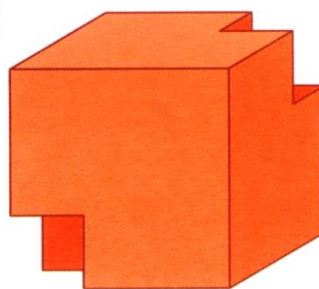
Foram cortados alguns cantos cúbicos a quatro cubos de madeira.

Depois dos cortes, só dois dos sólidos ficaram com a mesma forma. Identifique-os, justificando a sua escolha.

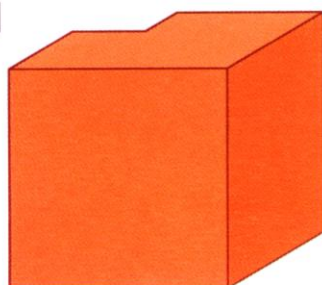
A



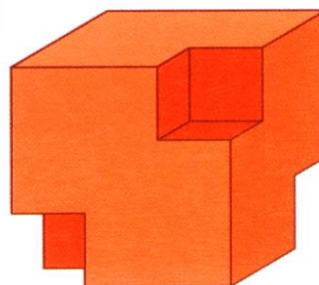
B



C



D



12.

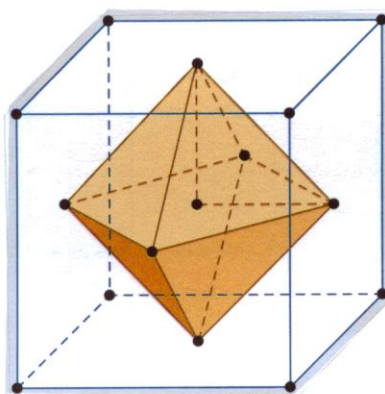
Num aquário, com a forma de um paralelepípedo, foram colocados 35 L de água. Sabendo que o aquário tem 6 dm de comprimento, 4 dm de largura e 5 dm de altura, determine:



- a altura da água dentro do aquário;
- a percentagem ocupada pela água relativamente à capacidade máxima do aquário.

13.

Na figura, estão representados dois dos **sólidos platónicos**. Os vértices do octaedro são os centros das faces do cubo. Sabendo que a aresta do octaedro mede 8 cm, determine a aresta do cubo.



14.

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $x(x - 3) = -2$

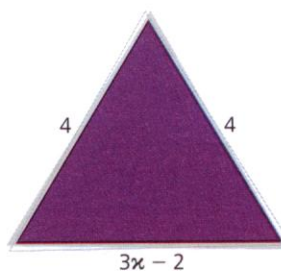
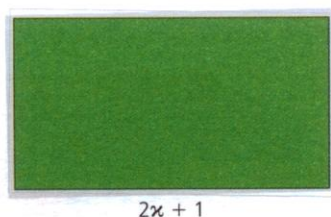
b) $x^2 - 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

d) $2 - \frac{3+x}{2} > 0 \wedge 3 - 2(1-x) > 0$

15.

Na figura, estão representados um rectângulo e um triângulo.

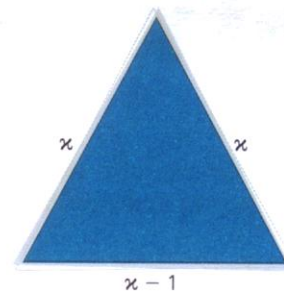


Determine:

- os valores de x , tal que o perímetro do rectângulo seja inferior ao perímetro do triângulo;
- o valor de x , para que a área do rectângulo seja igual a 3.

16.

O triângulo da figura ao lado é semelhante a um outro triângulo menor de perímetro 5. Determine o valor de x de forma que a razão de semelhança não seja superior a 4.

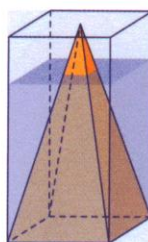
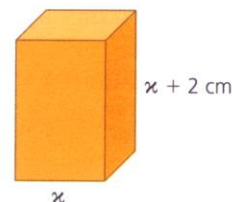


17.

Uma caixa de vidro tem a forma de um prisma quadrangular cuja altura excede a medida da aresta da base em 2 cm. Sabe-se que a área total do prisma é de 448 cm^2 .

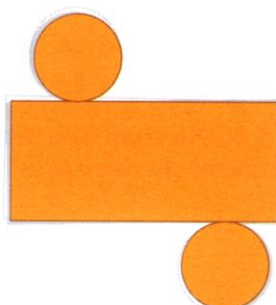
17.1 Determine as dimensões do prisma.

17.2 Introduziu-se, no prisma, uma pirâmide regular com base e altura iguais à do prisma, como indica a figura seguinte, e, de seguida, introduziu-se água até uma altura de 8 cm. Calcule a altura da água na caixa depois de se retirar a pirâmide.



18.

A parte lateral de um cilindro é um retângulo de dimensões $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Dos cilindros com esta parte lateral, qual tem maior volume?

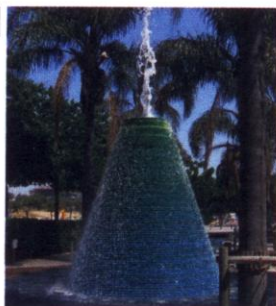


19.

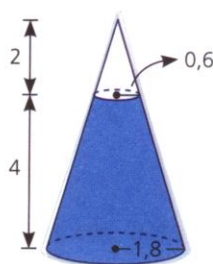
Na fotografia (figura A), pode observar um dos «vulcões de água» da Alameda dos Oceanos, no Parque das Nações, em Lisboa. Estes «vulcões» expelem periodicamente jactos de água.

Na figura B, está representado um cone de revolução. A parte sombreada desta figura é um esquema do sólido que serviu de base à construção do «vulcão de água».

A



B



As medidas de comprimento indicadas estão expressas em metros.

Determine o volume do «vulcão de água», indicando o resultado aproximado às unidades. Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática, 3.º Ciclo do Ensino Básico, 2006

Auto-avaliação 1

I

Para cada uma das cinco questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

A diagonal de um quadrado mede 10 cm. A área desse quadrado é de:

- (A) 10 cm^2
- (B) 25 cm^2
- (C) 50 cm^2
- (D) 100 cm^2

2.

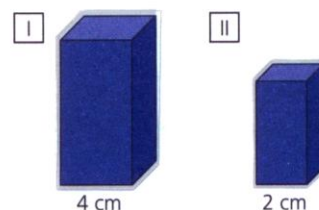
Qual das seguintes sequências de números pode representar o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, de um poliedro convexo?

- (A) 6, 6 e 14.
- (B) 6, 7 e 12.
- (C) 12, 20 e 30.
- (D) 20, 12 e 22.

3.

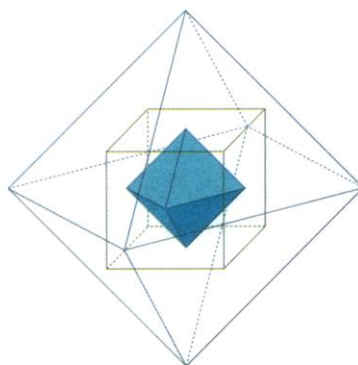
Na figura, estão representados dois prismas quadrangulares semelhantes. Sabendo que o volume do prisma I é de 64 cm^3 , o volume do prisma II é de:

- (A) 8 cm^3
- (B) 16 cm^3
- (C) 32 cm^3
- (D) 128 cm^3



4.

Unindo os centros das faces de um octaedro, obteve-se um cubo, seu dual; unindo os centros da face desse cubo, obteve-se um octaedro dual do cubo. Os octaedros são semelhantes.



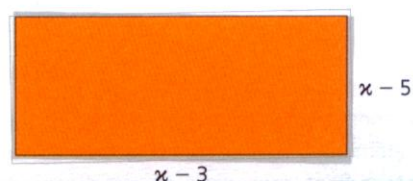
A razão da semelhança que transforma o primeiro octaedro no segundo é:

- (A) $\frac{1}{8}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 2
- (D) 8

5.

A área do rectângulo é de 35 cm^2 . O valor de x é de:

- (A) $x = \sqrt{20} \text{ cm}$
- (B) $x = 7 \text{ cm}$
- (C) $x = 9 \text{ cm}$
- (D) $x = 10 \text{ cm}$



II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

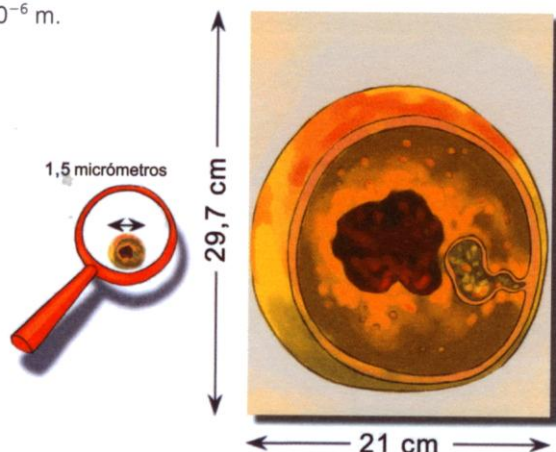
1.

Qual é a razão entre os volumes de dois cilindros semelhantes, se a razão entre as suas áreas é de $\frac{25}{49}$?

2.

Pretende-se desenhar numa folha A4 um micróbio circular de 1,5 micrómetros de diâmetro. Qual é a ampliação máxima?

Nota: 1 micrómetro = 10^{-6} m.



3.

A empresa de reciclagem Reciclan possui um depósito cheio de azeite. Este mede 25 m de largura e 14 m de comprimento, a sua profundidade varia desde os 16 m na parte menos profunda e os 20 m na zona mais profunda.

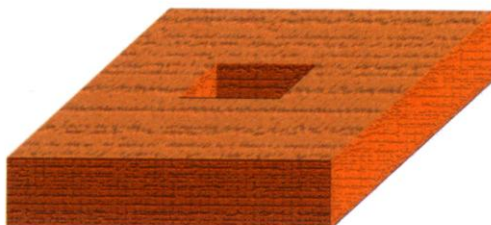
Determine:

- a área, em m^2 , das paredes laterais do depósito;
- a capacidade do depósito.



4.

Num terreno rectangular de dimensões 75 m $\times$ 90 m, escavou-se um tanque de lados 15 m $\times$ 20 m. A terra extraída estendida ao redor do tanque fez com que o nível do terreno subisse 10 cm. Determine a profundidade do tanque.



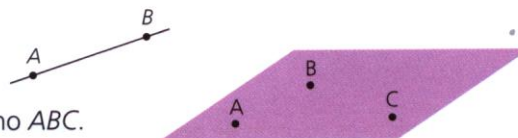
GRELHA DE AVALIAÇÃO

PARTE	I	II				
Questões	1 a 5	1	2	3.a)	3.b)	4
Cotações	$5 \times 10 = 50$	25	30	25	30	40

SÍNTESE

DEFINIÇÃO DE RECTA E DE PLANO

- Dois pontos distintos, A e B , definem a recta AB .
- Três pontos não-colineares, A , B , e C , definem o plano ABC .

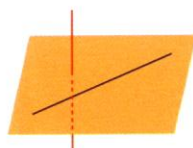


POSIÇÃO RELATIVA DE RECTAS

RECTAS COMPLANARES:

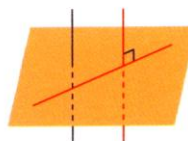
Rectas concorrentes	Rectas estritamente paralelas	Rectas coincidentes

RECTAS NÃO-COMPLANARES:



RECTAS PERPENDICULARES:

Duas rectas são perpendiculares se existe uma terceira recta paralela a uma e concorrente à outra, fazendo com esta um ângulo recto.



FORMAS DE DEFINIR UM PLANO

- Uma recta e um ponto que não lhe pertença definem um plano que os contém.
- Duas rectas estritamente paralelas definem um plano que as contém.
- Duas rectas concorrentes definem um plano que as contém.



POSIÇÃO RELATIVA DE PLANOS

Planos coincidentes	Planos estritamente paralelos	Planos concorrentes

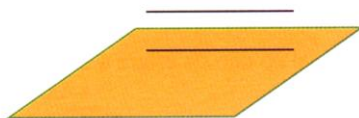
POSIÇÕES RELATIVAS DE RECTAS E DE PLANOS

Recta paralela ao plano	Recta secante ao plano	Recta aposta ao plano

■ CRITÉRIOS DE PARALELISMO

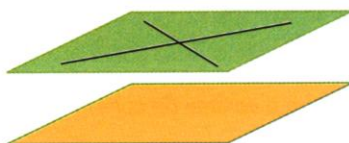
RECTA E PLANO

Uma recta é paralela a um plano se é paralela a uma recta do plano.



PLANOS

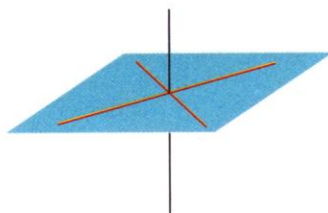
Dois planos são paralelos se um deles contém duas rectas concorrentes paralelas ao outro.



■ CRITÉRIOS DE PERPENDICULARIDADE

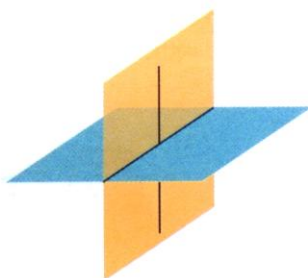
RECTA E PLANO

Uma recta é perpendicular a um plano se é perpendicular a duas rectas concorrentes do plano.



PLANOS

Dois planos são perpendiculares se um deles contém uma recta perpendicular ao outro.

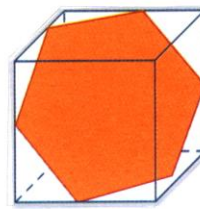
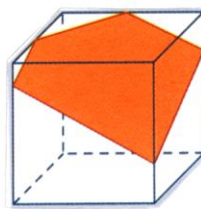
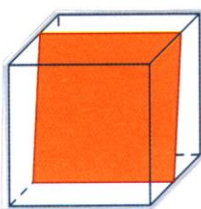
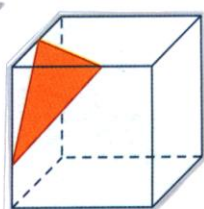


■ SECÇÕES

Chama-se secção à figura plana que resulta da intersecção de um sólido com um plano que lhe é secante.

SECÇÕES NO CUBO

As secções possíveis de obter na intersecção de um plano com um cubo são: triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

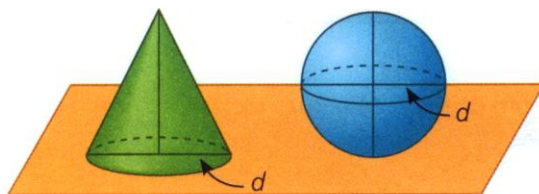


ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Na figura seguinte, o raio da base do cone é igual ao raio da esfera e a altura do cone é igual à altura da esfera.



Quantas vezes o volume da esfera é maior do que o volume do cone?

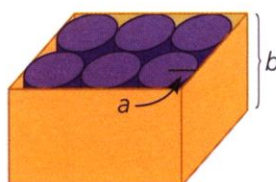
(A) 2

(B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$

(D) 4

2.

A figura seguinte representa uma caixa que contém seis cilindros geometricamente iguais tangentes às faces da caixa.



A percentagem, aproximada às unidades, do volume da caixa preenchido pelos cilindros é:

(A) 79

(B) 13

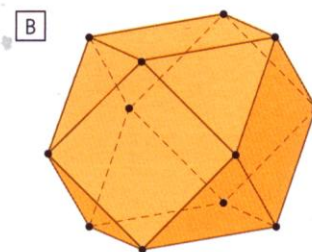
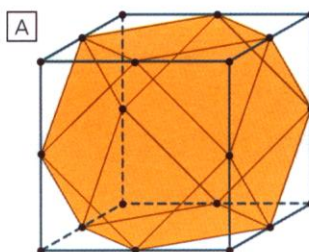
(C) 52

(D) 82

3.

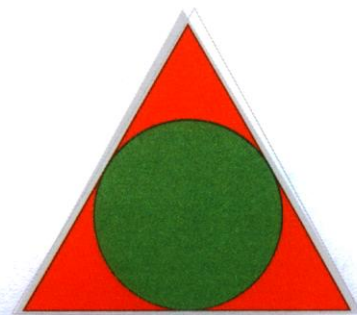
A figura B representa um cuboctaedro, que é um sólido obtido retirando do cubo, representado na figura A, oito pirâmides triangulares, cada uma das quais tendo como vértices um dos vértices do cubo, e os pontos médios das arestas que concorrem nesse vértice.

Sabendo que a medida da aresta do cubo é 3 cm, o volume do cuboctaedro é:

(A) $22,5 \text{ cm}^3$ (B) 18 cm^3 (C) $27 - \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^3$ (D) 27 cm^3 

4.

Na figura, está representado um triângulo equilátero, e neste está inscrito um círculo. Sabendo que o perímetro do triângulo é 18 cm, a área do círculo é:

(A) $3\pi \text{ cm}^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi \text{ cm}^2$ (C) $\frac{81}{25}\pi \text{ cm}^2$ (D) $9\pi \text{ cm}^2$ 

5.

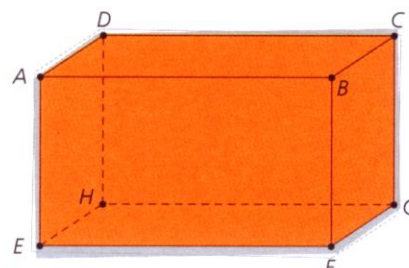
Considere uma superfície esférica de centro em O e diâmetro $[AB]$. Sabendo que o ponto C pertence à superfície esférica, indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

- (A) $\overline{OA} < \overline{OC}$ (B) $\overline{OA} > \overline{OC}$ (C) $\overline{AB} = 2\overline{OC}$ (D) $\overline{OB} = \frac{\overline{OC}}{2}$

6.

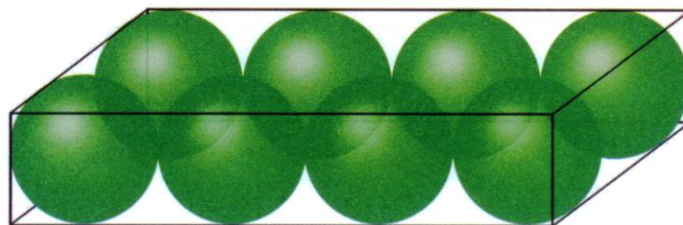
Considere o paralelepípedo representado na figura. A intersecção dos planos DHF e ABC é:

- (A) o ponto D .
(B) o conjunto vazio.
(C) o segmento de recta $[DB]$.
(D) a recta DB .



7.

Numa caixa como a que se mostra na figura, cabem oito bolas geometricamente iguais.

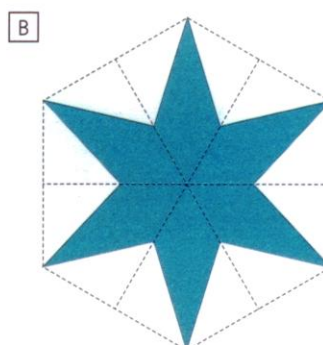
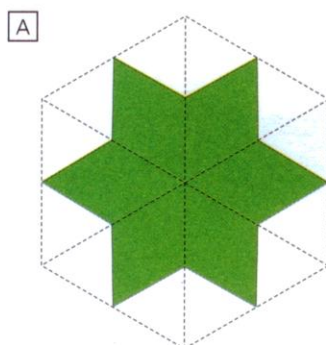


Quantas bolas caberiam se a caixa tivesse o dobro do comprimento, o triplo da altura e o quádruplo da largura?

- (A) 192 (B) 96 (C) 42 (D) 64

8.

Nas figuras A e B estão representados, a tracejado, dois hexágonos regulares geometricamente iguais e de lado 2. Cada um dos hexágonos tem inscrita uma estrela com doze vértices.



A estrela representada na figura A tem seis vértices coincidentes com os pontos médios dos lados do hexágono; cada um dos outros vértices coincide com o ponto médio de um segmento de recta cujos extremos são o centro e um vértice do hexágono.

A estrela representada na figura B tem seis vértices coincidentes com os vértices do hexágono; cada um dos outros vértices coincide com o ponto médio de um segmento de recta cujos extremos são o centro do hexágono e o ponto médio de um lado do hexágono.

Designa-se por A_A a área da estrela da figura A e por A_B a área da estrela da figura B.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $A_A > A_B$ (B) $A_A = A_B$ (C) $A_A < A_B$ (D) $A_B = \frac{2}{3} A_A$

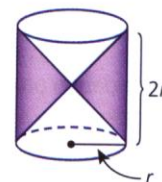
Adaptado de Itens 10.º ano de escolaridade (Gave, Outubro 2009)

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

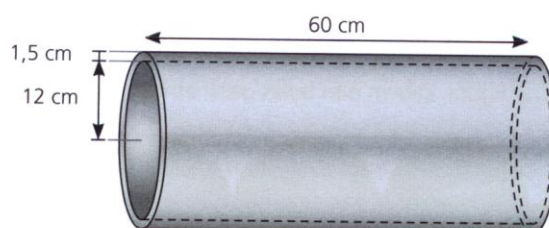
1.

A figura representa um cilindro ao qual foram retirados dois cones geometricamente iguais. Escreva uma expressão para o volume do sólido obtido.



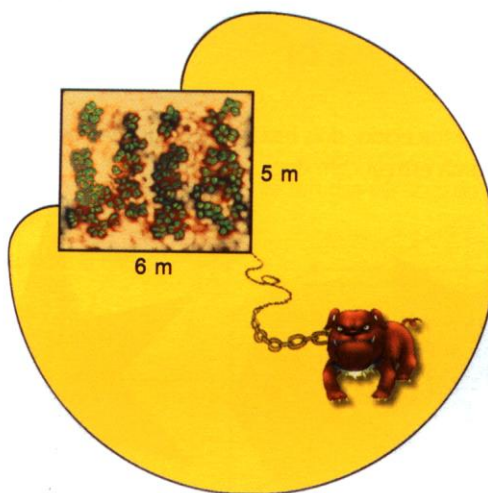
2.

Calcule o volume do material usado no fabrico do tubo com as dimensões indicadas na figura. Aproxime o resultado às unidades.



3.

O João prendeu o seu cão *Tigre*, com uma corda, a um canteiro rectangular com $6\text{ m} \times 5\text{ m}$. Se a corda tem $7,5\text{ m}$ de comprimento, qual é a área máxima, aproximada às centésimas, a que o *Tigre* tem acesso?

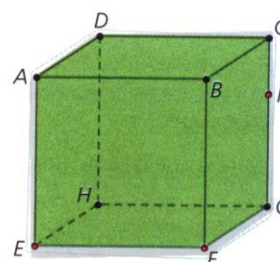


4.

A figura representa, em perspectiva cavaleira, um cubo no qual são assinalados alguns pontos.

4.1 Represente com rigor, na perspectiva, o corte definido pelo plano EIF .

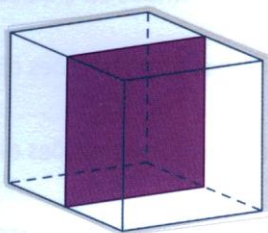
4.2 Determine o perímetro e a área da secção produzida pelo corte, sabendo que a aresta do cubo mede 3 cm e que $\overline{CI} = \frac{1}{3}\overline{CG}$.



5.

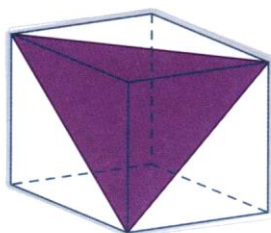
Determine a área da secção obtida, em cada caso, pela intersecção com um cubo de aresta 8 cm.

A



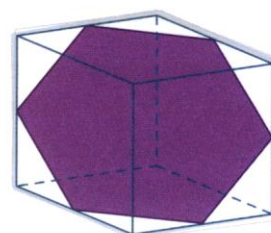
Os vértices da secção são os pontos médios das arestas a que pertencem.

B



Os vértices da secção são vértices do cubo.

C



Os vértices da secção são os pontos médios das arestas a que pertencem.

6.

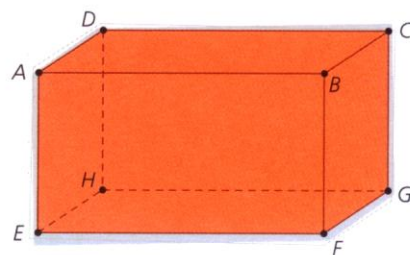
Considere o paralelepípedo representado na figura.

6.1 Indique:

- a) duas rectas paralelas à recta AB ;
- b) uma recta não-complanar com DC que lhe seja perpendicular;
- c) quatro pontos não-complanares;

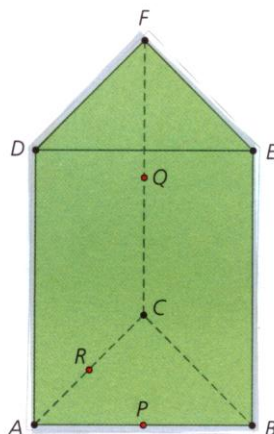
6.2 Diga qual é a posição relativa:

- a) dos planos AED e BFC ;
- b) da recta AD e do plano DHG ;
- c) das rectas BC e HG .



7.

A figura representa um prisma triangular recto cuja base é um triângulo rectângulo em A , em que $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{CQ} = \overline{CA}$, e em que P , Q e R são os pontos médios das arestas respectivas.



7.1 Identifique na figura a intersecção dos planos ADF e BEF .

7.2 Desenhe e identifique a secção produzida no prisma pelo plano PRQ .

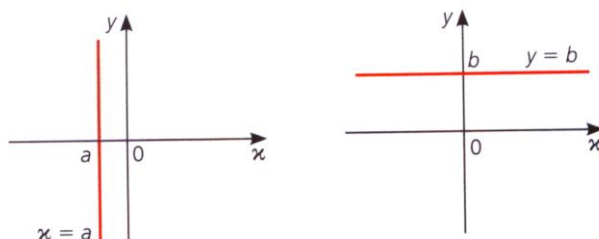
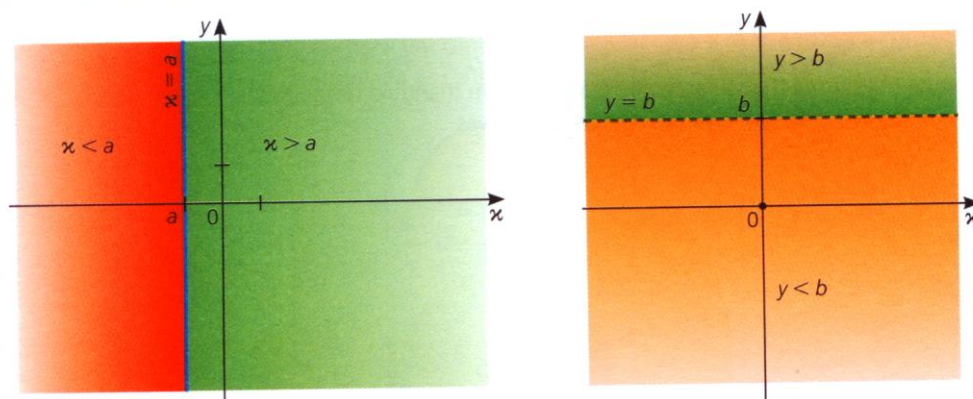
7.3 Sabendo que $\overline{AC} = 5$ cm, determine a área da secção referida na questão anterior.

SÍNTESE (1.ª parte)**REFERENCIAIS CARTESIANOS**

Um **referencial no plano** é constituído por um ponto O e duas rectas orientadas com direcções distintas (eixos), onde está definida uma unidade de medida.

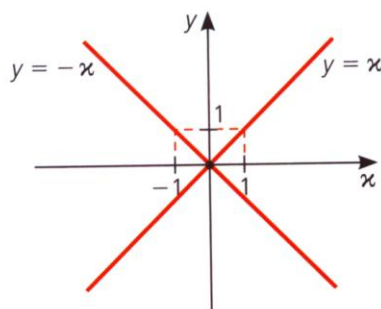
Um **referencial no espaço** é constituído por um ponto O e três rectas orientadas com direcções distintas não-complanares (eixos), onde está definida uma unidade de medida.

Os **referenciais ortogonais monométricos** (o. m.) são referenciais com os eixos coordenados perpendiculares com a mesma unidade de medida.

RECTAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS**SEMIPLANOS DEFINIDOS PELAS RECTAS $x = a$ E $y = b$** **BISSECTRIZES DOS QUADRANTES**

Bissectriz dos quadrantes ímpares: $y = x$

Bissectriz dos quadrantes pares: $y = -x$

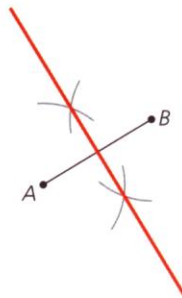
**DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS A E B EM REFERENCIAIS O. M.**

No plano: $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, considerando-se que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

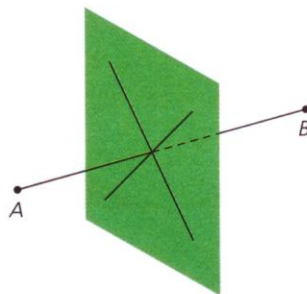
No espaço: $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$, considerando-se que $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$.

■ MEDIATRIZ/PLANO MEDIADOR EM REFERENCIAIS O. M.

