

MACS

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

11.º ANO

Elisabete Longo • Isabel Branco
Atividades complementares Eduardo Cunha

Planificação e planos de aula	3
Guia de exploração de recursos multimédia	57
Resoluções – Manual	62
Resoluções – Caderno de Exercícios	190
Atividades complementares	232
Fichas de trabalho	245
Teste de diagnóstico	274
Questões de aula	279
Testes de avaliação	303
Testes-modelo de exame	327
Soluções	347

Introdução	2
Programa	3
Proposta de planificação	3
Tema 3 Modelos matemáticos	3
Tema 4 Modelos de probabilidade	24
Tema 5 Introdução à inferência estatística	43
Guia de exploração de recursos multimédia	57
Resoluções das atividades do Manual	62
Resoluções dos exercícios propostos do Caderno de Exercícios	190
Atividades complementares	232
Fichas de trabalho	245
Teste de diagnóstico	274
Questões de aula	279
Testes de avaliação	303
Testes-modelo de exame	327
Soluções	347
Fichas de trabalho	347
Teste de diagnóstico	351
Questões de aula	351
Testes de avaliação	354
Testes-modelo de exame	357
Bibliografia	358

Introdução

É indiscutível que, cada vez mais, um **Caderno de Apoio ao Professor** pode proporcionar ao docente um importante apoio na organização e na preparação das suas aulas. Fazendo parte integrante do projeto *MACS 11*, no qual também se incluem o Manual e o Caderno de Exercícios, colocamos aqui à disposição dos professores os seguintes materiais:

- Propostas de planificações de cada tema/capítulo, anual e aula a aula.
- Um conjunto de fichas de trabalho que poderão ser policopiadas e trabalhadas individualmente ou em grupo, na sala de aula ou como atividade extra-aula, para consolidação dos conteúdos (por exemplo, como trabalho de casa) ou até mesmo como elemento de avaliação.
- Propostas de resolução de todas as atividades e de todos os exercícios do Manual, bem como dos exercícios propostos do Caderno de Exercícios.
- Um teste diagnóstico, 20 questões de aula, seis testes com conteúdos limitados, de acordo com a ordem do Manual, as respetivas matrizes e ainda dois testes tipo exame.

O professor poderá ainda utilizar todos os materiais multimédia disponibilizados na **20 AULA DIGITAL**, entre os quais, animações, apresentações em *PowerPoint* e testes interativos.

Esperamos, deste modo, que este Caderno de Apoio ao Professor seja um suporte importante nas diversas tarefas de lecionação do professor.

As Autoras

Conteúdos programáticos

Dando continuidade ao Manual do 10.º ano, prosseguimos com o Tema 3 — Modelos Matemáticos —, agora com mais dois capítulos, seguido dos Temas 4 e 5:

- **Tema 3 — Modelos matemáticos**
 - Capítulo 2 — Modelos de grafos
 - Capítulo 3 — Modelos populacionais
- **Tema 4 — Modelos de probabilidade**
- **Tema 5 — Introdução à inferência estatística**

Proposta de planificação

Apresentamos, em seguida, uma proposta de planificação das aulas, com uma distribuição, para cada tema, ligeiramente diferente da do Programa, precedida de uma referência aos objetivos específicos de cada um. Estas planificações contemplam também aulas para atividades de consolidação e de avaliação. Relembramos que uma aula corresponde a 90 minutos.

Tema 3 — Modelos matemáticos

38 (23 + 15) aulas

Capítulo 2 — Modelos de grafos

23 aulas

Objetivos:

- Desenvolver competências para determinar o essencial de uma situação, de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição.
- Procurar modelos e esquemas que descrevam situações realistas de pequenas distribuições.
- Tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções de problemas de gestão.
- Encontrar estratégias passo a passo para obter possíveis soluções.
- Descobrir resultados gerais na abordagem de uma situação.
- Para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis.
- Encontrar algoritmos — decisões passo a passo para encontrar soluções satisfatórias.
- Discutir sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura das soluções ótimas.

Planificação do capítulo

Conteúdos	N.º de aulas
Teoria de grafos: conceitos básicos	2
Trajetos e circuitos eulerianos	3
Eulerização de grafos: problema do carteiro chinês	4
Circuitos hamiltonianos: problema do caixeiro-viajante	4
Coloração de grafos	4 + 1 (teste)
Árvores abrangentes mínimas	3
Caminhos críticos	2

Plano de aula n.º 1

Data ____/____/____

Conteúdos: Definição de grafo, notação e linguagem própria.

Palavras-chave: Grafo, vértices, arestas, grafo conexo, grafo orientado, grafo completo.

Sugestões de abordagem: Com base no exemplo 1 do Manual (pág. 8), definir os termos essenciais (grafo, vértices, arestas). As definições de grafo conexo, grafo orientado e grafo completo surgem naturalmente com base neste ou noutros exemplos simples. Sugere-se, depois, resolver o exemplo 2 (pág. 9). De seguida, os alunos discutem, em grupo, a atividade 1 do Manual (pág. 10) e analisam as diferentes soluções obtidas por cada grupo. Após a análise do exemplo 3 (pág. 11), resolvem também as atividades 2 e 3 (págs. 11–12). Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 1–4 (pág. 76)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 1 (pág. 14)
- *PowerPoint*: Introdução aos grafos

Plano de aula n.º 2

Data ____/____/____

Conteúdos: Representação de situações por meio de grafos.

Palavras-chave: Arestas, vértices, grafo completo.

Sugestões de abordagem: A partir do exemplo 4 do Manual (pág. 12), analisar a aplicação dos grafos aos labirintos para encontrar a saída. Sugere-se a resolução da atividade 4 do Manual (pág. 14, com animação disponível). De seguida, os alunos discutem, em grupo, a atividade 5 (pág. 14).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 5–7 (pág. 76)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 2–4 (pág. 14)
- Animação: Labirinto

Plano de aula n.º 3

Data ____/____/____

Conteúdos: Trajetos e circuitos eulerianos.

Palavras-chave: Grau de um vértice, passeio, trajeto, caminho, circuito.

Sugestões de abordagem: Enunciar o problema das pontes de Königsberg, ponto de partida para a teoria dos grafos. Traduzir esta situação por meio de um grafo e verificar que não tem solução. Relacionar esta situação com a noção de grau de um vértice. Resolver a atividade 1 do Manual (pág. 16). De seguida, os alunos discutem, em grupo, o exemplo 1 do Manual (pág. 17) e introduzem-se as noções de passeio, trajeto, caminho e circuito, aplicando estes conceitos ao exemplo 2 (pág. 17).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 8–9 (pág. 77)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 5 (pág. 14)

Plano de aula n.º 4

Data ____/____/____

Conteúdos: Trajetos e circuitos eulerianos.

Palavras-chave: Grau de um vértice, trajeto euleriano, circuito euleriano.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 1 (30 minutos).

Resolver a atividade 2 do Manual (pág. 18) e, na sequência, introduzir as noções de trajeto e de circuito euleriano, tirando conclusões (condições necessárias). De seguida, os alunos discutem, em grupo, a atividade 3 (pág. 19).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 10 (pág. 77)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 1

Plano de aula n.º 5

Data ____/____/____

Conteúdos: Trajetos e circuitos eulerianos.

Palavras-chave: Grau de um vértice, trajeto euleriano, circuito euleriano.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 3 do Manual (pág. 19), aplicando a representação com grafos a plantas de casas. De seguida, os alunos discutem, em grupo, as atividades 4 e 5 do Manual (págs. 20–21).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 11 (pág. 77)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 6–8 (págs. 14–15)

Plano de aula n.º 6

Data ____/____/____

Conteúdos: Problema do carteiro chinês (PCC).

Palavras-chave: Grau de um vértice, trajeto euleriano, circuito euleriano.

Sugestões de abordagem: Evidenciar este tipo de problemas a partir do exemplo 4 do Manual (pág. 22), analisando o processo de resolução. Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível. De seguida, os alunos resolvem, em grupo, as atividades 6 a 11 do Manual (págs. 24–27).

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 12–13 (pág. 77)
- *PowerPoint*: Problema do carteiro chinês

Plano de aula n.º 7

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Grau de um vértice, trajeto euleriano, circuito euleriano.

Sugestões de abordagem: Consolidar os conteúdos lecionados e esclarecer dúvidas.

Resolver a Ficha de trabalho 1.

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 14–16 (pág. 78)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 1

Plano de aula n.º 8

Data ____/____/____

Conteúdos: Eulerização de grafos.

Palavras-chave: Grau de um vértice, circuito euleriano, adicionar arestas.

Sugestões de abordagem: Retomar o problema das pontes de Königsberg, agora com uma nova situação, descrita no exemplo 5 do Manual (pág. 28), para chegar à noção de eulerização de um grafo e à forma correta de o fazer, com o exemplo 6 (pág. 29). De seguida, os alunos resolvem as atividades 12 a 14 (esta última tem animação disponível) do Manual (págs. 30–31) e a Ficha de trabalho 2.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 17 (pág. 78)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 12–15 (págs. 15–16)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 2
- Animação: Pontes cobertas

Plano de aula n.º 9

Data ____/____/____

Conteúdos: Eulerização de grafos.

Palavras-chave: Grau de um vértice, circuito euleriano, rede viária retangular.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 2 (20 minutos).

Analisar o exemplo 7 do Manual (pág. 32), em que se aplica a técnica descrita para eulerização de redes viárias retangulares. De seguida, os alunos resolvem as atividades 15 e 16 do Manual (pág. 33).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 18–20 (págs. 78–79)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 9–11 (pág. 15)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 2

Plano de aula n.º 10

Data ____/____/____

Conteúdos: Circuitos hamiltonianos.

Palavras-chave: Vértices, circuito hamiltoniano, grafo hamiltoniano.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 1 do Manual (pág. 34) e concluir que é possível encontrar percursos diferentes que cumprem o mesmo objetivo. Pode ser utilizada a apresentação em *PowerPoint* disponível.

Chegar às definições de circuito hamiltoniano e de grafo hamiltoniano. Analisar o exemplo 2 (pág. 36). De seguida, os alunos resolvem a atividade 1 do Manual (pág. 37) e depois, em grupo, as atividades 2 a 4 (págs. 38–39).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 21–26 (págs. 79–80)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 16 (pág. 16)
- *PowerPoint*: Circuitos hamiltonianos

Plano de aula n.º 11

Data ____/____/____

Conteúdos: Problema do caixeiro-viajante (PCV).

Palavras-chave: Pesos das arestas, grafo ponderado, circuito hamiltoniano, método das árvores.

Sugestões de abordagem: Integrar o PCV na procura de um circuito hamiltoniano. A introdução de pesos nas arestas surge da necessidade de obter percursos mínimos. Analisar a resolução do exemplo 3 do Manual (pág. 41). De seguida, os alunos resolvem, em grupo, a atividade 5 do Manual (pág. 44).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 27 (pág. 80)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 17–21 (págs. 16–17)

Plano de aula n.º 12

Data ____/____/____

Conteúdos: PCV — algoritmo dos mínimos sucessivos e algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

Palavras-chave: Vértices, arestas, pesos, grafo ponderado.

Sugestões de abordagem: Partindo do exemplo 4 do Manual (pág. 45), analisar passo a passo a aplicação do algoritmo dos mínimos sucessivos e, depois, a aplicação do algoritmo por ordenação dos pesos das arestas. Alternativamente, pode utilizar-se a apresentação disponível e só depois passar ao exemplo 4 do Manual. Resolver o exemplo 5 e a atividade 6 do Manual (págs. 47–48).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 28 (pág. 80)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 22–26 (págs. 17–18)
- *PowerPoint*: Problema do caixeiro-viajante

Plano de aula n.º 13

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Vértices, arestas, pesos, grafo ponderado.

Sugestões de abordagem: Resolver as atividades 7 a 10 do Manual (págs. 49–50) e a Ficha de trabalho 3, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 29–30 (pág. 81)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 27–32 (págs. 18–19)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 3

Plano de aula n.º 14

Data ____/____/____

Conteúdos: Coloração de grafos.

Palavras-chave: Arestas adjacentes, vértices adjacentes, número cromático.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 3 (30 minutos).

Sugere-se a utilização da primeira parte da animação disponível, até aparecer a imagem do mapa de Portugal.

Analisar os exemplos 6 e 7 do Manual (págs. 51–52) para chegar à noção de número cromático.

Analisar passo a passo a resolução do exemplo 8 (pág. 52) para determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa fictício. Passar depois à análise da resolução do exemplo 9 (pág. 54), de uma situação mais real. De seguida, os alunos resolvem, em grupo, a atividade 11 do Manual (pág. 55). Ainda em grupo, os alunos resolvem a atividade 12 (pág. 55). Pode, depois, visualizar-se a resolução na segunda parte da animação.

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 31 (pág. 81)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 3
- Animação: Teorema das 4 cores

Plano de aula n.º 15

Data ____/____/____

Conteúdos: Coloração de grafos.

Palavras-chave: Arestas adjacentes, vértices adjacentes, número cromático.

Sugestões de abordagem: Analisar a resolução do exemplo 10 do Manual (pág. 56). De seguida, resolver as atividades 13 e 14 do Manual (págs. 58–59).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 32 (pág. 81)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 33–34 (pág. 20)

Plano de aula n.º 16

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Grafo, vértices, arestas, grafo conexo, grafo orientado, grafo completo, grau de um vértice, passeio, trajeto, caminho, circuito, trajeto euleriano, circuito euleriano, adicionar arestas, pesos das arestas, grafo ponderado, circuito hamiltoniano, método das árvores, algoritmo dos mínimos sucessivos, algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, arestas adjacentes, vértices adjacentes, número cromático.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 4 (30 minutos).

Resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 1–8 (págs. 116–117)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 4

Plano de aula n.º 17

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Grafo, vértices, arestas, grafo conexo, grafo orientado, grafo completo, grau de um vértice, passeio, trajeto, caminho, circuito, trajeto euleriano, circuito euleriano, adicionar arestas, pesos das arestas, grafo ponderado, circuito hamiltoniano, método das árvores, algoritmo dos mínimos sucessivos, algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, arestas adjacentes, vértices adjacentes, número cromático.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 11–20 e 22 (págs. 118–124)
- Animação: Resolução do exercício 18 (pág. 121)

Plano de aula n.º 18

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 1.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 1 (com matriz)

Plano de aula n.º 19

Data ____/____/____

Conteúdos: Árvores.

Palavras-chave: Árvore, árvore abrangente.

Sugestões de abordagem: Partindo do exemplo da página 60 do Manual, chegar ao conceito de árvore e de árvore abrangente. Resolver os exercícios de aplicação indicados.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 33–34 (págs. 81–82)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 35–37 (pág. 20)

Plano de aula n.º 20

Data ____/____/____

Conteúdos: Árvores abrangentes mínimas — algoritmos de Kruskal e de Prim.

Palavras-chave: Árvore abrangente mínima, peso das arestas.

Sugestões de abordagem: Sugere-se a utilização da apresentação em *PowerPoint* disponível. Definir árvore abrangente mínima e aplicar o algoritmo de Kruskal analisando passo a passo a resolução do exemplo 1 do Manual (pág. 62).

Aplicar o algoritmo de Prim, com explicação das diferenças e semelhanças entre ambos os algoritmos, analisando passo a passo o exemplo 2 (pág. 63). De seguida, resolver a atividade 1 do Manual (pág. 64).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 37 (págs. 82–83)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 38–39 (pág. 21)
- *PowerPoint*: Árvores abrangentes

Plano de aula n.º 21

Data ____/____/____

Conteúdos: Árvores abrangentes mínimas — algoritmos de Kruskal e de Prim.

Palavras-chave: Árvore abrangente mínima, peso das arestas.

Sugestões de abordagem: Resolver as atividades 2 (com animação disponível) e 3 do Manual (pág. 65) e os exercícios de aplicação indicados.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 35–36 e 38–39 (págs. 82–83)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 40–44 (págs. 21–22)
- Animação: Complexo desportivo

Plano de aula n.º 22

Data ____/____/____

Conteúdos: Caminho crítico.

Palavras-chave: Digrafo, tarefas, precedências, caminho crítico, duração mínima.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 5 (20 minutos).

Sugere-se a visualização da apresentação em *PowerPoint* disponível.

Analisar o digrafo do exemplo da página 66 do Manual: interpretar, resumir a informação numa tabela e determinar o tempo mínimo para a realização de todas as tarefas. Analisar a resolução do exemplo 3 (pág. 68). De seguida, resolver as atividades 4 e 5 do Manual (pág. 69).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 40–41 (pág. 83)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 50 (pág. 25)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 5
- *PowerPoint*: Caminhos críticos

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Árvore, árvore abrangente, árvore abrangente mínima, peso das arestas, dígrafo, tarefas, precedências, caminho crítico, duração mínima.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios globais do Manual e a Ficha de trabalho 4, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 21 e 23 (págs. 123–124)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 45–49 (págs. 22–25)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 4

Capítulo 3 — Modelos populacionais

15 aulas

Objetivos:

- Familiarizar os alunos com modelos discretos de crescimento populacional.
- Comparar o crescimento linear com o crescimento exponencial através do estudo de progressões aritméticas e geométricas.
- Familiarizar os alunos com modelos contínuos de crescimento populacional.
- Comparar os crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico.

Planificação do capítulo

Conteúdos	N.º de aulas
Tipos de crescimento populacional e modelo de crescimento linear	1
Crescimento linear contínuo	1
Crescimento exponencial	5 + 1 (teste)
Crescimento logístico	3
Crescimento logarítmico	4

Plano de aula n.º 1

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelos populacionais. Modelo de crescimento linear.

Palavras-chave: Crescimento populacional positivo, crescimento populacional negativo, crescimento populacional discreto, crescimento populacional contínuo, progressão aritmética, modelo de crescimento linear.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 6 (20 minutos).

Na introdução deste capítulo, no Manual (pág. 84), faz-se referência a conceitos básicos de crescimento populacional, que poderão ser mais aprofundados com atividades de pesquisa. Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível para fazer a introdução ao capítulo.

Para iniciar o estudo do modelo de crescimento linear, sugere-se resolver o exemplo 1 (págs. 85–86) para chegar à noção de progressão aritmética e, daí, a um modelo de crescimento linear discreto. De seguida, resolver a atividade 1 do Manual (pág. 87), com animação disponível.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 1–5 (pág. 112)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 1–2 (pág. 36)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 6
- *PowerPoint*: Introdução aos modelos populacionais
- Animação: Juros simples

Plano de aula n.º 2

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento linear contínuo.

Palavras-chave: Gráfico de dispersão, reta de regressão, modelo de crescimento linear contínuo.

Sugestões de abordagem: Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível para compreensão do comportamento destes modelos e depois resolver o exemplo 2 do Manual (pág. 88) com particular destaque para o funcionamento e potencialidades da calculadora gráfica. De seguida, resolver a atividade 2 do Manual (pág. 90).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 11 (pág. 112)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 3–7 (págs. 36–37)
- *PowerPoint*: Modelo de crescimento linear

Plano de aula n.º 3

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento exponencial discreto.

Palavras-chave: Juro composto, progressão geométrica, modelo de crescimento exponencial.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 7 (20 minutos).

Analisar o exemplo do Manual sobre juro composto (pág. 91), situação familiar aos alunos por ter sido abordada no Capítulo 1 (Modelos Financeiros) deste Tema 3, no 10.º ano. De seguida, resolver as atividades 3 e 4 do Manual (pág. 92).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 6–10 e 12 (págs. 112–113)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 8–12 (pág. 37)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 7

Plano de aula n.º 4

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento exponencial contínuo.

Palavras-chave: Número de Euler, modelo de crescimento exponencial contínuo.

Sugestões de abordagem: Analisar a situação de juro composto do Manual (págs. 92–93) com o aumento do número de capitalizações anuais. Resolver o exemplo 3 (pág. 94), finalizando com a análise do gráfico obtido. De seguida, resolver a atividade 5 do Manual (pág. 95).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 13–17 (pág. 113)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 13–20 (págs. 37–38)

Plano de aula n.º 5

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento exponencial contínuo.

Palavras-chave: Malthus, modelo de crescimento exponencial contínuo, regressão exponencial.

Sugestões de abordagem: Há uma animação disponível com um pouco de História sobre Malthus e o seu modelo. Numa segunda parte, mais prática, pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível para compreensão do comportamento destes modelos e depois resolver o exemplo 4 do Manual (págs. 95–96) com particular destaque para o funcionamento e potencialidades da calculadora gráfica. De seguida, resolver as atividades 6 e 7 do Manual (pág. 97) e a Ficha de trabalho 5.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 18 (pág. 113)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 21–26 (págs. 38–40)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 5
- Animação: Modelo malthusiano
- *PowerPoint*: Modelo de crescimento exponencial

Plano de aula n.º 6

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelo de crescimento linear, modelo de crescimento exponencial, regressão linear, regressão exponencial.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 8 (30 minutos).
Resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 9–10 (pág. 117), 24–32 e 35 (págs. 124–126)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 8

Plano de aula n.º 7

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelo de crescimento linear, modelo de crescimento exponencial, regressão linear, regressão exponencial.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios globais do Manual e as Fichas de trabalho 6 e 7, como atividades de consolidação. Está disponível uma animação com a resolução do exercício 35 (pág. 126).

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 24–32 e 35 (págs. 124–126)
- Caderno de Apoio ao Professor: Fichas de trabalho 6 e 7
- Animação: Resolução do exercício 35 (pág. 126)

Plano de aula n.º 8

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 2.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 2 (com matriz)

Plano de aula n.º 9

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento logístico.

Palavras-chave: Malthus, Verhulst, modelo de crescimento logístico, características do gráfico.

Sugestões de abordagem: Há uma animação disponível com um pouco de história sobre Malthus e o seu modelo. Numa segunda parte, analisar a situação inicial apresentada no Manual (pág. 98) para elucidar a comparação entre o modelo malthusiano *versus* o modelo verhulstisiano. Analisar o exemplo 5 (págs. 98–100) e, a partir do gráfico, destacar as três fases distintas do crescimento logístico. De seguida, resolver a atividade 8 do Manual (pág. 101).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 19–20 (págs. 113–114)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 27–29 (págs. 40–41)
- Animação: Modelo verhulstisiano

Plano de aula n.º 10

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento logístico.

Palavras-chave: Modelo de crescimento logístico, regressão logística, características do gráfico.

Sugestões de abordagem: Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível para compreensão do comportamento destes modelos e depois resolver o exemplo 6 do Manual (págs. 101–103) com particular destaque para o funcionamento e potencialidades da calculadora gráfica. De seguida, resolver a atividade 9 do Manual (pág. 103).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 23–24 (págs. 115–116)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 30–33 (pág. 41)
- *PowerPoint*: Modelo de crescimento logístico

Plano de aula n.º 11

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelo de crescimento linear, modelo de crescimento exponencial, modelo de crescimento logístico.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios globais do Manual e a Ficha de trabalho 8, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 33 (pág. 126), 36–37 (págs. 127–128)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 8

Plano de aula n.º 12

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento logarítmico.

Palavras-chave: Logaritmo de um número positivo, modelo de crescimento logarítmico.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 9 (30 minutos).

Analisar o exemplo 7 do Manual (pág. 105) com uma aplicação do modelo de crescimento logarítmico a uma situação do dia a dia (este exemplo tem uma animação disponível). De seguida, resolver a atividade 10 do Manual (pág. 105).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 21, 25–26 (págs. 114–115)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 34, 36–38 (pág. 42)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 9
- Animação: Sismos

Plano de aula n.º 13

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo de crescimento logarítmico.

Palavras-chave: Modelo de crescimento logarítmico, regressão logarítmica.

Sugestões de abordagem: Pode utilizar-se a apresentação em *PowerPoint* disponível para compreensão do comportamento destes modelos e depois resolver o exemplo 8 do Manual (págs. 106–107) com particular destaque para o funcionamento e potencialidades da calculadora gráfica. De seguida, resolver a atividade 11 do Manual (pág. 107).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 22 (pág. 114)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 39–41 (págs. 42–43)
- *PowerPoint*: Modelo de crescimento logarítmico

Plano de aula n.º 14

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelo de crescimento linear, modelo de crescimento exponencial, modelo de crescimento logístico, modelo de crescimento logarítmico.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios globais do Manual e a Ficha de trabalho 9, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 34 (pág. 126)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 35 (pág. 42)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 9

Plano de aula n.º 15

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelo de crescimento linear, modelo de crescimento exponencial, modelo de crescimento logístico, modelo de crescimento logarítmico.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 10 (30 minutos).
Resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 38–40 (págs. 129–130)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 42–43 (pág. 44)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 10

Objetivos:

- Dar a entender aos alunos a diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório.
- Alertar para as vantagens de encontrar modelos matemáticos apropriados para este tipo de fenómenos.
- Construir modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio.
- Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir dos modelos construídos.
- Construir modelos de probabilidade para situações um pouco mais complexas utilizando a regra do produto.
- Apreender as propriedades básicas de uma função massa de probabilidade.
- Identificar acontecimentos em espaços finitos.
- Saber calcular as probabilidades de alguns acontecimentos utilizando propriedades da probabilidade.
- Fazer compreender a noção de probabilidade condicional através de exemplos simples.
- Mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias.
- Ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma árvore de probabilidades.
- Apresentar a definição de probabilidade condicional (tomando como base uma representação em diagrama de Venn de uma população classificada de forma cruzada segundo diversas categorias).
- Utilizar a definição de probabilidade condicional para formalizar a noção intuitiva de acontecimentos independentes.
- Apresentar a definição de acontecimentos independentes.
- Introduzir os alunos nas técnicas bayesianas.
- Fazer a distinção entre valor médio (ou média) populacional e média amostral e também, de modo idêntico, para a variância e outras características já referidas no estudo descritivo de amostras.
- Alargar a noção de população como um conceito subjacente a um modelo de probabilidade.
- Apresentar de forma justificada as fórmulas de cálculo do valor médio e da variância para modelos quantitativos de espaços de resultados finitos.
- Mostrar o interesse em adotar modelos com suporte não finito em situações onde o conjunto de resultados possíveis não seja conhecido na sua totalidade ou seja demasiado extenso.
- Calcular probabilidades de acontecimentos a partir de alguns modelos contínuos simples.
- Salientar a importância deste modelo referindo o teorema do limite central.
- Referir as principais características de um modelo normal ou gaussiano.
- Calcular probabilidades com base nesta família de modelos recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma normal *standard*.

Planificação do tema

Conteúdos	N.º de aulas
Fenómenos aleatórios	3
Operações com acontecimentos	1
Regra de Laplace	5
Definição axiomática de probabilidade	1
Probabilidade condicional	4
Acontecimentos independentes	1 + 1 (teste)
Probabilidade total. Regra de Bayes	4
Modelos de probabilidade	2
Valor médio e variância populacional	2
Modelos discretos	3
Modelos contínuos	3
Modelo normal	4 + 1 (teste)

Plano de aula n.º 1

Data ____/____/____

Conteúdos: Introdução histórica à teoria das probabilidades.

Palavras-chave: Probabilidades.

Sugestões de abordagem: O professor poderá sugerir aos alunos algum trabalho de pesquisa sobre a teoria das probabilidades antes desta aula. Com a discussão destes trabalhos, será mais simples a introdução dos conceitos já conhecidos dos alunos, do 9.º ano.

Na apresentação, deverá ser feita, pelo professor ou pelos alunos, uma referência em termos históricos ao início da teoria das probabilidades.

Para iniciar o estudo das probabilidades, sugere-se que os alunos resolvam, em grupo, as atividades 1 e 2 do Manual (pág. 137), seguindo-se uma discussão acerca dos resultados.

O professor poderá mostrar a animação da Aula Digital que explica e resolve a atividade 1.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Animação: Um problema do Cavaleiro de Méré

Plano de aula n.º 2

Data ____ / ____ / ____

Conteúdos: Fenómenos aleatórios.

Palavras-chave: Aleatório, determinístico, espaço amostral, acontecimento.

Sugestões de abordagem: Após a definição de experiência aleatória e determinística, pedir aos alunos exemplos destes dois tipos de fenómenos.

Relembrar os conceitos de espaço amostral e de acontecimento e dar exemplos de vários tipos de acontecimentos ligados a experiências aleatórias. Realizar as atividades 1 e 2 do Manual (pág. 140).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 1–4 (pág. 202)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 1–3 (pág. 62)

Plano de aula n.º 3

Data ____ / ____ / ____

Conteúdos: Fenómenos aleatórios.

Palavras-chave: Aleatório, determinístico, espaço amostral, acontecimento.

Sugestões de abordagem: Resolver a Questão de aula 11 (30 minutos).

Sugere-se que o professor mostre aos alunos a animação sobre fenómenos aleatórios. De seguida, os alunos resolvem os exercícios 1 e 2 dos exercícios globais do Manual (pág. 212).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 1–2 (pág. 212)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 11

Plano de aula n.º 4

Data ____/____/____

Conteúdos: Operações com acontecimentos.

Palavras-chave: Reunião, interseção, complementar, diferença entre conjuntos.

Sugestões de abordagem: Definir as operações com acontecimentos e a terminologia que lhes está associada.

Analisar o exemplo 3 do Manual (pág. 143) e resolver os respetivos exercícios, quer do Manual quer do Caderno de Exercícios.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 5–7 (pág. 202)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 4 (pág. 62)

Plano de aula n.º 5

Data ____/____/____

Conteúdos: Regra de Laplace.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória.

Sugestões de abordagem: A regra de Laplace já foi abordada no 3.º Ciclo, pelo que os alunos devem recordar-se. O professor poderá tirar proveito desta situação para apelar à participação dos alunos. Os exemplos 1, 2 e 3 do Manual (págs. 144–145) serão um bom ponto de partida para recordar esses conceitos. De seguida, os alunos deverão resolver as atividades 1 a 3 do Manual (pág. 146), para consolidar os conhecimentos.

Recursos: Manual, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 8–10 (págs. 202–203)

Plano de aula n.º 6

Data ____/____/____

Conteúdos: Regra de Laplace e processos de contagem.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, regra do produto.

Sugestões de abordagem: Através de exemplos, introduzir a regra do produto. De seguida, analisar os exemplos 4 a 7 do Manual (págs. 147–150) e resolver as atividades 4 a 7, para consolidar os conhecimentos.

Analisar a animação da Aula Digital acerca dos processos de contagem.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 11–14 (pág. 203)
- Animação: Processos de contagem

Plano de aula n.º 7

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas sobre os conteúdos lecionados e resolver exercícios, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 15–20 (págs. 203–204)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 5–14 (págs. 62–63)

Plano de aula n.º 8

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas sobre os conteúdos lecionados e resolver a Ficha de trabalho 10, como atividades de consolidação.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 10

Plano de aula n.º 9

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas sobre os conteúdos lecionados e resolver exercícios, como atividades de consolidação.

A aplicação em *Geogebra*, disponibilizada na Aula Digital, poderá ser utilizada para o cálculo de probabilidades.

Resolver a Questão de aula 12 (30 minutos).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 1–5 (pág. 212)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 12
- *Geogebra*: Jogar com os dados

Plano de aula n.º 10

Data ____/____/____

Conteúdos: Definição axiomática de probabilidade.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, axiomas, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos.

Sugestões de abordagem: Definir a probabilidade de um acontecimento usando a axiomática de Kolmogorov e, a partir daí, salientar as propriedades desta definição. Analisar o exemplo 8 do Manual (pág. 152) e resolver a atividade 9 (pág. 153), para consolidar os conhecimentos.

Recursos: Manual

- Exercícios do Manual: 21 (pág. 204)

Plano de aula n.º 11

Data ____/____/____

Conteúdos: Probabilidade condicional.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional.

Sugestões de abordagem: O exemplo 1 do Manual (pág. 154) é bastante elucidativo para a introdução do conceito de probabilidade condicional. De seguida, analisar os exemplos 2 e 3 (págs. 155–156) e alertar para o facto de ser relevante o uso de tabelas como auxílio à resolução dos exercícios.

Mostrar aos alunos a apresentação em *PowerPoint* sobre probabilidade condicional.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 22–25 (págs. 205–206)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 15 (pág. 63)
- *PowerPoint*: Probabilidade condicional

Plano de aula n.º 12

Data ____/____/____

Conteúdos: Probabilidade condicional.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional.

Sugestões de abordagem: Salientar a importância de usar outros meios auxiliares de contagem, como, por exemplo, os diagramas em árvore e os diagramas de Venn. Para isso, analisar os exemplos 4 a 6 do Manual (págs. 157–158) e resolver as atividades 1 a 3 (pág. 159), para consolidar os conhecimentos.

Recursos: Manual

- Exercícios do Manual: 26–30 (pág. 206)

Plano de aula n.º 13

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Resolver a Questão de aula 13 (30 minutos).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 6–9 (págs. 212–213)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 13

Plano de aula n.º 14

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual

- Exercícios do Manual: 10–14 (págs. 213–216)

Plano de aula n.º 15

Data ____/____/____

Conteúdos: Acontecimentos independentes.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional, acontecimentos independentes.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 7 do Manual (pág. 160) para introdução do conceito de acontecimentos independentes. De seguida, realizar a atividade 4 do Manual (pág. 161), para consolidação dos conhecimentos.

O professor poderá mostrar a animação sobre probabilidade condicional e acontecimentos independentes.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 31 (pág. 207)
- Animação: Probabilidade condicional

Plano de aula n.º 16

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 3.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 3 (com matriz)

Plano de aula n.º 17

Data ____/____/____

Conteúdos: Probabilidade total. Regra de Bayes.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional, acontecimentos independentes, probabilidade total, regra de Bayes.

Sugestões de abordagem: Os exemplos 1 e 2 do Manual (págs. 162–163) são um bom ponto de partida para a aplicação do teorema da probabilidade total. De seguida, sugere-se a análise dos exemplos 3 e 4 (págs. 164–165) para a aplicação da regra de Bayes.

Resolver, em grupo, a atividade 1 do Manual (pág. 165) sobre o problema de Monty Hall, com discussão em turma. Após a discussão da atividade, poderá ser analisada a aplicação em *Geogebra*.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 32–34 (pág. 207)
- *Geogebra*: Problema de Monty Hall

Plano de aula n.º 18

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional, acontecimentos independentes, probabilidade total, regra de Bayes.

Sugestões de abordagem: Resolver as atividades 2 e 3 do Manual (pág. 165), bem como os exercícios propostos do Manual e do Caderno de Exercícios.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios

- Exercícios do Manual: 35–37 (págs. 207–208)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 16 (pág. 63)

Plano de aula n.º 19

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional, acontecimentos independentes, probabilidade total, regra de Bayes.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios, como atividades de consolidação. Realizar a Ficha de trabalho 11.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 11

Plano de aula n.º 20

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos, experiência aleatória, reunião de acontecimentos, interseção de acontecimentos, probabilidade condicional, acontecimentos independentes, probabilidade total, regra de Bayes.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios, como atividades de consolidação. Resolver a Questão de aula 14 (30 minutos).

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 14

Plano de aula n.º 21

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelos de probabilidade em espaços finitos.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, acontecimentos, suporte do modelo, função massa de probabilidade.

Sugestões de abordagem: Salientar a importância de definir modelos de probabilidade. Para isso, sugere-se que sejam analisados os exemplos 1 e 2 do Manual (págs. 166–167) e que se resolva a atividade 1 (pág. 167), para consolidação dos conhecimentos. Os exemplos 3 a 7 (págs. 168–171) devem também ser analisados e realizadas as atividades 2 a 4 (pág. 171), para discussão e consolidação.

A animação sobre função massa de probabilidade será interessante para os alunos.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 38–39 (págs. 208–209)
- Animação: Função massa de probabilidade

Plano de aula n.º 22

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, acontecimentos, suporte do modelo, função massa de probabilidade.

Sugestões de abordagem: Resolver exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios, como atividades de consolidação. Poderá ser usada a apresentação em *PowerPoint* sobre distribuição de probabilidade.

Resolver a Questão de aula 15 (30 minutos).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 40–42 (pág. 209)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 17 (pág. 63)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 15
- *PowerPoint*: Distribuição de probabilidade

Plano de aula n.º 23

Data ____/____/____

Conteúdos: Valor médio e variância populacional.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades.

Sugestões de abordagem: Deverá ser feita uma breve revisão dos conceitos lecionados em estatística, no ano anterior, já que serão necessários neste tema. O exemplo 1 do Manual (págs. 172–173) servirá como revisão desses conceitos. Dever-se-ão também relembrar os procedimentos a realizar na calculadora para o cálculo destas medidas.

De seguida, analisar o exemplo 2 do Manual (pág. 175) e resolver a atividade 1 (pág. 175). Poder-se-á mostrar a animação para resolução desta atividade.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 43–44 (pág. 209)
- Animação: Resolução da atividade 1 (pág. 175)

Plano de aula n.º 24

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Poderá usar-se a apresentação em *PowerPoint* sobre valor médio e variância populacional, que contém exemplos.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 15–16 (pág. 217)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 18–19 (pág. 64)
- *PowerPoint*: Valor médio e variância populacional

Plano de aula n.º 25

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelos discretos: modelo de Poisson.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, modelo de Poisson, valor médio, variância, desvio-padrão.

Sugestões de abordagem: Os exemplos 1 e 2 do Manual (págs. 177–179) são elucidativos da aplicação do modelo de Poisson. Resolver a atividade 1 do Manual (pág. 179) e os exercícios propostos e globais, como consolidação dos conhecimentos.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 45–46 (pág. 209) e 17 (pág. 217)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 20–22 (pág. 64)

Plano de aula n.º 26

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelos discretos: modelo geométrico e modelo binomial.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, modelo geométrico, valor médio, variância, desvio-padrão.

Sugestões de abordagem: O exemplo 3 do Manual (págs. 180–181) é elucidativo da aplicação do modelo geométrico. De seguida, resolver a atividade 2 do Manual (pág. 181), como consolidação dos conhecimentos.

Analisar o exemplo 4 (pág. 182) sobre a aplicação do modelo binomial. De seguida, resolver a atividade 3 (pág. 182), para consolidação dos conhecimentos.

Resolver exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 47–49 (pág. 210)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 23–24 (pág. 64)

Plano de aula n.º 27

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios do Manual, como atividades de consolidação.

Para revisão dos modelos discretos, pode usar-se a apresentação em *PowerPoint* sobre este conteúdo.

Realizar a Questão de aula 16 (20 minutos).

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 16
- *PowerPoint*: Modelos discretos

Plano de aula n.º 28

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelos contínuos: modelo uniforme e modelo exponencial.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, modelo uniforme, modelo exponencial, valor médio, variância, desvio-padrão.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 5 do Manual (págs. 184–185) sobre a aplicação do modelo uniforme. Resolver, de seguida, as atividades 4 e 5 do Manual (pág. 186), como consolidação dos conhecimentos.

Analisar o exemplo 6 (págs. 187–188) sobre a aplicação do modelo exponencial. Depois, resolver a atividade 6 (pág. 188), para consolidação dos conhecimentos. Esta atividade está resolvida passo a passo na animação disponibilizada.

Resolver exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 50–53 (pág. 210) e 18–19 (pág. 217)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 25–30 (pág. 65)
- Animação: Resolução da atividade 6 (pág. 188)

Plano de aula n.º 29

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades, modelos de probabilidade, modelo uniforme, modelo exponencial.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios do Manual, como atividades de consolidação.

Para revisão dos modelos contínuos, pode usar-se a apresentação em *PowerPoint* sobre este conteúdo.

Realizar a Questão de aula 17 (20 minutos).

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 17
- *PowerPoint*: Modelos contínuos

Plano de aula n.º 30

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades, modelos de probabilidade, modelo uniforme, modelo exponencial.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios, como atividades de consolidação.

Resolver a Ficha de trabalho 12.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 12

Plano de aula n.º 31

Data ____/____/____

Conteúdos: Modelo normal.

Palavras-chave: Modelos de probabilidade, valor médio, variância, desvio-padrão, modelo normal.

Sugestões de abordagem: Antes de iniciar o estudo do modelo normal, deverá ser feita uma revisão sobre a distribuição normal lecionada no ano anterior, no capítulo da estatística.

O exemplo 1 do Manual (pág. 191) é elucidativo da aplicação deste modelo. Analisar também os exemplos 2 e 3 (págs. 194–195), pois são bons pontos de partida para a aplicação da distribuição normal *standard*.

Realizar as atividades 1 e 2 do Manual (pág. 195), para consolidação dos conhecimentos. A atividade 1 encontra-se resolvida passo a passo numa animação.

Poderá ainda usar-se a apresentação em *PowerPoint* sobre distribuição normal para sistematização deste conteúdo.

Recursos: Manual, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 54–55 (págs. 210–211)
- Animação: Resolução da atividade 1 (pág. 195)
- *PowerPoint*: Distribuição normal

Plano de aula n.º 32

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades, modelos de probabilidade, modelo normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios, como atividades de consolidação.

Resolver a Ficha de trabalho 13.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 55–58 (pág. 211)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 31–35 (págs. 65–66)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 13

Plano de aula n.º 33

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades, modelos de probabilidade, modelo normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver a Questão de aula 18, como atividades de consolidação. Usar o *Geogebra* disponível.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor, Aula Digital

- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 18
- *Geogebra*: Distribuição normal

Plano de aula n.º 34

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Valor médio, média, variância, desvio-padrão, distribuição de probabilidades, modelos de probabilidade, modelo normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver o teste final do Tema 4 do Manual (págs. 218–219), como atividades de consolidação.

Recursos: Manual

- Exercícios do Manual: Teste final do Tema 4 (págs. 218–219)

Plano de aula n.º 35

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 4.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 4 (com matriz)

Objetivos:

- Apresentar as ideias básicas de um tipo de raciocínio com que os alunos são confrontados pela primeira vez, em que, a partir das propriedades estudadas num conjunto de dados, se procurarão tirar conclusões para um conjunto de dados mais vasto.
- Apresentar as ideias básicas de um processo de inferência estatística, em que se usam estatísticas para tomar decisões acerca de parâmetros.
- Mostrar toda a potencialidade da estatística, que nos permite tirar conclusões e tomar decisões, indo do particular para o geral, quantificando o erro cometido nessas decisões.

Planificação do tema

Conteúdos	N.º de aulas
Métodos de amostragem	2
Parâmetro e estatística	1
Distribuição de amostragem de uma estatística	3
Teorema do limite central	3 + 1 (teste)
Intervalos de confiança para o valor médio	4
Estimativa pontual da proporção	1
Intervalos de confiança para a proporção	5
Interpretação do conceito de intervalo de confiança	4 + 1 (teste)

Plano de aula n.º 1

Data ____ / ____ / ____

Conteúdos: Métodos de amostragem.**Palavras-chave:** Inferência estatística, população, amostra, dimensão, amostra enviesada, métodos de amostragem probabilística, métodos de amostragem não probabilística.**Sugestões de abordagem:** Sugere-se a visualização da animação disponível como introdução à inferência estatística. Relembrar conceitos de anos anteriores e realçar a importância da escolha da amostra: os exemplos 1 a 3 do Manual (pág. 223) são bastante elucidativos, e os alunos podem sugerir/pesquisar outros. A análise dos exemplos 4 a 6 (pág. 224) alerta para más escolhas de amostras. Distinguir entre métodos de amostragem aleatória e não aleatória: exemplos e pesquisa.**Recursos:** Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 1, 3–5 (pág. 266)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 1 (pág. 72)
- Animação: Introdução à inferência estatística

Plano de aula n.º 2

Data ____/____/____

Conteúdos: Métodos de amostragem probabilística.

Palavras-chave: Inferência estatística, população, amostra, dimensão, amostra enviesada, métodos de amostragem probabilística.

Sugestões de abordagem: Distinguir os tipos de amostragem probabilística com recurso aos exemplos 7 a 9 do Manual (págs. 225–226), antes ou depois da visualização da apresentação em *PowerPoint* disponível. De seguida, discutir, em grupo, as atividades 1 a 4 (págs. 225–227).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 2 (pág. 266)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 2 (pág. 72)
- *PowerPoint*: Métodos de amostragem probabilística

Plano de aula n.º 3

Data ____/____/____

Conteúdos: Parâmetro e estatística. Estimativa pontual.

Palavras-chave: Estatística, parâmetro, estimar, estimador, inferir, estimativa pontual.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 1 do Manual (pág. 228), que leva à distinção entre parâmetro e estatística. De seguida, discutir, em grupo, a atividade 1 (pág. 229), com animação de resolução disponível. Pretende-se que, com isto, seja simples concluir porque estimamos parâmetros.

Após a análise do exemplo 2 do Manual (pág. 230), resolver, em grupo, a atividade 2 (pág. 230).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 6–9 (págs. 266–267)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 3–4 (pág. 72)
- Animação: Resolução da atividade 1 (pág. 229)

Plano de aula n.º 4

Data ____/____/____

Conteúdos: Distribuição de amostragem de uma estatística.

Palavras-chave: Estimador, distribuição de amostragem de um estimador, estimação de um valor médio.

Sugestões de abordagem: Sendo um estimador uma variável aleatória e tendo os alunos estudado distribuições de probabilidades no Tema 4, rapidamente chegam à definição de distribuição de amostragem de um estimador. Para perceberem o que é estimar o valor médio, sugere-se a análise, passo a passo, da resolução do exemplo 1 do Manual (págs. 232–235). De seguida, os alunos resolvem a atividade 1 (pág. 236).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 10 (pág. 267)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 5 (pág. 72)

Plano de aula n.º 5

Data ____/____/____

Conteúdos: Distribuição de amostragem de uma estatística.

Palavras-chave: Estimador, distribuição de amostragem de um estimador, estimação de um valor médio, dimensão da amostra, variabilidade das estimativas.

Sugestões de abordagem: Analisar, passo a passo, a resolução do exemplo 2 do Manual (págs. 237–239). De seguida, resolver, em grupo, a atividade 2 (pág. 239).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 12 (pág. 267)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 7 (pág. 72)

Plano de aula n.º 6

Data ____/____/____

Conteúdos: Distribuição de amostragem de uma estatística.

Palavras-chave: Estimador, distribuição de amostragem de um estimador, estimação de um valor médio, dimensão da amostra, variabilidade das estimativas.

Sugestões de abordagem: Resolver, em grupo, exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios, aproveitando para rever conceitos de probabilidades e estatística, bem como tirar partido das potencialidades da calculadora.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 11 (pág. 267)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 6 (pág. 72)

Plano de aula n.º 7

Data ____/____/____

Conteúdos: Teorema do limite central.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Analisar, passo a passo, a resolução dos exemplos 1 a 3 do Manual (págs. 241–243). De seguida, resolver, em grupo, as atividades 1 e 2 do Manual (pág. 244).

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 13 (pág. 267)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 8–10 (págs. 72–73)

Plano de aula n.º 8

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Resolver exercícios do Manual e iniciar a resolução da Ficha de trabalho 14, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: 14–15 (pág. 267)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 14

Plano de aula n.º 9

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal. (Conceitos do Tema 3 — revisão de modelos de grafos e modelos populacionais.)

Sugestões de abordagem: Concluir a resolução da Ficha de trabalho 14 e resolver o teste final do Tema 3, para revisão de conteúdos.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Manual: teste final do Tema 3 (págs. 132–133)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 14

Plano de aula n.º 10

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 5.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 5 (com matriz)

Plano de aula n.º 11

Data ____/____/____

Conteúdos: Intervalos de confiança para o valor médio.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, confiança, margem de erro, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: O professor poderá mostrar aos alunos que nem sempre é possível ou oportuno fazer-se uma estimativa pontual. Daí o estudo dos intervalos de confiança.

Sugere-se que seja feita a dedução da forma geral para um intervalo de 90% de confiança para o valor médio, seguindo o processo descrito no Manual. Os alunos devem analisar a resolução do exemplo 1 (págs. 246–247) e, de seguida, resolver as atividades 1 e 2 (pág. 247). A atividade 1 encontra-se resolvida, passo a passo, numa animação.

Sugere-se que seja seguido o mesmo processo para os intervalos de confiança de 95% e 99%: começar pela dedução da forma geral de um intervalo de confiança para o valor médio, analisar os exemplos 2 e 3 do Manual (págs. 248–249) e resolver as respetivas atividades (págs. 248–249).

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 16–21 (págs. 267–268)
- Animação: Resolução da actividade 1 (pág. 247)

Plano de aula n.º 12

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, confiança, margem de erro, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios propostos do Manual.

Recursos: Manual, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 22–26 (págs. 268–269)

Plano de aula n.º 13

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, confiança, margem de erro, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Resolver os exercícios do Caderno de Exercícios e a Ficha de trabalho 15 (exercícios 1–4).

Recursos: Caderno de Exercícios, calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Exercícios do Caderno de Exercícios: 11 (pág. 73)
- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 15 (exercícios 1–4)

Plano de aula n.º 14

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios, como atividades de consolidação.

Resolver a Questão de aula 19 (30 minutos).

Recursos: Calculadora gráfica, Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 19

Plano de aula n.º 15

Data ____/____/____

Conteúdos: Estimativa pontual da proporção.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da proporção, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal, proporção.

Sugestões de abordagem: Analisar o exemplo 1 do Manual (pág. 250) e resolver a atividade 1 (pág. 252).

De seguida, resolver as atividades 2 e 3 (pág. 253), para consolidação dos conteúdos.

Resolver os exercícios propostos do Manual.

Recursos: Manual, Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 27–31 (pág. 269)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 12 (pág. 73)

Plano de aula n.º 16

Data ____/____/____

Conteúdos: Intervalos de confiança para a proporção.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da proporção, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal, proporção, intervalos de confiança.

Sugestões de abordagem: Sugere-se que seja feita a dedução da forma geral para intervalos de 90%, de 95% e de 99% de confiança para a proporção. Analisar a resolução dos exemplos 1 a 3 (págs. 254–255) e, de seguida, resolver as atividades 1 a 3 (pág. 256). A atividade 1 encontra-se resolvida, passo a passo, numa animação.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 32–35 (págs. 269–270)
- Animação: Resolução da atividade 1 (pág. 256)

Plano de aula n.º 17

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da média, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios do Caderno de Exercícios, como atividades de consolidação.

Recursos: Caderno de Exercícios, calculadora gráfica

- Exercícios do Caderno de Exercícios: 13–16 (pág. 73)

Plano de aula n.º 18

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, proporção, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver a Ficha de trabalho 16 (exercícios 1–4), como atividades de consolidação.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

- Caderno de Apoio ao Professor: Ficha de trabalho 16 (exercícios 1–4)

Plano de aula n.º 19

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, proporção, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Recursos: Manual, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 1–4 (págs. 271–273)

Plano de aula n.º 20

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, proporção, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver os exercícios globais do Manual, como atividades de consolidação.

Pode usar-se a apresentação em *PowerPoint* sobre intervalos de confiança com o resumo deste conteúdo.

Recursos: Manual, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 5–7 (págs. 273–276)
- *PowerPoint*: Intervalos de confiança

Plano de aula n.º 21

Data ____/____/____

Conteúdos: Interpretação do conceito de intervalo de confiança.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, distribuição de amostragem da proporção, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal, proporção, intervalos de confiança.

Sugestões de abordagem: Este ponto serve como sistematização dos intervalos de confiança. O professor pode pedir aos alunos que encontrem notícias em jornais ou revistas com estimativas e intervalos de confiança para o valor médio e para a proporção, que poderão ser apresentados e interpretados em aula. A análise dos exemplos 1 e 2 do Manual (págs. 257–258) poderá também servir como ponto de partida.

Resolver, de seguida, as atividades 1 e 2 do Manual (pág. 257), para consolidação.

Poderá recorrer à apresentação em *PowerPoint* sobre interpretação do intervalo de confiança com exemplos e definições.

Recursos: Aula Digital

- *PowerPoint*: Interpretação do conceito de intervalo de confiança

Plano de aula n.º 22

Data ____/____/____

Conteúdos: Interpretação do conceito de intervalo de confiança. Qualidade da amostra. Grau de confiança e dimensão da amostra.

Palavras-chave: Confiança, margem de erro, valor médio, proporção, estimativa, estimador.

Sugestões de abordagem: A interpretação do que é um intervalo de confiança nem sempre é feita de um modo correto. Sugere-se que seja analisado o diálogo que se encontra de seguida.

Suponhamos que um candidato à Câmara de Lisboa, o Dr. Gentil Alves, pretendia saber qual a percentagem, p , de eleitores (lisboetas que pensavam votar nele).

Encomendou um estudo à empresa Sondagem, tendo esta questionado 785 lisboetas, escolhidos aleatoriamente, e verificado que a percentagem destes eleitores que pensavam voltar no candidato era de 56%. Se este valor dava um certo alento ao Dr. Gentil Alves para se candidatar, não o deixava, no entanto, descansado. Ele sabia que, se fosse recolhida outra amostra, embora da mesma dimensão, quase de certeza obteria outro valor como estimativa de p e quem é que lhe garantia que não era um valor inferior a 50%, o que o deixaria infelicíssimo. Como interpretar este valor de 56%? O Prof. Amável, um amigo estatístico do Dr. Gentil Alves, ajudou-o nesta tarefa. Relatamos a seguir a conversa que se passou entre ambos.

Dr. Gentil Alves — Bom dia, Amável. Estás bem? Olha, ando um pouco preocupado com esta questão da candidatura à Câmara de Lisboa. Numa sondagem realizada ontem, deram-me uma percentagem de 56% de eleitores a votarem em mim. Mas com que confiança é que eu posso interpretar este resultado? Posso estar seguro de que tenho a maioria?

Prof. Amável — Para te ser franco, a confiança que podes ter nesse resultado é nula. Tu próprio sabes que, se tivessem sido outros eleitores escolhidos para a sondagem, quase certamente não obterias 56%. Mas não fiques muito preocupado, pois eu vou adiantar-te mais alguma coisa. O valor de 56% vai servir-me para obter um intervalo de 95% de confiança. Deixa-me fazer aqui umas contas que já te telefono.

Dr. Gentil Alves — Está bem. Muito obrigado.

Prof. Amável — Cá estou eu novamente. Com esse valor que me adiantaste, construí o intervalo $]52,5\%; 59,5\%]$, que é um intervalo de 95% de confiança para a percentagem de lisboetas que pensam voltar em ti. Estás contente?

Dr. Gentil Alves — Significa isso que existe uma probabilidade de 95% de esse intervalo conter essa percentagem (p) de eleitores que pensam votar em mim?

Prof. Amável — Nada disso!

Dr. Gentil Alves — Então 95% é a probabilidade de p estar contido no intervalo?

Prof. Amável — Que horror! Porventura o p é uma variável aleatória? Nem o p nem o intervalo que te dei. Assim, não podemos falar na probabilidade de o p estar contido no intervalo, nem de o intervalo conter o p . Os 95% de confiança significam o seguinte: o processo que se utiliza para calcular os intervalos, como o que te apresentei, é um processo tal, que, se o utilizasse com todas as amostras possíveis (da mesma dimensão) que posso selecionar da população, cerca de 95% das vezes produziria intervalos que contêm o p e cerca de 5% das vezes intervalos que não o contêm. No que diz respeito a um intervalo particular, como o que te dei, ficaremos sempre na dúvida se é um dos que contêm p ou não. Temos «fé» que sim, pois era preciso ter «azar» irmos obter um dos poucos intervalos que não contêm p .

Dr. Gentil Alves — Muito bem. Compreendi o que disseste, mas então porque é que não construo intervalos com, por exemplo, 99% de confiança? Assim, só 1% dos intervalos possíveis de construir é que não conteriam o p , não é verdade?

Prof. Amável — Muito bem observado! Mas nunca ouviste dizer que «sem ovos não se fazem omeletas» ou que «não há almoços grátis»? Pois é! A contrapartida para, com a mesma dimensão da amostra, termos intervalos de 99% de confiança é que a margem de erro vem maior, isto é, vamos ter intervalos com maior amplitude, o que significa uma menor precisão. Em último caso, construiríamos intervalos com uma confiança de 100%. Sabes ao que chegávamos? A R ! Não tens nenhuma dúvida de que o intervalo está em R , pois não? Não nos adianta é nada! Já agora, com o valor de 56% obtido na amostra que a Sondagem recolheu, um intervalo de 99% de confiança seria $]51,4\%; 60,6\%]$. Assim, enquanto com o primeiro intervalo temos uma margem de erro de 3,5%, agora a margem de erro passou para 4,5%. Ficaste esclarecido?

Dr. Gentil Alves — Penso que sim. Só mais uma questão. Haveria algum processo de, com a confiança de 99%, obter um intervalo com a margem de erro que obtive para o intervalo de 95% de confiança?

Prof. Amável — Mais uma vez, estás a colocar uma questão interessante. Efetivamente, podemos, mantendo a confiança, diminuir a margem de erro, agora à custa de recolhermos uma amostra de maior dimensão. Nada se faz sem custos, como estás a ver. Por exemplo, admitindo que a percentagem de lisboetas que pensam votar em ti não se alteraria muito se se recolhesse uma amostra de maior dimensão, então teria de

ser recolhida uma amostra de 1335 lisboetas, em vez de 785 (estou a considerar que a proporção de votos a teu favor, obtida ao questionar os 1335 lisboetas, é aproximadamente 56%).

Dr. Gentil Alves — Muito obrigado por estes esclarecimentos. Vou mesmo avançar com a minha candidatura.

Passados oito dias, realizaram-se as eleições. O Dr. Gentil Alves é o novo presidente da Câmara de Lisboa.

Adaptado do texto de Maria Eugénia Graça Martins, DEIO, FCUL

É importante salientar que a qualidade das estimativas depende de três fatores fundamentais: a qualidade da amostra, a dimensão da amostra e o grau de confiança.

Para mostrar o cuidado a ter na escolha da amostra, deverá analisar-se o exemplo 2 do Manual (pág. 258).

Relativamente à dimensão da amostra, deve analisar-se o exemplo 3 (pág. 259), que mostra como calcular a dimensão de uma amostra para se obter um intervalo de confiança para o valor médio com um determinado grau de confiança e margem de erro. Depois, resolver a atividade 3 do Manual (pág. 259), como consolidação.

Deverá, ainda, analisar-se o exemplo 4 (pág. 260) e resolver a atividade 4 (pág. 260).

Recursos: Manual, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: 36–37 (pág. 270)

Plano de aula n.º 23

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, proporção, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal, intervalos de confiança.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver exercícios do Manual, como consolidação.

Pode usar-se a apresentação em *PowerPoint* com o resumo dos intervalos de confiança.

Resolver a Ficha de trabalho 15 (exercícios 5–7) e a Ficha de trabalho 16 (exercícios 5–7).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor, calculadora gráfica, Aula Digital

- Exercícios do Manual: 38–41 (pág. 270) e 8–9 (pág. 277)
- Exercícios do Caderno de Exercícios: 17–18 (pág. 73)
- Caderno de Apoio ao Professor: Fichas de trabalho 15 e 16
- *PowerPoint*: Intervalos de confiança

Plano de aula n.º 24

Data ____/____/____

Conteúdos: Atividades de consolidação.

Palavras-chave: Estimador, estimativa, proporção, valor médio, desvio-padrão, teorema do limite central, erro-padrão, distribuição normal, intervalos de confiança.

Sugestões de abordagem: Esclarecer dúvidas e resolver o teste final do Tema 5, como consolidação. Resolver a Questão de aula 20 (30 minutos).

Recursos: Manual, Caderno de Apoio ao Professor, calculadora gráfica

- Exercícios do Manual: Teste final do Tema 5 (pág. 278)
- Caderno de Apoio ao Professor: Questão de aula 20

Plano de aula n.º 25

Data ____/____/____

Conteúdos: Teste de avaliação escrito.

Sugestões de abordagem: Aplicar o Teste de avaliação 6.

Recursos: Caderno de Apoio ao Professor

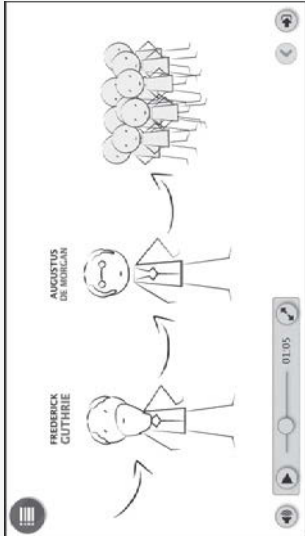
- Caderno de Apoio ao Professor: Teste de avaliação 6 (com matriz)

20 AULA DIGITAL MACS 11

20 AULA DIGITAL é uma ferramenta que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto **MACS 11** através das novas tecnologias. Permite o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia associados ao Manual:

- animações;
- animações de resoluções de exercícios por etapas;
- apresentações em *PowerPoint*®;
- resoluções projetáveis de exercícios;
- simuladores (*Geogebra*®);
- *links* de internet para vídeos.

Este documento constitui uma proposta de exploração dos conteúdos multimédia presentes no Manual. Apresenta, igualmente, a listagem de todos os recursos, ordenados por páginas, que estarão disponíveis com o projeto em **20 AULA DIGITAL**.

Listagem geral dos recursos multimédia de MACS 11		
Recurso	Sugestões de exploração	
Animações 	Sugere-se que quando se projetarem as animações, em sala de aula, se clique no <i>Pause</i> sempre que se achar pertinente, nomeadamente para aprofundar informação ou esclarecer dúvidas. Opção 1 • Apresentar as animações para introduzir novos conceitos, como elemento motivacional. Opção 2 • Apresentar as animações como elemento de consolidação de conteúdos.	

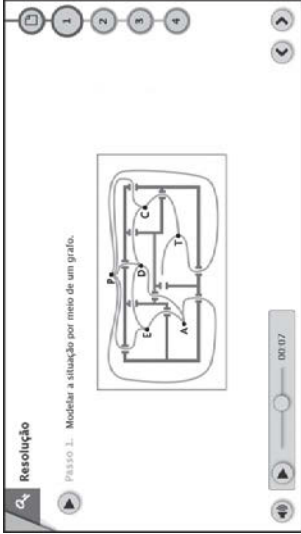
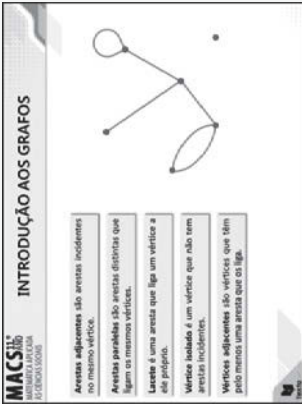
Recursos que abordam os principais conteúdos de forma expositiva. Alguns exploram **diferentes atividades do Manual**, explicando os conteúdos de um modo apelativo. A utilização das animações em sala de aula permite otimizar o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que associam o conteúdo textual a uma representação gráfica animada.

Recursos que abordam os principais conteúdos de forma expositiva. Alguns exploram **diferentes atividades do Manual**, explicando os conteúdos de um modo apelativo. A utilização das animações em sala de aula permite otimizar o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que associam o conteúdo textual a uma representação gráfica animada.Sugere-se que quando se projetarem as animações, em sala de aula, se clique no *Pause* sempre que se achar pertinente, nomeadamente para aprofundar informação ou esclarecer dúvidas.**Opção 1**

- Apresentar as animações para introduzir novos conceitos, como elemento motivacional.

Opção 2

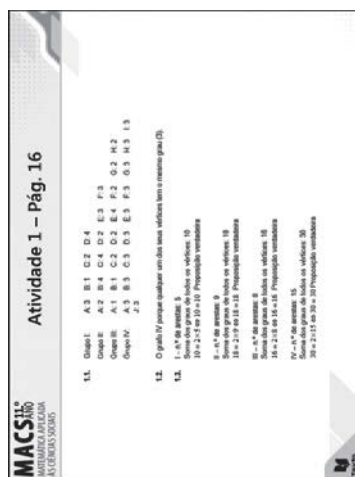
- Apresentar as animações como elemento de consolidação de conteúdos.

Recurso		Sugestões de exploração
 Animações (Resoluções de exercícios por etapas)		
		Opção 1 • Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno em sala de aula. • Apresentar a resolução do exercício, explorando cada uma das etapas que compõem a animação. Opção 2 • Apresentar o enunciado. • Apresentar cada uma das etapas, propondo que os alunos vão executando a respetiva tarefa. O professor só passa para a etapa seguinte quando a turma terminar a etapa em curso. Opção 3 • Apresentar o enunciado. • Explorar cada uma das etapas com os alunos. Para assegurar a máxima concentração dos alunos, estes devem focar-se em cada uma das etapas, debatendo-a oralmente. • Apresentar a resolução da etapa.
Recursos que apresentam as resoluções, por etapas, de alguns exercícios do Manual de diferentes níveis de dificuldade. São compostos por diversas secções. A primeira apresenta o enunciado do exercício e as restantes apresentam as diferentes etapas da resolução. Estes recursos permitem uma exploração interativa dos exercícios, rentabilizando o tempo em sala de aula.		
Apresentações em PowerPoint® 		Apresentar os <i>slides</i> de <i>PowerPoint®</i> seguindo a ordem dos mesmos, uma vez que estão estruturados de acordo com o Manual. Opção 1 • Apresentar os <i>slides</i> de <i>PowerPoint®</i> como base de trabalho para exploração de conteúdos. Opção 2 • Apresentar os <i>slides</i> de <i>PowerPoint®</i> como apoio a pontos de situação intermédios. Opção 3 • Apresentar os <i>slides</i> de <i>PowerPoint®</i> como ferramenta de síntese que antecede a avaliação.
Recursos com os conteúdos editáveis, abordados de uma forma sintética e esquemática. Incluem exemplos que facilitam a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos.		

Recurso

Sugestões de exploração

Resoluções projetáveis de exercícios



Opção 1

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno em sala de aula.
- Projetar a resolução do exercício em sala de aula.

Opção 2

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno como trabalho de casa.
- Projetar a resolução do exercício em sala de aula.

Opção 3

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno como trabalho de casa.
- Enviar a resolução do exercício aos alunos por *email* para que eles o corrijam.

Resoluções projetáveis de todos os exercícios e atividades do Manual, agrupadas por capítulo.

Simuladores (Geogebra®)



Opção 1

- Explorar o simulador com os alunos, propondo que manipulem o simulador mediante um objetivo proposto pelo professor.

Opção 2

- Explorar o simulador com os alunos, manipulando o simulador e debatendo oralmente cada passo.

Recursos interativos que permitem uma exploração dinâmica de conteúdos de probabilidades e estatística.

Recurso	Sugestões de exploração
<i>Links de internet para vídeos</i>  Recursos que abordam conteúdos programáticos de forma divertida e entusiástica.	Sugere-se que quando se projetarem os vídeos, em sala de aula, se clique no <i>Pause</i> sempre que se achar pertinente, nomeadamente para aprofundar informação ou esclarecer dúvidas. Opção 1 • Apresentar os vídeos para introduzir novos conceitos, como elemento motivacional. Opção 2 • Propor que os alunos visualizem o vídeo como trabalho de casa. • Em sala de aula, fomentar um debate acerca do vídeo observado.

Animações

- Labirinto (página 14)
- Pontes cobertas (página 31)
- Teorema das 4 cores (página 51)
- Complexo desportivo (página 65)
- Juros simples (página 87)
- Modelo malthusiano (página 97)
- Modelo verhulstiano (página 98)
- Sismos (página 105)
- Um problema do Cavaleiro de Méré (página 137)
- Fenómenos aleatórios (página 138)
- Processos de contagem (página 145)
- Probabilidade condicional (página 154)
- Função massa de probabilidade (página 166)
- Introdução à inferência estatística (página 222)

Apresentações em PowerPoint®

- Introdução aos grafos (página 8)
- Problema do carteiro chinês (página 22)
- Circuitos hamiltonianos (página 34)
- Problema do caixeiro-viajante (página 40)
- Árvores abrangentes (página 60)
- Caminhos críticos (página 66)
- Introdução aos modelos populacionais (página 84)
- Modelo de crescimento linear (página 85)
- Modelo de crescimento exponencial (página 91)
- Modelo de crescimento logístico (página 98)
- Modelo de crescimento logarítmico (página 104)
- Probabilidade condicional (página 154)
- Regra de Bayes (página 162)
- Distribuição de probabilidade (página 166)
- Valor médio e variância populacional (página 172)
- Modelos discretos (página 176)
- Modelos contínuos (página 183)
- Distribuição normal (página 189)
- Métodos de amostragem probabilística (página 225)
- Intervalos de confiança (página 245)
- Interpretação do conceito de intervalo de confiança (página 257)

Animações (Resoluções de exercícios por etapas)

- Resolução do exercício 18 (página 121)
- Resolução do exercício 35 (página 126)
- Resolução da atividade 1 (página 175)
- Resolução da atividade 6 (página 188)
- Resolução da atividade 1 (página 195)
- Resolução do exercício 36 (página 208)
- Resolução da atividade 1 (página 229)
- Resolução da atividade 1 (página 247)
- Resolução da atividade 1 (página 256)
- Resolução do exercício 2 (página 271)

Simuladores (Geogebra®)

- *Geogebra*: Jogar com os dados (página 144)
- *Geogebra*: Problema de Monty Hall (página 165)
- *Geogebra*: Distribuição normal (página 189)

Links de internet para vídeos

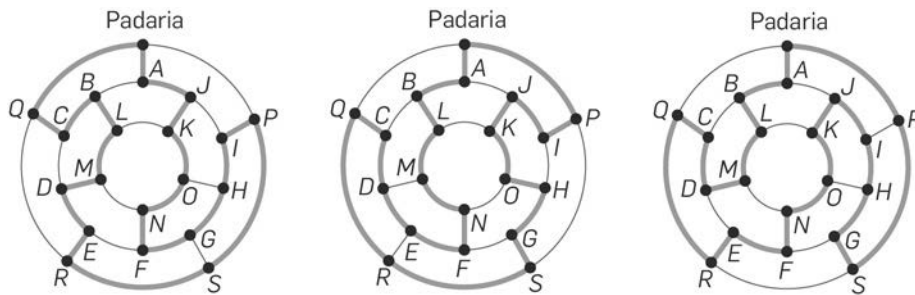
- The Problem in *Good Will Hunting* (página 42)
https://www.youtube.com/watch?v=iW_LKYiuTKE
- Knight's Tour (página 75)
https://www.youtube.com/watch?v=ab_dY3dZFHM
- 23 and Football Birthdays (página 144)
<https://www.youtube.com/watch?v=a2ey9a70yY0>
- The Monty Hall Problem (página 165)
<https://www.youtube.com/watch?v=njqrSvGz8Ps>

Tema 3 | Capítulo 2 – Modelos de grafos

2.1 Introdução

Atividade 1 (pág. 10)

Sugerimos que esta atividade seja desenvolvida em grupo, podendo cada um apresentar mais do que uma solução. Algumas das soluções possíveis são:



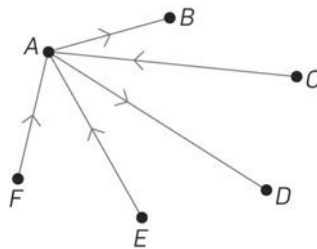
1.1 Padaria – A-J-K-O-N-F-G-H-I-P-S-R-E-D-M-L-B-C-Q – Padaria

1.2 Por exemplo:

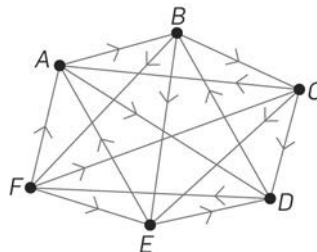
1. Padaria – A-B-L-M-N-F-E-D-C-Q-R-S-G-H-O-K-J-I-P – Padaria
2. Padaria – P-S-G-H-I-J-K-O-N-F-E-R-Q-C-D-M-L-B-A – Padaria

Atividade 2 (pág. 11)

Pretende-se que os alunos consigam interpretar a tabela e transfirm os dados para um grafo. Por exemplo, para a primeira linha da tabela, teríamos:



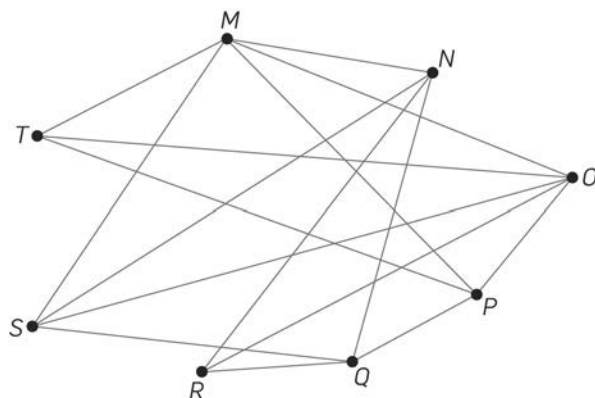
Acrescentando sucessivamente os dados da tabela, linha a linha, obtemos o grafo:



Atividade 3 (pág. 12)

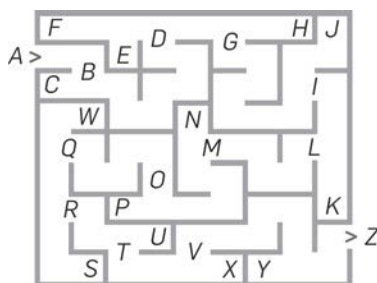
Seguindo a sugestão dada no enunciado, representamos cada uma das oito espécies de aves por um vértice, M, N, ..., T, sendo as arestas as relações de incompatibilidade entre as diferentes espécies.

Obtemos o seguinte grafo:

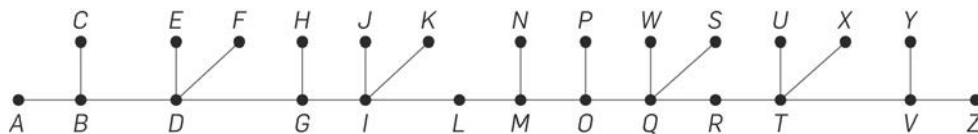


Atividade 4 (pág. 14)

A partir do labirinto da figura, podemos observar a seguinte representação, acrescentando letras (que serão os vértices do grafo) na entrada, na saída, nos cruzamentos e nos «becos sem saída».



Um grafo representativo deste esquema pode ser:

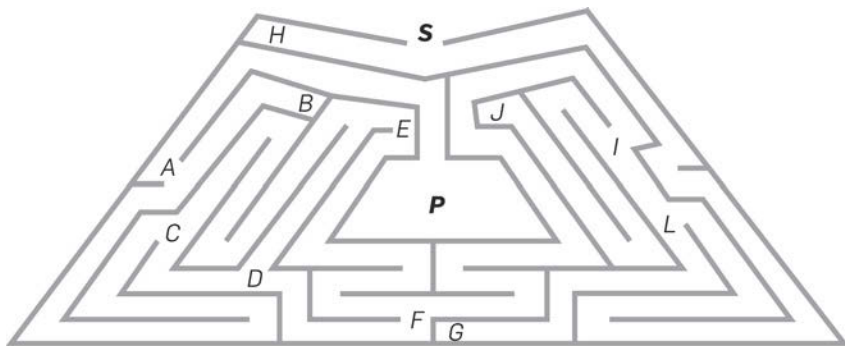


Sequência pedida:

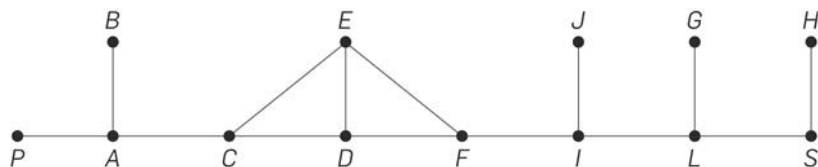
A-B-D-G-I-L-M-O-Q-R-T-V-Z

Atividade 5 (pág. 14)

Seguindo o mesmo raciocínio da atividade anterior:



Um grafo representativo da situação seria:



Uma sequência para chegar à saída do labirinto será: $P - A - C - D - F - I - L - S$

2.2 Trajetos e circuitos eulerianos

Atividade 1 (pág. 16)

1.1 Grafo I: A: 3 B: 1 C: 2 D: 4

Grafo II: A: 2 B: 4 C: 4 D: 2 E: 3 F: 3

Grafo III: A: 1 B: 1 C: 2 D: 2 E: 4 F: 2 G: 2 H: 2

Grafo IV: A: 3 B: 3 C: 3 D: 3 E: 3 F: 3 G: 3 H: 3 I: 3 J: 3

1.2 O grafo IV, porque qualquer um dos seus vértices tem o mesmo grau (3).

1.3 I – Número de arestas: 5

Soma dos graus de todos os vértices: 10

$10 = 2 \times 5 \Leftrightarrow 10 = 10$ Proposição verdadeira

II – Número de arestas: 9

Soma dos graus de todos os vértices: 18

$18 = 2 \times 9 \Leftrightarrow 18 = 18$ Proposição verdadeira

III – Número de arestas: 8

Soma dos graus de todos os vértices: 16

$16 = 2 \times 8 \Leftrightarrow 16 = 16$ Proposição verdadeira

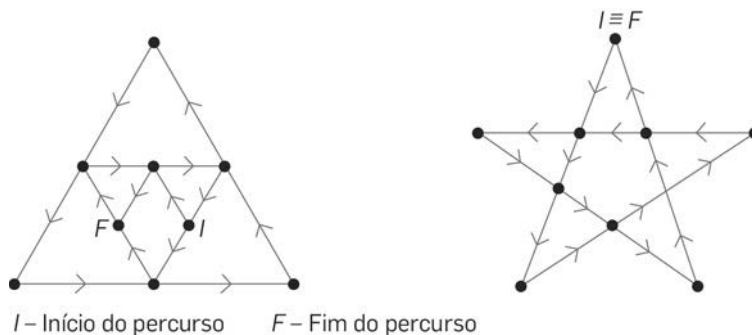
IV – Número de arestas: 15

Soma dos graus de todos os vértices: 30

$30 = 2 \times 15 \Leftrightarrow 30 = 30$ Proposição verdadeira

Atividade 2 (pág. 18)

Apresentamos, em seguida, uma solução para cada um dos grafos apresentados:



Atividade 3 (pág. 19)

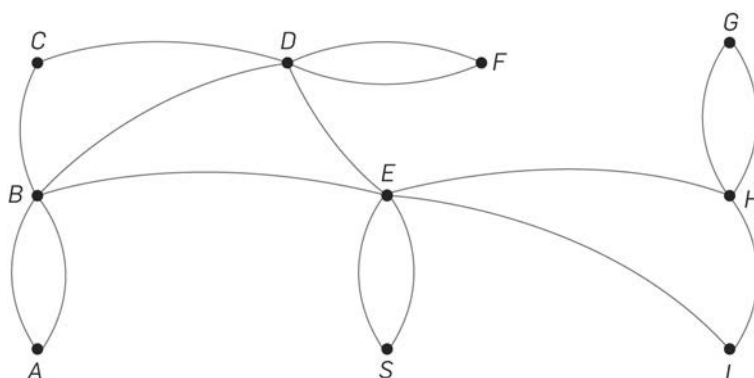
- I – O grafo tem quatro vértices de grau ímpar, logo, não tem trajeto nem circuito euleriano.
- II – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem um trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.
- III – O grafo tem os vértices todos de grau ímpar, logo, não tem nem trajeto nem circuito euleriano.
- IV – O grafo tem os vértices todos de grau ímpar, logo, não tem nem trajeto nem circuito euleriano.
- V – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.
- VI – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.
- VII – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.
- VIII – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.
- IX – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.

Atividade 4 (pág. 20)

Para facilitar a tarefa, vamos representar por uma letra, de A a I, cada uma das salas do clube, e por S a saída:



No grafo, cada sala será representada por um vértice e as arestas serão as portas de ligação entre as diferentes salas:



É possível planejar o percurso sem repetir portas (apenas temos dois vértices com grau ímpar, B e D), mas teremos de repetir três salas com aves. Por exemplo, o percurso $S - E - I - H - G - H - E - D - F - D - C - B - A - B - E - S$ repete as salas onde estão os rosicólores, os papagaios e os tucanos.

