

TRAJETÓRIA PARABÓLICA = «ERRO» DE GALILEU?

Enquadramento histórico

Podemos imaginar um qualquer sábio babilónio, do Egito ou da Grécia antiga, sentado no cimo de uma pequena colina a pensar nos movimentos descritos por uma pedra lançada por uma funda, por uma gota de água que cai dos céus ou por uma lança que um soldado atirou na última batalha. Muitos tentaram resolver o problema em diferentes épocas e chegaram até nós algumas referências a essas tentativas. Podíamos começar esta resenha histórica expondo as ideias de alguns filósofos gregos, com Aristóteles de Estagira (384-322 a. C.) à cabeça, mas optamos por iniciar esta revisitação precisamente nas épocas em que viveram pensadores que estudando e ensinando os escritos dos gregos, começaram lentamente a questionar mais ou menos seriamente alguns dos aspetos dessa forma de pensar.

João Philoponus (490-570 d. C.), filósofo que ensinou na Biblioteca de Alexandria, assim procedeu: em vez de dizer que uma flecha, depois de lançada pelo arco, continuaria o seu movimento porque o ar, afastado pela frente da flecha, deslocava-se para trás desta empurrando-a ao longo do seu percurso, optou por separar fisicamente o objeto propulsor (o arco) do projétil (a flecha), dizendo que, durante a fração de tempo em que o arco empurrava a flecha, este transmitia-lhe um *impetus* que funcionava como se fosse uma espécie de *força motora* («força impressa»), impelindo a flecha através do ar. O movimento da flecha cessaria por exaustão desse *impetus* devido à ação resistiva do ar. Philoponus pensava que o ar funcionava como um estorvo para a seta pois se este não existisse (movimento no vazio), a seta continuaria com o seu *impetus*, movimentando-se sem parar:

Pois, nesta teoria, o ar em questão deve realizar três movimentos distintos: ele deve ser empurrado para a frente pela flecha, então mover-se para trás, e finalmente voltar e continuar para a frente uma vez mais. Todavia o ar é facilmente movido, e uma vez colocado em movimento atravessa uma distância considerável. Como pode o ar, empurrado pela flecha, deixar de mover-se na direção do impulso impresso, mas em lugar disso, virar como por algum comando, e retraçar seu curso? Além disso, como pode este ar, ao virar, evitar ser disperso no espaço, mas colidir precisamente sobre o entalhe final da flecha e novamente empurrar a flecha adiante e presa a ele? Tal visão é inteiramente inacreditável e chega a ser fantástica.

Embora a sua explicação continuasse errada, Philoponus percebeu que o meio seria uma desvantagem para o movimento da flecha e não uma necessidade como defendia Aristóteles e com essa ideia lançou as bases para o conceito de inércia, ao aceitar a possibilidade do movimento no vazio com velocidade finita.

Ao longo do primeiro milénio depois de Cristo, a teoria do *impetus* seria redescoberta, defendida e ensinada por vários outros sábios, sem contudo ter conseguido contundir minimamente os ensinamentos de Aristóteles, cujos seguidores foram sempre em muito maior número. No entanto, o caminho para o correto esclarecimento da natureza do movimento dos corpos começava lentamente a ser traçado e chegou o final da Idade Média, vários pensadores começaram a por sérias objeções à Física e Cosmologia de Aristóteles, entretanto ampliadas e matematizadas na obra *Almagesto* do astrónomo de Alexandria, Cláudio Ptolomeu (90-168 d. C.).

Um desses pensadores foi Joannes Buridanus (1297-1358), que chegou a ser reitor da Universidade de Paris, e que no século xiv da nossa era afirmou:

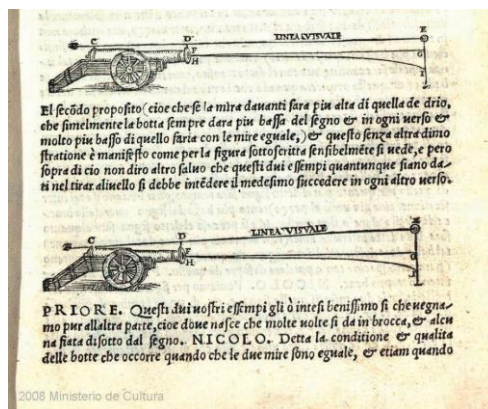
... nós podemos e devemos dizer que numa pedra ou noutro projétil há algo impresso que é a força motriz («virtus motiva») daquele projétil. E isto é evidentemente melhor do que recorrer à afirmação que o ar continua a mover aquele projétil. Pois o ar parece mais resistir. Portanto, parece-me que deve ser dito que o motor, ao mover um corpo móvel, imprime um certo «impetus», ou uma certa força motriz («vis motiva») ao corpo móvel [no qual age o «impetus»] na direção para o qual o motor estava movendo o corpo móvel, para cima ou para baixo ou lateralmente ou circularmente. Quanto mais rapidamente o motor mover aquele corpo móvel, mais forte será o «impetus» que ele lhe imprimirá. É por esse «impetus» que a pedra é movida depois que o atirador parar de movê-la. Porém, esse «impetus» é continuamente reduzido pela resistência do ar e pela gravidade da pedra, que a inclina numa direção contrária àquela à qual o «impetus» estava naturalmente predisposto a movê-la. Assim, o movimento da pedra torna-se continuamente mais lento, e finalmente esse «impetus» diminui tanto que a gravidade da pedra vence e move a pedra para baixo, para o seu lugar natural.

Embora ainda agarrado à noção aristotélica do «seu lugar natural», parece-nos evidente que esta teoria quantitativa de Buridanus abriu o caminho para que os cientistas da Renascença pudessem descrever corretamente o movimento dos projéteis.

Entretanto começara a polémica sobre a forma da curva da trajetória de uma bala disparada por um canhão. Em 1537, o matemático italiano Niccolo Tartaglia (1500-1557), defendia na sua obra *Nuova scienza*¹ (dedicada à arte da artilharia e da balística) que a parte inicial da trajetória do projétil era retilínea devido à enorme velocidade com que a bala era disparada do canhão. Ao longo da trajetória, essa linearidade ia-se perdendo porque a velocidade do projétil diminuía devido às forças resistivas do ar e o projétil encurvava para o solo por ação da gravidade, caindo bruscamente na vertical, passando gradualmente de um *movimento violento* (momentos após o disparo) para um *movimento natural*, à la Aristóteles, descrevendo uma queda livre. Era, portanto, uma trajetória estranha: um segmento de reta, seguido de uma curva (arco de uma circunferência), para finalizar com um novo segmento de reta na vertical. O próprio Tartaglia encontrou inconsistências no seu modelo e afirmou que provavelmente a trajetória seria curvilínea na sua totalidade, mas de curvatura tão ligeira que seria impercetível. A teoria do *impetus* ainda era usada para justificar o movimento do projétil depois de deixar o canhão. Algumas ideias de Aristóteles ainda sobreviviam neste autor: movimento violento (ou forçado) e movimento natural.

Em 1546, Tartaglia publica nova obra sobre balística (*Quesiti et inventioni diverse*) (Figura 1) na qual afirma que a trajetória do projétil só é retilínea no caso de o lançamento ser feito na vertical. Nos restantes casos, a trajetória terá que ser curvilínea.

Figura 1 – Lançamento horizontal *Quesiti et Inventioni diverse*, Tartaglia.



¹ Nesta publicação, Tartaglia afirma que o alcance de um projétil é máximo para um ângulo inicial de 45° com a horizontal, embora atualmente a sua demonstração não seja considerada muito rigorosa.

Galileu Galilei (1564 – 1642)

Há imensos autores contemporâneos que estudaram os escritos de Galileu (Figura 2): as obras publicadas, as suas notas, a extensa correspondência e as obras de vários filósofos naturais da época em que ele viveu. Houve autores que glorificaram os aspetos experimentais em detrimento da sua capacidade de abstração, enquanto outros, pelo contrário, viram em Galileu um matemático suficientemente capaz de demonstrar o funcionamento da Natureza apenas com recurso à geometria, colocando muitas reservas à sua mestria no laboratório. Acresce que algumas lendas em torno desta figura central da ciência não ajudam ao correto discernimento do que realmente Galileu fez, demonstrou e/ou defendeu ao longo da sua vida.

Uma coisa parece certa, Galileu, mais do que outra coisa, interessava-se muito pela Mecânica e, desde os seus tempos de estudante até à maioridade, foi mudando de opinião sobre os fenómenos que estudava. Ainda estudante defendia uma Física com aspetos mesclados de Aristotelismo, da estática e hidrostática de Arquimedes e da teoria do *impetus*. Parece certo que conhecia os trabalhos de Tartaglia sobre o problema central da balística: a forma da trajetória do projétil.