Mediatriz do segmento $[AB]$: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$



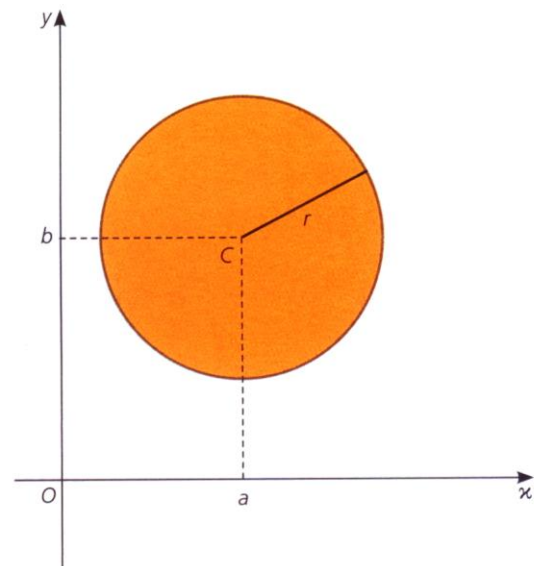
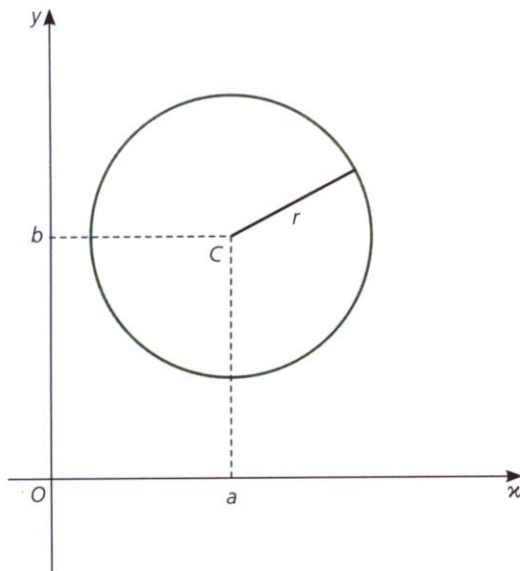
Plano mediador: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2$



■ CIRCUNFERÊNCIA/CÍRCULO DE CENTRO (a, b) E RAIO r EM REFERENCIAIS O. M.

Circunferência: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Círculo: $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$



■ ELIPSE

Chama-se elipses às curvas definidas por uma condição do tipo:

$$(kx)^2 + y^2 = r^2 \text{ ou } x^2 + (ky)^2 = r^2$$

■ SUPERFÍCIE ESFÉRICA/ESFERA DE CENTRO (a, b, c) E RAIO r EM REFERENCIAIS O. M.

Superfície esférica: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$

ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

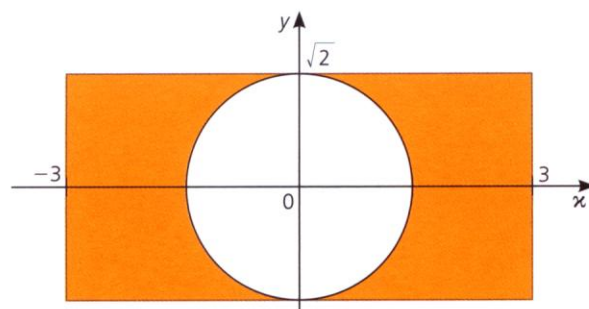
1.

O ponto simétrico do ponto P , de coordenadas $(-3, 5)$, relativamente à origem, tem coordenadas:

- (A) $(-3, -5)$ (B) $(3, 5)$ (C) $(-3, 5)$ (D) $(3, -5)$

2.

A condição que define a região colorida é:



- (A) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \geq 2$
 (B) $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \wedge -3 \leq x \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \leq 2$
 (C) $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \wedge -3 \leq x \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}$
 (D) $-3 \leq x \leq 3 \wedge -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \wedge x^2 + y^2 - 2 \geq 0$

3.

A mediatriz do segmento de recta $[AB]$, em que $A(-1, 2)$ e $B(2, -3)$, pode ser definida pela condição:

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$
 (B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$
 (C) $\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$
 (D) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$

4.

O plano paralelo ao plano yOz , ao qual pertence o ponto $A(-2, 3, 5)$, define-se analiticamente por:

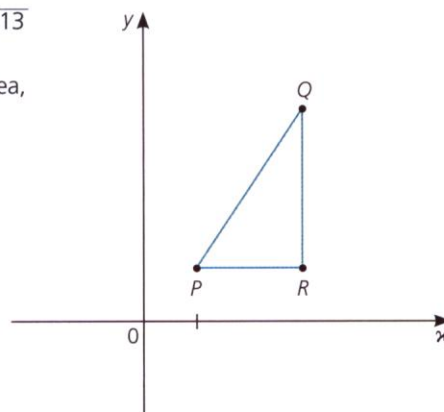
- (A) $x = -2$ (B) $y = 3$ (C) $z = 5$ (D) $y = 0$

5.

Na figura seguinte, P é o ponto de coordenadas $(1, 1)$, $\overline{PQ} = \sqrt{13}$ e o ponto Q tem ordenada 4.

Sobre o $\Delta[PQR]$ rectângulo em R , pode concluir-se que a sua área, em unidades de área, é:

- (A) 4
 (B) 3
 (C) $\frac{3\sqrt{5} - 6}{2}$
 (D) $\frac{3\sqrt{3} - 3}{2}$



6.

Se a esfera de centro na origem do referencial e raio 3 for cortada pelo plano definido por $y = 1$, obtém-se:

- (A) um ponto. (B) um círculo.
(C) uma circunferência. (D) o conjunto vazio.

7.

No espaço, o plano que contém os pontos $E(3, 2, 1)$, $F(-3, 2, -1)$ e $G(0, 2, 1)$ é:

- (A) paralelo a $z = 0$. (B) paralelo ao plano yOz .
(C) perpendicular a Oy . (D) perpendicular a Oz .

8.

Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição: $x = 2 \wedge y = 1$ representa:

- (A) uma recta. (C) um ponto.
(B) um plano. (D) uma superfície esférica.

9.

A superfície esférica inscrita num cubo centrado na origem de aresta 8 pode ser definida por:

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ (B) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
(C) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

10.

Considere a esfera definida por $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 \leq 4$. A intersecção dessa esfera com o plano $z = 2$ é:

- (A) um círculo de centro $(2, -1, 0)$ e raio 2.
(B) um círculo de centro $(2, -1, 2)$ e raio 1.
(C) o ponto $(2, -1, 2)$.
(D) o conjunto vazio.

11.

A área da intersecção da esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ com o plano $y = 4$ é igual a:

- (A) π (B) 3π (C) 6π (D) 9π

12.

A condição $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -1 \leq z \leq 1$ define:

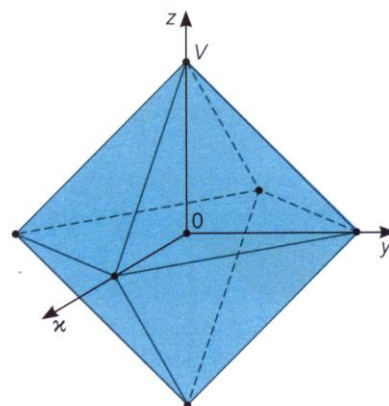
- (A) uma esfera.
(B) um cilindro.
(C) uma superfície esférica.
(D) um círculo.

13.

O octaedro regular é um dos cinco poliedros de Platão. O octaedro representado é formado por duas pirâmides quadrangulares com arestas todas iguais de medida 3.

No referencial assinalado, em que O é o centro geométrico do octaedro, a cota de V é:

- (A) $3\sqrt{2}$
(B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
(C) $3 - \sqrt{\frac{1}{2}}$
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$



RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

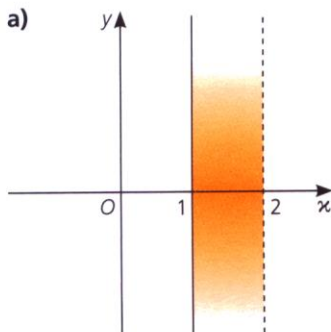
Represente, num referencial, a região do plano definida por:

- | | |
|--|------------------------------|
| a) $y \geq 3$ | b) $x > -1 \wedge y < 2$ |
| c) $y > -x \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 2)$ | d) $x < -2 \vee y > 3$ |
| e) $x \leq 3 \wedge y \geq -x \wedge y \leq 0$ | f) $ x \leq 2 \wedge y > x$ |

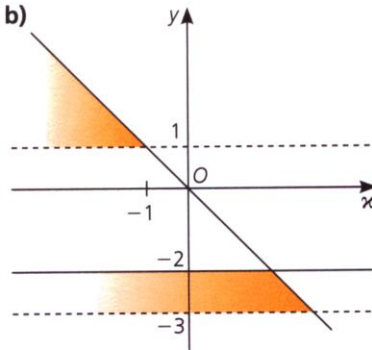
2.

Indique, em $\mathbb{R}^2$, as condições que definem as regiões coloridas do plano.

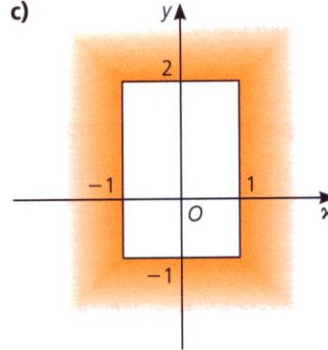
a)



b)



c)



3.

Represente, em referencial o. m. xOy , as regiões do plano definidas em $\mathbb{R}$ por:

- | | |
|---|--|
| a) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x$ | b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 > x^2 + (y - 1)^2$ |
| c) $x^2 + (y - 2)^2 \geq 9 \wedge x^2 + (y - 5)^2 \leq 4$ | d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \geq 0$ |

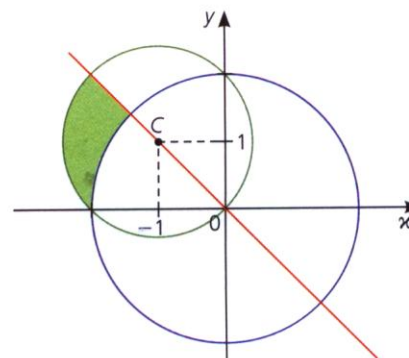
4.

No referencial, estão representadas duas circunferências e a bissetriz dos quadrantes pares.

4.1 Escreva uma equação da circunferência:

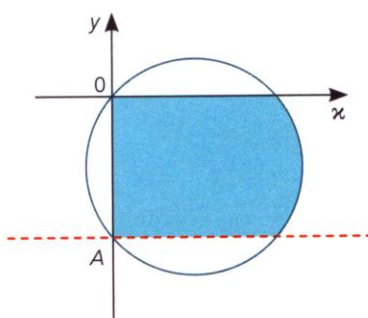
- a) de centro em C e que passa por O;
b) de centro em O representada na figura;

4.2 Defina analiticamente a região sombreada.



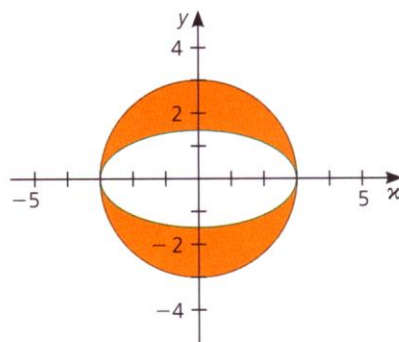
5.

Defina analiticamente o domínio plano representado a azul, sabendo que o ponto O pertence à circunferência de centro no ponto (2, -2) e A é o outro ponto de intersecção da circunferência com o eixo das ordenadas.



6.

Defina por uma condição a região do plano colorida, representada na figura.



7.

Na figura está representado, em referencial o. m. $Oxyz$, um prisma rectangular recto, em que:

- um dos vértices da base é a origem do referencial;
- a base $[OBFG]$ está contida no plano xOy ;
- a face $[ABCO]$ encontra-se no plano bissector do 1.º octante;
- o ponto A pertence ao eixo Oz e tem cota 6;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem abcissa 4;
- o ponto G pertence ao eixo Oy e tem ordenada 2.

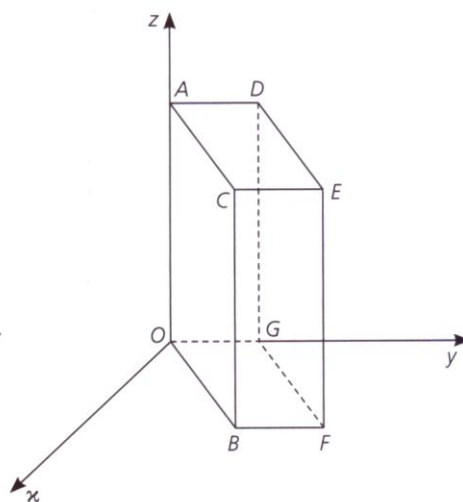
7.1 Escreva uma condição que defina o plano que contém a face $[DACE]$.

7.2 Identifique a recta definida por $y = 4 \wedge z = 6$.

7.3 Indique uma equação de um plano que divida o prisma em dois prismas geometricamente iguais.

7.4 Calcule a área da secção determinada no prisma pelo plano ABF .

7.5 Escreva uma condição que defina a maior superfície esférica, de centro no centro do prisma, que esteja contida no mesmo.



8.

Na figura, está representado um cubo, em referencial o. m. $Oxyz$, em que:

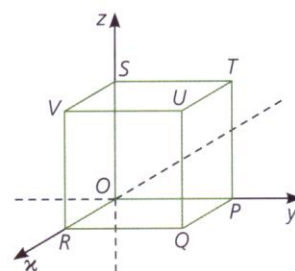
- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice R pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o vértice S pertence ao semieixo positivo Oz ;
- a abcissa de R é 2.

8.1 Indique uma equação do plano TUQ .

8.2 Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

8.3 Calcule a área da região do plano PUV compreendida entre a secção determinada por esse plano, no cubo, e a secção determinada pelo mesmo plano, na superfície esférica referida na alínea anterior.

Adaptado do Exame Nacional do 12.º Ano



9.

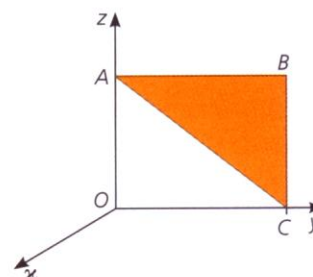
No referencial o. m. $Oxyz$ da figura, $[ABC]$ é um triângulo rectângulo em B contido no plano yOz . Na unidade considerada, $\overline{OC} = 4$ e $\overline{OB} = 5$.

Considere que o triângulo $[ABC]$ roda uma volta completa em torno do eixo Oy .

9.1 Defina analiticamente a linha que o ponto A descreve no plano xOz na referida rotação.

9.2 Calcule o volume do sólido gerado pelo triângulo $[ABC]$ na rotação descrita.

Adaptado do Exame Nacional do 12.º Ano



SÍNTESE (2.ª parte)**VECTORES E EQUAÇÕES DA RECTA****■ DEFINIÇÃO DE VECTOR**

Um **vector** $\vec{u}$ fica perfeitamente determinado se dele forem conhecidas as três características seguintes:

- direcção;
- sentido;
- comprimento ou norma.

A norma de $\vec{u}$ é usualmente representada por $||\vec{u}||$.

VECTORES COLINEARES

Dois vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, são colineares se, e só se, existe um número real $k \neq 0$, tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Dois vectores colineares têm a mesma direcção.

COMPONENTES E COORDENADAS DE UM VECTOR NUM PLANO

Num referencial $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, considere-se o vector $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$:

- **Componentes:** $a\vec{e}_1$ e $b\vec{e}_2$
- **Coordenadas:** (a, b)

COMPONENTES E COORDENADAS DE UM VECTOR NO ESPAÇO

Num referencial $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tais que $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$

- **Componentes:** $a\vec{e}_1$, $b\vec{e}_2$ e $c\vec{e}_3$
- **Coordenadas:** (a, b, c)

■ IGUALDADE DE VECTORES

Dados $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2;$$

Dados $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3.$$

VECTOR COMO DIFERENÇA DE DOIS PONTOS

Fixado um referencial vectorial do plano, e dados dois pontos A e B desse plano de coordenadas (a_1, a_2) e (b_1, b_2) , respectivamente, as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Fixado um referencial vectorial no espaço, e dados dois pontos A e B desse plano de coordenadas (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) , respectivamente, as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

■ EQUAÇÃO VECTORIAL DA RECTA

Dado um ponto A e um vector director $\vec{u}$, a recta que passa por A e tem a direcção de $\vec{u}$ pode ser definida por:

No plano: $(x, y) = (a_1, a_2) + k(u_1, u_2)$, $k \in \mathbb{R}$, A e $\vec{u}$ têm coordenadas (a_1, a_2) e (u_1, u_2) , respectivamente.

No espaço: $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3)$, $k \in \mathbb{R}$, A e $\vec{u}$ têm coordenadas (a_1, a_2, a_3) e (u_1, u_2, u_3) , respectivamente.

■ EQUAÇÃO REDUZIDA DA RECTA

Dada uma recta r , que passa em $A(a_1, a_2)$ com vector director $\vec{u}(u_1, u_2)$ e com $u_1 \neq 0$, chama-se equação reduzida da

recta à equação $y = mx + b$, onde $m = \frac{u_2}{u_1}$ é o **declive da recta** e $b = a_2 - ma_1$ é a **ordenada na origem**.

ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(2, -3)$ e $C(3, -1)$, $A + \overrightarrow{BC}$ é:

- (A) o ponto de coordenadas $(4, -2)$. (B) o vector de coordenadas $(0, 4)$.
(C) o ponto de coordenadas $(0, 4)$. (D) o vector de coordenadas $(4, -2)$.

2.

Considere os pontos $P(-1, 2, 3)$, $Q(1, -2, 0)$ e $R(-2, 2, 0)$. Pode afirmar-se que:

- (A) $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QR}$ são colineares. (B) $\|\overrightarrow{QR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$
(C) o ponto médio de $[PQ]$ é $M(0, 2, 1)$. (D) $\|\overrightarrow{QR}\| = 5$

3.

Considere, na base o. n. $(O, \vec{e}, \vec{f})$, os vectores $\vec{u}(4, 3)$ e $\vec{v} = -\vec{e} + 2\vec{f}$. Nessa base, o vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$ tem coordenadas:

- (A) $(3, -4)$ (B) $(16, 1)$ (C) $(12, 9)$ (D) $(2, 1)$

4.

Seja r a recta definida pela equação $y = \frac{1}{4}x - 4$, qual dos pontos seguintes pertence à recta r ?

- (A) $(6, 3)$ (B) $(4, -3)$ (C) $\left(12, -\frac{5}{2}\right)$ (D) $(6, 2)$

5.

As rectas de equação $(x, y) = (0, 3) + k(-3, 6)$, $k \in \mathbb{R}$ e $y = -2x + 3$:

- (A) são estritamente paralelas. (B) são concorrentes.
(C) são coincidentes. (D) passam ambas pelo ponto $(1, 3)$.

6.

A equação reduzida da recta r , definida pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(3, 3)$, é:

- (A) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (B) $y = -2x + \frac{3}{2}$
(C) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (D) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

7.

As coordenadas dos pontos A , B e C são, respectivamente, $(2, 3)$, $(5, 7)$ e $(-1, 1)$. Pode afirmar-se que:

- (A) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares. (B) o declive da recta BC é 1.
(C) $y = x + 1$ é a equação reduzida da recta BC . (D) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$

8.

Dados os pontos $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 5, 0)$ e $C(2, 7, 3)$, uma equação vectorial da recta que passa por B e que é paralela a AC é:

- (A) $(x, y, z) = (-1, 5, 0) + k(6, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y, z) = (0, 6, 0) + k(-1, 5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (0, 0, 6) + k(-1, 5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y, z) = (-1, 5, 0) + k(0, 6, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

9.

A esfera de diâmetro $[PQ]$, com $P(-1, 2, 1)$ e $Q(5, 4, -3)$, pode ser definida pela condição:

- (A) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 \leq 28$
(B) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 - 14 \leq 0$
(C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 14$
(D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$

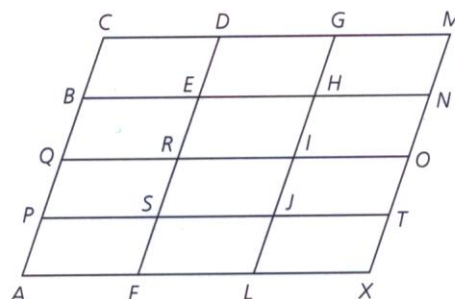
RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Na figura, os paralelogramos menores são geometricamente iguais. Determine:

- $H + \vec{JF}$
- $-2(S - A)$
- $\vec{QE} + \vec{RP}$
- $\vec{AO} + 2\vec{MN}$
- $2\vec{FL} + \vec{IT}$



2.

Em relação à figura seguinte, sabe-se que:

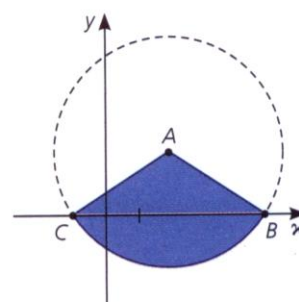
- o ponto C tem coordenadas $(-1, 0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(5, 0)$;
- $\vec{AB}(3, -2)$.

2.1 Determine as coordenadas de A.

2.2 Justifique que A pertence à mediatriz de $[CB]$.

2.3 Defina analiticamente a circunferência de centro A e raio $[AB]$.

2.4 Escreva uma condição que defina a região colorida.



3.

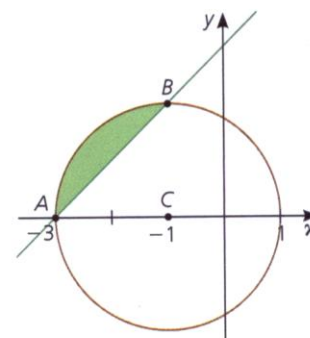
A circunferência da figura tem o centro em $C(-1, 0)$ e raio 2 e B é um ponto da circunferência de abcissa -1.

3.1 Escreva uma equação do círculo correspondente.

3.2 Mostre, analiticamente, que B tem coordenadas $(-1, 2)$.

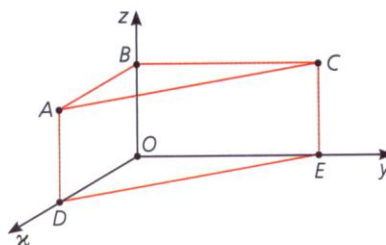
3.3 Escreva uma equação reduzida da recta AB.

3.4 Escreva uma condição que defina a região sombreada.



4.

Num referencial o. n. do espaço, está representado um prisma triangular. As coordenadas de C e D são, respectivamente, $(0, 4, 2)$ e $(3, 0, 0)$.



4.1 Calcule as coordenadas de $\vec{DE} + \vec{DA}$.

4.2 Diga quais são as coordenadas do simétrico de A:

- em relação ao plano yOz ;
- em relação ao eixo Oy .

4.3 Sendo M o ponto médio de $[DC]$, escreva uma equação vectorial da recta que passa por B e tem a direcção de $\vec{AM}$.

4.4 Escreva uma condição que defina o segmento de recta $[DC]$.

4.5 Calcule o volume do prisma, tomando o centímetro como unidade de medida.

5.

Num referencial o. n. do espaço, estão representados os prismas rectos $[ABCDEFGO]$ e $[AEHBF]$.

As coordenadas de A e C são, respectivamente, $(1, 0, 2)$

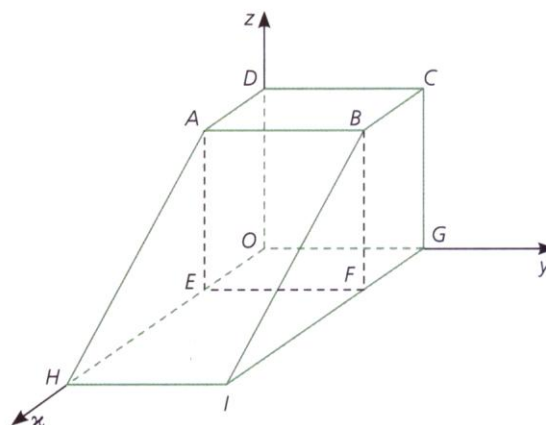
e $(0, 2, 2)$ e $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

5.1 Justifique que o triângulo $[BFI]$ é rectângulo e isósceles.

5.2 Defina, por uma condição:

- o plano que passa em I e é paralelo a yOz ;
- a recta AC ;
- a esfera de diâmetro $[AC]$.

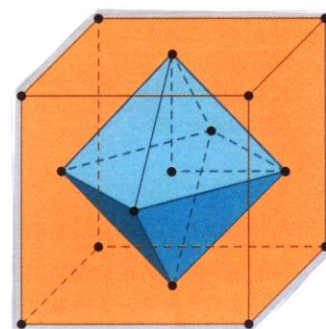
5.3 Mostre que os vectores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{GH}$ são não-colineares.



6.

Prove que duas arestas opostas de um octaedro regular são paralelas.

Sugestão: Escolha o referencial que considere mais adequado.



7.

Descreva os conjuntos definidos, em $\mathbb{R}^3$, pelas condições:

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$
- $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25 \wedge x = 4$
- $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 > (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$
- $x^2 + y^2 \leq 36 \wedge 0 \leq z \leq 10$

8.

Escolha um referencial o. n. do espaço e defina, nesse referencial, um cilindro equilátero (cilindro em que a medida do diâmetro da base é igual à altura) que tenha 16 cm^2 de área de base.

9.

Determine o volume dos sólidos definidos algebricamente por:

- $(x+1)^2 + (y-10)^2 + (z-2)^2 \leq 25$
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \wedge -1 \leq z \leq 5$
- $[(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \wedge -1 \leq z \leq 5] \wedge [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 \leq 9 \wedge z \geq 5]$

10.

Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone, em que:

- o vértice V é o ponto de coordenadas $(0, 0, 25)$;
- o centro da base é o ponto O , origem do referencial;
- os pontos A e B pertencem à circunferência que limita a base;
- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- o ponto B pertence ao eixo Oy .

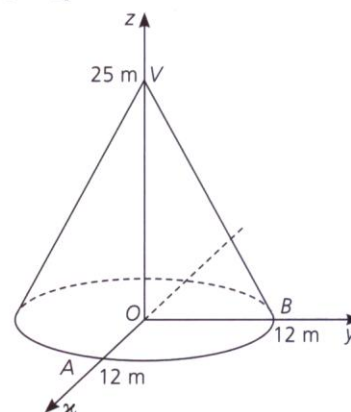
10.1 Determine:

- as coordenadas do vector $\overrightarrow{BV}$ e a sua norma;
- uma equação vectorial da recta BV ;
- uma condição que defina algebricamente a base do cone.

10.2 O cone é cortado pelo plano definido algebricamente pela equação $z = 10$.

10.2.1 Determine o volume do tronco de cone obtido com este corte (sólido que fica «abaixo» do plano referido).

10.2.2 Defina algebricamente a base superior do tronco.





Para cada uma das cinco questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Selecione a afirmação verdadeira.

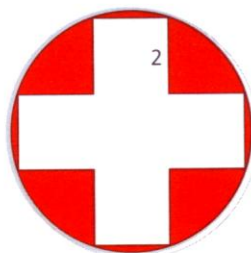
- (A) Se dois planos são paralelos a uma mesma recta, então, são paralelos entre si.
- (B) Se duas rectas são paralelas a um plano, então, são paralelas entre si.
- (C) Se uma recta é paralela a uma recta de um plano, então, é paralela a esse plano.
- (D) Se uma recta é estritamente paralela a uma recta de um plano, então, é estritamente paralela a esse plano.

2.

Na figura, a cruz inscrita no círculo é equilátera.

A área da região colorida é:

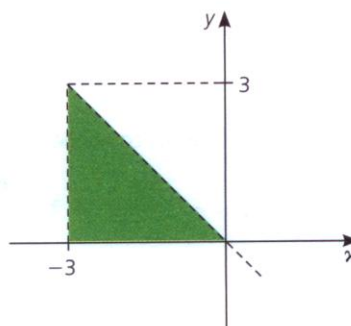
- (A) $9\pi - 20$
- (B) $10\pi - 20$
- (C) $10\pi - 16$
- (D) $9\pi - 10$



3.

A região colorida na figura é definida por:

- (A) $x \geq -3 \wedge y < x \wedge x \leq 0$
- (B) $y < -x \wedge -3 \leq x < 0$
- (C) $0 \leq y < -x \wedge x > -3$
- (D) $x < 0 \wedge y < x \wedge y \geq 0$



4.

Um vector de norma 10 colinear com $\vec{w}(3, 0, 4)$ tem coordenadas:

- (A) $(-6, 0, -8)$
- (B) $(10, 0, 0)$
- (C) $\left(\frac{3}{2}, 0, 2\right)$
- (D) $(2\sqrt{5}, 0, 4\sqrt{5})$

5.

Considere as rectas r e s , definidas, respectivamente, por:

$r: y = ax + 1$ e $s: (x, y) = (0, b) + k(-2, 3), k \in \mathbb{R}$

Os valores de a e b para os quais r e s são coincidentes são:

- (A) $a = -\frac{2}{3}$ e $b = 1$.
- (B) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 1$.
- (C) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$.
- (D) $a = 1$ e $b = -\frac{3}{2}$.

II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Considere a recta de equação $y = 2x + 3$.

1.1 Sendo A e B pontos da recta, determine:

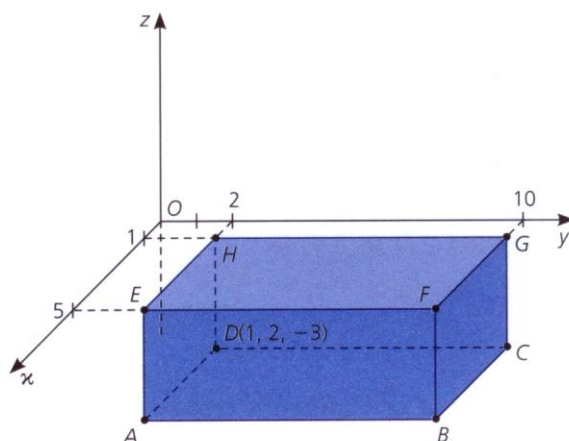
- a ordenada do ponto A , sabendo que a sua abcissa é -1 ;
- a abcissa de B , sabendo que a sua ordenada é 7 .