Atividade 5 (pág. 21)

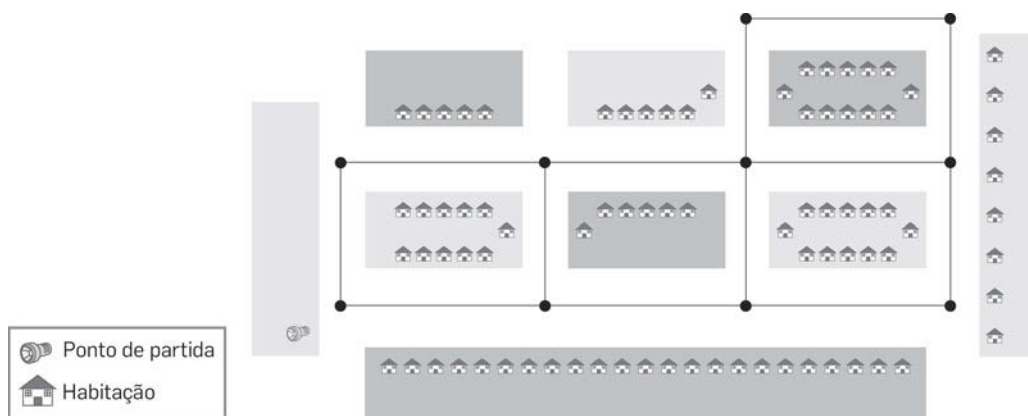
Observemos o esquema do pavilhão:



O auditório e o *cyber-room* têm um número ímpar de portas, o que torna impossível o Jacinto ter passado por todas elas e acabar do lado de fora do pavilhão. Logo, é o Jacinto quem está a mentir.

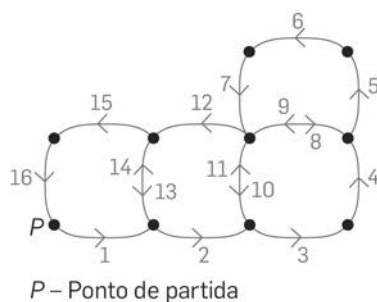
Atividade 6 (pág. 24)

O guarda-noturno não consegue fazer a ronda passando uma só vez em cada rua. Se considerarmos que cada cruzamento é representado por um vértice, sendo as ruas as arestas, obtemos o seguinte grafo:



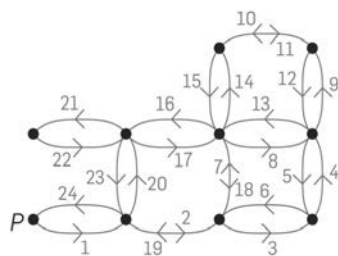
Observamos que existem vários vértices de grau ímpar (são quatro), o que torna impossível a pretensão do guarda-noturno.

O trajeto que repete o menor número de ruas é:



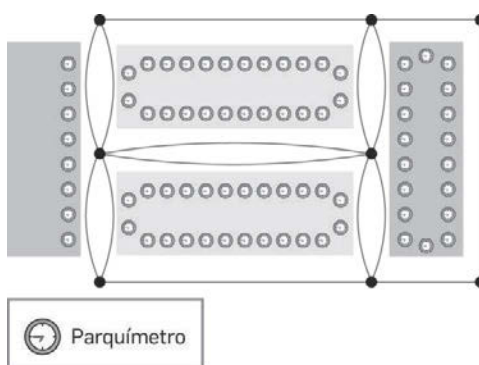
Atividade 7 (pág. 24)

Desta vez, o guarda-noturno deverá percorrer cada rua que tenha casas dos dois lados duas vezes. Uma das soluções possíveis é:

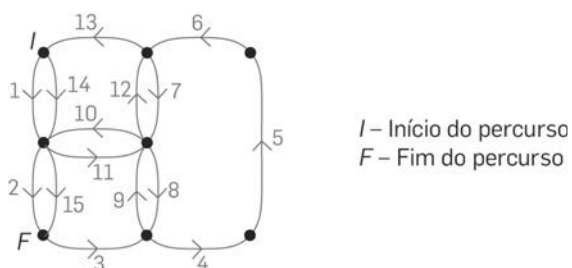


Atividade 8 (pág. 25)

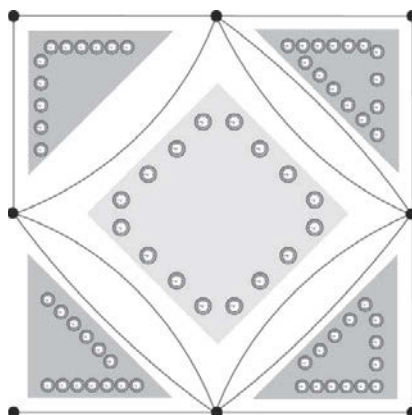
Zona urbana 1 – Com base no esquema da área a controlar, podemos obter o seguinte grafo:



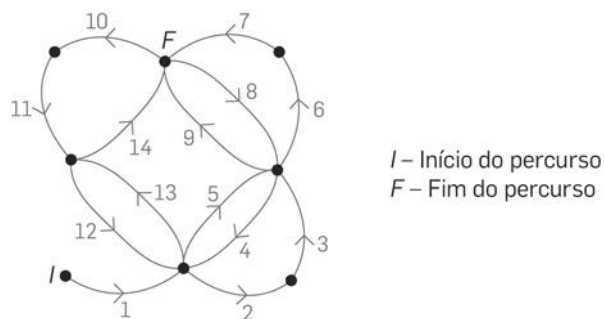
Como cada rua com parquímetro dos dois lados deve ser percorrida duas vezes, obtemos como solução possível o seguinte grafo:



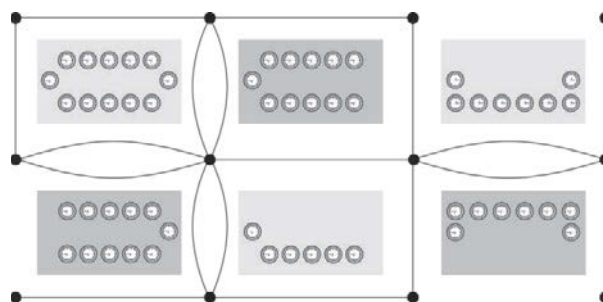
Zona urbana 2 – De forma análoga à anterior, podemos obter o grafo:



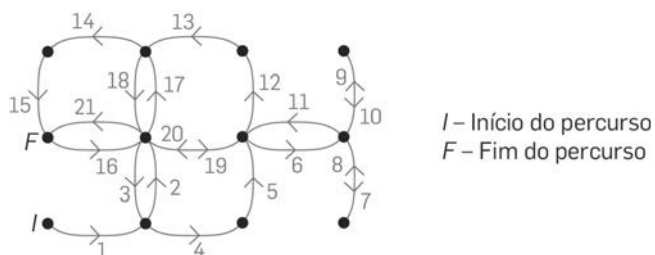
Um dos possíveis percursos do controlador é dado por:



Zona urbana 3 – O grafo a percorrer será:



Um percurso possível é:

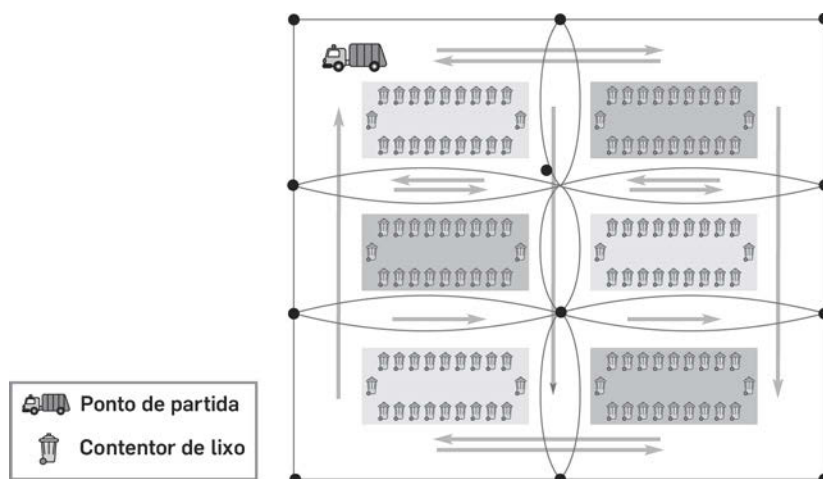


Atividade 9 (pág. 26)

Trabalho de pesquisa

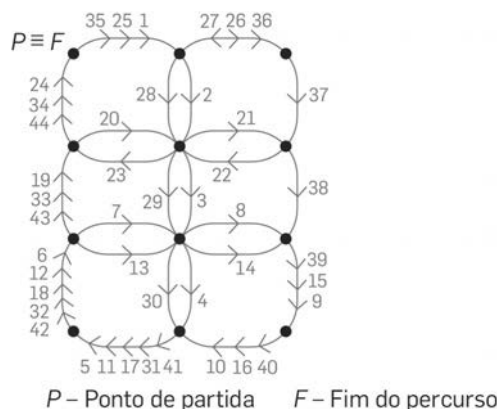
Atividade 10 (pág. 26)

O grafo que se pode obter não é difícil:



O que contribui para «complicar» são os sentidos impostos.

O trajeto mais simples que conseguimos foi:



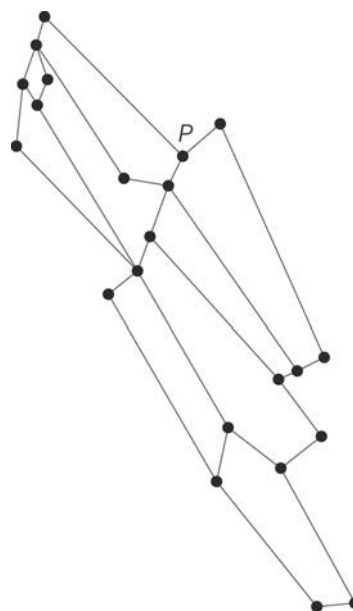
Será possível melhorar este percurso?

Atividade 11 (pág. 27)

11.1 Recorrendo à imagem, vamos assinalar os cruzamentos com pontos, que serão os vértices:

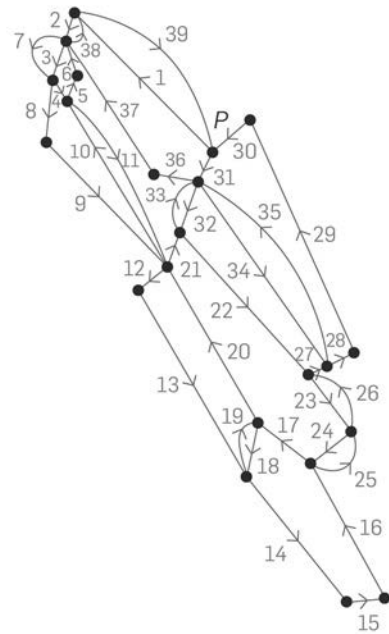


Acrescentando as arestas, que correspondem às ruas assinaladas entre os diferentes vértices, obtemos:



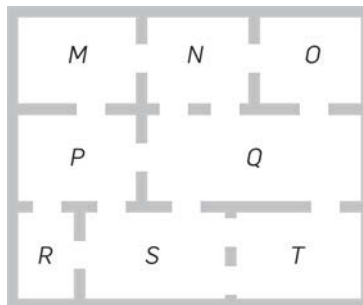
11.2 Não é possível, pois existem vértices de grau ímpar, logo, não conseguimos encontrar um circuito de Euler. Eulerizando o grafo, é possível encontrar um percurso para a Margarida que repita o menor número de ruas. Por exemplo:

A Margarida, neste percurso, terá de repetir nove ruas (foram acrescentadas nove arestas).



Atividade 12 (pág. 30)

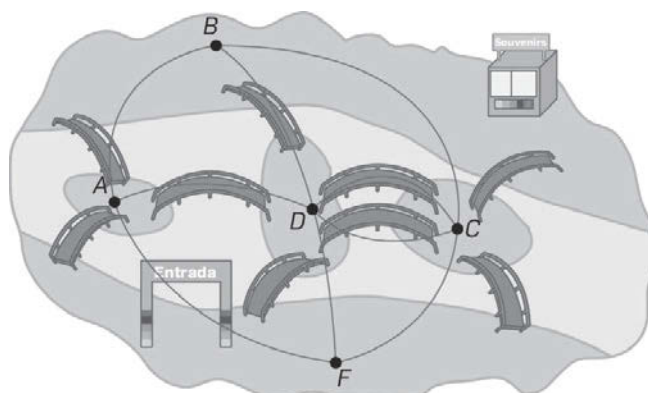
Observemos o esquema da mansão:



Facilmente se verifica que os quartos S e T têm um número ímpar de portas; logo, a Eugénia não consegue percorrer todos os quartos da mansão passando uma só vez por cada porta e regressar ao quarto inicial. Basta, no entanto, abrir mais uma porta de S para T (ou fechar), para assim conseguir o que pretendia.

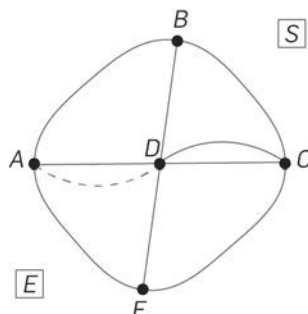
Atividade 13 (pág. 30)

Vamos representar o problema por um grafo:



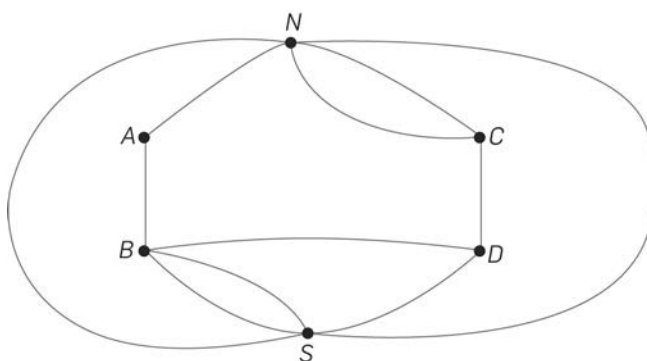
Não é possível percorrer todo o jardim começando na entrada, passando uma única vez por cada porta e terminando na loja de *souvenirs* porque, além dos vértices F (início) e B (fim), existem mais vértices de grau ímpar.

Assim, B e F podem ter grau ímpar, mas devem ser os únicos. Construir mais uma ponte entre A e D , resolveria o problema:



Atividade 14 (pág. 31)

14.1 Se designarmos as margens por N e S e as «pequenas ilhas» por A , B , C e D , estes pontos representarão os vértices do grafo, enquanto as pontes serão as arestas:



14.2.1 O grafo tem quatro vértices de grau ímpar, os vértices S , N , C e D , logo, o fotógrafo terá de repetir algumas travessias. Por exemplo, se começar em S e tiver de terminar neste mesmo ponto, basta repetir a aresta CD e a aresta NS , ficando com todos os vértices com grau par. Assim, o fotógrafo, além de atravessar uma vez cada uma das 11 pontes, terá de atravessar duas vezes as pontes Jefferson e Kennedy, pelo que terá de pagar:

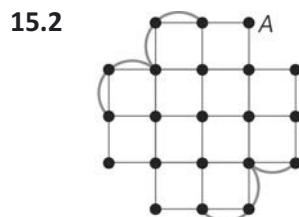
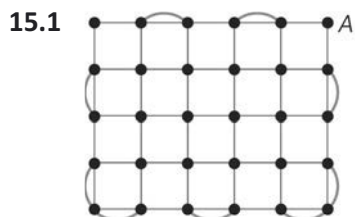
$$11 \times 4 + 2 \times 4 = 52 \text{ €}$$

14.2.2 Se o fotógrafo puder começar em S e terminar em N , por exemplo, apenas terá de repetir uma ponte, a ponte Kennedy, pelo que terá de pagar:

$$11 \times 4 + 1 \times 4 = 48 \text{ €}$$

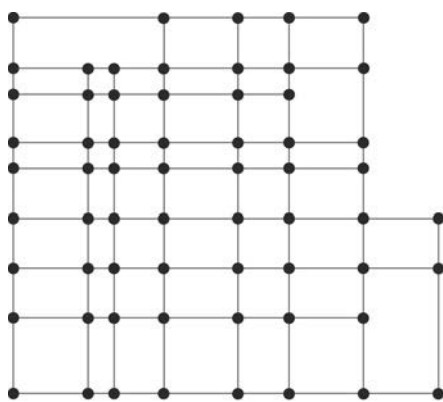
Atividade 15 (pág. 33)

Seguindo a técnica descrita no Manual para a eulerização de redes viárias retangulares, é fácil obter um circuito euleriano neste tipo de grafos.



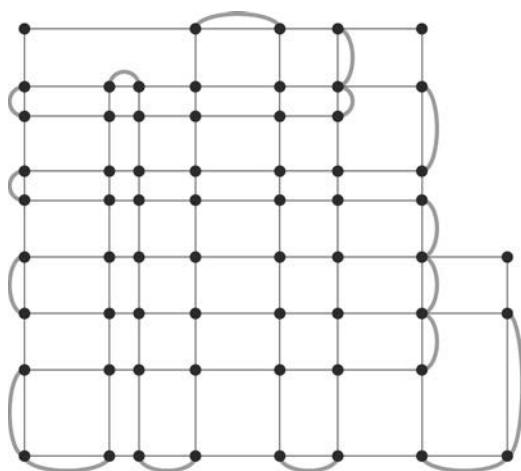
Atividade 16 (pág. 33)

16.1 No grafo, os vértices representam os cruzamentos e as arestas representam as ruas.



16.2 Basta eulerizar o grafo.

Seguindo a técnica de eulerização de redes viárias retangulares, podemos obter, por exemplo:



Como todos os vértices têm agora grau par, é possível encontrar um circuito euleriano para o camião 102.

2.3 Circuitos hamiltonianos

Atividade 1 (pág. 37)

Grafo I – $AFCDEBA$, por exemplo

Grafo II – $ACBDA$, por exemplo

Grafo III – $ECD FBAE$, por exemplo

Grafo IV – $AEFBCHGDA$, por exemplo

Grafo V – Não é possível

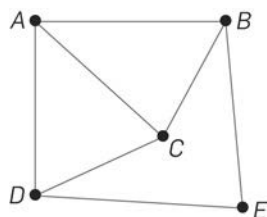
Grafo VI – Não é possível

Atividade 2 (pág. 38)

Esta atividade poderá ser adaptada à região onde os alunos habitam e proporcionar um estudo mais detalhado da geografia da região. Porque não fazer uma rota dos castelos ou de ruínas romanas?

Atividade 3 (pág. 39)

Considerando o grafo inicial:



É fácil encontrar um circuito hamiltoniano: $ACDEBA$, por exemplo. No entanto, se retirarmos a aresta AC (por causa da rotura do cano da água), já não é possível encontrar um circuito hamiltoniano.

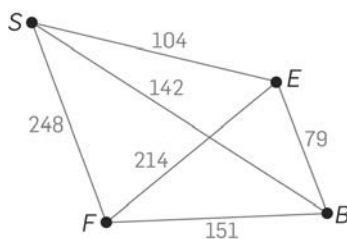
Atividade 4 (pág. 39)

4.1 Não é possível, pois para regressar à Gare do Oriente terá de repetir estações (Olaias, Bela Vista, Chelas, Olivais e Cabo Ruivo).

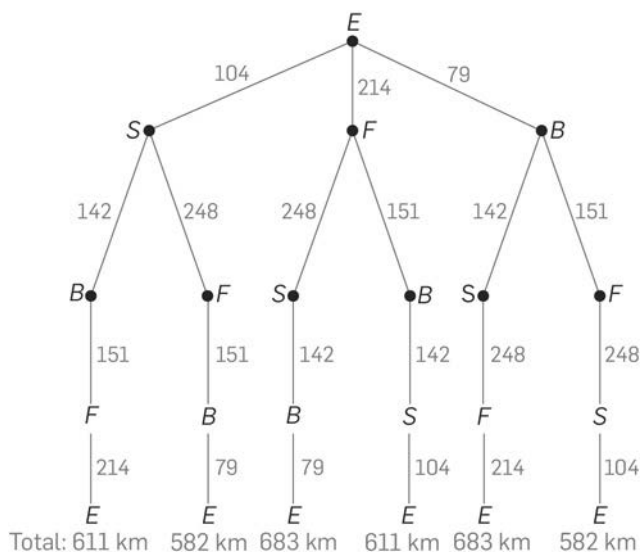
4.2 Sim, é possível. Por exemplo: Alameda, Campo Grande, Marquês, Baixa-Chiado e, novamente, Alameda.

Atividade 5 (pág. 44)

5.1 Com a ajuda de um mapa, obtemos o seguinte grafo ponderado, em que os pesos são as distâncias em quilómetros



5.2 A árvore que se obtém, saindo de Évora, é:



O menor percurso, com 582 quilómetros, é:

Évora → Setúbal → Faro → Beja → Évora
(ou no sentido inverso)

5.3 Para saber o percurso óptimo, temos de determinar todos os percursos possíveis: uma árvore para cada cidade de onde se parte. Com alguma paciência, podemos concluir que o amigo poderia ter saído de qualquer uma das quatro cidades, desde que tivesse feito um percurso determinado:

- Saindo de Setúbal:

S → E → B → F → S 582 km

- Saindo de Beja:

B → E → S → F → B 582 km

- Saindo de Faro:

F → S → E → B → F 582 km

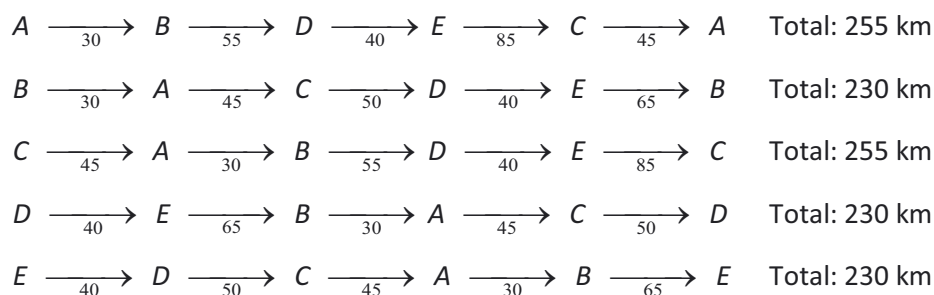
(ou os percursos inversos)

Esta atividade poderá ser adaptada à região em que os alunos habitam, com outras cidades, ou dentro da mesma cidade, com pontos de interesse a ver durante uma visita.

O professor pode aumentar para cinco o número de cidades, de modo que os alunos verifiquem que o acréscimo de uma cidade aumenta de 6 para 24 o número de percursos.

Atividade 6 (pág. 48)

Utilizando o algoritmo do vizinho mais próximo, obtemos cinco percursos, cada um correspondente a cada um dos pontos de partida:



Os percursos $BACDEB$, $DEBACD$ ou $EDCABE$, com um comprimento igual a 230 quilómetros, são percursos mínimos. Obtém-se um comprimento mínimo com este algoritmo, igual ao já obtido pelo algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

Atividade 7 (pág. 49)

7.1

	C. Branco
C. Branco	
Belmonte	71
Covilhã	59
Fundão	44
Penamacor	51
Idanha	35
V. V. Rodão	32
Vila de Rei	87
Sertã	68
Oleiros	63
Proença	51

Pelo algoritmo dos mínimos sucessivos:

Distância total: 316 quilómetros

$$\begin{array}{l} \textcircled{S \xrightarrow{21} VR}; \textcircled{S \xrightarrow{27} O}; \textcircled{CB \xrightarrow{35} I}; \textcircled{I \xrightarrow{37} P}; O \xrightarrow{46} VR; CB \xrightarrow{51} P; \\ \textcircled{CB \xrightarrow{63} O}; CB \xrightarrow{68} S; CB \xrightarrow{87} VR; O \xrightarrow{93} I; S \xrightarrow{102} I; O \xrightarrow{109} P; \\ S \xrightarrow{118} P; VR \xrightarrow{121} I; \textcircled{VR \xrightarrow{137} P} \end{array}$$



Percurso: $CB \xrightarrow{35} I \xrightarrow{37} P \xrightarrow{137} VR \xrightarrow{21} S \xrightarrow{27} O \xrightarrow{63} CB$ (ou sentido inverso)

Distância total: 320 quilómetros

Obtivemos um percurso menor (menos 4 quilómetros) pelo algoritmo dos mínimos sucessivos.

$$CB \xrightarrow{32} VVR \xrightarrow{39} F \xrightarrow{23} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{117} PN \xrightarrow{42} O \xrightarrow{63} CB$$

Distância total: 369 quilómetros

Atividade 8 (pág. 50)

Para concluirmos acerca do percurso óptimo, temos de analisar os 60 percursos.

Os alunos devem ser confrontados com esta situação, de modo a sentirem necessidade de encontrar um processo menos moroso para chegar a uma boa solução. Utilizando os dois algoritmos, podemos obter uma dessas soluções. Podendo não ser a solução ótima, é uma boa solução.

Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$\begin{array}{l}
 L \xrightarrow{150} E \xrightarrow{78} B \xrightarrow{333} C \xrightarrow{60} A \xrightarrow{252} L \quad \text{Total: 873 km} \\
 E \xrightarrow{78} B \xrightarrow{186} L \xrightarrow{201} C \xrightarrow{60} A \xrightarrow{306} E \quad \text{Total: 831 km} \\
 B \xrightarrow{78} E \xrightarrow{150} L \xrightarrow{201} C \xrightarrow{60} A \xrightarrow{371} B \quad \text{Total: 860 km} \\
 C \xrightarrow{60} A \xrightarrow{252} L \xrightarrow{150} E \xrightarrow{78} B \xrightarrow{333} C \quad \text{Total: 873 km} \\
 A \xrightarrow{60} C \xrightarrow{201} L \xrightarrow{150} E \xrightarrow{78} B \xrightarrow{371} A \quad \text{Total: 860 km}
 \end{array}$$

O melhor percurso, usando este algoritmo, é $E B L C A E$, com um total de 831 quilómetros.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

Usando este algoritmo, o circuito é $A C L E B A$, com uma distância total igual a 860 quilómetros.

Conclusão: Obtemos um percurso melhor usando o algoritmo dos mínimos sucessivos do que usando o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas. O armazém de distribuição deve ficar em Évora.

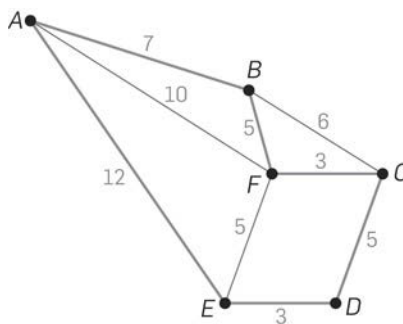
Atividade 9 (pág. 50)

Nesta atividade, vamos novamente aplicar os dois algoritmos para poder tirar conclusões.

Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$\begin{array}{l}
 A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{5} F \xrightarrow{3} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{3} E \xrightarrow{12} A \quad \text{Total: 35 dezenas de metros} \\
 B \xrightarrow{5} F \xrightarrow{3} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{3} E \xrightarrow{12} A \xrightarrow{7} B \quad \text{Total: 35 dezenas de metros} \\
 C \xrightarrow{3} F \xrightarrow{5} B \xrightarrow{7} A \xrightarrow{12} E \xrightarrow{3} D \xrightarrow{5} C \quad \text{Total: 35 dezenas de metros} \\
 D \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} F \xrightarrow{10} A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{5} D \quad \text{Total: 36 dezenas de metros} \\
 E \xrightarrow{3} D \xrightarrow{5} C \xrightarrow{3} F \xrightarrow{5} B \xrightarrow{7} A \xrightarrow{12} E \quad \text{Total: 35 dezenas de metros} \\
 F \xrightarrow{3} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{3} E \xrightarrow{12} A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{5} F \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}
 \end{array}$$

Pelo algoritmo das arestas classificadas, obtém-se também um circuito de comprimento igual a 35 dezenas de metros:



Conclusão: O agente poderá deixar o automóvel junto a qualquer prédio, exceto junto ao D , e vai percorrer uma distância igual a 35 dezenas de metros.

Atividade 10 (pág. 50)

Pelo algoritmo dos mínimos sucessivos, saindo do aeroporto (A), obtém-se o percurso:

$A \xrightarrow{5} PD \xrightarrow{9} L \xrightarrow{7} LF \xrightarrow{13} RG \xrightarrow{28} F \xrightarrow{8} P \xrightarrow{22} VF \xrightarrow{48} SC \xrightarrow{130} N \xrightarrow{63} A$ Total: 333 km

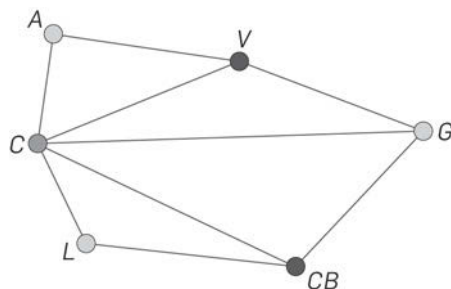
Pelo algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, obtém-se o percurso:

$A \xrightarrow{5} PD \xrightarrow{9} L \xrightarrow{7} LF \xrightarrow{13} RG \xrightarrow{36} VF \xrightarrow{19} F \xrightarrow{8} P \xrightarrow{28} N \xrightarrow{130} SC \xrightarrow{18} A$ Total: 273 km

No Manual encontrámos um percurso menor do que qualquer um destes, o que vem reforçar a ideia de que apenas o método exaustivo nos garante uma solução ótima.

Atividade 11 (pág. 55)

Os vértices do grafo representam os distritos da região centro: Aveiro (A), Coimbra (C), Castelo Branco (CB), Guarda (G), Leiria (L) e Viseu (V). As arestas representam os distritos adjacentes:

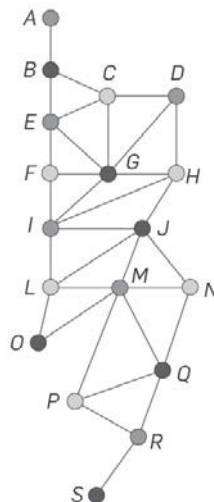
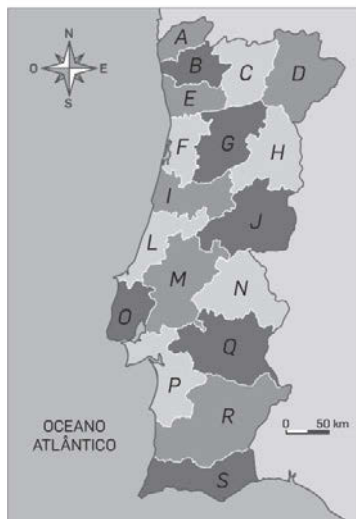


Começando pelo vértice de maior grau, C, atribuímos-lhe uma primeira cor (por exemplo, vermelho). Como é adjacente a todos os outros, passamos ao vértice com maior grau seguinte: pode ser G, CB ou V. Vamos optar por G. Atribuímos-lhe uma segunda cor (por exemplo, verde) e a mesma a A e a L, que não lhe são adjacentes. Finalmente, atribuímos uma terceira cor (por exemplo, azul) aos vértices V e CB, que não são adjacentes.

O número cromático da região centro é três.

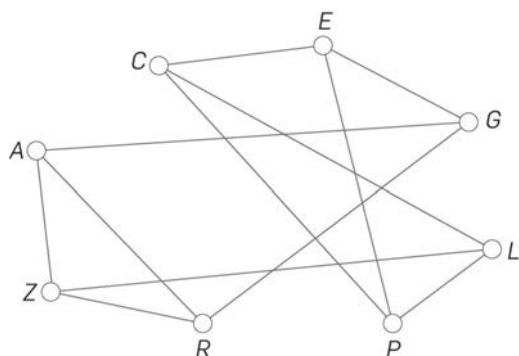
Atividade 12 (pág. 55)

O número cromático de Portugal continental é três.

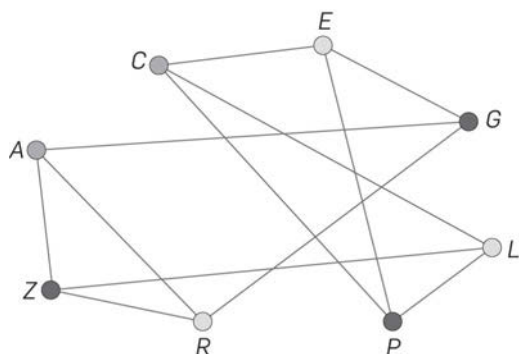


Atividade 13 (pág. 58)

13.1 Os vértices representam cada uma das espécies (utilizamos apenas a primeira letra de cada uma) e as arestas representam as relações de incompatibilidade entre as diferentes espécies. O grafo que modela esta situação pode ser representado por:



13.2 Todos os vértices têm grau três, pelo que vamos começar por um qualquer: vamos seguir a ordem alfabética. Obtemos a seguinte coloração do grafo:



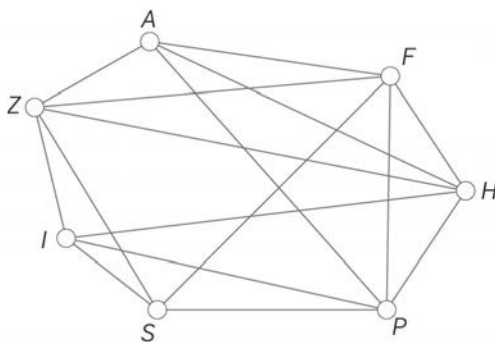
Precisamos de três recintos distintos para albergar todas as espécies:

- Um para a águia e a corça (A e C).
- Outro para o elefante, o leão e o rinoceronte (E, L e R).
- Um terceiro para a girafa, o panda e a zebra (G, P e Z).

No entanto, esta solução não é a única: A, L, E + C, Z, G + R, P é outra alternativa.

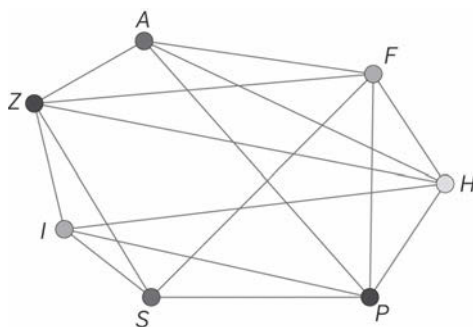
Atividade 14 (pág. 59)

Um grafo representativo desta situação pode ser (utilizaremos para os vértices apenas a primeira letra de cada modalidade):



Grau dos vértices: $A - 4$; $F - 5$; $H - 5$; $P - 5$; $S - 4$; $I - 4$; $Z - 5$

Começamos pelo vértice F , que colorimos com uma primeira cor, tal como o vértice I , que não lhe é adjacente. Passamos ao próximo vértice de maior grau, H , que colorimos com uma segunda cor, e, como não tem vértices não adjacentes, passamos ao seguinte e repetimos o procedimento até termos colorido todos os vértices. Obtemos, então, a seguinte coloração para o grafo:



Podemos organizar o horário das aulas da seguinte forma:

- 9h00: Aeróbica e *Step*.
- 10h00: *Fitball* e loga.
- 11h00: *Hip-Hop*.
- 12h00: *Zumba* e *Pump*.

(Esta solução não é a única.)

2.4 Árvores abrangentes mínimas

Atividade 1 (pág. 64)

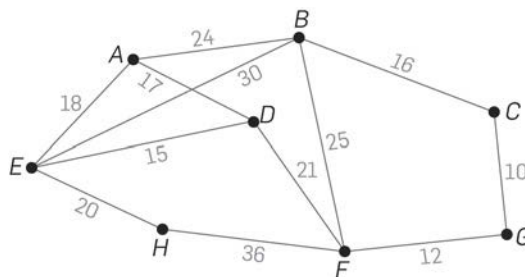
A árvore abrangente mínima pode, ou não, ser a mesma quer pelo algoritmo de Kruskal, quer pelo algoritmo de Prim, mas o comprimento total é sempre igual e mínimo (comprimento: $6 + 4 + 7 + 7 + 6 + 5 = 35$).

O processo de construção também difere:

1.1 Algoritmo de Kruskal	1.2 Algoritmo de Prim (começando em B, por exemplo)

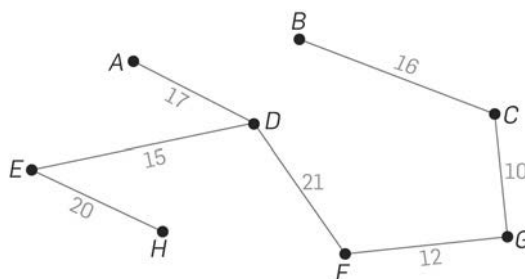
Atividade 2 (pág. 65)

Pretende-se determinar uma árvore que contenha todos os vértices (abrangente) e com o menor comprimento. Observando o grafo, vamos colocar as arestas por ordem crescente do seu peso:



$C \text{ --- } G; F \text{ --- } G; D \text{ --- } E; B \text{ --- } C; A \text{ --- } D; A \text{ --- } E; E \text{ --- } H; D \text{ --- } F; A \text{ --- } B; B \text{ --- } F; B \text{ --- } E; F \text{ --- } H$
 10 12 15 16 17 18 20 21 24 25 30 36

Em seguida, vamos ligando os vértices de acordo com os pesos das arestas (do menor para o maior) sem formar circuitos. Assim, a árvore que se obtém, neste caso, é:

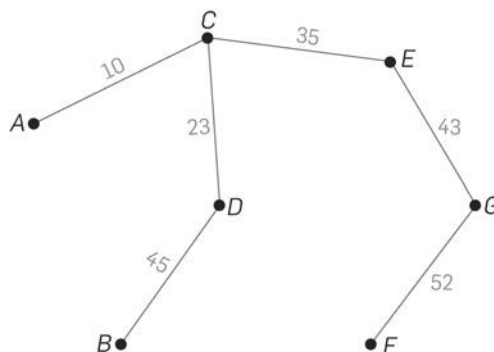


O comprimento total é de 111 metros.

Atividade 3 (pág. 65)

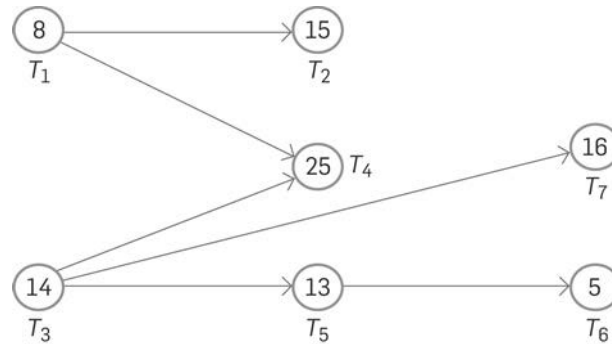
O processo é análogo ao anterior. É importante que os alunos se familiarizem com diversas situações em que a aplicação do algoritmo de Kruskal nos permite obter soluções ótimas.

Neste caso, o percurso mínimo para o camião é de 208 quilómetros e pode traduzir-se pela seguinte árvore:



Atividade 4 (pág. 69)

Os grandes projetos requerem uma calendarização de execução, um acompanhamento constante e uma perfeita coordenação das tarefas inerentes à sua concretização, não só para evitar atrasos, mas também para evitar custos adicionais. No caso concreto desta atividade, pretendemos esquematizar através de um grafo a informação fornecida pela tabela e que diz respeito às tarefas que ocorrem diariamente num aeroporto. Assim, tendo em conta não só os tempos necessários à concretização de cada uma das tarefas, mas também, e principalmente, as suas dependências, podemos traduzir os dados da tabela no grafo seguinte:



As tarefas T_1 e T_3 iniciam-se simultaneamente: ao fim de 8 minutos T_2 começa e após 14 minutos (do início) podem começar as tarefas T_4 , T_5 e T_7 . São necessários mais 13 minutos ($14 + 13 = 27$ minutos após o início das operações) para dar início a T_6 . Nesta altura T_2 já terminou, mas T_4 e T_7 ainda não. Para concluir T_4 são necessários 14 minutos (para realizar T_3) mais 25 minutos, num total de 39 minutos. Como as restantes tarefas (T_2 , T_5 , T_6 e T_7) não dependem da realização de T_4 , e se realizam em menos tempo, podemos concluir que o caminho crítico (formado pelas tarefas críticas, isto é, pelas tarefas cujo atraso na execução se repercute automaticamente na duração total do projeto) é formado pelas tarefas T_3 e T_4 , com uma duração de $14 + 25 = 39$ minutos.

Atividade 5 (pág. 69)

5.1

Tarefa	Duração (dias)	Precedências
A	2	Nenhuma
B	4	A
C	1	B
D	5	Nenhuma
E	4	C e D
F	5	E
G	9	C e D
H	3	F e G

5.2 A duração mínima do projeto é: $2 + 4 + 1 + 4 + 5 + 3 = 19$ dias.

5.3 O caminho crítico será: $A - B - C - E - F - H$.

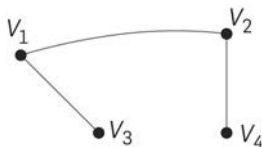
Exercícios de aplicação (pág. 76)

1.1 Sim

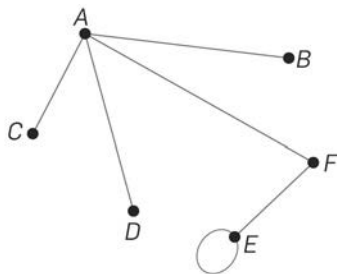
1.2 Não

1.3 Não

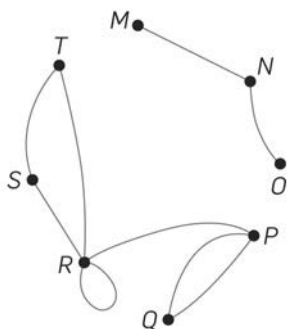
2.1



2.2



2.3



3. Os grafos dos exercícios 2.1 e 2.2 são conexos, pois existe sempre uma sequência de arestas a unir quaisquer dois vértices.

4.1 Grafo I – vértices: 3; arestas: 2

Grafo II – vértices: 4; arestas: 3

Grafo III – vértices: 4; arestas: 5

Grafo IV – vértices: 5; arestas: 9

4.2 Grafo I – $V = \{V_1, V_2, V_3\}$; $A = \{V_1V_2, V_2V_3\}$

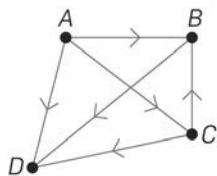
Grafo II – $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$; $A = \{V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4\}$

Grafo III – $V = \{A, B, C, D\}$; $A = \{AC, AD, AD, BD, CD\}$

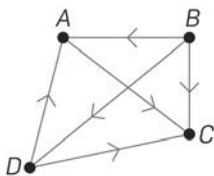
Grafo IV – $V = \{A, B, C, D, E\}$; $A = \{AB, AC, AD, AE, BD, BE, CD, CE, DE\}$

5.

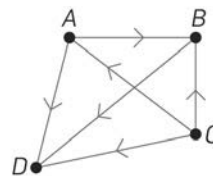
(2)



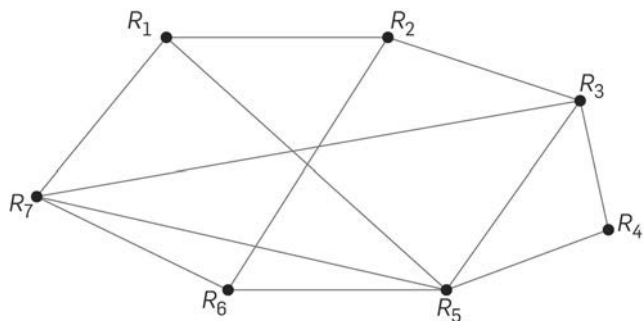
(3)



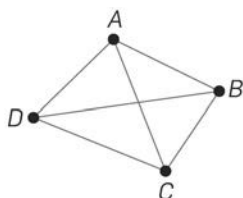
(4)



6.



7.1

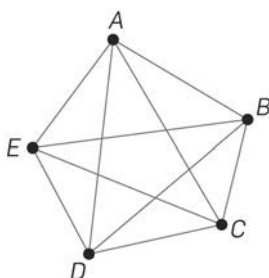


Número de vértices: 4

Número de arestas: 6

$$6 = \frac{4 \times 3}{2}$$

7.2

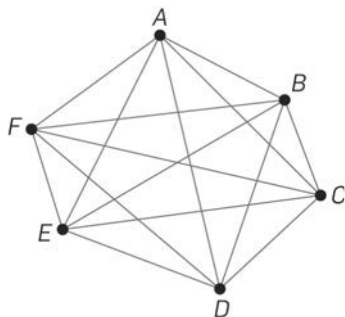


Número de vértices: 5

Número de arestas: 10

$$10 = \frac{5 \times 4}{2}$$

7.3

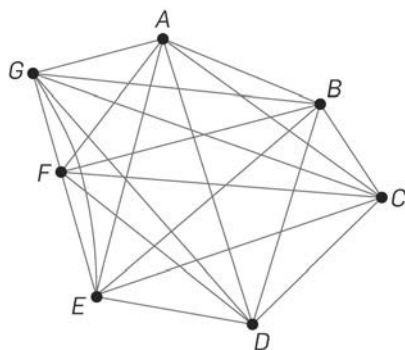


Número de vértices: 6

Número de arestas: 15

$$15 = \frac{6 \times 5}{2}$$

7.4



Número de vértices: 7

Número de arestas: 21

$$21 = \frac{7 \times 6}{2}$$

$$N_A = \frac{N_V(N_V - 1)}{2}$$

8.1 A – 2 B – 3 C – 2 D – 2 E – 3 F – 1 G – 1 H – 2

8.2 A – 3 B – 3 C – 4 D – 3 E – 3

8.3 A – 2 B – 3 C – 3 D – 3 E – 3 F – 3 G – 5

8.4 A – 2 B – 3 C – 2 D – 2 E – 2 F – 1

9.

	Soma graus (S)	N.º arestas (n)	$S = 2 \times n$
Grafo 8.1	16	8	$16 = 2 \times 8$
Grafo 8.2	16	8	$16 = 2 \times 8$
Grafo 8.3	20	10	$20 = 2 \times 10$
Grafo 8.4	12	6	$12 = 2 \times 6$

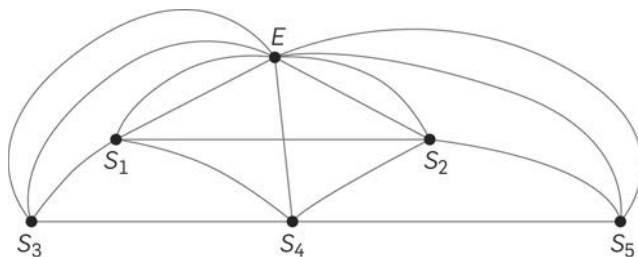
10.1 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.

10.2 Não tem trajeto euleriano, pois tem mais de dois vértices de grau ímpar.

10.3 Circuito euleriano.

10.4 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.

11.1

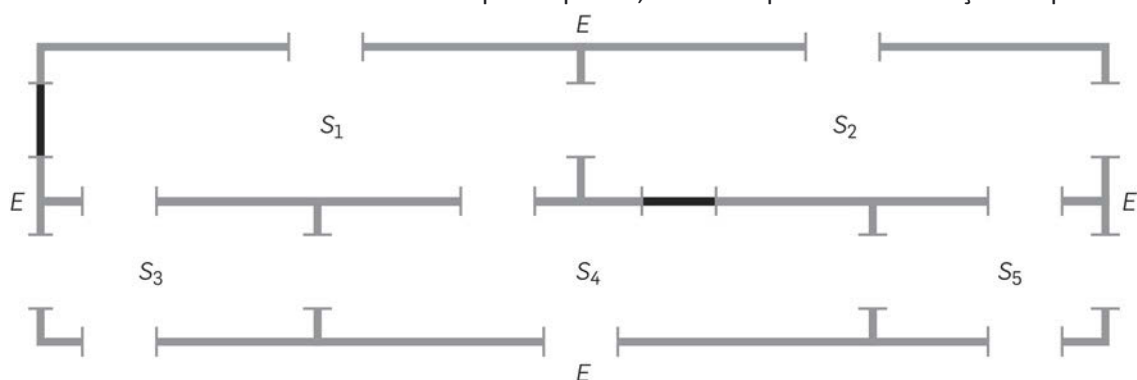


11.2 E – grau 9 S₁ – grau 5 S₂ – grau 5 S₃ – grau 4 S₄ – grau 5 S₅ – grau 4

11.3 Sim, é possível, fazendo, por exemplo, o percurso E – S₁ – S₂ – S₅ – S₄ – S₃ – E.

11.4 Não é possível, porque existem vértices de grau ímpar (salas com um número ímpar de portas).

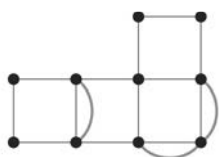
- 11.5** Encerrando uma das portas de S_1 que dá acesso ao exterior e a porta de ligação entre S_2 e S_4 , ficam todas as salas com um número par de portas, tornando possível as condições impostas:



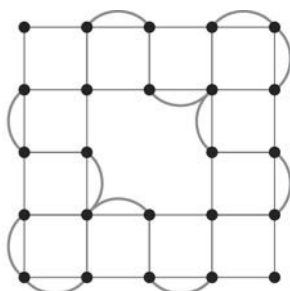
- 12.** Sim, pois todos os vértices têm grau par.
- 13.** É possível, pois todos os vértices têm grau par.
Um percurso pode ser, por exemplo: $A X Z A M N O P Q O U R S T U V A$
- 14.** Pode, porque todos os vértices têm grau par.
Por exemplo: $A B D E F I J K N M L I H M O C H G D C A$
- 15.** Se eliminarmos FG , os vértices F e G passam a ter grau par, como os restantes.
- 16.1** Não, porque o vértice X tem grau par e há dois vértices de grau ímpar.
- 16.2** Só consegue se repetir a aresta BG (fazendo com que os vértices B e G «fiquem com grau par»).
Por exemplo: $X A B C D E F B G C F G H X G B X$
- 17.** Analisando o grau dos vértices da figura, verificamos que E e F têm grau ímpar. Para o percurso pedido satisfazer as condições impostas, todos os vértices teriam de ter grau par. Logo, o percurso que se pretende, satisfazendo cumulativamente as três condições, não é possível.

- 18.1** Não existe circuito euleriano porque há vértices de grau ímpar.

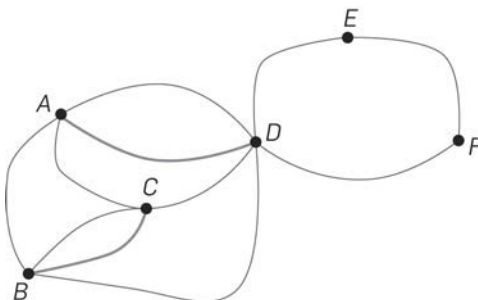
18.2



19.



20. Analisando os graus dos vértices do grafo da figura, verificamos que os vértices A , B , C e D têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler. Logo, o Carlos tem razão quando afirma que é impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum. Torna-se necessário eulerizar o grafo para possibilitar o percurso da organização. Assim, se duplicarmos as arestas AD e BC , por exemplo, já seria possível os participantes passarem por todos os trajetos diretos.



21. Repete o vértice C : num circuito hamiltoniano não pode haver repetição de vértices, exceto o primeiro, que também é o último.

22.1 Existe: $A E D B C A$, por exemplo.

22.2 Existe: $A C D B E F A$, por exemplo.

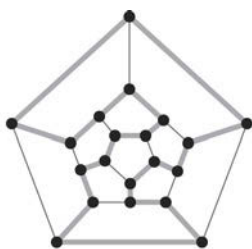
22.3 Existe: $J L M F G H I C D E A B J$.

22.4 Não existe.

23.1 Acrescenta-se ED (ou DC , por exemplo).

23.2 Acrescenta-se EG (ou AG , por exemplo).

24.1



24.2 Claro que sim, pois passa em cada um uma única vez.

25. Por exemplo: $B R_1 R_6 R_2 R_3 R_4 R_5 R_7 R_8 B$

26.

A: Circuito euleriano

B: Circuito euleriano

C: Circuito hamiltoniano

D: Circuito hamiltoniano

27. Problema do caixeiro-viajante.

28.1 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{20} D \xrightarrow{30} C \xrightarrow{10} A \text{ Total: } 65$$

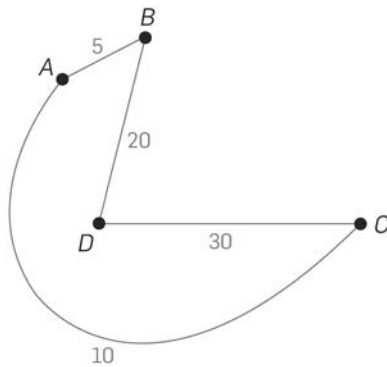
$$B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{30} C \xrightarrow{20} B \text{ Total: } 75$$

$$C \xrightarrow{10} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{20} D \xrightarrow{30} C \text{ Total: } 65$$

$$D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{30} C \xrightarrow{30} D \text{ Total: } 75$$

Percurso a começar em A ou C, com 65.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: A B D C A
Total: 65

28.2 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{52} D \xrightarrow{58} B \xrightarrow{133} C \xrightarrow{75} A \text{ Total: } 318$$

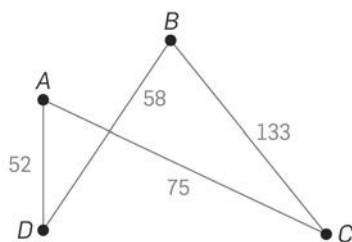
$$B \xrightarrow{58} D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{75} C \xrightarrow{133} B \text{ Total: } 318$$

$$C \xrightarrow{68} D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{61} B \xrightarrow{133} C \text{ Total: } 314$$

$$D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{61} B \xrightarrow{133} C \xrightarrow{68} D \text{ Total: } 314$$

Percurso a começar em C ou D, com 314.

Algoritmo da ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: A D B C A
Total: 318

28.3 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{6} A$$

$$B \xrightarrow{6} A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C \xrightarrow{7} B$$

$$C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{6} A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C$$

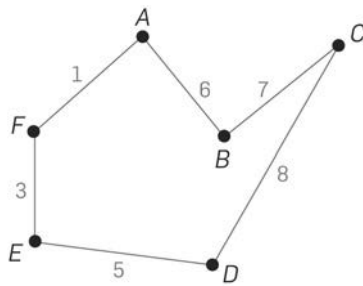
$$D \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D$$

$$E \xrightarrow{3} F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D \xrightarrow{5} E$$

$$F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} F$$

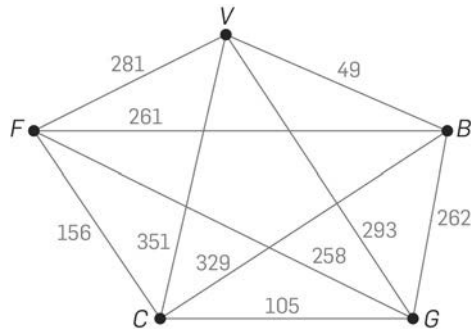
Têm todos o mesmo comprimento: 30

Algoritmo da ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: $A F E D C B A$
Total: 30

29.1



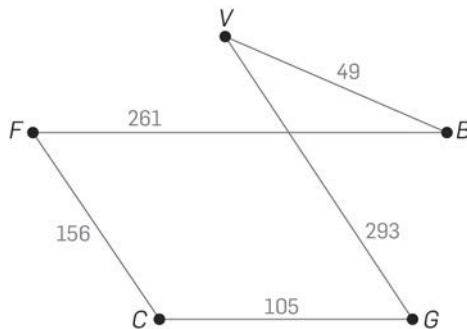
29.2 $B V F G C B$: $49 + 281 + 258 + 105 + 329 = 1022$ km

$B F V G C B$: $261 + 281 + 293 + 105 + 329 = 1269$ km

29.3 Dos dois anteriores, $B V F G C B$ é o menor.

29.4 $B \xrightarrow{49} V \xrightarrow{281} F \xrightarrow{156} C \xrightarrow{105} G \xrightarrow{262} B$ Total: 853 km

29.5



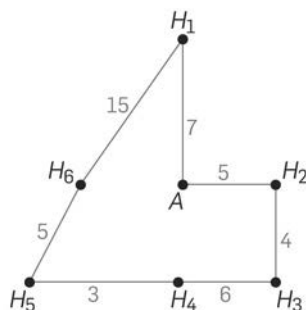
Percurso: $B F C G V B$
Comprimento: 864 km

30. Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$A \xrightarrow{5} H_2 \xrightarrow{4} H_3 \xrightarrow{6} H_4 \xrightarrow{3} H_5 \xrightarrow{5} H_6 \xrightarrow{15} H_1 \xrightarrow{7} A$

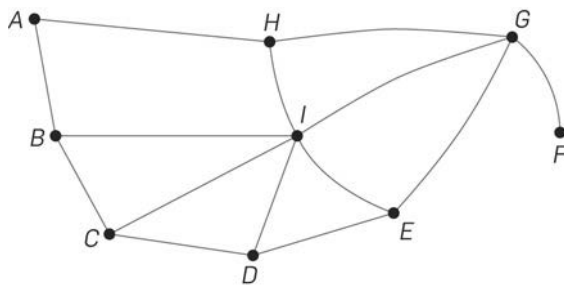
Total: 45 km

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

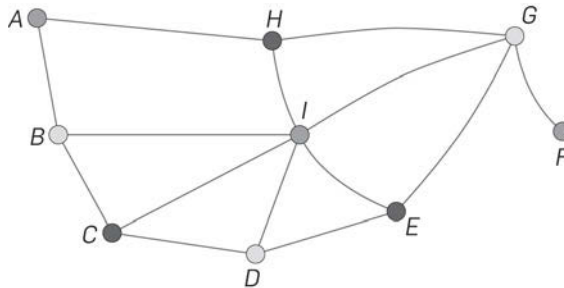


Percurso: $A H_1 H_6 H_5 H_4 H_3 H_2 A$
Total: 45 km

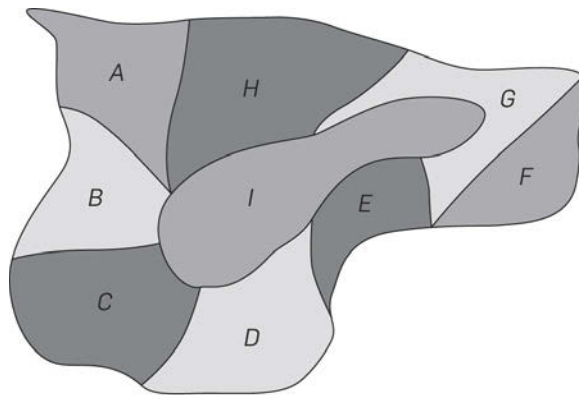
- 31.1** Vértices: $A, B, \dots, I$ – representam cada uma das províncias.
Arestas: representam a existência de fronteira entre duas províncias.



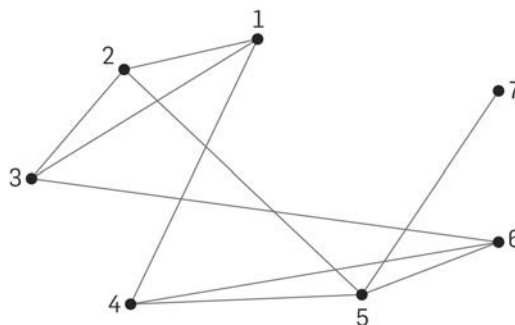
31.2



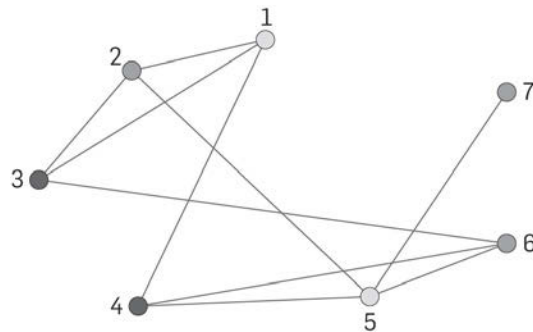
Começamos no vértice I , pois é o que tem maior grau, e atribuímos-lhe a primeira cor (vermelho, por exemplo), bem como aos vértices A e F , que não lhe são adjacentes. Seguimos o mesmo procedimento para os outros vértices atendendo ao grau de cada um. Serão necessárias três cores diferentes para colorir o mapa.



- 32.1** Os vértices representam as disciplinas e as arestas representam as incompatibilidades de realização de exame no mesmo dia.



32.2 Vamos colorir os vértices do grafo, começando pelo de maior grau, colorindo com a mesma cor os vértices não adjacentes. Obteremos o seguinte grafo:



São necessários, pelo menos, três dias: um dia para os exames 1 e 5, outro para os exames 3 e 4 e um terceiro dia para os exames 2, 6 e 7.

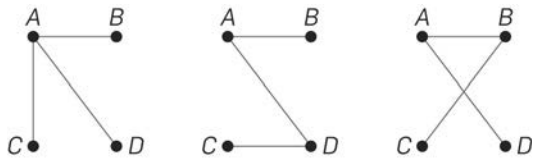
33.1 Não é, porque tem um circuito.

33.2 É, porque é conexo e sem circuitos.

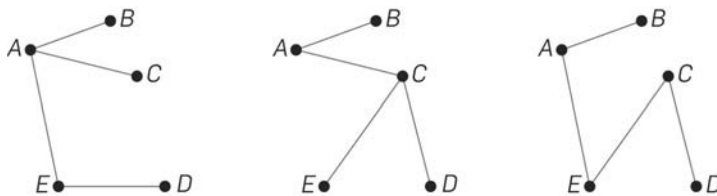
33.3 Não é, porque tem pelo menos um circuito.

33.4 É, porque é conexo e sem circuitos.

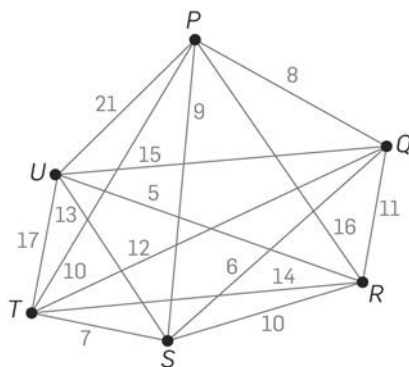
34.1 Por exemplo:



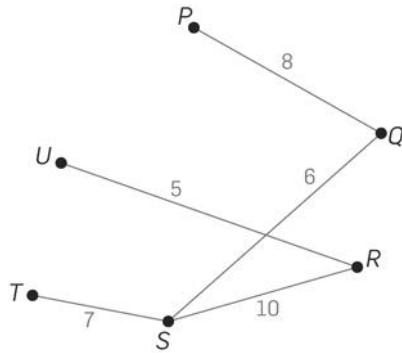
34.2 Por exemplo:



35.1



35.2 Podemos usar o algoritmo de Kruskal para obter a árvore abrangente mínima.



Comprimento: 36 dezenas de metros

35.3 Somas das distâncias a partir de:

$P: 8 + 16 + 9 + 10 + 21 = 64$ dezenas de metros

$Q: 8 + 11 + 6 + 12 + 15 = 52$ dezenas de metros

$R: 16 + 11 + 10 + 14 + 5 = 56$ dezenas de metros

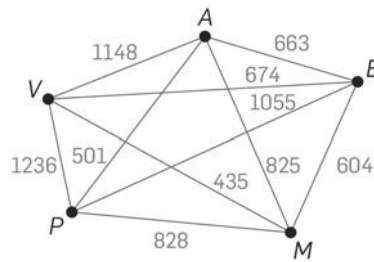
$S: 9 + 6 + 10 + 7 + 13 = 45$ dezenas de metros

$T: 10 + 12 + 14 + 7 + 17 = 60$ dezenas de metros

$U: 21 + 15 + 5 + 13 + 17 = 71$ dezenas de metros

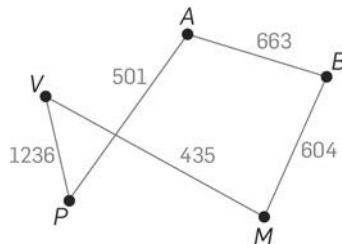
A central deve situar-se em S , pois é a que minimiza as distâncias a cada uma das cidades.

36. Representamos cada uma das cinco cidades pelos vértices de um grafo (vamos usar a primeira letra de cada cidade para designar cada vértice):



A aresta de menor peso é VM , com 435 quilómetros; segue-se PA , com 501 quilómetros, MB com 604 quilómetros, AB com 663 quilómetros e, por fim, PV com 1236 quilómetros (algumas arestas foram excluídas, pois fechavam o percurso antes do final):

Assim, começando em Amesterdão, um percurso possível será:

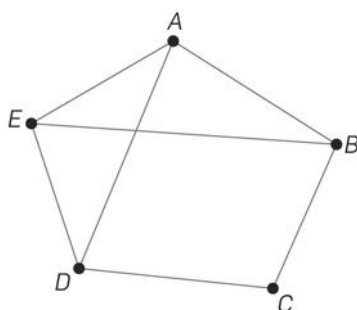


$A \rightarrow P \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A$

37. As árvores finais obtidas por qualquer um dos métodos são iguais e têm o mesmo peso (I – 13 e II – 14):

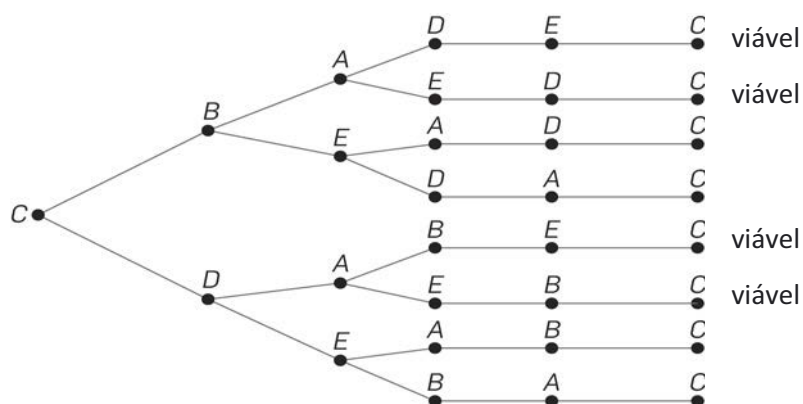


38. Representando as cidades A, B, C, D e E pelos vértices de um grafo, poderemos obter o seguinte modelo:



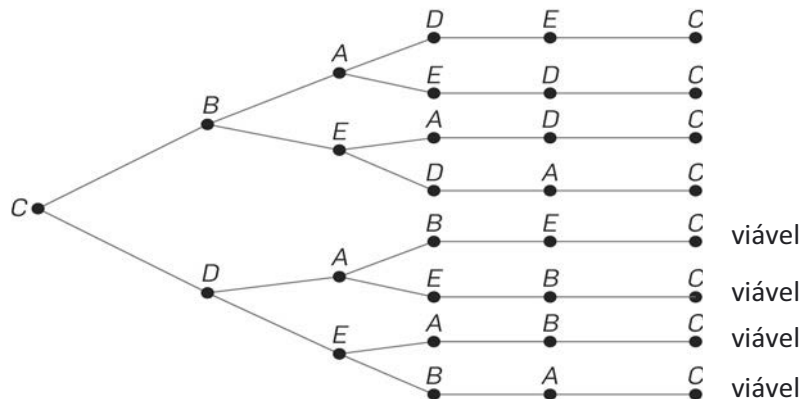
Vejamos as hipóteses possíveis para as duas alternativas e as que são viáveis.

Alternativa 1:



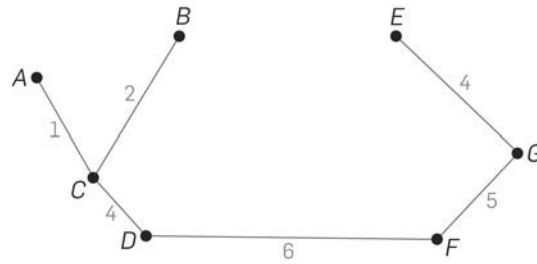
Temos quatro percursos viáveis para a alternativa 1.

Alternativa 2:



Considerando a alternativa 2, também temos quatro percursos viáveis. Logo, o Sr. Pereira não tem razão.

39. O tempo mínimo para os bombeiros será de 22 minutos e o percurso é representado pela seguinte árvore:

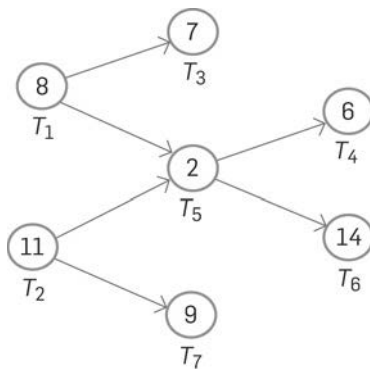


40.1

Tarefas	Tempo (H)	Precedências
T_1	6	Nenhuma
T_2	9	Nenhuma
T_3	10	Nenhuma
T_4	5	T_1
T_5	8	T_2 e T_3
T_6	12	T_3
T_7	12	T_4 e T_5
T_8	7	T_4 e T_6
T_9	6	T_6

- 40.2 $10 + 8 + 12 = 30$ ($T_3 \rightarrow T_5 \rightarrow T_7$)
O tempo mínimo é 30 dias.

41.1



- 41.2 $11 + 2 + 14 = 27$ horas ($T_2 \rightarrow T_5 \rightarrow T_6$)

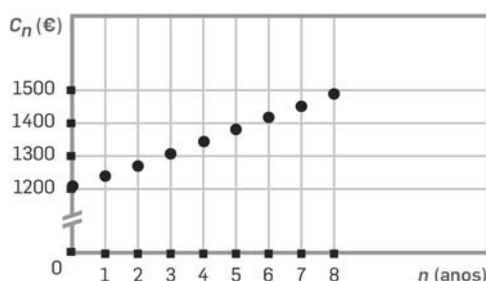
3.2 Modelos de crescimento

Atividade 1 (pág. 87)

1.1 $C_1 = 1200 + 1200 \times 0,03 = 1236 \text{ €}$ $C_3 = 1200 + 1200 \times 0,03 \times 3 = 1308 \text{ €}$

1.2 $C_n = 1200 + 1200 \times 0,03 \times n \Leftrightarrow C_n = 1200 (1 + 0,03n)$

1.3



$C_2 = 1272$

$C_4 = 1344$

$C_5 = 1380$

$C_6 = 1416$

$C_7 = 1452$

$C_8 = 1488$

Atividade 2 (pág. 90)

Usando a calculadora gráfica:

$y = 0,544378x + 32,425635$ (modelo linear)

Sendo $x = 83,0$, substituindo no modelo obtido:

$y = 0,544378 \times 83 + 32,425635 = 77,6090009$

Uma estimativa para a esperança média de vida à nascença de um homem austríaco será de, aproximadamente, 77,6 anos.

Atividade 3 (pág. 92)

1.ª casa: 1 grão (2^0)

2.ª casa: 2 grãos (2^1)

3.ª casa: 4 grãos (2^2)

⋮

n -ésima casa: 2^{n-1} grãos

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$

$1 + 2 = 3$ $(2^2 - 1)$ (soma das duas primeiras casas)

$1 + 2 + 4 = 7$ $(2^3 - 1)$ (soma das três primeiras casas)

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$ $(2^4 - 1)$ (soma das quatro primeiras casas)

⋮

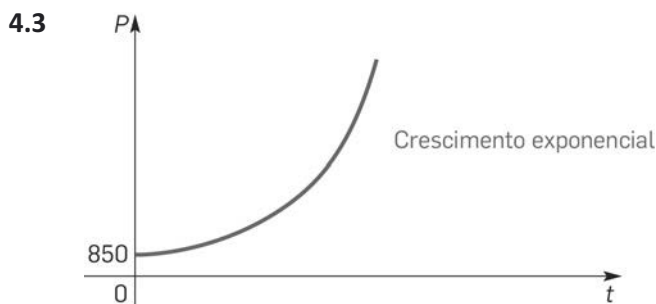
Soma das 64 casas = $2^{64} - 1$ grãos de trigo

Atividade 4 (pág. 92)

4.1 $P_0 = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 850$ pinheiros

4.2 $P_{10} = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 15\,094,06764$

Existirão cerca de 15 094 pinheiros.



Atividade 5 (pág. 95)

5.1 11 horas $\rightarrow t = 0$

$$T(0) = 18 + 70e^{-0,05 \times 0} = 88$$

Às 11 horas o chá estava a 88 °C.

5.2 $7 \times 5 = 35$ minutos

O oitavo registo foi feito 35 minutos depois do primeiro.

$$T(35) = 18 + 70e^{-0,05 \times 35} = 18 + 70e^{-1,75}$$

$$\text{Variação: } T(35) - T(0) = 18 + 70e^{-1,75} - 88 \approx -57,84$$

A variação da temperatura durante esses 35 minutos foi de, aproximadamente, -58 °C, o que significa que a temperatura desceu cerca de 58 °C.

Atividade 6 (pág. 97)

6.1 Casio: $y = 2,489 \cdot e^{-0,079 \cdot x}$ $C(t) = 2,489 \cdot e^{-0,079t}$

Texas: $y = 2,489 \cdot 0,924^x$ $C(t) = 2,489 \cdot 0,924^t$

6.2 6 h 30' = 6,5 h

$$C(6,5) = 2,489 \times e^{-0,079 \times 6,5} \approx 1,489411422$$

Ou

$$C(6,5) = 2,489 \times 0,924^{6,5} \approx 1,489411422$$

A concentração deverá ser de, aproximadamente, 1,49 mg/cm³.

6.3 $C(t) = 1,23$ mg/cm³

Casio:

$$2,489 \cdot e^{-0,079t} = 1,23 \Leftrightarrow e^{-0,079t} = \frac{1,23}{2,489} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,079} \times \ln\left(\frac{1,23}{2,489}\right) \approx 8,922 \approx 8 \text{ h } 55'$$

Texas:

$$2,489 \cdot 0,924^t = 1,23 \Leftrightarrow 0,924^t = \frac{1,23}{2,489} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1,23}{2,489}}{\ln 0,924} \approx 8,917 \approx 8 \text{ h } 55'$$

Atinge $1,23 \text{ mg/cm}^3$ após cerca de 8 horas e 55 minutos.

Atividade 7 (pág. 97)

$$P(t) = 1,65 \times 2^{\frac{t}{25}}, \quad t \geq 0 \quad (t = 0 \text{ corresponde a } 1900)$$

$$2000 - 1900 = 100(t)$$

$$P(10) = 1,65 \times 2^{\frac{100}{25}} = 1,65 \times 2^4 = 26,4$$

Teria sido, aproximadamente, 26 mil milhões de pessoas.

Nota: Progressão geométrica:

- Primeiro termo: $a_1 = 1,65$ razão: 2
 - Termo geral: $a_n = 1,65 \times 2^{n-1}$
 - Termo correspondente ao ano 2000: $n = 5$
- $$a_5 = 1,65 \times 2^{5-1} = 26,4 \text{ mil milhões}$$

Atividade 8 (pág. 101)

8.1 $1985 \rightarrow t = 5$

$$M(5) = \frac{58}{1 + 1,7 \cdot e^{-0,23 \times 5}} \approx 37,704$$

$$4750 \times 0,38 \approx 1805 \text{ mulheres}$$

Em 1985, a percentagem de novos encartados do sexo feminino era cerca de 38%, o que corresponde a 1805 mulheres (do total de 4750).

8.2 Queremos saber qual o primeiro valor de t , para o qual $M(t) > 50$.

Podemos colocar a função $M(t)$ na calculadora gráfica (editor de funções) e consultar a tabela de valores.

Math [Rad] [Norm] [d/c] [Rea]	
X	Y1
8	45.669
9	47.755
10	49.554
11	51.082
11	
FORMULA DELETE ROW EDIT GRAPH CON GRAPH PLT	

Podemos observar que o primeiro ano em que a percentagem de novos encartados do sexo feminino foi superior a 50% foi em $t = 11$, isto é, em $1980 + 11 = 1991$.

Atividade 9 (pág. 103)

9.1 Durante $84 : 7 = 12$ semanas

9.2

N.º semanas (s)	Comprimento em cm (C)
0	0
1	17,93
2	36,36
3	67,76
4	98,10
5	131,00
6	169,50
7	205,50
8	228,30
9	247,10
10	250,50
11	253,80
12	254,50

9.3
$$C(s) = \frac{259,9628}{1 + 21,8277 \times e^{-0,6306s}}$$

9.4 $\frac{100}{7} \approx 14,28571429$ semanas

$$C\left(\frac{100}{7}\right) \approx 259,27 \text{ cm}$$

Atividade 10 (pág. 105)

10.1 Para determinar o valor da desvalorização pedida, teremos de calcular:

$$C_7 - C_1 = 5,1 - 3 \log_{10} 7,1 - (5,1 - 3 \log_{10} 1,1) = 3 \log_{10} 1,1 - 3 \log_{10} 7,1 \approx 2,43 \text{ €}$$

10.2
$$\frac{C(2)}{3} = \frac{5,1 - 3 \log_{10} 2,1}{3} \approx 1,378$$

Queremos saber durante quantos dias $C(t) > 1,378$.

Consultando a tabela de valores da função (recorrendo à calculadora), podemos concluir que a cotação foi superior a 1,378 durante os primeiros 17 dias.

Atividade 11 (pág. 107)

11.1 $N(t) = -44\,767,55 + 5906,48 \ln(t)$

11.2.1 $N(2021) = -44\,767,55 + 5906,48 \ln(2021) \approx 188,723$

São esperadas cerca de 189 prescrições.

11.2.2

$$N(t) = 180 \Leftrightarrow -44\,767,55 + 5906,48 \ln(t) = 180 \Leftrightarrow \ln t = \frac{180 + 44\,767,55}{5906,48} \Leftrightarrow t \approx 2018,017$$

Deverá atingir as 180 prescrições em 2018.

Exercícios de aplicação (pág. 112)

1.1 $10\,000 + 11 \times 100 = 11\,000$ pares de calças

1.2 $10\,000 + 17 \times 100 = 11\,700$ pares de calças

2.1 50 páginas: $3 + 0,04 \times 50 = 5$ €

100 páginas: $3 + 0,04 \times 100 = 7$ €

2.2 $C(n) = 3 + 0,04n$

3. Altitude do nível do mar: 0 metros

$$1100 - 800 = 300 \text{ hPa}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{300}{a} \Leftrightarrow a = 3000$$

O alpinista encontra-se a uma altitude de 3000 metros.

4. Atividade de investigação

5. 1.º termo = 5 razão = 3

$$u_n = 5 + 3(n-1) \quad n \rightarrow \text{semanas}$$

$$42 = 5 + 3n - 3 \Leftrightarrow 3n = 40 \Leftrightarrow n = 13, (3)$$

Serão necessárias entre 13 e 14 semanas.

6. $P(2031) = 10\,561\,614 \times 1,0198^2 \approx 10\,983\,994$ habitantes

7. 100 anos = 10 décadas

$$P(2101) = 267\,785 \times 1,093^{10} \approx 651\,610 \text{ habitantes}$$

8. $C(12) = 0,5 \times 3^{12} = 625\,720,5 \approx 265,7$ m

9. $Valor(5) = 28\,800 \times 0,85^5 \approx 12\,778,71$ €

10. 1.º termo: $1 (4^0)$

2.º termo: $4 (4^1)$

3.º termo: $4^2 (4^2)$

$$u_n = 4^{n-1}$$

$$1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^9 = 349\,525 \text{ pessoas}$$

11.1 $11\,000 + 6 \times 150 = 11\,900$ toneladas

11.2 $Q(N) = 11\,000 + 150 \times N$

11.3 $Q(N) = 35\,000 \Leftrightarrow 150N = 24\,000 \Leftrightarrow N = 160$ (ao fim de 160 meses)

$160 : 12 \rightarrow 13$ anos e 4 meses

A capacidade máxima deverá ser atingida em abril de 2028.

12.1 Tomé: $10 + 100 \times 11 = 1110$ €

Joana: $0,5 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^8 = 0,5 \times (2^{12} - 1) = 2047,5$ €

A Joana.

12.2

	Tomé		Joana
1.º	10		0,5
2.º	110		1,5
3.º	210		3,5
4.º	310		7,5
5.º	410		15,5
6.º	510		31,5
7.º	610		63,5
8.º	710		127,5
9.º	810		255,5
10.º	910		511,5

O Tomé, ao fim de dez meses.

13. $D(n) = 1 \times 2^{n-1} \quad n = 8$

$D(8) = 2^7 = 128$ seres

14.1 $C_1 = 2000 \times 1,03 = 2060$ €

14.2 $C_{1/s} = 2000 \times 1,015^2 = 2060,45$ €

14.3 $C_{1/\text{dia}} = 2000 \times \left(1 + \frac{0,03}{365}\right)^{365} \approx 2060,91$ €

14.4 $C_{1/\text{hora}} = 2000 \times \left(1 + \frac{0,03}{365 \times 24}\right)^{8760} \approx 2060,91$ €

14.5 $C_{\text{continuamente}} = 2000 \times e^{0,03 \times 1} \approx 2060,91$ €

15.1 $P(6) = 1 + 3 \times e^{0,1 \times 6} \approx 6,466356401$

Será de, aproximadamente, 6466 elementos.