Não há acordo nos diversos estudiosos sobre a «data» das suas descobertas. O desacordo é tal que até a definição de «descoberta» é usada para uns dizerem textualmente que a lei da queda dos corpos foi formulada por Galileu em 1604; outros afirmarem que em 1602 Galileu começou a experimentação com pêndulos de grande comprimento e planos inclinados e em 1604 descobre as leis do pêndulo à custa da medições muito rigorosas de períodos e a lei da queda dos corpos e apenas em 1608 descobre a trajetória parabólica dos projéteis, e ainda outros, mais recentemente, defenderem que a descoberta da forma da curva dos projéteis (parábola) deve ser atribuída às experiências conjuntas de Galileu e Guidobaldo del Monte (1545-1607) feitas em **1592**.

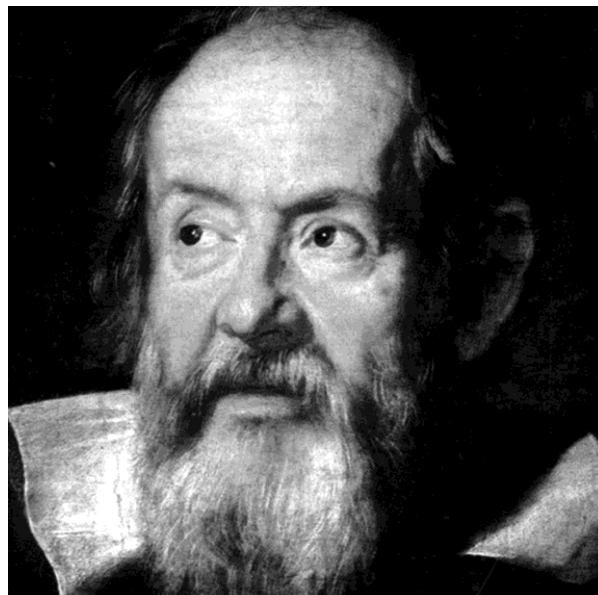


Figura 2 – Galileu Galilei, 1636, pintura de Justus Sustermans.

Este tipo de aspetos do rigor histórico estão muito além do que pretendemos, pelo que não nos alongaremos mais e enumeramos os principais desenvolvimentos que Galileu empreendeu durante a sua vida de cientista, no que se refere mais concretamente aos lançamentos e queda livre, ressaltando o desacordo que existe entre os diversos autores consultados quanto às datas em que ocorreram essas descobertas:

1581 – descobriu a constância do período do pêndulo gravítico;

1589 – mostrou que objetos caem à mesma velocidade independentemente do seu «peso» (massa); 1592 – sugeriu que as leis da Natureza são as mesmas quer na Terra quer nos Céus; descobriu que a **trajetória dos projéteis é parabólica**;

1604 – enunciou a lei da queda dos corpos: a distância percorrido pelos objetos em queda livre aumenta com o quadrado do tempo de queda;

1613 – enunciou o princípio da inércia;

1624 – elaborou uma teoria das marés;

1632 – estabeleceu o Princípio da Relatividade;

1632 – apoiou abertamente a teoria heliocêntrica de Copérnico.

Acaba-se a referência a Galileu com um salto à sua última obra, *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove Scienze*, publicada em 1638 (Figura 3), em Leiden (Holanda), na qual trata o movimento parabólico de um projétil, lançado na horizontal, como sendo uma sobreposição de dois movimentos ortogonais e distintos na sua natureza: um, de velocidade constante ao longo da horizontal (movimento retilíneo e uniforme, na atual terminologia) e outro, perpendicular ao primeiro e uniformemente acelerado.