1.2 Escreva uma condição que defina o círculo de diâmetro $[AB]$.

1.3 Represente geometricamente o conjunto definido pela condição: $y \leq 2x + 3 \wedge x^2 + (y - 3)^2 < 4$

2.

No referencial o. n. $Oxyz$, está representado um paralelepípedo rectângulo em que os pontos E , F , G e H pertencem ao plano xOy .



Observe atentamente a figura e responda às questões seguintes.

2.1 Justifique que a recta HD é perpendicular ao plano ABC .

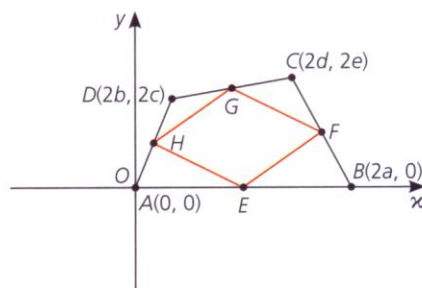
2.2 Escreva uma condição que defina:

- a recta FB ;
- o plano ABE ;
- a esfera tangente às bases superior e inferior do paralelepípedo, com centro no ponto médio de $[BH]$.

3.

Utilize o sugerido na figura para provar que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados de um qualquer quadrilátero é um paralelogramo.

Sugestão: Prove que as rectas HG e HE são paralelas a EF e GF , respectivamente.



GRELHA DE AVALIAÇÃO

PARTE	I	II									
Questões	1 a 5	1.1 a)	1.1 b)	1.2	1.3	2.1	2.2 a)	2.2 b)	2.2 c)	3.	
Cotações	$5 \times 10 = 50$	8	8	16	22	16	18	12	24	26	

SÍNTESE

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos, A e B , chama-se **função** ou **aplicação** de A em B a qualquer processo ou regra que associa, de modo perfeitamente definido, a cada elemento de A um, e um só, elemento de B .

QUESTÕES DE LINGUAGEM

A cada elemento x do conjunto A chama-se **objecto** e a $f(x)$, elemento de B , chama-se **imagem de x por f** .

Ao conjunto A dá-se o nome de **domínio** de f : $D_f = A$.

Ao conjunto B chama-se **conjunto de chegada**.

Ao conjunto das imagens chama-se **contradomínio**, representando-se por D'_f ou CD_f .

ZEROS E SINAL

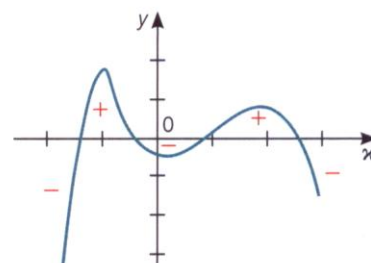
ZEROS

Diz-se que $a \in D_f$ é zero de f se $f(a) = 0$.

SINAL

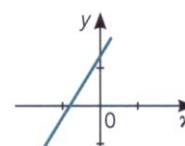
Diz-se que f é **positiva** num conjunto $I \subset D_f$ se, e só se, $f(x) > 0, \forall x \in I$.

Diz-se que f é **negativa** num conjunto $I \subset D_f$ se, e só se, $f(x) < 0, \forall x \in I$.

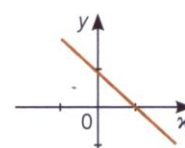


MONOTONIA

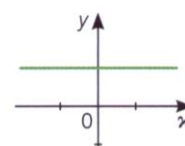
Uma função f real de variável real diz-se **estritamente crescente** se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) < f(x_2)$.



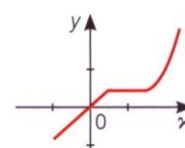
Uma função f real de variável real diz-se **estritamente decrescente** se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) > f(x_2)$.



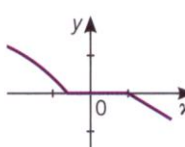
Uma função f real de variável real diz-se **constante** se, para qualquer $x \in D_f$, $f(x) = k$, com k constante real.



Uma função f real de variável real diz-se **crescente em sentido lato** se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) \leq f(x_2)$.



Uma função f real de variável real diz-se **decrescente em sentido lato** se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) \geq f(x_2)$.



■ EXTREMOS

ABSOLUTOS

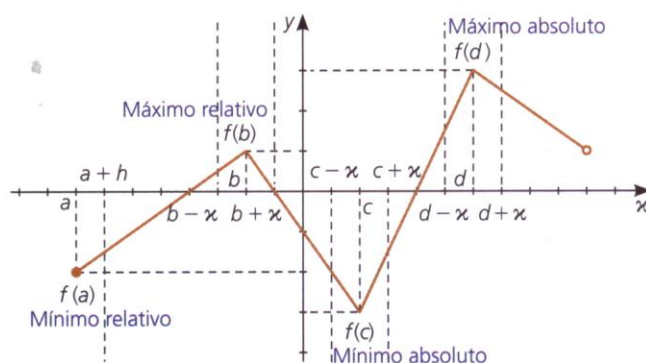
Diz-se que uma função real, de variável real, tem **máximo** $f(a)$ (máximo absoluto), para $x = a$, $a \in D_f$, se para qualquer $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$. A a chama-se **maximizante**.

Diz-se que uma função real, de variável real, tem **mínimo** $f(a)$ (mínimo absoluto), para $x = a$, $a \in D_f$, se para qualquer $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$. A a chama-se **minimizante**.

RELATIVOS

Diz-se que f tem um **máximo relativo** $f(a)$, para $x = a$, $a \in D_f$, se existe uma vizinhança de a onde $f(a)$ é máximo, isto é, para todo o x pertencente à vizinhança de a e $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

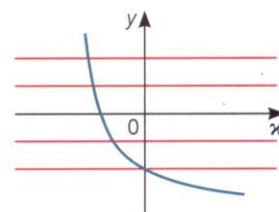
Diz-se que f tem um **mínimo relativo** $f(a)$, para $x = a$, $a \in D_f$, se existe uma vizinhança de a onde $f(a)$ é mínimo, isto é, para todo o x pertencente à vizinhança de a e $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$.



■ FUNÇÕES INJECTIVAS

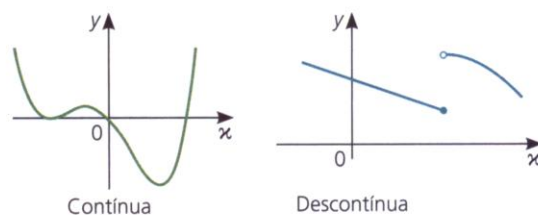
Diz-se que uma função f de domínio D_f é injectiva se, e só se, a objectos diferentes correspondem imagens diferentes.

Graficamente significa que qualquer recta paralela a Ox intersecta, no máximo, uma vez o gráfico da função.



■ FUNÇÃO CONTÍNUA

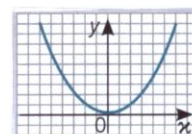
Uma função f é **contínua** para $x = a$ se, dado qualquer intervalo I , centrado em $f(a)$, é possível encontrar um intervalo J , centrado em a , tal que, se $x \in J$, então, $f(x) \in I$.



■ PARIDADE

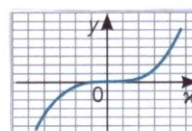
SIMETRIA EM RELAÇÃO A Oy

Uma função, f , de domínio D_f é **par** quando $\forall x \in D_f$ e se $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.



SIMETRIA EM RELAÇÃO À ORIGEM.

Uma função, f , de domínio D_f é **ímpar** quando $\forall x \in D_f$ e se $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.



ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

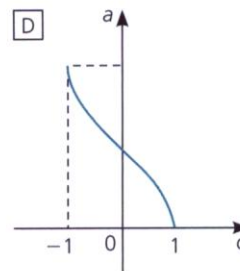
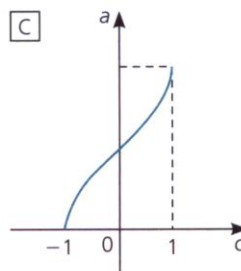
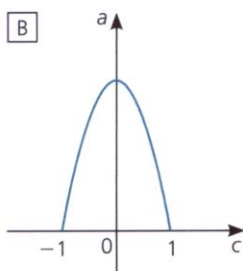
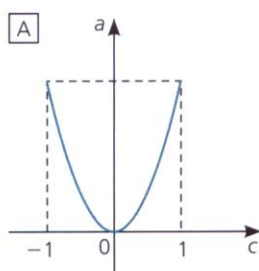
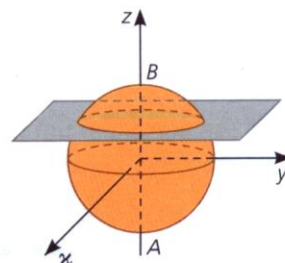
Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz .

Para cada posição do ponto P , considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy .

Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P , a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o gráfico da função g ?



Exame Nacional do 12.º Ano

2.

De uma função, h , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(0) = 0$
- h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$.
- h é uma função par.

Selecione a afirmação verdadeira.

- (A) h tem um máximo relativo para $x = 0$. (B) $h(-1) < 0$
 (C) h é estritamente decrescente no intervalo $[-1, 0]$. (D) $h(-2) + h(2) = 0$

Exame Nacional do 12.º Ano

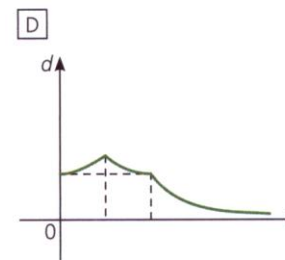
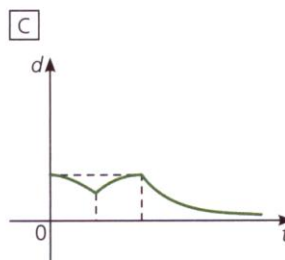
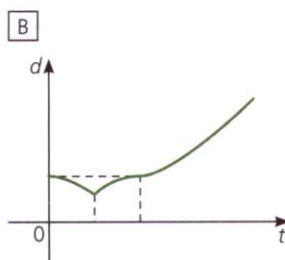
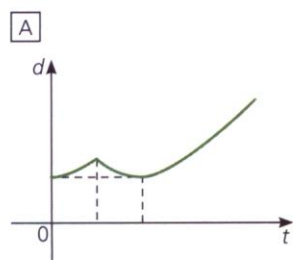
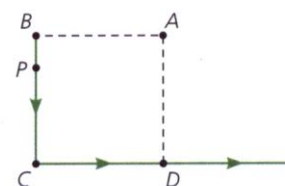
3.

Na figura, estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$;
- uma semi-recta $\hat{CD}$.

Admita que um ponto P , partindo de B , se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento $[BC]$ e, seguidamente, a semi-recta $\hat{CD}$).

Qual dos gráficos seguintes dá a distância d , do ponto P ao ponto A , em função do tempo t , contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?



Teste Intermédio do 11.º Ano

4.

Considere f uma função de domínio $\mathbb{R}$ estritamente crescente.
Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) A função f não pode ter mais do que um zero.
- (B) A função f tem contradomínio $\mathbb{R}$.
- (C) A função é ímpar.
- (D) O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Adaptado do Exame Nacional do 12.º Ano

5.

Qual dos seguintes lugares geométricos não pode ser o gráfico de uma função?

- (A) $y = 2x$
- (B) $y = -3x + 2$
- (C) $y = 3$
- (D) $x^2 + y^2 = 4$

6.

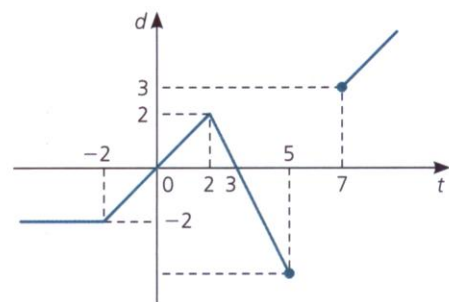
A figura ao lado representa graficamente a função f . Em cada intervalo $]-\infty, -2]$ e $[7, +\infty[$, o gráfico de f é uma semi-recta.

6.1 O domínio desta função é:

- (A) $\mathbb{R}$
- (B) $]-\infty, 5] \cup]7, +\infty[$
- (C) $]-\infty, 5] \cup [7, +\infty[$
- (D) $]-\infty, 5] \cap [7, +\infty[$

6.2 Das afirmações seguintes, indique qual é verdadeira.

- (A) f é positiva e injectiva no intervalo $]0, 3[$.
- (B) -2 é um mínimo relativo de f e 3 um máximo relativo.
- (C) f é negativa em $]-\infty, 0] \cup [3, 5]$ e positiva em $[0, 3] \cup [7, +\infty[$.
- (D) $f(x) \geq 0, \forall x \in [7, +\infty[$



7.

Numa certa localidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:

- 2,5 euros pelo aluguer do contador.
- 1 euro por cada metro cúbico de água consumido até 10 m^3 .
- 2 euros por cada metro cúbico de água consumido além de 10 m^3 .

Das funções seguintes, seleccione aquela que traduz correctamente o preço a pagar, em euros, em função do número x de metros cúbicos consumidos.

- (A) $a(x) = \begin{cases} 3,5x & \text{se } x \leq 10 \\ 2,5 + 2x & \text{se } x > 10 \end{cases}$
- (B) $b(x) = \begin{cases} 2,5 + x & \text{se } x \leq 10 \\ 2,5 + 2x & \text{se } x > 10 \end{cases}$
- (C) $c(x) = \begin{cases} 2,5 + x & \text{se } x \leq 10 \\ 12,5 + 2x & \text{se } x > 10 \end{cases}$
- (D) $d(x) = \begin{cases} 2,5 + x & \text{se } x \leq 10 \\ 12,5 + 2(x - 10) & \text{se } x > 10 \end{cases}$

8.

O ponto A, de coordenadas $(-2, 10)$, pertence ao gráfico de uma função p ímpar. Dos pontos a seguir apresentados, indique aquele que pertence necessariamente ao gráfico de p .

- (A) $(2, -10)$
- (B) $(2, 10)$
- (C) $(-2, -10)$
- (D) $(10, -2)$

9.

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$;
- f é par;
- $f(0) = -2$

Das afirmações seguintes, seleccione a falsa.

- (A) f é estritamente decrescente $]-\infty, 0]$.
- (B) -2 é o mínimo absoluto de f .
- (C) f tem um único zero.
- (D) f é não-injectiva.

RESPOSTA ABERTA

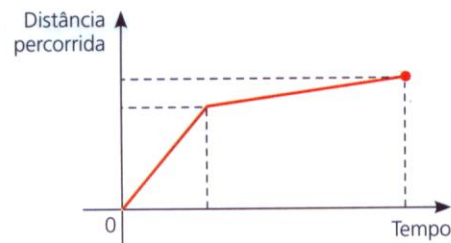
Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Hoje de manhã, a Ana saiu de casa e dirigiu-se para a escola. Fez parte desse percurso a andar e a outra parte a correr.

O gráfico ao lado mostra a distância percorrida pela Ana, em função do tempo que decorreu desde o instante em que saiu de casa até ao instante em que chegou à escola.

Diga, justificando, se a Ana percorreu maior distância a andar ou a correr. Foi na primeira ou na segunda parte do percurso que a Ana correu?



Adaptado do Exame Nacional do 9.º Ano

2.

Quando se vai à praia, é preciso ter cuidado com o tempo de exposição ao sol, para que não se forme eritema (vermelhão na pele), devido a queimadura solar.

O tempo máximo, t , em minutos, de exposição directa da pele ao sol sem formar eritema pode ser calculado através da fórmula:

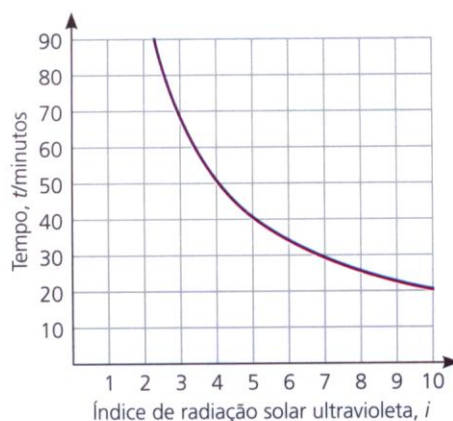
$$t = \frac{D}{i}$$

em que,

i — representa o índice de radiação solar ultravioleta;

D — é um valor constante para cada tipo de pele.

O gráfico seguinte traduz essa relação para o tipo de pele da Ana.

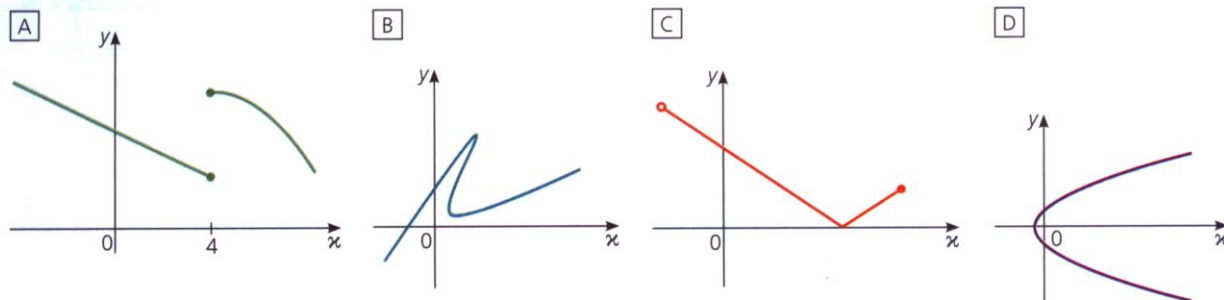


- 2.1 A Ana foi à praia num dia em que o índice de radiação solar ultravioleta era 5. Quantos minutos, no máximo, é que a Ana pode ter a pele directamente exposta ao sol sem ficar com eritema?
- 2.2 Quais são os valores do índice de radiação para os quais a Ana pode ficar mais do que uma hora na praia exposta directamente ao sol?
- 2.3 Justifique que as variáveis t e i são inversamente proporcionais.
- 2.4 Qual é o valor da constante D para o tipo de pele da Ana?
- 2.5 O João tem um tipo de pele em que $D = 180$. Comparativamente com a Ana, qual deles pode estar mais tempo exposto ao sol sem formar eritema? Justifique a sua resposta.

Adaptado do Exame Nacional do 9.º Ano

3.

Das figuras seguintes, algumas não podem representar o gráfico de uma função. Indique-as, justificando a sua escolha.



4.

Determine, analiticamente, os zeros das seguintes funções:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x + 3$$

b) $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 4$$

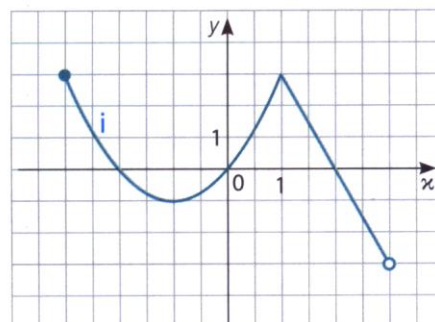
c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 8x^2 - 4x + 4$$

5.

Considere a função i , representada graficamente na figura ao lado. Indique:

- a) o domínio e o contradomínio da função;
- b) um intervalo onde a função seja crescente;
- c) o conjunto-solução da condição: $i(x) = 3$;
- d) o conjunto-solução da condição: $i(x) \geq 0$;
- e) os extremos de i .



6.

Obtenha na calculadora o gráfico da função de domínio $[-2, 1]$, tal que $f(x) = -2x^3 + 3x - 1$.

6.1 Com recurso às capacidades da calculadora, determine os zeros e os extremos desta função. Utilize, se necessário, valores aproximados às décimas.

6.2 Construa o quadro:

- a) de variação da função;
- b) de sinais da função.

7.

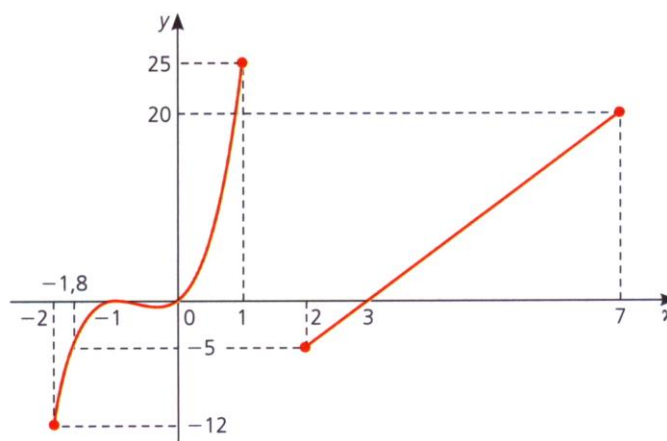
A figura seguinte é a representação gráfica da função f .

7.1 Indique:

- a) o domínio e o contradomínio de f ;
- b) os zeros de f ;
- c) os extremos absolutos de f , caso existam;
- d) um intervalo em que a função seja positiva e crescente;
- e) os valores de x , tais que $f(x) > -5$.

7.2 A função é injectiva?

Justifique a sua resposta.

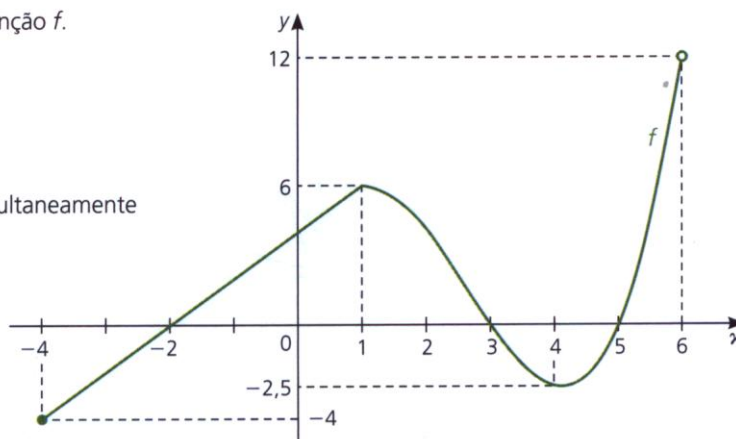


8.

A figura seguinte representa graficamente a função f .

8.1 Indique:

- o domínio e o contradomínio de f ;
- os zeros de f ;
- os extremos relativos e absolutos de f ;
- um intervalo onde a função f seja simultaneamente positiva e crescente;
- um intervalo em que a função f seja injectiva.

8.2 Construa um quadro de sinais da função f .

9.

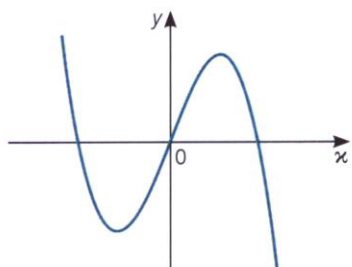
Para cada um dos casos, esboce um gráfico, se possível, de uma função com as seguintes características:

- seja par e tenha -2 como zero;
- seja ímpar e crescente;
- seja descontínua em 3 e par;
- tenha máximo 5 para $x = 2$, seja contínua e par.

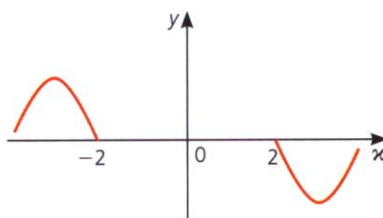
10.

Das funções seguintes, indique as que são pares ou ímpares.

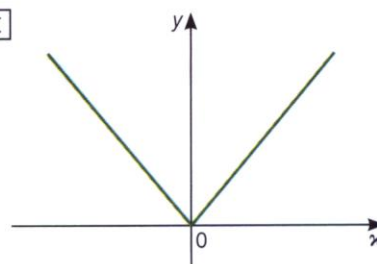
A



B



C

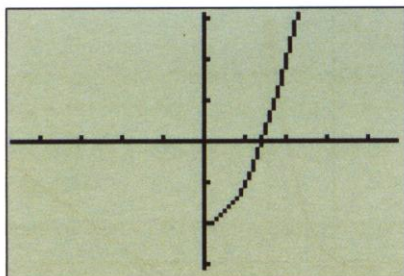


11.

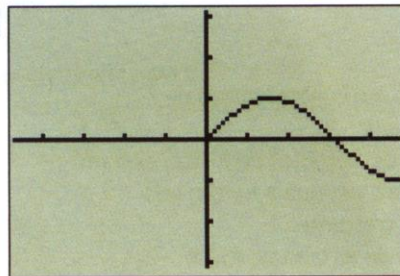
Complete cada um dos gráficos seguintes, de modo que as funções por estes representados sejam:

- pares;
- ímpares (caso seja possível).

A



B



12.

Estude, gráfica e analiticamente, a paridade de cada uma das seguintes funções:

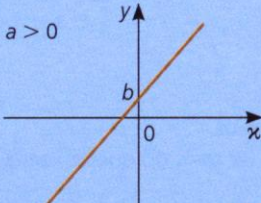
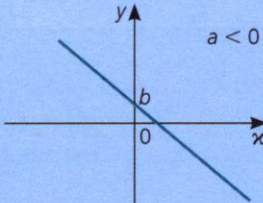
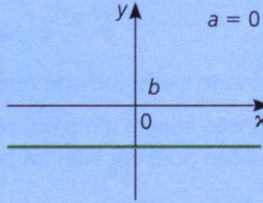
- $f(x) = x - 4x^2$
- $g(x) = 1 - x^4$
- $a(x) = x^3 - 4x$

SÍNTESE

■ FUNÇÃO AFIM

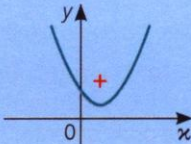
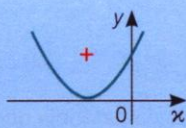
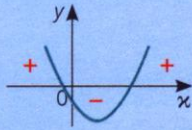
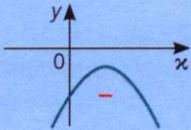
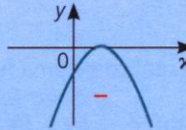
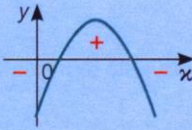
Diz-se que uma função f , real, de variável real, é uma **função afim**, se é definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.

O gráfico de uma função afim é uma recta de ordenada na origem b e declive igual a a , portanto:

Se $a > 0$, a função é crescente.	Se $a < 0$, a função é decrescente.	Se $a = 0$, a função é constante. Qualquer objecto tem imagem b .
 • $D_f = \mathbb{R}$ • Um zero, $x = -\frac{b}{a}$	 • $D_f = \mathbb{R}$ • Um zero, $x = -\frac{b}{a}$	 • Se $a = 0$ e $b \neq 0$, a função não tem zeros. • Se $a = b = 0$, qualquer objecto tem imagem zero, portanto qualquer número real é zero da função. • $D_f = \{b\}$

■ FUNÇÃO QUADRÁTICA

Designa-se por **função quadrática** qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, b e c são números reais dados.

Gráfico	Zeros										
Parábola de vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$	$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$										
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$								
$a > 0$											
Varição e contradomínio	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>Mín.</td><td>$\nearrow$</td></tr> </table> $D' = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right[$			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
$f(x)$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$								
$a < 0$											
Varição e contradomínio	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>Máx.</td><td>$\searrow$</td></tr> </table> $D' = \left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
$f(x)$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$								

ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Um depósito de água começou a ser esvaziado às 8 horas. Decorridas t horas após o início do esvaziamento, o volume de água, em m^3 , que se mantém no reservatório, é dado por $V(t) = 55 - 5t$. A que horas o depósito ficou totalmente vazio?

- (A) 15 horas (B) 19 horas (C) 11 horas (D) 17 horas

2.

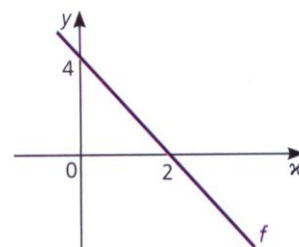
Relativamente à existência de zeros de uma função afim, pode afirmar-se que:

- (A) a função admite um único zero. (B) a função não tem zeros.
(C) a função pode ter infinitos zeros. (D) a função não pode ter mais do que um zero.

3.

Na figura está parte da representação gráfica de uma função afim, f . A função f pode ser definida analiticamente por:

- (A) $y = 2x + 4$
(B) $y = -2x + 2$
(C) $y = -2x + 4$
(D) $y = -4x + 2$

**4.**

Considere a família de funções definida por $y = mx + 3$, $m \neq 0$. Em relação às funções desta família, qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) Os gráficos são rectas oblíquas. (B) O ponto $(0, 3)$ é comum a todos os gráficos.
(C) Se $m > 0$, as funções são estritamente decrescentes. (D) Todas as funções admitem um zero.

5.

Seja f uma função afim, estritamente crescente, tal que $f(0) = 2$. Uma definição analítica da função pode ser:

- (A) $y = 2$ (B) $y = -x + 2$ (C) $y = 2 - 3x$ (D) $y = 2x + 2$

6.

De uma função g , quadrática, sabe-se que:

- $(2, 4)$ são as coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente;
- $g(-1) = -5$

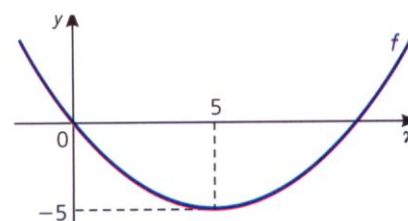
Então, pode afirmar-se que:

- (A) g é uma função par.
(B) a parábola que representa g graficamente tem concavidade voltada para cima.
(C) o contradomínio de g é $]-\infty, 4]$.
(D) g é uma função estritamente crescente em $[2, +\infty[$.

7.

Na figura, está representada parte do gráfico de uma função quadrática f . Uma expressão analítica de f pode ser:

- (A) $f(x) = \frac{1}{5}(x + 5)^2 + 5$ (B) $f(x) = \frac{1}{5}(x + 5)^2 - 5$
(C) $f(x) = \frac{1}{5}(x - 5)^2 - 5$ (D) $f(x) = -\frac{1}{5}(x - 5)^2 + 5$



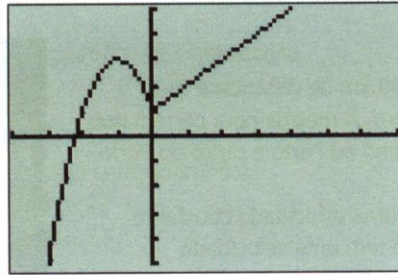
8.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, tal que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) f é positiva em $\mathbb{R}$.
- (B) A função admite um máximo absoluto.
- (C) A função admite dois zeros distintos.
- (D) A função admite um único zero.