15.2 $P(t) > 5 \Leftrightarrow t \approx 2,88$ meses (calculadora)

Verificado através do gráfico ($t \approx 2,876820$)

16. $4000 = N_0 \times (1 + 0,055)^4 \Leftrightarrow N_0 = \frac{4000}{1,0554} \approx 3228,87$

A população inicial era de, aproximadamente, 3229 indivíduos.

17.1 $P(10) = 167\,646 \Leftrightarrow P_0 \times e^{0,02 \times 10} = 167\,646 \Leftrightarrow P_0 = \frac{167\,646}{e^{0,2}} \Leftrightarrow P_0 = 137\,256,9358$

Existiam cerca de 137 257 melgas.

17.2 $P(25) = 137\,257 \times e^{0,02 \times 25} \approx 226\,298,5355$

Ao fim de 25 dias existirão cerca de 226 299 melgas.

18.1 Recorrendo à calculadora gráfica, introduzimos os valores dados em duas listas e fazemos uma regressão exponencial.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	3		
2	5	18.39		
3				
4				

	Rad	Norm1	d/c	Real
ExpReg(a · e ^{bx})				
a =	3			
b =	0.37322903			
r =	1			
r ² =	1			
MSe =				
y = a · e ^{bx}				

Se usar $y = a \times b^x$, $a = 3$ e $b \approx 1,452$

Se usar $y = a \times e^{bx}$, $a = 3$ e $b \approx 0,373$

Logo, o modelo pedido será:

$P(t) = 3 \times 1,452^t$ ou $P(t) = 3 \times e^{0,373t}$

18.2 Zero horas de 18 de setembro $\rightarrow t = 0$

$M(0) = 19,39 \times e^{-0,08 \times 0} = 19,39$

Queremos determinar o menor valor de t , para o qual $M(t) \leq \frac{1}{8} M(0)$, isto é:

$M(t) \leq \frac{19,39}{8} \Leftrightarrow M(t) \leq 2,42375$

Colocamos a função $M(t) = 19,39 \times e^{-0,08t}$ no editor de funções da calculadora e analisamos a tabela de valores:

	Math	Rad	Norm1	d/c	Real
X					
25	2.8241				
26	2.4223				
27	2.2361				
28	2.0642				

Verificamos que o primeiro valor de $M(t)$ mais próximo de 2,43275 acontece para $x = 26$ ($t = 26$). Assim, terão de passar, pelo menos, 27 dias para que o número de microrganismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número contabilizado no instante em que se adicionou a substância.

$$19.1 \quad P(0) = \frac{100}{5 + 12e^{-0,3 \times 0}} = \frac{100}{17} \approx 5,88 \text{ milhares}$$

$$19.2 \quad P(10) = \frac{100}{5 + 12e^{-3}} \approx 17,87 \text{ milhares}$$

$$19.3 \quad P(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{100}{5 + 0} = 20 \text{ milhares (ou usar a calculadora gráfica para analisar o gráfico de } P(t))$$

$$20.1 \quad N(0) = \frac{2500}{1 + 1499 \times e^0} = \frac{2500}{1500} \approx 1,6$$

Havia um aluno infectado.

$$20.2 \quad N(7) = \frac{2500}{1 + 1499 \times e^{-0,82 \times 7}} \approx 429,632$$

Havia cerca de 429 alunos.

20.3 50% dos alunos: 1250

$$N(t) = 1250 \Leftrightarrow \frac{2500}{1 + 1499 \times e^{-0,82t}} = 1250 \Leftrightarrow 1 + 1499 \times e^{-0,82t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,82t} = \frac{1}{1499} \Leftrightarrow$$

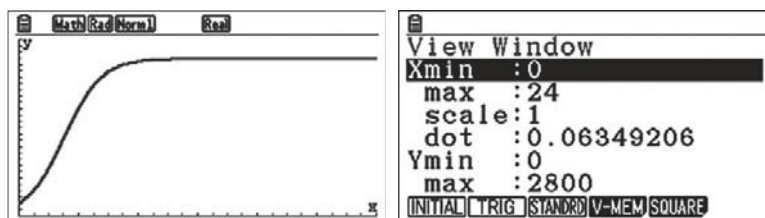
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,82} \ln\left(\frac{1}{1499}\right) \approx 8,92 \approx 9 \text{ dias}$$

1 de outubro $\rightarrow t = 0$, então, $t = 9$ corresponde ao dia 10 de outubro

21.1 Queremos saber o valor de t para o qual $P(t) = 2453$. Consultando a tabela de valores na calculadora, após a introdução da expressão no editor de funções, podemos concluir que o número de desempregados inscritos na delegação em questão é 2453 ao fim de oito meses.

Math [Std] Norm1 [d/c] Real	
X	Y1
6	2283.8
7	2398
8	2453.1
9	2478.7
FORMULA DELETE ROW EDIT GRAPH GPH-PLT	

21.2 Com auxílio da calculadora, podemos obter o gráfico da função:



Podemos observar que inicialmente o número de desempregados inscritos era de 200 e que, no final do período em estudo, era 2500 $\left(P(24) = \frac{5000}{2 + 23 \times e^{-0,8 \times 24}} \approx 2499,99 \right)$, o que corresponde ao número máximo de inscritos. Assim, verifica-se um aumento de $2500 - 200 = 2300$ desempregados inscritos nos 24 meses que durou o estudo. Por observação do gráfico, podemos também afirmar que inicialmente se verificou um aumento acentuado do número de desempregados inscritos, mas esse valor foi tendendo a estabilizar com o decorrer do tempo.

22.1

Duração (minutos)	Tarifário N
1	0,196
2	0,338
3	0,473
4	0,561
5	0,606
6	0,626
7	0,633
8	0,637
9	0,638
10	0,639

Introduzindo os valores do tarifário N no editor de estatística e fazendo uma regressão logística, obtemos os seguintes valores:

```

LogisticReg
a =5.7296446
b =0.93060234
c =0.63901636
MSe=1.065E-07
y=c/(1+a·e^(-bx))
COPY

```

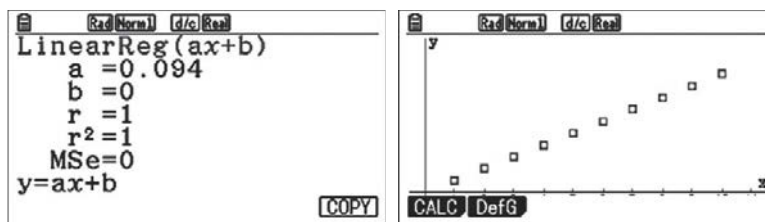
Assim, os valores pedidos são:

$a \approx 5,730$; $b \approx 0,931$ e $c \approx 0,639$

22.2 Com o auxílio da calculadora, após a introdução das listas:

Duração (minutos)	Tarifário M
1	0,094
2	0,188
3	0,282
4	0,376
5	0,470
6	0,564
7	0,658
8	0,752
9	0,846
10	0,940

obtemos o diagrama de dispersão, em que o eixo horizontal representa a duração das chamadas (em minutos) e o eixo vertical representa o custo da chamada (em euros).



O coeficiente de correlação é $r = 1$, logo, podemos dizer que a correlação linear é perfeita e concluir que o modelo linear é o adequado para descrever os dados relativos ao tarifário M.

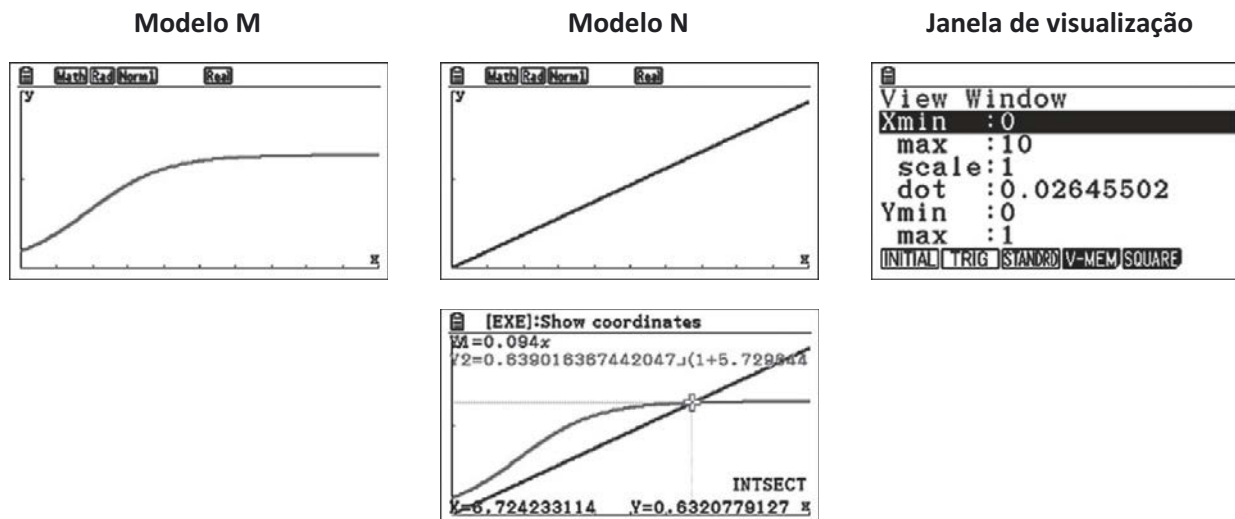
22.3 O modelo linear que se adequa ao tarifário M é (ver ecrã da calculadora na resolução do exercício 22.2):

$$M(t) = 0,094t$$

O modelo para o tarifário N, como já vimos é:

$$N(t) = \frac{0,639}{1 + 5,730 \times e^{-0,931t}}$$

Podemos observar a representação gráfica de cada um destes modelos (e a janela de visualização):



Assim, podemos observar que enquanto o modelo M aumenta proporcionalmente, no modelo N verifica-se um aumento acentuado nos primeiros minutos e depois uma estabilização a partir de uma certa altura (0,639 €). Apesar das diferenças de evolução nos dois tarifários para chamadas com uma duração total de 6,724 minutos, aproximadamente, o custo é igual para os dois. A partir daqui, o tarifário M torna-se mais dispendioso do que o tarifário N.

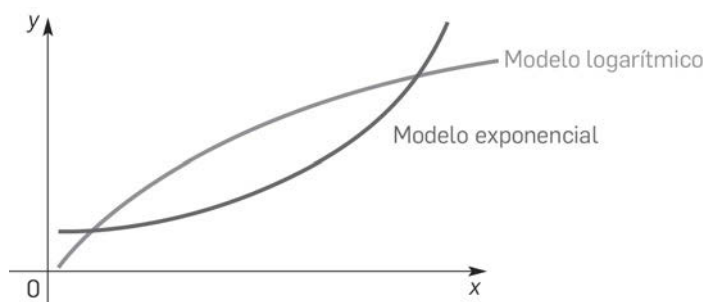
23. $L(h) > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) + 2 > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) > 2 \Leftrightarrow 80 + h > 10^2 \Leftrightarrow h > 20$
Será necessário trabalhar mais de 20 horas.

24. Modelo exponencial:

Casio: $y = 0,866 \times e^{0,324x}$

Texas: $y = 0,866 \times 1,383^x$

Modelo logarítmico: $y = 0,630 + 2,673 \ln x$



O modelo logarítmico é o que melhor se ajusta aos dados da experiência.

25.1 $D(67) = \log_2(67) = \frac{\ln 67}{\ln 2} \approx 6,1$

A diversidade será cerca de 6,1.

25.2 Queremos determinar o valor de n , de modo que:

$$D(n) \geq 4,3 \Leftrightarrow \log_2(n) \geq 4,3$$

Usamos a tabela de valores da função na calculadora (após a introdução da função):

X	Y3
18	4.1699
19	4.2479
20	4.3219
21	4.3923

Podemos verificar que o primeiro a ultrapassar 4,3 é 4,3219 e corresponde ao valor $x = 20$. Assim, é necessário um número mínimo de 20 espécies no aquário para que a diversidade não seja inferior a 4,3.

26.1 $2018 - 2006 = 12 \rightarrow$ número de anos decorridos

Assim, $A(12) = 100 \ln(4 + 0,49 \times 12) \approx 229,05 \dots$

O número de unidades de sangue a recolher em 2018 será de, aproximadamente, 229 milhares.

26.2 Podemos recorrer à calculadora gráfica para observar a tabela de valores da função A :

X	Y1
14	238.5
15	242.92
16	247.14
17	251.2

Pretendemos determinar o menor valor de t para o qual $A(t) \geq 250$. Concluimos que terão de passar 17 anos até que o número de unidades de sangue recolhidas ultrapasse as 250 mil por ano. Assim, as necessidades do país serão asseguradas em $2006 + 17 = 2023$.

Tema 3 – Exercícios globais (pág. 116)

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. B | 3. B | 5. A | 7. A | 9. D |
| 2. C | 4. B | 6. C | 8. C | 10. D |

11.1 Apenas existe no grafo D, pois é o único onde todos os vértices têm grau par.

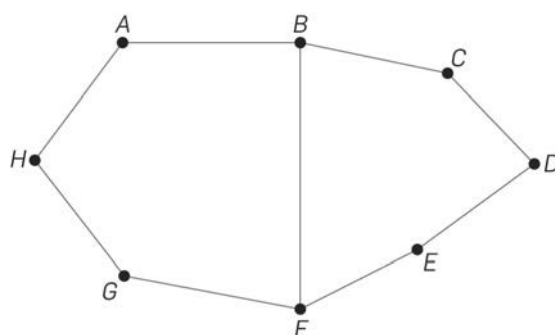
11.2 A: duplicar a aresta AE

B: duplicar as arestas DG e GH

C: duplicar as arestas AE e BC

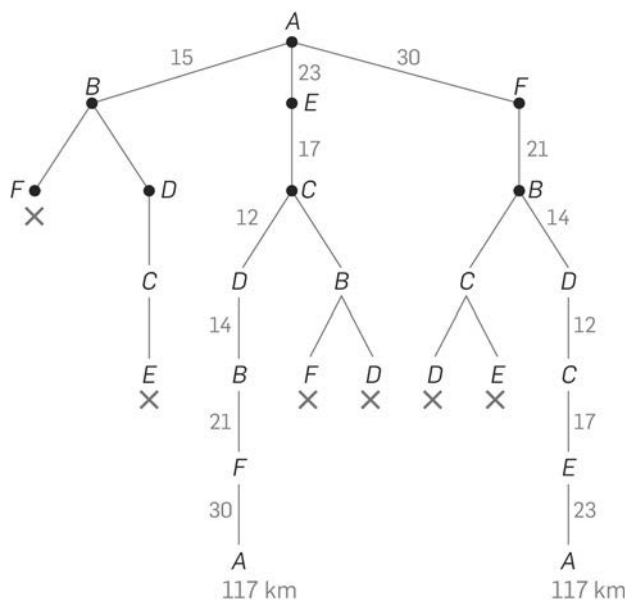
12. A – É possível: $A B C F E D A$
 B – Não é possível
 C – É possível: $A B C D E A$
 D – Não é possível

13.



Por exemplo: tem um circuito hamiltoniano ($A B C D E F G H A$), mas não tem circuito euleriano, pois tem, pelo menos, um vértice de grau ímpar (B e F).

14.1

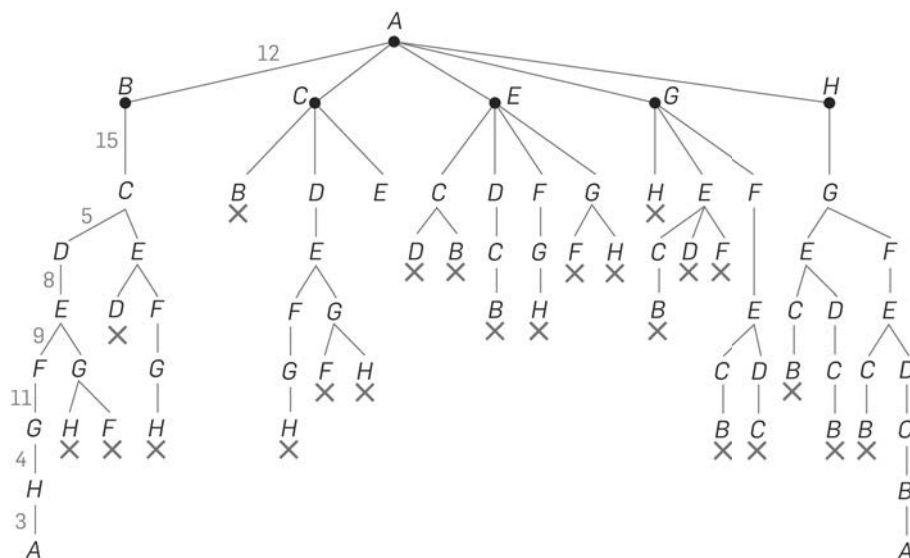


Só há dois percursos possíveis e inversos: $A E C D B F A$ ou $A F B D C E A$, com um total de 117 quilómetros.

- 14.2
- | | |
|--|--------|
| $B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A \xrightarrow{30} F$ | 96 km |
| $C \xrightarrow{12} D \xrightarrow{14} B \xrightarrow{21} F \xrightarrow{30} A \xrightarrow{23} E$ | 94 km |
| $D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A \xrightarrow{30} F \xrightarrow{21} B$ | 103 km |
| $E \xrightarrow{17} C \xrightarrow{12} D \xrightarrow{14} B \xrightarrow{21} F \xrightarrow{30} A$ | 94 km |
| $F \xrightarrow{21} B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A$ | 87 km |

Escolheria a escola A ou F (87 quilómetros, não tendo de regressar à primeira escola).

15.1



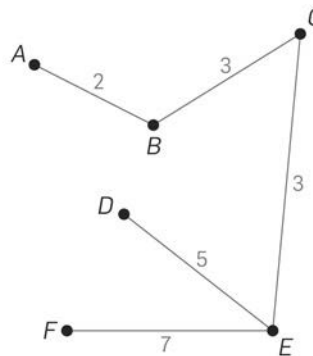
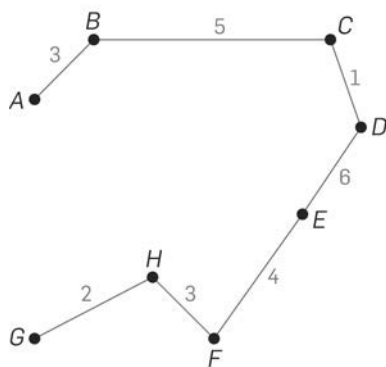
Só há dois percursos possíveis e são inversos: $A B C D E F G H A$ e $A H G F E D C B A$.

15.2 Ambos têm 67 unidades de comprimento.

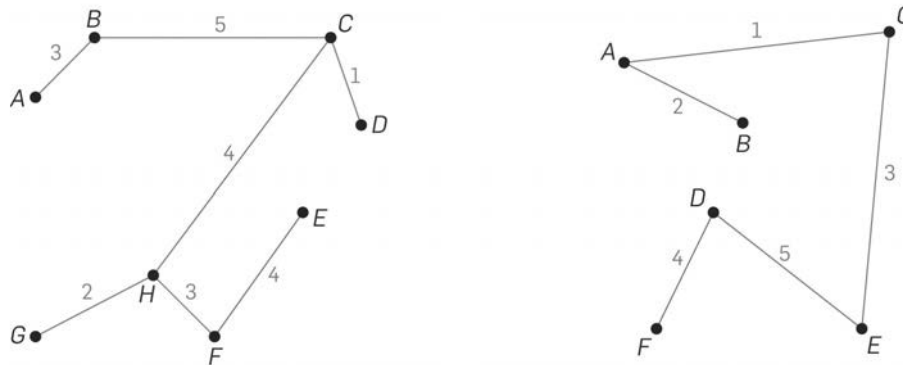
- 15.3
- | | |
|---|----|
| $A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$: | 67 |
| $B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$: | 67 |
| $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$: | 67 |
| $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D$: | 67 |
| $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E$: | 67 |
| $F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F$: | 67 |
| $G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$: | 67 |
| $H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$: | 67 |

Partindo de qualquer vértice, a distância total é sempre igual a 67.

16.1 Por exemplo:



16.2 Por exemplo:



17.1 No grafo existem dois vértices de grau ímpar (C e F têm grau 3), logo, não é possível encontrar um circuito de Euler. Assim, as pretensões do António não podem ser todas satisfeitas.

17.2 Consideremos os pesos das arestas sugeridas pelo João e a respetiva soma:

$$AB - FG - BF - BE - CE - CD$$

$$1253 + 832 + 938 + 712 + 941 + 911 = 5587 \text{ metros}$$

Aplicando o algoritmo proposto pelo João:

Passo 1: as arestas com menor peso são $BE - 712$ e $FG - 832$.

Passo 2: a aresta seguinte com menor peso e que não fecha circuito é $CD - 911$.

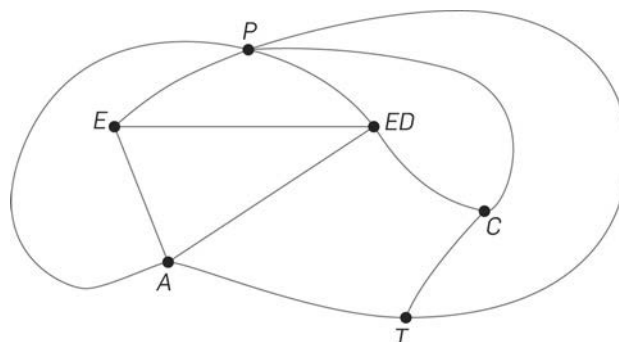
Passo 3: segue-se a aresta $BF - 938$, depois a aresta $EC - 941$ e, por fim, a aresta $AG - 1248$.

O comprimento total para a proposta do João é:

$$712 + 832 + 911 + 938 + 941 + 1248 = 5582 \text{ metros}$$

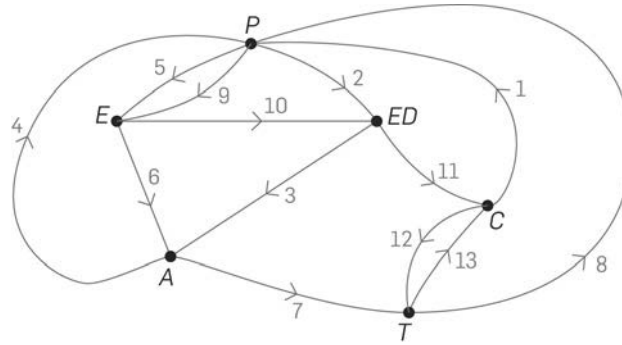
Assim, a empresa deverá optar pela proposta do João, pois utiliza menos 5 metros de fibra ótica do que a proposta do José.

18. Um grafo representativo desta planta terá como vértices cada um dos espaços do recinto; as arestas serão as ligações existentes entre cada um desses espaços («as portas»). Para simplificar, vamos identificar cada vértice pela(s) primeira(s) letra(s) do espaço que representa: por exemplo, P representa o pátio:



Os vértices C , E , P e T têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler, o qual seria necessário para a ronda ao recinto que a funcionária pretendia. Para solucionar o problema, teremos de eulerizar o grafo, isto é, duplicar o menor número de arestas de modo a que todos os vértices fiquem com grau par. Conseguimos uma boa eulerização duplicando as arestas TC e PE , passando os vértices T , C , P e E a ter grau par, como os restantes.

A ronda pretendida para a funcionária pode ser, por exemplo:

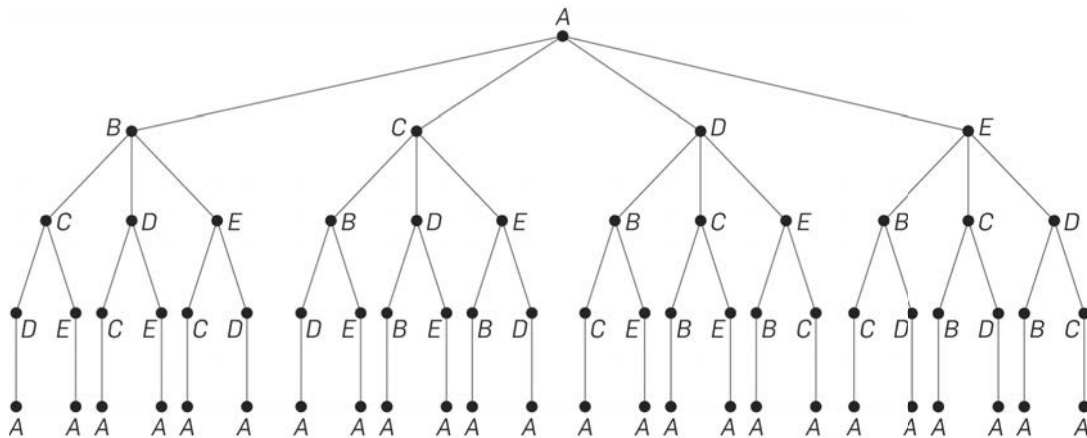


$C - P - ED - A - P - E - A - T - P - E - ED - C - T - C$

19.1 São seis os percursos que começam em A e seguem de imediato para D:

$A D E C B$; $A D E B C$; $A D B C E$; $A D B E C$; $A D C E B$; $A D C B E$

19.2 Podemos fazer um diagrama em árvore para mais facilmente contar os percursos possíveis:



Contámos 24 percursos. No entanto, como para cada um existe o percurso no sentido contrário ($A B C D E A$ é idêntico a $A E D C B A$, em número de quilómetros), existem $24 : 2 = 12$ voltas distintas que podem fazer parte da lista do Miguel.

20. 1.º caso: a estrada que liga A a B está transitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F.

2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).

3.º passo: seleciona-se B, de seguida D, depois C e regressamos a F.

Distância total: $18 + 28 + 32 + 48 + 20 = 146$ km

2.º caso: a estrada que liga A a B está intransitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F.

2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).

3.º passo: seleciona-se D (não pode ser B porque está intransitável), de seguida B, depois C e regressamos a F.

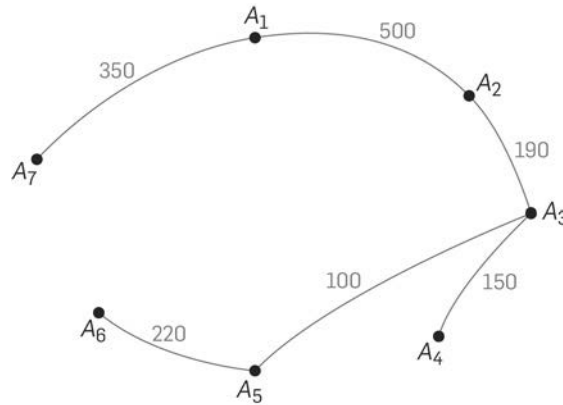
Distância total: $18 + 30 + 32 + 36 + 20 = 136$ km

A afirmação constante do anúncio é falsa, pois a distância total a percorrer caso a estrada que liga A a B esteja intransitável é inferior (em 10 quilómetros) e não superior.

21. Começamos por ordenar por ordem crescente as distâncias entre cada par de pavilhões:

$$\begin{aligned}
 &A_3 \text{---}_{100}\text{---} A_5; A_3 \text{---}_{150}\text{---} A_4; A_2 \text{---}_{190}\text{---} A_3; A_2 \text{---}_{200}\text{---} A_5; A_4 \text{---}_{220}\text{---} A_5; \\
 &A_5 \text{---}_{220}\text{---} A_6; A_4 \text{---}_{240}\text{---} A_6; A_2 \text{---}_{340}\text{---} A_6; A_1 \text{---}_{350}\text{---} A_7; A_1 \text{---}_{500}\text{---} A_2; \\
 &A_6 \text{---}_{650}\text{---} A_7; A_1 \text{---}_{730}\text{---} A_6
 \end{aligned}$$

O grafo, nas condições impostas, será:



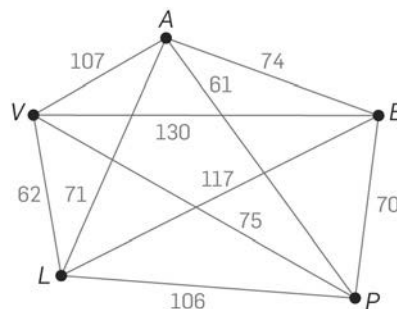
Uma vez selecionadas $7 - 1 = 6$ arestas, calculamos o comprimento total de cabo de fibra ótica:

$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

O custo mínimo para a instalação será:

$$1510 \times 3,40 = 5134 \text{ €}$$

22. Um grafo ponderado representativo da situação pode ser (os vértices estão designados pela primeira letra de cada cidade):



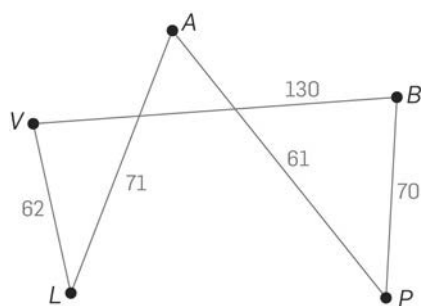
Vamos aplicar cada uma das opções para saber se o Luís tem razão ou não.

Opção 1: $A \text{---}_{61}\text{---} P \text{---}_{70}\text{---} B \text{---}_{117}\text{---} L \text{---}_{62}\text{---} V \text{---}_{107}\text{---} A$

$$\text{Distância total: } 61 + 70 + 117 + 62 + 107 = 417 \text{ km}$$

Opção 2: $A \text{---}_{31}\text{---} P; L \text{---}_{62}\text{---} V; B \text{---}_{70}\text{---} P; A \text{---}_{71}\text{---} L; A \text{---}_{74}\text{---} B; P \text{---}_{75}\text{---} V;$

$$P \text{---}_{106}\text{---} L; A \text{---}_{107}\text{---} V; B \text{---}_{117}\text{---} L; B \text{---}_{130}\text{---} V$$

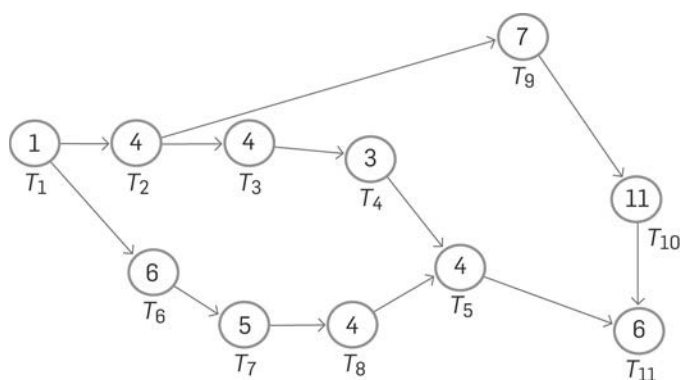


Distância total: $61 + 62 + 70 + 71 + 130 = 394$ km

Percurso: $A - P - B - V - L - A$ (ou o inverso)

O Luís não tem razão.

23.1



23.2 O António demora $1 + 4 + 7 + 11 + 6 = 29$ dias a concluir o projeto, pelo que cumpre o prazo estipulado.

23.3 O caminho crítico para este projeto é $T_1 - T_2 - T_9 - T_{10} - T_{11}$.

24.1 $6 + 2 \times 2 = 10$ €

24.2 $6 + 14 \times 2 = 34$ €

24.3 $P(h) = 6 + 2(h-1)$, $h \in \mathbb{N}$

25.1 $C_5 = 10\,000 + 5 \times 10\,000 \times 0,1 = 15\,000$ €

Rendeu $15\,000 - 10\,000 = 5000$ €

25.2 $50\,000 = 10\,000 + n \times 10\,000 \times 0,1 \Leftrightarrow 1000n = 40\,000 \Leftrightarrow n = 40$

Ao fim de 40 anos.

25.3 $50\,000 = 10\,000 \times 1,10^n \Leftrightarrow 1,10^n = 5 \Leftrightarrow n \approx 16,88631$

Ao fim de, aproximadamente, 17 anos.

26. $P(20) = 6000 \times 0,92^{20} \approx 1132,16$

Terá cerca de 1132 habitantes.

27. $2000 = V_0 \times 1,10^3 \Leftrightarrow V_0 \approx 1502,629602$

Ganhava cerca de 1502,63 €.

28.1 $P_N(n) = 30\,000 \times 1,12^{\frac{n}{10}}, n \text{ anos}$

$$P_P(n) = 50\,000 \times 1,07^{\frac{n}{10}}$$

28.2 $30\,000 \times 1,12^{\frac{n}{10}} = 50\,000 \times 1,07^{\frac{n}{10}} \Leftrightarrow \left(\frac{1,12}{1,07}\right)^{\frac{n}{10}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{n}{10} = 11,185 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 111,85 \Leftrightarrow n \approx 112$$

Ao fim de, aproximadamente, 11 décadas a população dos dois concelhos é igual.

29.1 $V_x = 1200 \times 12 = 14\,400 \text{ €}$ 1 ano

$$V_y = 1000 \times 12 = 12\,000 \text{ €}$$

Deve escolher a empresa X.

29.2 $V_x = 14\,400 + 12 \times 1450 = 31\,800 \text{ €}$

$$V_y = 12\,000 + 12 \times 1300 = 27\,600 \text{ €}$$

Deve escolher a empresa X.

29.3 $V_x = 12(1200 + 1450 + 1700 + 1950 + 2200) = 102\,000 \text{ €}$

$$V_y = 12(1000 + 1300 + 1690 + 2197 + 2856,1) = 108\,517,2 \text{ €}$$

Deve escolher a empresa Y.

30.1 $M_A(4) = 1000 \times 1,015^4 \approx 1061,36 \text{ €}$

$$M_B(4) = 1000 + 4 \times 0,017 \times 1000 \approx 1068 \text{ €}$$

A modalidade B é mais vantajosa.

30.2 $1000 \times 1,015^n > 1000(1 + 0,017n) \Leftrightarrow 1,015^n > 1 + 0,017n \Leftrightarrow n > 17,43746$

(calculadora gráfica)

A partir do 18.º ano, a modalidade A passa a ser mais vantajosa.

31.1 Parque A: $0,8 + 1,1 + 1,4 = 3,3 \text{ €}$

$$\text{Parque B: } 0,8 + 0,8 + 1,3 + 0,8 \times 1,3^2 = 3,192 \text{ €}$$

31.2 5 horas: $P_A: 3,3 + 1,7 + 2 = 7 \text{ €}$

$$P_B: 3,192 + 0,8(1,3^3 + 1,3^4) \approx 4,04 \text{ €}$$

6 horas: $P_A: 7 + 2,3 = 9,3 \text{ €}$

$$P_B: 4,04 + 0,8 \times 1,3^5 \approx 7,75 \text{ €}$$

7 horas: $P_A: 9,3 + 2,6 = 11,9 \text{ €}$
 $P_B: 7,75 + 0,8 \times 1,3^6 \approx 11,61 \text{ €}$

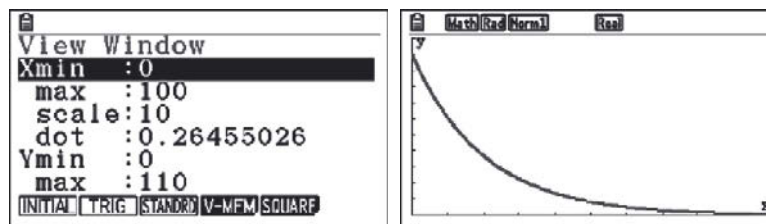
8 horas: $P_A: 11,9 + 2,9 = 14,8 \text{ €}$
 $P_B: 11,61 + 0,8 \times 1,3^7 \approx 16,63 \text{ €}$

Se o carro estiver no parque oito horas ou mais, compensa ficar no Parque A.

32.1 $M(0) = 100 \times e^{-0,05 \times 0} = 100 \text{ mg}$

32.2 $M(3) = 100 \times e^{-0,05 \times 3} \approx 86,07079764 \approx 86,07 \text{ mg}$

32.3 Gráfico (calculadora)



32.4 O elemento tende a desintegrar-se completamente.

33.1 $g(0) = \frac{100}{1 + e^0} = \frac{100}{2} = 50 \text{ centenas} = 5000 \text{ gafanhotos}$

33.2 $g(10) = \frac{100}{1 + e^{-0,03 \times 10}} = \frac{100}{e^{-0,3}} \approx 57,4425$

Haverá cerca de 57,44 centenas de gafanhotos.

33.3 À medida que o número de dias aumenta, o número de gafanhotos tende a aumentar, aproximando-se das 100 centenas.

34.1 $\log 100 = \log 10 + 0,7 \log m \Leftrightarrow 2 = 1 + 0,7 \log m \Leftrightarrow \log m = \frac{10}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 10^{\frac{10}{7}} \approx 26,83 \text{ gramas}$

34.2 $\log x = \log 10 + 0,7 \log 300 \Leftrightarrow \log x = 1 + 0,7 \log 300 \Leftrightarrow \log x \approx 2,733984878 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 10^{2,734} \approx 541,98 \text{ microlitros}$

35. Seja C_0 o dinheiro que recebeu quando completou o Ensino Secundário. Com uma taxa de juro anual de 1,50%, ao fim de:

- um ano, o Dinis terá $100 + 1,5 = 101,50\%$ de C_0 , isto é, terá $C_0 \times 1,0150$

- dois anos, terá $C_0 \times 1,0150 \times 1,0150 = C_0 \times 1,0150^2$

...

- seis anos, terá $C_0 \times 1,0150^6 = 1530,82 \Leftrightarrow C_0 \approx 1400 \text{ €}$

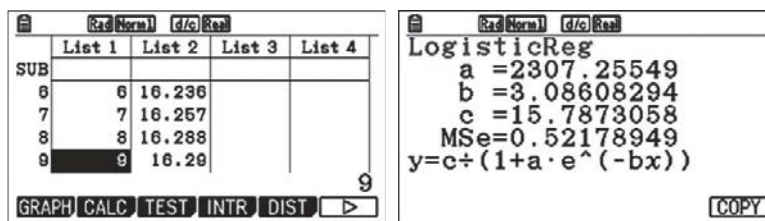
O Dinis recebeu 1400 € quando terminou o Ensino Secundário.

36.1 $N(6) = 4,8 \times 3^{0,15 \times 6} \approx 12,902$

$N(5) = 4,8 \times 3^{0,15 \times 5} \approx 10,942$

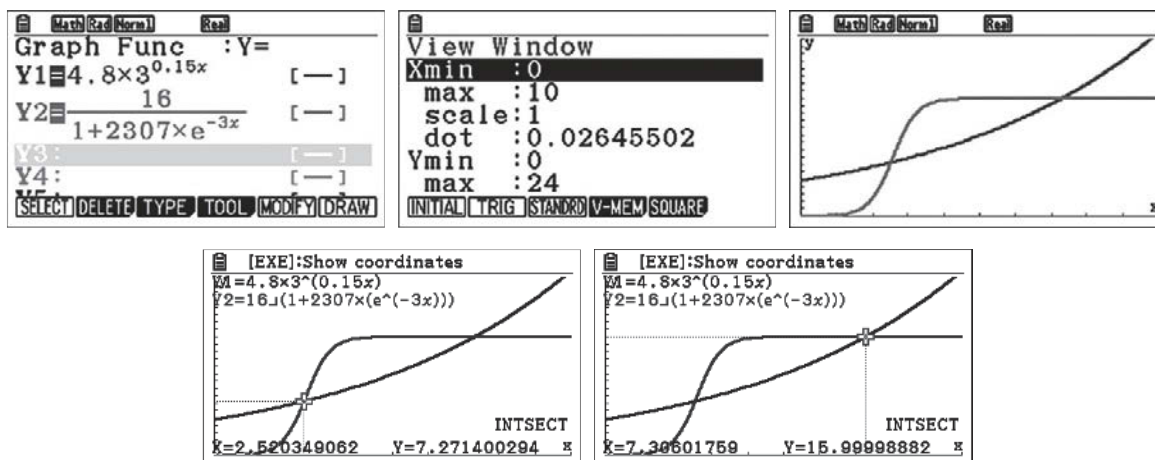
$N(6) - N(5) = 1,96$, o que significa que, entre o quinto e o sexto mês, as vendas de telemóveis aumentaram cerca de 1,96 milhares.

36.2 $V(t)$ é um modelo logístico, pelo que, com o auxílio da calculadora:



$a \approx 2307,26$; $b \approx 3,09$ e $c \approx 15,79$

36.3 Podemos observar, com o auxílio da calculadora, o gráfico das duas funções (N a azul e V a vermelho), com a janela de visualização utilizada:



De facto, é verdade que, até ao final do segundo mês, o número N de telemóveis vendidos é maior do que o número V de computadores, uma vez que a curva representativa de N se encontra acima da curva representativa de V . A partir do terceiro mês, e até aproximadamente o final do sétimo, o número V de computadores vendidos é superior ao de telemóveis vendidos. A partir do oitavo mês, a representação gráfica da função N fica acima da representação gráfica de V . Logo, o número de telemóveis vendidos volta a ser superior. Assim, a afirmação é falsa.

37.1 $C_n = C + C \times n \times i$

$1680 = 1500 + 3000i \Leftrightarrow i = \frac{180}{3000} \Leftrightarrow i = 0,06$

A taxa de juro trimestral é de 6%.

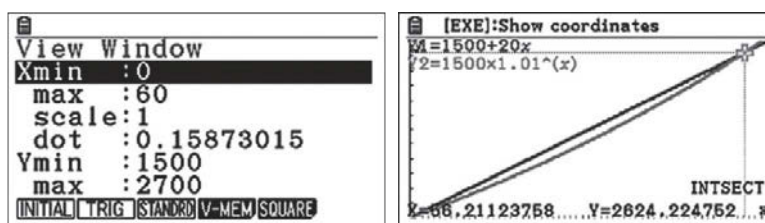
- 37.2** Ao analisar o capital no final de cada mês da conta X , verificamos que a variação é constante, pois de um mês para o seguinte aumenta 20 €, o que nos leva a optar por um modelo linear:

$$y = 1500 + 20x$$

Analisando a conta Y , verificamos que o capital no final de cada mês é 1,01 vezes maior do que no mês anterior, o que corresponde a um aumento mensal de 1%. Assim, leva-nos a optar por um modelo exponencial:

$$y = 1500 \times 1,01^x$$

Usando a calculadora gráfica para uma visualização simultânea das duas funções:



Podemos verificar que, no final do mês 56, o montante existente na conta Y ainda não era superior ao da conta X , mas, no final do mês 57, este facto já se verificava. Logo, a Carla tem razão na afirmação que fez.

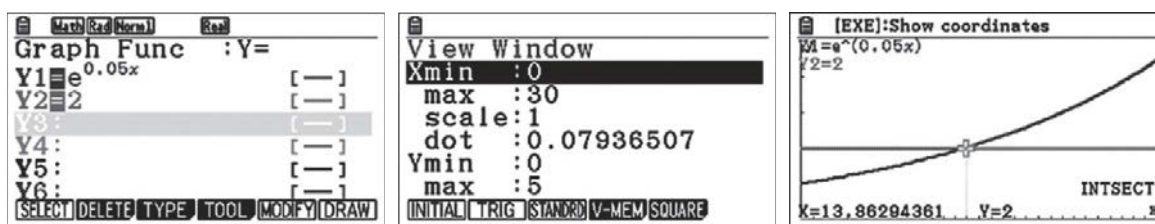
37.3
$$N(10) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15 \times 10}} \approx 29,995$$

O número de aplicações feitas é de cerca de 30.

38.1
$$P(0) = 1800 \times e^{0,05 \times 0} \approx 1800$$

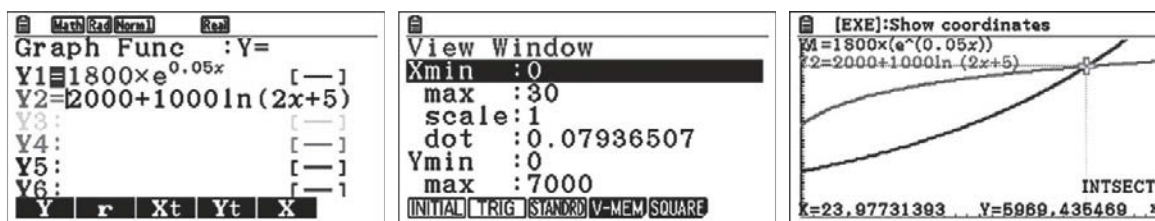
$$P(t) = 2 \times 1800 \Leftrightarrow e^{0,05t} = 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica:



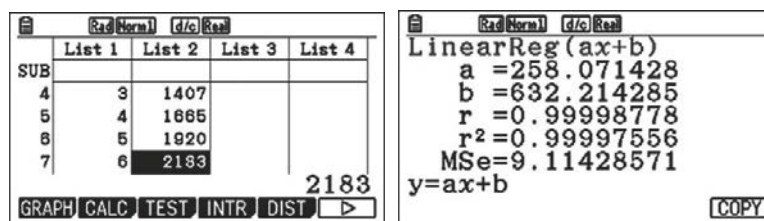
Serão necessários cerca de 14 anos para que o número de habitantes de Peso duplique.

- 38.2** Recorremos mais uma vez às potencialidades gráficas da calculadora, agora para resolver a condição $P(t) > N(t) \Leftrightarrow 1800 \times e^{0,05t} > 2000 + 1000 \ln(2t + 5)$:



Serão necessários cerca de 24 anos para que o número de habitantes de Peso seja superior ao de Neiva.

38.3 Mais uma vez, utilizamos a calculadora gráfica, agora para determinar uma regressão linear:



Obtemos: $R(t) = 258,07x + 632,21$

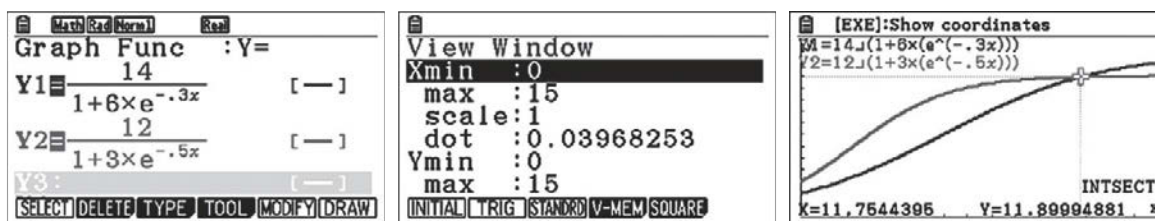
A data 1 de junho de 2012 corresponde a $t = 12$. Logo, $R(12) = 258,07 \times 12 + 632,21 = 3729,05$, isto é, a 1 de junho de 2012, o número de habitantes de Runa deveria ser, aproximadamente, 3729.

39.1 $f(0) = \frac{14}{1 + 6 \times e^{-0,3 \times 0}} = \frac{14}{7} = 2$ milhares

$$g(0) = \frac{12}{1 + 3 \times e^{-0,5 \times 0}} = \frac{12}{4} = 3 \text{ milhares}$$

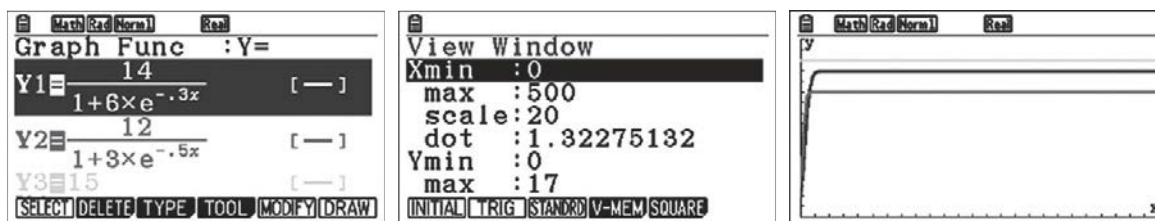
O álbum mais vendido em pré-venda foi o G.

39.2 Recorrendo à calculadora gráfica:



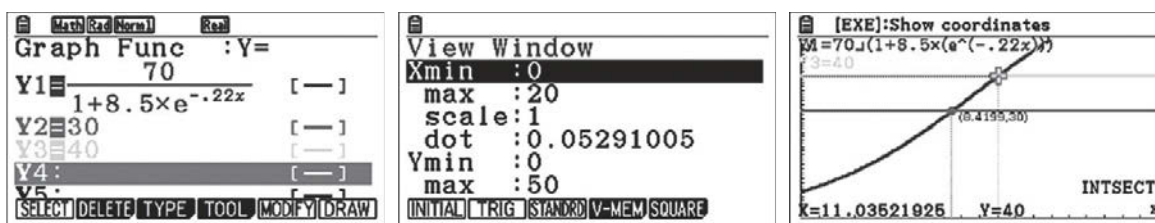
Decorreram cerca de 12 meses.

39.3 Colocando as funções no editor da calculadora e escolhendo uma janela adequada (com um valor de t entre 0 e 500):



Podemos concluir, com alguma segurança, que nenhum dos álbuns será galardoado com o Disco de Platina.

- 40.1** Vamos utilizar a calculadora para determinar a idade da Laura quando atingiu os 30 e os 40 quilogramas.



Concluimos que a Laura atingiu os 30 quilogramas aos 8,4199 anos e os 40 quilogramas aos 11,0352 anos.

Uma vez que $11,0352 - 8,4199 = 2,6153$ (2 anos) e $12 \times 0,6153 = 7,3836$ (7 meses), durante cerca de dois anos e sete meses, o peso da Laura situou-se entre os 30 e os 40 quilogramas.

- 40.2** Como nasceu a 1 de junho de 1998, no dia 1 de junho de 2012, a Laura fez 14 anos.

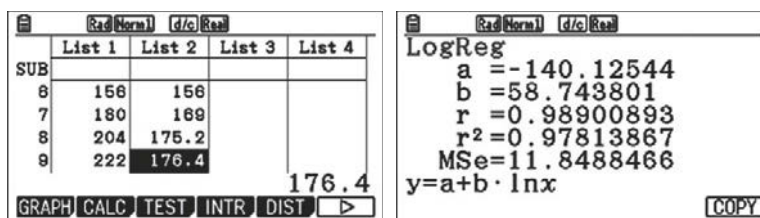
$$P(14) = \frac{70}{1 + 8,5 \times e^{-0,22 \times 14}} \approx 50,336$$

Consultando o gráfico, a altura da Laura deveria ser de 1,600 metros. Então:

$$\text{IMC} = \frac{50,336}{1,600^2} \approx 19,6625$$

No dia 1 de junho de 2012, o IMC da Laura era, aproximadamente, 19,7.

- 40.3** Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar os valores a e b da expressão $y = a + b \ln x$:



O modelo que melhor se ajusta aos valores da tabela é:

$$y = -140,125 + 58,744 \ln x$$

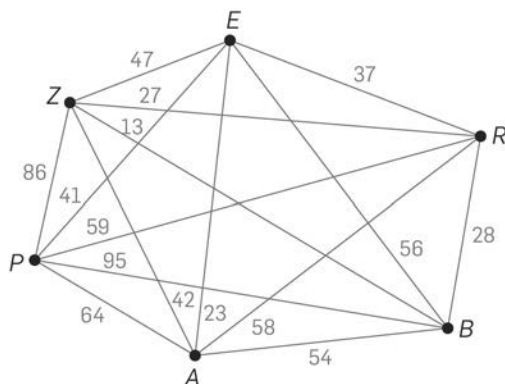
A altura do André no dia 1 de dezembro de 2014 (terá 16 anos e 6 meses, ou seja, $16 \times 12 + 6 = 198$ meses):

$$y = -140,125 + 58,744 \ln(198) \approx 170,5 \text{ cm}$$

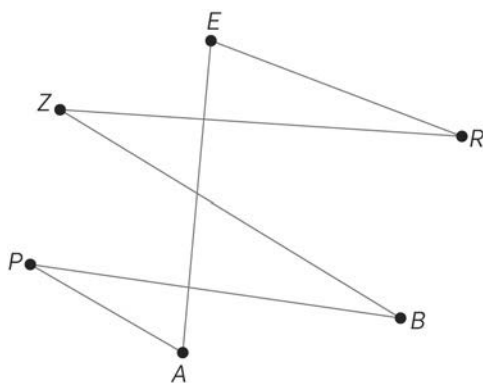
Tema 3 – Teste final (pág. 132)

1.1 e 1.2 Os vértices representam cada uma das cidades (designadas pela primeira letra de cada uma, exceto Estremoz, que designaremos pela letra Z); as arestas representam as ligações entre as diferentes cidades.

Cada aresta terá um peso associado que indica a distância, em quilómetros, entre as cidades representadas nos vértices adjacentes.

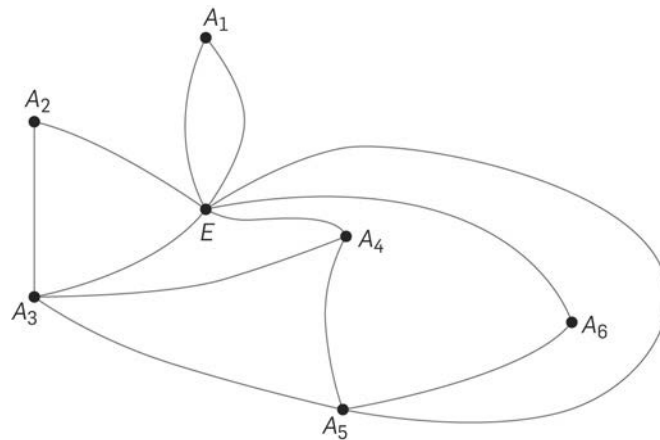


1.3 Começamos com a aresta $Z \xrightarrow{13} B$, seguida de $A \xrightarrow{23} E$ e de $Z \xrightarrow{27} R$. Excluimos $R \xrightarrow{28} B$, que fecha um circuito, e continuamos com $R \xrightarrow{37} E$, excluindo sempre as arestas que fecham circuito e que não se encontram três arestas no mesmo vértice. Finalizamos com $P \xrightarrow{64} A$ e $P \xrightarrow{95} B$.



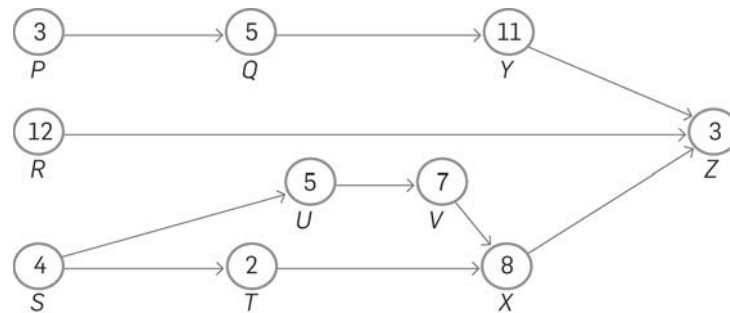
O comprimento mínimo será: $13 + 23 + 27 + 37 + 64 + 95 = 259$ quilómetros

- 2.1** Os vértices representam cada uma das salas e o exterior; as arestas representam as ligações (portas) existentes entre cada sala e entre estas e o exterior.



- 2.2** Não é possível, porque existem dois vértices de grau ímpar (A_4 e E), o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler.
- 2.3** Basta duplicar a aresta EA_4 , o que faz com que os vértices E e A_4 passem a ter grau par. Assim, se abrirmos uma porta entre a sala A_4 e o exterior já seria possível, partindo do exterior, passar por todas as portas uma única vez e regressar ao exterior.

3.1



- 3.2** Duração mínima: $4 + 5 + 7 + 8 + 3 = 27$ meses
Caminho crítico: $S - U - V - X - Z$

4.1 $V(6) = \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 6}} - 275 \approx 234,043$

$$V(7) = \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 7}} - 275 \approx 247,384$$

$$V(7) - V(6) = 13,341 \text{ litros} = 1334,1 \text{ centilitros}$$

$$\text{Número de embalagens: } \frac{1334,1}{75} = 17,788$$

Na sétima semana, foram vendidas 17 garrafas.

4.2 Embalado: 43%

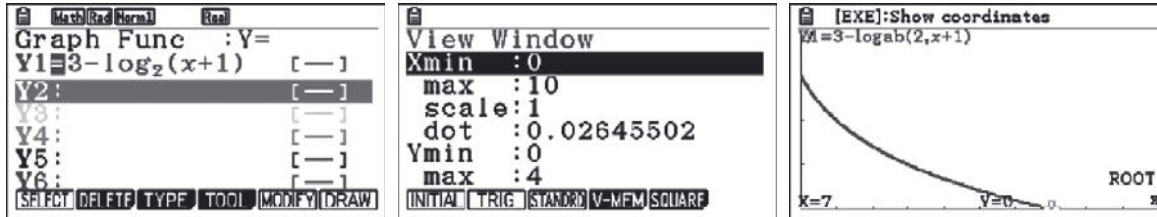
A granel: 57%

$$V(10) = \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 10}} - 275 \approx 266,874 \text{ litros}$$

$$V(10) \times 0,57 = 266,874 \times 0,57 \approx 152,12 \text{ litros}$$

Foram vendidos cerca de 152 litros a granel.

- 5.1 Queremos saber ao fim de quanto tempo $Q(t) = 0$. Obtemos o gráfico da função Q com auxílio da calculadora e determinamos o seu zero.



O recipiente ficou vazio ao fim de 7 minutos.

5.2 $t = \frac{7}{2} = 3,5$

$$Q(3,5) = 3 - \log_2(3,5 + 1) \approx 0,83$$

Ao fim de 3,5 minutos, a quantidade de substância no recipiente era cerca de 0,8 centilitros.

1.1 Introdução

Atividade 1 (pág. 137)

De Méré já tem 32 pistolas, porque mesmo que perca na próxima jogada, elas serão dele. Quanto às outras 32 pistolas, poderá ganhá-las ou não, o risco é igual. Assim, deverão dividir igualmente as 32 pistolas, ficando 16 para cada um. Resumindo, de Méré fica com 48 (32 + 16) e o adversário com 16.

Atividade 2 (pág. 137)

Decomposição do 11:

$$\begin{aligned} 11 &= 1 + 5 + 5 && \rightarrow && 3 \text{ formas diferentes} \\ 11 &= 1 + 4 + 6 && \rightarrow && 6 \\ 11 &= 2 + 3 + 6 && \rightarrow && 6 \\ 11 &= 2 + 4 + 5 && \rightarrow && 6 \\ 11 &= 3 + 3 + 5 && \rightarrow && 3 \\ 11 &= 4 + 4 + 3 && \rightarrow && 3 \end{aligned}$$

Número de possibilidades de sair 11:

$$\underbrace{3 \times 3}_{\text{com dois números iguais}} + \underbrace{3 \times 6}_{\text{com todos os números diferentes}} = 27$$

Decomposição do 12:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 + 5 + 6 && \rightarrow && 6 \text{ formas diferentes} \\ 12 &= 2 + 4 + 6 && \rightarrow && 6 \\ 12 &= 3 + 3 + 6 && \rightarrow && 3 \\ 12 &= 2 + 5 + 5 && \rightarrow && 3 \\ 12 &= 3 + 4 + 5 && \rightarrow && 6 \\ 12 &= 4 + 4 + 4 && \rightarrow && 1 \end{aligned}$$

Número de possibilidades de sair 12:

$$\underbrace{3 \times 2}_{\text{com dois números iguais}} + \underbrace{6 \times 3}_{\text{com todos os números diferentes}} + 1 = 25$$

↗ com todos os números iguais

1.2 Fenômenos aleatórios

Atividade 1 (pág. 140)

1.1 Podemos encontrar o espaço de resultados recorrendo a uma tabela de dupla entrada.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

1.2 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$$B = \{6\}$$

$$C = \emptyset$$

$$D = \Omega$$

- 1.3** *A*: Acontecimento composto
B: Acontecimento elementar
C: Acontecimento impossível
D: Acontecimento certo

Atividade 2 (pág. 140)

- 2.1** $\Omega = \{\text{espadas, ouros, paus, copas}\}$
2.2.1 *A*: «não sair espadas, ouros, paus ou copas»
2.2.2 *B*: «sair uma carta de espadas, paus, ouros ou copas»
2.2.3 *C*: «sair o ás de copas»

1.3 Argumentos de simetria. Regra de Laplace

Atividade 1 (pág. 146)

O número de casos possíveis é quatro e não três.

Seja *A*: «ser rapariga» e *B*: «ser rapaz», os casos possíveis são: *AA*, *AB*, *BA*, *BB*.

Atividade 2 (pág. 146)

- 2.1** Existem 13 cartas de copas num baralho, logo:

$$P = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

- 2.2** Existem três figuras de cada naipe, logo:

$$P = \frac{3 \times 4}{52} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

- 2.3** Existem quatro ases, logo:

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

- 2.4** Existem 26 cartas com naipe vermelho, logo:

$$P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Atividade 3 (pág. 146)

3.1 $P = \frac{1}{49}$

3.2 $P = \frac{24}{49}$

Existem 24 números pares entre 1 e 49.

3.3 $P = 1$

Todos os números do Totoloto são menores que 50.

3.4 $P = \frac{10}{49}$

3.5 $P = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$

Existem 14 números com o algarismo 2: 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 42.

Atividade 4 (pág. 149)

É verdadeira. Basta verificar o número de decomposições do 9 e do 10.

$9 = 1 + 4 + 4$	$\rightarrow$	3 possibilidades	$10 = 1 + 3 + 6$	$\rightarrow$	6 possibilidades
$9 = 1 + 3 + 5$	$\rightarrow$	6	$10 = 1 + 4 + 5$	$\rightarrow$	6
$9 = 1 + 2 + 6$	$\rightarrow$	6	$10 = 2 + 2 + 6$	$\rightarrow$	3
$9 = 2 + 2 + 5$	$\rightarrow$	3	$10 = 2 + 3 + 5$	$\rightarrow$	6
$9 = 2 + 3 + 4$	$\rightarrow$	6	$10 = 2 + 4 + 4$	$\rightarrow$	3
$9 = 3 + 3 + 3$	$\rightarrow$	1	$10 = 2 + 3 + 4$	$\rightarrow$	6

$$\begin{aligned} P(\text{soma } 9) &= P(1, 4, 4) + P(1, 3, 5) + P(1, 2, 6) + P(2, 2, 5) + P(2, 3, 4) + P(3, 3, 3) = \\ &= \frac{3}{6 \times 6 \times 6} + \frac{6}{6 \times 6 \times 6} + \frac{6}{6 \times 6 \times 6} + \frac{3}{6 \times 6 \times 6} + \frac{6}{6 \times 6 \times 6} + \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{25}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{soma } 10) &= P(1, 3, 6) + P(1, 4, 5) + P(2, 2, 6) + P(2, 3, 5) + P(2, 4, 4) + P(3, 3, 4) = \\ &= \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} = \frac{27}{216} \end{aligned}$$

Logo, a soma 10 aparece com maior frequência do que a soma 9.

Atividade 5 (pág. 150)

5.1 $3 \times 2 = 6$

5.2 $P = \frac{3 \times 1}{6} = \frac{1}{2}$

5.3 $3 \times 2 \times 2 = 12$ trajetos

$$P = \frac{3 \times 1 \times 1}{12} = \frac{1}{4}$$

Atividade 6 (pág. 151)

6.1 Para a contagem do número de casos possíveis:

Se a tiragem é feita sem reposição, temos:

$$10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ possibilidades}$$

$$P(A, A, A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

6.2 $P(\text{duas vermelhas e uma azul}) =$

$$= P(V, V, A) + P(V, A, V) + P(A, V, V) =$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Atividade 7 (pág. 151)

Se a extração é feita com reposição, temos:

$10 \times 10 \times 10 = 1000$ casos possíveis

$$P(V, A) = \frac{6 \times 4}{10 \times 10} = \frac{6}{25}$$

$$P(V, V) = \frac{6 \times 6}{10 \times 10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

Atividade 8 (pág. 151)

Não, porque se a moeda é equilibrada, não há razão para considerar que os acontecimentos não são equiprováveis.

Atividade 9 (pág. 153)

Dez praticam natação, oito praticam futebol, cinco praticam ginástica acrobática e sete não praticam qualquer desporto.

Consideremos os acontecimentos:

A: «praticar natação»

B: «praticar futebol»

C: «praticar ginástica acrobática»

Sabe-se que: $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$; $P(C) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{7}{30}$

9.1 $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

9.2 $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

9.3 $P(C \cup B) = P(C) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{8}{30} = \frac{13}{30}$

9.4 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

1.4 Probabilidade condicional. Acontecimentos independentes

Atividade 1 (pág. 159)

Consideremos os acontecimentos:

R: «ser rapariga»

A: «ter olhos azuis»

V: «ter olhos verdes»

Sabe-se que: $P(\bar{R} \cap A) = 15\%$

$$P(\bar{R} \cap V) = 30\%$$

$$P(R \cap A) = 10\%$$

$$P(R \cap V) = 45\%$$

Com estes dados, podemos construir uma tabela:

	R	$\bar{R}$	Total
A	10%	15%	25%
V	45%	30%	75%
Total	55%	45%	100%

$$1.1 \quad P(R) = 55\%$$

$$1.2 \quad P(V) = 75\%$$

$$1.3 \quad P(V | R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{0,45}{0,55} = \frac{9}{11}$$

$$1.4 \quad P(\bar{R} | A) = \frac{P(\bar{R} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}$$

Atividade 2 (pág. 159)

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: «ter o operador A»

B: «ter o operador B»

C: «ter o operador C»

S: «estar satisfeito com o serviço»

Sabe-se que: $P(S) = 75\%$, $P(A | S) = 12\%$, $P(C) = 20\%$, $P(S | C) = 80\%$, $P(B) = 60\%$

$$P(A | S) = 0,12 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = 0,12 \Leftrightarrow P(A \cap S) = 0,12 \times 0,75 \Leftrightarrow P(A \cap S) = 0,09$$

$$P(S | C) = 0,8 \Leftrightarrow \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = 0,8 \Leftrightarrow P(S \cap C) = 0,8 \times 0,2 \Leftrightarrow P(S \cap C) = 0,16$$

$$2.1 \quad P(B \cap S) = 0,75 - 0,09 - 0,16 = 0,5 = 50\%$$

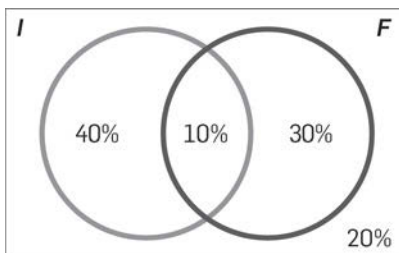
	A	B	C	Total
S	0,09	0,5	0,16	0,75
$\bar{S}$	0,11	0,1	0,04	0,25
Total	0,2	0,6	0,2	1

$$2.2 \quad P(\bar{S} | \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,11 + 0,1}{0,2 + 0,6} = \frac{0,21}{0,8} = 0,2625 = 26,25\%$$

$$2.3 \quad P(S | B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

Atividade 3 (pág. 159)

Consideremos um diagrama de Venn com os dados do problema:



$$3.1 \quad P(I \cap \bar{F}) = 40\%$$

$0,4 \times 1500 = 600$ jovens falam inglês e não falam francês

$$3.2.1 \quad P(F | I) = \frac{P(I \cap F)}{P(I)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 20\%$$

$$3.2.2 \quad P(I | F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$3.2.3 \quad P(F \cap \bar{I}) = 30\%$$

Atividade 4 (pág. 161)

$$4.1.1 \quad P(G \cap F) = 40\%$$

$$4.1.2 \quad P(G | F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{0,4}{0,5} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$4.1.3 \quad P(M | G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{0,20}{0,6} = \frac{1}{3}$$

4.2 Queremos verificar se $P(G \cap F) = P(G) \times P(F)$

$$\left. \begin{array}{l} P(G \cap F) = 40\% \\ P(G) = 60\% \\ P(F) = 50\% \end{array} \right\} 0,4 \neq 0,6 \times 0,5 \quad \text{Falso}$$

Logo, não são independentes.

1.5 Probabilidade total. Regra de Bayes

Atividade 1 (pág. 165)

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A_1 : «o carro estar na primeira porta»

A_2 : «o carro estar na segunda porta»

A_3 : «o carro estar na terceira porta»

M : «Monty Hall abre a terceira porta»

Vamos assumir que $P(M | A_1) = 0,5$; $P(M | A_2) = 1$ e $P(M | A_3) = 0$

Pelo teorema de probabilidade total, tem-se que:

$$P(M) = P(M | A_1) \times P(A_1) + P(M | A_2) \times P(A_2) + P(M | A_3) \times P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Usando a regra de Bayes, temos:

$$P(A_1 | M) = \frac{P(M | A_1) \times P(A_1)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2 | M) = \frac{P(M | A_2) \times P(A_2)}{P(M)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_3 | M) = \frac{P(M | A_3) \times P(A_3)}{P(M)} = \frac{0 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0$$

Portanto, escolhendo trocar de porta, a probabilidade de ganhar é maior.

Atividade 2 (pág. 165)

$$U_1 (2A + 3B + 4V)$$

$$U_2 (3A + 2B + 2V)$$

$$U_3 (4A + 1B + 1V)$$

$$P(A, V) = P((A, V) | U_1) \times P(U_1) + P((A, V) | U_2) \times P(U_2) + P((A, V) | U_3) \times P(U_3) =$$

$$= \left(\frac{2}{9} \times \frac{4}{8}\right) \times \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{6} \times \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{122}{315}$$

$$P(U_3 | (A, V)) = \frac{P(U_3 \cap (A, V))}{P(A, V)} = \frac{\frac{4}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{122}{315}} = \frac{7}{61}$$

Atividade 3 (pág. 165)

Consideremos os acontecimentos:

A: «ser de classe A»

B: «ser de classe B»

C: «ser de classe C»

D: «ter acidente durante o primeiro ano»

$$\text{Sabe-se que } P(A) = \frac{35\,000}{100\,000} = 35\%$$

$$P(B) = 50\% \text{ e } P(C) = 15\%$$

$$P(D | A) = 0,01 \quad P(D | B) = 0,04 \quad P(D | C) = 0,15$$

Pretende-se calcular:

$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) = 0,01 \times 0,35 + 0,04 \times 0,5 + 0,15 \times 0,15 = 0,046$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,35}{0,046} = \frac{7}{92}$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|B) \times P(B)}{P(D)} = \frac{0,04 \times 0,5}{0,046} = \frac{10}{23}$$

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \times P(C)}{P(D)} = \frac{0,15 \times 0,15}{0,046} = \frac{45}{92}$$

1.6 Modelos de probabilidade em espaços finitos. Função massa de probabilidade

Atividade 1 (pág. 167)

$$1.1 \quad P(\text{ter 17 anos}) = 1 - P(X=15) - P(X=16) = 1 - \frac{10}{28} - \frac{16}{28} = \frac{1}{14}$$

$$1.2 \quad P(\text{ter 15 ou 16}) = P(X=15) + P(X=16) = \frac{10}{28} + \frac{16}{28} = \frac{13}{14}$$

Atividade 2 (pág. 171)

$$2.1 \quad P(X=3) = 0,2$$

$$2.2 \quad P(X > 3) = P(X=4) = 0,4$$

$$2.3 \quad P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,9$$

Atividade 3 (pág. 171)

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,24 & 0,16 & 0,12 & 0,08 \end{pmatrix}$$

Atividade 4 (pág. 171)

Vamos construir uma tabela de dupla entrada para melhor verificar os casos possíveis.

		Caixa 2					
		1	2	3	4	5	6
Caixa 1	1	0	2	3	4	5	6
	2	2	0	3	4	5	6
	3	3	3	0	4	5	6
	4	4	4	4	0	5	6
	5	5	5	5	5	0	6

x_i	0	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{5}{30}$

Ou seja:

x_i	0	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$

1.7 Valor médio e variância populacional

Atividade 1 (pág. 175)

1.1

Diferença absoluta	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

1.2

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Ou seja:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$$1.3 \quad E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} = \frac{35}{18} \approx 1,94$$

Usando a calculadora, podemos verificar que $\sigma = 1,43$

$$1.4 \quad P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

Atividade 2 (pág. 175)

2.1 Sabe-se que $a = c$ e que $a = 2b \Leftrightarrow b = \frac{a}{2}$

O modelo de probabilidade pode, então, ficar definido do seguinte modo:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	0,05	a	$\frac{a}{2}$	0,08	0,2	0,1	a	0,3

Então,

$$0,05 + a + \frac{a}{2} + 0,08 + 0,2 + 0,1 + a + 0,3 = 1 \Leftrightarrow a + \frac{a}{2} + a = 1 - 0,05 - 0,08 - 0,2 - 0,1 - 0,3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0,27 \Leftrightarrow 5a = 0,54 \Leftrightarrow a = 0,108$$

Logo, $b = 0,054$ e $c = 0,108$

2.2 e 2.3 Usando a calculadora, podemos verificar que $\sigma = 2,25$ e $E(X) = 4,504$.

O desvio-padrão representa o desvio dos dados em relação ao valor médio.

1.8 Espaços de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos

Atividade 1 (pág. 179)

$$\mu = 5$$

$$\text{Logo, } \lambda = 5 \quad \frac{10}{15} \times 5 = \frac{10}{3}$$

$$1.1 \text{ Então, } P(X=3) = e^{-\frac{10}{3}} \times \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!} = 0,22$$

$$1.2 \quad P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$\lambda = \frac{5}{3}$$

$$e^{-\frac{5}{3}} \times \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3}{0!} + e^{-\frac{5}{3}} \times \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{1!} = 0,5$$

1.3 No máximo três clientes.

Atividade 2 (pág. 181)

$$2.1.1 \quad P(X=5) = (1-0,025)^4 \times 0,025 = 0,023$$

$$2.1.2 \quad P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=1) + P(X=2)) = \\ = 1 - \left((1-0,025)^0 \times 0,025 + (1-0,025)^1 \times 0,025 \right) = 0,95$$

$$2.2 \quad E(X) = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ semanas}$$

Atividade 3 (pág. 182)

$$3.1 \quad P(X=2) = \frac{4!}{2!2!} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456 = 34,56\%$$

$$3.2 \quad P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \\ = \frac{4!}{4!} 0,6^0 \times 0,4^4 + \frac{4!}{3!} 0,6^1 \times 0,4^3 + \frac{4!}{2!2!} 0,6^2 \times 0,4^2 + \frac{4!}{3!1!} 0,6^3 \times 0,4^1 = \\ = 0,0256 + 0,1536 + 0,3456 + 0,3456 = 0,8704$$

$$3.3 \quad P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,6^0 \times 0,4^4 + 4 \times 0,6 \times 0,4^3 = 0,1792$$

Atividade 4 (pág. 186)

Sabemos que a variável só forma valores no intervalo $[0,93; 1,11]$.

4.1 Significa que no intervalo $[0,93; 1,11]$, se este for subdividido em intervalos com a mesma amplitude, a probabilidade que lhes está associada é a mesma.

$$4.2.1 \quad P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(0,93 \leq X \leq 1) = 1 - \frac{1 - 0,93}{1,11 - 0,93} = 0,59$$

$$4.2.2 \quad P(0,98 < X < 1,03) = \frac{1,03 - 0,98}{1,11 - 0,93} = 0,28$$

Atividade 5 (pág. 186)

Trabalho de pesquisa

Atividade 6 (pág. 188)

$$E(X) = 2$$

Então, $\lambda = 0,5$

$$6.1 \quad P(X < 4) = P(0 \leq X < 4) = e^0 - e^{-2} = 0,86$$

$$6.2 \quad P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - P(0 \leq X \leq 10) = 1 - (e^0 - e^{-5}) = 0,007$$

$$6.3 \quad P(2 < X < 5) = e^{-1} - e^{-2,5} = 0,286$$

1.9 Modelo normal

Atividade 1 (pág. 195)

$$\mu = 63 \quad \sigma = 10$$

$$1.1 \quad X \sim N(63, 10) \Rightarrow U = \frac{X - 63}{10} \sim N(0, 1)$$

$$U = \frac{X - 63}{10} \Leftrightarrow 10U = X - 63 \Leftrightarrow X = 10U + 63$$

$$X < 60 \Leftrightarrow 10U + 63 < 60 \Leftrightarrow 10U < -3 \Leftrightarrow U < -0,3$$

$$P(X < 60) = P(U < -0,3) = P(U > 0,3) = 0,5 - P(0 < U < 0,3) = 0,5 - P(0 < U < 0,3) = \\ = 0,5 - (\phi(0,3) - \phi(0)) = 0,5 - (0,6179 - 0,5) = 0,3821$$

- 1.2 $P(55 < X < 72) = P(55 < 10U + 63 < 72) = P(-8 < 10U < 9) = P(-0,8 < U < -0,9) =$
 $= \phi(0,9) - \phi(-0,8) = \phi(0,9) - (1 - \phi(0,8)) = \phi(0,9) - 1 + \phi(0,8) = 0,604$
 $0,604 \times 900 \approx 544$ pessoas
- 1.3 $P(X > 80) = P(10U + 63 > 80) = P(10U > 17) = P(U > 1,7) =$
 $= 1 - 0,9554 = 0,0446$
 $0,0446 \times 900 = 40$ pessoas

Atividade 2 (pág. 195)

Trabalho de pesquisa

Exercícios de aplicação (pág. 202)

1. Exemplos de fenômenos aleatórios: saber o número da lotaria do Natal, saber o vencedor do campeonato do mundo de futebol, saber o sexo do próximo membro da família.
 Exemplos de fenômenos determinísticos: contar o número de dias do mês de janeiro, contar o número de dias da semana, colocar a mão no lume.

2. A, B e G

3.1 $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, A_1, A_2, V_1\}$

3.2 «Sair uma bola branca, azul ou vermelha»

3.3 «Sair uma bola amarela»

3.4 «Sair uma bola vermelha»

4.1 $\Omega = \{(N, E), (N, N), (E, E), (E, N)\}$



4.2 «Sair a face nacional em ambas as moedas»

4.3 $A = \{(N, E), (E, N)\}$

$B = \{(E, E), (E, N), (N, E)\}$

$C = \{(N, E), (E, N), (N, N)\}$

5.1 $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \rightarrow A$ ocorre e B e C não ocorrem.

5.2 $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \rightarrow$ Ocorre A ou B ou C .

5.3 $A \cap B \cap C \rightarrow$ Definição de interseção de acontecimentos.

5.4 $A \cup B \cup C \rightarrow$ Definição de reunião de acontecimentos.

5.5 $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \rightarrow$ Os dois acontecimentos que ocorrem podem ser A e B , A e C ou B e C .

5.6 $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \rightarrow$ Dois acontecimentos ocorrerem é, no máximo, ocorrerem um ou dois acontecimentos.

5.7 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \rightarrow$ Nenhum acontecimento ocorrer é não ocorrer A , nem B , nem C .

6.1 $\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

6.2 $A = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1)\}$

$B = \{(2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

6.2.1 $A \cap B = \{(2, 3, 1)\}$

6.2.2 $A \cup B = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

6.2.3 $A \cap \bar{B} = \{(2, 1, 3)\}$

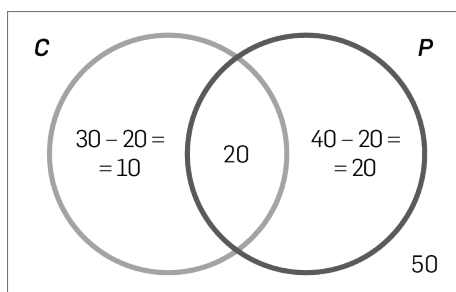
6.2.4 $\bar{A} \cup B = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\} \cup \{(2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\} = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 1)\}$

6.2.5 $B - A = \{(3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

6.2.6 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\} = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$

6.2.7 $A \cap (B \cup A) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{A}) = \underbrace{A \cap \bar{A}}_{\emptyset} \cap \bar{B} = \emptyset$

7.