Salviati a discursar:

... imagino que um móvel foi projetado sobre um plano horizontal livre de qualquer obstáculo; já é evidente, de acordo com o que expusemos longamente noutro lugar, que o dito móvel se movimentará sobre esse mesmo plano com um movimento uniforme e perpétuo, supondo que esse plano seja prolongado ao infinito. Se, ao contrário, supomos um plano limitado e situado a uma certa altura, um móvel que supomos dotado de gravidade, uma vez chegado à extremidade do plano e continuando seu curso, acrescentará ao anterior movimento uniforme e indestrutível, a tendência de ir para baixo devido à sua própria gravidade; origina-se, assim, um movimento composto de um movimento horizontal uniforme e de um movimento descendente naturalmente acelerado, que chamo projeção. Demonstramos agora algumas de suas propriedades, das quais a primeira é a seguinte:

TEOREMA I – PROPOSIÇÃO I

Um projétil [que percorre uma trajetória] composta por um movimento horizontal uniforme e por um movimento descendente naturalmente acelerado descreve no seu deslocamento uma semi-parábola.

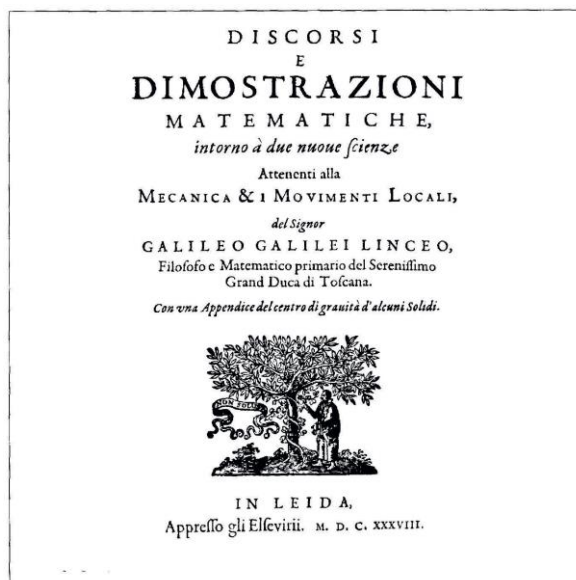


Figura 3 – *Discorsi e Dimostrazioni*, Galileu, 1638

«Erro» de Galileu?

Uma bala disparada de um canhão, típico da era de Tartaglia e de Galileu, na horizontal ou obliquamente atingia uma distância difícil de estimar matematicamente, pois, sabemos hoje, as velocidades atingidas à saída do canhão, a pouca aerodinâmica das balas da época, a força variável de interação com o ar (força resistiva) e o tempo de interação da bala com o ar, tornam o problema de muito difícil resolução.

Ainda hoje não há uma solução analítica geral para o problema. Existem soluções analíticas e/ou numéricas que permitem fazer uma previsão com rigor aceitável dos principais parâmetros da balística desde que se defina à partida como varia a força de resistência do ar com a velocidade (variável) do projétil. Deste modo, devemos prestar a devida homenagem aos matemáticos que, em plena Renascença e muito antes do Cálculo ter sido inventado, lutaram com este problema, tentando-o resolver e com isso ganhar o seu lugar na História e honorários apetecíveis!

Galileu sabia, evidentemente, que a trajetória parabólica da bala de canhão que ele propôs como resolução do problema só era perfeitamente válida no vazio. Com a interação com o ar, o alcance da bala de canhão seria seriamente afetado e de certeza que o grande cientista disso sabia. Os artilheiros experimentados sabiam-no de certeza e os ensinamentos de Tartaglia e de outros matemáticos continuavam a ser estudados e comparados com a novidade introduzida por Galileu.

Que uma **bala de canhão** (ou o chumbo de um mosquete do século XVI) tenha um alcance real bastante menor do que o previsível, pois o tempo de interação da bala com o ar é considerável e a velocidade de saída é geralmente superior a 100 m/s, é de certa forma espectacular.

Agora que uma **bola de basquetebol** lançada por alunos a cerca de 6 m/s tenha um alcance bastante aquém do que a parábola de Galileu prevê à partida é que a maioria dos docentes de física e química não estaria à espera que ocorresse!

Usando uma câmara de vídeo digital (30 fps) e *software* adequado de análise e tratamento de vídeo é possível mostrar que Galileu não resolveu o problema da balística, ou seja, que a trajetória real de uma simples bola de basquetebol se afasta muito da trajetória parabólica proposta por Galileu.

Equações que governam a trajetória parabólica à superfície da Terra

A tabela seguinte indica lado a lado as equações que governam o lançamento de projéteis com resistência do ar desprezável (Galileu) e com resistência do ar proporcional ao módulo da velocidade (adequada para lançamento de objetos a baixa velocidade).