9.

Na figura, está representada parte do gráfico de uma função h de domínio $\mathbb{R}$. De entre as opções seguintes, indique a definição analítica de h .



- (A) $h(x) = \begin{cases} -2(x+1)^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ -x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- (B) $h(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- (C) $h(x) = \begin{cases} -2(x-1)^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- (D) $h(x) = \begin{cases} -2(x+1)^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

10.

Um vendedor de automóveis recebe mensalmente, além do seu ordenado fixo, um prémio por cada carro vendido. A tabela seguinte apresenta o valor total, em euros, recebido pelo vendedor nos primeiros quatro meses deste ano.

N.º de carros vendidos	3	5	15	14
Valor total recebido/€	2000	2500	5000	4750

Qual das expressões seguintes pode representar analiticamente a função que relaciona o número de automóveis vendidos, x , com o valor total, em euros, recebido pelo vendedor?

- (A) $y = 500x$
- (B) $y = 1250 + 250x$
- (C) $y = 1250 + x$
- (D) $y = 250x$

11.

Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

O conjunto-solução da condição $h(x) = 1$ é:

- (A) $\{-1, 1\}$
- (B) $\{-1, 1, 3\}$
- (C) $\{3\}$
- (D) $\emptyset$

12.

Considere f uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$.

Indique, das seguintes afirmações, aquela que é necessariamente verdadeira.

- (A) f é injectiva.
- (B) $f(0) = 0$
- (C) f é descontinua em $x = 0$.
- (D) f é não-injectiva.

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Complete a seguinte tabela de valores de uma função, sabendo que se trata de uma função afim.

x	-5	-3	0	1	2	4	
y			1	5			20

Escreva uma expressão analítica da função.

2.

As cidades do Porto e de Lisboa estão a 300 km de distância e são servidas por uma linha de caminhos-de-ferro. À mesma hora partem dois comboios directos, um de Lisboa com destino ao Porto e outro do Porto com destino a Lisboa.

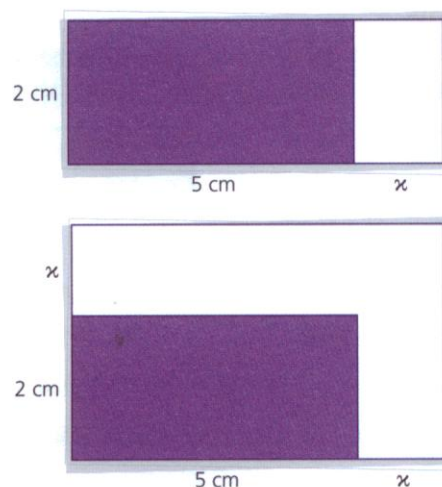
O comboio que se dirige para Lisboa tem uma velocidade constante de 100 km/h. O que se dirige para o Porto tem uma velocidade constante de 80 km/h.

- 2.1** Escreva, para cada comboio, uma expressão que represente a distância ao ponto de partida, em quilómetros, em função do tempo decorrido, em horas.
- 2.2** Determine, grafica e analiticamente, quanto tempo depois de partirem é que os comboios se encontram. Nesse instante, a que distância se encontram do Porto?

**3.**

Num rectângulo de lados 2 cm e 5 cm, dá-se um acréscimo de x unidades ao lado maior.

- 3.1** Escreva uma expressão da área, em função de x , do novo rectângulo resultante dessa modificação.
- 3.2** Supondo que o acréscimo x também foi dado ao lado menor, qual é a expressão da área, em função de x , deste novo rectângulo resultante dos dois acréscimos?
- 3.3** Relativamente ao rectângulo obtido na alínea anterior, determine um valor aproximado, às centésimas, de x , para o qual a área do novo rectângulo é o dobro da área do rectângulo inicial.

**4.**

Uma firma de cosméticos propôs trabalho à Joana. Oferecia-lhe uma remuneração mensal fixa mais uma determinada percentagem no lucro das vendas que ela conseguisse fazer nesse mês. O modelo matemático que permite determinar a remuneração mensal da Joana, em euros, é:

$m(x) = 500 + 0,03x$, em que x representa o lucro mensal de vendas da Joana em euros.

- 4.1** Calcule:
- a) a remuneração mensal fixa da Joana;
- b) quanto receberá a Joana num mês em que o lucro das suas vendas seja de mil euros.
- 4.2** Qual é o significado do declive da recta que representa graficamente a função m ?

5.

Um ponto P desloca-se sobre uma recta a uma velocidade constante de 3 m/s; 4 segundos após o ponto P passar pelo ponto A pertencente à mesma recta, iniciam-se as medições das distâncias $\overline{AP}$.

Caracterize a função d que em cada instante, em segundos, dá o valor da distância medida.

6.

Uma bola de baseball é lançada verticalmente com uma velocidade inicial de 32 m/s. As funções h e v , definidas por:

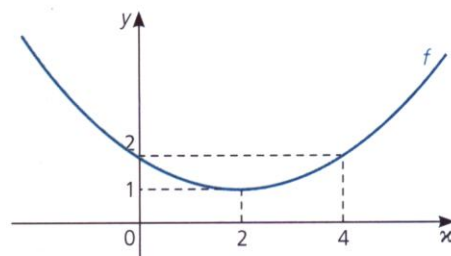
$$h(t) = -4,9t^2 + 32t + 2,1 \quad \text{e} \quad v(t) = -9,8t + 32$$

dão, respectivamente, a altura da bola e a velocidade vertical em cada instante. Determine, utilizando valores aproximados às milésimas:

- a altura máxima atingida pela bola e em que instante ocorre;
- a velocidade vertical da bola no instante em que a altura máxima é atingida;
- a velocidade vertical da bola no momento em que chega ao solo.

7.

Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função quadrática f .

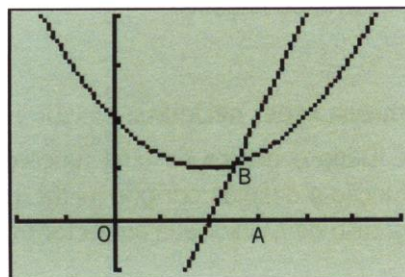


7.1 Indique:

- os intervalos de monotonia de f e o seu contradomínio;
- o conjunto-solução da condição $f(x) > 2$.

7.2 Determine uma expressão analítica de f .

7.3 Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x - 4$, o ponto A , de coordenadas $(3, 0)$, e o ponto B correspondente à intersecção dos gráficos de f e de g (ver figura ao lado). Utilize a calculadora gráfica para determinar um valor aproximado da área do triângulo $[OAB]$.



8.

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

- | | | |
|----------------------------|--------------------|--------------------------|
| a) $(x - 5)(x + 2) \leq 0$ | b) $-x^2 + 5x > 6$ | c) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ |
| d) $x^2 + 4 < 0$ | e) $x^2 > 9$ | f) $x^2 \leq x$ |

9.

O lucro, em euros, da venda do jornal de uma escola é função do preço p , em euros, dos exemplares vendidos, e é dado por:

$$L(p) = -138,4p^2 + 318,32p - 83,04$$

Este modelo prevê apenas as despesas fixas na edição do jornal, o preço de cada exemplar e o número de exemplares vendidos (que é função do preço). Note que quanto mais caros forem os exemplares do jornal, menor será o número de exemplares vendidos.

9.1 Represente graficamente a função lucro.

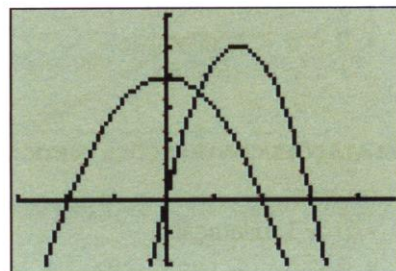
9.2 Determine:

- qual deverá ser o preço de cada jornal para obter o lucro máximo;
- o preço mínimo de cada jornal para que não haja prejuízo;
- o valor das despesas fixas para a edição do jornal.



10.

Na figura, estão representados dois arcos de parábolas de vértices $(0, 4)$ e $(\frac{3}{2}, 5)$. As parábolas correspondem aos gráficos de duas funções quadráticas, f e g . Determine um valor aproximado de x que verifique a condição $f(x) = g(x)$.

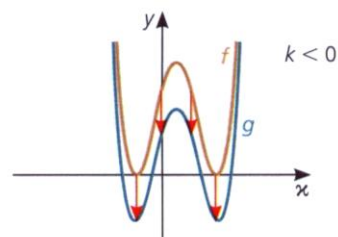


SÍNTESE

TRANSFORMAÇÕES

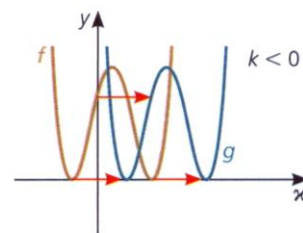
TRANSLAÇÕES VERTICAIS: $y = f(x) + k$

Dado o gráfico de uma função f , pode obter-se o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x) + k$ efectuando a translação do gráfico de f , associada ao vector $\vec{u}(0, k)$. O gráfico desloca-se k unidades, verticalmente, para cima, ou para baixo, conforme k é positivo ou negativo.



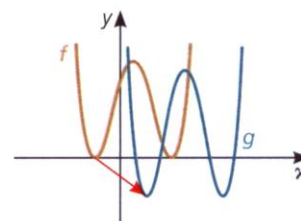
TRANSLAÇÕES HORIZONTAIS: $y = f(x + h)$

Dado o gráfico de uma função f , pode obter-se o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x + h)$ efectuando a translação do gráfico de f , associada ao vector $\vec{u}(-h, 0)$. O gráfico desloca-se h unidades, horizontalmente, para a esquerda, ou para a direita, conforme h é positivo, ou negativo.



TRANSLAÇÕES OBLÍQUAS: $y = f(x + h) + k$

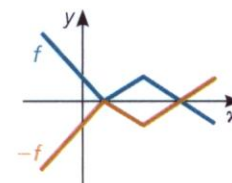
Dado o gráfico de uma função f , pode obter-se o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x + h) + k$ efectuando a translação do gráfico de f , associada ao vector $\vec{u}(-h, k)$.



SIMETRIA EM RELAÇÃO A Ox : $y = f(x)$

Os gráficos que representam $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ são simétricos em relação ao eixo Ox .

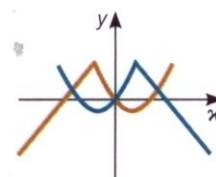
Se o ponto (x, y) está no gráfico de $y = f(x)$, então $(x, -y)$ está no gráfico de $y = -f(x)$.



SIMETRIA RELATIVAMENTE A Oy : $y = f(-x)$

Os gráficos que representam $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo Oy .

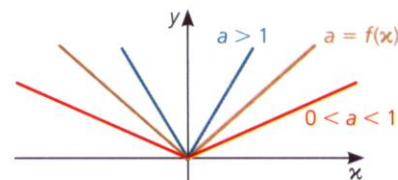
Se o ponto (x, y) está no gráfico de $y = f(x)$, então $(-x, y)$ está no gráfico de $y = f(-x)$.



DILATAÇÕES/CONTRAÇÕES HORIZONTAIS: $y = f(ax)$

quando:

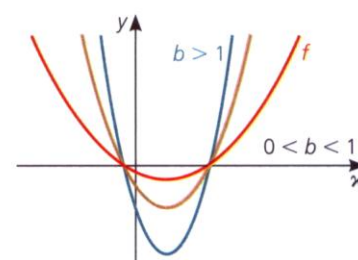
- $a > 1$, contracção;
- $0 < a < 1$, dilatação.



DILATAÇÕES/CONTRAÇÕES VERTICAIS: $y = bf(x)$

quando:

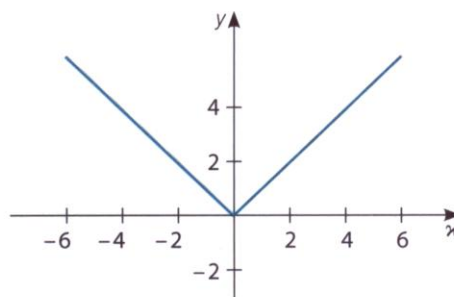
- $b > 1$, dilatação;
- $0 < b < 1$, contracção.



■ FUNÇÃO MÓDULO

Chama-se **função módulo** ou **função valor absoluto** à função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



A função módulo:

- tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0, +\infty[$;
- tem zeros: 0;
- é uma função par: $|-x| = |x|$;
- tem mínimo 0, para $x = 0$;
- é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$;
- é não-injectiva: $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a, a \geq 0$;
- é contínua.

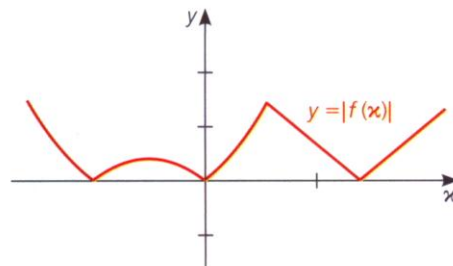
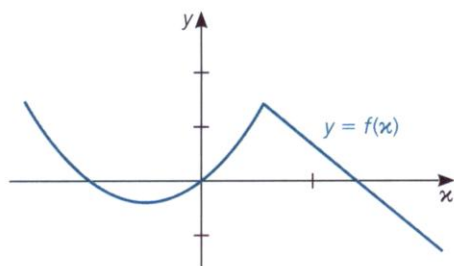
OUTRAS PROPRIEDADES DO MÓDULO

- $|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$
(se $a < 0$, a condição é impossível)
- $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$
(se $a < 0$, a condição é universal)

Módulo de uma função

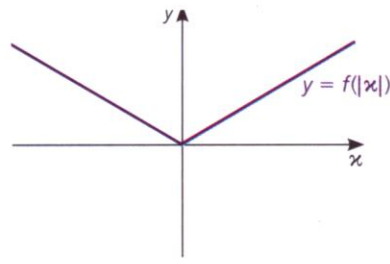
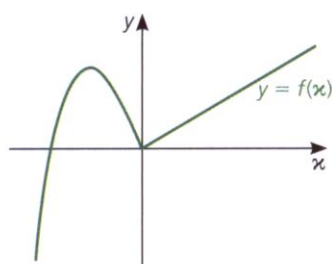
- $y = |f(x)|$

Graficamente, o módulo de uma função deixa invariantes os pontos que se encontram acima do eixo Ox e reflecte em relação a este eixo os pontos que se encontram abaixo.



- $y = f(|x|)$

Graficamente, esta transformação deixa invariantes os pontos que se encontram à direita do eixo Oy , e à esquerda o gráfico é tal que a função obtida é par.



ESCOLHA MÚLTIPLA

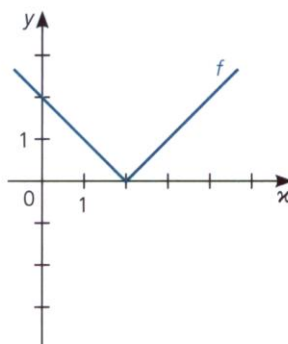
Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

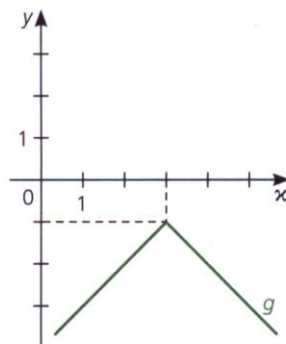
Na figura A, está representada graficamente a função f .
Na figura B, está representada graficamente a função g .
Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $g(x) = -f(x + 1) - 1$
 (B) $g(x) = f(x - 1) + 1$
 (C) $g(x) = f(x + 1) - 1$
 (D) $g(x) = -f(x - 1) - 1$

A



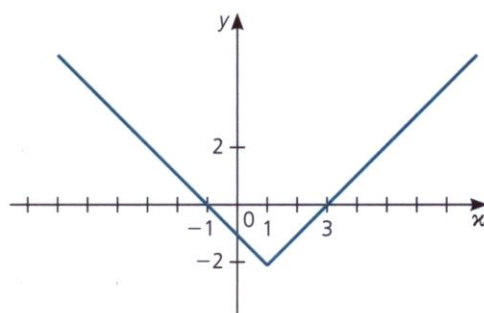
B



Teste Intermédio do 11.º Ano

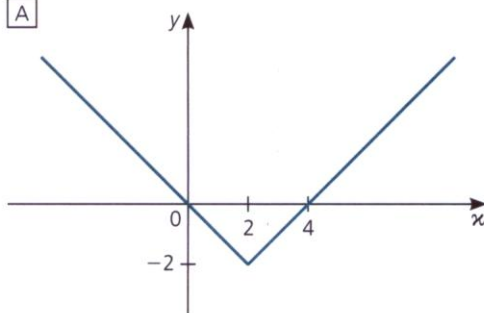
2.

Observe o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

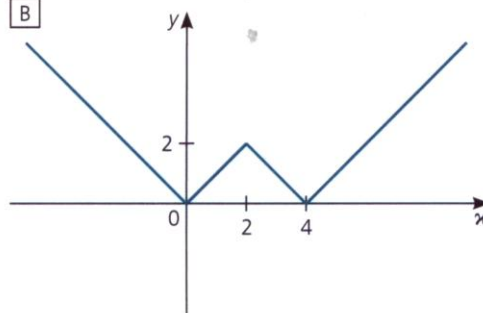


Selecione de entre os gráficos seguintes o que pode representar a função $|f(x - 1)|$.

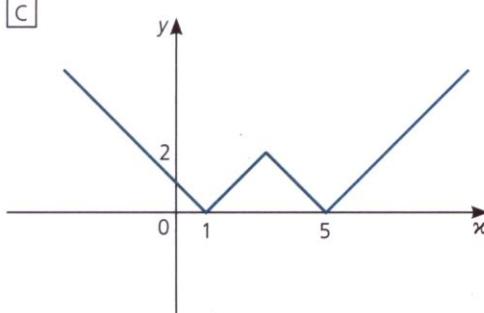
A



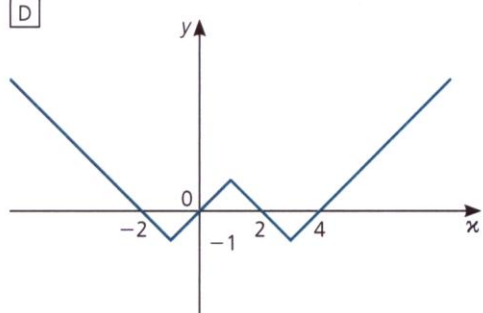
B



C

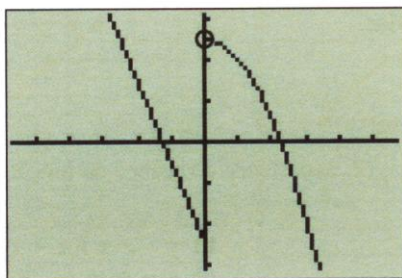


D

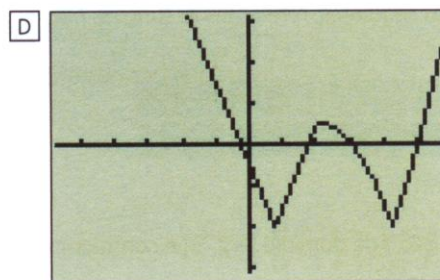
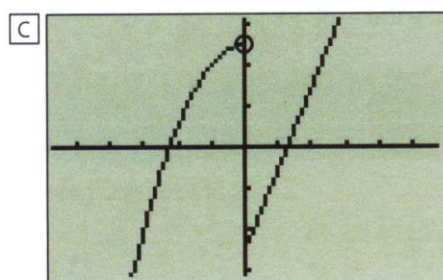
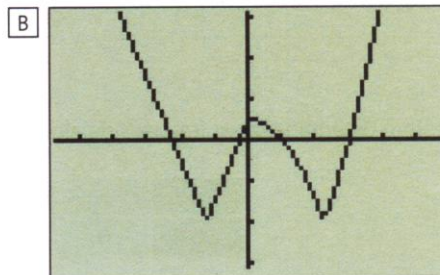
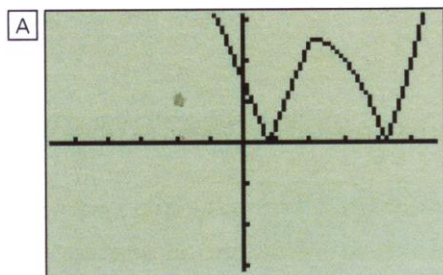


3.

Observe o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Selecione de entre os gráficos seguintes o que pode representar a função $|f(x)| - 2$.



4.

Seja f uma função cujos zeros são -2 , 3 e 5 . Então, os zeros da função definida por $g(x) = f(x + 2)$ são:

- (A) -4 , 1 e 3 .
- (B) 0 , 5 e 7 .
- (C) -2 , 3 e 5 .
- (D) -4 , 6 e 10 .

5.

Considere a função h , real de variável real, tal que:

- $D'_h = [-3, 2]$;
- o conjunto dos zeros é $\{-4, 2, 3\}$.

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) O contradomínio de $i(x) = |h(x)|$ é $[0, 2]$.
- (B) 6 é o máximo da função $j(x) = 3h(x)$.
- (C) O conjunto dos zeros de $l(x) = -h(x)$ é $\{-3, -2, 4\}$.
- (D) O contradomínio de $m(x) = h(x) - 1$ é $[-2, 3]$.

6.

Sabendo que -4 é a imagem de 2 por f , e g a função definida por $g(x) = |f(x - 1)| - 1$, pode afirmar-se que o valor de $g(3)$ é:

- (A) -5
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Considere uma função f , real de variável real.

1.1 Sabendo que o ponto de coordenadas $(2, 6)$ pertence ao gráfico da função f , indique as coordenadas de um ponto que esteja em:

a) $y = f(x + 2)$

b) $y = 2 + f(x - 1)$

c) $y = f(2x)$

d) $y = 3f(x)$

1.2 Admitindo que $f(-2)$ existe, calcule-o considerando:

a) f par;b) f ímpar.

2.

De uma função g foram determinadas as imagens de alguns objectos e registados os valores na tabela seguinte.

x	1	2	3	4
$g(x)$	0	3	2	0

Complete as tabelas seguintes, referentes às funções $h(x) = 3g(x)$ e $t(x) = g\left(\frac{1}{2}x\right)$:

a)

x	1	2	3	4
$h(x)$				

b)

x				
$t(x)$	0	3	2	0

3.

Considere uma função f de domínio $[-2, 3]$ e contradomínio $[-1, 4]$.

3.1 Esboce um possível gráfico de f .

3.2 Partindo do gráfico anterior, esboce o gráfico de $|f|$ e indique o seu domínio e contradomínio.

3.3 Indique o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

a) $a(x) = f(x + 1)$

b) $b(x) = -f(x)$

c) $c(x) = f(x + 2) - 3$

d) $d(x) = -3f(x)$

4.

Considere f e g duas funções quadráticas, tais que $D_f =]-\infty, 2]$ e o vértice da parábola que representa graficamente g com coordenadas $(0, -1)$.

Determine o valor de k , de forma que $g(x) = f(x) + k$.

5.

O gráfico ao lado representa a função f de domínio $[-4, 2]$.

5.1 Represente graficamente as seguintes funções, indicando, para cada uma delas, o domínio, o contradomínio e os zeros:

a) $a(x) = f(x) + 2$

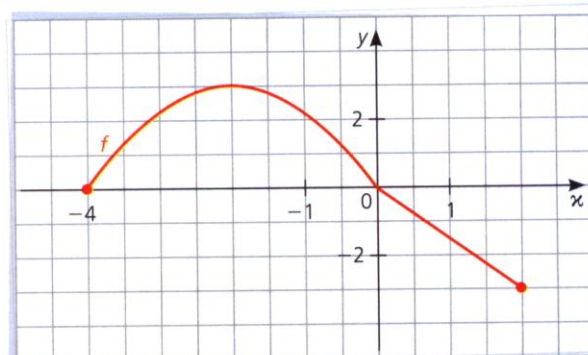
b) $b(x) = 0,5f(x)$

c) $c(x) = -f(x)$

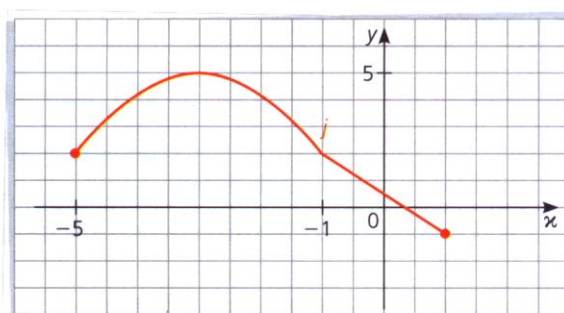
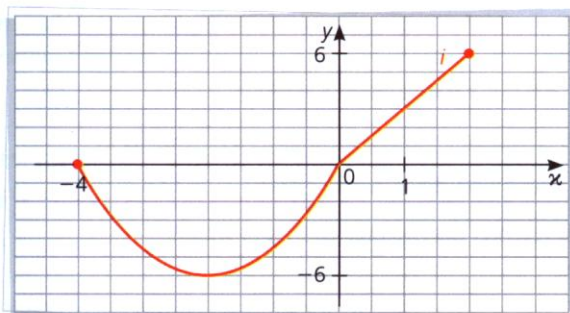
d) $d(x) = f(x - 1)$

e) $e(x) = f(2x)$

f) $g(x) = f(|x|)$



5.2 Os gráficos seguintes foram obtidos por transformações do gráfico de f .



Complete as expressões:

a) $i(x) = \dots f(x)$

b) $j(x) = f(\dots) + \dots$

6.

Considere as funções reais de variável real:

$$f(x) = |x - 3| + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 5 - |x - 2|$$

6.1 Indique o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

6.2 Determine analiticamente, caso existam, os zeros de f e de g .

6.3 Determine analiticamente os valores de x que verificam as condições:

a) $f(x) = 10$

b) $g(x) > 1$

6.4 Determine graficamente os valores de x que verificam a condição $f(x) = g(x)$.

7.

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $|2x - 3| - 4 = 1$

b) $|x| = 2x - 1$

c) $|3x - 1| < 4$

d) $5 + |4 - x| \leq 7$

e) $|x^2 - 2x| < 1$

f) $3 + 2|5x| \geq 4$

8.

O gráfico ao lado é de uma função g do tipo $y = |x - a| + b$ constituído pela reunião de duas semi-rectas de origem no ponto de coordenadas $(3, -2)$.

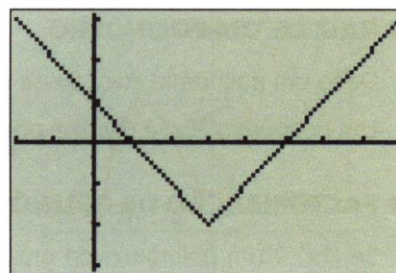
8.1 Defina analiticamente a função g sem utilizar o símbolo de valor absoluto.

8.2 Esboce o gráfico da função $|g|$.

8.3 Indique para que valores de k a função:

a) $h(x) = g(x - k)$ tem dois zeros negativos;

b) $i(x) = g(x) + k$ tem um único zero.



9.

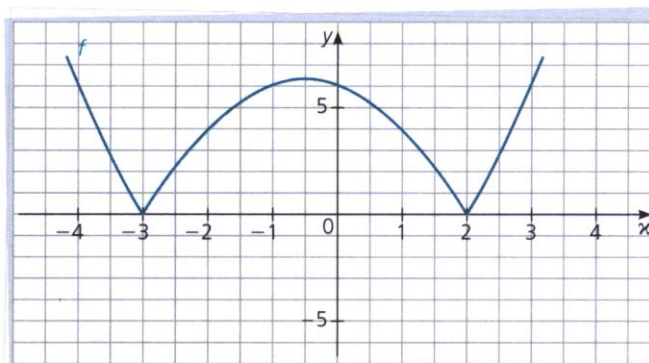
A figura seguinte representa graficamente o módulo de uma função quadrática f .

9.1 Determine uma expressão analítica para a função f , admitindo que:

a) a inequação $f(x) > 0$ tem como solução o intervalo $] -3, 2[$;

b) a função f não admite máximo.

9.2 Escreva uma expressão analítica para a função $|f|$ sem utilizar o símbolo de valor absoluto.



SÍNTESE**DEFINIÇÃO DE POLINÓMIO**

Chama-se polinómio de grau $n \in \mathbb{N}_0$, na variável x , a toda a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$$

Um polinómio cujos coeficientes sejam iguais a zero chama-se **polinómio nulo**.

Dois polinómios **são idênticos** se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais.

DIVISÃO INTEIRA DE POLINÓMIOS

Efectuar a divisão inteira de $D(x)$ (**dividendo**) por $d(x)$ (**divisor**) é determinar os polinómios $Q(x)$ (**quociente**) e $R(x)$ (**resto**), tais que:

$$D(x) = d(x) \times Q(x) + R(x), \text{ onde o grau do resto é inferior ao do divisor } d(x).$$

Diz-se que a **divisão é exacta** quando o resto é o polinómio nulo.

REGRA DE RUFFINI

Quando o divisor é um polinómio do primeiro grau, existe um algoritmo mais simples para efectuar a divisão inteira, que se designa por **Regra de Ruffini**.

Divisão de $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ por $x - \alpha$

	a_0	a_1	a_2	...	...	a_n
α		$a_0\alpha$	$a_0\alpha^2 + a_1\alpha$			
	a_0	$a_0\alpha + a_1$	$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2$			$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = D(x) = R$

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão do polinómio $D(x)$ por $x - a$ é igual a $D(a)$.