	C	$\bar{C}$	Total
P	20	20	40
$\bar{P}$	10	50	60
Total	30	70	100

$40 + 30 = 70$

$70 - 50 = 20 \rightarrow$ interseção

8.1 $P(\text{«sair ás vermelho»}) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 5\%$

8.2 $P(\text{«sair dama de ouros»}) = \frac{1}{40} = 2,5\%$

8.3 «Sair carta vermelha»

Como existem 20 cartas vermelhas,

$P(\text{«sair carta vermelha»}) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 50\%$

9. Sejam os acontecimentos:
 P : «incluir pão» e L : «incluir leite»
 $P(L) = 45\%$
 $P(L \cap P) = 9\%$
 $P(\bar{L} \cap \bar{P}) = \frac{1}{4}$

9.1

	P	$\bar{P}$	Total
L	9%	36%	45%
$\bar{L}$	30%	25%	55%
Total	39%	61%	100%

$$P(P) = 39\%$$

9.2 Considerando os acontecimentos:

A : «ser rapariga» e B : «ser rapaz»

Sabe-se que:

$$P(A) = 60\%$$

$$\text{Logo, } P(B) = 40\%$$

$$P(\bar{L} \cap \bar{P} | B) = 37,5\%$$

Queremos determinar: $P(A \cap (\bar{L} \cap \bar{P}))$

$$\frac{P(\bar{L} \cap \bar{P} \cap B)}{P(B)} = 0,375 \Leftrightarrow P((\bar{L} \cap \bar{P}) \cap B) = 0,375 \times 0,4 \Leftrightarrow P((\bar{L} \cap \bar{P}) \cap B) = 0,15$$

Sabe-se que:

$$P(\bar{L} \cap \bar{P}) = 25\%$$

$$\text{Logo, } P(A \cap (\bar{L} \cap \bar{P})) = 10\% = \frac{1}{10}$$

10. O número total de votantes foi:

$$13\,442 + 8723 + 6033 + 1120 + 1258 = 30\,576$$

Se a abstenção foi de 36%, então 30 576 corresponde a 64%.

$$\text{Ou seja, o número total de inscritos é: } \frac{30\,576}{0,64} = 47\,775$$

A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter votado no partido A é:

$$P = \frac{13\,442}{47\,775} \approx 28\%$$

11. Escolhendo ao acaso, um a seguir ao outro, a probabilidade de ambos serem jogadores de rãguebi é dada por:

$$P = \frac{191}{731} \times \frac{190}{730} \approx 6,8\%$$

12. O número de casos possíveis é: $3 \times 2 = 6$

O número de casos favoráveis é 4.

$$F_1 F_2 C ; F_2 F_1 C ; C F_1 F_2 ; C F_2 F_1$$

$$\text{Logo, } P = \frac{2}{3}$$

13. $10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000$

- 14.1 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 \rightarrow$ Existem dez algarismos para cada um dos quatro dígitos.

- 14.2 _ _ _ _

$$10 \times 10 \times 1 \times 1$$

Para ser capicua, o primeiro dígito tem de ser igual ao último e o segundo igual ao penúltimo.

Assim, existem $10 \times 10 \times 1 \times 1 = 100$ códigos que são capicuas.

- 14.3 Se os números são diferentes, temos:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ códigos diferentes}$$

- 14.4 0 _ _ 0

$$10 \times 10$$

Para o primeiro e para o último dígito, só temos uma hipótese. Para os restantes dígitos, temos dez hipóteses para cada um.

- 15.1 Existem quatro damas no baralho. Como as cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição, existem $4 \times 3 = 12$ maneiras

- 15.2 Existem quatro naipes diferentes com 13 cartas cada.

$$13 \times 13 \times 4 \times 3 = 2028$$

- 15.3 $4 \times 13 \times 12 = 624$

- 15.4 $R_c _ \text{ ou } _ R_c$

$$1 \times 51 + 51 \times 1 = 102$$

- 16.1 _ _ _ _ _



$$\{2, 4\}$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 = 5^4 \times 2 = 1250$$

- 16.2 1 _ _ _ 5

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

- 16.3 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

- 17.1.1 $P(\text{comprimento} < 15,3) = \frac{45 \times 44}{50 \times 49} = \frac{198}{245}$

$$17.1.2 \quad P = \frac{45 \times 2 \times 2}{50 \times 49} = \frac{18}{245}$$

$$17.2 \quad P = \frac{45 \times 45}{50 \times 50} = \frac{81}{100}$$

$$P = \frac{45 \times 2 \times 2}{50 \times 50} = \frac{9}{125}$$

$$18.1 \quad P = \frac{1720 \times 1719}{2222 \times 2221} \approx 59,91\%$$

$$18.2 \quad P = \frac{171 \times 1720 \times 2}{2222 \times 2221} \approx 11,92\%$$

19.1 Se retirarmos do monte A, a probabilidade de serem as duas de copas será:

$$P = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

Se retirarmos do monte B, a probabilidade de serem as duas de copas será:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

Então, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{6}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{20}{56} = \frac{13}{56}$$

19.2 Se retirarmos do monte A:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times 2 = \frac{15}{28}$$

Se retirarmos do monte B:

$$P = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times 2 = \frac{15}{28}$$

$$\text{Logo, } P = \frac{1}{2} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{28} = \frac{15}{28}$$

20.1 R R ou A A ou V V

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$$

20.2 V _

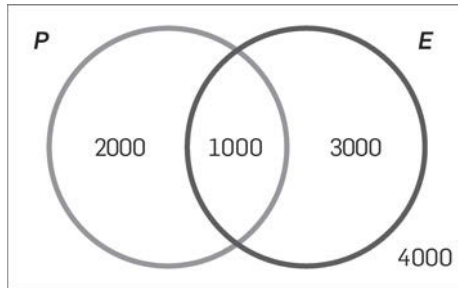
A primeira tem de ser vermelha e segunda pode ser de qualquer cor.

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{1}{5}$$

20.3 A R ou R A

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{25}$$

21.



$$21.1 \quad P = \frac{2000}{4000} = 50\%$$

$$21.2 \quad P = \frac{2000 + 1000 + 3000}{10\,000} = \frac{6000}{10\,000} = \frac{3}{5} = 60\%$$

$$21.3 \quad P = \frac{4000}{1000} = 40\%$$

$$22.1 \quad P(O | Rh^-) = \frac{P(O \cap Rh^-)}{P(Rh^-)} = \frac{0,06}{0,16} = \frac{3}{8}$$

$$22.2 \quad P(Rh^+ | A) = \frac{P(Rh^+ \cap A)}{P(A)} = \frac{0,39}{0,46} = \frac{39}{46}$$

23. Seja:

A: «autoavaliaram-se com nível 1»

B: «autoavaliaram-se com nível superior a 1»

C: «ser português»

Sabe-se que: $P(C | A) = 20\%$ e $P(C | B) = 5\%$

Pretende-se calcular $P(A | C)$:

$$\frac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0,2 \Leftrightarrow P(C \cap A) = 0,2 \times 0,1 \Leftrightarrow P(C \cap A) = 0,02$$

$$\frac{P(C \cap B)}{P(B)} = 0,05 \Leftrightarrow P(C \cap B) = 0,05 \times 0,9 \Leftrightarrow P(C \cap B) = 0,045$$

Número de portugueses que declararam não saber nada: $0,02 \times 15\,800 = 316$

Número de portugueses que se autoavaliaram com nível superior a 1: $0,045 \times 15\,800 = 711$

Assim, podemos concluir que existem $316 + 711 = 1027$ portugueses na amostra.

A probabilidade pedida é:

$$P(A | C) = \frac{316}{1027} \approx 31\%$$

24. Consideremos os acontecimentos:

A: «o atleta beber água no posto A»

D: «o atleta beber água no posto D»

Sabe-se que:

$$P(D | A) = \frac{9}{10} \text{ e } P(D \cap A) = \frac{3}{5}$$

Pretende-se calcular $P(A)$:

$$P(D | A) = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

25. Consideremos os acontecimentos:

A: «ser rapariga»

L: «ser loira»

C: «ter cabelo castanho»

T: «ter cabelo preto»

Sabe-se que:

$$P(A) = 60\%, P(L | A) = 25\%, P(C | A) = 50\% \text{ e } P(T | A) = 25\%$$

$$P(\bar{A}) = 40\%, P(L | \bar{A}) = 12,5\%, P(C | \bar{A}) = 50\% \text{ e } P(T | \bar{A}) = 37,5\%$$

$$\begin{aligned} 25.1 \quad P(L) &= P(L \cap A) + P(L \cap \bar{A}) = P(L | A) \times P(A) + P(L | \bar{A}) \times P(\bar{A}) = \\ &= 0,25 \times 0,6 + 0,125 \times 0,4 = 0,2 = 20\% \end{aligned}$$

$$25.2 \quad P(A | T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T | A) \times P(A)}{P(T | A) \times P(A) + P(T | \bar{A}) \times P(\bar{A})} = \frac{0,25 \times 0,6}{0,25 \times 0,6 + 0,375 \times 0,4} = 0,5 = 50\%$$

26. Consideremos os acontecimentos:

T: «o período de capitalização é 3 meses»

S: «o período de capitalização é 6 meses»

R: «obter rendimento»

Sabe-se que:

$$P(R | T) = 76\% \text{ e } P(R | S) = 92\%$$

$$P(T) = \frac{2}{5} \text{ e } P(S) = \frac{3}{5}$$

Pretende-se calcular $P(T | R)$:

$$P(R | T) = 0,76 \Leftrightarrow \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = 0,76 \Leftrightarrow P(R \cap T) = 0,76 \times \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(R \cap T) = 0,304$$

$$P(R | S) = 0,92 \Leftrightarrow \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = 0,92 \Leftrightarrow P(R \cap S) = 0,92 \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(R \cap S) = 0,552$$

$$P(T | R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0,304}{P(R \cap T) + P(R \cap S)} = \frac{0,304}{0,76 \times \frac{2}{5} + 0,92 \times \frac{3}{5}} = \frac{38}{107}$$

27. Consideremos os acontecimentos:

A : «ser da fábrica Alfa»

B : «ser da fábrica Beta»

N : «destinar-se ao mercado nacional»

Sabe-se que:

$$P(N | A) = \frac{1}{3} \text{ e } P(N | B) = \frac{1}{4}$$

Pretende-se calcular $P(A | N)$:

$$P(A | N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A \cap N)}{P(A \cap N) + P(B \cap N)} = \frac{0,5 \times \frac{1}{3}}{0,5 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{4}} = \frac{4}{7}$$

28.1 Sabe-se que:

$$P(A) = 0,05; P(B) = 0,7 \text{ e } P(C) = 0,25$$

$$P(V | A) = 0,3; P(V | B) = 0,4 \text{ e } P(V | C) = 0,5$$

Tem-se que:

$$P(V | A) = 0,3 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap A)}{P(A)} = 0,3 \Leftrightarrow P(V \cap A) = 0,3 \times 0,05 \Leftrightarrow P(V \cap A) = 0,015$$

$$P(V | B) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Leftrightarrow P(V \cap B) = 0,4 \times 0,7 \Leftrightarrow P(V \cap B) = 0,28$$

$$P(V | C) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = 0,5 \Leftrightarrow P(V \cap C) = 0,25 \times 0,5 \Leftrightarrow P(V \cap C) = 0,125$$

Podemos agora preencher a tabela:

Acontecimentos	A	B	C	Total
V	0,015	0,28	0,125	0,42
$\bar{V}$	0,035	0,42	0,125	0,58
Total	0,05	0,70	0,25	1

28.2 Sabe-se que:

$$P(B) = 0,72 \text{ e } P(C) = 0,28$$

$$P(V) = P(V \cap B) + P(V \cap C) = P(V | B) \times P(B) + P(V | C) \times P(C) = 0,4 \times 0,72 + 0,5 \times 0,28 = 0,428 = 42,8\%$$

29. Consideremos os acontecimentos:

A : «ser da caixa A»

B : «ser da caixa B»

D : «ter defeito»

Sabe-se que:

$$P(D|A) = \frac{7}{20} \text{ e } P(D|B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

29.1 Consideremos os acontecimentos:

D_A : «tirar lápis com defeito da caixa A»

D_B : «tirar lápis com defeito da caixa B»

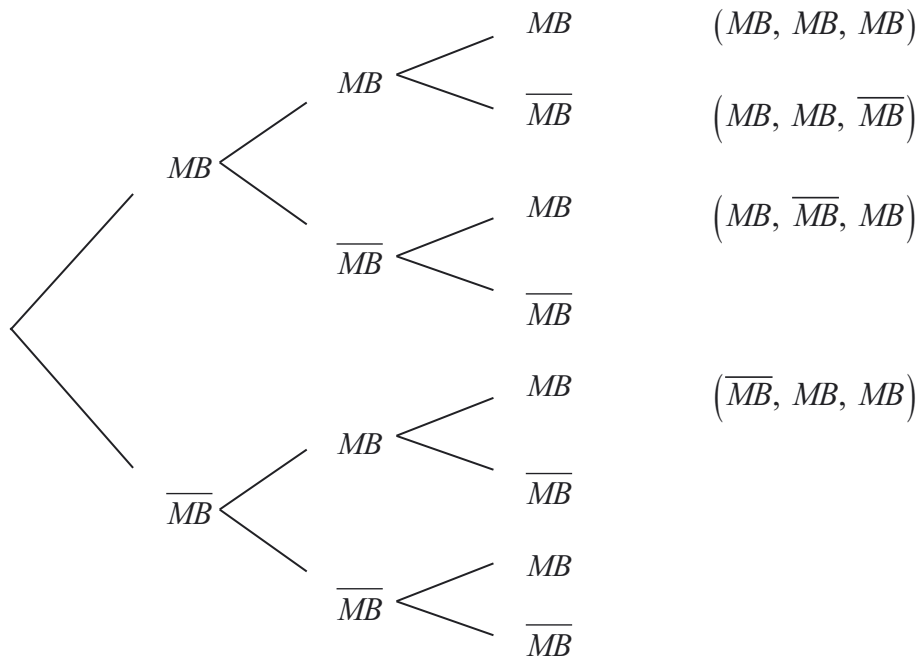
D_A e D_B são acontecimentos independentes, logo:

$$P(D_A \cap D_B) = P(D_A) \times P(D_B) = \frac{7}{20} \times \frac{4}{12} = \frac{7}{60}$$

$$29.2 \quad P\left((D_A \cap \overline{D_B}) \cup (\overline{D_A} \cap D_B)\right) = P(D_A) \times P(\overline{D_B}) + P(\overline{D_A}) \times P(D_B) = \frac{7}{20} \times \frac{8}{12} + \frac{13}{20} \times \frac{4}{12} = \frac{9}{20}$$

$$30.1 \quad P = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$$

30.2



Pelo menos dois estarem muito bons é equivalente a dizer que apenas dois estão MB ou estão os três MB .

$$\frac{MB}{20} \frac{MB}{19} \frac{\overline{MB}}{18} \quad \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} \times 3$$

$$\frac{MB}{20} \frac{MB}{19} \frac{MB}{18} \quad \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18}$$

$$\text{Então, } P = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} \times 3 + \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} = \frac{98}{285}$$

- 31.** Para verificar se H e D são independentes, temos de averiguar a veracidade de:

$$P(H \cap D) = P(H) \times P(D)$$

$$P(H \cap D) = \frac{250}{1232 + 1035 + 613 + 555} = \frac{50}{687}$$

$$P(H) = \frac{518 + 411 + 255 + 250}{1232 + 1035 + 613 + 555} = \frac{478}{1145}$$

$$P(D) = \frac{305 + 250}{1232 + 1035 + 613 + 555} = \frac{555}{3435} = \frac{37}{229}$$

$$P(H) \times P(D) = \frac{478}{1145} \times \frac{37}{229} = \frac{17\,686}{262\,205}$$

Então, $P(H \cap D) \neq P(H) \times P(D)$, logo, podemos concluir que os acontecimentos H e D não são independentes.

- 32.** Consideremos os acontecimentos:

A : «ter a doença A»

B : «ter a doença B»

C : «ter a doença C»

D : «sair curado»

Sabe-se que:

$$P(A) = 20\%; P(B) = 30\%; P(C) = 50\%; P(D|A) = 10\%; P(D|B) = 70\%$$

$$\text{e } P(D|C) = 50\%$$

32.1 $P(D|B) = 70\%$

32.2 $P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) =$
 $= 0,1 \times 0,2 + 0,7 \times 0,3 + 0,5 \times 0,5 = 0,48 = 48\%$

32.3 $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \times P(C)}{0,48} = \frac{0,5 \times 0,5}{0,48} = \frac{25}{48} \approx 52\%$

- 33.** Consideremos os acontecimentos:

A : «ser da máquina A»

B : «ser da máquina B»

C : «ser da máquina C»

D : «ser defeituosa»

Sabe-se que:

$$P(A) = 15\%, P(D|A) = 5\%, P(B) = 45\%, P(D|B) = 3\% \text{ e } P(D|C) = 10\%$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) =$$

$$= P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) =$$

$$= 0,05 \times 0,15 + 0,03 \times 0,45 + 0,1 \times (1 - 0,15 - 0,45) = 0,061 = 6,1\%$$

34. Consideremos os acontecimentos:

A : «ser do parque A»

B : «ser do parque B»

C : «ser do parque C»

D : «produzir cerâmica»

Sabe-se que:

$$P(D|A) = 10\%, P(D|B) = 40\% \text{ e } P(D|C) = 25\%$$

$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) =$$

$$= 0,1 \times \frac{1}{3} + 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,25 \times \frac{1}{3} = 0,25 = 25\%$$

35.1 Consideremos a tabela com os resultados possíveis da soma das pontuações das faces dos dados:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

A probabilidade de a soma das faces dos dados ser um múltiplo de 5 é $\frac{7}{36}$.

Logo, a probabilidade de a Vanda vir a selecionar o primeiro livro para ler da estante que só tem romances de ficção científica é $\frac{7}{36}$.

35.2 X pode tomar os seguintes valores:

$X = 0 \rightarrow$ Não são selecionados livros policiais.

$X = 1 \rightarrow$ É selecionado um livro policial.

$X = 2 \rightarrow$ São selecionados dois livros policiais.

$$P(X=0) = \frac{20}{35} \times \frac{19}{34} = \frac{38}{119} \quad (A, A)$$

$$P(X=1) = \frac{15}{35} \times \frac{20}{34} + \frac{20}{35} \times \frac{15}{34} = \frac{60}{119} \quad (P, A) \text{ ou } (A, P)$$

$$P(X=2) = \frac{15}{35} \times \frac{14}{34} = \frac{21}{119} \quad (P, P)$$

Tabela de distribuição de probabilidades:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{38}{119}$	$\frac{60}{119}$	$\frac{21}{119}$

36. Consideremos os acontecimentos:

A: «ver a publicidade»

B: «comprar o perfume»

Tem-se que: $P(A) = 75\%$, $P(B) = 45\%$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 20\%$

36.1 Com os dados, podemos preencher a tabela:

	A	$\bar{A}$	Total
B	40%	5%	45%
$\bar{B}$	35%	20%	55%
Total	75%	25%	100%

Queremos calcular $P(B \cap A) = 5\%$

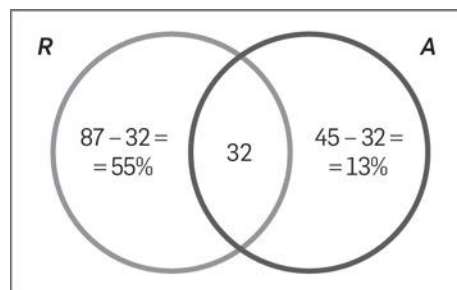
36.2
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,75} = \frac{8}{15}$$

37.1 Consideremos os acontecimentos:

R: «utilizaram o transporte rodoviário»

A: «utilizaram o transporte aéreo»

Sabe-se que: $P(R) = 87\%$ e $P(A) = 45\%$



$87 + 45 = 132$, logo, 32% utilizaram ambos os meios de transporte. Então, a probabilidade pedida é:

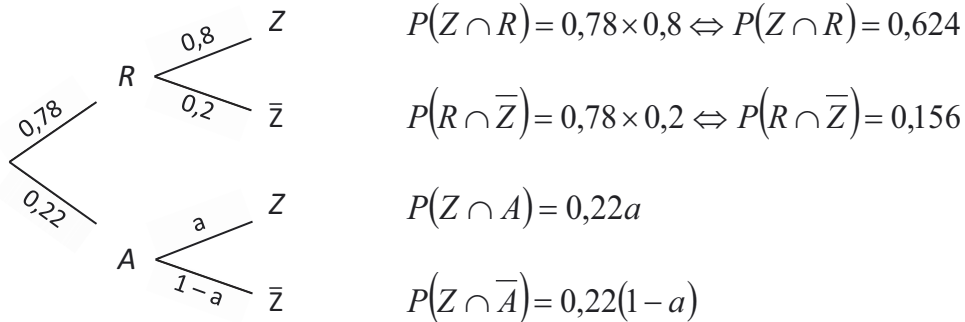
$$P(R \cap \bar{A}) + P(A \cap \bar{R}) = 55\% + 13\% = 68\%$$

37.2 Além dos acontecimentos A e R considerados na alínea anterior, consideremos também:

Z : «entregues dentro do prazo»

Sabe-se que: $P(R) = 78\%$, $P(Z) = 77,8\%$ e $P(Z | R) = 80\%$

Pretende-se calcular $P(A | Z)$:



$$\text{Então, } P(Z) = P(Z \cap R) + P(Z \cap A) \Leftrightarrow 0,778 = 0,624 + 0,22a \Leftrightarrow a = 0,7$$

Queremos calcular $P(A | Z)$:

$$P(A | Z) = \frac{P(A \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0,22 \times 0,7}{0,778} \approx 20\%$$

37.3 $P(R) = 80\%$

Em dois dos três serviços, utilizou-se o transporte rodoviário, logo:

$R R \bar{R}$ ou $R \bar{R} R$ ou $\bar{R} R R$

Ou seja:

$$P = 3 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2 = 0,384 = 38,4\%$$

38.1 $0,2 + 0,3 + 0,4 + P(X = 4) = 1 \Leftrightarrow P(X = 4) = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 \Leftrightarrow P(X = 4) = 0,1$

38.2 $0,4 \times 20 = 8$

Oito alunos leram três livros nas férias.

38.3 $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,4 + 0,1 = 0,5 = 50\%$

39. Sabe-se que $P(X \geq 1) = 0,995$

Ou seja:

$$0,425 + b + 0,120 = 0,995 \Leftrightarrow b = 0,45$$

$$a + 0,425 + 0,45 + 0,120 = 1 \Leftrightarrow a = 0,005$$

40. X pode tomar os seguintes valores:

$X = 0 \rightarrow$ Não há bolas amarelas, ou seja, são todas vermelhas.

$X = 1 \rightarrow$ Existe uma bola amarela e três vermelhas.

$X = 2 \rightarrow$ Existem duas bolas amarelas e duas vermelhas.

$X = 3 \rightarrow$ Existem três bolas amarelas e uma vermelha.

$X = 4 \rightarrow$ Todas as bolas são amarelas.

$$P(X=0) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{24}{5040} = \frac{1}{210}$$

$$P(X=1) = 4 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{35} \quad \text{AVVV}$$

$$P(X=2) = 6 \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{AVAV, AAVV, AVVA, VAAV, VAVA, VVAA}$$

$$P(X=3) = 4 \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21} \quad \text{AAAV}$$

$$P(X=4) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \quad \text{AAAA}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{14}$

41. X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

Considerando que a probabilidade de ter um filho rapaz é $\frac{1}{2}$, tem-se que:

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \quad \rightarrow \text{Serem todas raparigas}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \text{Um rapaz}$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 6 = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \text{Dois rapazes}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \text{Três rapazes}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

42. X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

$$P(X=0) = \frac{150}{200} \times \frac{149}{199} \approx 0,56$$

$$P(X=1) = \frac{50}{200} \times \frac{150}{199} + \frac{150}{200} \times \frac{50}{199} \approx 0,38$$

$$P(X=2) = \frac{50}{200} \times \frac{49}{199} = 0,06$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,56	0,38	0,06

43.1 X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \text{A primeira bola é azul.}$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \text{A primeira bola é verde e a segunda é azul.}$$

$$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \text{A primeira bola e a segunda são verdes.}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

43.2 $\mu = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$

$$\text{var}(X) = \frac{1}{3} \times (0-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1-1)^2 + \frac{1}{3} \times (2-1)^2 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

44.1 $\frac{b+1}{8} + \frac{b}{8} + \frac{b-1}{8} + \frac{b}{8} = 1 \Leftrightarrow 4b = 8 \Leftrightarrow b = 2$

$$\mu = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (a-1) \times \frac{2+1}{8} + a \times \frac{2}{8} + (a+3) \times \frac{2-1}{8} + (a+5) \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a-3}{8} + \frac{2a}{8} + \frac{a+3}{8} + \frac{2a+10}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8a+10 = 2 \Leftrightarrow 8a = -8 \Leftrightarrow a = -1$$

44.2 Consideremos a tabela para $a = -1$ e $b = 2$

x_i	-2	-1	2	4
P_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{var}(X) = \frac{3}{8} \left(-2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(4 - \frac{1}{4}\right)^2 = 6,188$$

44.3.1 $P(X \geq 4) = \frac{1}{4} = 25\%$

44.3.2 $P(-1 < X \leq 3) = P(X = 2) = \frac{1}{8} = 12,5\%$

45. Modelo de Poisson com $\lambda = 5$

45.1 Como $E(X) = \lambda$, então, o número esperado de camiões a chegar, por dia, ao armazém é 5.

45.2.1 $P(X = 2) = e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} = 0,084$

45.2.2

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)) = \\ &= 1 - \left(e^{-5} \times \frac{5^0}{0!} + e^{-5} \times \frac{5^1}{1!} + e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} + e^{-5} \times \frac{5^3}{3!} + e^{-5} \times \frac{5^4}{4!} + e^{-5} \times \frac{5^5}{5!} \right) = \\ &= 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} \right) = 0,38 \end{aligned}$$

45.2.3 $\lambda = 5$ $7\lambda = 35$

Trata-se de uma variável aleatória: $Y = 7X$

O modelo a utilizar é:

$$P(Y = k) = e^{-35} \times \frac{35^k}{k!}$$

Logo:

$$P(Y = 30) = e^{-35} \times \frac{35^{30}}{30!} = 0,05$$

46.1 Sabe-se que $E(X) = 2$

Como estamos perante um modelo de Poisson, tem-se que: $\lambda = 2$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} = 0,86$$

46.2 $P(X = 3) = e^{-2} \times \frac{2^3}{3!} = 0,18$

46.3 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left(e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \times 2 + e^{-2} \times \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \times \frac{2^3}{3!} + e^{-2} \times \frac{2^4}{4!} \right) = \\ &= 1 - e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} \right) = 0,053 \end{aligned}$$

46.4 $Y = 7X$, logo, o modelo será:

$$P(Y = k) = e^{-14} \times \frac{14^k}{k!}$$

$$P(Y > 28) = 1 - P(Y \leq 28) = 1 - 0,9997 = 0,0003$$

47. Entrar apenas à terceira tentativa significa que não entrou nas duas primeiras. Em cada tentativa, a probabilidade de entrar é 0,8, sendo que a probabilidade de não entrar é 0,2. Então, a probabilidade pedida é dada por: $P(X = 3) = 0,2^2 \times 0,8 \approx 0,032$

48.1 $p = 0,2\% = 0,002$

O primeiro televisor a apresentar uma deficiência de fabrico ser o quinto significa que os quatro primeiros não tinham nenhuma deficiência.

Então:

$$P(X=5) = (1-0,002)^4 \times 0,002 \approx 0,002$$

48.2 $E(X) = \frac{1}{p}$

Logo: $E(X) = \frac{1}{0,002} \Leftrightarrow E(X) = 500$

Portanto, o número médio de televisores a inspecionar até aparecer o primeiro com alguma anomalia é 500.

49. $p = 2\%$ $n = 30$

Seja X a variável: «ser defeituoso»

49.1.1 $P(X=0) = \frac{30!}{0!30!} \times 0,02^0 \times 0,98^{30} = 0,55$

49.1.2 $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(0,55 + \frac{30!}{29!} \times 0,02 \times 0,98^{29}\right) = 0,12$

49.1.3 $P(X \leq 3) = 0,9971 = 99,71\% \rightarrow$ calculadora

49.2 $P(X=5) = 3,5\%$

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} \times 0,02^5 \times 0,98^{n-5} = 0,035 \Leftrightarrow n \approx 53$$

50.1 $E(X) = \frac{1+50}{2} \Leftrightarrow E(X) = 25,5$

50.2.1 $P(0 \leq X \leq 9) = \frac{9-0}{50-1} = \frac{8}{49} \approx 0,18$

50.2.2 $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P(0 \leq X \leq 30) = 1 - \frac{30-0}{50-1} = 0,61$

50.2.3 $P(21 \leq X \leq 44) = \frac{44-21}{50-1} = 0,47$

51. $[0, 4]$

51.1 $E(X) = \frac{0+4}{2} = 2$

O número médio de horas de estudo por dia é 2 horas.

51.2 $P(0 \leq X \leq 0,5) = \frac{0,5-0}{4} = 0,125$

51.3 $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - P(0 \leq X \leq 5) = 1 - \frac{5-0}{4} = -\frac{1}{4}$ Impossível

Logo, a probabilidade é zero.

51.4 $P(2 \leq X \leq 3,5) = \frac{3,5-2}{4-0} = 0,375$

52. $\lambda = 0,1$

52.1 $E(X) = \frac{1}{0,1} = 10$

52.2.1 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(0 \leq X \leq 4) = 1 - (e^0 - e^{-0,4}) = 0,67$

52.2.2 $P(6 \leq X \leq 9) = e^{-0,6} - e^{-0,9} = 0,14$

53. $E(X) = 1$

Logo: $\frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$

53.1 $P(X \leq 3,5) = P(0 \leq X \leq 3,5) = e^0 - e^{-3,5} = 0,97$

53.2 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(0 \leq X \leq 2) = 1 - (e^0 - e^{-2}) = 0,135$

54. $\lambda = 600 \quad \sigma = 50$

54.1 Usando a calculadora, obtemos:

$$P(530 \leq X \leq 680) = 0,8644$$

Logo, existem $0,8644 \times 4000 \approx 3458$ indivíduos, aproximadamente.

54.2 $P(X < 480) = 0,0082$

$$P(X > 740) = 1 - P(X \leq 740) = 1 - 0,997445 = 0,0026$$

55.1 $\text{var}(X) = 625 \text{ mm}^2$ Logo: $\sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = 25$

$$P(X > 400) = 0,1 \quad N(\mu, 25)$$

$$X > 400 \Leftrightarrow 25U + \mu > 400 \Leftrightarrow U > \frac{400 - \mu}{25}$$

$$P\left(U > \frac{400 - \mu}{25}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{400 - \mu}{25}\right)$$

$$\text{Logo: } P\left(U \leq \frac{400 - \mu}{25}\right) = 0,9 \Leftrightarrow \frac{400 - \mu}{25} = 0,9 \Leftrightarrow \mu = 368 \text{ mm}$$

55.2 $P(X \geq 369) = 0,484$

$$0,484 \times 8000 = 3872$$

56.1 Sabe-se que $\mu = 21$ e $\sigma = 4$.

Se o André sair de casa às 8h01, só chegará atrasado se a duração da viagem for superior a 29 minutos.

$$\begin{aligned} P(X > 29) &= P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{100\% - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)}{2} = \\ &= \frac{100\% - 95,45\%}{2} = 2,275\% \end{aligned}$$

A probabilidade de o André chegar atrasado é de 2,28%.

56.2 A probabilidade de o pai do André usar o percurso alternativo é dada por:

$$P(X > 25) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{100\% - P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} =$$

$$= \frac{100\% - 68,27\%}{2} = 15,865\%$$

Representando por A o acontecimento «usar o percurso alternativo», temos os seguintes casos:

$AA\bar{A}$, $A\bar{A}A$ ou $\bar{A}AA$

Logo, a probabilidade de, em três dias consecutivos, o pai do André usar o percurso alternativo em apenas dois é dada por:

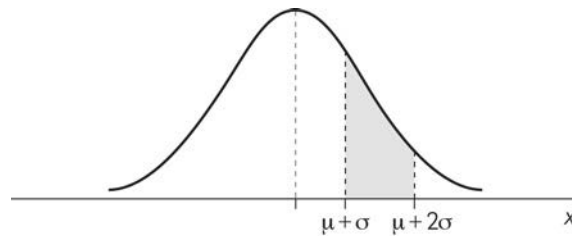
$$P = 0,15865 \times 0,15865 \times (1 - 0,15865) \times 3 = 0,06353$$

Ou seja, a probabilidade é de 6%.

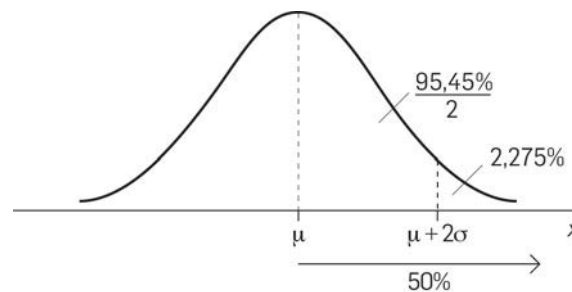
57. Pretende-se determinar $P(14,1 < X < 18,2)$.

Como esta probabilidade é equivalente a $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{95,45 - 68,27}{2} = 13,59\%$$



58. $P(X > \mu + 2\sigma) = 50\% - \frac{95,45\%}{2} = 2,275\%$



A probabilidade de o gasto em portagens, num determinado dia, ser superior a $\mu + 2\sigma$ é de 2,275%.

Tema 4 – Exercícios globais (pág. 212)

1.1 Por exemplo: «diferença do número de pintas viradas para cima»

1.2 Por exemplo: «número de caras viradas para cima»

1.3 Por exemplo: «número de pontos obtidos»

1.4 Por exemplo: «produto dos pontos virados para cima»

2.1 «Sair ás de paus»

2.2 «Sair 11 de copas»

2.3 «Sair uma carta de copas, ouros, paus ou espadas»

2.4 «Sair um rei»

3.1 Para obtermos três faces comuns ao lançar quatro vezes uma moeda equilibrada, teremos as seguintes hipóteses:

C → Face comum N → Face nacional

CCCN, CCNC, CNCC, NCCC

$$\text{Logo, } P(\text{obter exatamente três faces comuns}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{4}$$

3.2 Para obtermos duas faces comuns, temos várias hipóteses. Usando o acontecimento contrário, facilita a resolução do exercício porque temos menos casos a considerar.

$$P(\text{pelo menos duas faces comuns}) = 1 - P(\text{no máximo uma face comum}) =$$

$$= 1 - P(\text{nenhuma face comum}) - P(\text{uma face comum}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$$

4.1 Podemos elaborar uma tabela de dupla entrada para melhor verificação dos resultados:

		Dado					
		1	2	3	4	5	6
Moeda	N	(N, 1)	(N, 2)	(N, 3)	(N, 4)	(N, 5)	(N, 6)
	C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)

$$\text{Logo: } \Omega = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (N, 4), (N, 5), (N, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$$

$$4.2 P(C, n.^\circ \text{ ímpar}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

5.1 Podemos elaborar uma tabela de dupla entrada para melhor verificação dos resultados:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

5.2 Sejam N : «nunca sair 5» e D : «saírem faces diferentes», queremos verificar se $P(N \cap D) = P(N) \times P(D)$:

$$P(N) = \frac{36 - 11}{36} = \frac{25}{36} \qquad P(D) = \frac{36 - 6}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(N \cap D) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{25}{36} \times \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{125}{216} \qquad \text{Falso}$$

Logo, os acontecimentos não são independentes.

6.1 Consideremos os acontecimentos:

A : «ser do modelo A»

B : «ser do modelo B»

C : «ser do modelo C»

D : «ter menos de 25 anos»

E : «ter entre 25 e 45 anos»

F : «ter mais de 45 anos»

$$P(E \cap A) = 15\%$$

6.2 $P(B \cap \overline{F}) = 15\%$

6.3 $P(A | E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0,15}{0,15 + 0,1 + 0,12} = \frac{15}{37}$

6.4 $P(F | C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,17}{0,17 + 0,12 + 0,01} = \frac{17}{30}$

7. Consideremos os acontecimentos:

E : «ser eletrodoméstico»

R : «ser de recolha seletiva»

F : «ser de limpeza de florestas»

D : «ser de lixo doméstico»

Sabe-se que: $P(R) = \frac{20\,000}{145\,000} = \frac{4}{29}$; $P(F) = \frac{80\,000}{145\,000} = \frac{16}{29}$; $P(D) = \frac{45\,000}{145\,000} = \frac{9}{29}$;

$P(E | R) = 0,96$; $P(E | F) = 0,24$ e $P(E | D) = 36\%$

Queremos determinar $P(R | E)$.

Usando a regra de Bayes, tem-se que:

$$P(R | E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E | R) \times P(R)}{P(E | R) \times P(R) + P(E | F) \times P(F) + P(E | D) \times P(D)} =$$

$$= \frac{0,96 \times \frac{4}{29}}{0,96 \times \frac{4}{29} + 0,24 \times \frac{16}{29} + 0,36 \times \frac{9}{29}} = \frac{32}{91}$$

8. Consideremos os acontecimentos:

A : «o anúncio passar no canal A»

B : «o anúncio passar no canal B»

V : «o produto ser vendido»

Sabe-se: que $P(V | A) = 0,2$; $P(V | B) = 0,5$ e $P(A) = 52\%$

8.1 $P(V) = P(V | A) \times P(A) + P(V | B) \times P(B) = 0,2 \times 0,52 + 0,5 \times (1 - 0,52) = 0,344 = 34,4\%$

8.2 Queremos determinar $P(B | \bar{V})$:

$$P(V | A) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap A)}{P(A)} = 0,2 \Leftrightarrow P(V \cap A) = 10,4\%$$

$$P(V | B) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Leftrightarrow P(V \cap B) = 24\%$$

	V	$\bar{V}$	Total
A	10,4	41,6	52%
B	24	24	48%
Total	34,4%	65,6%	100%

$$\text{Logo, } P(B | \bar{V}) = \frac{P(B \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{0,24}{0,656} = \frac{15}{41}$$

9. Consideremos os acontecimentos:

A: «a Ana embrulhar»

B: «a Belmira embrulhar»

C: «a Carla embrulhar»

L: «colocar o laço»

Sabe-se que: $P(A) = 30\%$, $P(\bar{L} | A) = 3\%$, $P(B) = 20\%$, $P(\bar{L} | B) = 8\%$,

$P(C) = 100\% - 30\% - 20\% = 50\%$ e $P(\bar{L} | C) = 5\%$

9.1 Queremos determinar $P(\bar{L})$.

Usando o teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(\bar{L}) &= P(\bar{L} | A) \times P(A) + P(\bar{L} | B) \times P(B) + P(\bar{L} | C) \times P(C) = \\ &= 0,03 \times 0,3 + 0,08 \times 0,2 + 0,05 \times 0,5 = 0,05 = 5\% \end{aligned}$$

9.2 Queremos determinar $P(C | \bar{L})$.

$$P(C | \bar{L}) = \frac{P(C \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(\bar{L} | C) \times P(C)}{0,05} = \frac{0,05 \times 0,5}{0,05} = 0,5 = 50\%$$

10.1 A percentagem de alunos que se autoavaliaram com «Muito Bom» é de 20% porque é o dobro da percentagem de alunos que responderam «Insuficiente».

Então, a percentagem de alunos que não responderam será:

$$100 - (20 + 35 + 10 + 25) = 10\%$$

10.2 A afirmação é falsa, porque não é verificada por qualquer amostra que satisfaça as condições apresentadas. Por exemplo:

Ordem do valor: 1.º ... 75.º 76.º ... 150.º 151.º ... 225.º 226.º ... 300.º

Valor: 14 ... 16 16 ... 17 17 ... 18 18 ... 19

10.3 O número de raparigas que desejam prosseguir estudos é 130 e o número total de inquiridos é

$$300. \text{ Logo, a probabilidade pedida é: } P = \frac{130}{300} = \frac{13}{30}.$$

10.4 Consideremos os acontecimentos:

A: «apresentou a razão A»

B: «apresentou a razão B»

C: «apresentou a razão C»

X: «ser rapariga»

Sabe-se que: $P(A | X) = 70\%$, $P(B | X) = 20\%$, $P(\bar{B} | \bar{X}) = 40\%$ e $P(C | \bar{X}) = 10\%$.

Queremos calcular $P(\bar{X} | A)$:

$$P(A | X) = 0,7 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap X) = 0,7 \times \frac{130}{220} \Leftrightarrow P(A \cap X) = \frac{91}{220}$$

$$P(B | X) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = 0,2 \Leftrightarrow P(B \cap X) = 0,2 \times \frac{130}{220} \Leftrightarrow P(B \cap X) = \frac{13}{110}$$

$$P(B | \bar{X}) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{X})}{P(\bar{X})} = 0,4 \Leftrightarrow P(B \cap \bar{X}) = 0,4 \times \frac{90}{220} \Leftrightarrow P(B \cap \bar{X}) = \frac{9}{55}$$

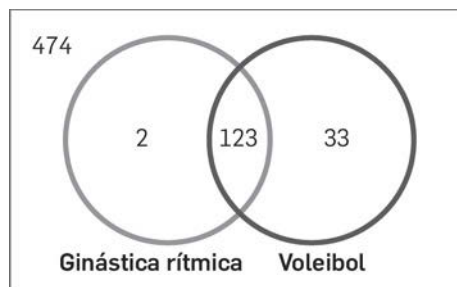
$$P(C | \bar{X}) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap \bar{X})}{P(\bar{X})} = 0,1 \Leftrightarrow P(C \cap \bar{X}) = 0,1 \times \frac{90}{220} \Leftrightarrow P(C \cap \bar{X}) = \frac{9}{220}$$

Com estes dados, podemos construir a tabela:

	A	B	C	Total
X	$\frac{91}{220}$	$\frac{13}{110}$	$\frac{13}{220}$	$\frac{13}{22}$
$\bar{X}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{9}{22}$
Total	$\frac{34}{55}$	$\frac{31}{110}$	$\frac{1}{10}$	1

$$P(\bar{X} | A) = \frac{P(\bar{X} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{44}}{\frac{34}{55}} = \frac{9}{44} \times \frac{55}{34} = \frac{45}{136} \approx 0,33$$

11.1



$$632 - 474 - 125 - 156 = 123 \rightarrow \text{colocaram dois X}$$

Assim, $632 - 123 = 509$ alunos colocaram apenas um X.

11.2

A probabilidade de escolher pelo menos uma das modalidades pode ser definida por:

$P(G \cup V)$, considerando os acontecimentos G : «escolher ginástica rítmica» e V : «escolher voleibol»

$$P(G \cup V) = P(G) + P(V) - P(G \cap V) = \frac{125}{632} + \frac{156}{632} - \frac{123}{632} = \frac{158}{632} = \frac{1}{4}$$

11.3

Consideremos o acontecimento O : «escolher outra».

Queremos calcular $P(G | \bar{O})$.

$$\text{Sabe-se que: } P(O) = \frac{474}{632} = \frac{3}{4}, \text{ logo, } P(\bar{O}) = \frac{1}{4}.$$

$$P(G | \bar{O}) = \frac{P(G \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{\frac{125}{632}}{\frac{1}{4}} = \frac{125}{158} \approx 79,11\%$$

12. Consideremos os acontecimentos:

C : «a produção ser de centeio»

M : «a produção ser de milho»

T : «a produção ser de trigo»

I : «ser transacionada no mercado interno»

Sabe-se que: $P(C) = 23\%$, $P(M \cap \bar{I}) = \frac{11\,960}{92\,000} = 13\%$, $P(I | C) = \frac{1}{4}$,

$P(T) = \frac{11\,040}{92\,000} = \frac{3}{25} = 12\%$ e $P(I | T) = 50\%$

12.1

	C	M	T	Total
$\bar{I}$ (M. externo)	17,25%	13%	6%	36,25%
I (M. interno)	5,75%	52%	6%	63,75%
Total	23%	65%	12%	100%

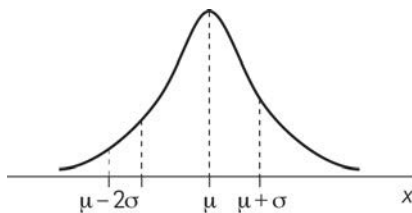
$$P(I | C) = 25\% \Leftrightarrow \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = 0,25 \Leftrightarrow P(I \cap C) = 0,25 \times 0,23 \Leftrightarrow P(I \cap C) = 5,75\%$$

$$P(I | T) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = 0,5 \Leftrightarrow P(I \cap T) = 0,5 \times 0,12 \Leftrightarrow P(I \cap T) = 0,06 \Leftrightarrow P(I \cap T) = 6\%$$

12.2 X : «massa, em quilogramas, de uma saca de cereais escolhida ao acaso de entre as sacas que, por dia, são embaladas numa determinada fábrica»

$$\mu = 1000 \quad \sigma = 16$$

$$P(968 < X < 1016) \text{ corresponde a } P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$$



Logo, a probabilidade pedida é:

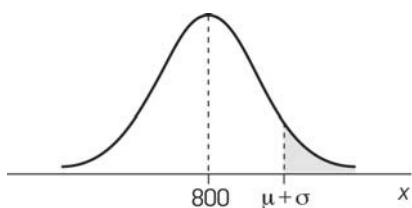
$$68,27\% + \left(\frac{95,45 - 68,27}{2} \right) = 81,86\%$$

13.1 A capacidade do depósito é 2000 litros.

$X \sim N(800, 40)$, ou seja, $\mu = 800$ e $\sigma = 40$.

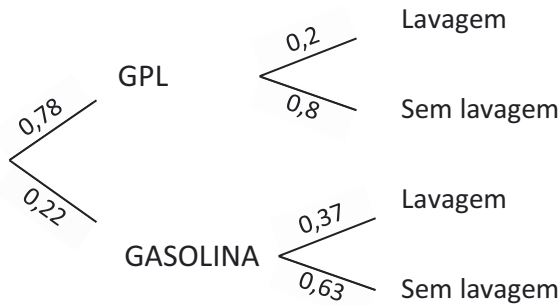
42% da capacidade do depósito: $0,42 \times 2000 = 840$ litros

Seja X a variável «quantidade de GPL no depósito», queremos saber $P(X > 840)$, ou seja, $P(X > \mu + \sigma)$.



$$P(X > 840) = 50 - \frac{68,27}{2} = 15,865\%$$

13.2 Podemos recorrer a um diagrama em árvore para resolver o problema.



Consideremos os acontecimentos:

G : «abastecer os veículos de gasolina»

L : «abastecer com lavagem»

Pretende-se calcular $P(G|L) = \frac{0,22 \times 0,37}{0,22 \times 0,37 + 0,78 \times 0,2} \approx 0,3429 = 34,29\%$

13.3 Consideremos os acontecimentos:

S : «ter sensores de estacionamento»

G : «ter gancho de reboque»

Sabe-se que: $P(S) = 50\%$, $P(G) = 60\%$ e $P(\bar{S} \cap \bar{G}) = 15\%$

$P(\bar{S} \cap \bar{G}) = 0,15 \Leftrightarrow P(\overline{S \cup G}) = 0,15 \Leftrightarrow P(S \cup G) = 1 - 0,15 \Leftrightarrow P(S \cup G) = 85\%$

$P(S \cup G) = P(S) + P(G) - P(S \cap G) \Leftrightarrow 0,85 = 0,5 + 0,6 - P(S \cap G) \Leftrightarrow P(S \cap G) = 0,25$

Pelo que: $P(A) = 25\%$

$P(B) = P(G \cap \bar{S}) = P(G) - P(G \cap S) = 0,6 - 0,25 = 0,35 = 35\%$

Podemos concluir que B é mais provável do que A .

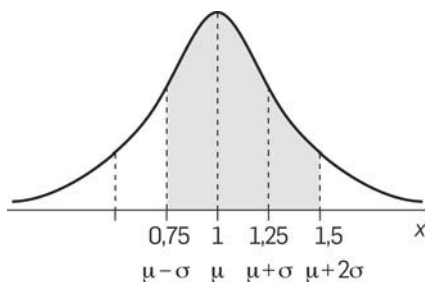
Poderíamos também ter construído um diagrama de Venn.



14.1 Seja X a variável aleatória «índice de cada estabelecimento comercial»

$X \sim N(1; 0,25)$

Queremos calcular $P\left(\frac{3}{4} < X < \frac{3}{2}\right)$, o que corresponde a $P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$



$$\begin{aligned} P(0,75 < X < 1,5) &= \\ &= 95,45\% - \left(\frac{95,45\% - 68,27\%}{2} \right) = \\ &= 81,86\% \end{aligned}$$

14.2 $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right)$ equivale a $P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

Sabe-se que: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95,45\%$

Logo, $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{95,45\%}{2} = 47,725\%$

Em três estabelecimentos, apenas dois apresentam índices pertencentes a $\left]1, \frac{3}{2}\right]$, ou seja,

a probabilidade pedida é:

$$0,47725 \times 0,47725 \times (1 - 0,47725) \times 3 = 35,72\%$$

(I $\bar{I}$ I), ($\bar{I}$ I I) ou (I I $\bar{I}$)

14.3 Consideremos os acontecimentos:

A: «o índice da empresa estar compreendido entre 0,5 e 1,5»

B: «procurar informação sobre a abertura de novas empresas comerciais»

$\bar{B}$: «efetuar pagamento»

Sabe-se que: $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(A|B) = 0,82$; $P(A|\bar{B}) = 0,30$ e $P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$$P(A) = P(A|B) \times P(B) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B}) = \frac{3}{8} \times 0,82 + \frac{5}{8} \times 0,30 = \frac{99}{200}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \times 0,82}{\frac{99}{200}} = \frac{41}{66}$$

15.1 Seja X a variável «classificação atribuída»

x_i	9	10	14	15	16	18	19
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{3}{23}$

Número total de alunos da turma: $2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 5 + 3 = 23$

15.2 $\mu = 9 \times \frac{2}{23} + 10 \times \frac{3}{23} + 14 \times \frac{5}{23} + \dots + 19 \times \frac{3}{23} = 14,96$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{23}(9 - 14,96)^2 + \frac{3}{23}(10 - 14,96)^2 + \dots + \frac{3}{23}(19 - 14,96)^2} = 3,29$$

Podemos obter estes resultados usando a calculadora.

15.3.1 $P(X < 14) = \frac{2}{23} + \frac{3}{23} = \frac{5}{23}$

15.3.2 $P(10 \leq X \leq 16) = \frac{3}{23} + \frac{5}{23} + \frac{1}{23} + \frac{4}{23} = \frac{13}{23}$

15.3.3 $P(X > 15) = \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} = \frac{12}{23}$

16. Consideremos a variável aleatória X : «número de filhos do casal»

Considerando que o casal tem quatro filhos, o modelo de probabilidade será:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Ou seja:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

16.1 Usando a calculadora, obtemos:

$$\mu = 2 \text{ e } \sigma = 1$$

16.2 A probabilidade de ter três crianças do mesmo gênero é $\frac{1}{4}$ e a probabilidade de ter duas crianças de cada gênero é $\frac{3}{8}$, logo, é mais provável ter duas crianças de cada gênero.

$$\mathbf{17.1.1} \quad P(X = 0) = e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 0,135$$

$$\mathbf{17.1.2} \quad P(X = 10) = e^{-2} \times \frac{2^{10}}{10!} = 0,0000382$$

$$\mathbf{17.1.3} \quad P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,135 - e^{-2} \times 2 = 0,59$$

$$\mathbf{17.2.1} \quad \lambda = 5 \times 2 = 10$$

$$P(X = 20) = e^{-10} \times \frac{10^{20}}{20!} = 0,002$$

$$\mathbf{17.2.2} \quad P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-10} \times 10 - e^{-10} \times 10 = 0,9995$$

18.1 Modelo uniforme.

$$\mathbf{18.2} \quad E(X) = \frac{40 + 55}{2} = 47,5$$

$$\mathbf{18.3.1} \quad P(X > 47) = 1 - P(X \leq 47) = 1 - P(40 \leq X \leq 47) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\mathbf{18.3.2} \quad P(X < 35) = 0$$

$$\mathbf{18.3.3} \quad P(45 < X < 50) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

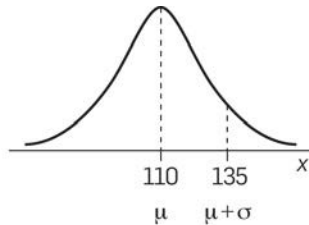
19. $E(X) = 20$ e $\lambda = \frac{1}{20} = 0,05$

19.1 $P(X < 25) = P(0 < X < 25) = e^{-0,05 \times 0} - e^{-0,05 \times 25} = 0,71$

19.2 $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - (e^0 - e^{-0,05 \times 60}) = 0,05$

20. $\mu = 110$ e $\sigma = 25$

20.1.1 $P(X > 135) = 50\% - \frac{68,27\%}{2} = 15,865\%$



20.1.2 $P(X < 75)$

$X \sim N(110, 25)$

$U = \frac{X - 110}{25} \Leftrightarrow 25U + 110 = X$

$25U + 110 < 75 \Leftrightarrow 25U < -35 \Leftrightarrow U < -1,4$

$P(X < 75) = P(U < -1,4) = P(U > 1,4) = 0,5 - P(0 < U < 1,4) = 0,5 - (\phi(1,4) - \phi(0)) = 0,5 - (0,9192 - 0,5) = 1 - 0,9192 = 0,0808$

20.2 $P(90 < X < 145)$

$\begin{cases} 25U + 110 > 90 \\ 25U + 110 < 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25U > -20 \\ 25U < 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U > -0,8 \\ U < 1,4 \end{cases}$

$P(-0,8 < U < 1,4) = \phi(1,4) - \phi(-0,8) = \phi(1,4) - 1 + \phi(0,8) = 0,7073$

Tema 4 – Teste final (pág. 218)

1.1.1 Para definirmos o espaço de resultados, podemos elaborar uma tabela de dupla entrada.

	2	5	10	50
2	(2, 2)	(2, 5)	(2, 10)	(2, 50)
5	(5, 2)	(5, 5)	(5, 10)	(5, 50)
10	(10, 2)	(10, 5)	(10, 10)	(10, 50)
50	(50, 2)	(50, 5)	(50, 10)	(50, 50)

$\Omega = \{(2, 2), (2, 5), (2, 10), (2, 50), (5, 2), (5, 5), (5, 10), (5, 50), (10, 2), (10, 5), (10, 10), (10, 50), (50, 2), (50, 5), (50, 10), (50, 50)\}$

$$1.1.2 \quad A = \{(2, 2), (5, 5), (10, 10), (50, 50)\}$$

$$1.1.3 \quad B = \{(2, 5), (2, 10), (2, 50), (5, 10), (5, 50), (10, 50)\}$$

$$1.1.4 \quad C = \{(5, 10)\}$$

$$1.1.5 \quad D = \{(2, 2), (2, 5), (2, 10), (5, 2), (5, 5), (5, 10), (10, 2), (10, 5)\}$$

$$1.2.1 \quad A \cup B = \{(2, 2), (2, 5), (2, 10), (2, 50), (5, 5), (5, 10), (5, 50), (10, 10), (10, 50), (50, 50)\}$$

$$1.2.2 \quad A \cap \bar{C} = \{(2, 2), (5, 5), (10, 10), (50, 50)\}$$

$$1.2.3 \quad B - C = \{(2, 5), (2, 10), (2, 50), (5, 50), (10, 50)\}$$

$$1.2.4 \quad A \cup (\bar{B} \cap C) = A \cup \emptyset = A$$

1.3.1 «O valor da primeira moeda é metade do valor da segunda moeda»

1.3.2 «A soma dos valores das moedas é superior a 100»

1.3.3 «O produto dos valores das moedas é inferior a 20»

1.3.4 «A soma dos valores das moedas é superior a 2 e inferior a 101»

1.3.5 «A soma dos valores das moedas é inferior a 10» e «o produto dos valores das moedas é superior a 100»

1.3.6 «A soma dos valores das moedas é um número par» e «a soma dos valores das moedas é um número ímpar»

$$2. \quad P(A) = \frac{8}{20} \times \frac{8}{20} = \frac{4}{25} = 0,16$$

$$P(B) = \frac{12}{20} \times \frac{12}{20} = \frac{9}{25} = 0,36$$

$$P(C) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times 2 = \frac{4}{5} = 0,8$$

O Crisóstomo tem maior probabilidade de ganhar.

3. Consideremos os acontecimentos:

M : «ter micro-ondas»

R : «ter *robô* de cozinha»

Sabe-se que: $P(M) = 20\%$, $P(R) = 30\%$ e $P(M \cap R) = 10\%$

$$3.1 \quad P(M \cup R) = P(M) + P(R) - P(M \cap R)$$

$$= 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4 = 40\%$$

$$3.2 \quad P(\bar{M} \cap \bar{R}) = P(\overline{M \cup R}) = 1 - P(M \cup R) = 1 - 0,4 = 0,6 = 60\%$$

$$3.3 \quad P(M \cap \bar{R}) = P(\bar{M} \cap R) = P(M) - P(M \cap R) + P(R) - P(M \cap R)$$

$$= 0,2 - 0,1 + 0,3 - 0,1 = 0,3 = 30\%$$

4. Para que o problema seja resolvido, a Miquelina não pode falhar e o Faustino também não.

Consideremos os acontecimentos:

M : «Miquelina acertar» e F : «Faustino acertar»

Sabe-se que:

$$P(M) = \frac{1}{3} \quad \text{logo } P(\bar{M}) = \frac{2}{3}$$

$$P(F) = \frac{1}{4} \quad \text{logo } P(\bar{F}) = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{resolvido}) = 1 - P(\bar{M} \cap \bar{F}) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1 - \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

5. Consideremos os acontecimentos:

A: «o dado ter as faces numeradas de 1 a 6»

B: «os números serem pares nas duas jogadas»

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Sabe-se que $P(A) = \frac{1}{2}$, pois existem dois dados com as faces numeradas de 1 a 6 em quatro possíveis.

$P(B|A)$ é a probabilidade de saírem dois números pares, considerando que foi escolhido um dado com as faces numeradas de 1 a 6.

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$P(B)$ é a probabilidade de saírem dois números pares independentemente do dado escolhido. Sendo D: «escolher o dado com 25% dos números pares» e E: «escolher o dado que só tem números ímpares»

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A}) + P(F) \times P(B|F) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{33}{64}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{33}{64}} = \frac{8}{33}$$

6.1 Nos dois jogos, podemos ter os seguintes casos:

1.º jogo	2.º jogo	Pontuação
V	V	$3 + 3 = 6$
V	E	$3 + 2 = 5$
V	D	$3 + 0 = 3$
E	V	$2 + 3 = 5$
E	E	$2 + 2 = 4$
E	D	$2 + 0 = 2$
D	V	$0 + 3 = 3$
D	E	$0 + 2 = 2$
D	D	$0 + 0 = 0$

Portanto, a variável X pode tomar os valores 0, 2, 3, 4, 5 e 6.

x_i	0	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$$

(E, D), (D, E)

$$P(X = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$$

(V, D), (D, V)

$$P(X = 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(E, E)

$$P(X = 5) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$$

(V, E), (E, V)

$$P(X = 6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

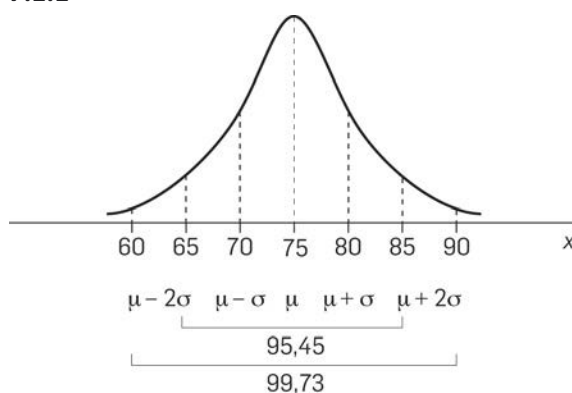
(V, V)

6.2 $E(X) = 3,33$

$$\sigma = 1,76$$

7. $\mu = 75$ e $\sigma = 5$

7.1.1



$$P(X > 75) = 50\%$$

7.1.2 $P(X < 60) = P(X < \mu - 3\sigma) = \frac{100\% - 99,73\%}{2} = 0,135\%$

7.1.3 $P(65 < X < 90) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma) =$
 $= 95,45\% + \frac{99,73 - 95,45}{2} = 97,59\%$

7.2 $15,865\% \times 30 \approx 5$ alunos

8. Começemos por elaborar uma tabela onde figurem todas as somas possíveis.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Um jogo possível, de acordo com o enunciado, é o seguinte:

Participam dois jogadores, que apostam uma quantia fixa por cada jogada.

Lançam-se dois dados. Se a soma dos números saídos for:

- 2 ou 12, o montante reverte a favor da Felismina.
- 7, o montante transita para a jogada seguinte.
- 3, 4, 5 ou 6, ganha o Atílio.
- 8, 9, 10 ou 11, ganha o Inácio.

A probabilidade de a Felismina ganhar é $\frac{2}{36}$, ou seja, 6%.

A probabilidade de o montante transitar para a jogada seguinte é de $\frac{6}{36}$, ou seja, cerca de 17%.

A probabilidade de o Atílio ganhar é igual à do Inácio ganhar, sendo essa probabilidade de $\frac{14}{36}$, ou seja, 39%.

1.2 Pârametro e estatística. Estimativa pontual

Atividade 1 (pág. 229)

1.1 O parâmetro é 53 kg e uma estatística é 50,3 kg.

1.2 O valor 1,6 horas é uma estatística.

1.3 O valor 83% é uma estatística.

1.4 O valor 72,5% é o parâmetro.

Atividade 2 (pág. 230)

Trabalho de pesquisa

1.4 Estimação de um valor médio

Atividade 1 (pág. 236)

1.1 e 1.2 São 216 amostras ($6^3 = 216$). Na tabela seguinte encontram-se todas as amostras possíveis, bem como a média de cada uma:

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
C ₁ , C ₁ , C ₁	28	C ₂ , C ₁ , C ₁	27,(3)	C ₃ , C ₁ , C ₁	26,(6)	C ₄ , C ₁ , C ₁	27,(3)	C ₅ , C ₁ , C ₁	28,(6)	C ₆ , C ₁ , C ₁	26
C ₁ , C ₁ , C ₂	27,(3)	C ₂ , C ₁ , C ₂	26,(6)	C ₃ , C ₁ , C ₂	26	C ₄ , C ₁ , C ₂	26,(6)	C ₅ , C ₁ , C ₂	26	C ₆ , C ₁ , C ₂	25,(3)
C ₁ , C ₁ , C ₃	26,(6)	C ₂ , C ₁ , C ₃	26	C ₃ , C ₁ , C ₃	26	C ₄ , C ₁ , C ₃	26	C ₅ , C ₁ , C ₃	27,(3)	C ₆ , C ₁ , C ₃	24,(6)
C ₁ , C ₁ , C ₄	27,(3)	C ₂ , C ₁ , C ₄	26,(6)	C ₃ , C ₁ , C ₄	26	C ₄ , C ₁ , C ₄	26,(6)	C ₅ , C ₁ , C ₄	28	C ₆ , C ₁ , C ₄	25,(3)
C ₁ , C ₁ , C ₅	28,(6)	C ₂ , C ₁ , C ₅	26	C ₃ , C ₁ , C ₅	27,(3)	C ₄ , C ₁ , C ₅	28	C ₅ , C ₁ , C ₅	29,3	C ₆ , C ₁ , C ₅	26,(6)
C ₁ , C ₁ , C ₆	26	C ₂ , C ₁ , C ₆	25,(3)	C ₃ , C ₁ , C ₆	24,(6)	C ₄ , C ₁ , C ₆	25,(3)	C ₅ , C ₁ , C ₆	26,(6)	C ₆ , C ₁ , C ₆	24
C ₁ , C ₂ , C ₁	27,(3)	C ₂ , C ₂ , C ₁	26,(6)	C ₃ , C ₂ , C ₁	26	C ₄ , C ₂ , C ₁	26,(6)	C ₅ , C ₂ , C ₁	26	C ₆ , C ₂ , C ₁	25,(3)
C ₁ , C ₂ , C ₂	26,(6)	C ₂ , C ₂ , C ₂	26	C ₃ , C ₂ , C ₂	25,(3)	C ₄ , C ₂ , C ₂	26	C ₅ , C ₂ , C ₂	27,(3)	C ₆ , C ₂ , C ₂	24,(6)
C ₁ , C ₂ , C ₃	26	C ₂ , C ₂ , C ₃	25,(3)	C ₃ , C ₂ , C ₃	24,(6)	C ₄ , C ₂ , C ₃	25,(3)	C ₅ , C ₂ , C ₃	26,(6)	C ₆ , C ₂ , C ₃	24
C ₁ , C ₂ , C ₄	26,(6)	C ₂ , C ₂ , C ₄	26	C ₃ , C ₂ , C ₄	25,(3)	C ₄ , C ₂ , C ₄	26	C ₅ , C ₂ , C ₄	27,(3)	C ₆ , C ₂ , C ₄	24,(6)
C ₁ , C ₂ , C ₅	28	C ₂ , C ₂ , C ₅	27,(3)	C ₃ , C ₂ , C ₅	26,(6)	C ₄ , C ₂ , C ₅	27,(3)	C ₅ , C ₂ , C ₅	28,(6)	C ₆ , C ₂ , C ₅	26
C ₁ , C ₂ , C ₆	25,(3)	C ₂ , C ₂ , C ₆	24,(6)	C ₃ , C ₂ , C ₆	24	C ₄ , C ₂ , C ₆	24,(6)	C ₅ , C ₂ , C ₆	26	C ₆ , C ₂ , C ₆	23,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₁	26,(6)	C ₂ , C ₃ , C ₁	26	C ₃ , C ₃ , C ₁	26	C ₄ , C ₃ , C ₁	26	C ₅ , C ₃ , C ₁	27,(3)	C ₆ , C ₃ , C ₁	24,(6)
C ₁ , C ₃ , C ₂	26	C ₂ , C ₃ , C ₂	25,(3)	C ₃ , C ₃ , C ₂	24,(6)	C ₄ , C ₃ , C ₂	25,(3)	C ₅ , C ₃ , C ₂	26,(6)	C ₆ , C ₃ , C ₂	24
C ₁ , C ₃ , C ₃	26	C ₂ , C ₃ , C ₃	24,(6)	C ₃ , C ₃ , C ₃	24	C ₄ , C ₃ , C ₃	24,(6)	C ₅ , C ₃ , C ₃	26	C ₆ , C ₃ , C ₃	23,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₄	26	C ₂ , C ₃ , C ₄	25,(3)	C ₃ , C ₃ , C ₄	24,(6)	C ₄ , C ₃ , C ₄	25,(3)	C ₅ , C ₃ , C ₄	26,(6)	C ₆ , C ₃ , C ₄	24
C ₁ , C ₃ , C ₅	27,(3)	C ₂ , C ₃ , C ₅	26,(6)	C ₃ , C ₃ , C ₅	26	C ₄ , C ₃ , C ₅	26,(6)	C ₅ , C ₃ , C ₅	28	C ₆ , C ₃ , C ₅	25,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₆	24,(6)	C ₂ , C ₃ , C ₆	24	C ₃ , C ₃ , C ₆	23,(3)	C ₄ , C ₃ , C ₆	24	C ₅ , C ₃ , C ₆	25,(3)	C ₆ , C ₃ , C ₆	22,(6)
C ₁ , C ₄ , C ₁	27,(3)	C ₂ , C ₄ , C ₁	26,(6)	C ₃ , C ₄ , C ₁	26	C ₄ , C ₄ , C ₁	26,(6)	C ₅ , C ₄ , C ₁	28	C ₆ , C ₄ , C ₁	25,(3)
C ₁ , C ₄ , C ₂	26,(6)	C ₂ , C ₄ , C ₂	26	C ₃ , C ₄ , C ₂	25,(3)	C ₄ , C ₄ , C ₂	26	C ₅ , C ₄ , C ₂	27,(3)	C ₆ , C ₄ , C ₂	24,(6)
C ₁ , C ₄ , C ₃	26	C ₂ , C ₄ , C ₃	25,(3)	C ₃ , C ₄ , C ₃	24,(6)	C ₄ , C ₄ , C ₃	25,(3)	C ₅ , C ₄ , C ₃	26,(6)	C ₆ , C ₄ , C ₃	24

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
C_1, C_4, C_4	26,(6)	C_2, C_4, C_4	26	C_3, C_4, C_4	25,(3)	C_4, C_4, C_4	26	C_5, C_4, C_4	27,(3)	C_6, C_4, C_4	24,(6)
C_1, C_4, C_5	28	C_2, C_4, C_5	27,(3)	C_3, C_4, C_5	26,(6)	C_4, C_4, C_5	27,(3)	C_5, C_4, C_5	27,(3)	C_6, C_4, C_5	26
C_1, C_4, C_6	25,(3)	C_2, C_4, C_6	24,(6)	C_3, C_4, C_6	24	C_4, C_4, C_6	24,(6)	C_5, C_4, C_6	26	C_6, C_4, C_6	23,(3)
C_1, C_5, C_1	28,(6)	C_2, C_5, C_1	26	C_3, C_5, C_1	27,(3)	C_4, C_5, C_1	28	C_5, C_5, C_1	29,3	C_6, C_5, C_1	26,(6)
C_1, C_5, C_2	26	C_2, C_5, C_2	25,(3)	C_3, C_5, C_2	26,(6)	C_4, C_5, C_2	27,(3)	C_5, C_5, C_2	28,(6)	C_6, C_5, C_2	26
C_1, C_5, C_3	27,(3)	C_2, C_5, C_3	26,(6)	C_3, C_5, C_3	26	C_4, C_5, C_3	26,(6)	C_5, C_5, C_3	28	C_6, C_5, C_3	25,(3)
C_1, C_5, C_4	28	C_2, C_5, C_4	27,(3)	C_3, C_5, C_4	26,(6)	C_4, C_5, C_4	27,(3)	C_5, C_5, C_4	27,(3)	C_6, C_5, C_4	26
C_1, C_5, C_5	29,3	C_2, C_5, C_5	28,(6)	C_3, C_5, C_5	28	C_4, C_5, C_5	27,(3)	C_5, C_5, C_5	30	C_6, C_5, C_5	27,(3)
C_1, C_5, C_6	26,(6)	C_2, C_5, C_6	26	C_3, C_5, C_6	25,(3)	C_4, C_5, C_6	26	C_5, C_5, C_6	27,(3)	C_6, C_5, C_6	24,(6)
C_1, C_6, C_1	26	C_2, C_6, C_1	25,(3)	C_3, C_6, C_1	24,(6)	C_4, C_6, C_1	25,(3)	C_5, C_6, C_1	26,(6)	C_6, C_6, C_1	26
C_1, C_6, C_2	25,(3)	C_2, C_6, C_2	24,(6)	C_3, C_6, C_2	24	C_4, C_6, C_2	24,(6)	C_5, C_6, C_2	26	C_6, C_6, C_2	23,(3)
C_1, C_6, C_3	24,(6)	C_2, C_6, C_3	24	C_3, C_6, C_3	23,(3)	C_4, C_6, C_3	24	C_5, C_6, C_3	25,(3)	C_6, C_6, C_3	22,(6)
C_1, C_6, C_4	25,(3)	C_2, C_6, C_4	24,(6)	C_3, C_6, C_4	24	C_4, C_6, C_4	24,(6)	C_5, C_6, C_4	26	C_6, C_6, C_4	23,(3)
C_1, C_6, C_5	26,(6)	C_2, C_6, C_5	26	C_3, C_6, C_5	25,(3)	C_4, C_6, C_5	26	C_5, C_6, C_5	27,(3)	C_6, C_6, C_5	24,(6)
C_1, C_6, C_6	24	C_2, C_6, C_6	23,(3)	C_3, C_6, C_6	22,(6)	C_4, C_6, C_6	23,(3)	C_5, C_6, C_6	24,(6)	C_6, C_6, C_6	22

1.3 Temos 216 casos possíveis. Resta fazer a contagem dos casos favoráveis para cada um dos valores de $\bar{X}$:

$\bar{X}$	22	22,(6)	23,(3)	24	24,(6)	25,(3)	26	26,(6)	27,(3)	28	28,(6)	29,(3)	30
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{16}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{33}{216}$	$\frac{38}{216}$	$\frac{33}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{16}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

Com o auxílio, por exemplo, da calculadora gráfica, chegamos aos valores:

$$E(\bar{X}) = 26 \text{ e } \sigma_{\bar{X}} \approx 1,491$$

1.4 e 1.5 O estimador é não enviesado, uma vez que a média da distribuição de amostragem coincide com o parâmetro a estimar. O desvio-padrão da distribuição de amostragem da média é, aproximadamente, 1,491, valor menor do que no caso de amostras de dimensão 2 (que era de, aproximadamente, 1,826). Podemos dizer que, ao aumentar a dimensão da amostra, diminuimos a variabilidade da estatística.

Atividade 2 (pág. 239)

Trabalho de pesquisa

1.5 Importância do teorema do limite central

Atividade 1 (pág. 244)

Trabalho de pesquisa

Atividade 2 (pág. 244)

2.1 O valor médio da distribuição de amostragem é: $E(\bar{X}) = 15,3$. O desvio-padrão amostral é:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{7,02}{\sqrt{60}} \approx 0,906$$

2.2 Como a dimensão da amostra é maior do que 30 (é igual a 60), então, pelo teorema do limite central, podemos afirmar que a distribuição de amostragem da média pode ser aproximada a uma distribuição normal com valor médio de 15,3 e desvio-padrão de 0,906.

Seja $U \sim N(0, 1)$.

Então:

$$U = \frac{\bar{X} - 15,3}{0,906} \Leftrightarrow \bar{X} = 0,906U + 15,3$$

$$\begin{aligned} \text{E, assim: } P(13 < \bar{X} < 15) &= P(13 < 0,906U + 15,3 < 15) = P(-2,539 < U < -0,331) = \\ &= 1 - \Phi(0,33) - 1 + \Phi(2,54) = -0,6293 + 0,9945 = \\ &= 0,3652 \end{aligned}$$

(Valores da tabela da distribuição normal *standard*, página 193 do Manual)

A probabilidade de o número médio de defeitos (na amostra) estar entre 13 e 15 defeitos por cada 100 metros de tecido é de, aproximadamente, 36,52%.

$$\begin{aligned} 2.3 \quad P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,5) &= P(|0,906U + 15,3 - 15,3| \leq 0,5) = P(|U| < 0,552) = \\ &= P(-0,552 < U < 0,552) = 2 \times \Phi(0,55) - 1 = \\ &= 2 \times 0,7088 - 1 = \\ &= 0,4176 \end{aligned}$$

(Valor da tabela da distribuição normal *standard*, página 193 do Manual)

A probabilidade pedida é de, aproximadamente, 41,76%.

1.6 Intervalos de confiança para o valor médio

Atividade 1 (pág. 247)

$$\mu = 120 \text{ mm}$$

Um intervalo de confiança de 90% para o parâmetro μ é de forma:

$$\left[\bar{x} - 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[120 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 120 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right] =]117,67; 122,33[$$

Atividade 2 (pág. 247)

Significa que se recolhermos muitas amostras de dimensão n , calcularmos as médias e os desvios-padrão dessas amostras e construirmos os intervalos de confiança respetivos, cerca de 90% desses intervalos conterão o valor médio μ , enquanto os restantes 10% não conterão o parâmetro μ . Não temos a certeza de que um determinado intervalo contenha o parâmetro desconhecido, mas temos 90% de confiança que o intervalo que calculámos contenha o valor do parâmetro.

Atividade 3 (pág. 248)

$$n = 1000 \quad \bar{x} = 75 \quad s = 10$$

Um intervalo de confiança para μ com 95% de confiança é dado por:

$$\left[75 - 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{1000}}; 75 + 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{1000}} \right] =]74,38; 75,62[$$

Atividade 4 (pág. 249)

$$n = 200 \quad \bar{x} = 110 \quad s = 15$$

4.1 Um intervalo de confiança para μ com 99% de confiança é dado por:

$$\left[110 - 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{200}}; 110 + 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{200}} \right] =]107,27; 112,73[$$

4.2 Não, porque a amostra tem dimensão superior a 30.

1.7 Estimativa pontual de proporção

Atividade 1 (pág. 252)

Trabalho de pesquisa

Atividade 2 (pág. 253)

$$p = 75\%, n = 1200, \mu = 0,75 \text{ e } \sigma = \sqrt{\frac{0,75(1-0,75)}{1200}} = 0,0125$$

Atividade 3 (pág. 253)

Trabalho de pesquisa

1.8 Intervalos de confiança para a proporção

Atividade 1 (pág. 256)

$$\hat{p} = \frac{48}{150} = 0,32$$

O intervalo de confiança será:

$$\left[0,32 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{150}}; 0,32 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{150}} \right] =]0,26; 0,38[$$

A proporção dos votos encontra-se entre os 26% e os 38%.

Atividade 2 (pág. 256)

Tem-se que: $n = 500$, $z = 1,960$ e $\hat{p} = \frac{8}{500} = 0,016$

O intervalo de confiança para a proporção de livros com defeito será:

$$\left[0,016 - 1,960 \times \sqrt{\frac{0,016(1 - 0,016)}{500}}; 0,016 + 1,960 \times \sqrt{\frac{0,016(1 - 0,016)}{500}} \right] =]0,005; 0,027[$$

Atividade 3 (pág. 256)

$n = 300$ e $\hat{p} = \frac{180}{300} = 0,6$

O intervalo de confiança para a proporção com 99% de confiança é da forma:

$$\left[0,6 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{300}}; 0,6 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{300}} \right] =]0,53; 0,67[$$

1.9 Interpretação do conceito de intervalo de confiança

Atividade 1 (pág. 257)

Com uma confiança de 90%, podemos afirmar que entre 83% e 87% dos entrevistados tinham automóvel.

Atividade 2 (pág. 257)

Com uma confiança de 95%, podemos afirmar que entre 7% e 15% dos entrevistados preferem *smartphones* na lista de presentes de Natal.

Atividade 3 (pág. 259)

$\varepsilon = 5 \text{ min}$ $n = 50$ $\sigma = 20$

$$n = \left(\frac{2,576 \times 20}{5} \right)^2 \approx 107$$

Aproximadamente 107 alunos.

Atividade 4 (pág. 260)

$\varepsilon = 2\%$

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times 0,35(1 - 0,35) \approx 2185$$

Aproximadamente 2185 eleitores.

Atividade 5 (pág. 261)

$$\varepsilon = 4\%$$

Tendo em conta o resultado anterior, tem-se que:

$$n = \left(\frac{2,576}{0,04} \right)^2 \times 0,25 \approx 1037$$

Aproximadamente 1037 pessoas.

Exercícios de aplicação (pág. 266)

1. Composição

2. Composição

3.1 A população é constituída pelas 1486 pessoas que estão na sala.

3.2 A amostra será constituída pelas 12 pessoas que vão ser selecionadas de forma sistemática.

3.3 Se o primeiro sorteado é o número 16, haverá ainda $1486 - 16 = 1470$ pessoas suscetíveis de serem selecionadas. Como $1470 : 12 = 122,5 \approx 123$, haverá 123 senhas de intervalo entre dois selecionados consecutivos.

$$16 + 123 = 139; 139 + 123 = 262; 262 + 123 = 385; 385 + 123 = 508; 508 + 123 = 631;$$

$$631 + 123 = 754; 754 + 123 = 877; 877 + 123 = 1000; 1000 + 123 = 1123;$$

$$1123 + 123 = 1246; 1246 + 123 = 1369$$

Assim, os felizes contemplados serão os espetadores que tiverem uma das senhas pertencentes ao conjunto: {16, 262, 385, 508, 631, 754, 877, 1000, 1123, 1246, 1369}

4.1

	Número total de alunos	Porcentagem		Número de alunos	
		♀	♂	♀	♂
1.º Ciclo	860	55	<u>45</u>	<u>473</u>	<u>387</u>
2.º Ciclo	580	<u>50</u>	50	<u>290</u>	<u>290</u>
3.º Ciclo	<u>1230</u>	<u>60</u>	40	<u>738</u>	<u>492</u>
Secundário	1850	36	<u>64</u>	<u>666</u>	<u>1184</u>
Total	<u>4520</u>			<u>2172</u>	<u>2358</u>

4.2 $4520 \times 0,10 = 452$ alunos que deverão fazer parte da amostra.

$$1.^\circ \text{ Ciclo } \begin{cases} 473 \times 0,10 = 47,3 \approx 47 \text{ raparigas} \\ 387 \times 0,10 = 38,7 \approx 39 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$$47 + 39 = 86 \text{ alunos, que corresponde a } 10\% \text{ do total de alunos do } 1.^\circ \text{ Ciclo.}$$

$$2.^{\circ} \text{ Ciclo } \begin{cases} 290 \times 0,10 = 29 \text{ raparigas} \\ 290 \times 0,10 = 29 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$29 + 29 = 58$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 2.º Ciclo.

$$3.^{\circ} \text{ Ciclo } \begin{cases} 738 \times 0,10 = 73,8 \approx 74 \text{ raparigas} \\ 492 \times 0,10 = 49,2 \approx 49 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$74 + 49 = 123$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 3.º Ciclo.

$$\text{Ensino Secundário } \begin{cases} 666 \times 0,10 = 66,6 \approx 67 \text{ raparigas} \\ 1184 \times 0,10 = 118,4 \approx 118 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$67 + 118 = 185$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do Ensino Secundário.