Lançamento de projéteis	sem resistência do ar	com resistência do ar (força de resistência do ar $\propto v$)
Equações das posições e das velocidades segundo O_x (horizontal)	$x = v_{0x} t$ $v_x = v_{0x}$	$x = \frac{v_{0x}}{k} (1 - e^{-kt})$ $v_x = v_{0x} e^{-kt}$
Equações das posições e das velocidades segundo O_y (vertical)	$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$ $v_y = v_{0y} - g t$	$y = -\frac{g}{k} t + \left(\frac{v_{0y}}{k} + \frac{g}{k^2} \right) (1 - e^{-k t})$ $v_y = -\frac{g}{k} + \left(v_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-k t}$
Equação da trajetória	$y = (\tan \theta) x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$	$y = \left(\frac{g}{k} + v_{0y} \right) \frac{x}{v_{0y}} + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{v_{0x}} x \right)$

* k (é uma constante para o corpo em estudo; é inversamente proporcional à massa m do corpo e diretamente proporcional ao coeficiente de resistência do ar (*drag coefficient*)).

Analisando as duas colunas verifica-se que a descrição segundo Galileu é notoriamente mais simples de tratar em termos matemáticos.

Quando se considera que não há resistência do ar ($k = 0$), as equações da segunda coluna reduzem-se às equações de Galileu, após alguns passos de cálculo.

Segundo o eixo O_x , o **movimento deixa de ser uniforme**: o alcance decai ao longo do tempo e a velocidade tende a anular-se para tempos de voo muito elevados!

Segundo o eixo O_y , o movimento **deixa de ser uniformemente variado** e a altura máxima atingida é menor do que a prevista por Galileu.

A equação da trajetória **não é uma parábola**: para resistências do ar elevadas verifica-se que a primeira parte da trajetória se aproxima da linearidade como muito bem sabiam os artilheiros e Tartaglia. A segunda parte é consideravelmente menor em termos de alcance do que a previsão de Galileu.

Simulações numéricas/Dados experimentais e análise

O gráfico 1 mostra os resultados de várias simulações numéricas da variação do alcance x em função do tempo t para corpos de pequenas dimensões, lançados obliquamente (45° com a horizontal) com velocidades iniciais de módulo $5,0 \text{ m s}^{-1}$.

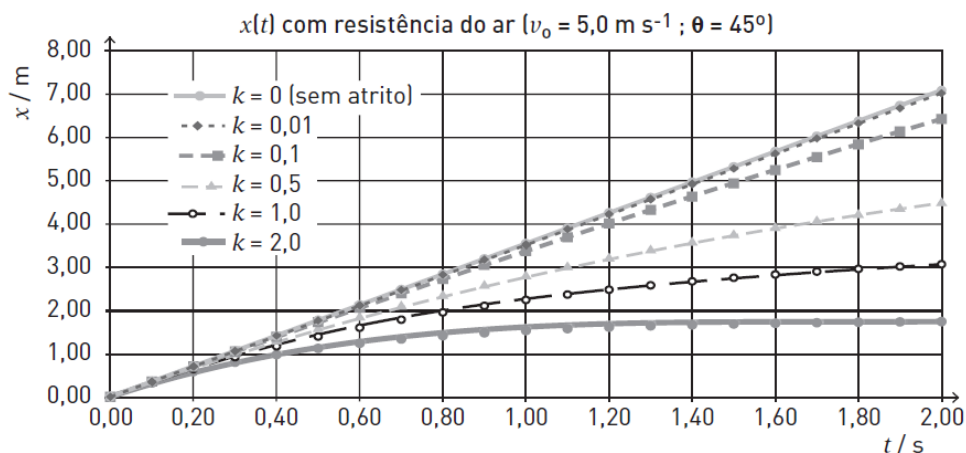


Gráfico 1 – $x(t)$ com resistência do ar.

Verifica-se que, quanto mais evidentes forem os efeitos da resistência do ar (valores de k crescentes) menor é o alcance atingido pelo corpo.

O gráfico 2 mostra os resultados de várias simulações numéricas da variação da altura y em função do tempo t para corpos de pequenas dimensões, lançados obliquamente (45° com a horizontal) com velocidades iniciais de módulo $5,0 \text{ m s}^{-1}$.