RAIZ DE UM POLINÓMIO

Dado um polinómio $P(x)$, diz-se que a é **zero**, ou **raiz**, de $P(x)$ se $P(a) = 0$.

Um polinómio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e só se, a é zero de $P(x)$.

FACTORIZAÇÃO DE POLINÓMIOS

Se $P(x)$ é um polinómio de grau n , com n raízes reais, $x_1, x_2, \dots, x_n$, então, $P(x)$ pode ser factorizado da seguinte forma:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \text{ onde } a \text{ é o coeficiente do termo de maior grau.}$$

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Diz-se que a é uma **raiz de multiplicidade** m do polinómio $P(x)$ se, e só se, o factor $x - a$ se repete exactamente m vezes na factorização de $P(x)$. Isto é, pode escrever-se $P(x)$ na forma $P(x) = (x - a)^m \times Q(x)$, onde $Q(x)$ não é divisível por $x - a$.

ZEROS DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Os **zeros** de uma função polinomial são as raízes do polinómio que a define.

O número de zeros de uma função polinomial é, quando muito, igual ao seu grau.

ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

O resto da divisão inteira de um polinómio de 5.º grau por um polinómio de 2.º grau é um polinómio de grau:

- (A) 3 (B) 1 (C) inferior a 2. (D) 2

2.

O quociente da divisão inteira de um polinómio do 6.º grau por um polinómio de 1.º grau é um polinómio de grau:

- (A) 5 (B) inferior a 5. (C) 4 (D) 6

3.

O resto da divisão $(2x^3 - 3x + 4) : (x + 1)$ é:

- (A) 0 (B) -5 (C) 5 (D) 10

4.

O resto da divisão $(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2) : (2 - x)$ é:

- (A) 10 (B) 58 (C) -10 (D) -58

5.

O valor de k para o qual o polinómio $x^3 + 2x^2 + (k - 3)x - 6$ é divisível por $x + 3$ é:

- (A) 2 (B) -2 (C) 24 (D) -24

6.

Seja g uma função cúbica com -4, 1 e 3 como zeros, e cujo gráfico intersecta a recta de equação $y = 18$ no ponto de abcissa 2. Uma expressão analítica possível para g é:

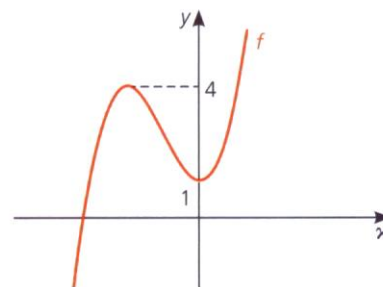
- (A) $-2(x + 4)(x - 1)(x - 3)$ (B) $-2(x - 4)(x + 1)(x + 3)$
(C) $3(x + 4)(1 - x)(x - 3)$ (D) $(x + 4)(x - 1)(x - 3)$

7.

Seja f uma função polinomial do 3.º grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 3$?

- (A) Uma.
(B) Duas.
(C) Três.
(D) Quatro.



8.

O resto da divisão inteira do $p(x)$ por $x - 2$ é -18 e -1 é um zero duplo de $p(x)$ e p é uma função quadrática. Então, o polinómio que define p é:

- (A) $2x^2 - 4x - 2$
(B) $-2x^2 - 4x - 2$
(C) $2x^2 + 4x + 2$
(D) $-x^2 - 2x - 1$

9.

Considere f a função polinomial definida analiticamente por $f(x) = 2(x - 4)(x - 1)(x + 2)$.

Os zeros da função $h(x) = f(x + 2)$ são:

- (A) -2, 1 e 4. (B) 0, 3 e 6. (C) -4, 1 e 2. (D) -4, -1 e 2.

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Simplifique as seguintes expressões:

- a) $(6x^3 - 3x^2 + 4x - 3) + (x - 1)(x + 1)$
- b) $-3(x - 2)^2(x + 2)^2$
- c) $(x + 1)^3 + x^3 - 9x - 27$

2.

Determine o quociente e o resto das seguintes divisões inteiras:

- a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 1)$
- b) $(2x^2 - 3x + 5) : (x + 3)$
- c) $(7x^5 - 3x^3 + 2x - 4) : (x^2 - 2x + 3)$
- d) $(x^3 - 4x^2 + 8) : (x^2 - 4)$

3.

Decomponha, se possível, em factores de 1.º grau, os seguintes polinómios:

- a) $x^2 - 9$
- b) $x^2 - 8x + 16$
- c) $x^2 - 5x + 6$
- d) $2x^2 + 24x + 72$
- e) $x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabendo que 1 é raiz do polinómio.
- f) $-x^3 + 5x^2 - 6x$
- g) $x^3 + x^2 + x + 1$

4.

Utilize a regra de Ruffini para determinar o quociente e o resto das seguintes divisões inteiras:

- a) $(6x^5 + x^4 - 2x + 15 - x^2) : (x + 2)$
- b) $\left(\frac{1}{2}x^5 - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 1\right) : (x - 1)$
- c) $(-2x^5 + 4x^3 - 2x + 15) : (2x + 1)$
- d) $(x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 28x + 60) : (x - 2)^2$

5.

Considere o polinómio $P(x) = -3x^3 + ax^2 - (a + 1)x + 3$, em que a é um número real.

Determine o valor de a de forma que:

- a) $P(x)$ seja divisível por $x - 2$;
- b) o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ seja 10.

6.

Complete a factorização dos polinómios seguintes:

- a) $(x^2 - 1)(x^6 + 1)$, sabendo que $x^6 + 1$ é divisível por $x^2 + 1$.
- b) $(x + 2)(x^3 - 2x^2 - 9)$, sabendo que tem a raiz 3.
- c) $(x^2 - 6x + 8)(x^4 - 16)$

7.

Decomponha em factores os seguintes polinómios:

- a) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$, sabendo que 1 é raiz.
- b) $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 32x - 60$, sabendo que é divisível por $x^2 - 4$.
- c) $-3x^3 - 22x^2 - 29x + 30$, sabendo que é divisível por $3x - 2$.

8.

Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

8.1 Prove que -1 é uma raiz de f e indique a sua multiplicidade.

8.2 Decomponha f num produto de factores do 1.º grau.

8.3 Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

9.

Determine o conjunto-solução das seguintes condições:

a) $x^4 - 16 \leq 0$

c) $2x^3 + 12x^2 < 2x + 12$

b) $(x - 3)(x^3 - 9x) = 0$

d) $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 32x - 60 \geq 0$

Sugestão: Utilize o resultado obtido na questão 7.b).

10.

Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função:

$$V(x) = 741x^2 - 18\,180x + 110\,400, \quad x \in]0, 11[$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 L desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

10.1 Que quantidade de litros de azeite prevê a empresa vender se fixar o preço do litro de azeite em 3 euros?

10.2 A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transporte, etc.) com a compra e venda do azeite.

Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, justifique que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por:

$$L(x) = (x - 3) \times V(x)$$

10.3 Utilize a calculadora para resolver graficamente o seguinte problema:

Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de 1 L de azeite para que o lucro mensal seja superior a 16 500 euros?

Apresente os valores em euros, arredondados aos centimos (de euro).

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos relevantes.



11.

Diz-se que um ponto a do domínio de uma função f é um ponto fixo de f se $f(a) = a$.

Considere a função polinomial definida por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5$.

a) Determine um ponto fixo de f , utilizando a calculadora gráfica.

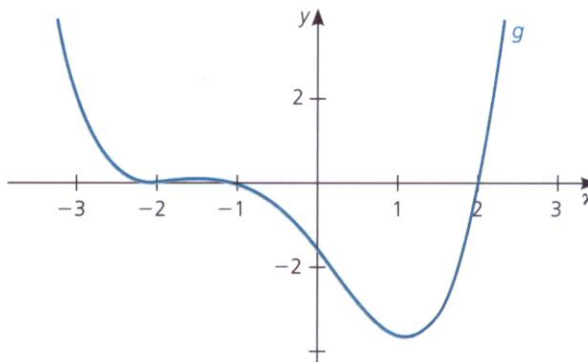
b) Partindo do resultado obtido na alínea anterior, determine analiticamente o conjunto-solução da condição $f(x) \geq x$.

12.

Considere g uma função polinomial do 4.º grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado ao lado.

12.1 Indique, justificando, uma expressão analítica para a função g , sabendo que $g(0) = -\frac{8}{5}$.

12.2 Indique o conjunto-solução da condição $g(x) \geq 0$.

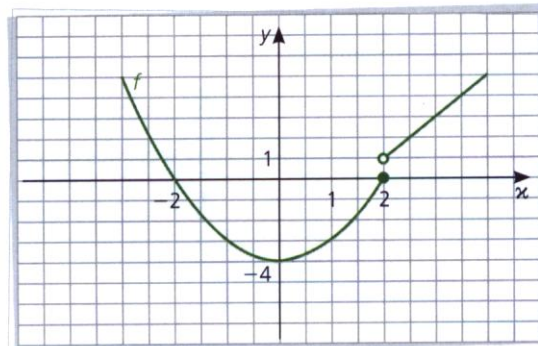


I

Para cada uma das cinco questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente na figura, constituída por um arco de parábola e uma semi-recta.



1.1 Seleccione a afirmação falsa.

- (A) A função é descontínua em $x = 2$.
- (B) A função tem 2 zeros.
- (C) -4 é mínimo absoluto de f .
- (D) f é positiva em $]-\infty, -2]$.

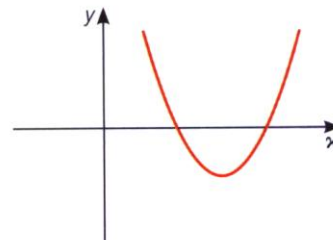
1.2 A função f pode ser definida analiticamente por:

- (A) $\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$
- (B) $\begin{cases} x^2 + 4 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 2 \\ -2x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

2.

Na figura, está representada parte do gráfico de uma função h , do tipo $h(x) = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Seleccione a afirmação verdadeira.

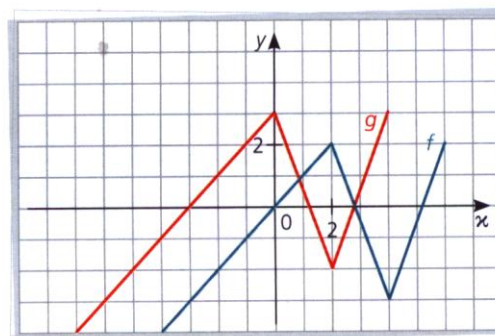


- (A) $a > 0 \wedge \Delta < 0$
- (B) $h > 0 \wedge k > 0$
- (C) $a < 0 \wedge \Delta > 0$
- (D) $\Delta > 0 \wedge h > 0 \wedge k < 0$

Nota: Δ é o binómio discriminante.

3.

Na figura, estão representadas graficamente duas funções, f e g , tais que:



- (A) $g(x) = f(x + 2) + 1$
- (B) $g(x) = f(x - 2) + 1$
- (C) $f(x) = g(x + 2) - 1$
- (D) $f(x) = g(x - 2) + 1$

4.

Considere f uma função quadrática com zeros -3 e 4 e cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima. O conjunto-solução da condição $f(x) \times (9 - x^2) < 0$ é:

- (A) $]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]4, +\infty[$
- (B) $]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$
- (C) $]3, 4[$
- (D) $] -3, 4[$

II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Na figura, está representado o gráfico da função f .

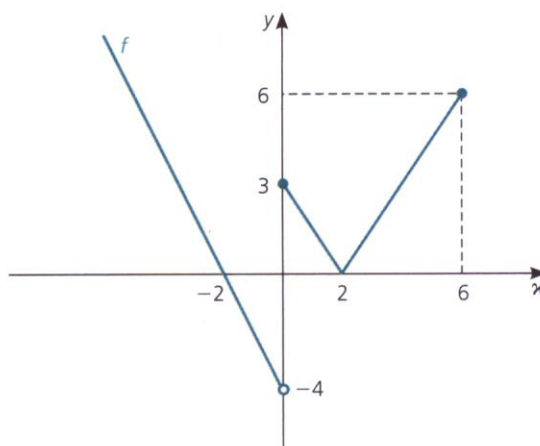
1.1 Indique:

- o domínio, o contradomínio e a imagem de zero;
- os extremos relativos e absolutos, caso existam;
- um intervalo onde a função seja simultaneamente decrescente e negativa.

1.2 Quantas soluções tem a equação $f(x) = 3$?

1.3 Represente f analiticamente.

1.4 Esboce o gráfico de $i(x) = f(|x|)$.



2.

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

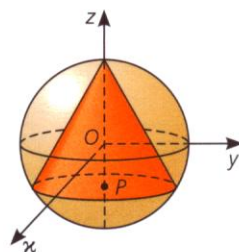
2.1 Indique o domínio e o contradomínio de f .

2.2 Estude o sinal de f .

2.3 Sabendo que $g(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ tem um zero em comum com a função f , indique o conjunto-solução da seguinte condição: $g(x) \geq 0$.

3.

Num referencial o. n. $Oxyz$, considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Um ponto, P , desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo Oz . Para cada posição do ponto P , considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto P e que tem por vértice o ponto $(0, 0, 1)$.

Considere f a função que faz corresponder, à cota c do ponto P , o volume V do referido cone.

3.1 Prove que $V(c) = \frac{1}{3}\pi(1 - c^2)(1 - c)$, para $c \in [-1, 1]$.

Sugestão: Note que o raio da base do cone é $\sqrt{1 - c^2}$.

3.2 Recorrendo às capacidades da calculadora, determine o volume máximo aproximado às centésimas.

3.3 Sabendo que $V\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{8}$, resolva, analiticamente, a condição $V(c) \geq \frac{3\pi}{8}$.

GRELHA DE AVALIAÇÃO

PARTE	I	II											
Questões	1 a 4	1.1a)	1.1b)	1.1c)	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3
Cotações	$5 \times 10 = 50$	10	10	8	8	16	12	10	12	17	17	12	18

SÍNTESE**■ POPULAÇÃO/AMOSTRA**

Chama-se **população**, ou **universo**, a uma colecção de objectos com uma característica comum.

A cada elemento da população chama-se **unidade estatística** ou **indivíduo**.

Uma **amostra** é um subconjunto de elementos extraídos da população, com uma metodologia adequada.

A selecção de uma amostra é fundamental para um bom estudo estatístico. O processo de selecção da amostra denomina-se **amostragem**.

As amostragens mais usuais são: a **amostragem aleatória simples** (cada indivíduo da população tem igual probabilidade de ser seleccionado); a **amostragem estratificada** (utiliza-se quando a população está dividida em diferentes estratos, devendo a proporção de indivíduos de cada estrato ser aproximadamente igual à proporção do estrato na população); a **amostragem sistemática** (os elementos da população são escolhidos a partir de uma regra previamente definida).

■ CENSO OU RECENSEAMENTO/SONDAGEM

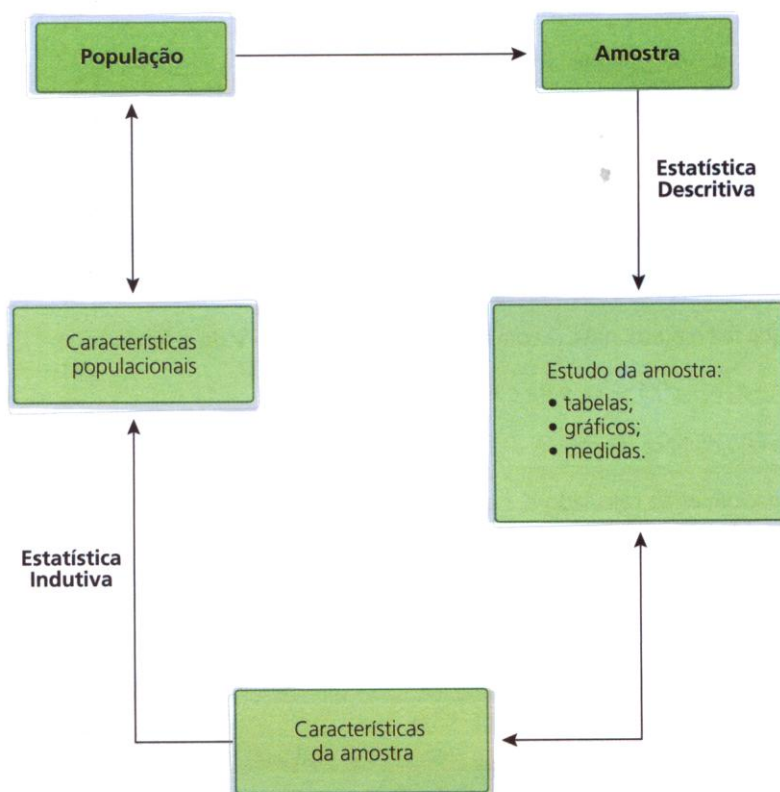
Um **censo** ou **recenseamento** é um estudo estatístico que implica a observação de **todos** os elementos da população.

Uma **sondagem** é um estudo estatístico de uma população, efectuado a partir de uma amostra.

■ ESTATÍSTICA DESCRITIVA E ESTATÍSTICA INDUTIVA

A **Estatística Descritiva** tem por finalidade descrever certas propriedades relativas a uma amostra ou população.

A **Estatística Indutiva** procura inferir características da população a partir das características observadas numa amostra.

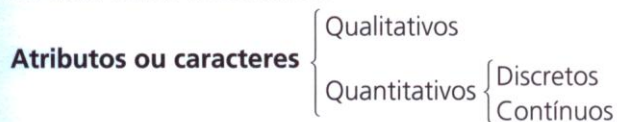


■ ATRIBUTOS ESTATÍSTICOS

- O **atributo qualitativo** é uma qualidade, característica ou categoria que pode assumir várias modalidades que não se podem exprimir naturalmente por um número.
- O **atributo quantitativo** é uma característica que se pode medir, ou seja, que se pode exprimir por um número.

Se uma variável quantitativa toma apenas um número finito de valores em qualquer intervalo de variação limitado, diz-se que é uma **variável discreta**.

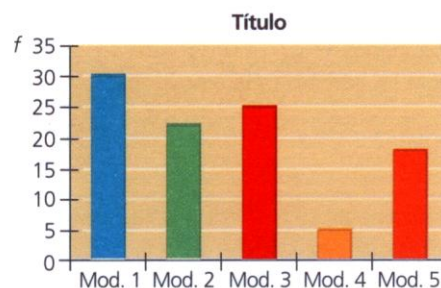
Se a variável pode tomar todos os valores numéricos compreendidos no seu intervalo de variação, diz-se que é uma **variável contínua**.



■ FREQUÊNCIAS SIMPLES — REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

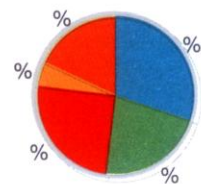
- A **frequência absoluta simples** de um dado estatístico é o número de vezes que este se repete e representa-se por f_i .
- A **frequência relativa simples** de um dado estatístico é o quociente entre a frequência absoluta e o número total de dados. Representa-se por $fr_i = \frac{f_i}{N}$, em que N é o número total de dados.

Os **gráficos de barras** utilizam-se para representar dados qualitativos ou quantitativos discretos. Num dos eixos indicam-se as modalidades e, no outro, as frequências. A altura, ou comprimento, de cada barra é proporcional à frequência da respectiva modalidade.

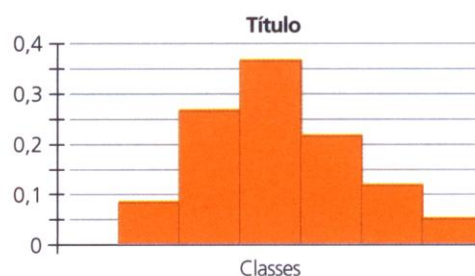


Para construir um **gráfico circular**, divide-se um círculo em sectores circulares, cuja amplitude, para cada modalidade, se obtém multiplicando a frequência relativa respectiva por 360° .

Este tipo de gráfico pode ser utilizado para qualquer tipo de atributo, seja qualitativo seja quantitativo. No entanto, se o número de modalidades for elevado, este tipo de representação torna-se pouco legível.



O **histograma** é um gráfico formado por uma sucessão de rectângulos adjacentes, tendo cada um por base um intervalo de classe, e por área, a frequência relativa (ou absoluta). Deste modo, a área total coberta pelo histograma é igual a 1 (respectivamente igual à dimensão da amostra).



ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Na Escola Secundária da Ponte, pretende-se averiguar, após o 1.º período, as expectativas dos alunos do 10.º Ano relativamente à disciplina de Matemática. Para isso, seleccionaram-se, ao acaso, cinco alunos de cada uma das seis turmas do 10.º Ano que tinham Matemática no plano de estudos.

O estudo estatístico efectuado designa-se por:

- (A) amostragem. (B) censo. (C) sondagem. (D) recenseamento.

2.

Em apenas um dos estudos estatísticos seguintes foi efectuado um recenseamento. Identifique-o.

- (A) O bom estado de um lote de 1000 lâmpadas foi aferido pelo teste efectuado a 50 lâmpadas que não apresentaram deficiências.
(B) Os 12 monitores do parque aventura Slide Red ganham em média 150 euros por semana.
(C) Um estudo estatístico levado a cabo pela empresa Estaticom revela que 65% dos portugueses têm dois, ou mais, telemóveis.
(D) Um em cada quatro adolescentes portugueses gostava de ser jogador de futebol.

3.

Pretende-se estudar a eficácia de determinado medicamento no tratamento de uma doença. Para o efeito foram seleccionados vinte doentes, administrando-se o medicamento a 10 desses doentes, escolhidos ao acaso, e o medicamento habitual aos restantes.

A população em estudo é...

- (A) ... o conjunto de todos os doentes que o medicamento em estudo pretende tratar.
(B) ... o conjunto dos 20 doentes seleccionados.
(C) ... o conjunto dos 10 doentes a quem foi administrado o novo medicamento.
(D) ... o novo medicamento.

4.

Ao lado, encontram-se representados graficamente os resultados obtidos na resposta à seguinte questão:

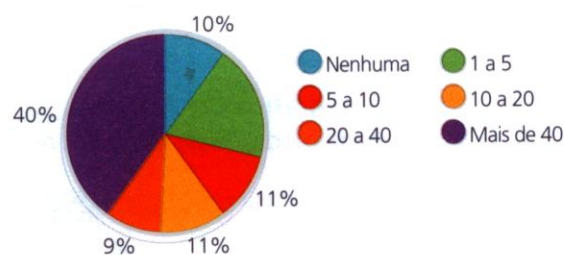
«Quantas mensagens SMS envia normalmente por semana?»
(sondagem efectuada no site da Telemoveis.com.)

Sabe-se que responderam à questão 410 pessoas.

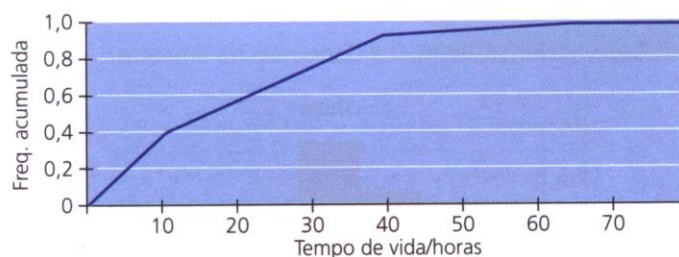
Quantas pessoas enviam 5 ou menos mensagens por semana?

- (A) 19 (B) 78 (C) 119 (D) 29

N.º de mensagens enviadas por semana

**5.**

O gráfico seguinte refere-se ao «tempo de vida» (em horas) de computadores depois de infectados por um certo tipo de vírus.



A percentagem de computadores que «sobrevivem» entre 10 e 40 horas depois de infectados pelo vírus é, aproximadamente:

- (A) 92% (B) 52% (C) 8% (D) 30%

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

A tabela seguinte apresenta os dados relativos ao número de entradas de hóspedes nos hotéis de Lisboa durante o ano de 2009.

2009		Hotéis de 5 estrelas	Hotéis de 4 estrelas	Hotéis de 3 estrelas	Hotéis de 2 estrelas	Outros	Total anual
Número de hóspedes que entraram	1.º trimestre	50 116	150 357	104 179	34 048	3099	341 799
	2.º trimestre	69 689	219 340	147 428	43 359	5389	485 205
	3.º trimestre	87 649	237 884	149 851	46 985	5106	527 475
	4.º trimestre	75 159	201 155	126 148	37 677	4638	444 777
Total anual		282 613	808 736	527 606	162 069	18 232	1 799 256

1.1 Identifique a população em estudo.

1.2 Elabore uma tabela de frequências relativas para cada trimestre.

1.3 Num estudo comparativo, indique, relativamente às outras categorias, o trimestre mais favorável aos hotéis de cinco estrelas.

2.

Na tabela seguinte encontra a data de nascimento dos jogadores da selecção nacional de voleibol em 2008.



N.º	Nome	Data de nascimento	Clube
1	M. Maia	23/04/1971	SC Espinho, POR
2	Bruno	14/04/1983	AJF Bastardo, POR
3	André	12/09/1982	SL Benfica, POR
4	Malveiro	08/12/1979	GC Vilacondense, POR
5	Roberto	02/03/1980	Castelo da Maia GC, POR
6	Marco	04/10/1987	CS Marítimo, POR
7	Teixeira	11/03/1976	SL Benfica, POR
8	H. Gaspar	02/09/1982	Vitória SC, POR
9	Pinheiro	31/12/1984	Noliko Maaseik, BEL
10	Francisco	05/07/1991	AA S. Mamede, POR
11	Eden	28/10/1980	-
12	J. José	07/06/1978	VFB Friedrichshafen, GER
13	Valdir	22/11/1981	ITA
14	Flávio	28/08/1982	Vitória SC, POR
15	Ruca	24/03/1984	AJF Bastardo, POR
16	Diogo	21/09/1985	Esmoriz GC, POR
17	Fred	04/05/1989	Vitória SC, POR
18	Eurico	13/05/1981	Vitória SC, POR

2.1 Elabore uma tabela de frequências das idades dos atletas da selecção nacional de voleibol e indique a idade mais frequente.

2.2 Represente graficamente a distribuição das idades.

2.3 Construa um gráfico circular referente à distribuição das atletas por clubes e identifique o clube com maior representação na selecção.

3.

A seguir estão indicadas as classificações obtidas por 80 alunos no exame de 9.º ano na disciplina de Língua Portuguesa.

93	76	68	84	75	82	68	90	62	88
75	85	73	45	75	30	50	53	95	72
65	63	62	67	77	89	98	73	58	68
34	39	81	45	66	43	87	56	78	85
42	58	39	56	56	43	82	92	39	76
54	68	83	88	55	65	73	47	69	51
32	54	57	34	48	89	48	36	76	83
63	62	67	87	56	78	85	42	58	39

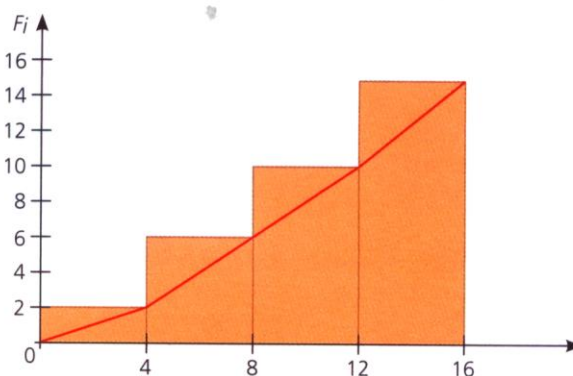
- 3.1 Construa uma tabela de frequências, organizando os dados em classes de amplitude 10, considerando o limite inferior da primeira classe igual a 30.
- 3.2 Quantos alunos tiveram classificação superior ou igual a 50%?
- 3.3 O nível 5 é atribuído a alunos com nota superior ou igual a 90%. Quantos alunos tiveram nível 5 no exame de Língua Portuguesa?
- 3.4 Utilize um histograma ou um gráfico de barras, aquele que considera mais adequado, para representar esta distribuição. Justifique a sua opção.



4.

Num centro de ocupação dos tempos livres, as idades dos alunos distribuem-se de acordo com o gráfico seguinte.

- 4.1 Construa uma tabela de frequências.
- 4.2 Quantos alunos tem o centro?
- 4.3 Quantos alunos têm pelo menos 8 anos?
- 4.4 Determine a percentagem de alunos com idade no intervalo $[4, 8[$.



5.

A tabela apresenta os dados de um determinado estudo estatístico.

Determine os valores de a , b e c .

x_i	fr_i	Fr_i
0	12	12
1	15	a
2	b	50
3	16	66
4	c	70

SÍNTESE

■ MÉDIA

Se se tiver uma colecção de dados, em bruto (não organizados), $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a **média** obtém-se a partir da expressão $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$, ou seja, utilizando o símbolo de somatório, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

Para dados organizados em tabelas de frequências, tem-se $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \times x_i}{n}$, em que k é o número de valores diferentes que os dados podem tomar, f_i é a frequência absoluta referente a x_i , e $n = \sum_{i=1}^k f_i$ é o número total de dados.

Ou, $\bar{x} = \sum_{i=1}^k fr_i \times x_i$, em que k é o número de valores diferentes que os dados podem tomar, fr_i é a frequência relativa referente a x_i .

Nos dados agrupados em classes, a média calcula-se recorrendo às mesmas expressões, mas substitui-se x_i pela marca da classe.

■ PROPRIEDADES DA MÉDIA

1. Se a todos os dados de uma distribuição com média $\bar{x}$ se adicionar o mesmo valor, k , obtém-se uma nova distribuição, com média $\bar{y} = \bar{x} + k$.
2. Se se multiplicar por um mesmo valor, a , todos os dados de uma distribuição com média $\bar{x}$, obtém-se uma nova distribuição com média $\bar{y} = a\bar{x}$.