Então, deverão ser selecionados 86 alunos do 1.º Ciclo, 58 do 2.º Ciclo, 123 do 3.º Ciclo e 185 do Ensino Secundário, num total de 452 alunos.

5. Como 20% dos alunos do agrupamento corresponde a $4365 \times 0,20 = 873$, este é o número total de alunos que deverão fazer parte da amostra.

Cálculo da proporção de alunos de cada ciclo:

$$1.^{\circ} \text{ Ciclo: } \frac{937}{4365} \approx 0,2147$$

$$2.^{\circ} \text{ Ciclo: } \frac{598}{4365} \approx 0,1370$$

$$3.^{\circ} \text{ Ciclo: } \frac{1236}{4365} \approx 0,2832$$

$$\text{Ensino Secundário: } \frac{1594}{4365} \approx 0,3652$$

Cálculo do número de alunos a selecionar de cada ciclo:

$$1.^{\circ} \text{ Ciclo: } 873 \times 0,2147 \approx 187 \text{ alunos}$$

$$2.^{\circ} \text{ Ciclo: } 873 \times 0,1370 \approx 120 \text{ alunos}$$

$$3.^{\circ} \text{ Ciclo: } 873 \times 0,2832 \approx 247 \text{ alunos}$$

$$\text{Ensino Secundário: } 873 \times 0,3652 \approx 319 \text{ alunos}$$

Assim, deverão fazer parte desta amostra 187 alunos do 1.º Ciclo, 120 do 2.º Ciclo, 247 do 3.º Ciclo e 319 do Ensino Secundário, num total de 873 alunos.

6. B

7. B

$$\hat{p} = \frac{500 - 153}{500} = 0,694$$

8.1 Parâmetro: proporção de alunos da escola que foram ao cinema pelo menos uma vez no último mês

8.2 Estatística: $\hat{p} = \frac{83}{130} \approx 0,638$

8.3 $1 - 0,638 = 0,362 \rightarrow 36,2\%$

9.1 $\bar{x} = \frac{4 + 3,6 + 3,4 + 3,6 + 3,5 + 3,7 + 3,5 + 3,5}{8} = 3,6$

9.2 $s \approx 0,173$ (valor obtido com a calculadora, modo estatístico)

10.1 São $5^2 = 25$ amostras

10.2

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
(1, 1)	1	(3, 1)	2	(6, 1)	3,5	(8, 1)	4,5	(9, 1)	5
(1, 3)	2	(3, 3)	3	(6, 3)	4,5	(8, 3)	5,5	(9, 3)	6
(1, 6)	3,5	(3, 6)	4,5	(6, 6)	6	(8, 6)	7	(9, 6)	7,5
(1, 8)	4,5	(3, 8)	5,5	(6, 8)	7	(8, 8)	8	(9, 8)	8,5
(1, 9)	5	(3, 9)	6	(6, 9)	7,5	(8, 9)	8,5	(9, 9)	9

10.3

$\bar{X}$	1	2	3	3,5	4,5	5	5,5	6	7	7,5	8	8,5	9
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

10.4 $\mu = \frac{1+3+6+8+9}{5} = 5,4$

$$E(\bar{X}) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{2}{25} + 3 \times \frac{1}{25} + \dots + 8,5 \times \frac{2}{25} + 9 \times \frac{1}{25} \Leftrightarrow E(\bar{X}) = 5,4$$

$\mu = E(\bar{X})$, logo, o estimador não é enviesado (é cêntrico).

10.5 $\sigma = 3,007$ $\sigma_{\bar{X}} \approx 2,126$ (valores obtidos com a calculadora, modo estatístico)

10.6 $\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{3,007}{\sqrt{2}} \approx 2,126$

O valor obtido é igual ao desvio-padrão da distribuição de amostragem da média.

11. Uma vez que são $5^3 = 125$ amostras, sugere-se a divisão da turma em cinco grupos e cada grupo faz o estudo de 25 amostras: determinar as amostras, a média de cada uma e os diferentes valores que esta pode assumir. Por exemplo, o grupo 1 estuda as amostras que começam com o elemento 1, o grupo 2, as amostras que começam pelo elemento 3 e assim sucessivamente. Quando se juntam os resultados obtidos por todos os grupos, dever-se-á obter:

$\bar{X}$	1	1,67	2,33	2,67	3	3,33	3,67	4	4,33	4,67	5	5,33
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{6}{125}$
$\bar{X}$	5,67	6	6,33	6,67	7	7,33	7,67	8	8,33	8,67	9	
P	$\frac{9}{125}$	$\frac{13}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$	

$\mu = 5,4 = E(\bar{X}), \sigma_{\bar{X}} \approx 1,736$

12. Composição

13.1 B

13.2 C

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{9,25}{\sqrt{40}} \approx 1,463 \text{ g}$

14.1 $E(\bar{X}) = 17,5 \text{ kg}$

14.2 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,75}{\sqrt{35}} \approx 0,465 \text{ kg}$

15.1 $\mu_{\bar{X}} = 1250 \text{ horas}$

15.2 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{110}{\sqrt{45}} \approx 16,398 \text{ horas}$

15.3.1 $U = \frac{\bar{X} - 1250}{16,398} \Leftrightarrow \bar{X} = 16,398U + 1250$

$$P(1200 < \bar{X} < 1280) = P(1200 - 1250 < 16,398U < 1280 - 1250) \approx$$

$$\approx P(-3,05 < U < 1,83) = \phi(1,83) - 1 + \phi(3,05) \approx 0,9664 - 1 + 0,9989 =$$

$$= 0,9653 \rightarrow 96,53\%$$

(tabela da página 193 do Manual)

15.3.2

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0,4) = P\left(|U| < \frac{0,4}{16,398}\right) \approx P(|U| < 0,02) = 2\phi(0,02) - 1 = 2 \times 0,5080 - 1 = 0,016 \rightarrow 1,6\%$$

16. O intervalo de 90% para μ é:

$$\left] \bar{x} - 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

Neste caso,

$$\left] 150 - 1,645 \times \frac{50}{\sqrt{10}}; 150 + 1,645 \times \frac{50}{\sqrt{10}} \right[=]141,78; 158,23[$$

17. $n = 80$, $\bar{x} = 127$ e $s = 9$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 127 - 1,645 \times \frac{9}{\sqrt{80}}; 127 + 1,645 \times \frac{9}{\sqrt{80}} \right[=]125,34; 128,66[$$

18. O intervalo de 95% para μ é:

$$\left] \bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[=]\bar{x} - 1,96 \times 0,5; \bar{x} + 1,96 \times 0,5[=]\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98[$$

$P(\bar{x} - 0,98 \leq \mu \leq \bar{x} + 0,98) = 0,95$, o que significa que a probabilidade de o intervalo $]\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98[$ conter o valor médio μ é 0,95.

19. $n = 80$; $\bar{x} = 1,6$ e $s = 0,05$

O intervalo de 95% para μ é:

$$\left] 1,6 - 1,96 \times \frac{0,05}{\sqrt{80}}; 1,6 + 1,96 \times \frac{0,05}{\sqrt{80}} \right[=]1,59; 1,61[$$

20.1 $n = 80$, $\bar{x} = 70$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 70 - 1,645 \times \frac{4}{\sqrt{80}}; 70 + 1,645 \times \frac{4}{\sqrt{80}} \right[=]69,26; 70,74[$$

20.2 $n = 100$, $\bar{x} = 70$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 95% para μ é:

$$\left] 70 - 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}; 70 + 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}} \right[=]69,216; 70,784[$$

20.3 $n = 80$, $\bar{x} = 60$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left] 60 - 2,576 \times \frac{4}{\sqrt{80}}; 60 + 2,576 \times \frac{4}{\sqrt{80}} \right[=]58,85; 61,15[$$

21.1 $\sigma = 10$, $n = 50$ e $\bar{x} = 994$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left[994 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 994 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right] =]991,67; 996,33[$$

O intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left[994 - 2,576 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 994 + 2,576 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right] =]990,36; 997,64[$$

À medida que o grau de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

21.2 $n = 200$ e $\bar{x} = 994$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left[994 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{200}}; 994 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{200}} \right] =]992,84; 995,16[$$

21.3 À medida que a dimensão da amostra aumenta, a amplitude do intervalo diminui.

22. Sabe-se que para $s = 29$ e $n = 40$, o intervalo de confiança de 95% para μ é $]160, 178[$.

Sabe-se ainda que:

$$\bar{x} = \frac{178 + 160}{2} = 169$$

Assim, o intervalo de confiança de 99%, para a mesma amostra, resulta dos seguintes valores:

$$\bar{x} = 994, s = 29 \text{ e } n = 40$$

Logo:

$$\left[169 - 2,576 \times \frac{29}{\sqrt{40}}; 169 + 2,576 \times \frac{29}{\sqrt{40}} \right] =]157,188; 180,812[$$

Arredondando às unidades, obtemos $]157, 181[$.

23. Sabemos que o intervalo de confiança de 90% para o número médio de habitantes servidos por cada ponto de acesso à rede postal em 2012 é $]546, 554[$.

Sabemos que este intervalo é da forma $\left[\bar{x} - 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$, em que $n = 200$.

Sabemos ainda que:

$$\bar{x} = \frac{546 + 554}{2} = 550$$

Então, temos que:

$$550 - 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{200}} = 546 \Leftrightarrow \frac{1,645s}{\sqrt{200}} = 4 \Leftrightarrow \frac{s}{\sqrt{200}} = \frac{4}{1,645} \Leftrightarrow s \frac{4\sqrt{200}}{1,645} \Leftrightarrow s \approx 34,388$$

Então, $\bar{x} = 550$ e $s \approx 34$.

24. $n = 210$; $\bar{x} = 1,80$ e $s = 1,10$

O intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left[1,80 - 2,576 \times \frac{1,10}{\sqrt{210}}; 1,80 + 2,576 \times \frac{1,10}{\sqrt{210}} \right] =]1,60; 2[$$

Não há razão para duvidar da afirmação do funcionário porque o valor médio pertence a $]1,6; 2[$.

25. Recorrendo aos valores da amostra, usamos para estimador do valor médio a média amostral e para estimador do desvio-padrão populacional o desvio-padrão da amostra.

Obtemos as estatísticas usando a calculadora e tem-se que: $\bar{x} = 2,675$ e $s \approx 1,9267$.

Queremos determinar o intervalo de confiança de 95% para o valor médio, sabendo que $n = 40$, $\bar{x} = 2,675$ e $s \approx 1,9267$.

O intervalo de confiança requerido é da forma: $\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

Substituindo os valores, obtemos:

$$\left[2,675 - 1,96 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}}; 2,675 + 1,96 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}} \right] =]2,078; 3,272[$$

26. $n = 40$, $\bar{x} = 6$ e $s = 0,5$

O intervalo de confiança de 95% para o atraso médio, em horas, da entrega de todas as mercadorias transportadas pela empresa é dado por:

$$\left[6 - 1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{40}}; 6 + 1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{40}} \right] =]5,845; 6,155[$$

27. A proporção amostral dá-nos a frequência relativa dos eleitores a favor do candidato A. Neste caso, $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$, ou seja, 70% dos eleitores da amostra são a favor do candidato A.

28. $n = 50$

$$\hat{p} = \frac{40}{50} = 0,8 = 80\%$$

29. Trabalho de pesquisa

30. Como $n = 400$, podemos considerar que é uma distribuição aproximadamente normal com valor médio 0,3 e desvio-padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,3 \times (1 - 0,3)}{400}} \approx 0,02$$

31. $n = 500$

$$\bar{x} = \frac{300}{500} = 0,6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,6 \times (1 - 0,6)}{500}} \approx 0,022$$

32. Relatório

33.1 $n = 1500$ $\hat{p} = 76\%$

A margem de erro é:

$$z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,645 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{1500}} = 0,0181 = 1,8\%$$

Portanto, a margem de erro é inferior a 5%.

33.2 Margem de erro:

$$1,645 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{3000}} = 0,0128 = 1,28\%$$

33.3 À medida que a dimensão da amostra aumenta, a margem de erro diminui.

34. $n = 1200$ e $p = 40\%$

Intervalo de confiança de 90%:

$$\left[0,4 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,377; 0,423[$$

Intervalo de confiança de 95%:

$$\left[0,4 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,372; 0,428[$$

Intervalo de confiança de 99%:

$$\left[0,4 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,364; 0,436[$$

À medida que o nível de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

35. $n = 1000$ e $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0,45$

O intervalo de confiança de 90% para a proporção de habitantes com dois televisores é:

$$\left[0,45 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,45 \times (1 - 0,45)}{1000}}; 0,45 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{1000}} \right] =]0,424; 0,476[$$

Não existem razões para duvidar do aumento da percentagem de habitações com dois televisores de 2001 para 2009, pois o valor real da proporção em 2009 está entre 42,4% e 47,6%, com uma probabilidade de 90%.

36. Esta afirmação significa que o intervalo $]77\%, 83\%[$ é um intervalo de confiança de 95% para a proporção pretendida. Se recolhêssemos 100 amostras diferentes, com a mesma dimensão, e construíssemos os respetivos intervalos de confiança, esperar-se-ia que, aproximadamente, 95 desses intervalos contivessem a proporção de pessoas que estão contra a ETAR.

37. O intervalo $]35\%, 45\%[$ é um intervalo de confiança de 95% para a proporção de pessoas que consideram que a droga é o problema mais sério que afeta a adolescência.

A margem de erro é:

$$\frac{45 - 35}{2} = 5\%$$

38. $\sigma = 0,5$ e $\varepsilon \leq 0,01$

Dimensão da amostra para um intervalo de 90% de confiança:

$$n = \left(\frac{1,645 \times 0,5}{0,01} \right)^2 = 6765$$

Dimensão da amostra para um intervalo de 95%:

$$n = \left(\frac{1,960 \times 0,5}{0,01} \right)^2 = 9604$$

39. Sabe-se que $]0,34958; 0,53042[$ é um intervalo de forma:

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

A amplitude é:

$$0,53042 - 0,34958 = 0,18084$$

$$\text{Tem-se que: } \hat{p} = \frac{38 + 38 + 12}{200} = 0,44 \text{ e } n = 200$$

A margem de erro é:

$$\frac{0,18084}{2} = 0,09042$$

Logo:

$$z \sqrt{\frac{0,44 \times 0,56}{200}} = 0,09042 \Leftrightarrow z \approx 2,576$$

Pelo que corresponde a um nível de confiança de 99%.

40. Sabe-se que: $\varepsilon = 3\%$, o nível de confiança é 95% e $\hat{p} = 45\%$.

A dimensão da amostra é:

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1,96}{0,03} \right)^2 \times 0,45 \times 0,55 = 1056$$

41. $\hat{p} = 0,52$ e $z = 1,960$

Se a amplitude é 0,2, então a margem de erro é 0,1.

$$1,960 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,48}{n}} = 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0,2496}{n}} = 0,0510 \Leftrightarrow \frac{0,2496}{n} = 0,0510^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = \frac{0,2496}{0,0510^2} \Leftrightarrow n \approx 96$$

Tema 5 – Exercícios globais (pág. 271)

1.1 $4 + 1 + 1 = 6\%$

Como a dimensão da amostra é 15 800, o número de inquiridos correspondente é $0,06 \times 15\,800 = 948$.

1.2 Calculamos a percentagem acumulada:

Escala	Percentagem	Percentagem acumulada
1	10	10
2	12	22
3	16	38
4	17	55
5	19	74
6	12	86
7	8	94
8	4	98
9	1	99
10	1	100

O primeiro quartil é o valor da variável abaixo do qual se encontram 25% dos dados. Verificamos que corresponde ao nível 3.

A mediana corresponde ao nível 4, pois é o valor da variável abaixo do qual se encontram 50% dos dados.

1.3 $n = 15\,800$ e $\hat{p} = 0,1$

O intervalo de confiança de 99% para a proporção é dado por:

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] = \left[0,1 - 2,576 \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{15800}}; 0,1 + 2,576 \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{15800}} \right] = \\ =]0,094; 0,106[$$

1.4 A margem de erro de um intervalo de confiança é metade da sua amplitude.

Considerando $\hat{p} = 0,5$ e $n = 100$, o intervalo de confiança de 95% para μ é:

$$\left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}} \right] =]0,402; 0,598[$$

A margem de erro neste intervalo de confiança é:

$$\frac{0,598 - 0,402}{2} = 0,098$$

Se $n = 200$:

$$\left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}} \right] =]0,431; 0,569[$$

Se $n = 500$:

$$\left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{500}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{500}} \right] =]0,456; 0,544[$$

À medida que a dimensão da amostra aumenta, a margem de erro diminui.

2.1 Sabemos que existe «empate técnico» quando a diferença entre as estimativas pontuais é, em valor absoluto, inferior à margem de erro.

Então, $|41 - 39| = 2\%$ é menor que a margem de erro, pelo que podemos dizer que estavam em situação de «empate técnico».

2.2 Não. As estimativas das percentagens de votos para os partidos X e Y eram de 39% e 41%, respetivamente, com uma margem de erro de 6% e um nível de confiança de 95%. Assim, seria de esperar que, com 95% de confiança, o partido X tivesse entre 33% e 45% e o partido Y, entre 35% e 47%. A percentagem dos votos do partido X aproximou-se de 45% e a do partido Y de 35%.

2.3 Sabemos que: $\hat{p} = 39\%$.

A margem de erro é:

$$1,96\sqrt{\frac{0,39 \times 0,61}{n}} = 0,06 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0,39 \times 0,61}{n}} = \frac{0,06}{1,96} \Leftrightarrow \frac{0,2379}{n} = \left(\frac{0,06}{1,96}\right)^2 \Leftrightarrow n \approx 253,87$$

Se a margem de erro passar para 0,03, mantendo o nível de confiança:

$$1,96\sqrt{\frac{0,39 \times 0,61}{n}} = 0,03 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0,39 \times 0,61}{n}} = \frac{0,03}{1,96} \Leftrightarrow \frac{0,2379}{n} = \left(\frac{0,03}{1,96}\right)^2 \Leftrightarrow n \approx 1015$$

A afirmação é falsa, porque a dimensão da amostra quadruplicou.

3.1 Ao restringir-se a amostra aos presentes na sala, estamos a excluir os que tentaram entrar no *site* e os que desistiram. Assim, os resultados provenientes desta amostra poderão ser enviesados, pois os que estavam interessados em aceder ao *site* não fizeram parte da amostra, afetando o valor da percentagem de entrada à primeira tentativa.

Para a amostra ser representativa, esta deveria conter os que tentaram aceder ao *site*, quer tenham ou não conseguido entrar.

3.2 $\hat{p} = \frac{39}{50} = 0,78$ e $n = 50$

O intervalo de confiança de 95% para a proporção é:

$$\left[0,78 - 1,96\sqrt{\frac{0,78 \times 0,22}{50}}; 0,78 + 1,96\sqrt{\frac{0,78 \times 0,22}{50}} \right] =]0,665; 0,895[$$

3.3 Introduzindo os valores na calculadora e determinando a regressão linear, obtemos os valores:
 $a = 3,85$ e $b = 4,94$.

4.1 A variável em estudo é o comprimento de cada parafuso medido em centímetros.

4.2 O número total de parafusos é 100.

O número de parafusos cujo comprimento é inferior a 5,5 centímetros é $3 + 5 + 13 + 18 = 48$, que corresponde a 48%.

4.3 Para calcular a média, temos de determinar a marca de cada classe:

$$\bar{x} = \frac{5,05 \times 3 + 5,15 \times 5 + 5,25 \times 9 + 5,35 \times 13 + 5,45 \times 18 + 5,55 \times 19 + 5,65 \times 17 + 5,75 \times 10 + 5,85 \times 3 + 5,95 \times 2 + 6,05}{100} \approx 5,5$$

4.4 O menor valor registado é 5,025 e o maior é 6,070, pelo que a amplitude será:

$$6,070 - 5,025 = 1,045$$

Como pretendemos a existência de sete classes, a amplitude de cada classe será, aproximadamente:

$$\frac{1,045}{7} \approx 0,15$$

Podemos, então, definir as seguintes classes:

$$[5,025; 5,175[; [5,175; 5,325[; [5,325; 5,475[; [5,475; 5,625[; [5,625; 5,775[; [5,775; 5,925[; [5,925; 6,075[$$

Não se tem acesso à distribuição inicial dos dados, sendo que não se consegue distribuir os parafusos pelas novas classes. O estudo inicial foi efetuado com uma distribuição em 11 classes de amplitude 0,1.

4.5 $\bar{x} = 5,5$; $s = \sqrt{0,043} = 0,207$ e $n = \sqrt{100} = 10$

O intervalo de confiança de 95% para a proporção é:

$$\left[5,5 - 1,96 \times \frac{0,207}{10}; 5,5 + 1,96 \times \frac{0,207}{10} \right] =]5,46; 5,54[$$

5.1 Vamos construir a tabela referente ao sexo masculino com a frequência relativa em percentagem:

Intensidade do gosto de ler	Frequência relativa (%)
Não gosto nada de ler	12
Gosto pouco de ler	26
Gosto de ler de vez em quando	44
Gosto muito de ler	15
Sou viciado na leitura	3

Na tabela referente ao sexo masculino, a moda é «Gosto de ler de vez em quando». No gráfico referente ao sexo feminino, a moda também é «Gosto de ler de vez em quando», com 49%. Assim, a moda é a mesma em ambos os sexos.

Vamos calcular a percentagem dos que revelaram pelo menos algum gosto pela leitura em cada um dos sexos.

$$11 + 49 + 31 + 6 = 97\% \text{ nas raparigas}$$

$$26 + 44 + 15 + 3 = 88\% \text{ nos rapazes}$$

Pode concluir-se que as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes.

Então, podemos concluir que a afirmação é verdadeira.

5.2 O intervalo de confiança de 95% para a proporção de estudantes do Ensino Secundário, do continente, que se identificam como sendo apaixonados pela leitura, tendo em conta que

$$\hat{p} = \frac{221}{4713} = 0,0469 \text{ e } n = 4713, \text{ é:}$$

$$\left[0,0469 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,0469(1-0,0469)}{4713}}; 0,0469 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,0469(1-0,0469)}{4713}} \right] =$$

$$=]0,041; 0,053[$$

6.1 Introduzindo os valores das listas correspondentes ao rendimento mensal e às despesas com a alimentação na calculadora, obtém-se o valor do coeficiente de correlação linear: $r \approx 0,9$.

Atendendo a este valor, a associação linear é positiva forte, pois r é positivo e próximo de 1.

6.2.1 Determinando a regressão linear na calculadora, obtemos $a = 0,1656$ e $b = 185,1833$.

6.2.2 Usando a reta de regressão linear encontrada na alínea anterior, verificamos que $x = 1750$ e $y = 474,96$.

Podemos estimar que o valor das despesas de alimentação de um agregado familiar, cujo rendimento mensal é 1750 €, é aproximadamente 475 €.

6.3 Para o rendimento mensal, obteve-se a média amostral de 1712,5 e a mediana 1575.

Alterando o valor de 2800 para 8000, a média amostral passou para 2145,83 e a mediana manteve-se.

A média é sensível à alteração de qualquer um dos dados. A mediana permaneceu inalterada mesmo após a diferença introduzida. A mediana é mais resistente.

6.4 $\bar{x} = 270$, $s = 100$ e $n = 50$

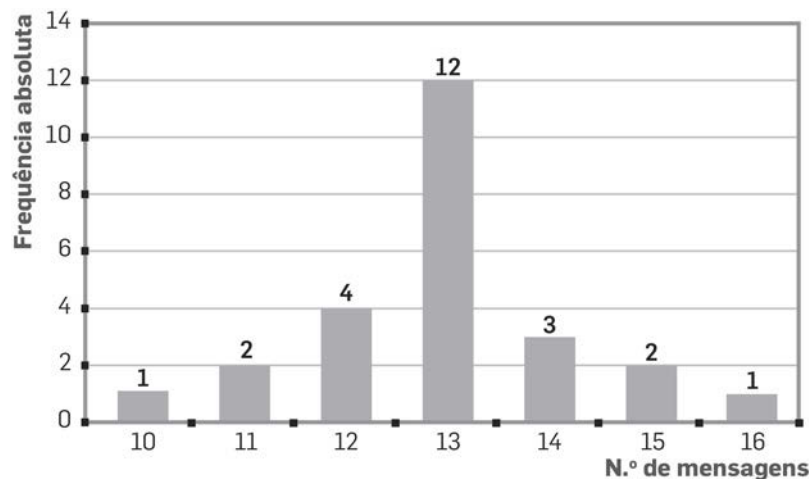
O intervalo de confiança de 95% para o valor médio das despesas com a alimentação é dado por:

$$\left[270 - 1,96 \times \frac{100}{\sqrt{50}}; 270 + 1,96 \times \frac{100}{\sqrt{50}} \right] =]242,28; 297,72[$$

7.1.1 Tabela referente às frequências relativas simples e às frequências relativas acumuladas do número de mensagens recebidas:

N.º de mensagens	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
10	0,04	0,04
11	0,08	0,12
12	0,16	0,28
13	0,48	0,76
14	0,12	0,88
15	0,08	0,96
16	0,04	1
Total	1	

7.1.2 Diagrama de barras com a frequência absoluta do número de mensagens recebidas:



7.2 Recorrendo à calculadora:

Turma A: $\bar{x} = 12,96$ e $\sigma = 3,39$

Turma B: $\bar{x} = 12,96$ e $\sigma = 1,28$

Sendo as médias iguais, os desvios-padrão são diferentes porque na turma B o 13 é o que tem maior frequência, sendo que as inferiores ou superiores a 13 têm frequências absolutas menores. Portanto, há uma baixa variabilidade em relação à média.

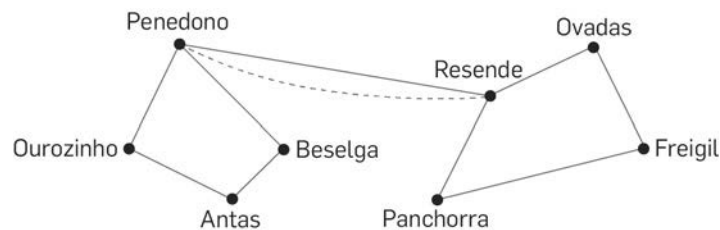
Na turma A, apesar de 13 ser a maior frequência absoluta, existe uma maior amplitude amostral ($19 - 6 = 13$) do que na turma B ($16 - 10 = 6$). Portanto, há maior variabilidade dos dados, relativamente à média, na turma A do que na turma B, o que se traduz num desvio-padrão maior.

7.3 $\hat{p} = \frac{125}{250} = 0,5$ e $n = 250$

O intervalo de confiança de 95% para a proporção de mensagens com extensão de 30 caracteres recebidas no telemóvel pelos alunos da escola é:

$$\left[0,5 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5(1 - 0,5)}{250}}; 0,5 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5(1 - 0,5)}{250}} \right] =]0,44; 0,56[$$

- 8.1** A afirmação é verdadeira, uma vez que no grafo que representa a situação existem vértices com grau ímpar. Assim, este grafo não admite circuitos de Euler. No entanto, se admitirmos a duplicação da aresta que liga Penedono a Resende, obtemos um novo grafo onde todos os vértices têm grau par, pelo que será possível encontrar circuitos de Euler.



8.2 $n = 500$, $\bar{x} = 830$ e $s = 220$

O intervalo de confiança para o valor médio de uma fatura da empresa Silva-Filhos é:

$$\left[830 - 2,576 \times \frac{220}{\sqrt{500}}; 830 + 2,576 \times \frac{220}{\sqrt{500}} \right] =]804,66; 855,34[$$

Há razões para duvidar da afirmação do gerente, visto que 800 € para o valor médio de uma fatura da empresa não pertence ao intervalo de confiança de 99%.

9. Sabemos que: $n = 5000$ e $\hat{p} = 0,41$

O intervalo de confiança de 99% para a proporção de dadores com o grupo sanguíneo O é dado por:

$$\left[0,41 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,41 \times 0,59}{5000}}; 0,41 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,41 \times 0,59}{5000}} \right] =]0,3921; 0,4279[$$

O intervalo requerido é $]39,21\%; 42,79\%[$.

Tema 5 – Teste final (pág. 278)

- 1.1** População: todos os eleitores votantes em Portugal

Amostra: os 1354 eleitores selecionados em Portugal para a entrevista

- 1.2** A amostra maior pode não ser a mais representativa da população. Teríamos de conhecer o(s) método(s) utilizado(s) na sua recolha, que influencia(m) a qualidade e representabilidade da população. Poderíamos apenas dizer que, como a amostra de 1354 eleitores foi recolhida em

Portugal e a de 1500 eleitores em Portugal continental, a amostra mais pequena poderá ser mais representativa da população.

2.1 e 2.2

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{x}$
(2, 2)	2	(6, 2)	4	(8, 2)	5	(10, 2)	6
(2, 6)	4	(6, 6)	6	(8, 6)	7	(10, 6)	8
(2, 8)	5	(6, 8)	7	(8, 8)	8	(10, 8)	9
(2, 10)	6	(6, 10)	8	(8, 10)	9	(10, 10)	10

$\bar{X}$	2	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$E(\bar{X}) = (2+10) \times \frac{1}{16} + (4+5+7+9) \times \frac{1}{8} + (6+8) \times \frac{3}{16} = \frac{13}{2}$$

A média da distribuição de amostragem é $\frac{13}{2}$.

$$2.3 \quad \mu = \frac{2+6+8+10}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$$

Como $\mu = E(\bar{X})$, o estimador é cêntrico, logo, a afirmação é verdadeira.

2.4 Erro-padrão $\rightarrow \sigma_{\bar{X}}$ (desvio-padrão da distribuição de amostragem)

$$\sigma_{\bar{X}} \approx 2,092 \text{ (valor obtido pela calculadora no modo estatístico)}$$

3. Como a dimensão da amostra é $54 > 30$, o teorema do limite central diz-nos que, nestas condições, a distribuição de amostragem pode ser modelada por um modelo normal de valor médio de 5,350 metros e desvio-padrão igual a $\frac{0,97}{\sqrt{54}} \approx 0,132$ metros.

$$4.1 \quad U \approx N(0,1) \quad U = \frac{\bar{X}-16}{5} \Leftrightarrow \bar{X} = 5U + 16$$

$$P(\bar{X} > 13) = P(5U + 16 > 13) = P(U > -0,6) = P(U < 0,6) = \Phi(0,6) = 0,7257 = 72,57\%$$

$$4.2 \quad P(9 < \bar{X} < 18) = P(9 < 5U + 16 < 18) = P(-1,4 < U < 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(-1,4) = \\ = \Phi(0,4) - 1 + \Phi(1,4) = 0,6554 - 1 + 0,9192 = 0,5746 = 57,46\%$$

$$4.3 \quad P(|\bar{X} - \mu| < 0,2) = P(|5U + 16 - 16| < 0,2) = P(|5U| < 0,2) = P(|U| < 0,04) = \\ = 2\Phi(0,04) - 1 = 2 \times 0,5160 - 1 = 0,032 = 3,20\%$$

(1) Valores da tabela de distribuição normal *standard*

5.1 $\bar{x} = 75,2$, $n = 35$ e $\sigma = 3$

O intervalo de confiança de 95% para μ é dado por:

$$\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Neste caso:

$$\left[75,2 - 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{35}}; 75,2 + 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{35}} \right] =]74,21; 76,19[$$

5.2 Amplitude: $76,19 - 74,21 = 1,98$

5.3 $n = \left(\frac{1,96 \times 3}{0,1} \right)^2 \approx 3457$
 $\uparrow$

Para a amplitude não exceder 0,2, então o erro é: $\varepsilon = 0,1$.

5.4 O intervalo de 99% de confiança para μ é dado por:

$$\left[\bar{x} - 2,576 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 2,576 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Neste caso:

$$\left[75,2 - 2,576 \times \frac{3}{\sqrt{35}}; 75,2 + 2,576 \times \frac{3}{\sqrt{35}} \right] =]73,894; 76,506[$$

5.5 Quando aumentamos a confiança, também aumenta a amplitude do intervalo.

5.6 $\varepsilon = \frac{0,2}{2}$

$$n = \left(\frac{2,576 \times 3}{0,1} \right)^2 \approx 5972$$

5.7 A dimensão da amostra aumenta.

6.1 $\hat{p} = \frac{40}{200} = 20\%$

O intervalo de confiança de 90% para a proporção é:

$$\left[0,2 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{200}}; 0,2 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{200}} \right] =]0,1535; 0,2465[$$

6.2 Amplitude: $0,2465 - 0,1535 = 0,093$

Queremos reduzir a amplitude para metade, logo, a amplitude será: $\frac{0,093}{2} = 0,0465$.

Então, $\varepsilon = \frac{0,0465}{2} = 0,02325$

Logo, $n = \left(\frac{1,645}{0,02325} \right)^2 \times 0,2 \times 0,8 \approx 801$

- 6.3** Seria de esperar que 95 desses intervalos tivessem o verdadeiro valor da proporção de estudantes que entraram na primeira opção.

7.1 $n = 380$

$$\hat{p} = \frac{171}{380} = 0,45$$

Um intervalo de confiança de 90% para a proporção é:

$$\left[0,45 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{380}}; 0,45 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{380}} \right] =]0,40; 0,50[$$

- 7.2** A amplitude do intervalo é 0,1.

Para a amplitude diminuir para metade, tem de se aumentar a dimensão da amostra.

$$\varepsilon = 0,025$$

$$n = \left(\frac{1,96}{0,025} \right)^2 \times 0,45 \times 0,55 \approx 1521$$

A dimensão da amostra teria de aumentar para 1521.

8.1 $\bar{x} = \frac{1348 + 1757 + 1341 + \dots + 1443 + 1852}{12} = 1998,08 \quad s = 561,44$

- 8.2** Intervalo de confiança de 90% para μ :

$$\left[1998,08 - 1,645 \times \frac{561,44}{\sqrt{12}}; 1998,08 + 1,645 \times \frac{561,44}{\sqrt{12}} \right] =]1731,47; 2264,69[$$

- 9.** Sabe-se que a amplitude do intervalo de confiança de 95% é, no máximo, 2 e $\sigma = 3$.
A margem de erro (ε) é inferior ou igual a 1.

Então:

$$z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow 1,960 \times \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1,960} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{3}{1,960} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 5,88 \Leftrightarrow n \geq 34,5744$$

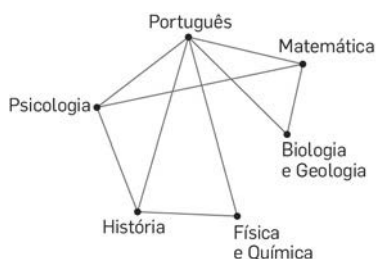
A dimensão mínima da amostra é 35.

Tema 3 | Capítulo 2 – Modelos de grafos

1.

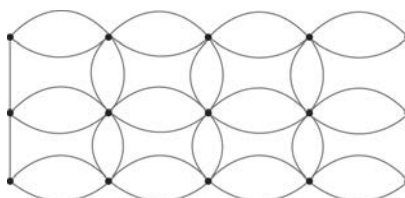
Alínea	Número de arestas	Número de vértices
1.1	11	7
1.2	10	5
1.3	7	6
1.4	7	5
1.5	9	4

2.1

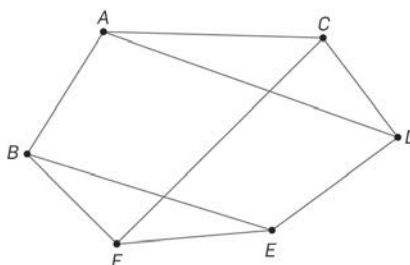


2.2 Três dias: um dia para Português, outro para Matemática e História e outro para Física e Química, Biologia e Geologia e Psicologia.

3. O facto de ter de percorrer ruas duas vezes traduz-se num grafo com várias arestas paralelas:



4. Os vértices representam as equipas e as arestas os jogos realizados:



5.	Exercício 1.1	A: 3	B: 3	C: 3	D: 3	E: 3	F: 4	G: 3
	Exercício 1.2	A: 4	B: 4	C: 4	D: 4	E: 4		
	Exercício 1.3	A: 1	B: 2	C: 4	D: 2	E: 3	F: 2	
	Exercício 1.4	A: 2	B: 4	C: 3	D: 2	E: 3		
	Exercício 1.5	A: 4	B: 5	C: 4	D: 5			

6.1 Tem trajeto: por exemplo, $A D B A E D C E B C$.

6.2 Não tem trajeto nem circuito.

6.3 Tem trajeto e circuito: por exemplo, $B C D E F A B G E C F B$ é um circuito.

6.4 Tem trajeto: por exemplo, $A B G A D F E G C F$.

6.5 Tem trajeto e circuito: por exemplo, $A C E D C B D F A B F E A$ é um circuito.

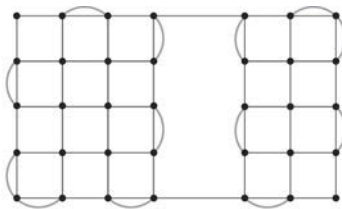
7.1 Sim, é possível encontrar um circuito de Euler, uma vez que todos os vértices têm grau par.

7.2 Com este novo percurso, o Sr. Hipólito não passaria nas ruas BD e ED , pelo que não cuidaria dos jardins nelas existentes.

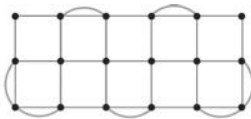
8. $A B C D E C H E F G H A$

9. Acrescentaram-se mais:

$$5 \times 13 = 65 \text{ metros}$$

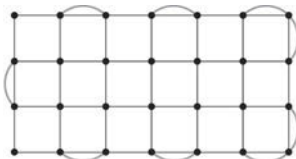


10. Por exemplo:



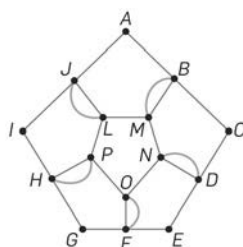
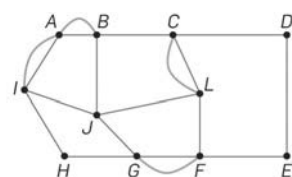
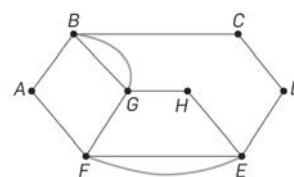
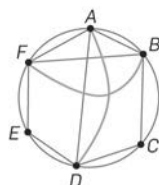
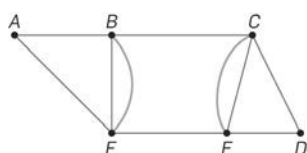
Precisamos de acrescentar sete arestas.

11. Pode. Nove arestas chegam para eulerizar o grafo.



- 12.1** (A) Não é possível porque os vértices B, C, E e F têm grau ímpar.
 (B) Não é possível porque os vértices A, B, D e F têm grau ímpar.
 (C) Não é possível porque os vértices B, E, F e G têm grau ímpar.
 (D) É possível porque todos os vértices têm grau par: $A C D E F D B C F A$, por exemplo.
 (E) Não é possível porque os vértices B, C, F, G, I e L têm grau ímpar.
 (F) Não é possível porque os vértices $B, D, F, H, J, L, M, N, O$ e P têm grau ímpar.

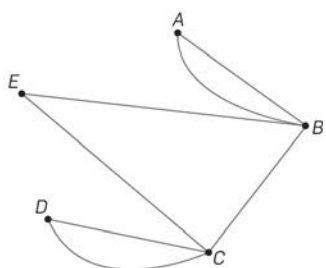
12.2 Grafos eulerizados:



Circuitos:

- (A) Por exemplo, $A B C D E C E F B F A$
 (B) Por exemplo, $A B C D E F A B F B C D E F A D A$
 (C) Por exemplo, $A B G B C D E F E H G F A$
 (D) Por exemplo, $A B C L C D E F L J G F G H I J B A I A$
 (E) Por exemplo, $A B M B C D N D E F O F G H P H I J L J A$

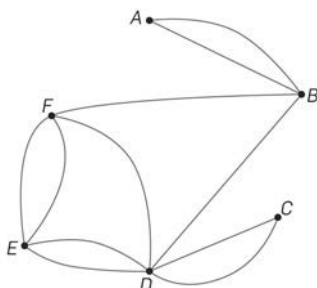
13.1



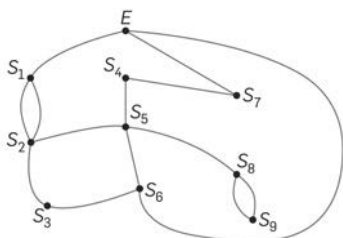
- 13.2** $A: 2; B: 4; C: 4; D: 2; E: 2$

- 14.1** $A: 2; B: 4; C: 2; D: 6; E: 4; F: 4$

14.2



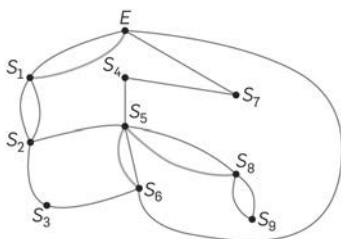
15.1



Os vértices representam as salas e o exterior; as arestas representam as portas de ligação existentes entre salas e entre estas e o exterior.

15.2 Para ser possível concretizar a prova nas condições impostas, teria de existir pelo menos um circuito de Euler no grafo. Para tal acontecer, os vértices teriam todos de ter grau par, o que não se verifica: os vértices S_1 , S_6 , S_8 e E têm grau ímpar.

15.3 Teremos de duplicar um número mínimo de arestas, de modo que todos os vértices passem a ter grau par: por exemplo, duplicar as arestas S_1E , S_5S_8 e S_5S_6 .



Um percurso possível para a prova da Rute seria: $E S_1 S_2 S_3 S_6 E S_1 S_2 S_5 S_8 S_9 S_5 S_4 S_7 E$.

16. A: Euler; B: Hamilton; C: Hamilton

17. Sim, com o percurso $F D C B A F$.

18.1 (A) $B A C D F H G E B$; (B) $A B C D E F G H I A$; (C) $A B C F G D E A$

18.2 Sim. (A) $B D C A F H G E B$; (B) $A I B C D E F G H A$; (C) $A G C F B E D A$

19. $A E D B C F G A$

20. Sim. No grafo A, acrescentar AI: $A B C D E F G H I A$; no grafo B, acrescentar AB: $A E F D C B A$.

21. Se m é par, então n tem de ser ímpar. Se m é ímpar, n pode ser par ou ímpar.

22. $A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{5} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{11} E \xrightarrow{20} A$, ou no sentido inverso, com um total de 46 quilómetros.

23.1 Bar. — Tar.; Mál. — Gra.; Valla. — Mad.; Mál. — Sev.; Val. — Tar.;
110 163 193 240 248

Murc. — Val.; Murc. — Gra.; Por. — LC; Lis. — Por.; Valla. — SS; Mad. — Val.;
261 271 301 336 252 356

SS — Bar.; Murc. — Mad.; Mad. — Sant.; LC — Valla.; Lis. — Sev.; Gra. — Mad.;
361 391 392 416 420 460

Mad. — SS; LC — Sant.; Sev. — Mad.; Mad. — Bar.; Lis. — Mad.; Lis. — Valla.
469 539 565 624 648 661

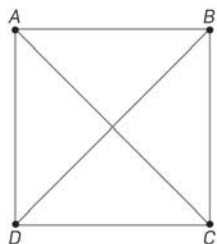
Lisboa → Porto → La Coruña → Santander → Madrid → Valladolid → San Sebastian
 → Barcelona → Tarragona → Valência → Múrcia → Granada → Málaga → Sevilha
 → Lisboa (ou no sentido inverso)

Total: 4187 quilómetros

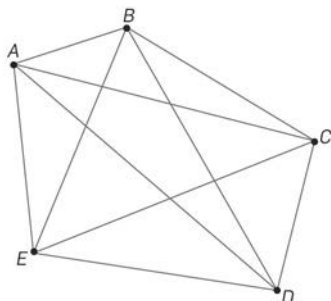
23.2 Não, uma vez que existem mais de dois vértices (cidades) de grau ímpar.

23.3 Lisboa → Porto → La Coruña → Santander → Madrid → Valladolid → San Sebastian
 → Barcelona → Tarragona → Valência → Múrcia → Granada → Málaga → Sevilha
 → Lisboa

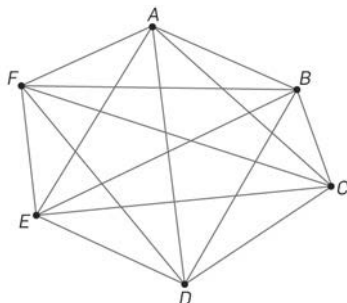
24.1 Por exemplo:



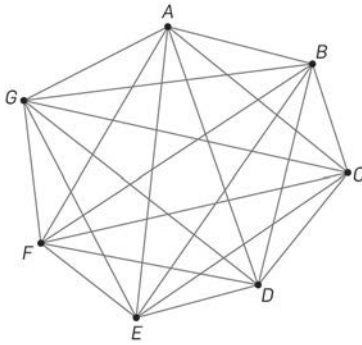
24.2 Por exemplo:



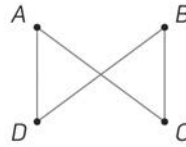
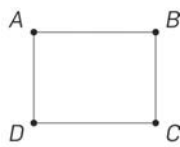
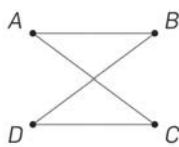
24.3 Por exemplo:



24.4 Por exemplo:



25.



3 circuitos

4 vértices: $(3 \times 2) : 2 = 3$ circuitos

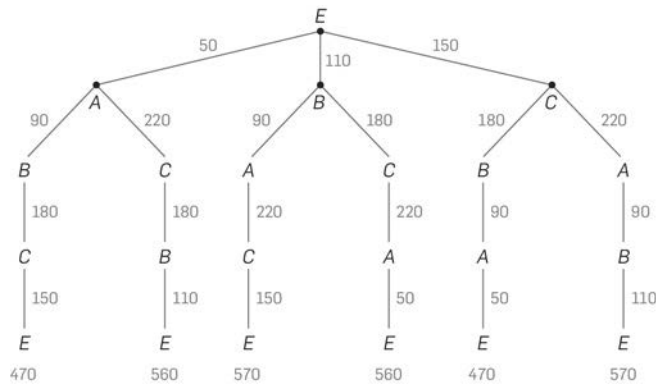
5 vértices: $(4 \times 3 \times 2) : 2 = 12$ circuitos

6 vértices: $(5 \times 4 \times 3 \times 2) : 2 = 60$ circuitos

7 vértices: $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) : 2 = 360$ circuitos

26. Composição

27.1



O menor percurso, de 470 metros, é $E A B C E$ ou $E C B A E$.

27.2 Sim, uma vez que é o menor de todos os possíveis.

28.1 Problema do tipo do caixeiro-viajante.

28.2 $F \xrightarrow{8} G \xrightarrow{12} H \xrightarrow{13} I \xrightarrow{10} F$

Total: 43 minutos

28.3 $F \xrightarrow{8} G$; $F \xrightarrow{10} I$; $G \xrightarrow{12} H$; $I \xrightarrow{13} H$; $G \xrightarrow{15} I$; $F \xrightarrow{17} H$

$F \xrightarrow{8} G \xrightarrow{12} H \xrightarrow{13} I \xrightarrow{10} F$ (ou o inverso)

Total: 43 minutos

O percurso é o mesmo que o obtido em 28.2. Sim, porque é o menor percurso possível.

- 29.1 (A)** $A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} B \xrightarrow{5} C \xrightarrow{8} A$ Total: 20
- (B)** $A \xrightarrow{21} B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{25} C \xrightarrow{18} E \xrightarrow{53} A$ Total: 131
- (C)** $A \xrightarrow{18} E \xrightarrow{28} C \xrightarrow{32} F \xrightarrow{29} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{33} A$ Total: 144

- 29.2 (A)** $A \xrightarrow{3} D; D \xrightarrow{4} B; B \xrightarrow{5} C; C \xrightarrow{6} A; A \xrightarrow{7} B; A \xrightarrow{8} C$

Circuito: $A D B C A$; Total: 20

- (B)** $B \xrightarrow{14} D; C \xrightarrow{18} E; A \xrightarrow{21} B; A \xrightarrow{24} D; C \xrightarrow{25} D; E \xrightarrow{27} D; A \xrightarrow{30} C; B \xrightarrow{35} E;$

$B \xrightarrow{41} C; A \xrightarrow{53} E$

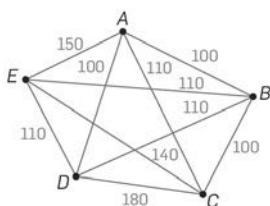
Circuito: $A B D C E A$; Total: 131

- (C)** $B \xrightarrow{4} D; A \xrightarrow{18} E; A \xrightarrow{21} B; C \xrightarrow{28} E; F \xrightarrow{29} B; C \xrightarrow{32} F; B \xrightarrow{33} E; B \xrightarrow{33} C; A \xrightarrow{37} C;$

$F \xrightarrow{40} E; D \xrightarrow{44} F; A \xrightarrow{49} F; B \xrightarrow{50} E; C \xrightarrow{52} D; E \xrightarrow{61} D$

Circuito: $A B D F C E A$; Total: 147

30.1



Os vértices representam as vivendas; as arestas representam as ligações entre as vivendas; os pesos representam as distâncias entre as vivendas.

30.2 Começando em A e escolhendo a vivenda mais próxima, temos duas opções:

- Escolher a vivenda B, a partir desta escolher a vivenda C, pois é a que se encontra a uma distância menor, seguir para a vivenda E, ir para a D e regressar à A.

O percurso seria:

$A \xrightarrow{100} B \xrightarrow{100} C \xrightarrow{140} E \xrightarrow{110} D \xrightarrow{100} A$

com uma distância total de 550 metros.

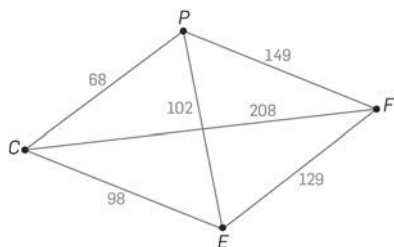
- Escolher a vivenda D e, escolhendo sucessivamente a vivenda mais próxima, fazer o percurso:

$A \xrightarrow{100} D \xrightarrow{110} E \xrightarrow{110} B \xrightarrow{100} C \xrightarrow{110} A$

fazendo um total de 530 metros.

Assim, a escolha inicial do Francisco, decisão entre as vivendas B e D, apesar de estarem à mesma distância, pode traduzir-se num percurso total de mais 20 metros caso o Francisco opte inicialmente pela vivenda B.

31.1



31.2 $E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{149} P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{98} E$

Total: 444 km

$E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{102} E$

Total: 507 km

$E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{149} F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{98} E$

Total: 557 km

31.3 $F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{208} F$

Total: 507 km

$F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F$

Total: 444 km

$F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{98} E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{149} F$

Total: 557 km

31.4 Há dois percursos mínimos ($EFPCE$ e $FECFF$), ambos com 444 quilómetros.

31.5 $E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F \xrightarrow{129} E$

Total: 444 km

31.6 $F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F$

Total: 444 km

$P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{98} E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{149} P$

Total: 444 km

$C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{102} E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{208} C$

Total: 507 km

31.7 $C \xrightarrow{68} P$; $C \xrightarrow{98} E$; $P \xrightarrow{102} E$; $E \xrightarrow{129} F$; $P \xrightarrow{149} F$; $C \xrightarrow{208} F$

Percurso: $CEFPCE$, com 444 quilómetros.

31.8 Sim, porque é o menor percurso possível.

32.1.1 $A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{35} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E \xrightarrow{52} A$

Total: 203 milhas aéreas

32.1.2 $B \xrightarrow{23} C \xrightarrow{35} D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{52} E \xrightarrow{83} B$

Total: 203 milhas aéreas

32.1.3 $C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{57} A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{50} E \xrightarrow{65} C$

Total: 205 milhas aéreas

32.1.4 $D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{38} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E \xrightarrow{50} D$

Total: 204 milhas aéreas

32.1.5 $E \xrightarrow{50} D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{38} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E$

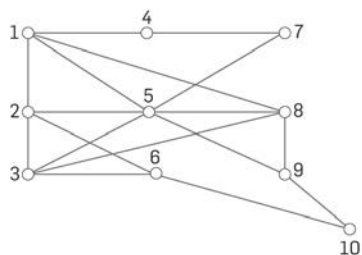
Total: 204 milhas aéreas

32.2 $A \xrightarrow{10} D$; $B \xrightarrow{23} C$; $C \xrightarrow{35} D$; $A \xrightarrow{38} C$; $D \xrightarrow{50} E$; $A \xrightarrow{52} E$; $A \xrightarrow{57} B$; $B \xrightarrow{60} D$; $C \xrightarrow{65} E$;
 $B \xrightarrow{83} E$

Percurso: $ADCEBA$, com 203 milhas aéreas.

32.3 É o $ADCEBA$ ou o $BCDAEB$ (ou os inversos), com um comprimento de 203 milhas aéreas.

33.1

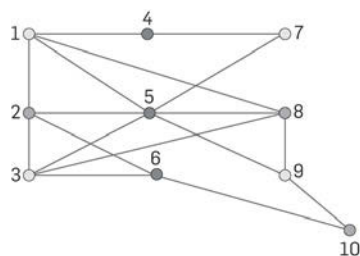


Os vértices representam as antenas; as arestas representam as interferências entre as antenas.

33.2 Ordenamos os vértices por ordem decrescente do seu grau:

Vértice	Grau
5	6
1	4
2	4
3	4
8	4
6	3
9	3
4	2
7	2
10	2

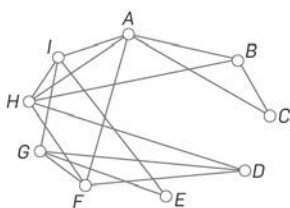
Vamos atribuindo cores iguais a vértices não adjacentes, começando pelo de maior grau, e assim sucessivamente, obtendo a seguinte apresentação dos vértices do grafo:



São necessárias três frequências diferentes para não haver interferências entre as antenas:

- Frequência I: antenas 4, 5 e 6.
- Frequência II: antenas 1, 3, 7 e 9.
- Frequência III: antenas 2, 8 e 10.

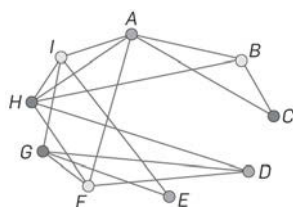
34.1 Os vértices representam as espécies dos peixes; as arestas representam as incompatibilidades entre espécies.



34.2 Ordenam-se os vértices por ordem decrescente do seu grau:

Vértice	Grau
A	5
H	5
F	4
G	4
I	4
B	3
D	3
C	2
E	2

Sucessivamente, vamos atribuindo cores iguais a vértices não adjacentes (começando pelos de maior grau), obtendo a seguinte apresentação para os vértices do grafo:



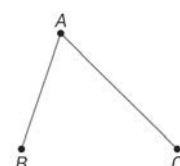
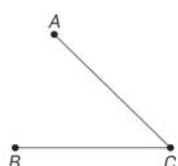
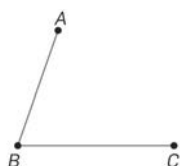
O Tiago terá de construir três aquários:

- Espécies A, D e E.
- Espécies B, F e I.
- Espécies C, G e H.

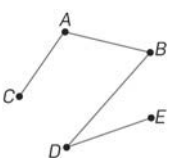
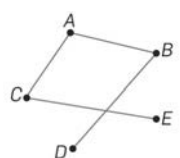
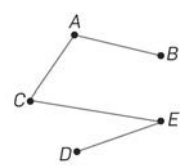
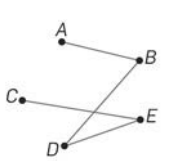
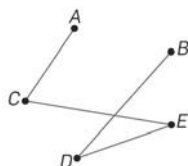
35. B, C e E, pois são conexos e não têm circuitos.

36. Se for conexo e não tiver circuitos.

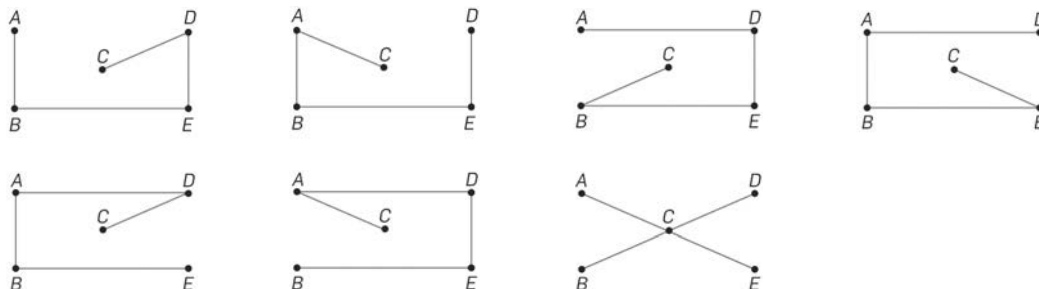
37.1



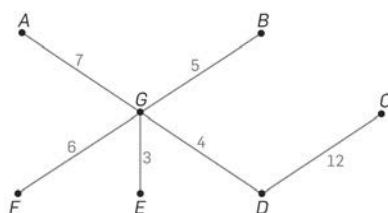
37.2



37.3 Por exemplo:

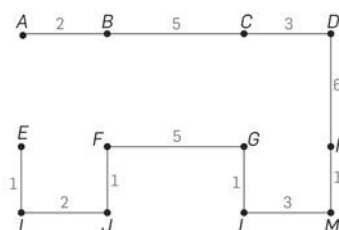


38.1



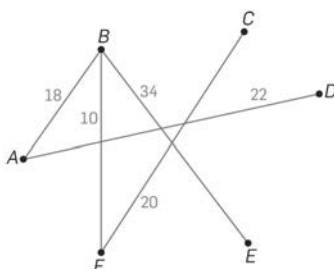
Peso total: 37

38.2



Peso total: 30

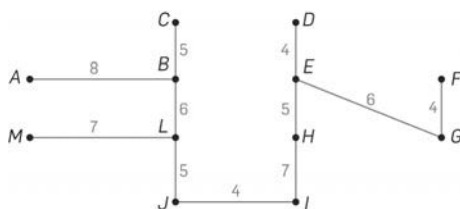
38.3



Peso total: 104

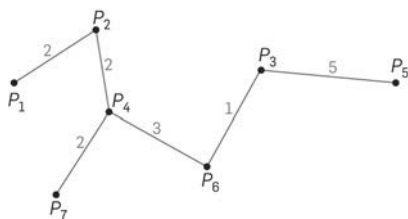
39. Os pesos totais obtidos pelo algoritmo de Prim são iguais aos obtidos pelo algoritmo de Kruskal; apenas a árvore final poderá não ser igual se optarmos por arestas diferentes, mas de igual peso, em alguma altura da aplicação do algoritmo.

40.



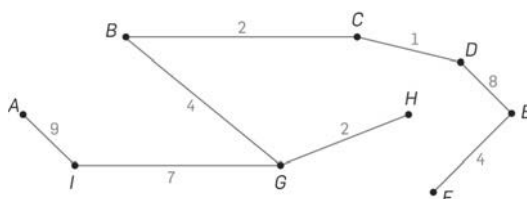
Tubagem: 61 metros

41.



Comprimento: 15 quilómetros

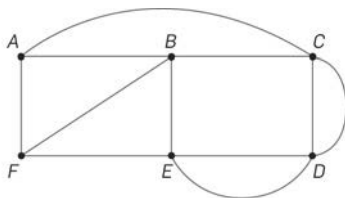
42.1



Deverão ser asfaltadas as estradas: AI , IG , GH , GB , BC , CD , DE e EF .

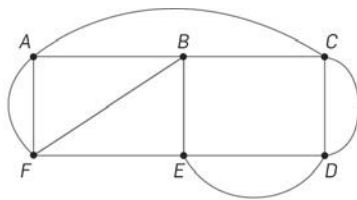
42.2 $9 + 7 + 4 + 2 + 2 + 1 + 8 + 4 = 37$ quilómetros

43.1 Por exemplo:



Uma vez que existem vértices de grau ímpar (A e F), o grupo terá de percorrer um caminho (AF) mais do que uma vez.

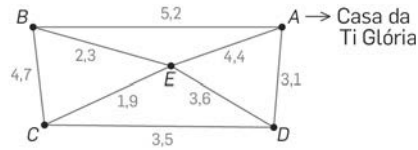
43.2 Eulerização do grafo:



Percurso: Por exemplo, $A C D E D C B E F B A F A$

43.3 Uma vez que a realidade é complexa, torna-se necessária, na resolução de problemas concretos, a construção de modelos que a simplifiquem, no sentido de eliminar os aspetos acessórios. Na situação apresentada, são completamente irrelevantes, para a resolução do problema proposto, aspetos como os lagos, as fontes, as árvores, os nomes dos locais e as curvas dos caminhos, aspetos que não constam no modelo.

44.1 Para facilitar, vamos representar cada casa por uma letra, obtendo o seguinte grafo:



Os percursos possíveis são: $A D E C B A$, $A D C E B A$, $A E B C D A$ e $A E D C B A$ (ou os inversos)

44.2 $A D E C B A$: $3,1 + 3,6 + 1,9 + 4,7 + 5,2 = 1850$ metros

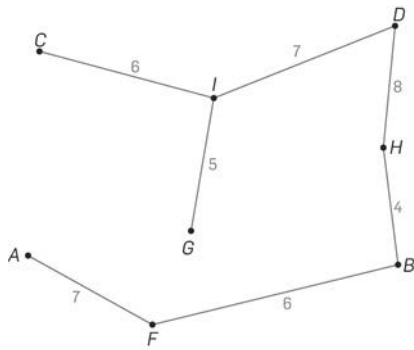
$A D C E B A$: $3,1 + 3,5 + 1,9 + 2,3 + 5,2 = 1600$ metros

$A E B C D A$: $4,4 + 2,3 + 4,7 + 3,5 + 3,1 = 1800$ metros

$A E D C B A$: $4,4 + 3,6 + 3,5 + 4,7 + 5,2 = 2140$ metros

O menor percurso é $A D C E B A$, ou o inverso, com 1600 metros.

45.1 Vamos utilizar o algoritmo de Prim, por exemplo, para encontrar a árvore abrangente mínima. Começamos, por exemplo, no vértice A.



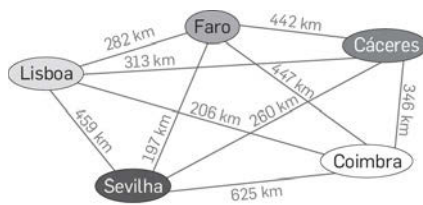
45.2 Para a proposta do exercício 45.1, o comprimento total de fibra ótica necessário será:

$7 + 6 + 4 + 8 + 7 + 5 + 6 = 43$ dezenas de metros, ou seja, 430 metros

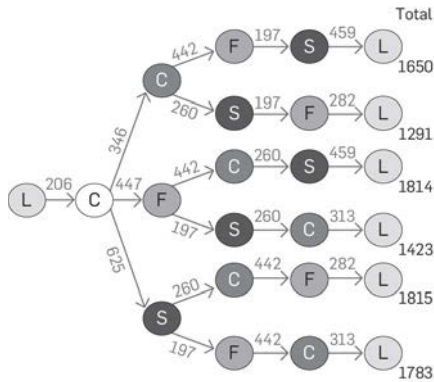
O valor a pagar pela instalação será:

$430 \times 4,20 = 1806$ €

46.1 Por exemplo:



46.2 Começando por Coimbra, o António tem seis hipóteses de percursos:



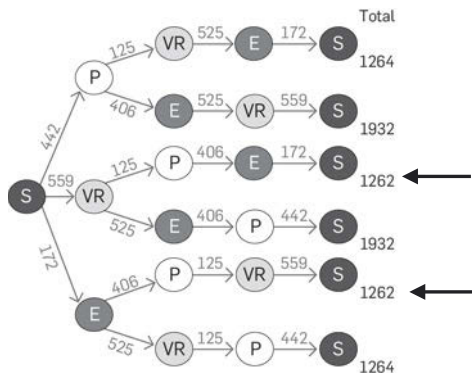
O António estava errado. O percurso de menor distância no circuito não é o que o António previa, mas sim:



correspondente a uma distância total de 1291 quilómetros.

47.1 Para ser possível a existência de tal circuito, teria de haver um circuito euleriano, o que não é possível, pois existem vértices de grau ímpar (Faro e Vila Real).

47.2 Circuitos possíveis (valores em quilómetros):

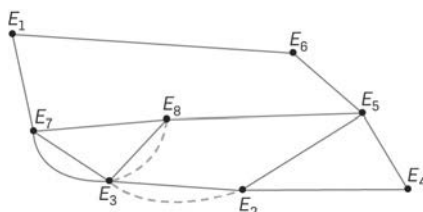


Há seis circuitos possíveis, iguais dois a dois em distância. O menor é de 1262 quilómetros.

Custo mínimo: $2 \times 1262 \times 0,92 = 2322,08 \text{ €}$

48.1 Por exemplo: $E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_6 \rightarrow E_1 \rightarrow E_7 \rightarrow E_8 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2$

48.2 Por exemplo:



O funcionário tem de percorrer todos os troços da rua, uma única vez, começando e terminando no mesmo ecoponto: é necessário averiguar se existe um circuito euleriano. Uma

vez que os vértices 2 e 8 (que representam os ecopontos E_2 e E_8) têm grau ímpar, não existe nenhum circuito euleriano (para tal, todos os vértices teriam de ter grau par). Para encontrar um percurso que seja o menor possível (que repita o menor número de troços de rua), basta proceder à eulerização do grafo, atendendo a que todos os vértices terão de ficar com grau par.

Assim, um percurso possível, nas condições impostas, seria:

$$E_2 \rightarrow E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_6 \rightarrow E_1 \rightarrow E_7 \rightarrow E_8 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_8 \rightarrow E_5 \rightarrow E_2$$

49.1 Modalidade A: $125 + 3 \times 20 = 185 \text{ €}$

Modalidade B: $5 \times 2^3 = 40 \text{ €}$

49.2

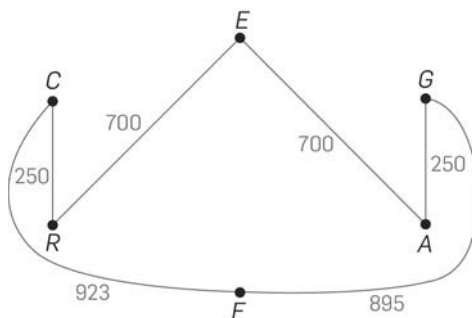
1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a	6. ^a	7. ^a	8. ^a	(semana)
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----------

Mod. A: $125 + 145 + 165 + 185 + 205 + 225 + 245 + 265 = 1560 \text{ €}$

Mod. B: $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 = 1275 \text{ €}$

A modalidade B é mais vantajosa para oito semanas de aluguer.

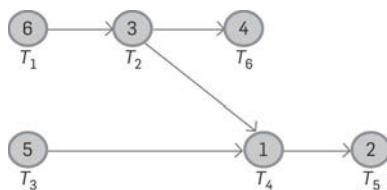
49.3 $C \xrightarrow{250} R$; $A \xrightarrow{250} G$; $C \xrightarrow{495} E$; $R \xrightarrow{700} E$; $A \xrightarrow{700} E$; $G \xrightarrow{895} F$; $F \xrightarrow{923} C$



Comprimento: $250 + 700 + 700 + 250 + 895 + 923 = 3718$

O percurso é $C R E A G F C$ (ou inverso), com um total de 3718 metros.

50.1



50.2 T_4 e T_6 só avançam depois de T_1 e T_2 concluídas ($6 + 3 = 9$)

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_4 \rightarrow T_5$: $6 + 3 + 1 + 2 = 12$

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_6$: $6 + 3 + 4 = 13$

Tempo mínimo: 13 semanas

Tema 3 | Capítulo 3 – Modelos populacionais

1. Crescimento positivo: aumento da população.
Crescimento negativo: diminuição da população.
2. Composição
- 3.1 $C_1 = 1600 \times (1 + 0,046) = 1673,6 \text{ €}$
 $C_5 = 1600 + 1600 \times 0,046 \times 5 = 1968 \text{ €}$
- 3.2 $C_n = 1600 (1 + 0,046n) \Leftrightarrow C_n = 1600 + 73,6n$
- 3.3 $C_n = 2704 \Leftrightarrow 1600 + 73,6n = 2704 \Leftrightarrow 73,6n = 1104 \Leftrightarrow n = 15 \text{ anos}$
4. $C_n = 1950 (1 + t \times n) \xrightarrow{\quad} 2 \times 1950 = 1950 (1 + 15 t) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 + 15 t = 2 \Leftrightarrow t \simeq 6,7\%$
- 5.1 Terá de pagar $50 + 4 \times 15 = 110 \text{ €}$
- 5.2 $185 = 50 + 15n \Leftrightarrow 15n = 135 \Leftrightarrow n = 9 \text{ dias}$
- 6.1 No terceiro dia houve $6 + 8 + 8 = 22$ inscrições.
- 6.2 Como $N(3) = 6 + 2 \times 8$, o modelo pode ser:
 $N(t) = 6 + (t - 1) \times 8$
 $\Leftrightarrow N(t) = 8t - 2$
- 6.3.1 $N(8) = 8 \times 8 - 2 = 62$ inscrições no oitavo dia
- 6.3.2 $N(t) > 100 \Leftrightarrow 8t - 2 > 100 \Leftrightarrow t > 12,75$
Foi no 13.º dia.
- 6.3.3 $N(t) + N(t + 1) = 340$
 $\Leftrightarrow 8t - 2 + 8(t + 1) - 2 = 340$
 $\Leftrightarrow 16t = 336 \Leftrightarrow t = 21$ (penúltimo dia)
A feira de 2010 durou 22 dias.
- 7.1 $\bar{x} = \frac{15,4 + 74,8 + 43,5 + 17,8 + 11,5 + 89,6 + 61,2}{7} \simeq 44,8\%$
- 7.2 $a \simeq 123,7159$; $b \simeq -248,7235$; $r \simeq 0,9634$ (regressão obtida com auxílio da calculadora)
- 7.3 A partir dos dados apresentados na tabela e no diagrama de dispersão, ao excluir os dados do país F na determinação da reta de regressão linear, o coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y é, aproximadamente, 0,9937, ou seja, aproxima-se de 1. Ao excluir os valores do país F, a reta de regressão linear, sem o *outlier*, é mais ajustada aos restantes pontos do diagrama de dispersão, e as previsões que se fazem a partir desta reta parecem mais fiáveis.
- 8.1 $C_2 = 1250 \times 1,0331^2 \simeq 1334,12 \text{ €}$
- 8.2 $C_n = 1250 \times 1,0331^n$
- 8.3 $1972 = 1250 \times 1,0331^n \Leftrightarrow 1,0331^n = 1,5776 \Leftrightarrow n \simeq 14 \text{ anos}$ (resolução com auxílio da calculadora gráfica)
9. $2C_0 = C_0 \times 1,037^n \Leftrightarrow 1,037^n = 2 \Leftrightarrow n \simeq 19 \text{ anos}$

10. $3C_0 = C_0 \times (1+t)^{15} \Leftrightarrow (1+t)^{15} = 3 \Leftrightarrow 1+t = \sqrt[15]{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t \simeq 1,076 - 1 \Leftrightarrow t \simeq 0,076 = 7,6\%$

11.1 $C_{2A} = 2300 \times 1,0305^2 \approx 2442,44 \text{ €}$

11.2 $C_{75} = 2300 \times 1,01525^4 \approx 2443,54 \text{ €}$

11.3 $C_{2T} = 2300 \times 1,007625^8 \approx 2444,10 \text{ €}$

12.

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2197 + 6564 = 9841 \text{ alunos em } 4' \times 7 = 28 \text{ minutos}$$

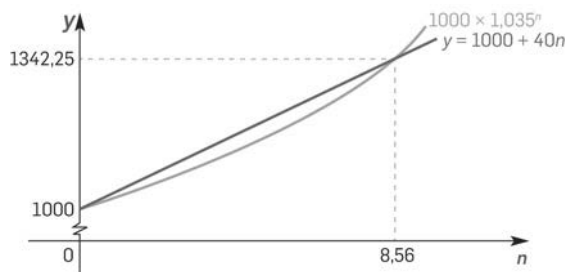
13.1 $b_1 = 1000 \times 1,035 = 1035$

$$b_2 = 1035 \times 1,035 = 1071,225$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1071,225}{1035} = 1,035 = \text{razão}$$

13.2 $1000 + 40n < 1000 \times 1,035^n$

Graficamente:



A partir do nono ano, a opção B torna-se mais vantajosa.

Opção A: $a_8 = 1300 \text{ €}$

$$a_9 = 1360 \text{ €}$$

 $\succ$ $\angle$

Opção B: $b_8 = 1316,81 \text{ €}$

$$b_9 \approx 1362,90 \text{ €}$$

14.1 2010–2025 → 1,5 décadas

$$P_{1.5} = 402\,344 \times 1,03^{1,5} \approx 420\,585 \text{ habitantes}$$

14.2 $2P_0 = P_0 \times 1,03^d \Leftrightarrow 1,03^d = 2 \Leftrightarrow d \approx 23,4$
23,4 décadas = 234 anos

15.1 2005–2025 → 2 décadas

$$P_2 = 3520 \times 0,943^2 \approx 3130 \text{ habitantes}$$

15.2 $P_{10} = 3520 \times 0,943^{10} \approx 1957$ habitantes

16.1 $P(0) = 2 + e^{0,6 \times 0} = 3$

Existiam 3000 bactérias.

16.2 $P(1,5) = 2 + e^{0,6 \times 1,5} \approx 4,45960$

Existirão cerca de 4460 bactérias.

16.3 $P(t) = 6,5 \Leftrightarrow 2 + e^{0,6t} = 6,5 \Leftrightarrow e^{0,6t} = 4,5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 4,5}{0,6} \Leftrightarrow t \approx 2,51 \text{ h}$$

Ao fim de cerca de 2,51 horas.

17.1 $T(7) = 960 \times 1,07^7 \approx 1541,55$ (2018 – 2011 = 7)

Será de, aproximadamente, 1542 veículos/dia.

17.2 $1875 = 960 \times (1 + t)^9 \Leftrightarrow$ (2020 – 2011 = 9)

$$\Leftrightarrow (1 + t)^9 = 1,953125$$

$$\Leftrightarrow t \approx 0,077 = 7,7\%$$

18.1 $R(0) = 475 \times e^{-0,08 \times 0} = 475 \text{ mg}$

18.2 $R(10) = 475 \times e^{-0,08 \times 10} \approx 213,43 \text{ mg}$

18.3 $182 = 475 \times e^{-0,08t} \Leftrightarrow e^{-0,08t} = \frac{182}{475} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-100}{8} \times \ln\left(\frac{182}{475}\right) \Leftrightarrow t \approx 11,991 \approx 12 \text{ anos}$$

19. $\frac{475}{2} = 475 \times e^{-0,08t} \Leftrightarrow e^{-0,08t} = 0,5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{100}{8} \times \ln 0,5 \Leftrightarrow t \approx 8,664$$

$$0,664 \times 365 = 242,36$$

A semivida é, aproximadamente, 8 anos e 242 dias.

20.1.1 $C(0) = 10 \times 1,2^0 = 10 \text{ coelhos}$

20.1.2 $C(t) > 1000 \Leftrightarrow 10 \times 1,2^t > 1000 \Leftrightarrow 1,2^t > 100 \Leftrightarrow t > 25,26$

Ao fim de, aproximadamente, 26 meses.

20.2 $\begin{cases} C(12) = 163 \\ C(18) = 787 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \cdot a^{12} = 163 \\ k \cdot a^{18} = 787 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{163}{a^{12}} \\ k = \frac{787}{a^{18}} \end{cases} \Leftrightarrow$

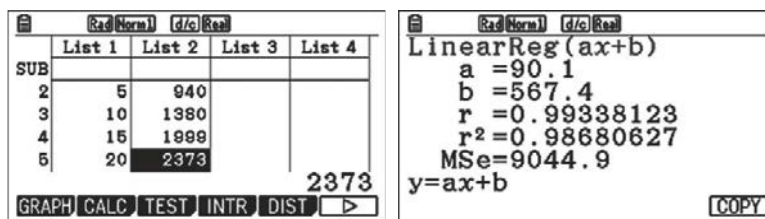
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{163}{a^{12}} = \frac{787}{a^{18}} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^{18}}{a^{12}} = \frac{787}{163} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^6 = \frac{787}{163} \\ k = \frac{787}{a^{18}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 1,30 \\ k \approx 7,00 \end{cases}$$

21.1 O valor de t será 38 (2018 – 1980) e $N(38) = 678,211e^{0,065 \times 38} \approx 8018,11$

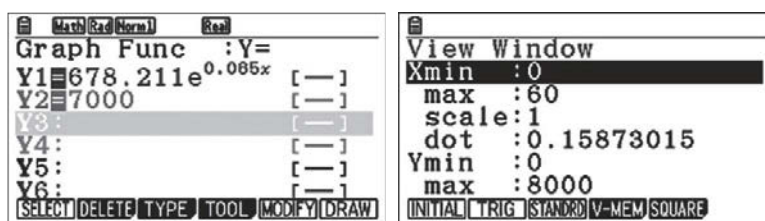
Logo, a previsão aponta para cerca de 8038 habitantes em 2018.

- 21.2** Com auxílio da calculadora, no modo estatístico, colocamos os dados das cinco primeiras linhas da tabela de acordo com o pedido (o primeiro valor, 0,650, está «escondido») e calculamos o modelo linear que melhor se ajusta a estes dados:

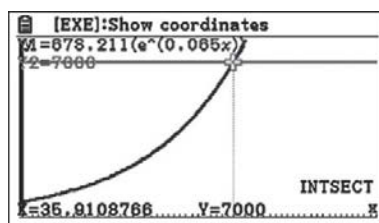


O modelo linear obtido é $y = 90,1x + 567,4$. Sendo representado graficamente por uma reta, a variação anual corresponde ao declive da reta, logo, será de 90,1 habitantes por ano.

- 21.3** Pretendemos resolver graficamente a equação $678,211e^{0,065x} = 7000$. Colocamos as funções no editor de gráficos da calculadora e ajustamos a janela de visualização:



O ponto de interseção das duas funções é dado por:



Podemos concluir que serão atingidos os 7000 habitantes antes de passados 36 anos ($\approx 35,91$). Como $36 + 1980 = 2016$, os 7000 habitantes deverão ser atingidos no final de 2015.

$$\begin{aligned} 22.1 \quad & \begin{cases} P(0) = 3 \\ P(2) = 4,23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 3 \\ a + e^{2b} = 4,23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ e^{2b} = 2,23 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \ln 2,23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \approx 0,4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$22.2 \quad P(5) = 2 + e^{0,4 \times 5} = 2 + e^2 \approx 9,38905$$

Existirão cerca de 9389 microrganismos.

$$22.3 \quad 2 \times 3 = 2 + e^{0,4t} \Leftrightarrow e^{0,4t} = 4 \Leftrightarrow 0,4t = \ln 4 \Leftrightarrow t \approx 3,4657 \rightarrow 3 \text{ dias, 11 horas e 17 minutos}$$

23.1 Foi de 9160 €.

$$23.2 \quad y = 5,77 \times e^{0,09x} \text{ ou } y = 5,77 \times 1,10^x \text{ (regressão exponencial)}$$

$$23.3 \quad y = 5,77 \times e^{0,09 \times 12} \approx 16,99 \text{ milhares de euros}$$

ou $y = 5,77 \times 1,10^{12} \approx 18,11 \text{ milhares de euros}$

24.1 $P(3 \times 24) = 500 \times 1,03^{72} \approx 4200$ amibas

24.2 $P(t) = 500 \times 1,03^t$, t horas

24.3 $10\,000 = 500 \times 1,03^t \Leftrightarrow 1,03^t = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 20}{\ln 1,03} \Leftrightarrow t \simeq 101,348$, isto é, ao fim de 4 dias, 5 horas e 21 minutos

25. $y(t) = c \times e^{+0,000121t}$

$0,96c = c \times e^{-0,000121t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,000121t = \ln(0,96) \Leftrightarrow t \simeq 337$ anos

De acordo com a informação dada pelo laboratório, podemos concluir (pelos cálculos) que a idade do papel é de cerca de 337 anos. Como foi analisado em 2008, tem-se que: $2008 - 337 = 1671$.