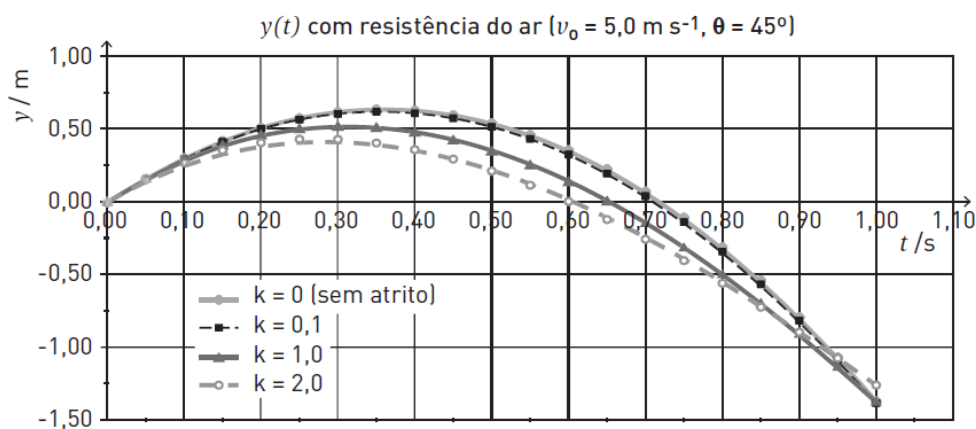


Gráfico 2 – Lançamento oblíquo: $y(t)$ com resistência do ar.

Verifica-se que, quanto mais evidentes forem os efeitos da resistência do ar (valores de k crescentes) menor é a altura máxima atingida pelo corpo; verifica-se ainda que o tempo de subida já não é igual ao tempo de descida.

O gráfico 3 mostra os resultados das simulações numéricas e **dados reais** obtidos para um lançamento de uma bola de basquetebol (Escola Básica e Secundária Sidónio Pais, Caminha).

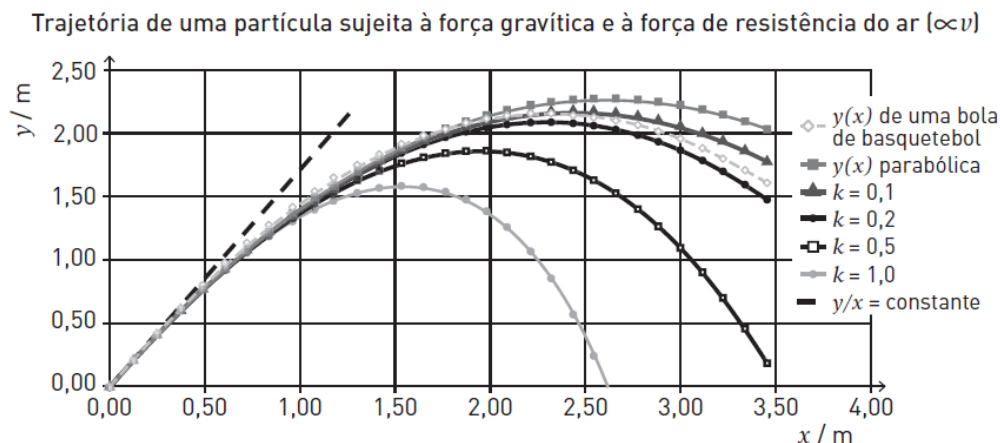


Gráfico 3 – Lançamento oblíquo de um corpo perto da superfície terrestre.

Uma inspeção rápida ao gráfico mostra claramente que uma bola de basquetebol, lançada por uma aluna em 2012, **não é parabólica**: a altura máxima atingida é cerca de 10 cm inferior e o alcance é cerca de 60 cm inferior a uma cota de 2,00 m relativamente à origem (mãos da aluna no ato do lançamento).

Globalmente verifica-se que quanto maior for a ação resistiva do ar mais a trajetória real do projétil se afasta do trajetória parabólica proposta por Galileu.

Conclusão

Galileu não resolveu o problema dos artilheiros na sua arte da guerra. Tartaglia tentou e também não conseguiu.

Galileu resolveu o problema do lançamento dos projéteis junto da superfície da Terra (campo gravítico constante) se a resistência do ar puder ser desprezável.

Se um professor ou um aluno lançar bolas de basquetebol, voleibol ou futebol não deve esperar que Galileu tenha razão.