■ MEDIANA

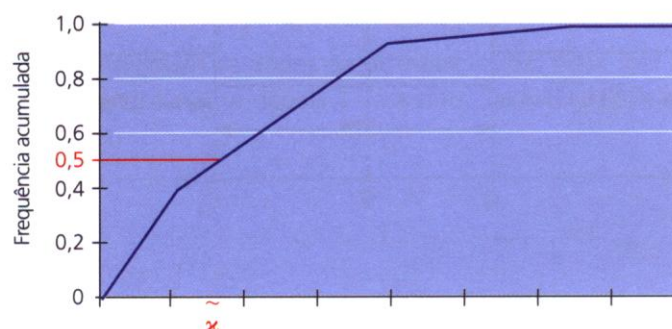
A **mediana**, representada por Me ou $\tilde{x}$, de uma amostra de n elementos é a medida de localização do centro da distribuição, que se determina do seguinte modo:

- ordenam-se os n elementos da amostra;
- se n é ímpar, a mediana é o elemento que ocupa a posição ou tem profundidade $\frac{n+1}{2}$, ou seja, a mediana é $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$;
- se n é par, a mediana é a semi-soma dos elementos que têm profundidade $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$, ou seja, a mediana é $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

DADOS AGUPADOS EM CLASSES

Para determinar a mediana em dados agrupados em classes, procede-se da seguinte forma:

Constrói-se o gráfico da função cumulativa e intersecta-se com a recta de equação $y = 0,5$. A abcissa do ponto de intersecção é a mediana.



MODA

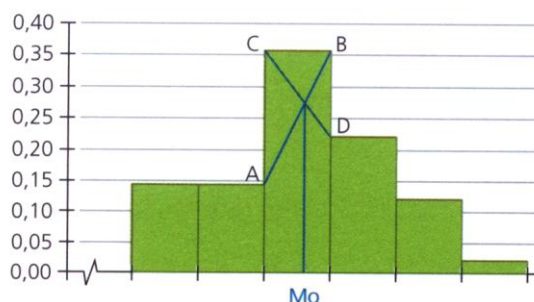
A **moda** é o valor da amostra com maior frequência simples (absoluta ou relativa).

Uma distribuição em que haja dois valores com maior frequência diz-se **bimodal**.

Para dados agrupados em classes, aquela que tiver maior frequência simples denomina-se classe modal.

Para obter geometricamente uma aproximação para a moda, procede-se da seguinte forma:

- constrói-se um histograma das frequências, absolutas ou relativas, da distribuição;
- traçam-se os segmentos de recta $[AB]$ e $[CD]$, sobre a classe modal, como se indica na figura seguinte;
- determina-se o ponto de intersecção dos dois segmentos;
- conclui-se que um valor aproximado para a **moda** é a abcissa desse ponto.



QUARTIS

As estatísticas que dividem o conjunto de dados, depois de ordenados, em quatro partes, cada uma delas contendo 25% dos dados, designam-se por **quartis**.

O **1.º quartil** representa-se por Q_1 , e é tal que 25% dos dados se encontram à esquerda, e 75% à direita.

O **2.º quartil** representa-se por Q_2 , e coincide com a **mediana**

O **3.º quartil** representa-se por Q_3 , e é tal que 75% dos dados se encontram à esquerda, e 25% à direita.

A tabela seguinte mostra como calcular a profundidade de cada quartil.

Quartil	profundidade	Quartil	profundidade
1.º $Q_1 = x_k$	n par $\frac{n+2}{4} = k$	3.º $Q_3 = x_p$	n par $3 \times \frac{n+2}{4} = p$
	n ímpar $\frac{n+1}{4} = k$		n ímpar $3 \times \frac{n+1}{4} = p$

Se o resultado da divisão não é um número inteiro, o quartil é igual à semi-soma dos valores com profundidade mais próxima do resultado da divisão.

DIAGRAMA DE EXTREMOS E QUARTIS



■ AMPLITUDE TOTAL E AMPLITUDE INTERQUARTIS

Num conjunto de dados, chama-se **amplitude total** à diferença entre o valor máximo e o valor mínimo do conjunto.

Se os dados estão agrupados em classes, a **amplitude total** é a diferença entre o limite superior da última classe e o limite inferior da primeira.

A **amplitude interquartis** é a diferença entre o 3.º e o 1.º quartis: $Q_3 - Q_1$.

A amplitude interquartis mede a dispersão dos 50% dos valores centrais, dando uma ideia da dispersão dos dados relativamente à mediana.

■ VARIÂNCIA

A **variância** representa-se por S^2 e é a medida que se obtém dividindo a soma dos quadrados dos desvios da observação, relativamente à média, pelo número de observações:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

■ DESVIO-PADRÃO

O **desvio-padrão** de uma distribuição é a medida que se obtém calculando a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N f_j (x_j - \bar{x})^2}{n}}$$

Se os dados se encontram agrupados em classes, utiliza-se a mesma expressão substituindo x_i pela marca da classe.

■ PROPRIEDADES DO DESVIO-PADRÃO

Se a todos valores da variável com desvio-padrão, σ , se adicionar o mesmo valor k , o desvio-padrão não se altera.

Multiplicando todos os valores da variável pela mesma constante, a , com desvio-padrão, σ , obtém-se um novo conjunto, com desvio-padrão $a\sigma$.

■ USAR A CALCULADORA

Com a calculadora, podem obter-se todas as estatísticas referidas.

```
1-Var Stats
x=74.58333333
Σx=895
Σx²=67111
Sx=5.712161402
σx=5.46897817
↓n=12
```

```
1-Var Stats
↑n=12
minX=64
Q1=72.5
Med=76
Q3=78.5
maxX=82
```

Para obter as medidas deve introduzir os dados da distribuição nas listas, por exemplo, em L_1 e L_2 e de seguida no menu **STAT** seleccionar **CALC** e depois **1 - Varstats**. Tecle **ENTER** e escreva L_1 , L_2 e faça novamente **ENTER**.

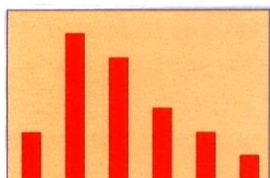
ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Identifique a distribuição em que $\bar{x} = \tilde{x}$.

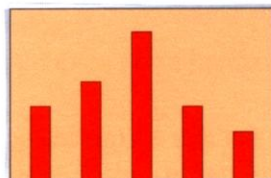
(A)



(B)



(C)



(D)



2.

A Alice, a Joana, o Pedro, o Rafael e o Tiago estão a juntar dinheiro para comprar uma consola nova que custa 350 €. Em média, cada um tem 42 €. Que quantia lhes falta para poderem comprar a consola?

(A) 308 €

(B) 210 €

(C) 140 €

(D) 125 €

3.

Considere os seguintes dados:

12 15 13 12 14 16 12 14

A média, a moda e a mediana desta distribuição são, respectivamente:

(A) 13,5; 12 e 13,5.

(B) 13,5; 12 e 12.

(C) 54; 16 e 13.

(D) 54; 16 e 13,5.

4.

A distribuição das classificações nos testes psicotécnicos de 320 candidatos à escola de pilotagem da Força Aérea admite o primeiro quartil igual a 65 e o terceiro quartil igual a 88. Quantos candidatos obtiveram classificação superior a 65?

(A) 75

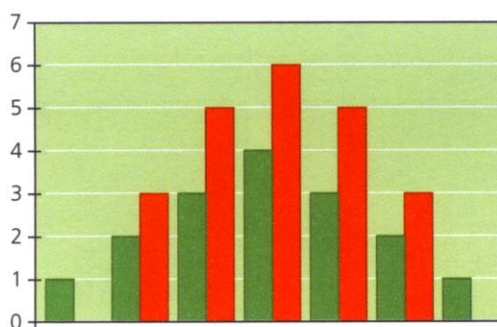
(B) 240

(C) 80

(D) 160

5.

Na figura seguinte, estão representadas graficamente as distribuições das variáveis X (a verde) e Y (a cor-de-laranja).



Sendo $\bar{x}$ e σ_x a média e o desvio-padrão de X , respectivamente, e $\bar{y}$ e σ_y a média e o desvio-padrão de Y . Em relação a estas duas distribuições pode dizer-se que:

(A) $\bar{x} < \bar{y}$ e $\sigma_x > \sigma_y$.

(B) $\bar{x} = \bar{y}$ e $\sigma_x > \sigma_y$.

(C) $\bar{x} > \bar{y}$ e $\sigma_x = \sigma_y$.

(D) $\bar{x} = \bar{y}$ e $\sigma_x < \sigma_y$.

6.

A distribuição dos salários mensais de uma determinada empresa tem média igual a 825 € com desvio padrão 300. Se todos os trabalhadores forem aumentados 15 €, a média e o desvio-padrão dos salários mensais passa a ser, respectivamente:

(A) 840 € e 315 €.

(B) 840 € e 300 €.

(C) 825 € e 315 €.

(D) 840 € e 525 €.

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Determine a média, a mediana e a moda das seguintes distribuições:

a) 12 13 14 12 13 14 15 12 16

b)

x_i	fr_i
0	0,10
1	0,15
2	0,25
3	0,20
4	0,15
5	0,15

c)

Classe	f_i
[10, 15[	2
[15, 20[	5
[20, 25[	7
[25, 30[	4
[30, 35[	10
[35, 40[	5

2.

Considere as classificações obtidas pela Cristina e pelo Jorge no final do 2.º período.

	Português	Ed. Física	Inglês	Matemática A	Biol./Geo.	F. Q. A	Filosofia
Cristina	16	10	15	16	17	13	15
Jorge	15	16	9	17	15	15	12

- 2.1 Determine a média e a mediana das distribuições das classificações obtidas pela Cristina e pelo Jorge.
- 2.2 Construa um diagrama de extremos e quartis para cada distribuição, e, com base nessa representação, compare os resultados obtidos pelos dois alunos.
- 2.3 Determine os desvios-padrões de cada distribuição e, com base nesses resultados, volte a comparar as classificações.

3.

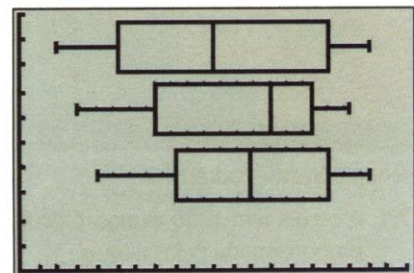
O Pedro, para o trabalho de Estatística, decidiu efectuar um estudo comparativo entre as classificações obtidas nas disciplinas de Matemática A, Física e Química A e Biologia e Geologia no 2.º período. Depois de introduzir os dados na calculadora, obteve os diagramas de extremos e quartis, ao lado.

O primeiro diagrama corresponde a Física e Química A; o segundo, a Biologia e Geologia; e o último, a Matemática A.

Cada marca no eixo horizontal representa uma unidade e a primeira marca corresponde ao 1.

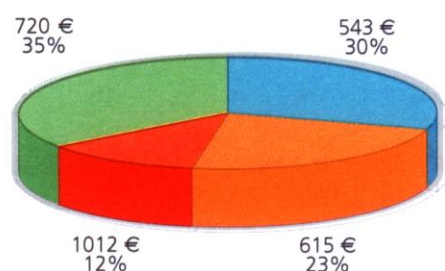
Refira em que disciplina se registou:

- a) a melhor classificação;
- b) a maior amplitude de classificações;
- c) a maior percentagem de negativas;
- d) o desvio-padrão mais elevado.

**4.**

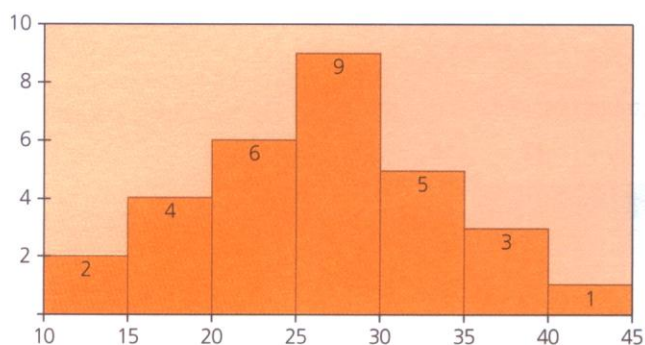
O gráfico circular seguinte representa a distribuição dos salários, em euros, dos funcionários de uma determinada empresa.

Determine o salário médio dos trabalhadores desta empresa.



5.

O gráfico seguinte representa a distribuição das idades das pessoas que assistiram a um filme de aventuras numa determinada sala de cinema.



5.1 Calcule a média e o desvio-padrão da distribuição das idades.

5.2 Determine geometricamente um valor aproximado para a moda.

5.3 Represente a função cumulativa desta distribuição.

5.3.1 Determine os valores aproximados para:

a) a mediana;

b) o 1.º quartil;

c) o 3.º quartil.

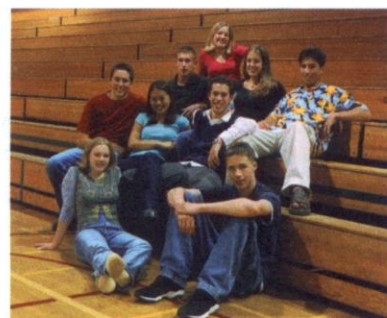
6.

A média das idades do total de alunos das turmas CT1 e CT2 do 10.º ano era, no início do ano lectivo, de 15,4 anos. A média das idades dos 25 alunos da turma CT1 era 15,2; e dos alunos da turma CT2, 15,6.

6.1 Determine o número de alunos da turma CT2.

6.2 Até ao final de Dezembro, quatro alunos da turma CT1 festejaram o seu aniversário. Qual era a média das idades desta turma no dia 1 de Janeiro?

6.3 Se no final do ano saírem da turma CT1 dois alunos com 16 anos e no início do 11.º ano entrarem dois com 17 anos, qual será a média de idades do 11.º CT1?



7.

O consumo médio semanal dos alunos no bar de uma escola é de 5,3 €, sendo o desvio-padrão 1,2.

7.1 A escola tem 1200 alunos. Calcule a receita do bar, em bruto, proporcionada pelos alunos.

7.2 Se os preços dos produtos vendidos no bar aumentarem em 2% e não houver alteração no consumo, quais passarão a ser os valores da média e do desvio-padrão do consumo semanal dos alunos?



8.

O tempo que cada doente tem de esperar para ser atendido num serviço de urgência é um parâmetro importante na avaliação de um hospital. O tempo de espera (em minutos) registado para 20 pacientes num hospital pediátrico foi:

35	15	6	35	10	15	30	25	15	30
35	30	8	10	10	30	30	10	25	25

8.1 Construa a tabela de frequências relativas para estes dados e represente o respectivo gráfico de frequências.

8.2 Determine o tempo que um paciente tem de esperar, em média, até ser atendido.

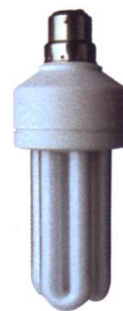
8.3 Calcule o desvio-padrão deste conjunto de dados.

9.

Considere o seguinte gráfico de caule-e-folhas onde estão representados os tempos de vida, em horas, das lâmpadas provenientes de duas fábricas: Brilho Eterno e Sempre Dia.



Brilho Eterno		Sempre Dia
	72	5
6 3 1 0	73	1
9 9 8 7 6 2	74	6
9 7 3 0	75	2
	76	0 2 2 5 7
	77	1 1 3 4 6 8
1	78	



9.1 Indique o maior tempo de vida atingido por uma lâmpada.

9.2 Determine o tempo médio de vida das lâmpadas de cada uma das fábricas e o respectivo desvio-padrão.

9.3 Determine, para cada uma das distribuições:

- a mediana;
- os quartis;
- a amplitude total;
- a amplitude interquartis.

9.4 Refira uma razão pela qual uma pessoa poderia preferir as lâmpadas Brilho Eterno.

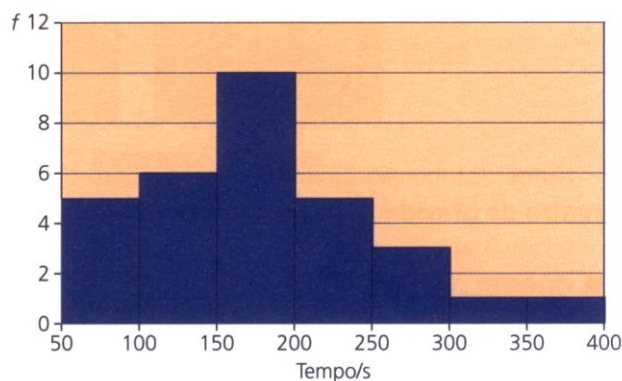
9.5 Apresente uma razão para preferir as lâmpadas Sempre Dia.

10.

Registaram-se os tempos que 31 clientes esperaram para pagar na esplanada do Café da Graça. Os dados estão representados no histograma ao lado.

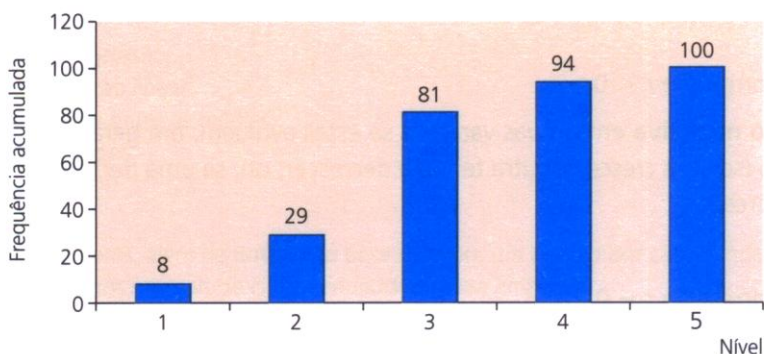
Determine:

- a percentagem de clientes que esperaram menos de 100 segundos para pagar;
- o número de clientes que esperaram mais de 5 minutos para pagar;
- a média e o desvio-padrão dos tempos de espera;
- a moda, graficamente.



11.

O nível obtido por 100 alunos num exame de Matemática está resumido no gráfico seguinte.



11.1 Determine o nível médio obtido por estes alunos.

11.2 Construa um diagrama de extremos e quartis da distribuição das classificações.

SÍNTESE

■ DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL

Para estudar relações entre duas características conjuntas de uma mesma população, há necessidade de recolher uma amostra de dados bivariados, que pode ser representada por $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Uma distribuição em que os dados são bivariados chama-se **distribuição bidimensional**.

■ NUVEM DE PONTOS OU DIAGRAMA DE DISPERSÃO

Para representar e organizar este tipo de distribuição, representam-se, num sistema de eixos coordenados, os pontos de coordenadas (x_i, y_i) correspondentes às observações.

Ao conjunto de pontos assim obtido chama-se **nuvem de pontos** ou **diagrama de dispersão**.

■ REGRESSÃO LINEAR — RECTA DE REGRESSÃO

Quando a nuvem de pontos sugere uma oscilação de pontos em torno de uma recta, diz-se que, em princípio, existe correlação linear entre as duas variáveis.

A recta que melhor se adequa ao conjunto de pontos da nuvem chama-se **recta de regressão**.

Com a calculadora, pode obter-se o declive e a ordenada na origem dessa recta efectuando os seguintes procedimentos:

```
EDIT MODE TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
```

```
LinReg(ax+b) ■
```

```
LinReg(ax+b) L1,
L2,Y1
```

Numa distribuição bidimensional, o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ denomina-se **ponto médio** da nuvem de pontos ou **centro de gravidade** da distribuição.

■ CORRELAÇÃO

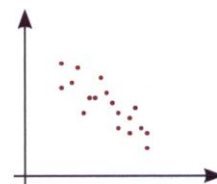
- Coeficiente de correlação $r > 0$.

Existe **correlação positiva** entre duas variáveis se estas evoluem, em geral, no mesmo sentido (se uma cresce, a outra «tende» a crescer; ou, se uma decresce, a outra tende a decrescer).



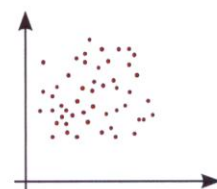
- Coeficiente de correlação $r < 0$.

Existe **correlação negativa** entre duas variáveis se estas evoluem, em geral, em sentido contrário (se uma cresce, a outra tende a decrescer; ou, se uma decresce, a outra tende a crescer).



- Coeficiente de correlação $r \approx 0$.

Existe **correlação nula** se não há qualquer influência de uma variável na outra.



ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Efectuou-se um estudo estatístico, onde se verificou uma forte relação entre a classificação obtida na disciplina de Português, y , e o número médio de horas de leitura semanal, x .

A recta de regressão obtida é definida pela equação $y = 1,03x + 7,52$.

Face a estes resultados, a professora Leopoldina Poeta, cujos alunos tinham média de classificação aproximadamente igual a 13,3, concluiu que os seus alunos, semanalmente, dedicavam à leitura, em média, aproximadamente:

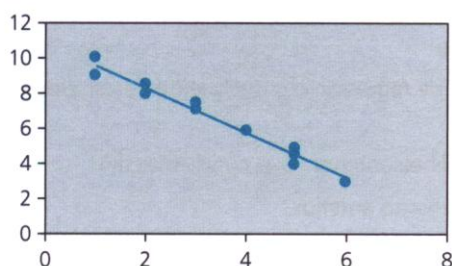
- (A) 12 horas. (B) 5,6 horas.
(C) 8 horas. (D) 4 horas.



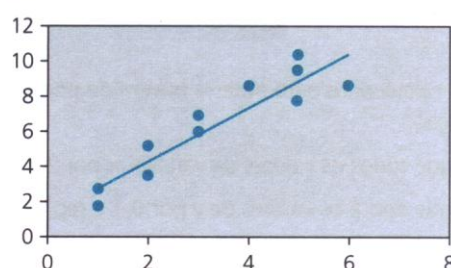
2.

Considere os diagramas de dispersão que se seguem:

A



B



Os coeficientes de correlação que mais se adequam aos diagramas A e B são, respectivamente...

- (A) $-0,9$ e $0,8$. (B) $-0,7$ e $0,85$. (C) $0,9$ e $-0,8$. (D) $-0,8$ e $0,8$.

3.

O coeficiente de correlação linear de uma distribuição bidimensional de dados (x_i, y_i) é $0,8$. Então, o coeficiente de correlação linear da distribuição de dados $(x_i + 2, y_i)$ é:

- (A) $2,8$ (B) $1,8$ (C) $0,8$ (D) $0,4$

4.

O grau de dependência linear entre duas variáveis é avaliado:

- (A) pelo declive da recta de regressão.
(B) pelo coeficiente de correlação linear.
(C) pelo quadrado da diferença entre as médias.
(D) pela diferença entre as médias.

5.

Numa empresa, os seus vendedores, além de um salário base recebem um prémio por cada venda efectuada. A tabela seguinte apresenta os vencimentos mensais de cinco vendedores dessa empresa.

N.º de vendas	10	13	8	15	6	a
Vencimento mensal/€	850	890	835	910	800	b

O centro de gravidade do diagrama de dispersão desta distribuição é $(10,5; 857,5)$. Então, os valores de a e b são:

- (A) $a = 12$ e $b = 860$ (B) $a = 11$ e $b = 855$ (C) $a = 12$ e $b = 855$ (D) $a = 11$ e $b = 860$

RESPOSTA ABERTA**1.**

As temperaturas máximas e mínimas (em graus Celsius) na cidade da Setúbal durante uma semana do mês de Março foram as seguintes:

Temperatura máxima/°C	16	17	18	17	16	19	20
Temperatura mínima/°C	6	10	9	9	8	12	11

1.1 Obtenha a nuvem de pontos desta distribuição.

1.2 Diga, justificando, se a relação entre as temperaturas máxima e mínima é forte ou não.

1.3 Obtenha na calculadora a equação da recta de regressão e preveja a temperatura mínima, para Setúbal, num dia em que a temperatura máxima foi de 15 °C. Diga como procedeu.

2.

Considere a seguinte distribuição:

x	1	2	2	2	3	4
y	2	2	3	4	4	5

2.1 Utilize a calculadora para obter a nuvem de pontos, a recta de regressão e o coeficiente de correlação desta distribuição.

2.2 Multiplique todos os valores da variável x por 2 e repita a alínea anterior. Que conclusões tira?

2.3 Multiplique agora os valores de y por 0,1 e repita o procedimento anterior.

2.4 Elabore um pequeno texto em que explique as conclusões retiradas da resolução deste exercício.

3.

A tabela seguinte apresenta os gastos em electricidade e os rendimentos mensais de seis agregados familiares.

Gasto em electricidade/€	Rendimento mensal/€
23	1600
34	2400
40	3200
45	4000
48	4800
53	8000

3.1 Estime os gastos mensais em electricidade de uma família com um rendimento mensal de 2000 €. Explique o método utilizado.

3.2 Estime o rendimento mensal de uma família cujo gasto mensal em electricidade seja de 38 €.

3.3 Admita que, devido ao aumento dos tarifários, todos os agregados familiares sofrem um aumento mensal de 3% nos gastos em electricidade. Refira as alterações que se registam na relação entre as duas variáveis.

3.4 Refira uma forma de alterar o coeficiente de correlação desta distribuição.

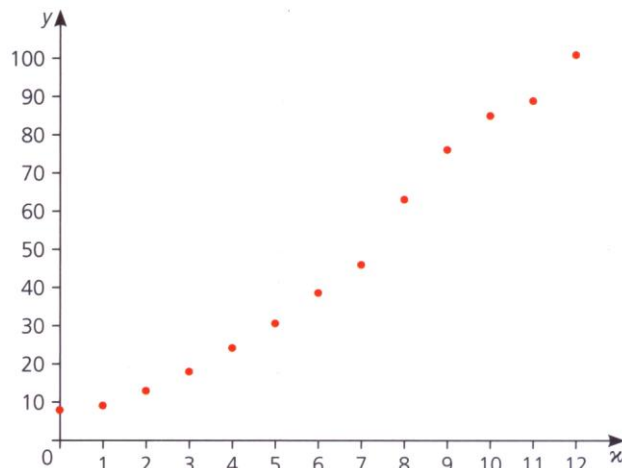
4.

Na actualidade, há uma preocupação crescente com a preservação da Natureza, nomeadamente quanto à necessidade de proteger espécies que se encontram em vias de extinção.

Considere que uma espécie animal se encontrava em vias de extinção. Para a proteger, tomaram-se medidas proteccionistas, designadamente a criação de uma área protegida no seu habitat natural.

Admita que, no início, apenas existiam oito animais da espécie nesta área. A tabela seguinte traduz a contagem anual do número de animais nela existentes. Ao lado da tabela estão representados os dados da tabela em nuvem de pontos.

Anos decorridos desde a criação da área protegida (x)	Número de animais existentes na área protegida (y)
0	8
1	9
2	13
3	18
4	24
5	30
6	38
7	45
8	62
9	75
10	84
11	88
12	100

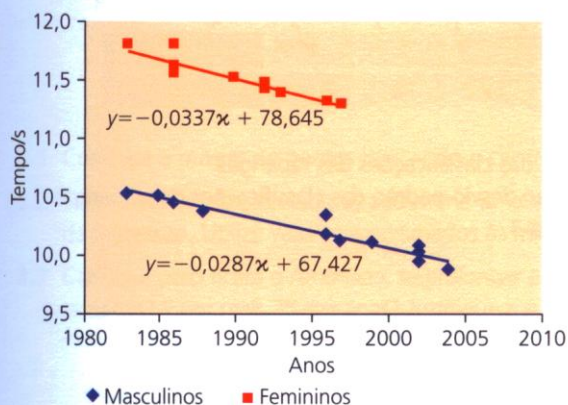


4.1 Com recurso à calculadora, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajusta à nuvem de pontos apresentada. Indique os valores de a e de b , com uma aproximação às décimas.

4.2 Indique algumas razões, naturais, pelas quais o modelo de regressão determinado na questão anterior não será, a longo prazo, um bom modelo para descrever o crescimento populacional desta espécie no seu habitat.

5.

O gráfico seguinte mostra a evolução dos recordes nacionais dos 100 metros femininos e masculinos nos últimos anos, com as respectivas rectas de regressão.



Discuta a validade da seguinte afirmação:

«De acordo com os declives das duas rectas de regressão linear (o declive da recta que corresponde aos femininos é, em valor absoluto, maior do que o declive da recta que corresponde aos masculinos), pode concluir-se que daqui a alguns anos o recorde feminino dos 100 metros será mais baixo do que o masculino.»

I

Para cada uma das cinco questões deste grupo, seleccione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

Na tabela ao lado estão parcialmente representados os dados referentes à idade de um grupo de alunos. Sabe-se que o número de alunos com 15, 16 ou 17 anos é igual.

Idade	Fr_i
15	x
16	y
17	0,6
18	0,85
19	0,95
20	1

1.1 Então, os valores de x e y são, respectivamente:

- (A) 0,3 e 0,3.
- (B) 0,2 e 0,2.
- (C) 0,2 e 0,4.
- (D) 0,3 e 0,5

1.2 Supondo que o grupo de alunos estudado tem 200 elementos, quantos têm 18 anos?

- (A) 50 alunos.
- (B) 170 alunos.
- (C) 85 alunos.
- (D) 30 alunos.

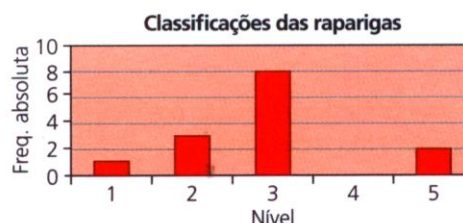
2.

O João teve 8 no último teste de Matemática. A turma tem dez alunos e três dos colegas tiveram 7, mas houve também um 19, um 18, um 12, um 11, um 10 e um 2. Como pode ele contar o sucedido ao pai sem mentir?

- (A) Fiquei acima da média.
- (B) Fiquei acima da mediana.
- (C) A moda foi mais baixa do que a minha classificação.
- (D) Infelizmente, fiquei abaixo da média, da moda e da mediana.

3.