Teria sido esta a data, aproximada, de fabrico do papel. Como Leonardo da Vinci morreu em 1519, o manuscrito não pode ser da sua autoria.

26. Usando a calculadora:

Casio: $y = 1,4471e^{0,0136x}$

Texas: $y = 1,4471 \times 1,0137^x$

Em 2012, a população mundial será de, aproximadamente, $1,4471 \times e^{0,0136 \times 110} \approx 6,46$ milhares de milhões de habitantes.

27.1 $m(0) = \frac{1}{0,3+0,2 \times e^{-0}} = \frac{1}{0,5} = 2$ mg

27.2 $t \rightarrow +\infty \rightarrow m(t) \rightarrow \frac{10}{3}$ mg (tende a estabilizar neste valor, com o decorrer do tempo)

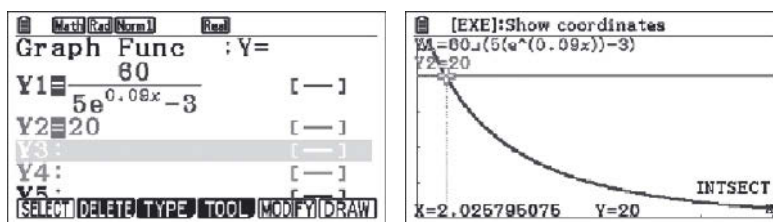


28.1 $q(0) = \frac{60}{5 \times e^{0,09 \times 0 - 3}} = \frac{60}{2} = 30$ g

28.2 $q(5) = \frac{60}{5 \times e^{0,45 - 3}} \simeq 12,393$ g

$30 - 12,393 \simeq 17,61$ g (quantidade de produto dissolvido)

28.3



$t \simeq 2,026 \simeq 2$ minutos e 1 segundo

29. $P(0) = \frac{10728,45}{1+0,05 \times e^0} = \frac{10728,45}{1,05} \approx 10\,217,57143$
 $P(7) = \frac{10728,45}{1+0,05 \times e^{-0,12 \times 7}} \approx 10\,501,7639$
 $P(7) - P(0) = 284,1924705$
 Aumentou cerca de 284 milhares.

30.1 $N(0) = \frac{300}{1+e^{-0,2 \times 0}} = \frac{300}{2} = 150$ plantas

30.2 $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 300$ (calculadora)

30.3 Não. Tende a estabilizar nas 300 plantas.

31.1 $N(0) = \frac{3000}{1+20 \times e^{-0,5 \times 0}} = \frac{3000}{21} \approx 143$ computadores

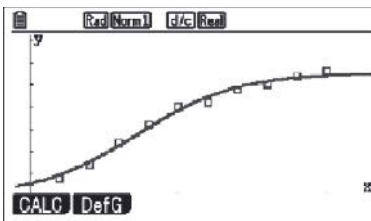
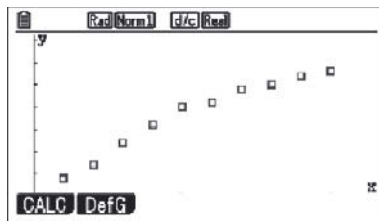
31.2 $N(0,5) = \frac{3000}{1+20 \times e^{-0,25}} \approx 181$ computadores

31.3 $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 3000$

Esperam vender cerca de 3000 computadores.

32.1 $T = \frac{27,7}{1+8,8 e^{-0,6x}}$

32.2



32.3 $T(15) = \frac{27,7}{1+8,8 e^{-0,6 \times 15}} \approx 27,67$

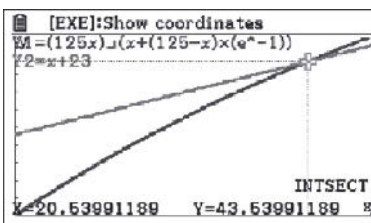
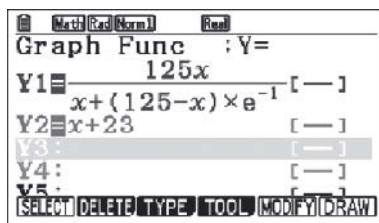
Cerca de 28 tulipas.

33.1 $N(10) = \frac{125A}{A+(125-A) \times e^0} = \frac{125A}{A+125-A} = \frac{125A}{125} = A$

33.2 $N(5) = A + (80 - 57) \wedge A < 25 \Leftrightarrow N(5) = A + 23 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{125A}{A+(125-A) \times e^{-1}} = A + 23 \wedge A < 25$

Graficamente:



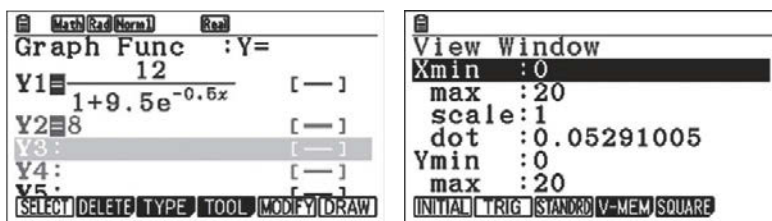
No instante inicial, havia, aproximadamente, 21 aves.

34. $L(h) > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) + 2 > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) > 2 \Leftrightarrow 80 + h > 10^2 \Leftrightarrow h > 20$ (analiticamente)
 Será necessário trabalhar mais de 20 horas.

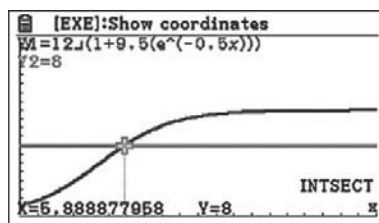
35.1 $A(0) = \frac{12}{1 + 9,5 e^{-0,5 \times 0}} \approx 1,142857$, isto é, uma área aproximada de 1143 km².

35.2 Pretendemos resolver graficamente a equação $\frac{12}{1 + 9,5 e^{-0,5x}} = 8$.

Colocamos no editor de gráficos da calculadora e ajustamos a janela de visualização:

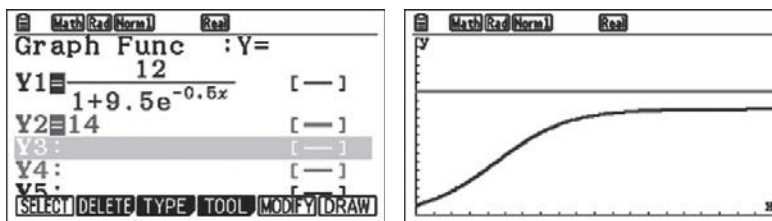


O ponto de interseção das duas funções é dado por:



Podemos concluir que a área da zona afetada atingirá os 800 km² passadas 5,88888 semanas, isto é, 5 semanas e $7 \times 0,88888 = 6,22216 \approx 6$ dias. Então, a área da zona agrícola afetada pela nuvem de gafanhotos atingiu 800 km² num domingo, passadas cinco semanas e seis dias após ter sido detetada a nuvem.

35.3 Colocamos as funções $y = A(x)$ e $y = 14$ no editor de gráficos da calculadora:



Observamos que os gráficos das duas funções não se interseçam. Podemos concluir que a área da zona agrícola afetada pela nuvem de gafanhotos não chegará a atingir os 1400 km².

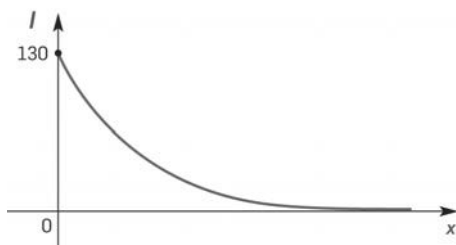
36.1 $A(0) = 20 \ln 4 + 30 \approx 57\,726$ km

36.2 $80 = 20 \ln\left(\frac{t+8}{2}\right) + 30 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{t+8}{2}\right) = 2,5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 2 \cdot e^{2,5} - 8$
 $\Leftrightarrow t \approx 16,364$, isto é, cerca de 16 horas e 22 minutos

37.1 $\log_{10} \frac{30}{130} = -0,03x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{0,03} \log \frac{3}{13} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \approx 21,23$ metros

37.2 $\log_{10} \frac{I}{130} = -0,03 \times 10 \Leftrightarrow I = 130 \times 10^{-0,3}$
 $\Leftrightarrow I \approx 65,15$ lúmens

37.3 $I = 130 \times 10^{-0,03n} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ (x representa profundidade)



A intensidade da luz diminui com o aumento da profundidade.

38.1 $M = \log_{10} 1 + 3 = 0 + 3 = 3$

É a magnitude de um sismo que regista 1 milímetro de amplitude.

38.2 $M = \log_{10} 10 + 3 \Leftrightarrow M = 1 + 3 = 4$

38.3 $6,2 = \log_{10} A + 3 \Leftrightarrow \log_{10} A = 3,2 \Leftrightarrow A = 10^{3,2} \Leftrightarrow A \approx 1585$ milímetros

39.1 Ao fim de uma semana (sete dias), a planta tem 7,15 centímetros.

39.2 $y = 0,85 + 3,13 \ln x$ (calculadora)

39.3 $y = 0,85 + 3,13 \ln 31 \Leftrightarrow y \approx 11,60$ centímetros

40.1 No gráfico: $\%: \frac{8}{100} = 0,08 = 8\%$

No modelo: $P_8 = 26,6723 - 10,9399 \ln 8 \approx 3,92\%$

$8 - 3,92 = 4,08 \approx 4,1\%$

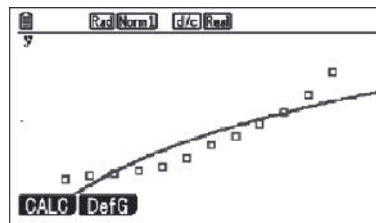
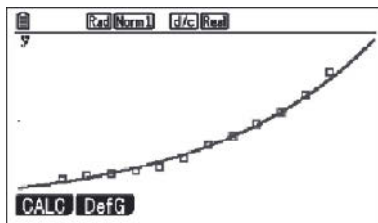
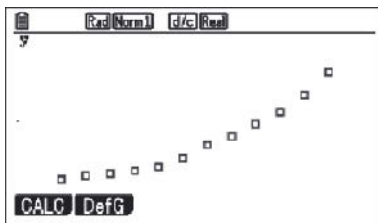
40.2 % alargamento: $P = 26,6723 - 10,9399 \ln 1 \Leftrightarrow P = 26,6723\%$

$216 \times 26,6723\% = 57,612168 \approx 58$ números

41.

Exponencial:
 $y = 0,68 \times 1,35^x$ (Casio)

Logarítmico:
 $y = -4,16 + 4,94 \ln x$



O modelo exponencial é o que melhor se ajusta.

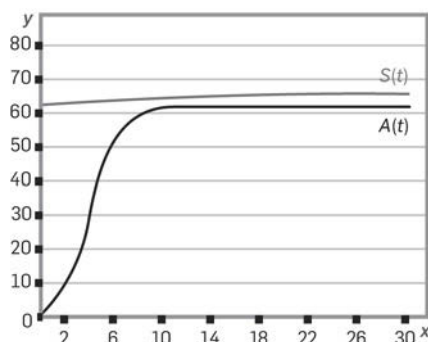
42.1 $S(18) = 62,11 + \ln(1,5 + 18) \approx 65,08041$

Cerca de 65 pessoas.

42.2 $51 = \frac{62,10}{1 + 25 \times e^{-0,797t}} \Leftrightarrow 1 + 25e^{-0,797t} = \frac{62,1}{51} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{0,797t} = \frac{11,1}{1275} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,797} \ln\left(\frac{11,1}{1275}\right) \approx 5,952 \approx 6$

Foi no dia 6 de agosto de 2009 (também se pode resolver graficamente com a calculadora).

42.3 A partir da observação dos gráficos dos modelos A e S, podemos afirmar que:



- Durante os primeiros dias de agosto, verificou-se um grande aumento do número de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1.
- No decurso do mês de setembro, o número de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1 aumentou muito pouco.

Na tabela seguinte, os valores de Y_1 correspondem ao modelo A e os valores de Y_2 correspondem ao modelo S. Assim, de acordo com esses valores, no dia 1 de agosto registaram-se cinco casos confirmados de infeção e no dia 31 do mesmo mês, 62 casos, isto é, uma diferença de 57 casos de registo diário entre o início e o fim do mês de agosto.

X	Y_1	Y_2
1	5.0624	63.026
30	62.1	65.56
31	62.1	65.591

$Y_1 = 62.10 / (1 + 25 * \dots)$

No dia 1 de setembro, registaram-se 63 casos confirmados de infeção e no dia 30 do mesmo mês, 66 casos, isto é, uma diferença de três casos de registo diário entre o início e o fim do mês de setembro.

Podemos concluir que a diferença entre o número de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, diariamente, foi maior no mês de agosto do que no mês de setembro.

43.1 $N = 105 \Leftrightarrow 120 + 10 \log_{10} I = 105 \Leftrightarrow \log_{10} I = -1,5 \Leftrightarrow I = 10^{-1,5} \Leftrightarrow I \approx 0,03 \text{ W/m}^2$

43.2 I: $120 + 10 \log_{10} I = 0 \Leftrightarrow \log_{10} I = -12 \Leftrightarrow I = 10^{-12} = 0,000000000001 \text{ W/m}^2$, valor diferente do que é dado no enunciado.

II: Nível sonoro do navio:

$N(5) = 120 + 10 \log_{10} 5 \approx 127 \text{ dB}$, valor este que está mais próximo do nível sonoro registado pelo avião a jato do que do registado no concerto de música *rock* ($127 - 110 = 17 > 140 - 127 = 13$).

III: $\frac{\text{Intensidade de avião a jato}}{\text{Intensidade de tráfego rodoviário}} = \frac{10^2}{10^{-4}} = 10^6 = 1\,000\,000$, e não 600, como afirma o Rui.

Assim, as três conclusões do Rui estão erradas.

Tema 4 | Capítulo 1 – Modelos de probabilidade

1. As experiências aleatórias são: A, C, D, E e H .

2.1 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2.2 «Sair uma ficha com um número entre 0 e 5 inclusive»

2.3 «Sair uma ficha com o número 6»

2.4 «Sair uma ficha com o número 1»

3.1 Para facilitar a verificação de todos os casos possíveis, vamos construir uma tabela de dupla entrada.

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Então, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.2 «O módulo da diferença das pontuações obtidas ser um número entre 0 e 5»

3.3 «O módulo da diferença das pontuações ser igual a 6»

4. Para facilitar a verificação dos casos possíveis, vamos construir tabelas de dupla entrada:

		Tetraedro 2			
		1	2	3	4
Tetraedro 1	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

		Tetraedro 2			
		1	2	3	4
Tetraedro 1	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

4.1 $A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$

$B = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$C = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

4.2.1 $A \cap B = \{(2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$

4.2.2 $A \cup B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

4.2.3 $A - B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

$$4.2.4 \quad B - A = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

$$4.2.5 \quad B \cap C = \{(2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$4.2.6 \quad B - C = \{(3, 3)\}$$

5.1 Existem dez números pares no conjunto das bolas. Logo:

$$P(\text{ser divisível por 2}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

5.2 Existem dois números múltiplos de 7 (7 e 14). Logo:

$$P(\text{ser múltiplo de 7}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

5.3 Existem dez números ímpares no conjunto das bolas. Logo:

$$P(\text{ser ímpar}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

5.4 Existem cinco bolas com número maior que 15. Logo:

$$P(\text{ser maior que 15}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

5.5 Existem cinco bolas com número maior que 5 e menor ou igual a 10. Logo:

$$P(\text{ser maior que 5 e menor ou igual a 10}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

6. Sabe-se que a probabilidade de as duas primeiras rifas serem premiadas é de $\frac{3}{35}$.

Então:

$$\begin{aligned} \frac{x}{50} \times \frac{x-1}{49} &= \frac{3}{35} \Leftrightarrow x(x-1) = \frac{3}{35} \times 50 \times 49 \Leftrightarrow x(x-1) = 210 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 210 &= 0 \Leftrightarrow x = 15 \vee \underbrace{x = -14}_{\text{Impossível}} \end{aligned}$$

Logo, existem 15 rifas premiadas.

$$7.1 \quad 10 \times 10 \times 23 \times 23 \times 10 \times 10 = 5\,290\,000$$

$$7.2 \quad 72 - \text{LL} - \text{AA}$$

$$23 \times 23 \times 10 \times 10 = 52\,900$$

$$7.3 \quad \text{AA} - \text{VM} - \text{AA}$$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

8. Consideremos os acontecimentos:

J : «o João ganhar»

M : «o Manuel ganhar»

A : «o António ganhar»

F : «o Francisco ganhar»

Sabe-se que:

$$P(J) = 2P(M), P(F) = P(A) - P(J), P(F) = \frac{P(J)}{2}$$

Tendo em conta que:

$$P(A) + P(F) + P(J) + P(M) = 1 \Leftrightarrow P(A) + \frac{P(J)}{2} + P(J) + \frac{P(J)}{2} = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - 2P(J) *$$

Sabe-se também que:

$$P(F) = P(A) - P(J) \Leftrightarrow \frac{P(J)}{2} = P(A) - P(J) \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(J)}{2} + P(J) \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{2}P(J) **$$

Por * e ** vem que:

$$\frac{3}{2}P(J) = 1 - 2P(J) \Leftrightarrow 3P(J) = 2 - 4P(J) \Leftrightarrow 7P(J) = 2 \Leftrightarrow P(J) = \frac{2}{7}$$

Então:

$$P(M) = \frac{P(J)}{2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

$$P(A) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P(F) = \frac{P(J)}{2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

9. $3A + 2B + 2V + 1P$

9.1.1 «Retirar uma camisola azul, branca, vermelha ou preta»

9.1.2 «Retirar uma camisola verde»

9.2.1 Consideremos os acontecimentos:

A: «a camisola é azul»

B: «a camisola é branca»

V: «a camisola é vermelha»

P: «a camisola é preta»

Queremos calcular: $P(A \cup V) = P(A) + P(V) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

9.2.2 $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

9.2.3 Se a camisola não é azul nem preta, então só pode ser branca ou vermelha.

$$P(B \cup V) = P(B) + P(V) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

10. $7V + 6A + 2P$

10.1 Consideremos os acontecimentos:

A: «ser azul»

V: «ser vermelha»

P: «ser preta»

Sabemos que:

$$P(A) = 0,25$$

$$\frac{6}{15+x} = 0,25 \Leftrightarrow 3,75 + 0,25x = 6 \Leftrightarrow 0,25x = 2,25 \Leftrightarrow x = 9$$

Podemos, por exemplo, acrescentar nove bolas pretas.

10.2 $P(V) = 0,5$

$$\frac{7+x}{15+x} = 0,5 \Leftrightarrow 7+x = 0,5(15+x) \Leftrightarrow 7+x = 7,5+0,5x \Leftrightarrow 0,5x = 0,5 \Leftrightarrow x = 1$$

Acrescentamos uma bola vermelha, por exemplo, ou retiramos uma bola azul.

10.3 Para que a probabilidade de a bola ser vermelha ou azul seja 1, teremos de retirar duas bolas pretas.

11.1.1 $P(D, D) = \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

11.1.2 $P(D, D) = \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} \times 2 = \frac{24}{1560} = \frac{1}{65}$

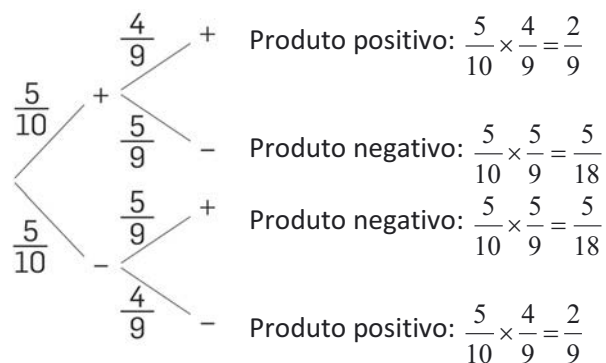
11.2 $P(A, A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$ Sem reposição

$$P(A, A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad \text{Com reposição}$$

12. Existem dez fichas brancas numeradas de 1 a 10 e três fichas vermelhas.

$$P(V, V) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{26}$$

13.1 Vamos construir uma árvore de probabilidades que traduza o problema:

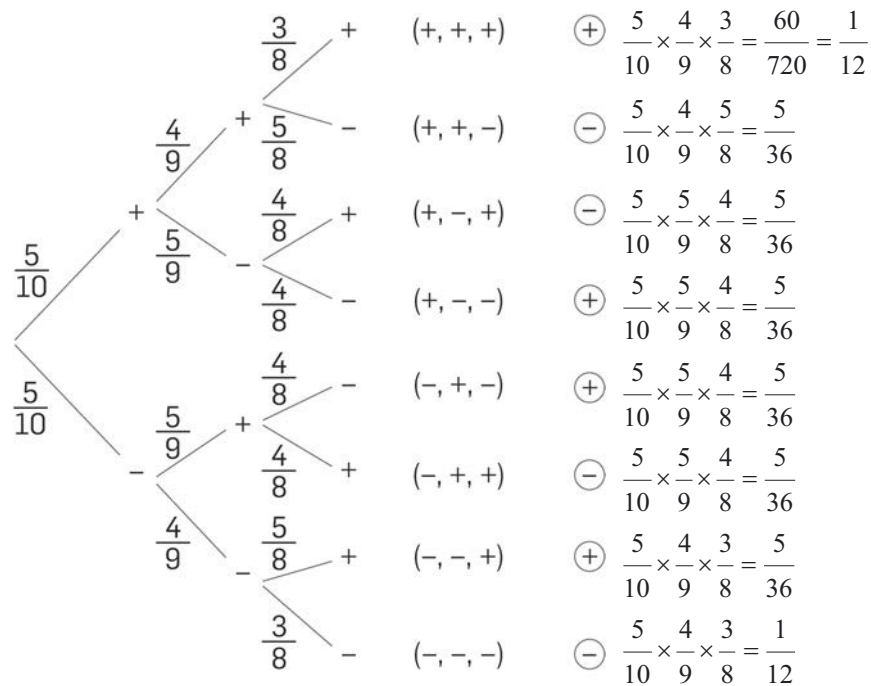


Produto positivo: $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Produto negativo: $\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

É mais provável o produto ser negativo.

13.2



$$P(\text{positivo}) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} \times 3 = \frac{1}{2}$$

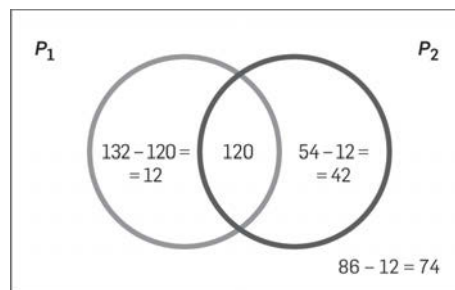
$$P(\text{negativo}) = \frac{1}{2}$$

14. Consideremos os acontecimentos:

P_1 : «acertar o primeiro problema»

P_2 : «acertar o segundo problema»

Vamos construir um diagrama de Venn que traduza os dados do problema:



Total: 248

$$\begin{aligned}
 14.1 \quad P(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2) &= P(\overline{P_1 \cup P_2}) = 1 - P(P_1 \cup P_2) = 1 - (P(P_1) + P(P_2) - P(P_1 \cap P_2)) = \\
 &= 1 - \left(\frac{132}{248} + \frac{162}{248} - \frac{120}{248} \right) = \frac{37}{124}
 \end{aligned}$$

$$14.2 \quad P(\bar{P}_1 \cap P_2) = P(P_2) - P(P_1 \cap P_2) = \frac{162}{248} - \frac{120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$

15. Consideremos os acontecimentos:

M : «pertencer ao clube de Matemática»

F : «ser do sexo feminino»

Sabe-se que: $P(M) = 60\%$, $P(F) = 55\%$, $P(\bar{F} | \bar{M}) = 30\%$

15.1 Pretende-se calcular $P(F \cap M)$:

$$P(\bar{F} | \bar{M}) = 0,3 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{F} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = 0,3 \Leftrightarrow P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 0,3 \times 0,4 \Leftrightarrow P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 0,12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{F \cup M}) = 0,12 \Leftrightarrow P(F \cup M) = 0,88 \Leftrightarrow P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0,88 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(F \cap M) = 0,27$$

Logo, $P(F \cap M) = 27\%$

15.2 Pretende-se calcular $P(\bar{F} \cap \bar{M})$:

Pelo exercício anterior, concluímos que: $P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 12\%$

15.3 Pretende-se calcular $P(\bar{M} | F)$:

$$P(\bar{M} | F) = \frac{P(\bar{M} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F) - P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 - 0,27}{0,55} = \frac{28}{55}$$

$$\mathbf{15.4} \quad P(F | M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0,27}{0,6} = 45\%$$

16.1 $C_1 (5C + 4L)$

$C_2 (3C + 1L)$

Pretende-se calcular $P(L | C_1) = \frac{4}{9}$

$$\mathbf{16.2} \quad P(C) = P(C | C_1) \times P(C_1) + P(C | C_2) \times P(C_2) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{47}{72}$$

$$\mathbf{16.3} \quad P(C_2 | C) = \frac{P(C_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C | C_2) \times P(C_2)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{47}{72}} = \frac{27}{47}$$

16.4 Queremos verificar se L e C_1 são independentes, ou seja: $P(L \cap C_1) = P(L) \times P(C_1)$.

$$P(L \cap C_1) = P(L | C_1) \times P(C_1) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P(L) = P(L | C_1) \times P(C_1) + P(L | C_2) \times P(C_2) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{25}{72}$$

$$P(C_1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{25}{72} \times \frac{1}{2}$$

Falso. Logo, não são independentes.

17. Consideremos uma tabela de dupla entrada onde assinalámos todos os casos possíveis:

	0	1	2	3	4	5	6
0		(0, 1)	(0, 2)				
1		(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2			(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)

Os valores que a variável «pontos da peça» pode tomar são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$18.1 \quad \bar{x} = \frac{1 \times 15 + 2 \times 25 + 3 \times 96 + 4 \times 50 + 5 \times 10 + 6 \times 4}{200} = 3,135$$

$$18.2 \quad \text{var}(X) = \frac{15 \times (1 - 3,135)^2 + 25 \times (2 - 3,135)^2 + \dots + 4 \times (6 - 3,135)^2}{200} = 1,041$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = 1,02$$

$$18.3 \quad 10 + 4 = 14 \text{ pessoas}$$

18.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,075	0,125	0,48	0,25	0,05	0,02

$$18.5.1 \quad P(X = 4) = 25\%$$

$$18.5.2 \quad P(X < 2) = 7,5\%$$

$$18.5.3 \quad P(X \geq 3) = 0,48 + 0,25 + 0,05 + 0,02 = 80\%$$

$$18.5.4 \quad P(X \leq 3) = 0,075 + 0,125 + 0,48 = 68\%$$

$$19.1 \quad 0,03 + 0,10 + 0,16 + k + 0,3 + 0,15 + 0,07 = 1 \Leftrightarrow k = 0,19$$

$$19.2.1 \quad P(X \geq 5) = 0,15 + 0,07 = 22\%$$

$$19.2.2 \quad P(X \leq 2) = 0,03 + 0,10 + 0,16 = 0,29 = 29\%$$

$$19.3 \quad \mu = 0 \times 0,03 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,16 + \dots + 6 \times 0,07 = 3,36$$

$$19.4 \quad \sigma = 1,493 \text{ (calculadora)}$$

$$20. \quad \lambda = 2$$

$$20.1.1 \quad P(X = 3) = e^{-2} \times \frac{2^3}{3!} \approx 18,04\%$$

$$20.1.2 \quad P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \times 2 + e^{-2} \times \frac{2^2}{2!} \approx 67,67\%$$

$$20.1.3 \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-2} = 1 - 0,1353 \approx 0,8647 = 86,47\%$$

$$20.1.4 \quad P(X=0) = e^{-2} \approx 0,1353 = 13,53\%$$

$$20.2 \quad E(X) = 2$$

Logo, o número médio são duas requisições por 5 minutos.

21.1 O número médio de requisições num período de 5 minutos, neste caso, é dez. Logo, o número médio de requisições feitas num minuto é: $\frac{10}{5} = 2$.

$$21.2.1 \quad P(X=2) = e^{-2} \times \frac{2^3}{2} \approx 0,2707 = 27,07\%$$

$$21.2.2 \quad P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0,9834 = 1,66\%$$

$$22. \quad \lambda = 2$$

$$22.1 \quad 10\lambda = 20$$

Vinte erros por dez páginas

$$22.2.1 \quad P(X=0) \approx e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} \approx 13,53\%$$

$$22.2.2 \quad P(X \leq 3) = 0,1353 + 0,2706 + 0,2707 + 0,1804 = 85,7\%$$

$$22.2.3 \quad P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0,2707 + 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 = 57,74\%$$

$$22.3 \quad P(X=k) = e^{-2} \times \frac{2^k}{k!}$$

Usando a calculadora, concluímos que são aproximadamente quatro erros.

$$23. \quad 5A + 2V + 13C$$

Estamos perante um modelo geométrico.

$$23.1.1 \quad E(X) = \frac{1}{\frac{5}{20}} = 4$$

$$23.1.2 \quad E(X) = \frac{1}{\frac{2}{20}} = 10$$

$$23.2.1 \quad P(X=3) = \left(1 - \frac{5}{20}\right)^2 \times \frac{5}{20} = 0,1406 = 14,06\%$$

$$23.2.2 \quad P(X=10) = \left(1 - \frac{2}{20}\right)^9 \times \frac{2}{20} = 0,0387 = 3,87\%$$

$$23.2.3 \quad P(X=1) = \left(1 - \frac{13}{20}\right)^0 \times \frac{13}{20} = 0,65 = 65\%$$

24. Estamos perante um modelo binomial em que $p = \frac{1}{6}$.

$$\mathbf{24.1.1} \quad P(X=2) = \frac{8!}{2!6!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 28 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,2605 = 26,05\%$$

$$\mathbf{24.1.2} \quad P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = 0,005$$

$$\mathbf{24.1.3} \quad P(X=0) \approx 23,26\%$$

24.2

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8$	$8 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^7$	$28 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^6$	$56 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$	$70 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4$
x_i	5	6	7	8	
$P(X=x_i)$	$56 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$28 \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$8 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^1$	$\left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{5}{6}\right)^0$	

25. Estamos perante um modelo geométrico em que $p = 0,05$.

$$\mathbf{25.1} \quad P(X=5) = (1-0,05)^4 \times 0,05 \approx 4,07\%$$

$$\mathbf{25.2} \quad E(X) = \frac{1}{0,05} = 20$$

26. O tempo devido varia entre 3 e 15 meses.

$$\mathbf{26.1} \quad E(X) = \frac{15+3}{2} = 9 \text{ meses}$$

$$\mathbf{26.2.1} \quad P(0 < X < 2) = 0$$

$$\mathbf{26.2.2} \quad P(3 < X < 7) = \frac{7-3}{15-3} \approx 33,33\%$$

$$\mathbf{26.2.3} \quad P(8 < X < 12) = \frac{12-8}{15-3} \approx 33,33\%$$

$$\mathbf{26.2.4} \quad P(X > 13) = P(13 < X < 15) = \frac{15-13}{15-3} \approx 16,67\%$$

27. A duração do filme varia entre 70 e 160 minutos.

$$\mathbf{27.1} \quad E(X) = \frac{160+70}{2} = 115 \text{ minutos}$$

$$\mathbf{27.2.1} \quad P(X > 160) = 0$$

$$\mathbf{27.2.2} \quad P(65 < X < 100) = P(70 < X < 100) = \frac{100-70}{160-70} \approx 33,33\%$$

$$\mathbf{27.2.3} \quad P(X < 90) = P(70 < X < 90) = \frac{90-70}{160-70} \approx 22,22\%$$

$$27.2.4 \quad P(110 < X < 120) = \frac{120 - 110}{160 - 70} \approx 11,11\%$$

$$27.2.5 \quad P(X > 120) = P(120 < X < 160) = \frac{160 - 120}{160 - 70} \approx 44,44\%$$

28. Varia entre 93 e 107 metros.

$$28.1 \quad E(X) = \frac{107 + 93}{2} = 100 \text{ metros}$$

$$28.2.1 \quad P(X > 100) = P(100 < X < 107) = \frac{107 - 100}{107 - 93} \approx 50\%$$

$$28.2.2 \quad P(X < 105) = P(93 < X < 105) = \frac{105 - 93}{107 - 93} \approx 85,71\%$$

$$28.2.3 \quad P(97 < X < 103) = \frac{103 - 97}{107 - 93} \approx 42,86\%$$

$$29. \quad E(X) = 0,5$$

$$29.1 \quad \text{Sabemos que: } E(X) = \frac{1}{\lambda}. \text{ Logo: } \frac{1}{\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$29.2.1 \quad P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (e^0 - e^{-2 \times 4}) \approx 0,034\%$$

$$29.2.2 \quad P(3 < X < 5) = e^{-2 \times 3} - e^{-2 \times 5} \approx 0,24\%$$

$$29.2.3 \quad P(X < 3) = P(0 < X < 3) = e^0 - e^{-2 \times 3} \approx 99,75\%$$

$$30. \quad \lambda = 0,4$$

$$30.1 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ anos}$$

$$30.2.1 \quad P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (e^0 - e^{-0,4 \times 3}) \approx 30,12\%$$

$$30.2.2 \quad P(2 < X < 6) = e^{0,4 \times 2} - e^{-0,4 \times 6} = 35,86\%$$

$$30.2.3 \quad P(X < 1) = e^0 - e^{-0,4 \times 1} = 32,97\%$$

$$31. \quad \mu = 25 \quad \sigma = 7$$

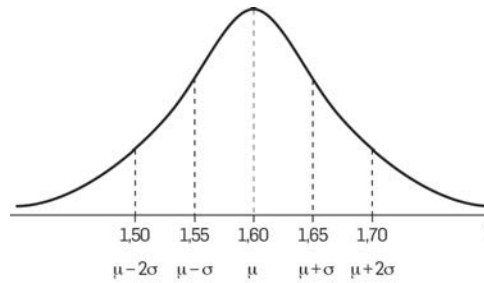
$$31.1 \quad P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \approx 1 - 0,2373 = 76,27\% \text{ (calculadora)}$$

$$31.2 \quad P(X < 3) \approx 0,066\% \text{ (calculadora)}$$

$$31.3 \quad P(X < 28) \approx 66,57\% \text{ (calculadora)}$$

$$31.4 \quad P(15 < X < 30) \approx 68,59\% \text{ (calculadora)}$$

32.1 $\mu = 160$ $\sigma = 5$



$$P(X > 160) = 50\%$$

32.2 $P(1,55 < X < 1,70) = 68,27\% + 13,59\% = 81,86\%$

$$81,86\% \times 280 \approx 229 \text{ alunos}$$

32.2 $P(X < 1,50) = 2,14\% + 0,135\% = 2,275\%$

$$2,275\% \times 280 \approx 6 \text{ alunos}$$

33. $\mu = 670$ $\sigma = 62$

33.1 $P(X > 750) = 0,098$ (calculadora)

$$0,098 \times 2500 \approx 245 \text{ peças}$$

33.2 $P(X < 500) = 0,00305$ (calculadora)

$$0,00305 \times 2500 \approx 8 \text{ peças}$$

33.3 $P(600 < X < 700) = 0,5563$

$$0,5563 \times 2500 \approx 1391 \text{ peças}$$

34. $P(X < 7) \approx 0,2743$

$$P(X > 10) \approx 0,0968$$

34.1 Se $P(X < 7) = 15,865\%$, então, $7 = \mu - \sigma$.

Se $P(X > 10) = 0,135\%$, então, $10 = \mu + 3\sigma$.

Então:

$$\begin{cases} 7 = \mu - \sigma \\ 10 = \mu + 3\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 7 + \sigma \\ 10 = 7 + \sigma + 3\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 7,75 \\ \frac{3}{4} = \sigma \end{cases}$$

Logo, $\mu = 7,75$ e $\sigma = 0,75$

34.2.1 $6,25 = \mu - 2\sigma$ e $10 = \mu + 3\sigma$

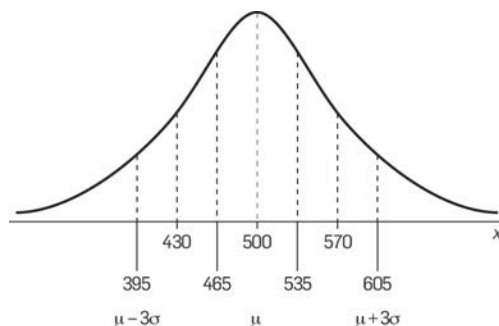
Logo, $P(6,25 < X < 10) = 95,45\% + 2,14\% = 97,59\%$

34.2.2 $P(X < 8,5) = 50\% + 34,135\% = 84,135\%$

$$8,5 = \mu + \sigma$$

35. $\mu = 500 \quad \sigma = 35$

35.1 $P(X > 395) = 100\% - 0,135\% = 99,865\%$



35.2 $P(430 < X < 605) = 95,45\% + 2,14\% = 97,59\%$

$430 = \mu - 2\sigma$ e $605 = \mu + 3\sigma$

35.3 $P(X > 43) = 100\% - 2,14\% - 0,135\% = 97,725\%$

36.1 A probabilidade de uma aplicação financeira no banco Ganha não ter lucro é: $1 - 0,90 = 0,10$.

Assim, em 3500 aplicações, espera-se que 10% não tenham lucro, ou seja, $0,1 \times 3500 = 350$.

36.2 Consideremos os acontecimentos:

L : «ter lucro»

J : «pertencer ao banco Juro»

R : «pertencer ao banco Rende»

G : «pertencer ao banco Ganha»

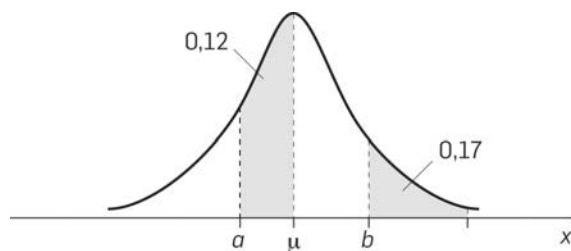
Sabe-se que: $P(L | J) = 0,72$, $P(L | R) = 0,75$ e $P(L | G) = 0,9$

Pretende-se calcular $P(J | L)$:

$$P(J | L) = \frac{P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{P(J | L) \times P(J)}{P(J | L) \times P(J) + P(L | R) \times P(R) + P(L | G) \times P(G)} =$$

$$= \frac{0,72 \times \frac{1}{3}}{0,72 \times \frac{1}{3} + 0,75 \times \frac{1}{3} + 0,9 \times \frac{1}{3}} = \frac{24}{79}$$

36.3



Sabe-se que $P(X > \mu) = 0,5$.

Se $P(X > b) = 0,17$, então, $P(\mu < X < b) = 0,5 - 0,17 = 0,33$

Como $P(a < X < \mu) = 0,12$, então, $P(a < X < b) = 0,12 + 0,33 = 0,45$

Tema 5 | Capítulo 1 – Introdução à inferência estatística

1. Trabalho de pesquisa
2. Composição
 - 3.1 Parâmetro: altura média de um jovem com 17 anos
 - 3.2 Estatística: 165 centímetros

4.1

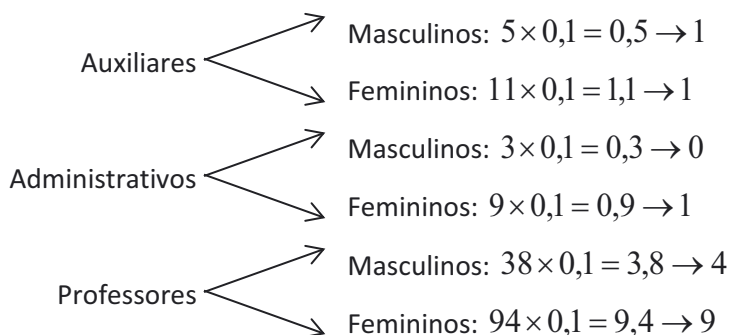
		♂	♀
Auxiliares	16	5	11
Administrativos	12	3	9
Professores	132	38	94
Total	160	46	114

4.2 $\frac{46}{160} \times 100 = 28,5\%$

4.3 $\frac{94}{132} \times 100 = 71,2\%$

4.4.1 $160 \times 0,1 = 16 \rightarrow$ número de elementos da amostra

4.4.2



Farão parte do painel: dois auxiliares, um de cada sexo, um funcionário administrativo do sexo feminino, quatro professores e nove professoras.

5.1 $\mu = \frac{2 + 4 + 6 + 9}{4} = 5,25$ e $\sigma \approx 2,586$ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)

5.2

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
(2, 2)	2	(4, 2)	3	(6, 2)	4	(9, 2)	5,5
(2, 4)	3	(4, 4)	4	(6, 4)	5	(9, 4)	6,5
(2, 6)	4	(4, 6)	5	(6, 6)	6	(9, 6)	7,5
(2, 9)	5,5	(4, 9)	6,5	(6, 9)	7,5	(9, 9)	9

5.3

$\bar{X}$	2	3	4	5	5,5	6	6,5	7,5	9
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

5.4 $E(\bar{X}) = \frac{1}{16}(2 + 6 + 12 + 10 + 11 + 6 + 13 + 15 + 9) = 5,25$

5.5 Como $\mu = E(\bar{X})$, o estimador é não enviesado.

5.6 $\sigma \approx 1,829$ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)

6.1 São $4^3 = 64$ amostras

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
(2, 2, 2)	2	(4, 2, 2)	$\frac{8}{3}$	(6, 2, 2)	$\frac{10}{3}$	(9, 2, 2)	$\frac{13}{3}$
(2, 2, 4)	$\frac{8}{3}$	(4, 4, 2)	$\frac{10}{3}$	(6, 2, 4)	4	(9, 2, 4)	5
(2, 2, 6)	$\frac{10}{3}$	(4, 2, 4)	$\frac{10}{3}$	(6, 4, 2)	4	(9, 4, 2)	5
(2, 2, 9)	$\frac{13}{3}$	(4, 4, 4)	4	(6, 2, 6)	$\frac{14}{3}$	(9, 2, 6)	$\frac{17}{3}$
(2, 4, 2)	$\frac{8}{3}$	(4, 2, 6)	4	(6, 6, 2)	$\frac{14}{3}$	(9, 6, 2)	$\frac{17}{3}$
(2, 6, 2)	$\frac{10}{3}$	(4, 6, 2)	4	(6, 2, 9)	$\frac{17}{3}$	(9, 9, 2)	$\frac{20}{3}$
(2, 9, 2)	$\frac{13}{3}$	(4, 2, 9)	5	(6, 9, 2)	$\frac{17}{3}$	(9, 2, 9)	$\frac{20}{3}$
(2, 4, 4)	$\frac{10}{3}$	(4, 9, 2)	5	(6, 4, 4)	$\frac{14}{3}$	(9, 4, 4)	$\frac{17}{3}$
(2, 6, 6)	$\frac{14}{3}$	(4, 6, 9)	$\frac{19}{3}$	(6, 4, 6)	$\frac{16}{3}$	(9, 4, 6)	$\frac{19}{3}$
(2, 9, 9)	$\frac{20}{3}$	(4, 9, 6)	$\frac{19}{3}$	(6, 6, 4)	$\frac{16}{3}$	(9, 6, 4)	$\frac{19}{3}$
(2, 4, 6)	4	(4, 4, 6)	$\frac{14}{3}$	(6, 4, 9)	$\frac{19}{3}$	(9, 4, 9)	$\frac{22}{3}$
(2, 6, 4)	4	(4, 6, 4)	$\frac{14}{3}$	(6, 9, 4)	$\frac{19}{3}$	(9, 9, 4)	$\frac{22}{3}$
(2, 4, 9)	5	(4, 4, 9)	$\frac{17}{3}$	(6, 6, 6)	6	(9, 6, 8)	7
(2, 9, 4)	5	(4, 9, 4)	$\frac{17}{3}$	(6, 6, 9)	7	(9, 6, 9)	8
(2, 6, 9)	$\frac{17}{3}$	(4, 6, 6)	$\frac{16}{3}$	(6, 9, 6)	7	(9, 9, 6)	8
(2, 9, 6)	$\frac{17}{3}$	(4, 9, 9)	$\frac{22}{3}$	(6, 9, 9)	8	(9, 9, 9)	9

6.2

$\bar{X}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{13}{3}$	$\frac{14}{3}$	5	$\frac{16}{3}$	$\frac{17}{3}$	6	$\frac{19}{3}$	$\frac{20}{3}$	7	$\frac{22}{3}$	8	9
P_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$6.3 \quad E(\bar{X}) = \frac{2}{64} + \frac{8}{64} + \frac{20}{64} + \dots + \frac{24}{64} + \frac{9}{64} = 5,25$$

$$6.4 \quad \sigma \approx 1,493 \text{ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)}$$

6.5 O aumento da amostra provocou uma diminuição do erro-padrão.

$$7. \quad E(\bar{X}) = \mu = 6,5 \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{14}{\sqrt{37}} \approx 2,302$$

8.1 Como a dimensão da amostra é $64 > 30$, o teorema do limite central garante que a distribuição de amostragem da média pode ser modelada por um modelo normal com valor médio de 600 e desvio-padrão igual a $\frac{40}{\sqrt{64}} = 5$.

$$\text{Seja } U \sim (0, 1), \text{ então: } U = \frac{\bar{X} - 600}{5} \Leftrightarrow 5U = \bar{X} - 600 \Leftrightarrow \bar{X} = 5U + 600$$

$$P(\bar{X} > 609,8) = P(5U + 600 > 609,8) = P(U > 1,96) = 1 - P(U \leq 1,96) = 1 - \Phi(1,96) = 1 - 0,9750 = 0,025 = 2,5\%$$

$$8.2 \quad \sigma = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$$

$$U = \frac{\bar{X} - 600}{2} \Leftrightarrow \bar{X} = 2U + 600$$

$$P(597,44 \leq \bar{X} \leq 602,56) = P(597,44 \leq 2U + 600 \leq 602,56) = P(-1,28 \leq U \leq 1,28) = 2 \times \Phi(1,28) - 1 = 2 \times 0,8997 - 1 = 0,7994 = 79,94\%$$

$$8.3 \quad \sigma = \frac{40}{\sqrt{400}} = \frac{40}{20} = 2$$

$$U = \frac{\bar{X} - 600}{2} \Leftrightarrow \bar{X} = 2U + 600$$

$$P(597,44 \leq \bar{X} \leq 602,56) = P(597,44 \leq 2U + 600 \leq 602,56) = P(-1,28 \leq U \leq 1,28) = 2 \times \Phi(1,28) - 1 = 2 \times 0,8997 - 1 = 0,7994 = 79,94\%$$

9.1 1 ano $\approx$ 52 semanas

$$E(\bar{X}) = 750 \text{ €/semana}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{28}{\sqrt{52}} \approx 3,883 \text{ €/semana}$$

9.2.1 $U = \frac{\bar{X} - 750}{3,883} \Leftrightarrow \bar{X} = 3,883U + 750$

$$P(\bar{X} > 740) = P(3,883U + 750 > 740) = P(U > -2,58) = P(U \leq 2,58) = 0,9951 \rightarrow 99,51\%$$

9.2.2 $P(745 \leq \bar{X} \leq 760) = P\left(-\frac{5}{3,883} \leq U \leq \frac{10}{3,883}\right) = P(-1,288 \leq U \leq 2,575) =$
 $= \Phi(2,58) - 1 + \Phi(1,29) = 0,9951 - 1 + 0,9015 = 0,8966 \rightarrow 89,66\%$

9.3 $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,5) = P\left(|U| \leq \frac{5}{3,883}\right) \approx P(|U| \leq 0,13) = 2\Phi(0,13) - 1 = 2 \times 0,5517 - 1 =$
 $= 0,1034 \rightarrow 10,34\%$

10.1 $\lambda = E(\bar{X}) = \frac{22+24+30+24+10}{90} \approx 1,22$

10.2 $s \approx 1,381$ (calculadora)

$$\text{Erro-padrão} = \frac{1,381}{\sqrt{90}} \approx 0,146$$

11. $\bar{x} = 1,63$ $s = 0,2$

11.1 O intervalo de confiança para o valor médio μ é da forma:

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

No caso do intervalo de confiança de 90%, $z = 1,645$, de onde:

$$\left[1,63 - 1,645 \times \frac{0,2}{\sqrt{150}}; 1,63 + 1,645 \times \frac{0,2}{\sqrt{150}} \right] =]1,60; 1,66[$$

11.2 A amplitude do intervalo aumentaria porque, à medida que o grau de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

11.3 A amplitude do intervalo diminuiria porque, à medida que a dimensão da amostra aumenta, a amplitude do intervalo diminui.

12. Sabe-se que: $\hat{p} = 0,25$ e $n = 50$

Como $n > 30$, a distribuição é aproximadamente normal com $\mu = 0,25$ e

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}} = 0,061.$$

13. $n = 50$ $\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4$

O intervalo de 95% de confiança para a proporção é da forma:

$$\left[0,4 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{50}}; 0,4 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{50}} \right] =]0,26; 0,54[$$

14.1 Proporção de alunos que pretendem candidatar-se.

14.2 $\hat{p} = 80\%$ $n = 75$

Intervalo de confiança de 99% para a proporção:

$$\left[0,8 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{75}}; 0,8 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{75}} \right] =]0,68; 0,92[$$

14.3 Com uma confiança de 99%, podemos dizer que a proporção de alunos que pretendem candidatar-se varia entre os 68% e os 92%.

15. $n = 200$ $\bar{x} = 25$ $s = 10$

15.1 Intervalo de confiança de 95% para μ :

$$\left[25 - 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{200}}; 25 + 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{200}} \right] =]23,61; 26,39[$$

15.2 $\hat{p} = \frac{170}{200} = 0,85$

Intervalo de confiança de 90% para a proporção:

$$\left[0,85 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{200}}; 0,85 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{200}} \right] =]0,81; 0,89[$$

15.3 Com uma confiança de 90%, podemos dizer que a proporção de indivíduos que faz as suas compras no hipermercado varia entre os 81% e os 89%.

16. $\hat{p} = 45\%$ $\varepsilon = 2\%$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times 0,45 \times (1 - 0,45) \approx 2377$$

17. $\sigma = 2$ $n = 60$ $\bar{x} = 97$

17.1 Intervalo de confiança de 90% para μ :

$$\left[97 - 1,645 \times \frac{2}{\sqrt{60}}; 97 + 1,645 \times \frac{2}{\sqrt{60}} \right] =]96,58; 97,42[$$

A marca de bebida deve ser processada porque, com uma confiança de 90%, podemos dizer que a média da capacidade de cada garrafa varia entre 96,58 e 97,42 centilitros.

17.2 $\varepsilon = 0,02$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96 \times 2}{0,02} \right)^2 = 38\,416$$

18. Amplitude: 10

Logo, o erro será: $\varepsilon = 5$

Nível de confiança: 90%

$$\sigma = 15$$

$$n = \left(\frac{1,645 \times 15}{5} \right)^2 = 24,35$$

Devem ser estudados, pelo menos, 25 alunos.

19. $\sigma = 0,3$ $n = 35$ $\bar{x} = 4,8$

19.1 Intervalo de 99% de confiança para μ :

$$\left[4,8 - 2,576 \times \frac{0,3}{\sqrt{35}}; 4,8 + 2,576 \times \frac{0,3}{\sqrt{35}} \right] =]4,67; 4,93[$$

19.2 $\varepsilon < 0,1$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96 \times 0,3}{0,1} \right)^2 = 34,57$$

O número de observações deverá ser, pelo menos, 35.

20. Trabalho de pesquisa

21. Sabemos que: $n = 200$; $\bar{x} = 30,2$ e $s = 3,4$

O intervalo de confiança para o número de horas que os encartados dedicaram à preparação do exame de condução é dado por:

$$\left[30,2 - 1,96 \times \frac{3,4}{\sqrt{200}}; 30,2 + 1,96 \times \frac{3,4}{\sqrt{200}} \right] =]29,7; 30,7[$$

Grafos

Representação de relações entre objetos

Em matemática já estudou muitos tipos de relações entre objetos, para muitos tipos de objetos (números, variáveis, conjuntos...) e com muitos tipos de relações (operações, igualdades e desigualdades, pertença, inclusão...).

Criar modelos, esquemas e estruturas matemáticas capazes de representar problemas, tornando-os de mais fácil interpretação e resolução, é algo que com certeza também já teve a oportunidade de aprender, por exemplo, na teoria da partilha equilibrada e nos modelos financeiros.

Contudo, haverá, ainda, muitos mais tipos de situações em que a matemática, sempre com o rigor científico que a caracteriza, se mune de ferramentas capazes de representar situações/problemas reais, do dia a dia ou não, como, por exemplo, perceber as relações entre pessoas, em particular nas redes sociais. Este tipo de análise terá, com certeza, extrema importância para grandes empresas, como a Google, o Facebook, o Instagram, o LinkedIn, e poderá ser levada a cabo por engenheiros e/ou psicólogos, ou ainda outros quaisquer profissionais.

O problema que lhe é colocado de seguida tem como objetivo lançar-lhe o desafio de construir, em discussão com os seus colegas e o seu professor, uma estrutura matemática capaz de representar relações entre objetos, neste caso, pessoas, e que permita resolver problemas com rigor científico.

RELAÇÕES DE AMIZADE NO FACEBOOK

Considere que cinco colegas de uma mesma turma, a Ana, o Baltasar, o Carlos, a Dina e a Elisa, têm conta na rede social *Facebook*.

Relativamente às amizades facebookianas entre eles, sabe-se que: a Ana é amiga do Carlos e da Elisa; o Baltasar é amigo do Carlos e da Dina; a Dina é amiga do Baltasar e da Elisa.

Primeiro desafio

1. Esboce uma estrutura/esquema que possa traduzir, com rigor e simplicidade, as relações de amizade no *Facebook* entre estes colegas.
2. Verifique se é possível simplificar ainda mais o esquema que construiu. Por exemplo, retirando dados supérfluos e/ou repetidos, reorganizando a configuração do esquema, minimizando/abreviando a escrita ou escolhendo outros elementos matemáticos mais simples para representar os alunos e as relações.

Nota: No *Facebook* as amizades são recíprocas, isto é, se a Dina é amiga da Elisa, também a Elisa é amiga da Dina.

Apresente o seu esquema final.

3. Compare agora a sua proposta com as propostas dos seus colegas de turma. Existem elementos/características em comum? Quais?
4. Após a turma chegar a um consenso quanto à «melhor» estrutura/esquema que representa esta situação, reproduza-la.
 - 4.1 Que objeto matemático é usado para representar cada um dos cinco colegas?
 - 4.2 E para representar as relações de amizade?
5. Acreditando que encontraram um esquema/estrutura, senão igual, pelo menos semelhante ao que os matemáticos, e não só, utilizam, falta agora atribuir-lhe um nome. Como os nomes «não se discutem», só temos de saber qual é, e usá-lo.

Grafo é o nome deste tipo de estruturas, e **teoria de grafos** é o conjunto de designações, leis, regras, propriedades, etc. que usamos com grafos.

Segundo desafio

Considere a seguinte situação real.

Voos sem custo inter-ilhas nos Açores

Desde o dia 29 de março de 2015 que as rotas entre Lisboa, Porto ou qualquer outro aeroporto em território continental para as ilhas de São Miguel e Terceira se encontram em livre concorrência. Além da TAP e da SATA, que já operavam estas ligações desde Lisboa, começaram igualmente a voar entre Lisboa e Ponta Delgada as companhias aéreas *low cost* Easyjet e Ryanair. Mas se o destino final for qualquer uma das outras ilhas do arquipélago, como Santa Maria, Corvo, Flores, Horta, Pico, Graciosa ou São Jorge, só se pagará a passagem aérea do voo respeitante à ligação entre Portugal e Ponta Delgada/Terceira.



Retirado de www.viagenseferias.net

Sabe-se que existem voos entre as seguintes ilhas do arquipélago dos Açores: Ponta Delgada com todas as outras, exceto Corvo; Terceira com todas as outras, exceto Santa Maria; Faial com Pico, Flores, Corvo e São Jorge.

1. Represente por um grafo as rotas existentes entre as ilhas do arquipélago dos Açores.
2. Indique uma possível utilização real do grafo que acabou de construir.
3. Para decidir, por exemplo, qual a melhor viagem/rota para chegar a uma dada ilha, que fatores consideraria? Necessitaria de mais informações? Em caso afirmativo indique quais.

Terceiro desafio

Como em qualquer teoria, é importante atribuir designações aos objetos e às relações, e definir conceitos em função de propriedades. Vários são os termos/designações usados na teoria de grafos e nada melhor do que os ir conhecendo/construindo aos poucos.

Assim, propomos-lhe o seguinte exercício.

1. Com base no exemplo das amizades no *Facebook*, proponha uma designação para cada objeto, relação, característica, propriedade, listados abaixo.

Nota: De certa forma, um grafo assemelha-se a um polígono, por isso, poderão existir termos comuns.

- Os **pontos** que compõe o grafo (os amigos).
 - As **linhas** que unem os pontos (as relações de amizade).
 - O **número de linhas** que incide **num ponto** (número de amigos).
 - **Dois pontos** que se encontram **ligados** (dois amigos).
 - Um **ponto** que **não está ligado** a nenhum outro ponto (um aluno sem amigos).
 - **Dois pontos** que se encontram **ligados** (dois amigos).
 - **Uma linha** que **liga um ponto a si mesmo**.
 - Um **ponto** que **apenas está ligado a outro ponto** (um aluno só com um amigo).
2. Antes de confirmar se as suas propostas de designação são aquelas que se encontram definidas na teoria de grafos, isto porque «quem chegou primeiro» pode ter-lhes dado outro nome, indique, se possível, o que representa cada designação abaixo na situação dos «Voos sem custo inter-ilhas nos Açores».
- Os **pontos** que compõe o grafo.
 - As **linhas** que unem os pontos.
 - O **número de linhas** que incide **num ponto**.
 - **Dois pontos** que se encontram **ligados**.
 - Um **ponto** que **não está ligado** a nenhum outro ponto.
 - **Dois pontos** que se encontram **ligados**.
 - **Uma linha** que **liga um ponto a si mesmo**.
 - Um **ponto** que **apenas está ligado a outro ponto**.

3. As designações usadas na teoria de grafos, e anteriormente descritas, são, por ordem alfabética: aresta, arestas paralelas, grau do vértice, lacete, vértice, vértice isolado, vértice terminal, vértices adjacentes.

Associe, então, agora, os termos corretos, confirmando ou retificando as designações que propôs.

Nota: Verifique no Manual as definições cientificamente corretas.

Quarto desafio

Discuta com a sua turma, e com a ajuda do seu professor, que tipo de situações problemáticas, nos dois contextos apresentados, poderá a teoria de grafos ajudar a resolver. Que outros tipos de problemas reais poderão ser passíveis da aplicação da teoria de grafos?

Modelo exponencial

Mensagem em cadeia

Nos dias de hoje é habitual recebermos, por SMS ou por *email*, mensagens que apelam ao seu reenvio a um certo número de pessoas. Para convencer o recetor a efetuar esse reenvio, é usado um texto escrito com muito cuidado, genérico e convincente, prometendo-se benefícios pessoais (monetários ou de bem-estar social) ou, recorrendo à emotividade humana, apontando o benefício de causas sociais (angariação de fundos para instituições de caridade, de liga contra o cancro, de acolhimento de crianças abandonadas, etc.).

Quanto a estes dois tipos de mensagens em cadeia, deveremos sempre questionar-nos: «Alguém dá alguma coisa a alguém?»; «Se nos quisessem dar alguma coisa, davam e pronto!»; «Para que existem as entidades de solidariedade social?»; «Já não contribuímos nós com os nossos impostos?».

Este mesmo sistema de propagação em cadeia é também usado na transmissão de vírus entre os computadores. Existem vírus informáticos que se encontram instalados em computadores, embora em estado de «hibernação», mas que, quando o computador é ligado à internet e é ativado um *software* de *pop-mail*, por exemplo, o *Outlook* da *MicroSoft*, ele «acorda» e faz com que sejam enviadas mensagens infetadas com vírus aos primeiros dez ou até a todos os endereços da conta de *email* do utilizador do computador. E assim, de forma extremamente rápida, consegue infetar um elevado número de computadores.

Nesta atividade, pretende-se, além de alertar para estas situações fraudulentas, encontrar um modelo matemático que melhor descreva esta situação.

Vejamos dois tipos de mensagens:

Mensagem SMS	Mensagem de <i>email</i>
«Olá, a TLM hoje faz anos por isso estamos a oferecer 10 euros pra quem enviar esta msg pra 15 pessoas e de imediato logo recibes. Eu fiz e deu resultado.»	«Caras amigas e amigos, Digam a 10 amigos para dizerem a 10 amigos hoje! A Ajuda Desde Cedo, que acolhe crianças dos 0 aos 3 anos, necessita da nossa ajuda. É um <i>site</i> que vive da publicidade que faz e são as empresas que o patrocinam que ajudam esta associação. Só temos de mostrar que visitámos o <i>site</i> em questão. Demora menos de um segundo a ir ao <i>site</i> e clicar no botão "UM COLO PARA CADA CRIANÇA": www.ajudadesdecedo.org . PASSEM A 10 AMIGOS, PARA PASSAREM A OUTROS 10 AMIGOS.»

1. Leia com atenção as duas mensagens anteriores e, após discutir com os seus colegas, apresente características, de cada uma delas, que reflitam o seu carácter generalista e convincente, mas também que apontem para o seu carácter fraudulento.

Atentemos, agora, apenas na mensagem de SMS.

2. Suponhamos que a Ana Paula recebeu esta mensagem e decidiu participar nesta cadeia. É claro que ela não tem forma de saber quantas mensagens já foram enviadas antes da dela. Quando ela enviar a sua mensagem, quantas pessoas tem ela a certeza de terem recebido esta mensagem?
3. Suponhamos que nenhum dos 15 amigos da Ana Paula, a quem ela enviou a mensagem, quebrou a cadeia. Quantas mensagens foram, no total, enviadas por estes 15 amigos? Consideremos esta a segunda etapa da cadeia, e a primeira etapa terá sido aquela em que a Ana Paula enviou as 15 mensagens. Quantas mensagens já foram enviadas, ao todo?
4. Na terceira etapa da cadeia, nenhum dos 15 amigos dos 15 amigos da Ana Paula quebraram a cadeia. Quantas mensagens foram enviadas na terceira etapa? E no total, desde a mensagem recebida pela Ana Paula?
5. Em cada uma das etapas consideradas nas questões anteriores, o que pode afirmar acerca do número de utilizadores de telemóvel que receberam a SMS, comparando com o número de mensagens enviadas? Justifique.
6. Supondo que esta cadeia não é quebrada por nenhuma das pessoas que recebe a mensagem e que não há repetição de números de telemóvel, complete a tabela seguinte:

Etapa	N.º de SMS enviadas nesta etapa	N.º total de SMS já enviadas	Valor total oferecido pela TLM nesta etapa	Valor total oferecido pela TLM na cadeia	Valor total recebido pela TLM (custo médio de SMS: 0,10 €)	Custo desta cadeia para a TLM
0	1	1	0 €	0 €	0,1 €	-0,1 €
1	15	15 + 1	10 €	10 €	1,6 €	8,4 €
2	15 × 15					
3						
4						
5						
6						
7						

7. Compare o número total de SMS enviadas na sétima etapa com o número de habitantes em Portugal. Que comentário se poderá fazer?

8. Atente agora no custo que teria, para a TLM, esta cadeia ao fim da sétima etapa. O que lhe parece? Tendo em atenção que esta oferta era apenas para o dia de hoje, e que, portanto, esta despesa da TLM se refere a apenas um dia, compare esta forma de «publicidade» com outras, por exemplo em jornais, na televisão, na rádio, etc.
(Sugestão: Investigue, na internet, preços de publicidade.)
9. Os números da segunda coluna da tabela anterior constituem uma progressão geométrica. Qual a regra que é seguida para obter um número a partir do seu anterior?
10. Introduza nas listas 1 e 2 da sua calculadora, respetivamente, os dados da coluna «Etapa» e da coluna «N.º de SMS enviadas nesta etapa». Desenhe o diagrama de dispersão definido pelas duas listas (XList: L1 e YList: L2) e obtenha o melhor modelo matemático para os dados. O modelo que se obteve chama-se modelo exponencial.
11. Após um exaustivo estudo, a ANACOM conclui que, numa situação destas, em cada etapa, 60% dos indivíduos quebram a cadeia. Apresente razões que possam originar esta quebra. Qual seria, então, o modelo para o «N.º de SMS enviadas nesta etapa»? E em que etapa o «N.º total de SMS já enviadas» atingiria o limite da razoabilidade? Justifique.

Modelo logístico

Povoação de coelhos

Um grupo de biólogos, povoou uma ilha com 100 coelhos, espécie inexistente até então nesse local. As condições de reprodução da espécie eram ótimas, embora a ilha tivesse dimensões reduzidas. Durante um ano, os biólogos observaram o crescimento dessa população e registaram-no na tabela abaixo.

Tempo (em meses)	N.º de coelhos
0	100
1	110
2	121
3	133
4	146
5	161
6	177
7	195
8	214
9	236
10	260
11	285
12	314

1. Recorrendo à calculadora gráfica, represente o diagrama de dispersão. Averigue que modelo matemático se ajusta ao conjunto de pontos obtidos.
2. Faça uma previsão para o número de coelhos existentes sete anos após o povoamento da ilha. Comente a razoabilidade do resultado obtido.
3. Dois anos após o povoamento, os biólogos decidiram voltar à ilha e controlar a população de coelhos. Efetuaram, então, o registo do número de coelhos durante seis meses consecutivos e posteriormente de seis em seis meses, conforme a tabela abaixo.

Tempo (em meses)	N.º de coelhos
24	513
25	527
26	535
27	547
28	557
29	564
35	592
41	605
47	611

Fazendo uso das potencialidades gráficas da calculadora, investigue se o modelo determinado anteriormente se ajusta a estes novos dados.

4. Com base na representação gráfica de todos os dados recolhidos pelos biólogos, descreva o crescimento da população de coelhos com o passar do tempo.
5. Investigue, experimentando, no menu das regressões da calculadora gráfica, o modelo que melhor se ajusta aos dados.
6. Determine, agora, o número de coelhos existentes sete anos após o povoamento da ilha. Compare-o com o valor obtido na questão 2.
7. Descreva as principais diferenças entre o modelo que selecionou na questão 1 e aquele que encontrou na questão 5.
8. O modelo populacional que descreve este tipo de situações designa-se por modelo logístico. Elabore um esboço do gráfico de um modelo logístico, destacando nele as suas principais características.

Modelo geométrico

Jogo «Cor e Número»

Na escola do João, a Associação de Estudantes inventou um jogo de apostas denominado «Cor e Número». Neste jogo, cada apostador seleciona, colocando um X, uma cor, entre quatro possíveis, e um número, entre dois possíveis.

Para o sorteio, que se realiza todas as sextas-feiras na sede da Associação de Estudantes, utilizam-se duas caixas. Uma caixa contém uma bola cor de laranja, uma bola amarela, uma bola verde e uma bola castanha. A outra caixa contém uma bola com o número 1 e uma bola com o número 2. Todas as bolas são indistinguíveis ao tato.

O João joga todas as semanas no «Cor e Número» com a chave «laranja (L); 1».



Vamos agora explorar esta situação e tentar caracterizar o modelo de probabilidade subjacente a este tipo de problemas aleatórios.

1. Quantos alunos, no mínimo, necessitam de jogar no «Cor e Número» para garantir que o prémio sai a alguém? Esse número mínimo está condicionado pelas apostas dos alunos que jogaram? Porquê?
2. Qual a probabilidade de o João acertar na chave do «Cor e Número» na primeira semana? E na segunda semana? E na terceira? O que se pode concluir?
3. Qual a probabilidade de o João ter de jogar duas semanas para acertar?
4. Considere-se a variável aleatória X = «número de semanas que tem de jogar até acertar pela primeira vez». Calcule a probabilidade para $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ e $X = 6$. Complete a tabela seguinte:

k N.º de semanas a jogar até acertar	1	2	3	...	10	...	n	...
$P(X = k)$				...		...		...

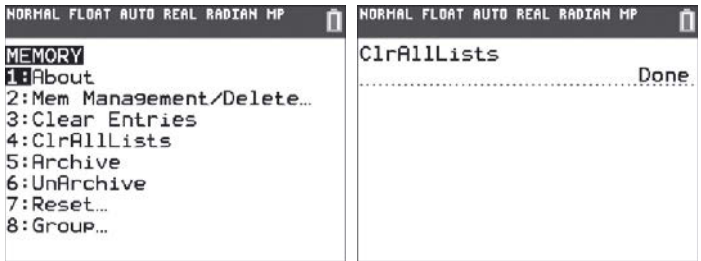
5. Para este modelo de probabilidade, indique a expressão que define $P(X = k)$.

Este é um modelo infinito, já que o suporte da variável aleatória é o conjunto dos números naturais, isto é, $\mathbb{N}$. Por isso, vamos recorrer ao auxílio da tecnologia para obtermos as principais medidas deste modelo.

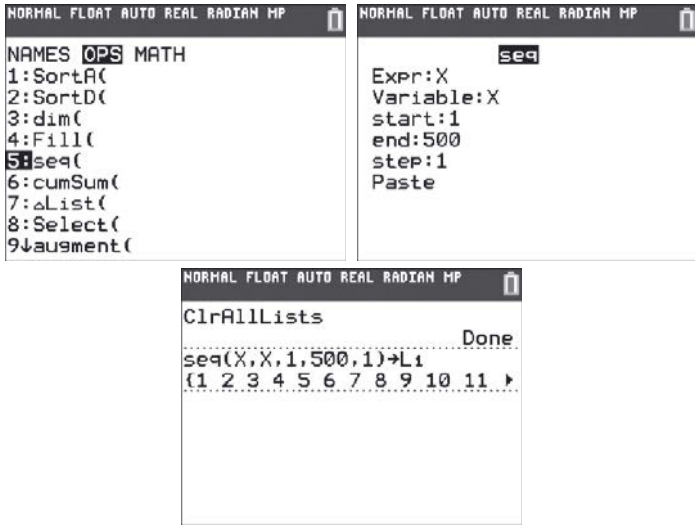
- Use o menu de Estatística da calculadora para construir, nas listas L1 e L2, uma tabela com a distribuição de probabilidade da variável aleatória X , para $k = 1, \dots, 500$.

Orientações para a TI-84 Plus

- Limpar todas as listas:

Sequência de teclas	Sequência de ecrãs
2nd + 4 ENTER	

- Inserir na lista L1 os valores da variável aleatória X :

Sequência de teclas	Sequência de ecrãs
2nd STAT > 5 X,T,θ,n , X,T,θ,n , 1 , 5 0 0) STO> 2nd 1 ENTER	

- Inserir na lista L2 os valores da probabilidade $P(X = k)$:

Sequência de teclas	Sequência de ecrãs																																																																																																																																				
STAT ENTER ^ ENTER (1 - 1 ÷ 8) ^ 2nd 1 × (1 ÷ 8) ENTER	NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP EDIT CALC TESTS 1:Edit... 2:SortA(3:SortD(4:ClrList 5:SetUpEditor <table><thead><tr><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th><th>L4</th><th>L5</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> L2="(7/8)^{L1}×(1/8) NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP <table><thead><tr><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th><th>L4</th><th>L5</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><td>491</td><td>4E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>492</td><td>4E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>493</td><td>3E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>494</td><td>3E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>495</td><td>2E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>496</td><td>2E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>497</td><td>2E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>498</td><td>2E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>499</td><td>1E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>500</td><td>1E-30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> L2(500)= 1.2616431212341E-30	L1	L2	L3	L4	L5	2	1						2						3						4						5						6						7						8						9						10						L1	L2	L3	L4	L5	2	491	4E-30					492	4E-30					493	3E-30					494	3E-30					495	2E-30					496	2E-30					497	2E-30					498	2E-30					499	1E-30					500	1E-30				
L1	L2	L3	L4	L5	2																																																																																																																																
1																																																																																																																																					
2																																																																																																																																					
3																																																																																																																																					
4																																																																																																																																					
5																																																																																																																																					
6																																																																																																																																					
7																																																																																																																																					
8																																																																																																																																					
9																																																																																																																																					
10																																																																																																																																					
L1	L2	L3	L4	L5	2																																																																																																																																
491	4E-30																																																																																																																																				
492	4E-30																																																																																																																																				
493	3E-30																																																																																																																																				
494	3E-30																																																																																																																																				
495	2E-30																																																																																																																																				
496	2E-30																																																																																																																																				
497	2E-30																																																																																																																																				
498	2E-30																																																																																																																																				
499	1E-30																																																																																																																																				
500	1E-30																																																																																																																																				

- Usando os valores das listas L1 e L2, indique $P(X = 100)$, $P(X = 400)$ e para que valor tende $P(X = k)$ quando k tende para infinito.
- Através do menu Estatística da calculadora, determine os valores que espera obter para o valor médio, μ_X , a variância, $\text{Var}(X)$ e o desvio-padrão, σ_X , da distribuição.

Orientações para a TI-84 Plus

- Cálculo das medidas estatísticas de uma distribuição:

Sequência de teclas	Sequência de ecrãs
STAT > ENTER 2nd 1 , 2nd 2 ENTER	NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP EDIT CALC TESTS 1:1-Var Stats 2:2-Var Stats 3:Med-Med 4:LinReg(ax+b) 5:QuadReg 6:CubicReg 7:QuartReg 8:LinReg(a+bx) 9:LnReg NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP 1-Var Stats L1,L2 Done NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP 1-Var Stats List:L1 FreqList:L2 Calculate NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP 1-Var Stats $\bar{x}=8$ $\Sigma x=7$ $\Sigma x^2=105$ $Sx=$ $\sigma x=7.483314774$ $n=.875$ $\min X=1$ $\downarrow Q1=3$

- Sabendo que o João paga por cada aposta semanal 0,10 € e tendo em atenção o valor esperado da distribuição, indique qual será o gasto previsto até acertar na chave.

10. Para obter lucro, qual deverá ser o valor máximo que a Associação de Estudantes deve definir como prémio para cada vencedor do «Cor e Número»? Justifique, apresentando os cálculos efetuados.
11. Para o jogo «Cor e Número», e tendo em atenção os valores obtidos nas questões anteriores, complete a tabela abaixo:

Significado	Prob. de sucesso	Prob. de insucesso	Valor médio	Variância
Símbolo	p	q (ou $1 - p$)	μ_x	$\text{Var}(X)$ (ou σ_x^2)
Valor				

- 11.1 Que relação existe entre p e μ_x ?
- 11.2 E entre q , p^2 e $\text{Var}(X)$?
12. O modelo discreto que acabou de caracterizar denomina-se modelo geométrico, e utiliza-se quando queremos saber qual é a probabilidade de que sejam necessárias k experiências para que o acontecimento ocorra, com sucesso, pela primeira vez.

O **modelo geométrico** é dado por:

$$P(X = k) = \underline{\hspace{2cm}}$$

onde p é a probabilidade de $\underline{\hspace{2cm}}$ e $(1 - p)$ é a probabilidade de $\underline{\hspace{2cm}}$.

No modelo geométrico, o valor médio e a variância são, em função da probabilidade de sucesso, respetivamente:

$$\mu_x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Var}(X) = \underline{\hspace{2cm}}$$

13. O modelo geométrico também se aplica à variável aleatória Y = «número de sorteios que é necessário jogar no Euromilhões até acertar pela primeira vez».
- Sabendo que existem ${}^{50}C_5 \times {}^{11}C_2^*$, isto é, 116 531 800, chaves diferentes do Euromilhões, calcule:
- 13.1 Qual a probabilidade de sucesso (acertar) quando se aposta, num mesmo sorteio, com duas chaves diferentes.
- 13.2 Qual o valor médio para a variável aleatória Y ? O que significa esse valor em semanas? E em anos?

* ${}^{50}C_5$ – Lê-se combinações de 50, 5 a 5 e dá-nos, neste caso, o número de combinações possíveis na escolha de cinco números de um conjunto com 50 números. Para obter este valor, pode recorrer-se ao menu MATH, submenu PROB e opção 3:nCr.

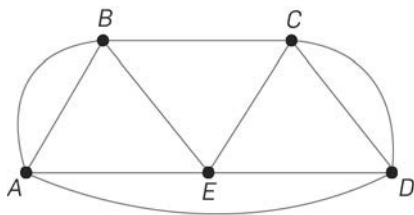
Ficha de trabalho 1

Nome _____ Turma _____ N.º _____

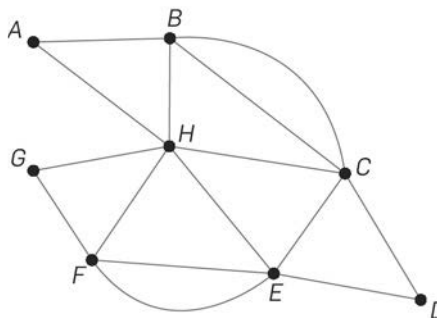
Grafos: trajetos, caminhos e circuitos

1. Indique quais dos grafos que se seguem têm um trajeto e quais têm um circuito euleriano e defina-os. Caso não tenham nenhum deles, explique porquê.

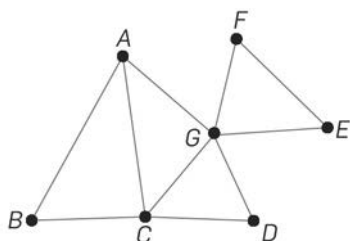
1.1



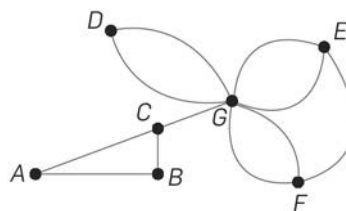
1.2



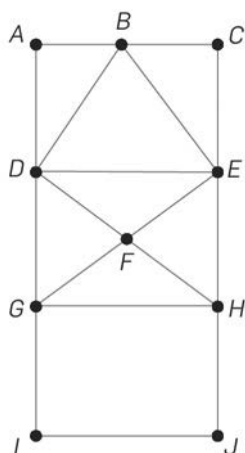
1.3



1.4



2. No grafo abaixo, os vértices representam os cruzamentos e as arestas representam as estradas de uma cidade. Um inspetor de estradas pretende fazer a sua ronda passando por todas as estradas uma única vez.



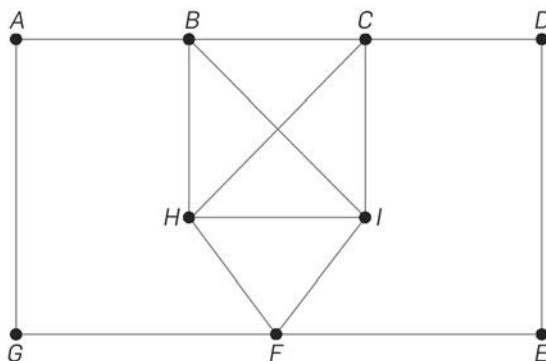
- 2.1 Será possível que o inspetor inicie o seu percurso em B e inspecione todas as estradas uma única vez? Justifique.
- 2.2 Encontre um percurso em que sejam inspecionadas todas as estradas e se repita o menor número de estradas possível. O ponto de partida e de chegada é B .
- 2.3 E se iniciar o percurso em A , o número de estradas que se repetem é o mesmo? Indique qual o percurso encontrado.

Ficha de trabalho 2

Nome _____ Turma _____ N.º _____

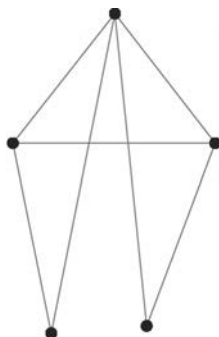
Problema do carteiro chinês. Eulerização

1. Um pintor de estradas tem de pintar, a traço interrompido, todas as ruas de uma certa localidade. O grafo seguinte, onde os vértices representam as esquinas e as arestas representam as ruas, serve de modelo para esta situação:

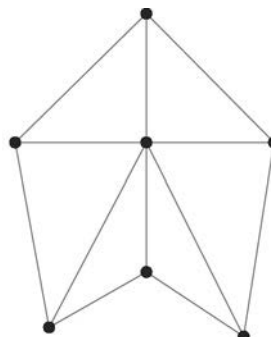


- 1.1 Será possível pintar todas as estradas sem repetir nenhuma rua e regressar ao ponto de partida? Justifique.
- 1.2 Qual será, nesse caso, o percurso a seguir pelo pintor?
2. Para cada um dos grafos seguintes:

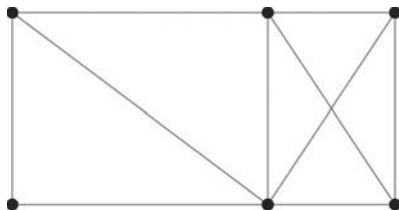
I



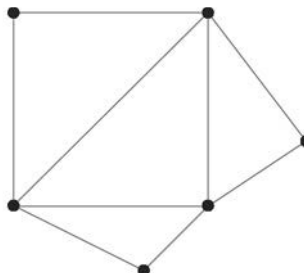
II



III

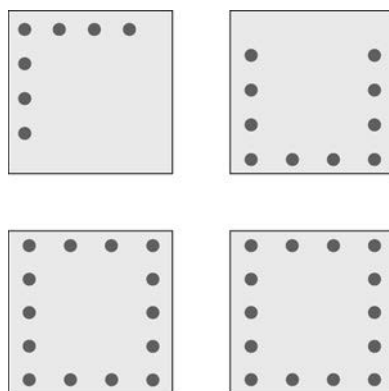


IV



- 2.1 Verifique se têm circuitos eulerianos.
- 2.2 Naqueles em que não existir um circuito euleriano, encontre uma boa eulerização.

3. A figura abaixo representa um esquema com ruas de uma cidade, onde os pontos representam parquímetros.



Desenhe um grafo orientado que possa auxiliar o funcionário que vai recolher as moedas de todos os parquímetros.

4. Numa aldeia, há cinco rapazes enamorados de cinco raparigas casadoiras. A tabela seguinte indica as preferências de cada rapaz em relação às raparigas:

Rapaz (H)	Rapariga (M)
1	2, 3, 5
2	2, 4
3	1, 3, 5
4	1, 2, 5
5	2, 4

4.1 Represente por um grafo as preferências de cada rapaz.

4.2 Encontre uma forma de casar cada um dos cinco rapazes com cada uma das cinco raparigas.

5. Nas mesmas condições do exercício anterior, consideremos também as preferências de cada rapariga em relação aos rapazes:

Rapariga (M)	Rapaz (H)
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	1, 5
4	2, 5
5	1, 3, 4

5.1 Represente por um grafo as preferências conjuntas dos rapazes e das raparigas.

5.2 Junte agora os casais tendo em conta as duplas preferências.

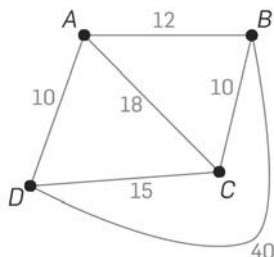
Ficha de trabalho 3

Nome _____ Turma _____ N.º _____

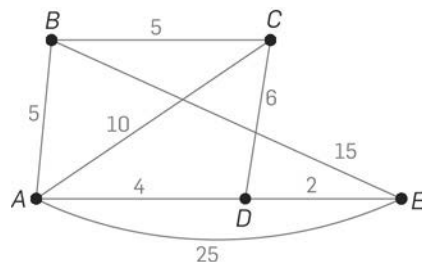
Circuitos hamiltonianos. Problema do caixeiro-viajante

1. Considere os grafos que se seguem:

I



II



- 1.1 Verifique se existem circuitos hamiltonianos começando em A e, em caso afirmativo, indique um.
- 1.2 Recorrendo ao algoritmo do vizinho mais próximo, determine o percurso que se obtém começando e terminando em A.
- 1.3 Utilize agora o algoritmo por ordenação do peso das arestas para encontrar um percurso mínimo.
2. Uma empresa de venda de material informático tem o seu armazém no ponto X e pretende entregar materiais em H, passando primeiro por A para deixar algum material. A tabela que se segue representa a rede viária da região que o representante da empresa tem de visitar, com os respetivos tempos de percurso.

	A	B	C	D	E	F	G	H	X
A	–	10	15	25					
B	10	–		17	12	21			
C	15		–	40				21	
D	25	17	40	–			5		20
E		12			–	8			19
F		21			8	–	14	23	18
G				5		14	–	16	
H			21			23	16	–	19
X				20	19	18		19	–

- 2.1 Represente a informação contida na tabela através de um grafo.
- 2.2 Determine dois caminhos diferentes começando em X, terminando em H e passando por todos os outros pontos.
- 2.3 Determine, recorrendo ao algoritmo do vizinho mais próximo, o percurso que deve ser seguido pelo representante de modo a minimizar o tempo decorrido desde que sai de X até que regresse.
- 2.4 Determine o mesmo percurso usando o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

3. O Joaquim, que adora futebol, pretende visitar todos os estádios inaugurados em 2004 para o Euro. A tabela que se segue contém as distâncias/tempo aproximadas entre as cidades dos respetivos estádios:

	Braga	Guimarães	Porto	Aveiro	Coimbra	Leiria	Lisboa
Guimarães	20 km 0 : 15						
Porto	55 km 0 : 35	50 km 0 : 30					
Aveiro	125 km 1 : 15	120 km 1 : 10	75 km 0 : 50				
Coimbra	170 km 1 : 35	160 km 1 : 30	120 km 1 : 05	60 km 0 : 40			
Leiria	230 km 2 : 05	225 km 2 : 00	180 km 1 : 40	115 km 1 : 10	65 km 0 : 35		
Lisboa	360 km 3 : 20	335 km 3 : 15	310 km 2 : 50	250 km 2 : 20	200 km 1 : 50	135 km 1 : 15	
Faro/Loulé	580 km 5 : 20	555 km 5 : 15	530 km 4 : 50	470 km 4 : 20	415 km 3 : 50	360 km 3 : 20	260 km 2 : 30

in <http://www.cm-braga.com.pt/euro2004>

3.1 Relativamente às distâncias contidas na tabela:

- 3.1.1 Represente por meio de um grafo a informação relativa às distâncias contida na tabela.
- 3.1.2 Começando em Aveiro, encontre três circuitos hamiltonianos diferentes e calcule o comprimento de cada um.
- 3.1.3 Começando agora em Coimbra, encontre três circuitos hamiltonianos diferentes e calcule o comprimento de cada um.
- 3.1.4 Compare os resultados obtidos nos itens 3.1.2 e 3.1.3.
- 3.1.5 Usando o algoritmo do vizinho mais próximo, determine o percurso que se obtém partindo de Aveiro. Qual é o seu comprimento?
- 3.1.6 Utilize o algoritmo do vizinho mais próximo para obter circuitos começando em qualquer um dos restantes vértices. Qual é o comprimento de cada um dos percursos assim obtidos?
- 3.1.7 Se utilizarmos o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, qual é o percurso que se obtém e qual é o seu comprimento?
- 3.1.8 O percurso encontrado no item 3.1.7 é ótimo? Justifique.

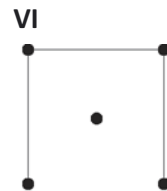
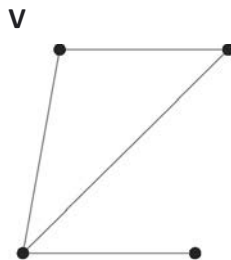
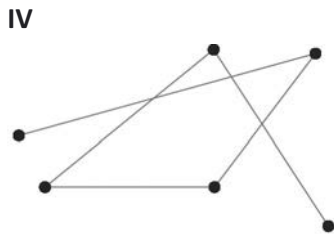
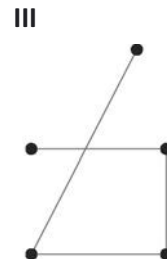
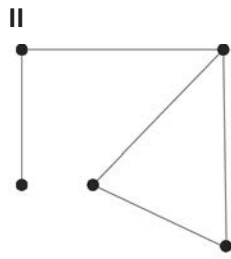
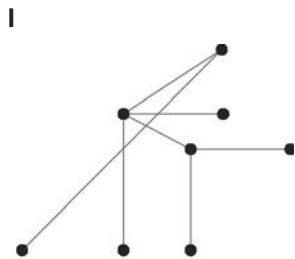
- 3.2 Formule e dê resposta a um problema do mesmo tipo do anterior, mas em que intervenham os tempos entre as cidades.

Ficha de trabalho 4

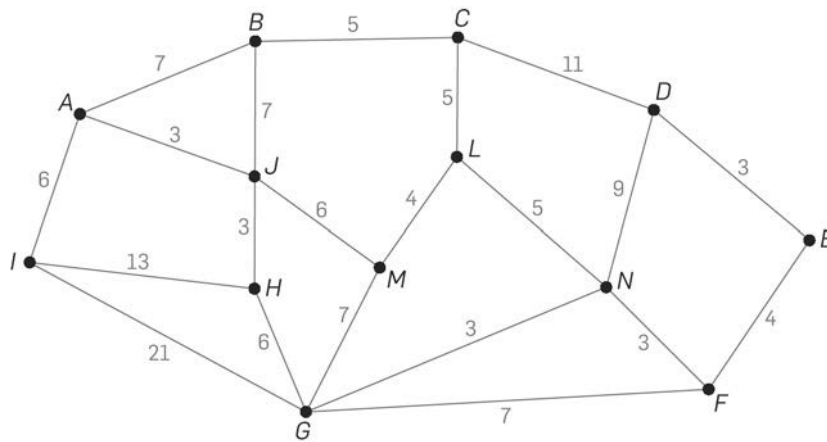
Nome _____ Turma _____ N.º _____

Árvores. Caminho crítico

1. Dos grafos seguintes, indique os que são árvores.

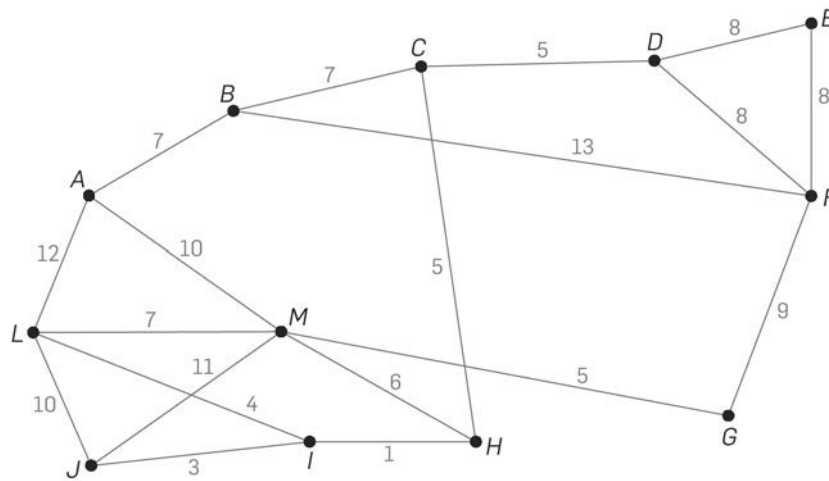


2. Considere o grafo seguinte:

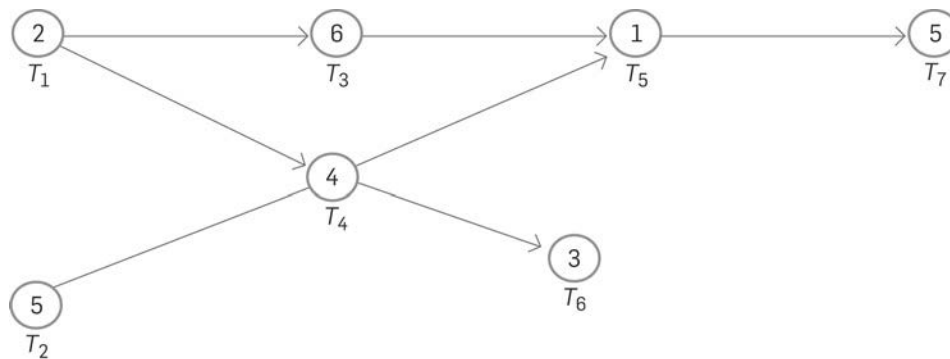


- 2.1 Descreva uma situação do quotidiano que possa ser modelada por este grafo.
- 2.2 Determine, usando o algoritmo de Kruskal, a árvore abrangente mínima e calcule o seu peso total.

3. Um antigo parque de diversões vai ser reaberto. Existe um pequeno comboio que percorre todo o parque, sobre trilhos (as arestas), visitando todos os pontos de interesse (os vértices). Esta situação pode ser representada pelo grafo que se segue, onde os pesos associados às arestas correspondem aos quilómetros entre pontos de interesse:



- 3.1 Determine quais dos trilhos deverão ser consertados de forma a minimizar os custos e permitindo viajar de comboio a qualquer ponto de interesse.
- 3.2 Quantos quilómetros deverão ser arranjados (na totalidade)?
4. O esquema seguinte representa, através de um digrafo, a planificação de um projeto que envolve a realização de sete tarefas e as respectivas durações (em dias):



- 4.1 Sintetize a informação fornecida pelo digrafo numa tabela em que constem as tarefas envolvidas e o tempo de duração de cada uma, bem como as suas precedências.
- 4.2 O gestor responsável sabe que o projeto não pode exceder 15 dias, caso contrário terá de pagar ao cliente por falta de cumprimento. Será que consegue cumprir o prazo estabelecido?

Ficha de trabalho 5

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos populacionais: linear e exponencial

1. Um bidão contém 150 litros de água. Para o encher, abriu-se uma torneira e, em 3 minutos, o número de litros de água aumentou para 240 litros. Em 45 minutos, o bidão encheu completamente. Assumindo que o caudal da água que vai enchendo o bidão é constante:
 - 1.1 Qual é o débito de água por minuto?
 - 1.2 Quantos litros de água estão no bidão ao fim de 5 minutos?
 - 1.3 Determine uma expressão que dê o número de litros no bidão ao fim de t minutos.
 - 1.4 Ao fim de quanto tempo o bidão tem 750 litros de água?
 - 1.5 Qual é a capacidade total do bidão?
2. Uma loja de fotografias pratica os seguintes preços:
 - 5 euros pela revelação.
 - 30 cêntimos por cada fotografia.A Diana mandou revelar um rolo de fotografias que tirou durante a viagem de finalistas.
 - 2.1 Quanto pagou, supondo que o rolo era de 24 fotografias e que nenhuma ficou inutilizada?
 - 2.2 Determine uma expressão que permita calcular o preço, P , a pagar pela revelação e pela impressão de n fotografias.
 - 2.3 Uma amiga da Diana mandou também revelar um rolo de fotografias e pagou 13,7 euros pelo serviço. Sabendo que o rolo era de 36 fotografias, quantas ficaram inutilizadas?
3. Uma certa substância exposta ao ar perde 12% do seu volume por hora. Sabendo que ao fim de uma hora o volume da substância é igual a 475,2 centímetros cúbicos:
 - 3.1 Calcule o volume inicial.
 - 3.2 Deduza um modelo que permita calcular o volume, V , da substância ao fim de t horas.
 - 3.3 Ao fim de quanto tempo o volume de substância é igual a 116,46 centímetros cúbicos? Nos cálculos intermédios, utilize pelo menos quatro casas decimais.
4. A população de uma cidade aumenta 10% por ano. Em 1999 a população era de 9745 habitantes. Supondo que esta taxa de crescimento se mantém constante:
 - 4.1 Defina um modelo que permita calcular a população, P , desta cidade:
 - 4.1.1 Ao fim de n anos.
 - 4.1.2 No ano A .

- 4.2 Quantos habitantes terá esta cidade no ano 2020? Apresente o resultado final arredondado às unidades e nos cálculos intermédios utilize pelo menos quatro casas decimais.
5. Uma população de bactérias diminui a uma taxa de 23% por hora. Assumindo que esta taxa de crescimento se mantém constante:
- 5.1 Escreva uma expressão que modele esta situação, isto é, uma expressão que dê a população, P , de bactérias ao fim de t horas.
- 5.2 Calcule quanto tempo vai demorar a esta população reduzir-se a metade. Apresente o resultado em horas, minutos e segundos, arredondados às unidades.
6. Um recipiente tem uma certa quantidade de açúcar. Para o dissolver, adiciona-se água. A massa, em gramas, de açúcar não dissolvido, t minutos após o início do processo de dissolução, é dada pelo modelo:

$$M(t) = 40 \cdot e^{-0,02t}, t \geq 0$$

- 6.1 Determine a massa inicial de açúcar contida no recipiente.
- 6.2 Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira hora. Apresente o resultado final arredondado às unidades e nos cálculos intermédios utilize pelo menos quatro casas decimais.

Adaptado de exame

7. A atividade, R , de uma substância radioativa é dada, numa certa unidade de medida, pelo modelo:

$$R(t) = A \cdot e^{-Bt}$$

onde A e B são constantes positivas e t é o tempo em horas ($t \geq 0$).

- 7.1 Sabendo que o valor inicial da atividade de uma certa substância radioativa é de 28 unidades e que ao fim de uma hora é de 26 unidades, determine os valores de A e B .
- 7.2 Determine a semivida desta substância radioativa.
- Nota:** A semivida de uma substância radioativa é o tempo que ela demora a reduzir-se a metade do seu valor inicial.

Adaptado de exame

Ficha de trabalho 6

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos populacionais

1. A evolução da massa salarial de um conjunto de trabalhadores é, por vezes, explicável através de modelos matemáticos.
Numa dada empresa, fez-se um estudo comprovativo da evolução dos vencimentos (em euros) de dois trabalhadores, A e B, entre 1998 e 2006.
 - Relativamente ao trabalhador A, o valor do vencimento mensal em cada ano, no período compreendido entre 1998 e 2006, é apresentado na tabela seguinte e reproduzido num diagrama de dispersão.

Anos	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Salário	900	918	942	953	955	978	1000	1015	1043



- Relativamente ao trabalhador B, sabe-se que, em 1998, recebia mensalmente 652 euros e que, nos anos seguintes, referentes ao período em estudo, o valor do seu vencimento mensal pode ser obtido através do modelo:

$$v_n = 652 \times 1,0502^{n-1}$$

Nota: A variável n está associada aos anos relativos ao período em estudo, concretamente, $n = 1$ corresponde a 1998, $n = 2$ corresponde a 1999, etc.

- 1.1 Utilizando a calculadora, indique um valor aproximado do coeficiente de correlação linear entre as variáveis descritas na tabela (anos/salário) referentes ao trabalhador A. Apresente o resultado com duas casas decimais.
Interprete esse valor tendo em conta o diagrama de dispersão correspondente.



1.2 Tome em atenção que o modelo que traduz a evolução do salário do trabalhador B é uma progressão geométrica.

1.2.1 Indique o primeiro termo e a razão da progressão geométrica em questão.

1.2.2 Um trabalhador auferi, por ano, de 12 ordenados mensais mais o subsídio de férias e o décimo terceiro mês, ambos com valor igual ao do ordenado mensal.

Utilizando a fórmula apropriada $S_n = u_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$, calcule, aproximadamente, o valor da totalidade dos vencimentos auferidos pelo trabalhador B entre 1998 e 2006, inclusive. Apresente o resultado arredondando às unidades.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2007, 2.ª fase

- 2.** Um estudo de impacto ambiental inclui dados de uma prospeção realizada no Parque Natural por técnicos do Serviço de Geofísica. Os dados mostram que, a maiores profundidades, correspondem temperaturas mais elevadas.

Com base nesses dados, obteve-se a equação $y = 0,0290x + 18,36$, que define a reta de regressão de y sobre x , com $0 \leq x \leq 350$, designando x a profundidade, em metros, e y a temperatura, em graus Celsius.

Estime o valor da temperatura a 100 metros de profundidade, de acordo com a equação da reta de regressão apresentada. Apresente o resultado em graus Celsius, com duas casas decimais.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2009, 1.ª fase

- 3.** Uma autarquia pretende editar um livro sobre a história, a gastronomia e os pontos de interesse turístico do concelho.

O custo total da produção e da edição do livro depende do número de exemplares que for encomendado. De acordo com o melhor orçamento apresentado em sessão da Câmara, o custo total, C , em euros, da produção e da edição de x centenas de exemplares do livro é dado, aproximadamente, por:

$$C(x) = 500x + 8000 \quad \text{para } x \geq 0$$

Os responsáveis autárquicos aprovaram o orçamento e deliberaram:

- Encomendar a produção e a edição de 1000 exemplares.
- Colocar os exemplares à venda nos postos do Gabinete de Turismo, pelo valor de 15 euros cada.

Como a venda dos exemplares fica a cargo dos serviços camarários, não há qualquer acréscimo ao custo de produção e de edição.

Um funcionário da autarquia fez a seguinte afirmação:

«A quantia resultante da venda de 800 exemplares, ao preço de 15 euros cada, não é suficiente para pagar o custo total da encomenda.»

A afirmação é verdadeira? Justifique.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2010, 2.ª fase

Ficha de trabalho 7

Nome _____ Turma _____ N.º _____

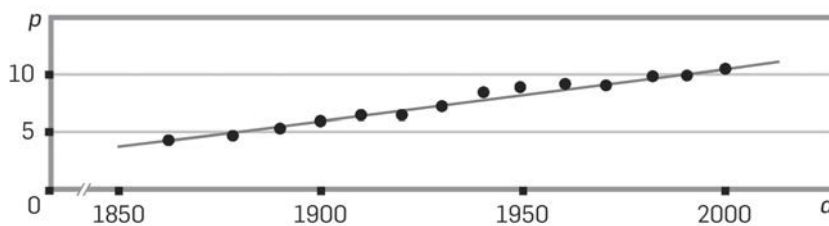
Modelos populacionais: modelo linear

1. Na tabela seguinte estão alguns dados sobre a população residente em Portugal, desde 1864 até ao final do século xx:

Ano (a)	População, em milhões (p)
1864	4,3
1878	4,7
1890	5,1
1900	5,4
1911	6,0
1920	6,0
1930	6,8
1940	7,8
1950	8,5
1960	8,9
1970	8,6
1981	9,8
1991	9,9
2000	10,3

Na figura abaixo está representado o diagrama de dispersão relativo aos dados apresentados na tabela, assim como a respetiva reta de regressão, cuja equação é:

$$p = 0,0477a - 84,95$$



- 1.1** Com recurso à calculadora, determine o coeficiente de correlação linear das variáveis a e p , tendo em conta a tabela apresentada. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às milésimas. Explique como procedeu e interprete esse valor, tendo em conta o diagrama de dispersão apresentado.
- 1.2** Explique por que razão o modelo linear acima apresentado (reta de regressão) não pode ser adequado para:
- Estimar o número aproximado de habitantes, em Portugal, há alguns séculos (três ou mais).
 - Prever a evolução da população portuguesa, a muito longo prazo (relacione uma tal previsão com os recursos, alimentares e outros, necessariamente limitados).

- 1.3** Num documento publicado pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), em 12 de junho de 2003, intitulado «Projeções de População Residente em Portugal 2000–2050», escreve-se:

«As projeções de população residente em Portugal, no horizonte 2000–2050, revelam um envelhecimento continuado da população, consequência do previsível aumento de esperança de vida, bem como da manutenção dos níveis de fecundidade abaixo do limiar de substituição de gerações.

A possibilidade de se verificarem saldos migratórios positivos poderá atenuar esta tendência, mas não a evitará.»

Mais à frente, é afirmado que, no cenário mais plausível:

«Portugal poderá esperar ainda um crescimento dos seus efetivos populacionais para cerca de 10 626 milhares em 2010, ano a partir do qual se verifica a inversão desta tendência, decrescendo até aos 9302 milhares de indivíduos, em 2050.»

Numa pequena composição, exponha alguns argumentos que permitam justificar a inadequação do modelo linear apresentado (reta de regressão) para fazer projeções sobre a evolução da população residente em Portugal, relativamente às próximas décadas, admitindo a fiabilidade das projeções do INE. Na sua composição deve:

- Indicar, de acordo com o modelo linear apresentado, os efetivos populacionais previstos para os anos de 2010 e de 2050 e compará-los com as projeções do INE.
- Comparar o crescimento do modelo linear apresentado com a evolução prevista para a população portuguesa, nas projeções do INE, para a primeira metade do século XXI (crescimento até 2010 e decrescimento a partir desse ano).
- Apresentar razões de ordem social que desaconselham a utilização do modelo linear para fazer projeções, para as próximas décadas, sobre a evolução da população residente em Portugal.

Adaptado do Exame Nacional de MACS, 2006, 2.ª fase

Ficha de trabalho 8

Nome _____ Turma _____ N.º _____

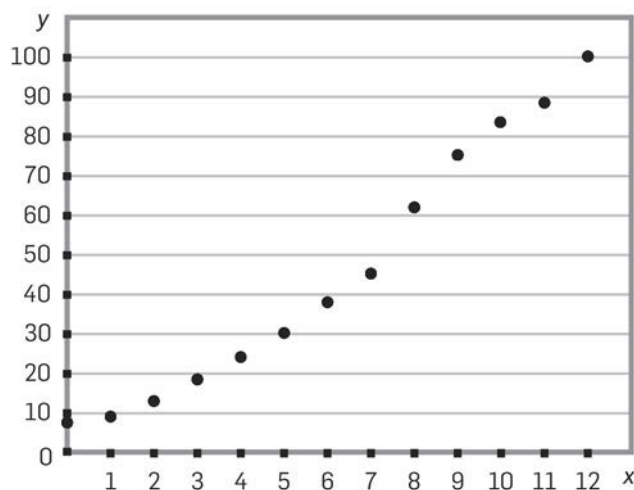
Modelos populacionais: modelo linear e modelo logístico

1. Na atualidade, há uma crescente preocupação com a preservação da Natureza, nomeadamente, quanto à necessidade de proteger espécies animais que se encontram em vias de extinção. Considere que uma certa espécie animal se encontra em vias de extinção. Para a proteger, tomaram-se medidas protecionistas, designadamente a criação de uma área protegida no seu *habitat* natural.

Admita que, no início, apenas existiam oito animais nessa área. A tabela seguinte traduz a contagem anual do número de animais nela existente.

Anos decorridos desde a criação da área protegida (x)	Número de animais existentes na área protegida (y)
0	8
1	9
2	13
3	18
4	24
5	30
6	38
7	45
8	62
9	75
10	84
11	88
12	100

O gráfico seguinte representa os dados da tabela, através de uma nuvem de pontos:



- 1.1** Com recurso à calculadora, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajusta à nuvem de pontos apresentada. Indique os valores de a e de b com uma aproximação às décimas.



- 1.2** Um modelo alternativo ao modelo de regressão linear, que podemos ajustar à nuvem de pontos apresentada, é o modelo logístico. Neste caso concreto, o recurso à calculadora permite obter o modelo logístico de equação:

$$y = \frac{125,445}{1 + 18,351e^{-0,355x}}$$

De acordo com este modelo, estime o número de animais existentes, na área protegida, 20 anos após a criação da mesma. Apresente o resultado arredondado às unidades. Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

- 1.3** As grandes áreas territoriais ocupadas pela espécie e os recursos alimentares disponíveis são alguns dos fatores que condicionam o número de animais na área protegida. Suponha que se previa que esta área viria a atingir a sua capacidade máxima, quanto à população de animais desta espécie, aproximadamente 25 anos após a sua criação. Num pequeno texto, indique, justificando, de entre o modelo de regressão linear (por si determinado no item 1.1) e o modelo logístico (apresentado no item 1.2), qual é o que interpreta a situação descrita para o primeiro meio século de existência da área protegida.
- No seu texto deve, obrigatoriamente, referir duas razões distintas: uma que fundamente a sua opção quanto à eliminação de um dos modelos e outra que apoie a sua escolha do outro modelo.
- Caso não tenha respondido ao item 1.1, e somente neste caso, considere que a equação do modelo de regressão linear é $y = 8,3x - 3,4$.

Adaptado do Exame Nacional de MACS, 2008, 2.ª fase

Ficha de trabalho 9

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos populacionais: logístico e logarítmico

1. O crescimento de uma população de seres vivos é dado por uma expressão da forma:

$$P(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \text{ com } k, a, b \in \mathbb{R} \text{ e } t \text{ o tempo}$$

Considere que o tempo é dado em anos e $b = 1$.

A contagem de uma população de cangurus foi, no primeiro ano, de 200 cangurus e, passados dois anos, foi de, aproximadamente, 281 cangurus.

- 1.1 Determine os valores de k e a , arredondados às centésimas, para a população de cangurus definida. Apresente os cálculos intermédios com quatro casas decimais.
- 1.2 Com a ajuda da calculadora, caso a evolução do número de cangurus se mantenha, qual se prevê que seja o número de cangurus daqui a muitos anos?
- 1.3 Se o crescimento da população de cangurus tivesse tido sempre o mesmo tipo de evolução, qual teria sido o número de cangurus quatro anos antes do início da contagem?

2. Malmequeres de Baixo é uma povoação com 5000 habitantes.

- 2.1 Num certo dia, ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em milhares) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente:

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}}, t \geq 0$$

- 2.1.1 Quantas pessoas testemunharam o acidente?
- 2.1.2 Passadas 5 horas, quantas pessoas sabiam do ocorrido?
- 2.1.3 Passadas quantas horas o número de habitantes que sabia do acidente era de 697? Apresente os cálculos intermédios com quatro casas decimais.
- 2.1.4 Com o decorrer do tempo, qual se prevê que seja o número de habitantes que sabem do acidente?



Nota: Utilize a calculadora para visualizar o gráfico.

- 2.2 Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste segundo acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste segundo acidente, o número (expresso em milhares) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente:

$$g(t) = \frac{5}{1 + a \cdot e^{-bt}}, t \geq 0 \text{ (para certos valores de } a \text{ e } b)$$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e b , comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão de f .

Adaptado da Prova Modelo 2000

3. A acidez de uma substância é medida pela concentração de iões de hidrogénio (H^+), em moles por litro, nessa substância e é dada por:

$$pH = -\log_{10} (H^+)$$

- 3.1 Determine o pH de um líquido, sabendo que a concentração de iões de hidrogénio é 10^{-5} moles/litro.
- 3.2 Se o pH de uma substância for 6, qual é a concentração de iões de hidrogénio nessa substância?
- 3.3 Qual é o pH da água pura? Determine a sua concentração de iões de hidrogénio.
4. Numa empresa, o lucro, L , originado pela produção de n peças, é dado em dezenas de euros por:

$$L(n) = \log_{10} (100 + n) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que se não há produção, não há lucro, determine:

- 4.1 O valor da constante k .
- 4.2 O lucro obtido pela produção de 5000 peças. Apresente o resultado final arredondado às centésimas.
- 4.3 O número de peças que é necessário produzir para que o lucro seja, aproximadamente, de uma dezena de euros.

Adaptado de exame

5. Um investigador estudou a evolução da epidemia de cólera que ocorreu numa certa região de um país, durante os anos de 2000 e 2001. No início do ano 2000, o total da população dessa região era de 950 000 pessoas.
- Com base nos estudos efetuados, o investigador considerou que, nessa região, o número total de pessoas, da população inicial, que foram contagiadas pela doença, desde o início do ano 2000 até ao instante t , é dado, aproximadamente, por:

$$F(t) = \frac{57\,000}{1 + 4980 \times e^{-0,27t}} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 60$$

A variável t representa o tempo, em semanas, decorrido desde o início do ano 2000.

- 5.1 De acordo com o modelo apresentado, o número de pessoas contagiadas duplicou num intervalo de poucas semanas, passando de 10 000 para 20 000.
- Determine a duração desse intervalo de tempo. Apresente o resultado em semanas e dias (os dias arredondados às unidades). Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize, no mínimo, três casas decimais.
- 5.2 Sabe-se que o modelo logístico definido pela função F se manteve válido ao longo de 60 semanas.
- Determine a percentagem da população inicial de 950 000 pessoas que foi contagiada pela doença, no referido período de tempo. Apresente o resultado aproximado às unidades.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2010, 2.ª fase

Ficha de trabalho 10

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos de probabilidade: experiências aleatórias e regra de Laplace

1. Lança-se sucessivamente um dado perfeito e uma moeda equilibrada.
 - 1.1 Indique:
 - 1.1.1 O espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.
 - 1.1.2 Um acontecimento certo.
 - 1.1.3 Um acontecimento impossível.
 - 1.2 Determine, sob a forma de fração, a probabilidade de:
 - 1.2.1 Sair face comum e número ímpar.
 - 1.2.2 Sair face portuguesa e número par.
 - 1.2.3 Sair um múltiplo de 3.
2. Num teste, a Vanessa tem de responder a quatro perguntas de «verdadeiro ou falso».
 - 2.1 De quantas maneiras pode a Vanessa responder?
 - 2.2 Sabendo que duas das proposições são verdadeiras, de quantas maneiras pode a Vanessa responder, tendo em conta apenas esta informação?
3. Numa cidade, 10% das pessoas assinam a revista A, 20% assinam a revista B e 3% assinam ambas as revistas.

Determine, sob a forma de percentagem, a probabilidade de:

 - 3.1 Assinar pelo menos uma das revistas.
 - 3.2 Não assinar a revista A nem a revista B.
 - 3.3 Assinar apenas a revista B.
4. O clube de Matemática de uma escola tem 30 alunos: 15 do 10.º ano, dez do 11.º ano e cinco do 12.º ano. Um aluno é escolhido, ao acaso, para participar num concurso. Calcule, sob a forma de fração, a probabilidade de:
 - 4.1 O aluno ser do 11.º ano.
 - 4.2 O aluno não ser do 12.º ano.
 - 4.3 O aluno ser do 10.º ou do 11.º ano.

5. A tabela seguinte indica o número de dias de chuva por mês e o número de dias em que a chuva provocou estragos graves, num ano comum:

Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Chuva	15	10	9	14	6	0	2	4	3	2	10	14
Estragos	4	3	0	3	0	0	0	1	0	0	6	3

- 5.1 Certo dia estava a chover.
- 5.1.1 Qual a probabilidade de se estar em janeiro?
- 5.1.2 Qual a probabilidade de se estar no primeiro semestre?
- 5.2 Um dia de chuva provocou estragos graves.
- 5.2.1 Qual a probabilidade de ser dezembro?
- 5.2.2 Qual a probabilidade de se estar no segundo semestre?
6. Lança-se três vezes um dado equilibrado com faces numeradas de 1 a 6. Indique, justificando, qual dos dois acontecimentos seguintes é mais provável:
- Nunca sair o número 6.
 - Saírem números todos diferentes.
- Adaptado de exame
7. De um baralho com 40 cartas, retira-se a primeira carta e, em seguida, tira-se a segunda, sem reposição.
- 7.1 Calcule a probabilidade de obter:
- 7.1.1 Um rei e um valete.
- 7.1.2 Pelo menos uma carta preta.
- 7.2 Resolva os itens 7.1.1 e 7.1.2 considerando que as cartas foram retiradas com reposição.
8. Quantos códigos de cofres com quatro dígitos podemos encontrar com os algarismos de 0 a 9?
9. A Ana tem nove rifas para vender, das quais quatro têm prémio. Tiram-se ao acaso três dessas rifas.
- 9.1 Construa um árvore de probabilidades para esta situação.
- 9.2 Determine a probabilidade de:
- 9.2.1 Serem duas premiadas.
- 9.2.2 Serem as três premiadas.
- 9.2.3 Nenhuma ser premiada.
- 9.3 Defina a função massa de probabilidade para esta variável aleatória.

Ficha de trabalho 11

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos de probabilidade: probabilidade condicional

1. Sejam A e B dois acontecimentos tais que:

$$P(A) = 0,3 \text{ e } P(B) = 0,7$$

Determine $P(A \cap B)$, sabendo que:

- 1.1 Os acontecimentos são incompatíveis.
 - 1.2 Os acontecimentos são independentes.
 - 1.3 $P(A|B) = 0,5$
2. O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A, B, AB e O. Independentemente do grupo, o sangue pode possuir ou não o fator *Rhesus*. Se o sangue de uma pessoa possui este fator, diz-se *Rhesus* positivo (Rh^+); se não possui este fator, diz-se *Rhesus* negativo (Rh^-). Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respetivos *Rhesus* estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh^+	40%	6,9%	2,9%	35,4%
Rh^-	6,5%	1,2%	0,4%	6,7%

Escolhido um português ao acaso:

- 2.1 Qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo não ser O? Apresente o resultado sob a forma de percentagem.
- 2.2 Sabendo que é (Rh^-), qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser A? Apresente o resultado sob a forma de percentagem.

Adaptado de exame

3. Considere duas caixas, A e B.
A caixa A contém duas bolas verdes e cinco bolas amarelas. A caixa B contém seis bolas verdes e uma amarela.
Lança-se um dado equilibrado, com faces numeradas de 1 a 6.
Se sair face 1, tira-se, ao acaso, uma bola da caixa A. Caso contrário, tira-se uma bola da caixa B.
Considere os acontecimentos:
 X : Sair face par no lançamento do dado.
 Y : Sair bola verde.
Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(Y|X)$ e, numa pequena composição (cinco a dez linhas), justifique a sua resposta.

Adaptado de exame

4. Três máquinas produzem peças do mesmo tipo. Sabe-se que B produz metade de A e o mesmo que C. Além disso, 2% das peças produzidas tanto por A como por B são defeituosas e 4% das produzidas por C também. A produção das três máquinas é misturada e extrai-se, ao acaso, uma peça, que se verifica ser defeituosa. Qual é a probabilidade de essa peça ter sido produzida pela máquina A? E pela C? Apresente o resultado sob a forma de percentagem.
5. Das cartas enviadas pelo correio, 80% demoram um dia a chegar ao seu destino e as restantes demoram dois dias; 15% das encomendas demoram um dia, 40% demoram dois dias, 30% demoram três dias e as restantes mais de três dias. Sabendo que o número de encomendas enviadas é o triplo do número de cartas, determine, sob a forma de percentagem:
- 5.1 A probabilidade de um artigo enviado ser uma encomenda, sabendo que demorou dois dias a chegar.
- 5.2 A probabilidade de um artigo enviado demorar dois dias a chegar ao seu destino.
- 5.3 A probabilidade de um artigo que demorou um dia a chegar ao seu destino ser uma carta.
6. Foi feito um inquérito a um conjunto de condutores de automóveis que já tiveram/passaram por um acidente sobre as causas desse acidente. As conclusões foram as seguintes:
- 15% dos acidentes provocaram a morte do (outro) condutor.
 - Apenas 8% dos condutores que tiveram acidente mortal utilizava cinto de segurança.
 - 5% dos condutores que utilizavam cinto de segurança tiveram acidente mortal.
- Considerando, ao acaso, um dos condutores em causa, determine, sob a forma de percentagem, a probabilidade de:
- 6.1 Usar cinto de segurança na altura do acidente.
- 6.2 Não ter acidente mortal, sabendo que utilizou o cinto de segurança.
- 6.3 Ter acidente mortal, sabendo que não utilizou cinto de segurança. Apresente o resultado arredondado às unidades.
7. Num escritório existem três impressoras, A, B e C, que têm ritmos diferentes de impressão. A probabilidade de um ficheiro ser enviado para a impressora A é de 0,5, para a B é de 0,3 e para a C é de 0,2. Quando a impressora avaria, destrói completamente a impressão. A impressora A avaria com probabilidade de 0,01, a impressora B com probabilidade de 0,03 e a impressora C com probabilidade de 0,02.
- 7.1 Represente a informação através de uma tabela.
- 7.2 Sabendo que a impressão de um ficheiro foi destruída, qual a impressora que mais provavelmente recebeu a ordem de impressão?
8. Na final do Campeonato de Jogos Matemáticos de uma escola participaram as equipas A e B. Estima-se que assistiram aos jogos 55% de adeptos da equipa A e que 70% destes são rapazes. Quanto à equipa B, 45% dos seus adeptos são raparigas. No final do Campeonato foi sorteado um dos Jogos Matemáticos entre os assistentes.
- 8.1 Calcule, em percentagem, a probabilidade de o jogo sorteado ser ganho por um rapaz.
- 8.2 Sabendo que o jogo sorteado foi ganho por uma rapariga, qual a probabilidade de ser uma adepta da equipa A? Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Ficha de trabalho 12

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelos de probabilidade: discretos e contínuos

1. Na ponte Vasco da Gama, o número de automóveis (em centenas) que a atravessam, por minuto, é uma variável aleatória que tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 3,2$.
 - 1.1 Determine o número médio de automóveis que atravessam a ponte Vasco da Gama por minuto.
 - 1.2 Qual é a probabilidade, em percentagem, arredondada às centésimas, de, em determinado minuto, a ponte Vasco da Gama ser atravessada por:
 - 1.2.1 Nenhum automóvel?
 - 1.2.2 100 automóveis?
 - 1.2.3 400 automóveis?
 - 1.3 Determine o número médio de automóveis que atravessam a ponte Vasco da Gama por hora.
2. Numa fábrica de produtos químicos, o número de intoxicações, num certo período de tempo, é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson. Sabe-se que a probabilidade de não haver intoxicações em determinado mês é, aproximadamente, 0,135.
 - 2.1 Qual é o número médio de intoxicações por mês?
 - 2.2 Determine a probabilidade de acontecerem mais de duas intoxicações num mesmo mês. Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.
 - 2.3 Qual é a probabilidade de, num ano, haver apenas 20 intoxicações? Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.
3. Numa linha de montagem de monitores de computadores, a probabilidade de um monitor chegar ao fim da montagem com defeito é igual a 0,012.
 - 3.1 Determine o número médio de monitores que chegam ao fim da linha de montagem com algum defeito.
 - 3.2 Calcule a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de, em determinado dia, o primeiro monitor a chegar ao fim da linha de montagem com algum defeito ser:
 - 3.2.1 O terceiro.
 - 3.2.2 O décimo.
4. O peso de um pão de centeio especial confeccionado na padaria Brites Almeida é uma variável aleatória que varia uniformemente entre 940 e 1076 gramas.
 - 4.1 Qual é o peso médio de um desses pães de centeio?

- 4.2** Calcule a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de, escolhido ao acaso um desses pães de centeio especiais, ele ter um peso:
- 4.2.1** Superior a 1 quilograma.
 - 4.2.2** Inferior a 980 gramas.
 - 4.2.3** Superior a 990 gramas, mas inferior a 1,065 quilogramas.
- 5.** O tempo de vida, em meses, de uma lâmpada fluorescente da marca Ofuscante é uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial. Sabe-se que o número médio de duração deste tipo de lâmpadas é de 25 meses.
- 5.1** Determine o parâmetro da distribuição.
 - 5.2** Calcule a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de uma destas lâmpadas fluorescentes, escolhida ao acaso, ter uma duração:
 - 5.2.1** Superior a dois anos.
 - 5.2.2** Inferior a um ano e meio.
 - 5.2.3** Entre dois e três anos.
- 6.** Numa central de táxis, o tempo de espera entre dois clientes, em minutos, é aleatório e pode ser distribuído de forma exponencial com parâmetro $\lambda = 0,25$.
- 6.1** Determine o tempo médio de espera entre dois clientes.
 - 6.2** Calcule a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de o taxista que se encontra no início da fila ter de aguardar pelo cliente seguinte:
 - 6.2.1** Mais de 5 minutos.
 - 6.2.2** Menos de 2 minutos.
 - 6.2.3** Entre 3,5 e 4,7 minutos.
- 7.** Numa fábrica de brinquedos, estima-se que 3% dos brinquedos têm defeito. Num lote de 40 brinquedos, qual a probabilidade de:
- 7.1** Estarem todos bons?
 - 7.2** Estarem todos com defeito?
 - 7.3** Não haver mais de um com defeito?
- 8.** Considere que 5% dos alunos de uma turma não praticam desporto. Escolhendo 15 alunos da turma ao acaso, qual é a probabilidade de $\frac{1}{3}$ dos alunos não praticarem desporto? Apresente o resultado em percentagem, com duas casas decimais.

Ficha de trabalho 13

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Modelo normal

1. Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de valor médio igual a 25 e desvio-padrão 7.
Calcule a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de:
 - 1.1 $X < 14$
 - 1.2 $X > 21$
 - 1.3 $X > 17$
 - 1.4 $21,5 < X < 25$
 - 1.5 $16,2 < X < 18,8$
 - 1.6 $17 < X < 29,3$
2. O tempo que um operário demora a realizar uma determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio igual a 72 minutos e desvio-padrão igual a 12 minutos.
 - 2.1 Determine a probabilidade de o operário demorar, na realização da tarefa:
 - 2.2.1 Menos de 65 minutos.
 - 2.2.2 Mais de 93 minutos.
 - 2.2.3 Entre 63 e 78 minutos.
 - 2.2 Calcule quantas horas, no máximo, o operário demora a realizar a tarefa, sabendo que a probabilidade de tal acontecer é de 0,0054.
 - 2.3 Se a probabilidade de o operário demorar mais de h horas é de 0,2525, determine esse número de horas.
3. Na reprografia de uma escola existe uma fotocopiadora cujo número de avarias por dia é aleatório e segue uma distribuição de Poisson, cujo parâmetro é $\lambda = 0,2$.
Determine a probabilidade, em percentagem, arredondada a duas casas decimais, de a fotocopiadora, num ano (365 dias), ter:
 - 3.1 76 avarias.
 - 3.2 Menos de 70 avarias.
 - 3.3 Entre 70 e 75 avarias.
4. O tempo, em minutos, que um aluno demora a resolver um determinado exercício é uma variável aleatória que pode modelar-se por uma normal. Sabe-se que a probabilidade de um aluno demorar menos de 5 minutos é igual a 0,0062 e que a probabilidade de demorar mais de 12 minutos é igual a 0,3085.
 - 4.1 Determine o tempo médio necessário para a resolução do referido exercício e o respetivo desvio-padrão.
 - 4.2 Calcule a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, demorar, na resolução do exercício:
 - 4.2.1 Mais de 15 minutos.
 - 4.2.2 Entre 7 e 14 minutos.
 - 4.2.3 Menos de 8 minutos.

Ficha de trabalho 14

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Estimação pontual. Distribuição de amostragem da média

1. Realizou-se um estudo que visava saber o peso médio de uma adolescente de 18 anos. A amostra recolhida contemplava jovens do sexo feminino, de todo o país, tendo-se obtido um peso médio amostral igual a 57 quilogramas.
 - 1.1 Qual é o parâmetro?
 - 1.2 Qual é a estatística?
2. De uma população fazem parte apenas cinco elementos: 3, 6, 9, 12 e 15.
 - 2.1 Calcule o valor médio e o desvio-padrão populacional. Apresente o resultado com três casas decimais.
 - 2.2 Determine todas as amostras de dimensão 2 que é possível definir com os elementos da população.
 - 2.3 Defina a distribuição de amostragem da média.
 - 2.4 Calcule a média da distribuição de amostragem da média.
 - 2.5 O que se pode concluir quanto ao estimador? Justifique.
 - 2.6 Calcule o erro-padrão.
3. Considere novamente a população do exercício anterior: 3, 6, 9, 12 e 15.
 - 3.1 Determine todas as amostras de dimensão 3 que é possível definir com os elementos da população.
 - 3.2 Defina a distribuição de amostragem da média.
 - 3.3 Calcule a média da distribuição de amostragem da média.
 - 3.4 Calcule o erro-padrão.
 - 3.5 Compare os resultados obtidos neste exercício com os obtidos no exercício anterior. Tire conclusões relativamente ao aumento da dimensão da amostra.
4. Uma determinada raça de cães tem uma altura média de 45 centímetros e um desvio-padrão igual a 10 centímetros. Caracterize a distribuição de amostragem da média, no que diz respeito à média e ao desvio-padrão (com duas casas decimais), para uma amostra de 50 desses cães.
5. Uma empresa de *telemarketing* telefona aleatoriamente a assinantes da rede fixa, para fazer sondagens. Em cada 250 telefonemas, apenas 75 das pessoas que atendem colaboram com o seu interlocutor. Determine uma estimativa pontual da proporção de pessoas que não colaboram nas sondagens de *telemarketing*.

6. Recolheu-se uma amostra de 120 dispositivos eletrônicos da produção mensal de uma fábrica. Sabendo que o número de dispositivos defeituosos por mês é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 12$:
- 6.1 Determine uma estimativa do número médio de dispositivos defeituosos por mês.
 - 6.2 Calcule uma estimativa do erro-padrão. Apresente o resultado final arredondado às milésimas.
7. A altura de uma determinada espécie de planta tem um valor médio de 134 centímetros e desvio-padrão igual a 27 centímetros.
- 7.1 Determine a média e o desvio-padrão (com três casas decimais) da distribuição de amostragem da média para amostras de dimensão 40.
 - 7.2 Calcule a probabilidade de a média da distribuição de amostragem da média assumir um valor (apresente os resultados finais em percentagem, arredondados às centésimas, e nos cálculos intermédios utilize quatro casas decimais):
 - 7.2.1 Superior a 145 centímetros.
 - 7.2.2 Entre 128 e 140 centímetros.
 - 7.2.3 Inferior a 130 centímetros.
 - 7.3 Calcule a probabilidade de a diferença entre o valor médio e a média da distribuição de amostragem da média ser inferior a seis décimas.

Ficha de trabalho 15

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Intervalos de confiança para a média. Tamanho da amostra

1. Comente sucintamente a seguinte notícia:
«Segundo um estudo, baseado numa amostra aleatória, o rendimento semanal médio das famílias de um concelho é de 200 euros. Este valor é bastante credível, pois os cálculos foram efetuados com um nível de confiança de 95%.»
2. Suponha que X tem uma distribuição normal $N(\mu, 3)$ e que uma amostra de dimensão 50 fornece a média amostral $\bar{x} = 52,1$.
Construa um intervalo de confiança a 95% e a 99% para μ . Apresente os extremos dos intervalos arredondados às centésimas.
3. O diâmetro dos bombons da marca Bolinha é uma variável aleatória X com desvio-padrão $\sigma = 0,1$ milímetros.
Observaram-se 1000 bombons, encontrando-se para a média dos seus diâmetros $\bar{x} = 91$ milímetros.
 - 3.1 Determine k de modo que o intervalo $]\bar{x} - k; \bar{x} + k[$ seja um intervalo de confiança a 95% para a média populacional μ de X .
 - 3.2 Dado um intervalo de confiança para μ , $]90,995; 91,005[$, determine o seu nível de confiança.
4. Os dados seguintes resultaram de 30 medidas das alturas (em centímetros) das crianças de uma aldeia, entre os 5 e os 10 anos:

104	123	131	142	150	133	123	107	100	121
123	136	138	145	127	115	112	117	120	132
108	110	132	140	148	135	142	129	141	117

Considerando estas alturas como uma amostra de uma população normal, determine um intervalo de confiança para a altura média populacional das crianças entre os 5 e os 7 anos, com um nível de confiança de 99%. Apresente os extremos do intervalo arredondados a duas casas decimais.

5. Para estudar o crescimento de uma espécie de árvores, um trabalhador registou 40 medições das alturas das árvores com 1 ano de idade. Os valores obtidos foram:

2,6	1,9	1,8	1,6	2,2	2,8	0,8	1,5	1,0	1,2
2,0	1,5	1,5	2,3	1,6	1,4	1,2	1,3	1,1	2,7
1,7	3,1	1,8	2,4	1,2	1,5	2,4	1,1	2,5	2,0
1,9	2,1	1,5	1,3	1,7	2,4	2,1	3,0	1,6	1,5

- 5.1** Encontre uma estimativa pontual para a média das alturas da população das árvores e estabeleça, com 95% de confiança, a margem de erro.
- 5.2** Determine um intervalo com 90% de confiança para a média das alturas da população das árvores considerada.
- 5.3** Qual o número de medições necessárias para fazermos uma estimativa pontual da média com 95% de confiança, com uma margem de erro de 1%?
- 6.** O tempo de duração de um certo equipamento segue uma distribuição normal com um desvio-padrão de 500 horas. Pretende estimar-se a duração média do referido equipamento com um erro que não exceda 100 horas. Qual é o tamanho da amostra para obter os seguintes níveis de confiança:
- 6.1** 90%
- 6.2** 95%
- 6.3** 99%
- 6.4** O que acontece ao tamanho da amostra à medida que pretendemos um grau de confiança maior?
- 7.** Considere que o tempo de vida das lâmpadas elétricas produzidas numa determinada fábrica segue uma distribuição normal com $\sigma = 62$ horas.
- 7.1** Determine a dimensão da amostra necessária para obtermos um intervalo de 90% de confiança para μ com um erro de 0,2.
- 7.2** Sabendo que a dimensão da amostra foi de 50 lâmpadas, determine o nível de confiança num intervalo para μ em que a margem de erro é de 17,2 horas.

Ficha de trabalho 16

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Intervalos de confiança para a proporção. Tamanho da amostra

1. A frase que se segue foi retirada de um artigo de uma revista:

«A Kodak estima que 75% das imagens digitais não são impressas.»

Tendo em conta que a estimativa é feita com um nível de confiança de 95%, explique, sucintamente, o seu significado.

2. Uma nova marca de champô faz promoção dos seus produtos numa empresa. É feito um teste de aceitação enviando amostras para 250 operários, escolhidos de entre os 9000 funcionários. Baseado nesta amostra, somente 70 operários decidiram comprar o champô.

2.1 Faça uma estimativa pontual da proporção de operários que se espera que comprem o produto.

2.2 Determine, com 95 % de confiança, o erro cometido.

3. Quarenta pessoas, de uma amostra aleatória de 500 trabalhadores, estão desempregadas. Determine um intervalo de confiança que tenha 90% de probabilidades de conter a percentagem de desempregados do país.

4. Num inquérito ao consumo de chocolates, em dada faixa etária, inquiriram-se aleatoriamente 100 indivíduos e verificou-se que 26 gostavam mais da marca X, 35 gostavam mais da marca Y e 12 da marca Z; 15 gostavam das três marcas e 12 não gostavam de nenhuma das marcas. Construa intervalos de confiança a 95% e a 99% para a proporção da população em estudo em cada um dos casos. Compare os resultados.

5. Qual deve ser o número de habitantes a selecionar aleatoriamente para estudar a proporção de pessoas que utilizam a internet no dia a dia no seu emprego, de modo a garantir que um intervalo de confiança a 95% para a respetiva proporção tenha uma amplitude máxima de 8%?

6. Um candidato de uma junta de freguesia pretende fazer uma sondagem com vista a estimar a proporção de eleitores que vão votar nele.

6.1 Qual deve ser a dimensão da amostra para ter 90% de confiança de que o resultado estimado esteja a menos de 1% dos votos que irá efetivamente ter?

6.2 Tendo feito uma sondagem prévia, registou que tem 60% dos votos. Qual deveria ter sido a dimensão da amostra para ter 99% de confiança de que o erro cometido seja 1%.

7. Pretendemos estimar a percentagem de jovens universitários que são fumadores. Quantos jovens devemos consultar de modo que a estimativa pontual esteja, no máximo, a 3% da proporção verdadeira de jovens universitários fumadores, com uma confiança de 95%?

Teste diagnóstico

Nome _____ Turma _____ N.º _____

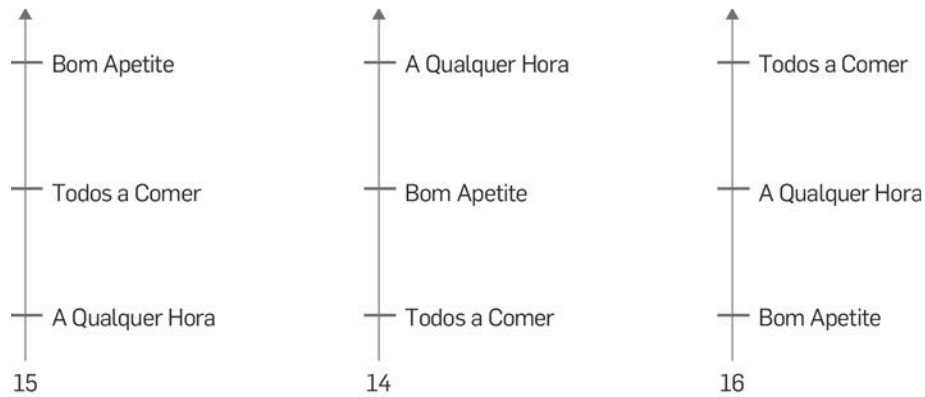
Para cada uma das questões seguintes, seleccione a opção correta (apenas uma) e escreva-a na folha de respostas.

1. Para uma associação de estudantes, concorreram quatro listas: Alfa, Beta, Kapa e Psi. Cada votante deve ordenar uma única vez as quatro listas concorrentes de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Os resultados desta eleição encontram-se na tabela seguinte:

	45 votos	38 votos	56 votos	23 votos
1. ^a preferência	Alfa	Beta	Psi	Beta
2. ^a preferência	Beta	Psi	Alfa	Kapa
3. ^a preferência	Kapa	Alfa	Beta	Psi
4. ^a preferência	Psi	Kapa	Kapa	Alfa

- 1.1 O número de votantes é:
(A) 4. (B) 56. (C) 162. (D) 648.
- 1.2 Usando o método da pluralidade, podemos afirmar que a lista vencedora é:
(A) Alfa. (B) Beta. (C) Kapa. (D) Psi.
- 1.3 Usando o método de eliminação *run-off* simples, podemos afirmar que a lista vencedora é:
(A) Alfa. (B) Beta. (C) Kapa. (D) Psi.
- 1.4 Usando o método de Borda, podemos afirmar que a lista vencedora é:
(A) Alfa. (B) Beta. (C) Kapa. (D) Psi.

2. Um grupo de amigos foi jantar fora. Para escolher o restaurante, colocaram por ordem de preferência os três restaurantes possíveis: Bom Apetite, A Qualquer Hora e Todos a Comer. Os resultados obtidos foram os seguintes:



Aplicando o método de Condorcet, podemos afirmar que:

- (A) O restaurante Bom Apetite é preferido em relação ao restaurante Todos a Comer.
 - (B) O restaurante Todos a Comer é preferido em relação ao restaurante Bom Apetite.
 - (C) O restaurante Bom Apetite é preferido em relação ao restaurante A Qualquer Hora.
 - (D) O restaurante Bom Apetite é o preferido.
3. Quatro herdeiros, H_1 , H_2 , H_3 e H_4 , têm de dividir entre si quatro bens e decidem fazê-lo usando o método das licitações secretas. Na tabela seguinte, foram registadas as licitações de cada um dos herdeiros, em euros, para cada um dos bens (designados por A, B, C e D):

	H_1	H_2	H_3	H_4
A	140 000	120 000	160 000	100 000
B	20 000	24 000	18 000	16 000
C	60 000	56 000	58 000	64 000
D	100 000	88 000	96 000	80 000

O valor em excesso apurado, após a atribuição de cada bem ao maior licitador, é:

- (A) 300 000.
- (B) 75 000.
- (C) 48 000.
- (D) 12 000.

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa. Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série. No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

4. Considere que, numa eleição em que se candidataram cinco listas, se obtiveram os resultados seguintes:

Listas	A	B	C	D	E
Número de votos	4578	3257	1450	876	739

- 4.1 Sabendo que o número de mandatos a distribuir é nove, à lista B serão atribuídos:

- (A) o segundo, o quarto e o sexto mandatos.
(B) o segundo, o quinto e o oitavo mandatos.
(C) o segundo, o quarto e o oitavo mandatos.
(D) o segundo, o quarto e o sétimo mandatos.

- 4.2 O número de mandatos a atribuir a cada lista, por ordem alfabética, é:

- (A) 5, 3, 1, 0, 0. (B) 4, 3, 1, 1, 0. (C) 3, 3, 2, 1, 0. (D) 3, 3, 1, 1, 1.

5. Alguns países aplicam o método de Sainte-Laguë para converter votos em mandatos: o procedimento é semelhante ao do método de Hondt, mas os divisores utilizados são 1, 3, 5, 7, 9, etc. Considerando os resultados da eleição e o número de mandatos a distribuir do exercício anterior, o número de mandatos a atribuir a cada lista, por ordem alfabética, é:

- (A) 3, 2, 2, 1, 1. (B) 3, 2, 2, 2, 0. (C) 4, 2, 2, 1, 0. (D) 4, 2, 1, 1, 1.

6. Para um certo círculo eleitoral, temos seis mandatos a distribuir por quatro listas: A, B, C e D. O número de votos obtidos pelas listas foi de 12 990 para a lista A, 8000 para a lista B, 6000 para a lista C e 4000 para a lista D. O divisor-padrão é:

- (A) 30 990. (B) 7025. (C) 5165. (D) 4000.

7. A Idalete e o Rufino foram comprar presentes para o aniversário da mãe. A Idalete pretende comprar uma camisola que custa 29 €, mas tem 25% de desconto. O Rufino quer comprar uma moldura que custa 26 €, mas tem um desconto de 15%.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O Rufino gastou 23 € na compra do presente.
(B) A Idalete poupou mais de 8 € na compra do presente.
(C) O Rufino gastou menos dinheiro do que a Idalete na compra do presente.
(D) O Rufino gastou 22,10 € na compra do presente.

8. A Afonsina pretende comprar um automóvel. Como não tem o dinheiro necessário, pediu um crédito pessoal a pagar em quatro anos. A prestação mensal é de 353,20 €, dos quais 50,20 € correspondem a juros.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A amortização mensal é de 300 €.
(B) O valor do empréstimo é de 14 544 €.
(C) A taxa de juro é de 15%.
(D) Nenhuma das opções anteriores.

9. No Dia Mundial da Alimentação, foi realizado um estudo sobre o índice de massa corporal dos alunos de uma turma de MACS. Os resultados sobre o peso (em quilogramas) e a altura (em metros) dos alunos foram os seguintes:

Peso	45	68	65	72	75	80	76	52	54	50
Altura	1,60	1,70	1,74	1,80	1,76	1,70	1,74	1,58	1,60	1,69
Peso	65	53	56	60	84	49	90	62	42	64
Altura	1,60	1,63	1,62	1,71	1,73	1,55	1,78	1,64	1,50	1,68

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A média do peso dos alunos é de 63 quilogramas.
(B) A média da altura dos alunos é de 1,70 metros.
(C) O coeficiente de correlação linear entre as variáveis peso e altura é, aproximadamente, 0,8.
(D) A amplitude dos pesos dos alunos é 50.

10. Uma turma tem 23 alunos. Os alunos com número ímpar têm MACS e os alunos com número par têm História e Cultura das Artes.

10.1 Escolhe-se, ao acaso, um aluno de MACS. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ter um número superior a 17?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{7}$

10.2 Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma. Qual é a probabilidade de ser um aluno de MACS?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{12}{23}$ (D) Nenhuma das opções anteriores.

11. O Acúrsio tem um caixa com nove bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Qual é a probabilidade de a bola retirada ter um número primo?
- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{3}{9}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$
12. Alguns grupos de jovens de três nacionalidades (portuguesa, espanhola e inglesa) reuniram-se para fazer um inter-rail. Sabe-se que metade dos jovens são portugueses, nenhum dos jovens tem dupla nacionalidade e existem mais ingleses do que espanhóis. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens. Qual pode ser o valor da probabilidade de o jovem escolhido ser espanhol?
- (A) 20% (B) 25% (C) 30% (D) 50%
13. A Ariel vai participar num sarau de ginástica. Para isso, vai precisar de um *maillot*, umas sapatilhas e uma fita para o cabelo. A Ariel tem quatro *maillots* diferentes (dois brancos, um preto e um azul), três pares de sapatilhas diferentes (dois brancos e um preto) e duas fitas para o cabelo (uma branca e uma azul).
- 13.1 A Ariel escolhe, ao acaso, um *maillot*. Qual é a probabilidade de **não** escolher o *maillot* azul?
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$
- 13.2 Para o sarau, a Ariel tem de levar um *maillot*, um par de sapatilhas e uma fita para o cabelo. De quantas formas diferentes pode a Ariel apresentar-se no sarau?
- (A) 24 (B) 12 (C) 16 (D) 28
14. A distribuição do número de irmãos dos alunos da turma do Pascoal é a seguinte:

Número de irmãos	0	1	2	3	4	5
Número de alunos	5	7	6	4	2	1

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma do Pascoal.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É mais provável ter três irmãos do que ser filho único.
- (B) A probabilidade de não ser filho único é inferior a 80%.
- (C) Ter menos de dois irmãos é menos provável do que ter mais de dois irmãos.
- (D) Os acontecimentos «ter pelo menos três irmãos» e «ter apenas um irmão» são equiprováveis.

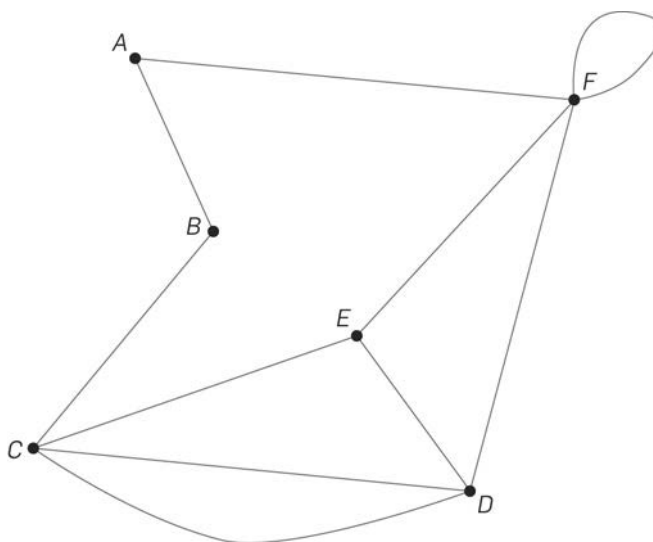
Questão de aula 1

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Grafos — conceitos base

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Considere o grafo seguinte:



- 1.1 Indique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando a sua opção:
- 1.1.1 O grafo é conexo.
 - 1.1.2 O grafo é completo.
 - 1.1.3 O grafo é simples.
 - 1.1.4 O grafo é regular.
- 1.2 Indique o grau de cada vértice.
- 1.3 Indique dois trajetos diferentes entre os vértices C e F .
- 1.4 Indique um circuito que contenha os vértices E e F .
- 1.5 Indique, caso exista, um trajeto que percorra todas as arestas do grafo uma única vez.

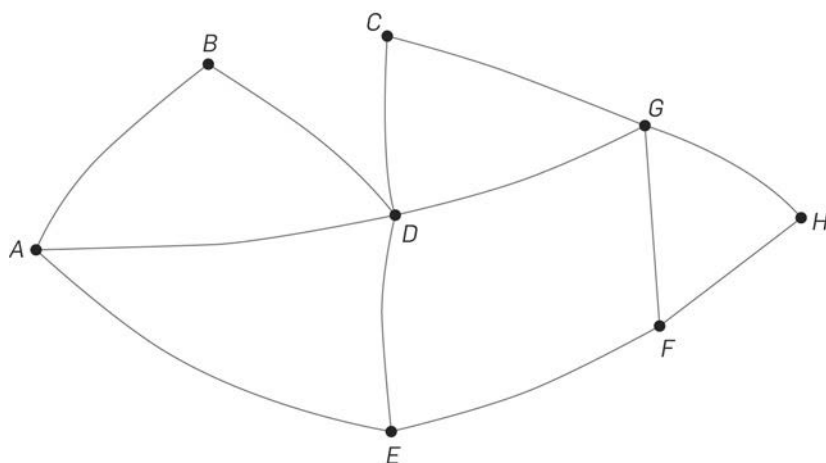
Questão de aula 2

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Circuitos de Euler

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Sete primos decidem regressar à aldeia onde costumavam, quando crianças, passar as férias de verão, em casa dos avós. Planeiam fazer uma caminhada que os levará a visitar os locais onde se divertiam juntos. Antes de partir, decidiram esquematizar os locais obrigatórios e as ligações existentes e fizeram-no através do grafo seguinte:



Os vértices do grafo representam os locais que pretendem visitar e as arestas representam os trajetos possíveis entre dois deles. Os primos acordaram que o percurso a definir deveria obedecer, simultaneamente, às seguintes condições:

- Partir e regressar à casa dos avós (vértice C) passando por todos os locais (vértices) representados.
- Percorrer todos os trajetos indicados uma única vez cada um.

1.1 Justifique que não é possível organizar o percurso pretendido.

1.2 Encontre, justificando, uma solução que repita o menor número de trajetos diretos possível. Represente a solução obtida num grafo e indique um percurso possível.

Questão de aula 3

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Circuitos de Hamilton — problema do caixeiro-viajante

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. A Marília mora em Beja. Decidiu que este ano, quando se aproximar a época natalícia, vai visitar alguns familiares que moram mais afastados: a avó em Moura, os padrinhos em Cuba, a afilhada em Serpa e a prima em Aljustrel.

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas (os valores foram arredondados às unidades):

	Beja	Cuba	Aljustrel	Serpa
Cuba	21			
Aljustrel	37	54		
Serpa	26	48	66	
Moura	60	49	94	31

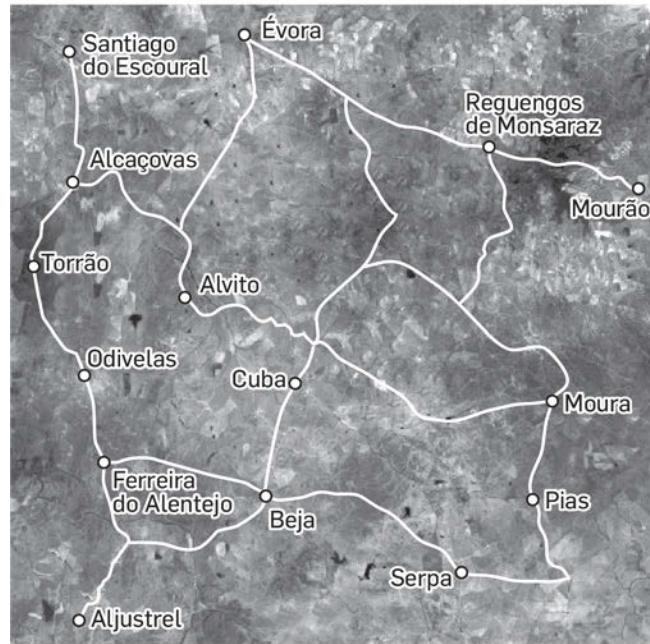
O ponto de partida e de chegada é a casa da Marília, em Beja, e as visitas não têm de seguir nenhuma ordem específica.

A Marília acha que o melhor percurso, em termos de distância, será, partindo de Beja, escolher a cidade mais próxima, desta escolher novamente a cidade mais próxima e assim sucessivamente, passando em cada cidade uma única vez e regressando, no fim, a Beja.

A Joana, a irmã da Marília, e que a vai acompanhar neste circuito, propôs-lhe a seguinte alternativa:

- 1.º Ordenar as distâncias entre cada par de cidades, por ordem crescente, indicando-se, para cada valor, o par de cidades correspondente.
- 2.º Selecionar sucessivamente as menores distâncias, atendendo a que uma cidade não poderá aparecer mais de duas vezes.
- 3.º Ordenar o percurso obtido com partida de Beja.

- 1.1 Desenhe um grafo ponderado que traduza a situação apresentada.
- 1.2 Qual é o percurso obtido pela Marília? A que distância corresponde?
- 1.3 Com a alternativa apresentada pela Joana, qual será a distância a percorrer? Indique o percurso obtido.
- 1.4 Qual das duas irmãs apresenta a melhor solução em termos de distância? Alguma das opções é viável, na realidade, sem repetir nenhuma cidade? Baseie a sua resposta no mapa seguinte.



Questão de aula 4

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Coloração de grafos

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Numa empresa de produção de *software*, estão a decorrer em simultâneo dez projetos ($A, B, \dots, J$) nos quais se encontram envolvidos dez funcionários ($F_1, F_2, \dots, F_{10}$). Na tabela seguinte foram registados os projetos em que se encontram a trabalhar cada um dos funcionários:

Funcionários	Projetos									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
F_1		X	X							
F_2				X	X					
F_3					X		X	X	X	
F_4			X			X		X		
F_5			X		X	X		X		
F_6							X		X	
F_7		X								X
F_8				X				X		X
F_9	X					X		X		
F_{10}	X	X								X

Para avaliar o ponto da situação relativamente à evolução de cada projeto, vão realizar-se várias reuniões, cada uma apenas com os participantes respetivos de cada um dos projetos, num total de dez reuniões. No entanto, nenhum funcionário deverá ter mais de uma reunião por dia.

- 1.1 Modele por um grafo a situação descrita, no qual os vértices representem os projetos e as arestas as incompatibilidades de reunir no mesmo dia.
- 1.2 Recorrendo à coloração de vértices, determine o número mínimo de dias para a realização das dez reuniões necessárias. Apresente uma proposta de agendamento das reuniões nas condições impostas e dentro de uma mesma semana.

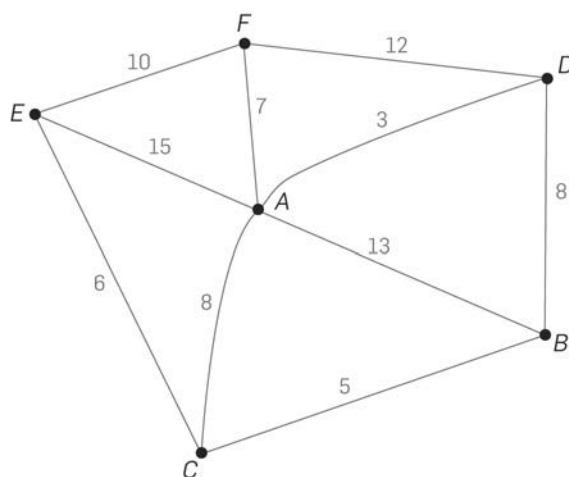
Questão de aula 5

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Árvores

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Considere o grafo seguinte:



- 1.1 Desenhe duas árvores abrangentes deste grafo e determine o peso total (soma dos pesos de todas as arestas) de cada uma.
- 1.2 Utilize o algoritmo de Kruskal para determinar a árvore geradora mínima e calcule o seu peso total.
- 1.3 Comprove o resultado anterior utilizando agora o algoritmo de Prim, descrevendo a sua aplicação.

Questão de aula 6

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Caminho crítico

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Para a concretização de um projeto, foi feita a seguinte planificação:

Tarefa	Duração (dias)	Precedências
T_1	5	Nenhuma
T_2	3	T_1
T_3	4	T_2
T_4	3	T_3
T_5	5	T_1
T_6	4	T_5
T_7	2	T_4 e T_6
T_8	7	T_7
T_9	11	Nenhuma
T_{10}	4	T_9
T_{11}	4	T_8 e T_{10}

- 1.1 Traduza a informação da tabela por meio de um digrafo.
- 1.2 Qual é a duração mínima do projeto? Para a sua resposta, considere as possíveis sequências de concretização das tarefas e a respetiva duração.
- 1.3 Quais as tarefas que constituem o caminho crítico?

Questão de aula 7

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelo linear

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. A cadeia de ginásios Em Boa Forma tinha, no final do ano de 2010, 48 000 clientes.
O departamento financeiro desta empresa concluiu que, no final de 2015, o número de clientes era de 85 mil clientes e que o aumento do número de clientes, por ano, teria sido idêntico.
 - 1.1 Qual foi o aumento anual do número de clientes nos ginásios Em Boa Forma?
 - 1.2 Qual era o número de clientes no final de 2013?
 - 1.3 Determine uma expressão que permita calcular o número de clientes no final de um certo ano em função de n , em que n representa o número de anos decorridos desde 2010.
 - 1.4 Supondo que o aumento anual de clientes nos ginásios Em Boa Forma se mantém ao longo dos anos:
 - 1.4.1 Qual será o número de clientes no final de 2019?
 - 1.4.2 Determine em que ano a cadeia de ginásios irá ultrapassar os 250 mil clientes?

Questão de aula 8

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelo exponencial

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Após a administração de um medicamento experimental, fez-se o registo, de hora a hora, da quantidade, Q , em miligramas, de substância ativa presente na corrente sanguínea de um paciente. Este registo encontra-se na tabela seguinte:

t (horas)	Q (miligramas)
0	4,76
1	4,1797
2	3,6702
3	3,227
4	2,8299
5	2,4849
6	2,182
7	1,916
8	1,6824
9	1,4773
10	1,2972

- 1.1 Que quantidade de substância ativa foi administrada no paciente?
- 1.2 Com o auxílio da calculadora gráfica e utilizando a regressão exponencial, de equação $y = a \times e^{bx}$ ou $y = a \times b^x$, determine um modelo de crescimento exponencial que se ajuste aos dados recolhidos. Indique os valores de a e de b com aproximação às centésimas.
- 1.3 De acordo com o modelo encontrado no item 1.2*:
- 1.3.1 Determine a quantidade de substância ativa na corrente sanguínea do paciente ao fim de um dia. Apresente o resultado em miligramas, arredondado às milésimas.
- 1.3.2 Ao fim de quanto tempo a quantidade de substância ativa na corrente sanguínea do paciente era igual à décima parte da quantidade administrada inicialmente? Utilize as capacidades gráficas da calculadora na resolução deste item. Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades.

* Se não resolveu o item 1.2, utilize a função $Q(t) = 4,66 \times e^{-0,13t}$ nos dois itens seguintes.

Questão de aula 9

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelo logístico

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Uma conhecida marca de telemóveis lançou no mercado um novo modelo. Na tabela seguinte, encontra-se o registo do número de unidades vendidas, t dias após o lançamento, num conjunto de lojas que detém a exclusividade de venda da marca em questão:

t (dias)	N (número de unidades vendidas)
0	254
1	349
2	458
3	572
4	679
5	772
6	846

- 1.1 Quantos telemóveis foram vendidos no dia do lançamento?
- 1.2 Com o auxílio da calculadora gráfica, utilize a regressão logística, de equação $y = \frac{c}{1 + a \times e^{-bx}}$, para determinar o modelo de crescimento logístico que se ajusta aos dados da tabela. Indique os valores de a , de b e de c , arredondados às centésimas.
- 1.3 Recorrendo ao modelo encontrado*:
- 1.3.1 Faça uma previsão para o número de telemóveis vendidos ao fim de oito dias.
- 1.3.2 Calcule ao fim de quantos dias se espera que o número de telemóveis vendidos ultrapasse o milhar de unidades. Utilize as capacidades gráficas da calculadora na resolução deste item. Apresente o resultado final arredondado às unidades.

* Se não resolveu o item 1.2, utilize o modelo $N(t) = \frac{1016,18}{1 + 3 \times e^{-0,45t}}$ nos dois itens seguintes.

Questão de aula 10

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelo logarítmico

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. O pai do Miguel precisa de perder peso: o excesso de sedentarismo fê-lo ganhar alguns quilos extra e agora decidiu aliar à prática desportiva com o Miguel uma dieta prescrita e controlada pelo médico. O Miguel decidiu apoiar o pai e, na tabela seguinte, fez o registo semanal da perda de peso do pai:

t (semanas)	P (quilogramas perdidos)
1	1,230
2	3,642
3	5,053
4	6,054
5	6,831

- 1.1 Após uma semana de dieta e desporto, o pai do Miguel pesa 86,4 quilogramas. Quanto pesava antes de iniciar este regime?
- 1.2 Recorrendo à calculadora gráfica, encontre um modelo de crescimento logarítmico, de equação $y = a + b \ln x$, que melhor se ajuste aos dados recolhidos pelo Miguel. Apresente os valores de a e de b com duas casas decimais.
- 1.3 A partir do modelo encontrado no item 1.2*:
- 1.3.1 Faça uma previsão do peso do pai do Miguel após dois meses de desporto e dieta. Apresente o resultado final arredondado às décimas.
- 1.3.2 Se o objetivo do pai do Miguel é atingir o peso de 76 quilogramas, por quanto tempo deverá prolongar esta dieta aliada à prática desportiva? Utilize as capacidades gráficas da calculadora para responder a este item. Apresente o resultado final em semanas, arredondadas às unidades.

* Se não resolveu o item 1.2, utilize o modelo $P(t) = 1,23 + 3,58 \ln x$ nos itens seguintes.

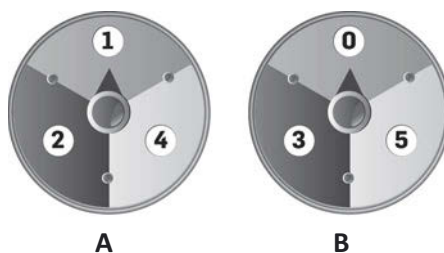
Questão de aula 11

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Fenómenos aleatórios

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar três cartas, sem reposição, de um conjunto de cartas que tem três cartas de cada uma das seguintes cores: preto, branco, azul e vermelho.
 - 1.1 Indique o subconjunto do espaço de resultados associado a cada um dos seguintes acontecimentos:
 - 1.1.1 A: «todas as cartas selecionadas são brancas»
 - 1.1.2 B: «sai uma carta branca, uma preta e uma azul»
 - 1.1.3 C: «as cartas têm todas a mesma cor»
 - 1.1.4 D: «as cartas são preta, branca, azul e vermelha»
 - 1.2 Classifique cada um dos acontecimentos anteriores.
2. Na figura encontram-se as rodas da sorte A e B. Cada roda está dividida em três setores iguais, tendo todos eles a mesma probabilidade de sair.