As distribuições das classificações dos rapazes e das raparigas de uma turma de 9.º ano na disciplina de História estão resumidas nos gráficos seguintes:



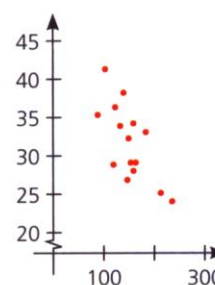
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) 25% dos rapazes tiveram classificação superior a 4.
- (B) A média das classificações dos rapazes é superior à média das classificações das raparigas.
- (C) O desvio-padrão das classificações dos rapazes é inferior ao desvio-padrão das classificações das raparigas.
- (D) Mais de 50% das raparigas tiveram classificação superior a 3.

4.

De entre os seguintes valores, identifique o coeficiente de correlação da distribuição bidimensional representada ao lado.

- (A) $-0,7$
- (B) $0,2$
- (C) $0,7$
- (D) 0



II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

Em Janeiro de 2001, fez-se um estudo sobre as possibilidades económicas dos trabalhadores da Grande Lisboa. Fez-se um levantamento dos salários anuais líquidos, em milhares de euros, de 50 trabalhadores dessa zona.

42,3	30	35	52,1	34,8	39,4	27,5	25,7	44,4	43,6
45,1	25,3	48,2	31,7	30,2	32,3	37,2	55	36,7	40,1
32,4	28,5	35,2	34,1	26,9	34,7	49,3	44,7	43,2	28,3
33,7	32,5	42	31,3	29,9	46,4	35,3	34,1	31,8	38,4
51,7	56	29,7	64	41,5	54,9	35,1	29,9	34,8	47,5

- 1.1 Construa uma tabela de frequências agrupando os dados em classes de amplitude 10 cujo limite inferior da primeira classe seja 25 mil euros.
- 1.2 Determine o salário anual médio líquido desta amostra de trabalhadores.
- 1.3 Esboce o gráfico da função cumulativa, determine geometricamente um valor aproximado da mediana e interprete o resultado obtido.

2.

Numa empresa com 300 empregados, existem seis categorias de salários mensais, cuja média é de 311,2 euros. Conhece-se apenas a parte da distribuição apresentada.

- 2.1 Construa um diagrama de barras desta distribuição.
- 2.2 O gestor da empresa propôs um aumento de 5% para todos os trabalhadores. Neste caso, qual seria o salário médio?
- 2.3 Os sindicatos não estão de acordo com a proposta do gestor, argumentando que esse aumento irá aumentar a dispersão dos vencimentos na empresa. O gestor afirma que não. Quem tem razão? Justifique a sua resposta.

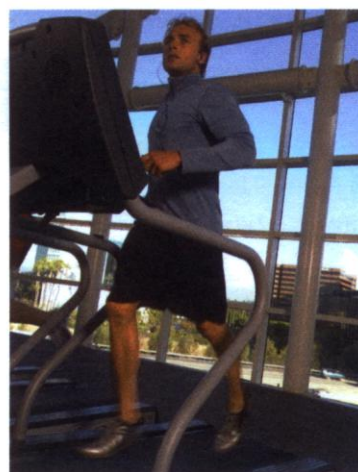
Salário mensal/€	Número de empregados
274,33	70
289,30	60
324,22	55
374,10	45
399,04	30

3.

O Ambrósio submeteu-se a uma dieta de emagrecimento durante cinco semanas. A evolução do seu peso ao longo dessas semanas foi a seguinte:

Semanas	1	2	3	4	5
Peso/kg	88,5	87	84	82,5	79

- 3.1 Construa a nuvem de pontos indicando o centro de gravidade.
- 3.2 Com o auxílio da calculadora, determine uma equação da recta de regressão. Utilize valores aproximados às milésimas.
- 3.3 Com que peso ficará o Ambrósio, se prolongar a dieta por mais duas semanas? E por mais 25 semanas? Justifique a sua resposta.



GRELHA DE AVALIAÇÃO

PARTE	I	II									
Questões	1 a 4	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	
Cotações	$5 \times 10 = 50$	20	15	20	15	15	15	15	20	15	

ESCOLHA MÚLTIPLA

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1.

As coordenadas do ponto de intersecção das rectas r e s definidas por

$$r: (x, y) = (1, 2) + k(2, 4), k \in \mathbb{R} \text{ e } s: y = 3x - 1$$

são:

- (A) (1, 2) (B) (-2, 4) (C) (0, -1) (D) (1, 3)

2.

Se cortarmos a esfera de centro na origem do referencial e raio 3 pelo plano definido por $y = 3$, obtém-se:

- (A) um ponto. (B) um círculo. (C) uma circunferência. (D) o conjunto vazio.

3.

Num referencial o. n. $Oxyz$, considere um ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox e um ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy . Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vector $\vec{AB}$?

- (A) (-2, 0, 1) (B) (2, 0, -1) (C) (-2, 1, 0) (D) (2, -1, 0)

Adaptado do Exame Nacional do 12.º Ano

4.

Considere a esfera definida pela condição $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 14$. Sabendo que $[AB]$ é um diâmetro dessa esfera e que A tem coordenadas (1, 1, 1), indique as coordenadas de B .

- (A) (2, 4, 8) (B) (3, 5, 7) (C) (4, 6, 5) (D) (5, 3, 6)

Adaptado do Exame Nacional do 12.º Ano

5.

De uma função quadrática f , sabemos que $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in] -2, 4[$, então, o contradomínio de f é:

- (A) $[1, +\infty[$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $[f(1), +\infty[$ (D) $] -\infty, -2[\cup]4, +\infty[$

6.

De uma função g , polinomial do 3.º grau, conhecem-se os seguintes valores:

x	1	0	2	3
$g(x)$	-4	0	0	0

então, a função pode ser definida analiticamente por:

- (A) $g(x) = -2x(x - 2)(x - 3)$ (B) $g(x) = -\frac{1}{3}x(x + 2)(x + 3)$
 (C) $g(x) = x(x - 2)(x - 3)$ (D) $g(x) = -4x(x + 2)(x + 3)$

7.

Considere uma função quadrática f que admite 4 como máximo absoluto para $x = 2$. Então, a função $g(x) = f(x + 2) - 3$ tem:

- (A) máximo 1 para $x = 2$.
 (B) máximo 1 para $x = 0$.
 (C) máximo 6 para $x = -1$.
 (D) máximo 6 para $x = 4$.

8.

A média e o desvio-padrão de uma determinada distribuição são, respectivamente, 12 e 3. Se a esta distribuição acrescentarmos um dado cujo valor é 12, um valor possível para o desvio-padrão é:

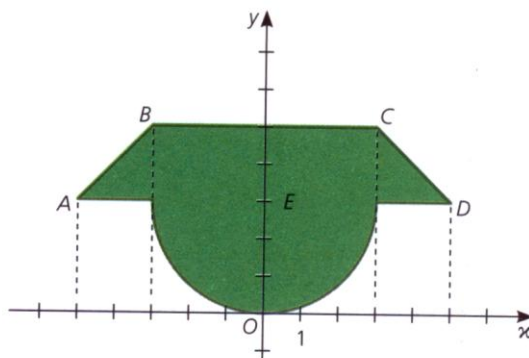
- (A) 2,8 (B) 3 (C) 3,02 (D) 3,1

RESPOSTA ABERTA

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações necessárias.

1.

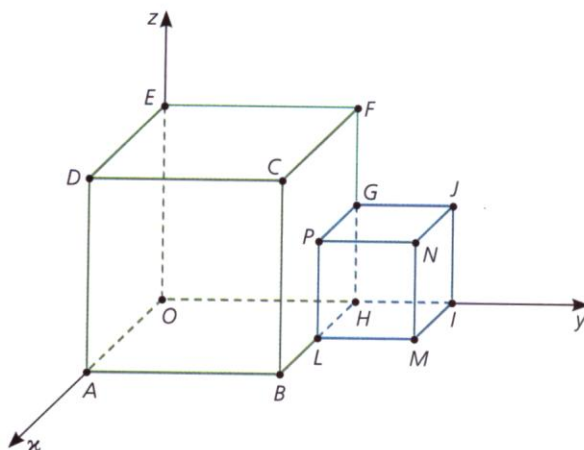
Considere a figura seguinte constituída por um semicírculo de centro em E e o trapézio $[ABCD]$, representada num referencial Oxy .



- 1.1 Escreva a equação reduzida da recta AB .
- 1.2 A recta AB é paralela à recta de equação $2x + 3y = 2$? Justifique a sua resposta.
- 1.3 Determine k de modo que o ponto $T(k, 2)$ pertença a AB .
- 1.4 Defina por uma condição a região sombreada.
- 1.5 Calcule a área da região sombreada.

2.

No referencial da figura, estão representados dois cubos. A razão entre os seus volumes é 8 e o ponto H tem coordenadas $(0, 8, 0)$.

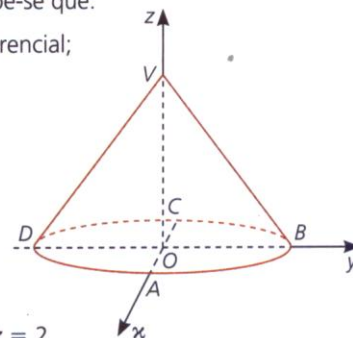


- 2.1 Justifique que as coordenadas do ponto I são $(0, 12, 0)$.
- 2.2 Defina analiticamente a esfera inscrita no cubo maior.
- 2.3 Escreva uma equação vectorial da recta AJ .
- 2.4 Prove que $\vec{IJ}$ e $\vec{AF}$ são colineares.
- 2.5 Identifique o lugar geométrico definido por $x = 4 \wedge y = 12$.
- 2.6 Determine o perímetro da secção que se obtém nos cubos na intersecção com o plano $z = 1$.

3.

Na figura, está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial;
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o vértice V tem coordenadas $(0, 0, 4)$;
- o volume do cone é de $12\pi \text{ cm}^3$.



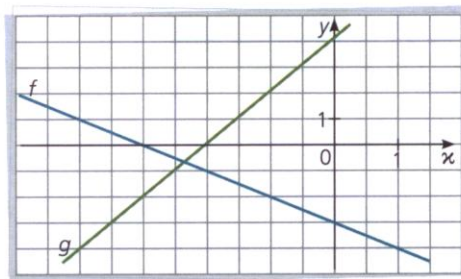
3.1 Indique as coordenadas dos pontos A , B , C e D .

3.2 Calcule a área lateral do cone.

3.3 Determine a área da secção que se obtém intersectando o cone com o plano $z = 2$.

4.

Na figura, estão representadas graficamente duas funções afins f e g .



4.1 Resolva as seguintes condições:

- $f(x) \times g(x) \leq 0$
- $f(x) = g(x)$

4.2 Determine analiticamente o máximo da função:

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

5.

Considere as funções definidas por:

$$f(x) = |2x + 3| - 5$$

$$g(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$$

$$h(x) = 6x^2 - x - 2$$

Determine:

- analiticamente os zeros de cada uma das funções;
- os extremos de f e h ;
- as soluções da condição $h(x) \leq f(x)$, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

6.

Um forno de uma padaria estava em plena laboração quando houve uma falha de energia eléctrica durante algumas horas. Desde o instante em que houve a falha de energia eléctrica, a temperatura no interior do forno é dada pela expressão:

$$T(t) = -1,18t^3 + 24,4t^2 - 125,9t + 251, \text{ t em horas (t [0, 10]) e T em graus Celsius.}$$

6.1 Qual era a temperatura no interior do forno no momento em que houve a falha de energia eléctrica?

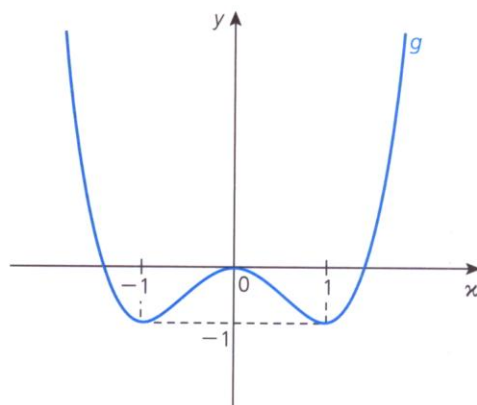


6.2 A avaria ocorrida fez com que a temperatura no interior do forno descesse, até ao momento em que a energia foi restabelecida, fazendo com que a temperatura voltasse a subir. O funcionário da padaria ficou preocupado porque, para não se perder a fornada que se encontrava no forno, a temperatura inicial teria de ser restabelecida no prazo máximo de oito horas; caso contrário, teria prejuízo.

Num pequeno texto, refira durante quanto tempo houve falta de energia eléctrica e se a padaria teve de suportar os prejuízos. Enriqueça o seu texto com o traçado de um ou mais gráficos, indicando as coordenadas dos pontos relevantes arredondadas às décimas.

7.

Considere a função g representada graficamente:



Esboce o gráfico de $-|f|$.

8.

Os dados seguintes representam as medidas, em mm, de ossos do braço e da perna, de fósseis do período neolítico.

Espécie	Braço (úmero) x/mm	Perna (fémur) y/mm
A	312	430
B	335	458
C	286	407
D	312	440
E	305	422



8.1 Determine a média e o desvio-padrão da medida do úmero.

8.2 Determine a mediana da medida do fémur.

8.3 Represente os dados num diagrama de dispersão.

8.4 Utilize a calculadora para obter a recta de regressão e o coeficiente de correlação linear. Utilize valores arredondados às milésimas.

8.5 Calcule a medida da perna de uma espécie cujo braço mede 320 mm.

8.6 Por que razão o estudo efectuado não permite retirar conclusões sobre a medida do úmero de uma espécie cujo fémur mede 350 mm?

8.7 Meça o comprimento do seu fémur e determine, de acordo com este modelo, a medida do seu úmero. Verifique se a medida estimada corresponde à medida real.

9.

Indique um polinómio do quinto grau que:

- tenha cinco zeros inteiros pertencentes ao intervalo $[1, 3]$;
- 2 seja um zero triplo;
- a média dos zeros seja 2.



Págs. 4 a 9

RESPOSTA ABERTA

1. a) A razão é $\frac{2}{3}$.
b) A razão é $\frac{2}{3}$.
2. $A = 500 \text{ cm}^2$
3. É maior $\frac{100}{9}$ vezes.
4. $A = 6075\sqrt{3} \text{ m}^2$
5. $A = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$
6. É menos vantajosa para o cliente, porque tem menos 1% de sumo.
7. a) $P = 180 + 20\pi \text{ m}$
b) Seis voltas.
8. a) $-2\sqrt{3}$
b) $7\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
d) $\sqrt{5}$
e) $7 - 4\sqrt{3}$
f) 2
9. a) $\sqrt{5}$
b) $-\frac{2\sqrt{7}}{21}$
c) $\sqrt{3} + 1$
d) $-2\sqrt{2} + \sqrt{10}$
e) 2
f) $\frac{35 + 5\sqrt{2}}{47}$
10. $V = 1000 - 250\pi \text{ cm}^3$
11. B e D.
12. a) $\frac{35}{24} \text{ dm}$
b) Aproximadamente 29,2%.
13. $8\sqrt{2} \text{ cm}$
14. a) $S = \{1, 2\}$
b) $S = \{-2, 4\}$
c) $S = \{0, 3\}$
d) $S = \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$
15. a) $x \in \left] 0, \frac{4}{3} \right[$
b) $x = 1$
16. $x \in]1, 7]$

17. 17.1 A aresta da base mede 8 cm e a altura mede 10 cm.
17.2 $\frac{352}{75}$
18. O cilindro cuja altura é 15 cm e o perímetro da base é 20 cm.
19. Aproximadamente 20 m^3 .

Auto-avaliação 1

Págs. 10 e 11

I

1. C
2. C
3. A
4. B
5. D

II

1. A razão é $\frac{125}{343}$.
2. 140 000 vezes.
3. a) 1404 m^2 b) 6300 m^3 ou 6 300 000 litros.
4. 2,15 m



Geometria no plano e no espaço I

Resolução de problemas

Págs. 14 a 17

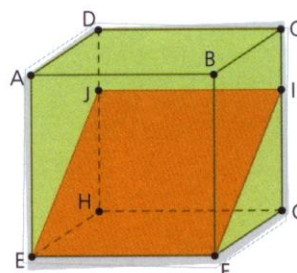
ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A
2. A
3. A
4. A
5. C
6. D
7. A
8. B

RESPOSTA ABERTA

1. $V = \frac{4\pi}{3} r^3$
2. $V = 7210 \text{ cm}^3$
3. $A = 139,21 \text{ m}^2$

4. 4.1



4.2 $P = 2\sqrt{13} + 6 \text{ cm}$; $A = 3\sqrt{13} \text{ cm}^2$

5. $A = 64 \text{ cm}^2$; $A = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $A = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

6. 6.1 a) Por exemplo, DC e HG .

b) Por exemplo, FG .

c) Por exemplo, A , B , C e G .

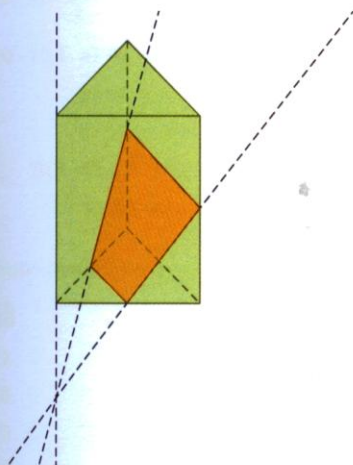
6.2 a) São estritamente paralelos.

b) São perpendiculares.

c) São perpendiculares (não-complanares).

7. 7.1 A recta CF .

7.2 Trapézio isósceles.



7.3 $\frac{225}{8} \text{ cm}^2$.

Geometria Analítica

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D

2. D

3. B

4. A

5. B

6. B

7. C

8. A

9. D

10. C

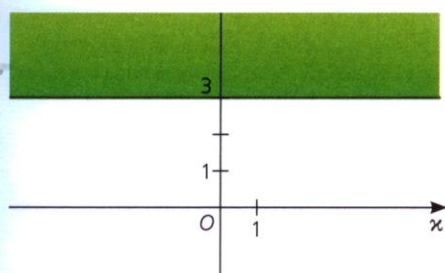
11. D

12. D

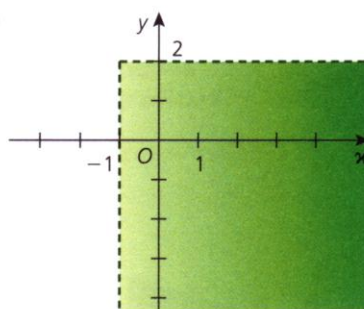
13. B

RESPOSTA ABERTA

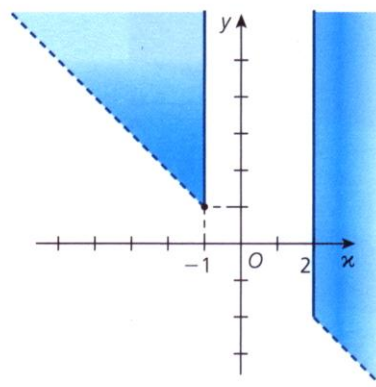
1. a)



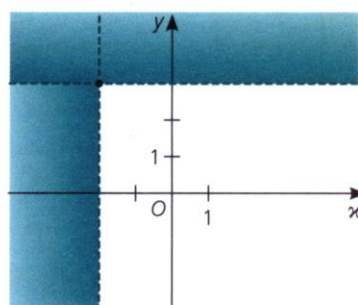
b)



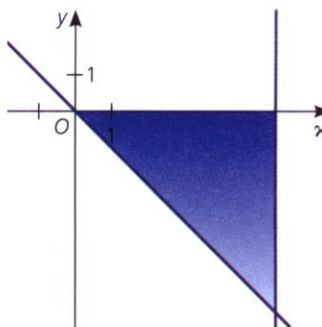
c)



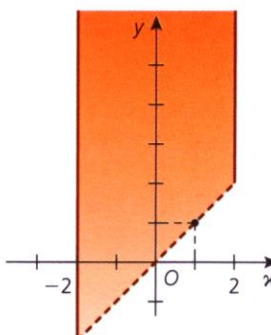
d)



e)



f)



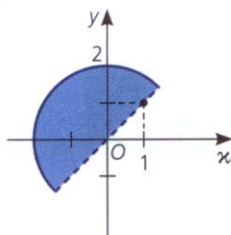
2. a) $1 \leq x < 2$

b) $(y > 1 \vee -3 < y \leq -2) \wedge y \leq -x$

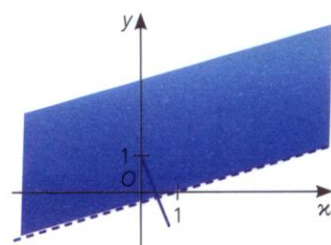
c) $|x| \geq 1 \vee -1 \leq y \leq 2$

Págs. 20 a 23

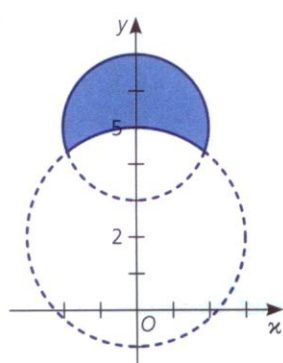
3. a)



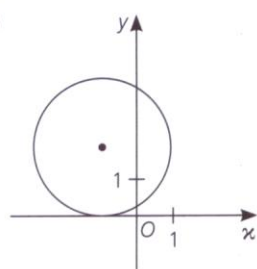
b)



c)



d)



4. 4.1 a) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

b) $x^2 + y^2 = 4$

4.2 $y \leq -x \wedge (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \wedge x^2 + y^2 \geq 4$

5. $(x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 8 \wedge -4 < y \leq 0 \wedge x \geq 0$

6. $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x^2 + 4y^2 \geq 9$

7. 7.1 $z = 6$

7.2 AC

7.3 $z = 3$, por exemplo.

7.4 $4\sqrt{17}$

7.5 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$

8. 8.1 $y = 2$

8.2 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$

8.3 $A = 3\pi - 4\sqrt{2}$

9. 9.1 $x^2 + z^2 = 9 \wedge y = 0$

9.2 $V = 24\pi$

Geometria Analítica

(2.ª parte)

Págs. 25 a 27

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C

2. D

3. B

4. B

5. C

6. A

7. B

8. D

9. B

RESPOSTA ABERTA

1. a) R

b) $\overrightarrow{HP}$ c) $\vec{O}$ d) $\overrightarrow{AX}$ e) $\overrightarrow{PL}$

2. 2.1 (2, 2)

2.2 $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = r$

2.3 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$

2.4 $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 13 \wedge y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \wedge y \leq \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

3. 3.1 $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ 3.2 B pertence à circunferência e $B(-1, y)$.

3.3 $y = x + 3$

3.4 $(x+1)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 3$

4. 4.1 (-3, 4, 2)

4.2 a) (-3, 0, 2) b) (-3, 0, -2)

4.3 $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k\left(-\frac{3}{2}, 2, -1\right), k \in \mathbb{R}$

4.4 $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 4, 2), k \in [0, 1]$

4.5 $V = 12 \text{ cm}^3$

5. 5.1 $\|\overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{FI}\| = 2$ 5.2 a) $x = 3$

b) $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(-1, 2, 0), k \in \mathbb{R}$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq \frac{5}{4}$

5.3 Ao cuidado do aluno.

6. Para o referencial de origem no vértice anterior do cubo da base inferior e unidade igual a metade da aresta do cubo, colocado na posição normal, temos que os vértices do octaedro são: (1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 1) e (1, 1, 2).

7. a) Esfera de centro na origem e raio 4.

b) Primeiro octante.

- c) Circunferência no plano de equação $x = 4$ de centro no ponto de coordenadas $(4, 2, 0)$ e raio 4.
- d) Semiespaço limitado pelo plano mediador do segmento de recta de extremos nos pontos de coordenadas $(1, 0, 2)$ e $(1, 2, 2)$, a que pertence o ponto de coordenadas $(1, 2, 2)$.
- e) Cilindro recto de base no plano xOy e centro na origem, com altura 10, tendo a base superior contida no plano de equação $z = 10$.

8. $x^2 + y^2 \leq \frac{16}{\pi} \wedge 0 \leq z \leq \frac{8\sqrt{\pi}}{\pi}$

9. a) $\frac{500\pi}{3}$ b) 54π c) 72π

10. 10.1 a) $(0, -12, 25); \|\vec{BV}\| = \sqrt{769}$

b) $(x, y, z) = (0, 12, 0) + k(0, -12, 25), k \in \mathbb{R}$

c) $x^2 + y^2 \leq 144 \wedge z = 0$

10.2 10.2.1 $940,8\pi \text{ m}^3$

10.2.2 $x^2 + y^2 \leq 51,84 \wedge z = 10$

Auto-avaliação 2

Págs. 28 e 29

I

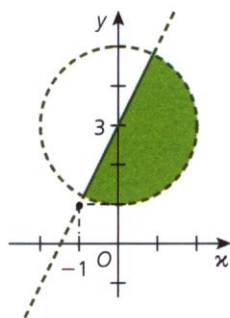
1. C
2. B
3. C
4. A
5. B

II

1. 1.1 a) $A(-1, 1)$ b) $B(2, 7)$

1.2 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 \leq \frac{45}{4}$

1.3



2. 2.1 HD é perpendicular a AD e a DC .

2.2 a) $(x, y, z) = (5, 10, 0) + k(0, 0, -3), k \in \mathbb{R}$

b) $x = 5$

c) $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

3. $\vec{HG} = \vec{EF}$ (d, e) e $\vec{HE} = \vec{GF}$ ($a, -b, -c$). Portanto, $[HGFE]$ é um paralelogramo.

TEMA 2

Funções e gráficos

Generalidades sobre funções

Págs. 30 a 36

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. B
2. C
3. A
4. A
5. D
6. a) C
b) D
7. D
8. A
9. C

RESPOSTA ABERTA

1. A Ana percorreu maior distância a correr na primeira parte do percurso.
2. 2.1 40 minutos.
2.2 Os valores do índice de radiação solar ultravioleta terão de ser inferiores a 3,2 (aproximadamente).
2.3 Ao cuidado do aluno.
2.4 $D = 200$
2.5 A Ana.
3. A, B e D.
4. a) $x = -\frac{3}{2}$
b) $x = 2$
c) Não tem zeros.
5. a) $D_i = [-3, 3[$ e $D_f =]-3, 3]$
b) $[-1, 1]$, por exemplo.
c) $S = \{-3, 1\}$
d) $S = [-3, -2] \cup [0, 2]$
e) Máximo absoluto: 3, para $x = -3$ e para $x = 1$.
Mínimo relativo: -1 , para $x = -1$.
6. 6.1 Zeros: $-1,4$ e $0,4$ (valores aproximados) e 1.
Máximo absoluto: 9, para $x = -2$.
Máximo relativo: aproximadamente, $0,4$, para $x \approx 0,7$.
Mínimo absoluto: aproximadamente, $-2,4$, para $x \approx -0,7$.
Mínimo relativo: 0, para $x = 1$.
- 6.2 a)
- | | | | | |
|--------|----|------|-----|---|
| x | -3 | -0,7 | 0,7 | 1 |
| $f(x)$ | 9 | -2,4 | 0,4 | 0 |
- b)
- | | | | | |
|--------|----|------|-----|---|
| x | -3 | -1,4 | 0,4 | 1 |
| $f(x)$ | + | + | 0 | + |
7. 7.1 a) $D = [-2, 1] \cup [2, 7]; D_f = [-12, 25]$
b) $-1, 0$ e 3.

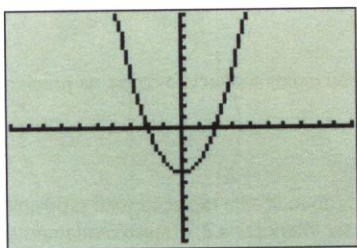
- c) Mínimo absoluto: -12 .
Máximo absoluto: 25 .
d) $]0, 1]$, por exemplo.
e) $S =]-1,8; 1] \cup]2, 7]$

7.2 Não, existem três zeros.

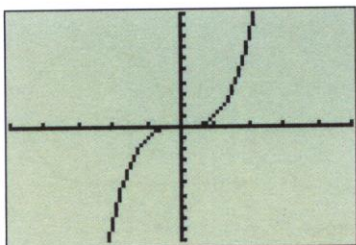
8. 8.1 a) $D_f = [-4, 6[$ $D'_f = [-4, 12[$
b) $-2, 3$ e 5 .
c) Extremos absolutos: mínimo: -4 ;
máximo: não tem.
Extremos relativos: mínimos: -4 e $-2,5$;
máximo: 6 .
d) $]-2, 1]$, por exemplo.
e) $]-4, 1]$, por exemplo.

8.2	x	-4		-2		3		5		6
	$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	ND

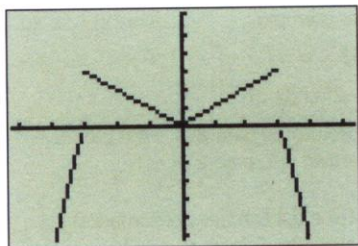
9. a) Por exemplo,



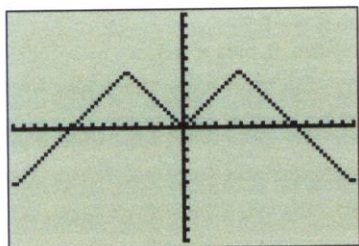
- b) Por exemplo,



- c) Por exemplo,

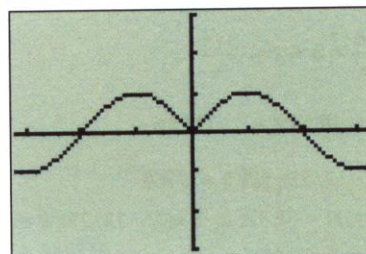
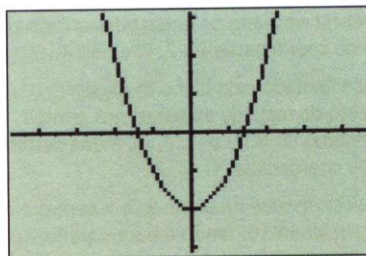


- d) Por exemplo,

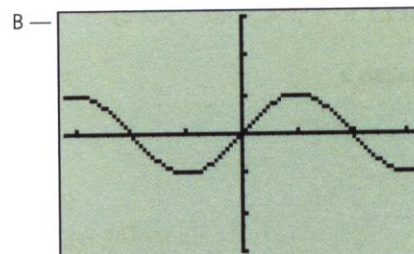


10. A — ímpar; B — ímpar; C — par.

11. a)



- b) A — Não é possível.



12. a) Nem par nem ímpar.

- b) Par.
c) Ímpar.

Função afim e função quadrática

Págs. 38 a 41

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. B
2. C
3. C
4. C
5. D
6. C
7. C
8. A
9. D
10. B
11. C
12. B

RESPOSTA ABERTA

1.	x	-5	-3	0	1	2	4	$4,75$
	y	-19	-11	1	5	9	17	20

$$y = 4x + 1$$

2. 2.1 Para Lisboa $L(x) = 100x$; para o Porto: $P(x) = 80x$.

- 2.2 1 hora e 40 minutos, aproximadamente. Encontram-se a, aproximadamente, 133,3 km do Porto.

3. 3.1 $A(x) = 10 + 2x$

3.2 $A(x) = 10 + 7x + x^2$

3.3 1,22 cm

4. 4.1 a) 500 €

b) 530 €

4.2 Significa que a Joana recebe 3% do lucro mensal das vendas.

5. $d(t) = 12 + 3t$

6. a) A altura máxima é aproximadamente 54,345 metros e ocorreu no instante 3,265 segundos (valores aproximados às milésimas).

b) 0 m/s.

c) -32,641 m/s.

7. 7.1 a) f é decrescente em $]-\infty, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$. $D_f' = [1, +\infty[$

b) $S =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

7.2 $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$

7.3 $A \approx 1,61$

8. a) $S = [-2, 5]$

b) $S =]2, 3[$

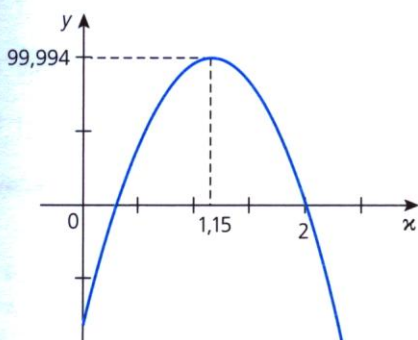
c) $S = \{3\}$

d) $S = \{\}$

e) $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

f) $S = [0, 1]$

9. 9.1



9.2 a) 1,15 euros.

b) 30 cêntimos.

c) 83,04 euros.

10. $x \approx 0,69$

Transformações de funções e função módulo

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D

2. B

3. B

4. A

5. B

6. C

Págs. 42 a 47

RESPOSTA ABERTA

1. 1.1 a) (0, 6)

b) (3, 8)

c) (1, 6)

d) (2, 18)

1.2 a) 6

b) -6

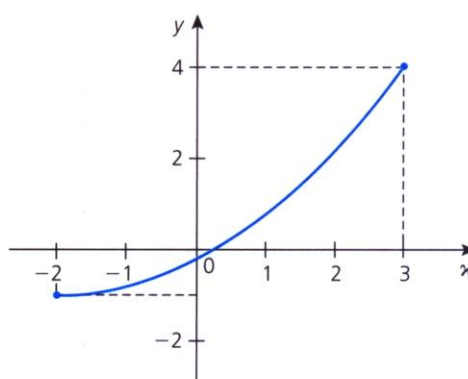
2. a)

x	1	2	3	4
$h(x)$	0	9	6	0

b)

x	2	4	6	8
$t(x)$	0	3	2	0

3. 3.1 Por exemplo,



3.2 $D_{f|I} = [-2, 3]$; $D'_{f|I} = [0, 4]$. Esboço do gráfico ao cuidado do aluno.

3.3 a) $D = [-3, 2]$; $D' = [-1, 4]$

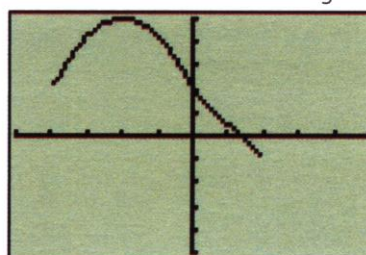
b) $D = [-2, 3]$; $D' = [-4, 1]$

c) $D = [-4, 1]$; $D' = [-4, 1]$

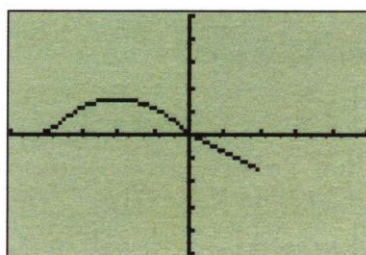
d) $D = [-2, 3]$; $D' = [-12, 3]$

4. $k = -3$

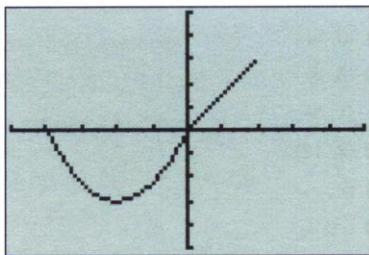
5. 5.1 a) $D = [-4, 2]$; $D' = [-1, 5]$; zeros: $\frac{4}{3}$.



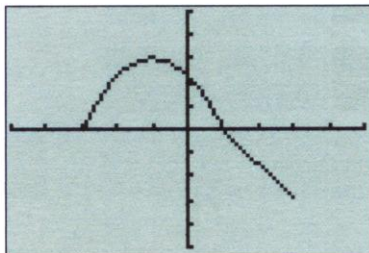
b) $D = [-4, 2]$; $D' = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ zeros: -4 e 0.



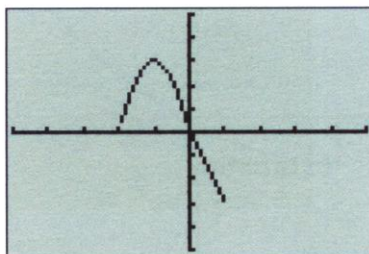
- c) $D = [-4, 2]$; $D' = [-3, 3]$; zeros: -4 e 0 .



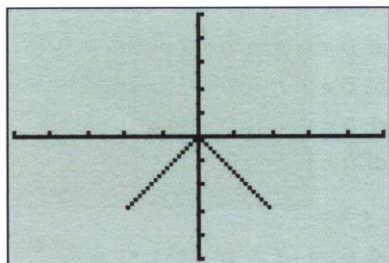
- d) $D = [-3, 3]$; $D' = [-3, 3]$; zeros: -3 e 1 .



- e) $D = [-2, 1]$; $D' = [-3, 3]$; zeros: -2 e 0 .



- f) $D = [-2, 2]$; $D' = [-3, 0]$; zeros: 0 .



5.2 a) $i(x) = -2f(x)$

b) $j(x) = f(x + 1) + 2$

6. 6.1 $D_f = D_g = \mathbb{R}$; $D'_f = [1, +\infty[$; $D'_g = [-\infty, 5]$

6.2 f não tem zeros. Os zeros de g são -3 e 7 .

6.3 a) $S = \{-6, 12\}$

b) $S =]-2, 6[$

6.4 $\frac{1}{2}$ e $\frac{9}{2}$.

7. a) $S = \{-1, 4\}$

b) $S = \{1\}$

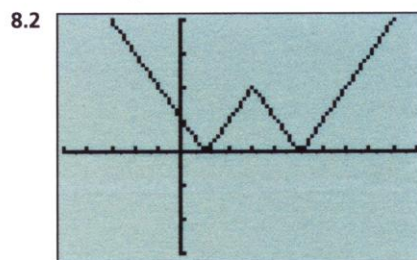
c) $S = \left]-1, \frac{5}{3}\right[$

d) $S = [2, 6]$

e) $S =]1 - \sqrt{2}, 1[\cup]1, 1 + \sqrt{2}[$

f) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{10}\right] \cup \left[\frac{1}{10}, +\infty\right[$

8. 8.1 $g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 3 \\ 1 - x & \text{se } x < 3 \end{cases}$



8.3 a) $k \in]-\infty, -5[$

b) $k = 2$

9. 9.1 a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $f(x) = x^2 + x - 6$

9.2 $\begin{cases} -x^2 - x + 6 & \text{se } x \in]-3, 2[\\ x^2 + x - 6 & \text{se } x \in]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[\end{cases}$

Funções polinomiais

Págs. 48 a 53

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C

2. A

3. C

4. A

5. B

6. C

7. C

8. B

9. D

RESPOSTA ABERTA

1. a) $6x^3 - 2x^2 + 4x - 4$

b) $-3x^4 + 24x^2 - 48$

c) $2x^3 + 3x^2 - 6x - 26$

2. a) $Q(x) = 3x + 7$; $R(x) = 19x - 8$

b) $Q(x) = 2x - 9$; $R(x) = 32$

c) $Q(x) = 7x^3 + 14x^2 + 4x - 34$; $R(x) = -78x + 98$

d) $Q(x) = x - 4$; $R(x) = 4x - 8$

3. a) $(x - 3)(x + 3)$

b) $(x - 4)^2$

c) $(x - 2)(x - 3)$

d) $2(x + 6)^2$

e) $(x - 2)(x - 1)(x + 2)$

f) $-x(x - 3)(x - 2)$

g) $(x + 1)(x^2 + 1)$

4. a) $Q(x) = 6x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 45x + 88$; $R = -161$

b) $Q(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - \frac{13}{6}$; $R = -\frac{7}{6}$

c) $Q(x) = -x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{9}{16}; R = \frac{249}{16}$

d) $Q(x) = x^2 + 8x + 15; R = 0$

5. a) $a = \frac{23}{2}$

b) $a = \frac{3}{2}$

6. a) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

b) $(x+2)(x-3)(x^2+x+3)$

c) $(x-4)(x-2)^2(x+2)(x^2+4)$

7. a) $(x-6)(x-5)(x-1)$

b) $(x-2)(x+2)(x+3)(x+5)$

c) $-(x+3)(x+5)(3x-2)$

8. 8.1 Multiplicidade 2.

8.2 $f(x) = (x+1)^2(2x-1)$

8.3 $S =]-\infty, \frac{1}{2}]$

9. a) $S = [-2, 2]$

b) $S = \{-3, 0, 3\}$

c) $S =]-\infty, -6[\cup]-1, 1[$

d) $S =]-\infty, -5] \cup [-3, -2] \cup [2, +\infty[$

10. 10.1 62 529 litros.

10.2 $(x-3)$ euros é o lucro por litro de azeite.

10.3 Entre 3,28 e 10,12 euros.

11. a) Por exemplo, 1.

b) $[-1, 1] \cup [5, +\infty[$

12. 12.1 $g(x) = \frac{1}{5}(x+2)^2(x+1)(x-2)$

12.2 $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

Auto-avaliação 3

Págs. 52 e 53

I

1. 1.1 D

1.2 A

2. D

3. A

4. A

II

1. 1.1 a) $D =]-\infty, 6]; D_f =]-4, +\infty[; f(0) = 3$

b) Não tem extremos absolutos.

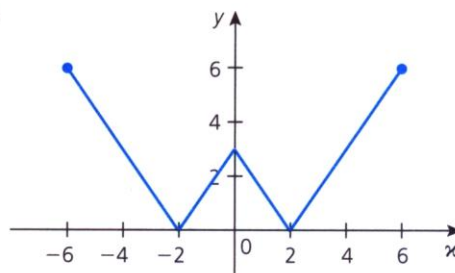
Extremos relativos: 3, em $x = 0$, é um máximo relativo; 6, em $x = 6$, é um máximo relativo; 0, em $x = 2$, é um mínimo relativo.

c) $]-2, 0[$, por exemplo.

1.2 Três soluções.

1.3 $f(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$

1.4



2. 2.1 $D_f = \mathbb{R}; D'_f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty\right[$

2.2 f é positiva em $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ e negativa em $]\frac{1}{2}, 1[$

2.3 $S = [1, +\infty[$

3. 3.1 O raio da base do cone é $\sqrt{1-c^2}$ e a altura do cone $1-c$, portanto, $V(x) = \frac{1}{3}\pi(1-c^2)(1-c)$.

3.2 $V = 1,24$

3.3 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{4}\right]$

TEMA 3

Estatística

Organização de dados

Págs. 56 e 57

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A

2. B

3. B

4. C

5. B

RESPOSTA ABERTA

1. 1.1 Os hóspedes dos hotéis de Lisboa em 2009.

1.2

Hotéis	1.º trimestre	2.º trimestre	3.º trimestre	4.º trimestre
Cinco estrelas	0,147	0,144	0,166	0,169
Quatro estrelas	0,440	0,452	0,451	0,452
Três estrelas	0,305	0,304	0,284	0,284
Duas estrelas	0,100	0,089	0,089	0,085
Outros	0,009	0,011	0,010	0,010

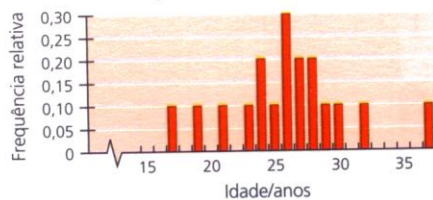
1.3 O quarto trimestre.

2. 2.1 Considerando a idade até Dezembro de 2008, temos:

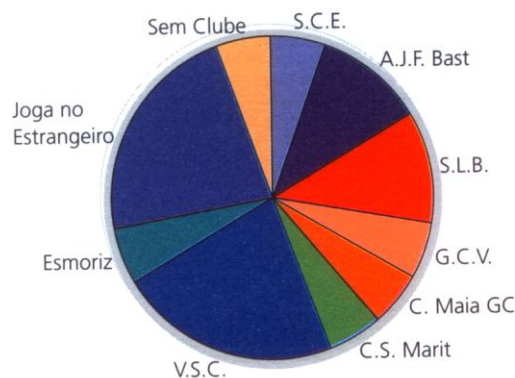
Idade	Frequência absoluta
17	1
19	1
21	1
23	1
24	2
25	1
26	3
27	2
28	2
29	1
30	1
32	1
37	1
Total	18

A idade mais frequente é 26 anos.

2.2 Selecção masculina de voleibol



2.3



O clube mais representado é o V. S. C.

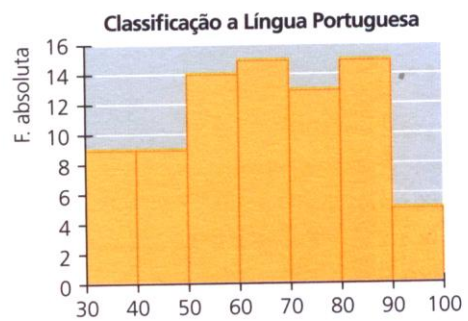
3. 3.1

Classes	f_i
[30, 40[	9
[40, 50[	9
[50, 60[	14
[60, 70[	15
[70, 80[	13
[80, 90[	15
[90, 100[	5

3.2 62 alunos.

3.3 Cinco alunos.

3.4 Um histograma é mais adequado porque se trata de uma variável contínua.



4. 4.1

Classes	f_i
[0, 4[	2
[4, 8[	4
[8, 12[	4
[12, 16[	5

4.2 Quinze alunos.

4.3 Nove alunos.

4.4 Aproximadamente, 27%.

5. $a = 27$, $b = 23$ e $c = 4$.

Medidas de localização e dispersão Págs. 62 a 65

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D

2. C

3. A

4. B

5. B

6. B

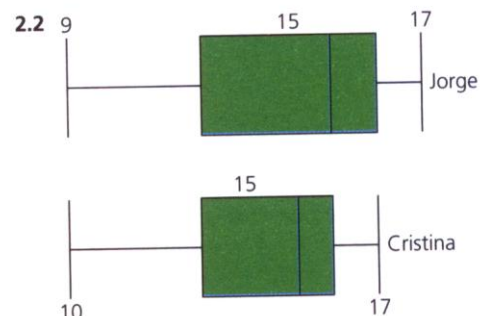
RESPOSTA ABERTA

1. a) $\bar{x} \approx 13,4$; $\tilde{x} = 13$; $Mo = 12$

b) $\bar{x} \approx 2,6$; $\tilde{x} \approx 2$; $Mo = 2$

c) $\bar{x} \approx 27$; $\tilde{x} = 28,3$; $Mo \approx 32,5$

2. 2.1 Cristina: $\bar{x} = 14,57$; $\tilde{x} = 15$
Jorge: $\bar{x} = 14,14$; $\tilde{x} = 15$



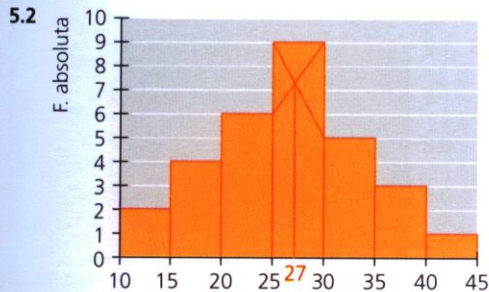
A Cristina apresentou melhores classificações do que o Jorge e menos dispersas.

2.3 Cristina: $\sigma \approx 2,19$; Jorge: $\sigma \approx 2,53$
As classificações do Jorge apresentam maior dispersão.

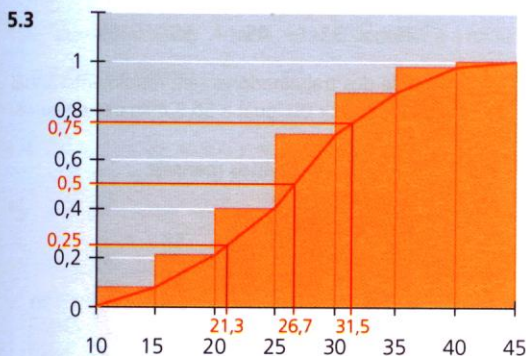
3. a) Nas disciplinas de Física/Química e de Matemática.
b) Física/Química.
c) Física/Química.
d) Física/Química.

4. 677,79 euros.

5. 5.1 $\bar{x} = 26,5$; $\sigma \approx 7,35$



$Mo \approx 27$



$Q_1 = 21,3$; $\tilde{x} = 26,7$; $Q_3 = 31,5$

6. 6.1 25 alunos.

6.2 $\bar{x} = 15,36$

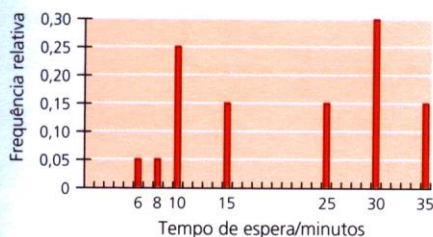
6.3 $\bar{x} = 16,28$

7. 7.1 6360 euros.

7.2 $\bar{x} = 5,406$; $\sigma = 1,224$

8. 8.1

Tempo de espera	Frequência relativa
6	0,05
8	0,05
10	0,2
15	0,15
25	0,15
30	0,25
35	0,15



8.2 Em média, um doente tem de esperar 21 minutos e 27 segundos.

8.3 $\sigma \approx 10,06$

9. 9.1 781 horas.

9.2 Brilho eterno: $\bar{x} = 747,4$; $\sigma \approx 12,5$
Sempre dia: $\bar{x} \approx 760,9$; $\sigma \approx 15,5$

9.3 a) Brilho eterno: 748
Sempre dia: 765

b) Brilho eterno: 736, 753
Sempre dia: 752, 773

c) Brilho eterno: 51
Sempre dia: 53

d) Brilho eterno: 17
Sempre dia: 21

9.4 Há uma menor dispersão, pelo que temos uma ideia mais precisa da sua durabilidade.

9.5 A durabilidade média é maior.

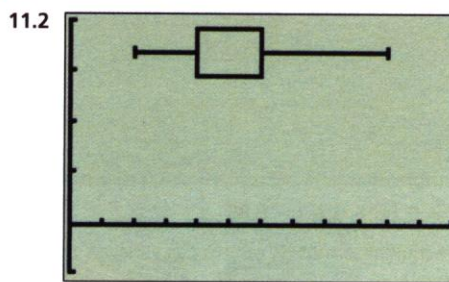
10. a) Aproximadamente 16,13%.

b) 2 clientes.

c) $\bar{x} \approx 178,2$ e $\sigma_x \approx 73,98$

d) $\hat{x} \approx 172,22$

11. 11.1 $\bar{x} = 2,88$



Distribuições bidimensionais

Págs. 67 a 69

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. B

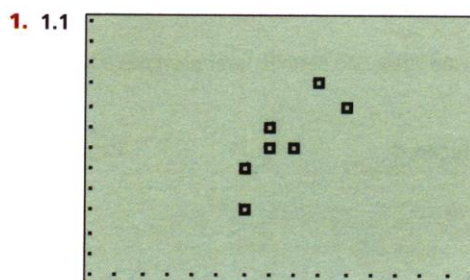
2. A

3. C

4. B

5. D

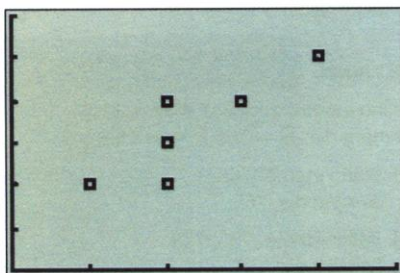
RESPOSTA ABERTA



1.2 Forte, porque $r \approx 0,83$.

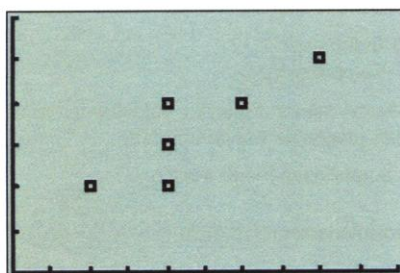
1.3 $y = 1,083x - 9,75$; $6,5^\circ\text{C}$, aproximadamente.

2. 2.1



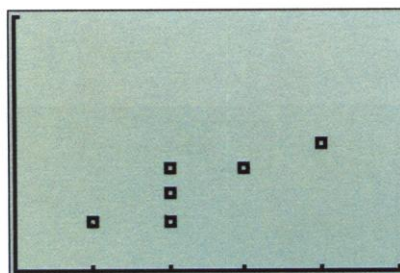
$$y = x + 1; r \approx 0,85$$

2.2



$$y = 0,5x + 1; r \approx 0,85$$

2.3



$$y = 0,1x + 0,1; r \approx 0,85$$

2.4 Se multiplicarmos os valores das variáveis por uma constante, o coeficiente de correlação não se altera.

3. 3.1 Cerca de 30,66 euros mensais. Utilize a recta de regressão. $y = 0,005x + 20,659$
 x – rendimento; y – gasto em electricidade

3.2 Cerca de 3657 euros mensais.

3.3 O coeficiente de correlação não se altera, mas temos outra recta de regressão.

3.4 Por exemplo, alterar apenas um valor de uma das variáveis.

4. 4.1 $y = 8,2x - 3,5$

4.2 O aumento da população pode levar à escassez de alimentos...

5. A regressão linear não permite fazer previsões a longo prazo.

Auto-avaliação 4

Págs. 82 e 83

I

1. 1.1 B

1.2 A

2. C

3. C

4. A

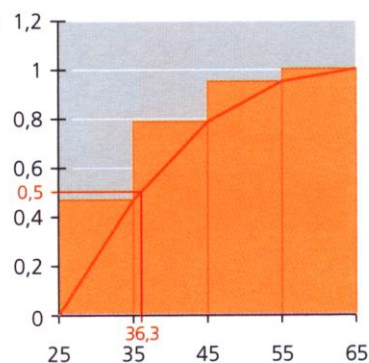
II

1. 1.1

Classes	f_i
[25, 35[	23
[35, 45[	16
[45, 55[	8
[55, 65[	3

1.2 38,2 milhares de euros.

1.3



Metade dos trabalhadores tem rendimento anual líquido inferior ou igual a 36,3 milhares de euros.

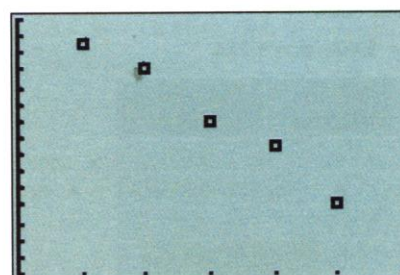
2. 2.1



2.2 326,76 euros.

2.3 Os sindicatos têm razão, visto que o desvio-padrão vai aumentar 1,05 vezes.

3. 3.1



3.2 $y = -2,35x + 91,25$

3.3 74,8 kg; não se pode utilizar este modelo para 25 semanas.

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A
2. A
3. C
4. B
5. C
6. A
7. B
8. A

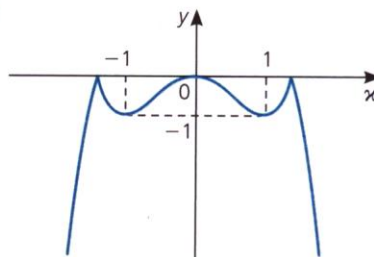
RESPOSTA ABERTA

1. 1.1 $y = x + 8$
 - 1.2 Não são paralelas. A recta AB tem declive 1 e a recta dada tem declive $-\frac{2}{3}$.
 - 1.3 $k = -6$
 - 1.4 $(x^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \wedge y \leq 3) \vee (3 \leq y \leq 5 \wedge y \leq x + 8 \wedge y \leq -x + 8)$
 - 1.5 $A = \frac{9\pi}{2} + 16$
2. 2.1 Se a razão entre os volumes é 8, então, a razão de semelhança é 2. Assim, o ponto I tem abcissa e cota nula porque pertence ao eixo das ordenadas e a sua ordenada é $8 + 4 = 12$.
 - 2.2 $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 \leq 16$
 - 2.3 $(x, y, z) = (8, 0, 0) + k(-8, 12, 4), k \in \mathbb{R}$
 - 2.4 São colineares, porque $\frac{-8}{-4} = \frac{8}{4} = \frac{8}{4}$.
 - 2.5 A recta MN .
 - 2.6 $P = 40$
3. 3.1 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(-3, 0, 0), D(0, -3, 0)$.
 - 3.2 $A = 15\pi \text{ cm}^2$
 - 3.3 $A = \frac{9}{16}\pi \text{ cm}^2$
4. 4.1 a) $S =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$
 - b) $S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$
- 4.2 O máximo é $\frac{1}{2}$ para $x = -\frac{5}{2}$.
5. a) Os zeros de f são 1 e -4 ; g tem um único zero, 1; h tem como zeros $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.
 - b) f tem um mínimo -5 para $x = -\frac{3}{2}$ e h tem um mínimo $-\frac{49}{24}$ para $x = \frac{1}{12}$.
 - c) $S = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

6. 6.1 251 °C

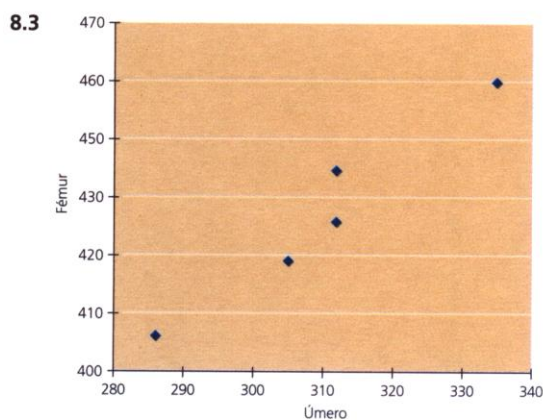
6.2 A energia foi restabelecida 3 horas e 26 minutos depois. A temperatura atinge o valor inicial ao fim de 9 horas e 53 minutos, logo, a padaria teve prejuízo.

7.



8. 8.1 $\bar{x} = 310$ $\sigma_x \approx 15,7$

8.2 $\tilde{x} = 430$



8.4 $y = 1,063x + 101,805, r = 0,975$

8.5 Aproximadamente 442 mm.

8.6 O valor não se encontra no intervalo de valores observados para o fémur.

8.7 Ao cuidado do aluno.

9. $p(x) = x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 74x^2 + 68x - 24$, por exemplo.

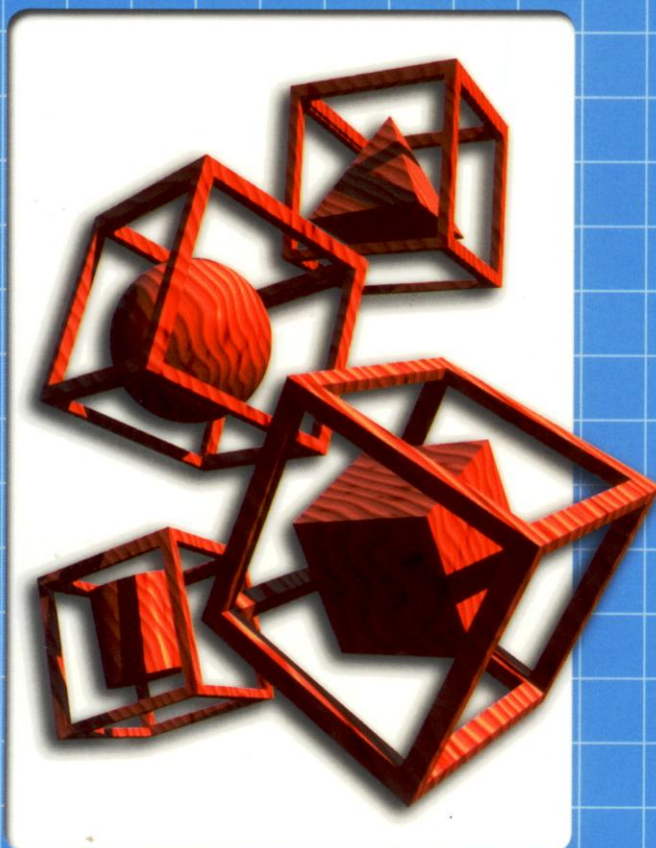
Matemática A

CADERNO DE ACTIVIDADES

10^o

Cristina Negra e Emanuel Martinho

Consultor científico: Pedro Jorge Freitas



Projecto **Desafios**

Santillana
CONSTÂNCIA