- 2.1 Considere a experiência que consiste em girar uma vez cada uma das rodas da sorte e anotar os números indicados pelos ponteiros. Para esta experiência, defina:
 - 2.1.1 O espaço de resultados.
 - 2.1.2 Um acontecimento impossível.
 - 2.1.3 Um acontecimento composto.
 - 2.1.4 Um acontecimento elementar.

2.2 Considere agora a experiência que consiste em girar uma vez cada uma das rodas e calcular a diferença entre os números obtidos nas rodas A e B.

2.2.1 Defina o espaço de resultados.

2.2.2 Considere os acontecimentos:

A: «a diferença dos números é um número positivo»

B: «a diferença dos números é um número primo»

C: «o valor absoluto da diferença dos números é um número menor que 2»

Represente cada um dos acontecimentos sob a forma de um subconjunto do espaço de resultados.

Questão de aula 12

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Regra de Laplace

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Num concurso de Escrita Criativa foram selecionados cinco candidatos, mas existem apenas dois prémios. Cada candidato elaborou um texto que permitiu ordená-los de 1 a 5, sendo 1 o melhor resultado e 5 o pior.

Escolhem-se aleatoriamente dois candidatos.

1.1 Defina o espaço de resultados associado a esta experiência.

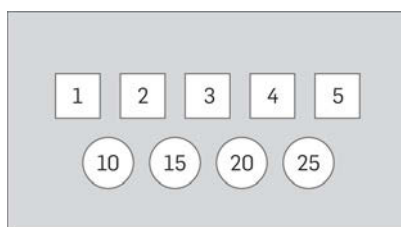
1.2 Calcule a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

1.2.1 A: «serem selecionados os dois melhores»

1.2.2 B: «ser selecionado o melhor e um dos dois piores»

2. No casino Alea, em La Place, um dos jogos favoritos é «Riscar, Pintar e Ganhar».

Cada apostador compra um boletim de jogo, tal como o que se representa na figura.



Para preencher o boletim e efetuar, assim, a respetiva aposta, cada apostador deve riscar um número da linha superior, selecionando um número de 1 a 5, e pintar o círculo referente a um número da linha inferior do boletim, selecionando um número múltiplo de 5, de 10 a 25.

Depois de feitas as apostas, os funcionários do casino realizam uma experiência aleatória que consiste em dois sorteios: sorteiam um número de 1 a 5 e depois sorteiam um número múltiplo de 5, de 10 a 25.

- 2.1 Quantos são os casos em que o produto dos números sorteados é um número par? Justifique.

2.2 Neste jogo, são atribuídos três prémios, de acordo com os seguintes critérios:

- O primeiro prémio é atribuído aos apostadores que acertem simultaneamente nos dois números.
- O segundo prémio é atribuído aos apostadores que acertem só no número de 1 a 5.
- O terceiro prémio é atribuído aos apostadores que acertem só no número múltiplo de 5, de 10 a 25.

Considere que, em cada um dos sorteios, os números têm igual probabilidade de serem sorteados.

O Albertino, que conhece este jogo, decidiu calcular o valor da probabilidade de um apostador obter o segundo prémio e o valor da probabilidade de obter o terceiro prémio.

Chegou à seguinte conclusão:

«A probabilidade de um apostador obter o segundo prémio é de $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de um apostador obter o terceiro prémio é de $\frac{1}{4}$.»

Justifique que nenhum dos valores das probabilidades apresentadas pelo Albertino está correto.

Na sua resposta, elabore uma pequena composição em que refira os seguintes aspetos:

- Explicação do número de casos possíveis da experiência aleatória.
- Apresentação do valor da probabilidade correspondente ao segundo prémio, com a devida explicação do número de casos favoráveis a este prémio.
- Apresentação do valor da probabilidade correspondente ao terceiro prémio, com a devida explicação do número de casos favoráveis a este prémio.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2010, 2.ª fase

Questão de aula 13

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Probabilidade condicional

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição da população residente em Portugal, segundo o Censo de 2011.

		HM	H
Total		10 562 178	5 046 600
Nível etário	De 0 a 4 anos	482 647	246 396
	De 5 a 9 anos	525 087	268 965
	De 10 a 14 anos	564 595	288 638
	De 15 a 19 anos	565 250	288 525
	De 20 a 24 anos	582 065	293 023
	De 25 a 29 anos	656 076	324 848
	De 30 a 34 anos	773 567	378 734
	De 35 a 39 anos	824 683	402 307
	De 40 a 44 anos	773 098	374 962
	De 45 a 49 anos	770 294	370 989
	De 50 a 54 anos	722 360	346 248
	De 55 a 59 anos	677 651	322 095
	De 60 a 64 anos	634 741	298 546
	De 65 a 69 anos	551 701	253 004
	De 70 a 74 anos	496 438	220 461
	De 75 a 79 anos	429 706	180 131
	De 80 a 84 anos	297 888	113 325
	Com 85 ou mais anos	234 331	75 403

Fonte: INE

Nota: Na tabela representa-se por H o sexo masculino e por HM o número total de indivíduos, quer sejam do sexo masculino quer do feminino.

- 1.1** Teoricamente, considera-se que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer rapariga, ou seja, 50%. Será que a tabela anterior sustenta essa hipótese? Justifique adequadamente a resposta.
- 1.2** Qual a probabilidade de, escolhendo um indivíduo ao acaso na população, ele ter idade para ser reformado (admita que um indivíduo com 65 ou mais anos pode ser reformado). Apresente o resultado com duas casas decimais.
- 1.3** Suponha agora que foi atribuído a cada indivíduo da população um número de 1 a 10 562 178. Escolhendo um número inteiro, ao acaso, verificou-se que:
- 1.3.1** Pertencia a um indivíduo com idade para ser reformado. Qual a probabilidade de esse número pertencer a uma mulher? Apresente o resultado com uma casa decimal.
 - 1.3.2** Pertencia a um indivíduo do sexo feminino. Qual a probabilidade de ter entre 20 e 39 anos? Apresente o resultado com duas casas decimais.
 - 1.3.3** Pertencia a um indivíduo com menos de 20 anos. Qual a probabilidade de ser do sexo masculino? Apresente o resultado com duas casas decimais.

Questão de aula 14

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Probabilidade total. Regra de Bayes

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Na escola Arco-Íris fez-se um estudo acerca dos cursos de prosseguimento de estudos escolhidos, no 10.º ano, pelos alunos da escola.
Sabe-se que 20% dos rapazes e 10% das raparigas escolhem Línguas e Humanidades e que $\frac{1}{3}$ dos alunos do 10.º ano são do sexo masculino.
Escolhendo um aluno do 10.º ano, ao acaso, qual é a probabilidade de:
 - 1.1 Estudar Línguas e Humanidades.
 - 1.2 Ser rapariga, sabendo que estuda Línguas e Humanidades.
2. Uma caixa, A, contém três bolas vermelhas e duas cinzentas e outra caixa, B, contém duas bolas vermelhas e oito cinzentas. Lança-se uma moeda. Se sair face euro, extrai-se uma bola da caixa A; se sair face nacional, extrai-se uma bola da caixa B.
 - 2.1 Escolhe-se uma caixa ao acaso e tira-se uma bola. Qual a probabilidade de a bola ser cinzenta?
 - 2.2 Extrai-se uma bola vermelha. Qual a probabilidade de ter saído face euro?

Questão de aula 15

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelos de probabilidade. Valor médio e variância populacional

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Numa fábrica, duas máquinas, A e B, produzem o mesmo tipo de artigo, que poderá apresentar zero, um, dois ou três defeitos. Num lote de 1000 artigos produzidos por cada uma das máquinas, verificou-se que o número de defeitos, por artigo, se distribuía, para cada uma das máquinas, de acordo com a seguinte tabela:

	Número de defeitos por artigo			
	0	1	2	3
Máquina A	250	125	375	250
Máquina B	125	125	250	500

- 1.1 A partir da tabela anterior, obtenha modelos de probabilidade para o número de defeitos nos artigos produzidos, respetivamente, pela máquina A e pela máquina B.
- 1.2 Em média, qual das máquinas produz artigos com mais defeitos? Justifique adequadamente a sua resposta.
- 1.3 Calcule o desvio-padrão em cada uma das distribuições definidas no item 1.1. Apresente o resultado com duas casas decimais.
- 1.4 Inadvertidamente, misturou-se a produção das duas máquinas. Retirou-se um artigo, ao acaso, desta produção e verificou-se que tinha três defeitos. Qual a probabilidade, p_1 , de ter sido produzido pela máquina B?
- 1.5 Calcule a probabilidade, p_2 , de um artigo escolhido ao acaso da produção referida no item 1.4 ter sido produzido pela máquina B. Faça uma pequena composição onde compare e comente os valores obtidos para p_1 e p_2 .

Questão de aula 16

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelos discretos

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. O número médio de automóveis que chegam a um parque de estacionamento é de três em cada 2 minutos. Sabe-se que o número de automóveis que chegam ao parque é modelado por uma distribuição de Poisson.
Calcule a probabilidade de:
 - 1.1 Num período de 2 minutos chegarem ao parque no máximo dois automóveis.
 - 1.2 Num período de 6 minutos não chegar ao parque qualquer automóvel.
2. Um hospital necessita de sangue do tipo O negativo. Considere que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue é de 0,05. Os dadores de sangue chegam ao hospital para fazerem a sua doação.
 - 2.1 Calcule a probabilidade de o primeiro dador com sangue do tipo O negativo ser:
 - 2.1.1 O primeiro a chegar.
 - 2.1.2 O terceiro a chegar.
 - 2.2 Quantos dadores se espera que cheguem ao hospital até aparecer um com sangue do tipo O negativo?
3. Dos alunos da turma de MACS, sabe-se que 25% praticam desporto. Escolhendo ao acaso dez desses alunos, determine, em percentagem, a probabilidade de:
 - 3.1 Exatamente dois praticarem desporto. Apresente o resultado com duas casas decimais.
 - 3.2 Pelo menos oito praticarem desporto. Apresente o resultado com três casas decimais.
 - 3.3 No máximo cinco praticarem desporto.

Questão de aula 17

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Modelos contínuos

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. A temperatura mínima diária, X , numa certa localidade varia uniformemente no intervalo de 15 a 23 °C.
 - 1.1 Determine a média de X .
 - 1.2 Calcule a probabilidade de a temperatura mínima diária:
 - 1.2.1 Ser superior a 20 °C.
 - 1.2.2 Ser inferior a 18 °C.
2. O tempo de vida, T , de uma lâmpada (em unidades de 1000 horas) segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$.
 - 2.1 Determine a probabilidade, em percentagem arredondada às centésimas, de o tempo de duração da lâmpada:
 - 2.1.1 Ser inferior a 0,8.
 - 2.1.2 Ser superior a 0,5.
 - 2.1.3 Estar entre 0,5 e 1.
 - 2.2 Qual é o tempo médio de vida (em horas) da lâmpada?

Questão de aula 18

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Distribuição normal

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Foram realizados estudos meteorológicos acerca da precipitação mensal num dado período e numa certa região. Concluiu-se que a precipitação mensal segue uma distribuição normal de média de 30 milímetros e desvio-padrão de 5 milímetros.

1.1 Determine a probabilidade de a precipitação mensal nessa região:

1.1.1 Estar entre os 25 e 35 milímetros.

1.1.2 Estar entre os 15 e 35 milímetros.

1.1.3 Ser inferior a 20 milímetros.

1.2 Qual seria o valor da precipitação para que a probabilidade de a precipitação ser superior a esse valor seja aproximadamente 2,3%?

2. O tempo de espera numa fila de um hipermercado segue uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio-padrão de 2 minutos.

Determine a probabilidade de o tempo de espera:

2.1 Ser inferior a 5 minutos.

2.2 Ser superior a 9,5 minutos.

2.3 Estar entre 7 e 10 minutos.

Apresente os resultados em percentagem, arredondados às centésimas.

Questão de aula 19

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Intervalos de confiança para o valor médio

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. A altura dos alunos do 11.º ano de uma escola segue uma distribuição aproximadamente normal. Para estimar a altura média dessa população, foi observada a altura de 30 alunos do 11.º ano, obtendo-se $\bar{x} = 175$ centímetros e $s = 15$ centímetros.

1.1 Determine um intervalo de confiança para a média populacional de:

1.1.1 90%.

1.1.2 95%.

1.1.3 99%.

1.2 O que acontece à amplitude do intervalo quando a confiança aumenta?

1.3 O que aconteceria à amplitude do intervalo se, para a mesma confiança, a dimensão da amostra aumentasse?

2. Uma pastelaria fabrica bolos cujo peso ideal deve ser aproximadamente de 300 gramas. Para estimar o peso dos bolos confeccionados, recolheu-se uma amostra de dimensão 30:

250	265	267	269	271	275	277	281	283	284
287	289	291	293	293	298	301	303	306	307
307	309	311	315	322	319	324	328	335	339

Determine um intervalo de confiança de 95% para o peso médio dos bolos confeccionados e verifique se este contém o valor ideal para o peso dos bolos.

Questão de aula 20

Nome _____ Data ____ / ____ / ____

Intervalos de confiança para a proporção

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Em cálculos intermédios, sempre que precisar de efetuar arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1. Antes da eleição para a presidência de uma coletividade, foi realizada uma sondagem a 1000 elementos da população. Verificou-se que o candidato A obteve 51% das intenções de voto.
 - 1.1 Determine um intervalo de 95% de confiança para a proporção de eleitores com intenção de votar no candidato A.
 - 1.2 Para o intervalo de confiança determinado, qual é a margem de erro?
 - 1.3 Tendo em conta o intervalo determinado anteriormente, o candidato A pode considerar que tem a vitória garantida?
 - 1.4 Para diminuir a margem de erro, o que deve ser feito?
 - 1.5 Determine a dimensão da amostra para que a margem de erro seja inferior a 0,01 com uma confiança de 95%.

Teste de avaliação 1

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

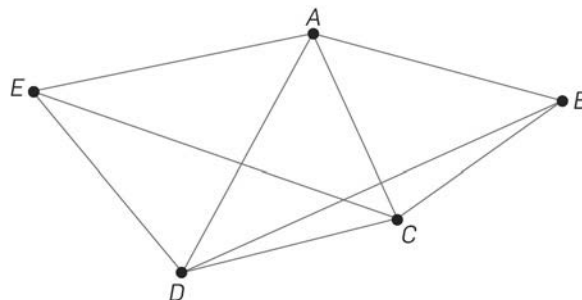
Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

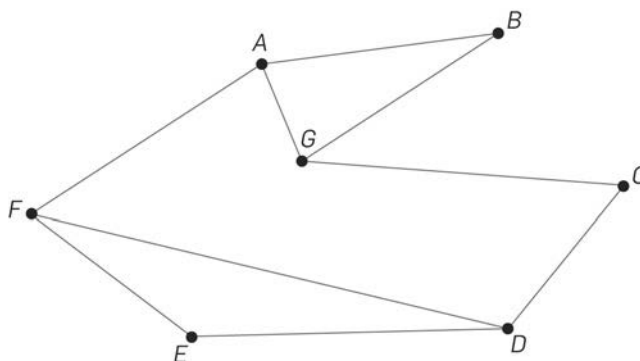
- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Considere o grafo seguinte.



- 1.1 O grafo representado é completo? Justifique.
- 1.2 Indique o grau de cada vértice.
- 1.3 O grafo da figura é regular? Justifique.
- 1.4 Verifique se o grafo admite algum trajeto euleriano e, em caso afirmativo, indique-o.
- 1.5 Justifique que não é possível encontrar um circuito euleriano.
- 1.6 Encontre a melhor eulerização do grafo e, a partir do grafo eulerizado, indique um circuito de Euler.
- 1.7 O grafo representado na figura é hamiltoniano? Justifique.

2. Suponha que o percurso $A B C A G F E D C E B F A$ é um circuito euleriano para um determinado grafo. Indique o grau de cada vértice, apresentando um grafo que sustente a sua resposta e contenha o circuito indicado.
3. No grafo seguinte, as arestas representam a rede viária de uma certa cidade e os vértices representam as freguesias:



Numa composição:

- Justifique que não é possível, começando e acabando na freguesia C , visitar todas as outras freguesias sem repetir nenhuma estrada de ligação.
 - Indique, justificando, qual o número mínimo de estradas a repetir para que seja possível efetuar o percurso pretendido e apresente um grafo com a solução encontrada.
4. A tabela seguinte contém os preços, em euros, dos bilhetes de comboio entre algumas cidades portuguesas:

	Lisboa	Porto	Coimbra	Braga
Porto	24,30 €			
Coimbra	19,20 €	13,20 €		
Braga	25,80 €	11,70 €	17,20 €	
Guarda	20,70 €	20,10 €	12,70 €	23,00 €

- 4.1 Desenhe um grafo ponderado que represente os dados da tabela, indicando o significado dos vértices e das arestas. Pode utilizar a primeira letra de cada cidade para a representar no grafo.

4.2 A Joana quer visitar todas as cidades da tabela, mas precisa de determinar qual será o melhor percurso, isto é, gastando o mínimo possível.

4.2.1 Sabendo que a Joana começa e acaba o percurso em Lisboa, determine o melhor percurso, usando o algoritmo do vizinho mais próximo. Quanto irá gastar?

4.2.2 Utilize agora o algoritmo das arestas classificadas para encontrar o melhor percurso. Qual é esse percurso e quanto terá a Joana de gastar?

5. Uma empresa de produtos químicos vai proceder ao transporte de sete tipos de produtos. Como alguns deles podem reagir entre si durante o transporte, terão de ser acondicionados em compartimentos diferentes.

Na tabela seguinte, registaram-se as possibilidades de reação entre os diferentes produtos a transportar:

Produto	Reage com
1	2, 6, 7
2	1, 3, 4
3	2, 4, 5
4	2, 3, 5, 6
5	3, 4, 6, 7
6	1, 4, 5, 7
7	1, 5, 6

5.1 Modele através de um grafo a situação descrita, referindo o significado dos vértices e das arestas.

5.2 Usando o processo de coloração de vértices de grafos, determine o número mínimo de compartimentos necessários para o transporte dos sete produtos.

5.3 Indique uma combinação possível para acondicionar os diferentes produtos.

Matriz do Teste de avaliação 1

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	8
	Resposta extensa	7

Conteúdos

Tema 3 — Modelos matemáticos

- Modelos de grafos
 - Conceitos básicos
 - Trajetos e circuitos eulerianos, circuitos hamiltonianos
 - Problema do carteiro chinês — eulerização de grafos
 - Problema do caixeiro-viajante
 - Coloração de grafos

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	2	3	4.1	4.2.1	4.2.2	5.1	5.2	5.3
Cotação	5	5	5	10	10	15	10	15	25	15	20	20	15	20	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação 2

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

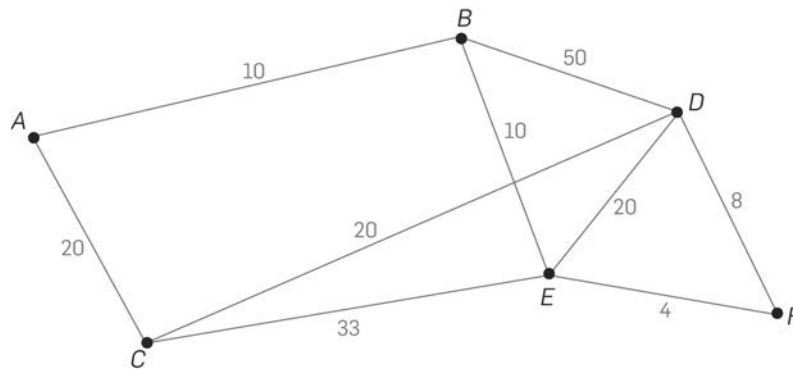
- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Uma empresa pretende ligar as suas sucursais com ligações de telefone e internet seguras e exclusivas. Assim, solicitou um orçamento a uma outra empresa, especializada em telecomunicações. Em vez de um único valor total, a empresa de telecomunicações forneceu os valores para cada ligação entre as diversas sucursais, cabendo ao cliente a decisão sobre quais as ligações a efetuar. Na tabela seguinte, encontram-se os custos por cada ligação, em dezenas de euros por ano:

	A	B	C	D
B	40			
C	85	10		
D	96	132	68	
E	50	60	115	125

- 1.1 Represente a situação descrita por um grafo ponderado.
- 1.2 Utilizando o algoritmo de Kruskal, determine a árvore abrangente mínima. Explique o procedimento que leva à obtenção da árvore abrangente mínima usando este algoritmo.
- 1.3 Indique quais as ligações a efetuar e determine o custo mínimo deste serviço.

2. Considere o grafo seguinte:



Utilize o algoritmo de Prim para encontrar a árvore geradora mínima e indique o seu comprimento. Explique todo o procedimento, salientando as diferenças principais entre este algoritmo e o algoritmo de Kruskal.

3. Um arquiteto elaborou uma lista de dez tarefas a realizar para a concretização de um certo projeto. Na tabela seguinte, encontra-se registado o tempo necessário para cada uma das tarefas (duração, em semanas) e, quando existem, as tarefas que devem ser previamente concluídas (precedências):

Tarefa	Duração (em semanas)	Precedências
T_1	6	Nenhuma
T_2	4	Nenhuma
T_3	4	Nenhuma
T_4	5	T_3
T_5	1	T_4
T_6	7	T_2
T_7	3	T_1
T_8	4	T_7
T_9	5	T_5 e T_6
T_{10}	3	T_8 e T_9

- 3.1 Represente por um digrafo a situação, incluindo o significado dos elementos (arestas e vértices) que o constituem.
- 3.2 Indique as possíveis sequências de concretização deste projeto e a respetiva duração.
- 3.3 Indique o tempo mínimo, em semanas, necessário para a realização de todas as tarefas que possibilitam a concretização do projeto.

4. Uma empresa decidiu fazer o estudo da evolução do salário médio mensal dos seus funcionários entre 2005 e 2015. Na tabela seguinte, encontram-se os dados obtidos na pesquisa:

Número de anos decorridos desde o início da pesquisa	Salário médio mensal (em euros)
0	837,61
1	864,93
2	890,25
3	917,57
4	945,80
5	973,21
6	998,37
7	1027,80
8	1056,10
9	1081,78
10	1110,80

- 4.1 De acordo com os dados da tabela, qual era o salário médio mensal dos funcionários desta empresa em 2010?
- 4.2 Admita que existe um modelo em que a relação entre o número de anos decorrido desde o início da pesquisa (x) e o salário médio mensal dos funcionários da empresa (y) seja aproximadamente linear. Com o auxílio da calculadora gráfica, determine esse modelo, de equação $y = ax + b$. Apresente os valores de a e b com arredondamento às centésimas.
- 4.3 Recorrendo ao modelo determinado no item 4.2*:
- 4.3.1 Qual é a previsão para o salário médio mensal dos funcionários desta empresa em 2020? Apresente o resultado, em euros, com arredondamento aos centésimos.
- 4.3.2 A partir de que ano é provável que o salário médio mensal destes funcionários passe a ser superior a 1500 €? Justifique.

* Se não resolveu o item 4.2, utilize o modelo $y = 27,31x + 837,61$ nos dois itens seguintes.

5. Considere que o número de habitantes de uma certa vila evoluiu, a partir de 1 de janeiro de 1990, de acordo com o modelo:

$$N(t) = 72 \times 1,05^t, \quad t \text{ em anos e } N \text{ em centenas de habitantes}$$

- 5.1** Quantos habitantes existiam na vila no início de 1990?
- 5.2** Determine, de acordo com este modelo, o número de habitantes desta vila ao fim de, exatamente, uma década.
- 5.3** Será que a vila ultrapassou os 10 000 habitantes ainda no século xx? Justifique.
- 5.4** Determine o momento em que o número de habitantes da vila atinge os 16 milhares. Apresente o resultado final arredondado às unidades, indicando o mês e o ano. Nos cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve pelo menos quatro casas decimais.

Matriz do Teste de avaliação 2

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	6
	Resposta extensa	9

Conteúdos

Tema 3 — Modelos matemáticos

- Modelos de grafos
 - Árvores
 - Caminho crítico
- Modelos populacionais
 - Modelo linear
 - Modelo exponencial

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3.1	4.3.2	5.1	5.2	5.3	5.4
Cotação	15	20	15	20	20	15	5	5	20	10	10	5	10	15	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação 3

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Charles Richter (1900–1985) foi um sismólogo que criou a conhecida escala de Richter para medir a magnitude de um terramoto, quantificando a energia libertada. O modelo utilizado para determinar a magnitude, M , de um terramoto em função da amplitude, A , das ondas sísmicas registada no sismógrafo, situado a 100 quilómetros do epicentro, é:

$$M = \log \frac{A}{A_0}, \text{ sendo } A_0 = 1 \text{ uma amplitude de referência}$$

- 1.1 Calcule a magnitude de um terramoto que registou, no sismógrafo, uma amplitude igual a 10^4 .
- 1.2 Determine a amplitude das ondas sísmicas registada no sismógrafo para um terramoto de magnitude igual a 4,5. Apresente o resultado arredondado às unidades.
- 1.3 Determine a razão entre um terramoto de magnitude $M_1 = 8,4$ e outro de magnitude $M_2 = 5,6$ e relacione tanto as magnitudes como as respetivas amplitudes. Apresente o resultado final arredondado às unidades.

2. Na tabela seguinte, foram registados, após a introdução de alguns peixes de uma espécie de água salgada, os seus comprimentos médios, durante algumas semanas:

Número de semanas	Comprimento médio (em decímetros)
0	4,21
1	6,66
2	10,19
3	14,87
4	20,47
5	26,36
6	31,80
7	36,25

- 2.1** De quanto foi o aumento do comprimento médio desta espécie durante o período em estudo? Apresente o resultado em metros.
- 2.2** Com o auxílio da calculadora gráfica, utilize a regressão logística, de equação $y = \frac{c}{1 + a \times e^{-bx}}$, para determinar o modelo de crescimento logístico que se ajusta aos dados da tabela. Indique os valores de a , de b e de c arredondados às centésimas.
- 2.3** Considerando que este estudo se prolongou e recorrendo ao modelo determinado no item 2.2*:
- 2.3.1** Determine o comprimento médio destes peixes ao fim de dez semanas. Apresente o resultado em milímetros, arredondado às unidades.
- 2.3.2** Ao fim de quanto tempo se espera que esta espécie atinja um comprimento médio de 4,5 metros? Apresente o resultado em semanas e dias, arredondados às unidades.
3. Considere a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Indique acontecimentos com as seguintes probabilidades:

3.1 $\frac{1}{6}$

3.2 $\frac{2}{3}$

3.3 $\frac{7}{6}$

* Se não resolveu o item 2.2, utilize o modelo $y = \frac{45,70}{1 + 9,85 \times e^{-0,53x}}$ nos dois itens seguintes.

4. Um teste de MACS tem quatro itens de seleção. Cada um destes itens tem duas hipóteses de resposta (Verdadeiro ou Falso), das quais apenas uma está correta.

4.1 Construa um diagrama em árvore para esquematizar a situação descrita.

4.2 Qual é a probabilidade de um aluno:

4.2.1 Acertar em todos os itens de seleção?

4.2.2 Falhar em todos os itens de seleção?

4.2.3 Acertar num único item?

4.2.4 Acertar em pelo menos dois itens?

5. O Departamento de Matemática do Agrupamento de escolas da Portela é constituído por dois grupos de professores:

- Os professores do 2.º Ciclo, com dez professores e cinco professoras.
- Os professores do 3.º Ciclo e Secundário, com seis professores e seis professoras.

Escolhe-se, ao acaso, um dos grupos de professores e, em seguida, um elemento para representar o respetivo Departamento.

Considere os seguintes acontecimentos:

A : «o grupo de professores é do 2.º Ciclo»

B : «o elemento escolhido é uma professora»

Determine o valor das seguintes probabilidades:

5.1 $P(A)$

5.3 $P(B | A)$

5.5 $P(A \cap \overline{B})$

5.2 $P(A \cap B)$

5.4 $P(B)$

5.6 $P(A | B)$

6. Considere dois acontecimentos, A e B , de um espaço amostral em que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ e

$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Mostre que A e B são acontecimentos independentes.

Matriz do Teste de avaliação 3

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	14
	Resposta extensa	8

Conteúdos

Tema 3 — Modelos matemáticos

- Modelos populacionais
 - Modelo logístico
 - Modelo logarítmico

Tema 4 — Modelos de probabilidades

- Regra de Laplace
- Probabilidade condicional
- Acontecimentos independentes

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3.1	2.3.2	3.1	3.2	3.3
Cotação	5	10	15	5	20	10	10	5	5	5

Item	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3	4.2.4	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	6
Cotação	15	5	5	5	5	5	10	10	15	10	15	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação 4

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

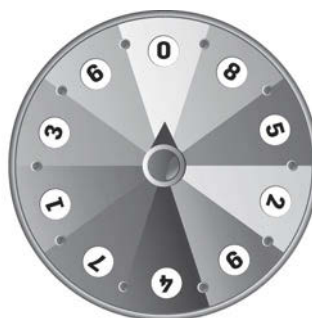
Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Observe a roda da sorte que se segue, com dez setores, numerados de 0 a 9, em que todos os setores têm a mesma probabilidade de sair.



- 1.1 Considere a experiência aleatória que consiste em girar a roda uma vez e anotar o número que sai.

1.1.1 Indique o espaço de resultados associado a esta experiência.

1.1.2 Escreva, na forma de subconjunto do espaço de resultados, cada um dos seguintes acontecimentos:

- A : «sair número par»
- B : «sair número primo»
- C : «sair número maior que 6 e múltiplo de 4»
- D : «sair número divisor de 4 e número maior que 4»
- E : «sair número natural menor que 10 ou sair o número 0»

1.1.3 Classifique cada um dos acontecimentos do item 1.1.2.

- 1.2** Considere agora a experiência aleatória que consiste em girar duas vezes consecutivas a roda da sorte e anotar os números saídos.
- 1.2.1** Quantos são os elementos do espaço de resultados?
- 1.2.2** Dê exemplos de dois acontecimentos:
- 1.2.2.1** Contrários.
- 1.2.2.2** Incompatíveis, mas não contrários.
- 1.2.3** Indique o subconjunto do espaço de resultados associado a cada um dos acontecimentos seguintes:
- 1.2.3.1** X : «sair o mesmo número nos dois giros»
- 1.2.3.2** Y : «sair pelo menos um 0 nos dois giros»
- 1.2.3.3** Z : «o produto dos dois números ser igual a 4»
- 2.** Na escola da Portela, foi realizado um inquérito acerca da participação dos alunos do 11.º ano nos eventos do Dia da Escola.
- Os eventos foram: A — Arte com História, C — *Show* de Ciência e M — Jogos matemáticos.
- Dos 190 alunos inquiridos, obtiveram-se os seguintes resultados:
- 87 participaram no evento A .
 - 93 participaram no evento M .
 - 67 participaram no evento C .
 - 32 participaram em A e M .
 - 12 participaram em C e M .
 - 17 participaram em A e C .
 - 2 participaram nos três eventos.
- Escolhendo, ao acaso, um dos alunos inquiridos, determine a probabilidade de:
- 2.1** Não ter participado em nenhum evento.
- 2.2** Ter participado, no máximo, num dos eventos.
- 2.3** Ter participado em pelo menos dois eventos.
- 3.** Considere um baralho com 40 cartas, completo, e a experiência que consiste em extrair sucessivamente duas cartas do baralho.
- Determine a probabilidade de:
- 3.1** Saírem duas figuras, se a extração for feita sem reposição.
- 3.2** Sair pelo menos uma carta de copas, se a extração for feita com reposição.

4. Considere o espaço amostral Ω associado a uma experiência aleatória e os acontecimentos A e B , tais que:

- $P(A \cup B) = 0,45$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8$
- $P(A \cap B) = 2P(A \cap \overline{B})$

Determine o valor de $P(B)$.

5. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados cúbicos perfeitos, com as faces numeradas de 1 a 6, e anotar os números que ficam nas faces voltadas para cima. Seja X a variável aleatória que a cada lançamento faz corresponder o quadrado da diferença dos números anotados.

5.1 Construa uma tabela que represente a função massa de probabilidade da variável aleatória X .

5.2 Determine o valor médio e o desvio-padrão da distribuição da variável aleatória X . Apresente o resultado arredondado às centésimas.

6. O conteúdo líquido das garrafas de 330 mililitros de um refrigerante segue uma distribuição normal de valor médio de 330 mililitros e desvio-padrão de 2 mililitros.

6.1 Determine a percentagem de garrafas cujo conteúdo é inferior a 332 mililitros.

6.2 Numa amostra de 200 garrafas, quantas deverão ter menos de 328 mililitros?

Matriz do Teste de avaliação 4

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	6
	Resposta extensa	13

Conteúdos

Tema 4 — Modelos de probabilidades

- Fenómenos aleatórios
- Regra de Laplace
- Probabilidade condicional
- Teorema da probabilidade total
- Regra de Bayes
- Distribuição normal

Cotações

Item	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.2.1	1.2.2.1	1.2.2.2	1.2.3.1	1.2.3.2	1.2.3.3
Cotação	6	15	10	8	8	8	10	10	8

Item	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4	5.1	5.2	6.1	6.2
Cotação	10	15	15	8	12	15	12	10	10	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação 5

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

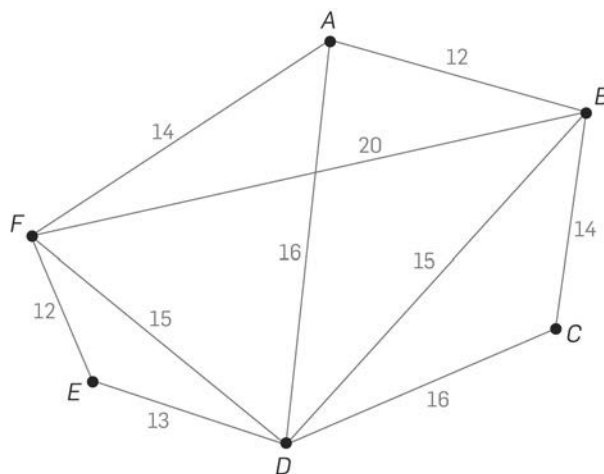
Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Considere o grafo seguinte:



- 1.1 Indique, caso exista, um percurso de Euler.
- 1.2 O grafo é euleriano? Justifique e, caso não seja, eulerize-o.
- 1.3 Aplique o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas para determinar um circuito de comprimento mínimo. Apresente o percurso obtido bem como o seu comprimento.
- 1.4 Determine a árvore geradora mínima usando o algoritmo de Prim e indique o seu comprimento.

2. Uma agência de notícias fez uma pesquisa de opinião sobre as intenções de voto em dois candidatos à presidência de um clube desportivo, C_A e C_B . Verificou-se que o número de votantes num ou noutro candidato variava em função do tempo, t , em anos, de acordo com os modelos:

- Para o candidato C_A : $C_A(t) = 1,4 \times 1,2^t$, em milhares.
- Para o candidato C_B : $C_B(t) = 2,8 \times 0,3^t$, em milhares.

Responda aos itens seguintes considerando que esta pesquisa teve início a 1 de fevereiro de 2016.

- 2.1 Determine o número de eleitores que votariam em cada um dos candidatos a 1 de fevereiro de 2016, indicando qual se encontrava em vantagem.
- 2.2 Verifique que a 1 de maio de 2016 a razão entre o número de votantes no candidato A e o número de votantes no candidato B é inferior a 1. Interprete este resultado no contexto da situação.
- 2.3 Determine, de acordo com esta pesquisa, ao fim de quanto tempo é que os candidatos estiveram empatados e qual era, nesse momento, o número de votantes. Apresente o resultado final arredondado às unidades.
- 2.4 Se as eleições se realizarem a 1 de setembro de 2016, qual será o candidato vencedor? Com quantos votos? Apresente o resultado final arredondado às unidades.
- 2.5 Admitindo que não houve votos nulos nem em branco nas eleições de 1 de setembro de 2016, determine a percentagem de votos do candidato vencido. Apresente o resultado final arredondado às centésimas.

3. O esturjão é uma espécie de peixe conhecido pelo famoso caviar produzido a partir das suas ovas.

Admita que o comprimento médio, em centímetros, de um grupo de uma certa espécie de esturjão, a partir do momento em que é colocado num viveiro, é dado pelo modelo:

$$C(t) = 8,35 + 43,2 \ln(t + 1), \quad t \geq 0 \text{ em anos}$$

- 3.1 Determine o comprimento médio dos esturjões no momento em que são colocados no viveiro.
- 3.2 Calcule ao fim de quanto tempo o comprimento médio dos esturjões atinge dez vezes o comprimento inicial. Apresente o resultado em anos e meses, arredondados às unidades.
- 3.3 Uma outra espécie de esturjão é colocada no mesmo viveiro e no mesmo momento que a primeira espécie. Para esta segunda espécie, o comprimento médio, em centímetros, é dado pelo modelo:

$$E(t) = 3,82 + 34,6 \ln(2t + 1), \quad t \geq 0 \text{ em anos}$$

- 3.3.1 Qual a diferença entre os comprimentos médios das duas espécies no momento em que são colocados no viveiro?

3.3.2 Numa composição, e com o auxílio da calculadora gráfica, faça um estudo comparativo da evolução dos comprimentos médios das duas espécies durante os 15 anos após a introdução das espécies no viveiro. Na sua resposta deve:

- Obter os gráficos dos dois modelos.
- Determinar os momentos em que os comprimentos das duas espécies são iguais, indicando esse valor com arredondamento às centésimas, e os instantes em que se verifica, em anos e meses, arredondados às unidades.
- Descrever a evolução dos comprimentos médios das duas espécies, desde o momento em que são introduzidas no viveiro até ao fim dos 15 anos do estudo.

4. Perguntou-se a 84 portugueses adultos quanto planeavam gastar nas férias de verão nesse ano. A média obtida foi 850 €.

4.1 Identifique a população e a amostra.

4.2 O que representa o valor 850 €: a estatística ou o parâmetro?

4.3 Comente a afirmação: «O gasto médio da população portuguesa nas férias de verão, no ano em questão, será de 850 €.»

Admita agora que o gasto médio da população portuguesa nas férias de verão é de 950 € com um desvio-padrão de 250 €.

4.4 Caracterize a distribuição de amostragem da média para uma amostra de dimensão 84. Se necessário, arredonde o resultado a três casas decimais.

4.5 Calcule a probabilidade de obter, para a média da distribuição de amostragem da média, um valor (apresente os resultados em percentagem, com duas casas decimais):

4.5.1 Menor ou igual a 1000 €.

4.5.2 Entre 860 € e 1020 €.

Matriz do Teste de avaliação 5

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	12
	Resposta extensa	7

Conteúdos

Tema 3 — Modelos matemáticos

- Modelos de grafos
- Modelos populacionais
 - Modelo exponencial
 - Modelo logístico

Tema 5 — Inferência estatística

- Métodos de amostragem
- Distribuição de amostragem
- Teorema do limite central

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1
Cotação	5	10	15	15	6	12	12	10	5	5

Item	3.2	3.3.1	3.3.2	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5.1	4.5.2
Cotação	10	10	25	10	5	10	10	10	15

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste de avaliação 6

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. O restaurante Fininho tem dois tipos de saladas, A e B. Sabe-se que 20% dos clientes do sexo masculino preferem a salada A; 30% dos clientes do sexo feminino escolhem a salada B e 75% dos clientes são mulheres.

Considere os acontecimentos A: «o cliente prefere a salada A» e B: «o cliente é mulher».

Escolhendo um cliente do restaurante, ao acaso, calcule, sob a forma de fração irredutível, a probabilidade de:

- Ser homem.
 - Escolher a salada A sabendo que é homem.
 - Escolher a salada B se for mulher.
 - Ser homem e escolher a salada A.
 - Ser uma mulher que escolheu a salada A.
2. O tempo que um trabalhador demora a produzir uma peça é uma variável aleatória cuja distribuição é dada pela tabela que se segue:

Tempo (x_i)	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

- 2.1 Determine o tempo médio que o trabalhador demora a produzir uma peça.

- 2.2** Por cada peça produzida, o trabalhador ganha 2 €, mas se produz a peça em menos de 6 minutos, ganha 0,50 € por cada minuto poupado. Por exemplo, se produz a peça em 4 minutos, recebe mais 1 €.
- 2.2.1** Defina a distribuição de probabilidade da variável aleatória Y : «quantia ganha por peça».
- 2.2.2** Determine o valor médio e o desvio-padrão da variável aleatória Y .
- 3.** O tempo necessário para o atendimento de clientes num *call center* segue uma distribuição normal de valor médio de 8 minutos e desvio-padrão de 2 minutos.
Determine a probabilidade de o atendimento demorar:
- 3.1** Menos de 5 minutos.
- 3.2** Mais de 9 minutos.
- 3.3** Entre 7 e 9 minutos.
- 4.** O número de pedidos de apoio que chegam a uma unidade de emergência médica, por hora, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 6.
- 4.1** Qual o número médio de pedidos efetuados por hora?
- 4.2** Determine a probabilidade de a unidade de emergência receber:
- 4.2.1** Exatamente cinco pedidos em 1 hora.
- 4.2.2** Quinze pedidos em 3 horas.
- 5.** Uma marca de automóveis pretende estimar o consumo médio de gasolina de um novo modelo. Realizou-se um estudo em 100 automóveis do novo modelo e verificou-se que o consumo médio foi de 5,9 e o desvio-padrão na amostra foi de 0,5.
- 5.1** Determine um intervalo de confiança de 95% para o consumo médio de gasolina do novo modelo.
- 5.2** Determine a dimensão mínima da amostra para estimar o consumo médio de gasolina com uma margem de erro inferior ou igual a 0,05 e uma confiança de 90%.
- 6.** Numa fábrica pretende-se estudar a proporção de artigos defeituosos. Numa amostra de 200 artigos, verificou-se que dez tinham defeito.
- 6.1** Determine um intervalo de 90% de confiança para a verdadeira proporção de artigos defeituosos.
- 6.2** Se pretendesse estimar a proporção pedida no item anterior para um grau de confiança de 90% e com erro inferior a 1%, qual deveria ser a dimensão da amostra?

Matriz do Teste de avaliação 6

Tipologia e número de itens

A tipologia de itens e o número de itens constam da tabela seguinte:

Tipologia de itens		Número de itens
Itens de construção	Resposta restrita	4
	Resposta extensa	14

Conteúdos

Tema 4 — Modelos de probabilidades

- Probabilidade condicional
- Modelos de probabilidade em espaços finitos
- Valor médio e variância populacional
- Modelo de Poisson
- Modelo normal

Tema 5 — Inferência estatística

- Intervalos de confiança para o valor médio
- Intervalos de confiança para a proporção

Cotações

Item	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2.1	2.2.2	3.1	3.2
Cotação	5	5	5	15	15	10	20	15	15	15

Item	3.3	4.1	4.2.1	4.2.2	5.1	5.2	6.1	6.2
Cotação	15	5	10	10	10	10	10	10

Duração

O teste tem a duração de 90 minutos.

Teste-modelo de exame 1

Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 11.º Ano

Duração: 150 minutos

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Na tabela seguinte, encontram-se os resultados da eleição para a assembleia de uma certa freguesia. Os valores indicados correspondem ao número de votos validamente expressos obtidos por cada uma das cinco listas mais votadas nas referidas eleições. Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Listas	A	B	C	D	E
Número de votos	3134	1562	625	554	371

Existem nove mandatos para distribuir, correspondentes ao círculo eleitoral desta freguesia.

- 1.1 Aplique o método de Hondt na distribuição dos nove mandatos pelas cinco listas. Apresente os quocientes do método de Hondt arredondados com duas casas decimais.
- 1.2 Um candidato de uma das cinco listas que concorreu a esta eleição referiu que se a distribuição dos mandatos tivesse sido feita utilizando o método de Sainte-Laguë ou pelo método de Hamilton, a sua lista teria sido beneficiada. Determine a que lista pertence o candidato que fez essa afirmação e se esta é verdadeira.

Segundo o método de Sainte-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte:

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição faz-se da forma seguinte:

- Calcula-se o divisor-padrão, dividindo o número total de votos pelo número total de mandatos a distribuir.
- Calcula-se a quota-padrão para cada lista, dividindo o número de votos de cada lista pelo divisor-padrão.
- Atribui-se a cada lista um número de mandatos igual à parte inteira da quota-padrão.
- Caso ainda restem mandatos para atribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas-padrão e atribuem-se os mandatos que restam às listas cujas quotas-padrão tenham partes decimais maiores (um para cada lista).
- Na atribuição do último mandato, se houver duas listas com quotas-padrão que apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último lugar à lista com menor número de mandatos.

Na sua resposta deve:

- Aplicar o método de Sainte-Laguë para determinar a distribuição dos nove mandatos. Apresente os quocientes arredondados com uma casa decimal.
- Aplicar o método de Hamilton para determinar a distribuição dos nove mandatos. Apresente os quocientes arredondados com duas casas decimais.
- Concluir acerca da veracidade da afirmação e a que lista pertence o candidato que a proferiu.

2. A Mariana, o Pedro e a Susana são os únicos herdeiros de três bens: um apartamento, um automóvel e o mobiliário do apartamento, que decidiram agrupar num único bem. Para procederem à divisão da herança, decidem utilizar o método das licitações secretas, garantindo assim que, no final, nenhum terá razão para reclamar.

Descreve-se a seguir o procedimento para a aplicação deste método:

- Primeira etapa: Cada herdeiro atribui um valor monetário a cada um dos bens da herança, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todos os herdeiros.
- Segunda etapa: Determina-se o valor global atribuído, por cada herdeiro, à herança e o valor que cada um considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada herdeiro, através da soma das licitações por ele atribuídas.
- Terceira etapa: Cada bem é atribuído ao herdeiro que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um herdeiro não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o valor dos bens recebidos por ele é zero.
- Quarta etapa: Se o valor dos bens recebidos por um dos herdeiros for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então esse herdeiro terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): O excesso obtém-se subtraindo ao total do valor a pagar o total do valor que os herdeiros têm a receber. Este excesso é distribuído igualmente por todos, uma vez que todos têm partes iguais na herança.

Na tabela que se segue, estão registados os valores, em euros, atribuídos, nas licitações secretas, por cada um dos três herdeiros a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa:

	Mariana	Pedro	Susana
Apartamento	140 000	120 000	150 000
Automóvel	25 000	35 000	30 000
Mobiliário	18 000	13 000	12 000

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma que nenhum dos três herdeiros tenha razão para ficar insatisfeito.

Na sua resposta, deve:

- Calcular o valor global atribuído à herança por cada herdeiro.
- Determinar a porção justa para cada herdeiro.
- Atribuir os bens aos herdeiros.
- Apurar o valor a pagar ou a receber por cada herdeiro.
- Apurar o excesso, caso exista.
- Dividir o excesso, caso exista, pelos herdeiros.
- Indicar o bem e o valor final a receber, ou a pagar, por cada um dos três herdeiros.

Apresente os resultados finais arredondados aos cêntimos. Nos cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

3. Numa clínica veterinária, existem várias espécies animais, umas em tratamento, outras em estadia permanente. Uma vez que ter as diferentes espécies em salas separadas condiciona o movimento de consultas, tratamentos, etc., o veterinário decidiu colocar todos os animais na mesma sala, mas adquirir divisórias de modo a manter separadas as espécies incompatíveis. Na tabela seguinte foram registadas as incompatibilidades existentes entre as diferentes espécies:

Espécies	Incompatibilidades
A	G, H
B	C, F, I
C	B, D, G
D	C, G
E	F, H
F	B, E
G	A, C, D
H	A, E
I	B

3.1 Represente, por meio de um grafo, os dados da tabela anterior, indicando o significado dos elementos que o constituem, arestas e vértices.

3.2 Qual é o número mínimo de divisórias necessárias para que as espécies incompatíveis estejam separadas? Como devem ficar agrupadas?

4. O nível de intensidade sonora, D , mede-se em decibéis, de acordo com o modelo:

$$D = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad I > 0$$

sendo I a intensidade acústica e $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ uma intensidade de referência, correspondente ao limiar de percepção do ouvido humano.

4.1 Determine o nível de intensidade sonora no centro de uma cidade, durante o dia, admitindo que a intensidade acústica é $10^{-5,5} \text{ W/m}^2$.

4.2 Num bar ou discoteca, o nível de intensidade sonora pode chegar aos 120 decibéis, semelhante ao som de um avião a decolar. Determine a intensidade acústica deste ruído.

4.3 Os níveis de intensidade sonora entre 60 e 70 decibéis marcam o início das epidemias de ruído. Com o auxílio da calculadora gráfica, determine entre que valores varia a intensidade acústica para estes níveis de ruído.

Na sua resposta deve:

- Reproduzir o gráfico do modelo que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado, incluindo o referencial.
- Localizar e indicar as abcissas dos pontos que satisfazem as condições, em notação científica e com arredondamento às centésimas.
- Responder à pergunta formulada.

5. O Mundo da Bicharada é uma quinta que faz criação de animais.

A Francelina pretende comprar um cão da raça *Spitz Alemão* (ou *Lulu da Pomerânia*) e contactou o responsável da quinta para saber informações acerca do tamanho e da cor dos cães que possuíam. Enviaram-lhe a seguinte tabela:

Tamanho	Cor		
	Branco	Cinza	Laranja
Anão	2	5	4
Médio	3	1	2
Grande	5	2	1

- 5.1** A Francelina foi visitar a quinta e, à partida, queria um cachorro anão ou médio, mas ainda não tinha decidido acerca da cor.

Com base nos dados, calcule a probabilidade, sob a forma de fração irredutível, de a Francelina:

5.1.1 Escolher um *Spitz* branco.

5.1.2 Não escolher um *Spitz* cinza.

- 5.2** A Francelina recebeu também uma tabela com os dados relativos à altura dos 25 cães desta raça que havia na quinta:

Altura (em centímetros)	[18, 22[	[22, 26[	[26, 30[	[30, 34[	[34, 38[
Percentagem de cães	20%	24%	28%	16%	12%

Construa uma tabela de frequências em que indique as frequências absolutas simples e acumuladas e as frequências relativas acumuladas para a variável altura dos cães da raça *Spitz Alemão* no Mundo da Bicharada.

- 5.3** O Animais & Companhia, um outro criador de animais, também enviou um estudo idêntico ao do Mundo da Bicharada.

Sabe-se que este criador tem um grande número de cães da raça *Spitz Alemão* e, recolhendo uma amostra de 60 cães bebés, verificou-se que as percentagens relativas a tamanho/cor eram aproximadamente iguais às do Mundo da Bicharada.

Construa um intervalo de confiança de 95% para a proporção de cães da cor cinza, admitindo que a proporção de cães desta cor, na amostra dos 60 cães bebés do Animais & Companhia, é a mesma que se obteve no Mundo da Bicharada.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às centésimas.

- 5.4** Considere a variável aleatória X para o peso, em quilogramas, de um *Spitz* anão, escolhido ao acaso de entre os *Spitz* nascidos numa determinada semana.

A variável aleatória X segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio igual a 1500 gramas e um desvio-padrão de 200 gramas.

Escolhe-se, aleatoriamente, um *Spitz* anão à nascença.

Determine um valor aproximado para a probabilidade de o *Spitz* apresentar um peso compreendido entre 1100 e 1700 gramas.

Apresente o resultado sob a forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

FIM

Critérios de classificação – Teste-modelo de exame 1

Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 11.º Ano

1.	35 pontos
1.1	15 pontos
Apresentar a distribuição dos nove mandatos pelos partidos A, B, C, D e E utilizando o método de Hondt	10 pontos
Dividir o número de votos do partido A por 2, por 3, por 4 e por 5	(4 pontos)
Dividir o número de votos do partido B por 2 e por 3	(2 pontos)
Dividir o número de votos do partido C por 2 e por 3	(2 pontos)
Dividir o número de votos do partido D por 2	(1 ponto)
Dividir o número de votos do partido E por 2	(1 ponto)
Indicar os mandatos	5 pontos
1.2	20 pontos
Apresentar a distribuição dos nove mandatos pelos partidos A, B, C, D e E, utilizando o método de Saint-Laguë	6 pontos
Dividir o número de votos do partido A por 7	(1 ponto)
Dividir o número de votos do partido B por 3	(1 ponto)
Dividir o número de votos do partido C por 3	(1 ponto)
Indicar os mandatos	(3 pontos)
Apresentar a distribuição dos nove mandatos pelos partidos A, B, C, D e E, utilizando o método de Hamilton	11 pontos
Calcular o divisor-padrão (694)	(1 ponto)
Calcular as quotas-padrão	(5 pontos)
Distribuir os mandatos	(5 pontos)
Concluir	3 pontos
2.	25 pontos
Calcular valor global atribuído, por cada herdeiro, à herança	6 pontos
Determinar a parte justa para cada herdeiro	3 pontos
Atribuir os bens aos herdeiros	3 pontos
Apurar o valor a pagar ou a receber por cada herdeiro	3 pontos
Apurar o excesso	4 pontos
Dividir o excesso pelos herdeiros	3 pontos
Indicar a distribuição final de cada herdeiro	3 pontos
3.	20 pontos
3.1	10 pontos
Apresentar um grafo que modele a situação	6 pontos
Apresentar o significado dos elementos que constituem o grafo	4 pontos

3.2 10 pontos

Determinar, justificando, o número mínimo de divisórias necessário

9 pontos

Na resposta a esta etapa, são apresentados os seguintes tópicos:

- Coloração dos vértices do grafo.
- Justificação para colorir vértices adjacentes com cores diferentes (recorrendo também ao grau dos vértices para iniciar e continuar o processo).

A classificação desta etapa faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Desempenho no domínio específico da disciplina		Desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis		
			1	2	3
Níveis	2	Apresenta os dois tópicos.	7	8	9
	1	Apresenta apenas um tópico.	2	3	4

Apresentar uma proposta para agrupar as diferentes espécies

1 ponto

4. 25 pontos

4.1 5 pontos

Escrever $D = 10 \log \left(\frac{10^{-5,5}}{10^{-12}} \right)$

2 pontos

Apresentar o resultado, com unidades

3 pontos

4.2 10 pontos

Escrever $D = 120$

1 ponto

Escrever $120 = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$

2 pontos

Resolver a equação

6 pontos

Apresentar o resultado, com unidades

1 ponto

4.3 10 pontos

Apresentar o gráfico

4 pontos

Apresentar as abcissas dos pontos relevantes

4 pontos

Responder à pergunta formulada

2 pontos

5. 95 pontos

5.1.1 20 pontos

Designando por B o acontecimento «o Spitz ser branco», C : «o Spitz ser cinza», A : «o Spitz ser anão» e M : «o Spitz ser médio», identificar a probabilidade solicitada como sendo $P(B | A \cup M)$

5 pontos

Calcular $P(B \cap (A \cup M))$

5 pontos

Calcular $P(A \cup M)$

5 pontos

Calcular o valor da probabilidade solicitada $P(B | A \cup M) = \frac{5}{17}$

5 pontos

5.1.2	20 pontos
Designando por C o acontecimento «o Spitz ser cinza», A : «o Spitz ser anão» e M : «o Spitz ser médio», identificar a probabilidade solicitada como sendo $P(\bar{C} A \cup M)$	5 pontos
Calcular $P(\bar{C} \cap (A \cup M))$	5 pontos
Calcular $P(A \cup M)$	5 pontos
Calcular o valor da probabilidade solicitada $P(\bar{C} A \cup M) = \frac{11}{17}$	5 pontos
5.2	15 pontos
Identificar os valores de $\hat{p}$, z e n no intervalo	9 pontos
$z = 1,960$	(1 ponto)
$\hat{p} = \frac{8}{25}$ (ou equivalente)	(6 pontos)
$n = 60$	(2 pontos)
Apresentar o intervalo de confiança $(]0,20; 0,44[)$	6 pontos (3 + 3)
5.3	20 pontos
Calcular os valores das frequências absolutas simples	10 pontos
Calcular os valores das frequências absolutas acumuladas	5 pontos
Calcular os valores das frequências relativas acumuladas	5 pontos
5.4	20 pontos
Indicar $P(1300 < X < 1700) \approx 68,27\%$	5 pontos
Indicar $P(1100 < X < 1900) \approx 95,45\%$	5 pontos
Obter $P(1100 < X < 1300) \approx 13,59\%$	5 pontos
Obter $P(1100 < X < 1900) \approx 81,86\%$	5 pontos

Teste-Modelo 1 – MACS 11.º ano

N.º	Nome	Questões														Total
		1.1	1.2	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1.1	5.1.2	5.2	5.3	5.4		
		15	20	25	10	10	5	10	10	20	20	15	20	20		
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
21																
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																
29																
30																

Média

σ

Teste-modelo de exame 2

Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 11.º Ano

Duração: 150 minutos

Nome _____ Turma _____ N.º _____

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- Os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de interseção de gráficos, máximos ou mínimos).
- As linhas da tabela obtida relevantes para a resolução.
- As listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

1. Os alunos do agrupamento de escolas de Pinheiro Bravo fizeram decorações diferentes em três árvores de Natal e chamaram-lhes Harmonia, Alegria e Partilha.

- 1.1 Toda a comunidade escolar foi convidada a votar através do *Facebook*. Cada votante deve ordenar uma única vez as três árvores decoradas de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada elemento da comunidade escolar corresponde a um voto, tendo sido apurados 2452 votos válidos.

Na tabela seguinte estão ordenados os resultados da votação.

	637 votos	825 votos	990 votos
1.ª preferência	Harmonia	Partilha	Alegria
2.ª preferência	Partilha	Alegria	Harmonia
3.ª preferência	Alegria	Harmonia	Partilha

A escolha da árvore mais bonita é feita usando o método seguinte:

- Para que um voto seja considerado válido, cada elemento da comunidade escolar ordena, uma única vez, os temas de acordo com as suas preferências.
- Na ordenação final dos temas, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantas as árvores em votação.
- Cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto.
- É escolhida a árvore com o maior número de pontos.

- 1.1.1 Determine, aplicando o método acima descrito, qual foi a árvore vencedora desta votação.

- 1.1.2 Se a árvore Harmonia fosse desclassificada por ter tido a participação, na sua decoração, de pessoas exteriores à comunidade escolar, será que o resultado se mantinha? Para responder a esta questão, aplique o método de escolha acima descrito excluindo a árvore Harmonia, supondo que não se alteram o número de votos nem a ordem de cada uma das preferências.

- 1.2** A tabela seguinte indica o número de alunos do agrupamento que participou na decoração de cada uma das árvores de Natal.

	Grupo Harmonia	Grupo Alegria	Grupo Partilha
Número de alunos	90	70	110

A direção do agrupamento vai escolher uma comissão de 18 destes alunos que vão acompanhar estas árvores à sede do concelho, onde ficarão em exposição juntamente com todas as outras árvores decoradas por outros agrupamentos de escolas do concelho.

Os 12 elementos que irão integrar essa comissão serão escolhidos usando o método seguinte:

- Calcula-se o divisor-padrão, dividindo o número total de alunos pelo número total de lugares na comissão.
- Calcula-se a quota-padrão para cada um dos grupos, dividindo-se o número de alunos de cada grupo pelo divisor-padrão.
- Atribui-se a cada grupo uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor que a quota-padrão.
- Caso a soma das quotas arredondadas seja igual à soma dos lugares a distribuir na comissão, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de lugares para cada grupo é igual à quota arredondada; caso a soma das quotas arredondadas seja diferente do número de lugares a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor-padrão, de modo a calcular a quota-padrão modificada de cada grupo de alunos.
- Repetem-se os três pontos anteriores até se obter a soma das quotas modificadas arredondadas igual ao número de lugares a distribuir.

1.2.1 Mostre que, na primeira aplicação deste método, a soma das quotas arredondadas é diferente do número de lugares na comissão. Apresente os valores dos quocientes arredondados com duas casas decimais.

1.2.2 Determine a distribuição dos 18 lugares na comissão depois de encontrar um divisor modificado. Apresente o divisor modificado com uma casa decimal (se necessário) e as quotas-padrão modificadas arredondadas a três casas decimais.

- 2.** A Rita e a Luísa são primas e têm de dividir entre si três peças de artesanato, uma colcha, uma toalha bordada e uma caixa esculpida em madeira, feitas pela bisavó e com valor sentimental para ambas. Decidem fazer a partilha destes bens usando o método que a seguir se descreve:
- Definir claramente os itens a dividir.
 - Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir pelos itens.
 - Cada item é atribuído (temporariamente) ao interveniente que mais o valorizou (em caso de empate, é atribuído ao que tiver menos pontos).

- Faz-se um balanço:
 - Se ambos tiverem o mesmo número de pontos, a partilha está feita.
 - Se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais, transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos.
- Para a transferência, calculam-se os quocientes

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial}}{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial}}$$

e colocam-se por ordem decrescente.

- Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.
- Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Definidos os itens a dividir (colcha, toalha e caixa), sabe-se que a distribuição dos 100 pontos de cada uma das primas pelos itens foi a seguinte:

	Rita	Luísa
Colcha	25	30
Toalha	45	20
Caixa	30	50

- 2.1 Qual é a atribuição inicial (temporária) dos bens?
- 2.2 Tendo em atenção a atribuição inicial, quantos pontos tem cada uma das primas?
- 2.3 Determine as transferências que são necessárias efetuar para que a Rita e a Luísa fiquem com igual número de pontos. Como será feita a partilha dos bens?
- 2.4 Com quantos pontos fica cada prima no final da partilha? Apresente o resultado com duas casas decimais.

3. Realizou-se a seguinte experiência: um grupo de indivíduos foi sujeito a uma luz intensa que provocou a dilatação das pupilas. De seguida mediu-se o diâmetro das pupilas, a cada 0,5 segundos, à medida que estas dilatavam. Os valores médios dos diâmetros medidos foram registados na tabela seguinte:

Tempo (em segundos)	Diâmetro (em milímetros)
1	4,22
1,5	4,65
2	4,91
2,5	5,20
3	5,29
3,5	5,58
4	5,62
4,5	5,75
5	5,76
5,5	5,93
6	6,02

- 3.1 Qual foi a variação do diâmetro médio das pupilas no período da experiência registado? Apresente o resultado em milímetros com duas casas decimais.
- 3.2 De quanto foi o aumento do diâmetro médio das pupilas no mesmo período? Apresente o resultado em percentagem com três casas decimais.
- 3.3 Recorrendo à calculadora gráfica, encontre um modelo de crescimento logarítmico, de equação $y = a + b \ln x$, que melhor se ajuste aos dados recolhidos nesta experiência. Apresente os valores de a e de b com três casas decimais.
- 3.4 A partir do modelo encontrado no item 3.3*:
- 3.4.1 Faça uma previsão do diâmetro médio das pupilas ao fim de 10 segundos. Apresente o resultado final arredondado às centésimas. Nos cálculos intermédios utilize quatro casas decimais.
- 3.4.2 Ao fim de quanto tempo será previsível que o diâmetro médio das pupilas atinja 7 milímetros? Utilize as capacidades gráficas da calculadora para responder a esta questão. Apresente o resultado final em segundos, arredondados às unidades.

* Se não resolveu o item 3.3, utilize o modelo $y = 4,243 + 0,995 \ln x$ nos itens seguintes.

4. Os alunos do agrupamento de escolas de Pinheiro Bravo vão organizar uma viagem de finalistas.

4.1 Contactaram uma agência de viagens, que lhes apresentou os meios de transporte utilizados na sua agência para aquele tipo de viagens: comboio, avião ou uma combinação dos dois. Sabe-se que naquela agência:

- 85 % dos clientes escolhem a viagem de comboio.
- 35 % dos clientes escolhem a viagem de avião.

Determine a probabilidade de, escolhido ao acaso um dos meios de transporte disponíveis, os alunos terem escolhido apenas um dos dois tipos de transporte.

4.2 Relativamente ao tipo de alojamento e alimentação, os dados da agência revelam que:

- 76% dos clientes escolhem ficar em hotel.
- 61% dos clientes preferem o regime de pensão completa.
- Dos alunos que escolhem ficar em hotel, 60% escolhem pensão completa.

Determine a probabilidade de, escolhido um aluno ao acaso, este não ter escolhido ficar em hotel, sabendo que escolheu pensão completa. Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

4.3 Para angariar dinheiro para a viagem, os alunos realizaram uma venda de rifas. Sabe-se que cada aluno tem 15% de probabilidade de ganhar um prémio.

Determine a probabilidade de, escolhendo três alunos ao acaso, exatamente dois deles ganharem um prémio. Apresente o resultado em percentagem arredondado às centésimas.

4.4 Numa amostra aleatória de 50 malas de viagem que os alunos levam, verificou-se que, em média, pesam 20 quilogramas e o desvio-padrão é de 2 quilogramas.

Determine a margem de erro de um intervalo de confiança de 90% para o peso médio, em quilogramas, das malas dos alunos que participam na viagem. Apresente o resultado arredondado às milésimas.

5. A Associação de Pais do agrupamento de escolas de Pinheiro Bravo ofereceu pacotes de bolachas para os alunos levarem para a viagem de finalistas.

5.1 As bolachas deveriam pesar aproximadamente 10 gramas, mas verificou-se que umas pesam mais do que outras. Escolhendo aleatoriamente uma amostra de bolachas, obtiveram-se os seguintes resultados:

Peso (em gramas)	[9,7; 9,8[	[9,8; 9,9[	[9,9; 10[	[10; 10,1[	[10,1; 10,2[
Frequência absoluta acumulada	25	30	45	60	80

Construa uma tabela de frequências em que indique as frequências absolutas simples, as frequências relativas simples e as frequências relativas acumuladas para a variável peso das bolachas.

- 5.2** As bolachas vêm em sacos. Contabilizou-se o número de bolachas, por saco, de uma amostra de 20 sacos obtidos aleatoriamente.

O número de bolachas, por saco, na amostra recolhida encontra-se na tabela que se segue:

Número de bolachas por saco	491	501	515	535	540	555
Número de sacos	1	4	8	2	4	1

Na amostra recolhida, a média do número de bolachas por saco é diferente da média esperada.

Determine, recorrendo à calculadora, o número de bolachas que se deve retirar a cada um dos sacos da amostra de modo que a média do número de bolachas, por saco, na amostra, seja 500, sabendo que se deve retirar o mesmo número de bolachas de cada um dos sacos da amostra.

FIM

Critérios de classificação – Teste-modelo de exame 2

Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 11.º Ano

1.	40 pontos
1.1.1	10 pontos
Determinar o número de pontos da árvore Harmonia	3 pontos
Determinar o número de pontos da árvore Alegria	3 pontos
Determinar o número de pontos da árvore Partilha	3 pontos
Concluir	1 ponto
1.1.2	8 pontos
Determinar o número de pontos da árvore Alegria	3 pontos
Determinar o número de pontos da árvore Partilha	3 pontos
Concluir	2 pontos
1.2.1	8 pontos
Calcular o número total de alunos	1 ponto
Calcular o divisor-padrão	2 pontos
Calcular as quotas-padrão	3 pontos
Concluir	2 pontos
1.2.2	14 pontos
Indicar um divisor modificado (14)	2 pontos
Calcular as quotas-padrão modificadas	6 pontos
Atribuir as quotas modificadas arredondadas	3 pontos
Indicar a distribuição dos lugares	3 pontos
2.	25 pontos
2.1	4 pontos
Indicar os bens (temporários) da Rita	2 pontos
Indicar os bens (temporários) da Luísa	2 pontos
2.2	4 pontos
Indicar o número de pontos (inicial) da Rita	2 pontos
Indicar o número de pontos (inicial) da Luísa	2 pontos
2.3	13 pontos
Calcular os quocientes para a transferência	2 pontos
Selecionar o bem a utilizar no ajuste da partilha	1 ponto
Apresentar a equação que traduz o equilíbrio na partilha	4 pontos
Resolver a equação	2 pontos
Indicar os bens (finais) a atribuir à Rita	2 pontos
Indicar os bens (finais) a atribuir à Luísa	2 pontos

2.4	4 pontos
Indicar o número de pontos (final) da Rita	2 pontos
Indicar o número de pontos (final) da Luísa	2 pontos
3.	35 pontos
3.1	5 pontos
3.2	5 pontos
3.3	10 pontos
Apresentar as listas introduzidas na calculadora	3 pontos
Indicar o valor de a	3 pontos
Indicar o valor de b	3 pontos
Escrever $y = 4,243 + 0,992 \ln x$	1 ponto
3.4.1	5 pontos
Identificar $x = 10$	2 pontos
Escrever $y = 4,243 + 0,992 \ln 10$	2 pontos
Concluir	1 ponto
3.4.2	10 pontos
Identificar $y = 7$	2 pontos
Escrever $7 = 4,243 + 0,992 \ln x$	1 ponto
Apresentar gráfico(s)	3 pontos
Assinalar a interseção	2 pontos
Concluir	2 pontos
4.	70 pontos
4.1	20 pontos
Considerarando os acontecimentos: C : «a viagem é de comboio» e A : «a viagem é de avião»	
Escrever $P(C) = 85\%$	1 ponto
Escrever $P(A) = 35\%$	1 ponto
Obter $P(A \cap C) = 20\%$	5 pontos
Obter $P(A \cap \bar{C}) = 15\%$	5 pontos
Obter $P(\bar{A} \cap C) = 65\%$	5 pontos
Calcular $P(A \cap \bar{R}) + P(\bar{A} \cap R)$	3 pontos

4.2	20 pontos
Considerando os acontecimentos: H : «o alojamento é em hotel» e R : «o regime é de pensão completa»	
Calcular $P(H \cap R)$	9 pontos
Escrever $P(H) = 76\%$	(1 ponto)
Escrever $P(R H) = 60\%$	(3 pontos)
Obter $P(H \cap R)$	(5 pontos)
Escrever $P(H \cap R) = P(R) \times P(R H)$	[4 pontos]
Obter $P(H \cap R) = 45,6\%$	[1 ponto]
Calcular $P(\overline{H} \cap R)$	7 pontos
Escrever $P(R) = 61\%$	(1 ponto)
Escrever $P(\overline{H} \cap R) = P(R) - P(R \cap H)$	(5 pontos)
Obter $P(\overline{H} \cap R) = 15,4\%$	(1 ponto)
Calcular $P(\overline{H} R)$	4 pontos
Escrever $P(\overline{H} R) = \frac{P(\overline{H} \cap R)}{P(R)}$	(3 pontos)
Obter $P(\overline{H} R) \approx 25\%$	(1 ponto)
4.3	15 pontos
Considerando o seguinte acontecimento: G : «ganhar um prémio»	
Escrever $P(G) = 0,15$	1 ponto
Calcular $P(\overline{G}) = 0,85$	2 pontos
Escrever $P(\overline{G}) = 1 - P(G)$	(1 ponto)
Obter $P(\overline{G}) = 0,85$	(1 ponto)
Escrever $0,15 \times 0,15 \times 0,85 \times 3$	10 pontos (2 + 2 + 2 + 4)
Obter o valor pedido (5,74%)	2 pontos
4.4	15 pontos
Identificar os valores de n , de s e de z para um intervalo a 90% de confiança	6 pontos
$n = 50$	(1 ponto)
$s = 2$	(2 pontos)
$z = 1,645$	(2 pontos)
$\overline{x} = 20$	(1 ponto)
Determinar os extremos de um intervalo a 90% de confiança	6 pontos
Determinar o erro (0,465)	3 pontos

5	30 pontos
5.1	15 pontos
Calcular os valores das frequências absolutas simples	5 pontos
Calcular os valores das frequências relativas simples	5 pontos
Calcular os valores das frequências relativas acumuladas	5 pontos
5.2	15 pontos
Apresentar as listas introduzidas	2 pontos
Indicar o valor da média dos dados da tabela (520)	5 pontos
Determinar o valor da diferença entre as duas médias (20)	4 pontos
Concluir	4 pontos

Teste-Modelo 2 – MACS 11.º ano

N.º	Nome	Questões																				Total	Média
		1.1.1 10	1.1.2 8	1.1.1.2 8	1.2.1 14	1.2.2 4	2.1 4	2.2 4	2.3 13	2.4 4	3.1 5	3.2 5	3.3 10	3.4.1 5	3.4.2 10	4.1 20	4.2 20	4.3 15	4.4 15	5.1 15	5.2 15		
1																							
2																							
3																							
4																							
5																							
6																							
7																							
8																							
9																							
10																							
11																							
12																							
13																							
14																							
15																							
16																							
17																							
18																							
19																							
20																							
21																							
22																							
23																							
24																							
25																							
26																							
27																							
28																							
29																							
30																							

Média

σ

Fichas de trabalho

FICHA 1

1.1 Circuito: $A B E C D A E D C B A$

1.2 Trajeto: $C B C H B A H G F H E F E C D E$

1.3 Trajeto: $A B C A G C D G F E G$

1.4 Não tem trajeto nem circuito. Tem mais de dois vértices com grau ímpar.

2.1 Não, porque existem dois vértices de grau ímpar.

2.2 $B D A B C E H J I G D F H G F E D B E B$ (repete $B D$ e $B E$)

2.3 $A B D E B C E H J I G H F D E F G D A$ (repete $D E$)

FICHA 2

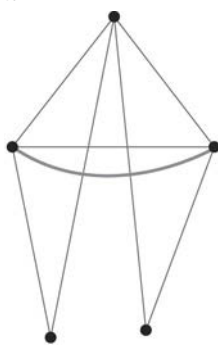
1.1 Sim, porque todos os vértices têm grau par.

1.2 Por exemplo, $A B C I H B I F E D C H F G A$

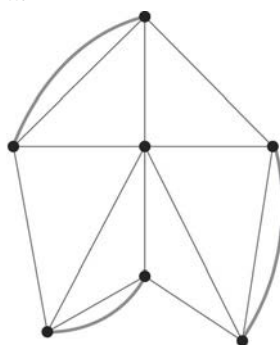
2.1 Apenas o IV tem.

2.2

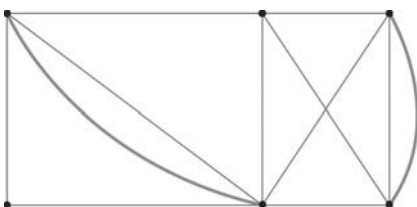
I.



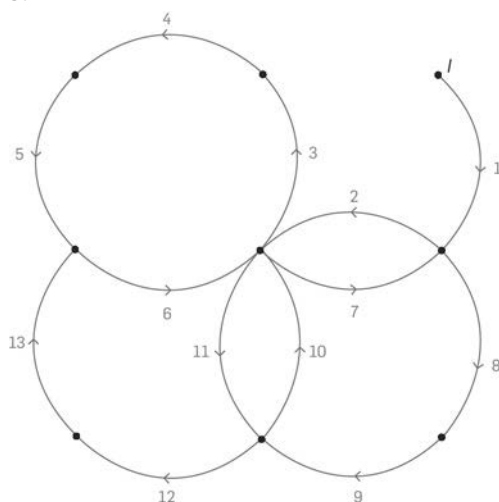
II.



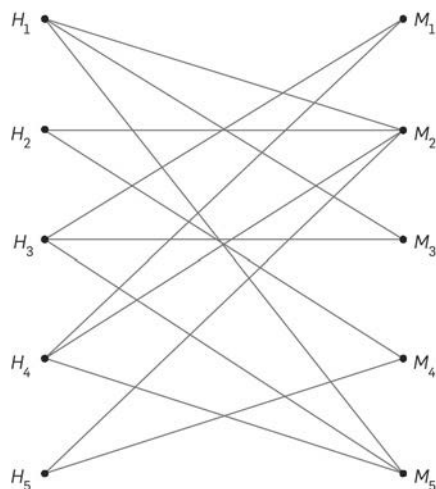
III.



3.

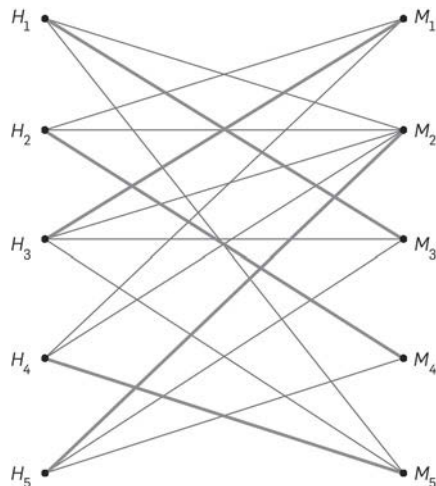


4.1



4.2 Por exemplo: H_1 com M_3 ; H_2 com M_2 ; H_3 com M_5 ; H_4 com M_1 ; H_5 com M_4 .

5.1



5.2 Por exemplo: H_1 com M_3 ; H_2 com M_4 ; H_3 com M_1 ; H_4 com M_5 ; H_5 com M_2 .

FICHA 3

1.1 I: Sim. $A B C D A$

II: Sim. $A B C D E A$

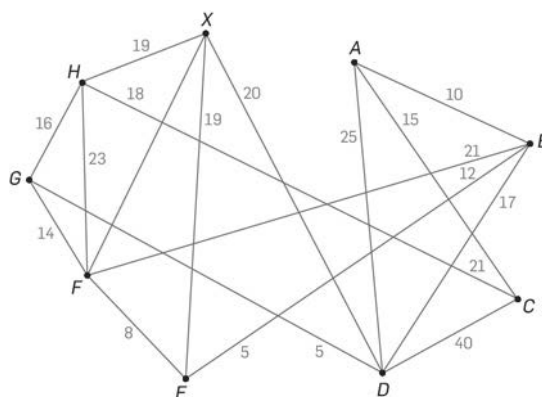
1.2 I: $A D C B A$ (47)

II: $A D E B C A$ (36)

1.3 I: $A B C D A$ (47)

II: $E D A C B E$ (36)

2.1

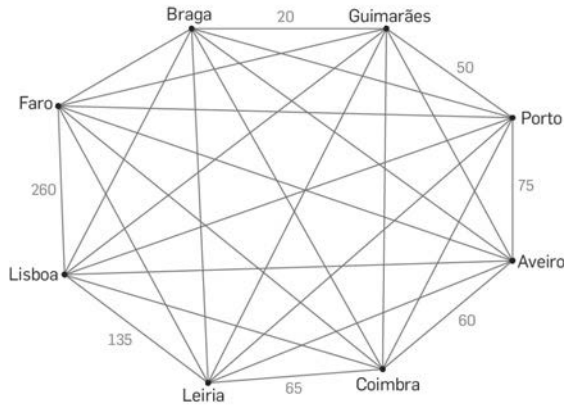


2.2 $XDCABEFGH; XEBACDGFH$

2.3 $XFEBACDGHX(143)$

2.4 $XHCABEFGDX(124)$

3.1.1



3.1.2

Aveiro $\xrightarrow{120}$ Guimarães $\xrightarrow{50}$ Porto
 $\xrightarrow{120}$ Coimbra $\xrightarrow{170}$ Braga $\xrightarrow{230}$ Leiria
 $\xrightarrow{135}$ Lisboa $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{470}$ Aveiro

Distância: 1555 quilómetros

Aveiro $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria $\xrightarrow{180}$ Porto
 $\xrightarrow{310}$ Lisboa $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{580}$ Braga
 $\xrightarrow{20}$ Guimarães $\xrightarrow{120}$ Aveiro

Distância: 1595 quilómetros

Aveiro $\xrightarrow{115}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra $\xrightarrow{120}$ Porto
 $\xrightarrow{50}$ Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{360}$ Lisboa
 $\xrightarrow{580}$ Faro $\xrightarrow{470}$ Aveiro

Distância: 1780 quilómetros

3.1.3

Coimbra $\xrightarrow{160}$ Guimarães $\xrightarrow{335}$ Lisboa
 $\xrightarrow{360}$ Braga $\xrightarrow{580}$ Faro $\xrightarrow{470}$ Aveiro
 $\xrightarrow{75}$ Porto $\xrightarrow{180}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra

Distância: 2225 quilómetros

Coimbra $\xrightarrow{60}$ Aveiro $\xrightarrow{75}$ Porto
 $\xrightarrow{50}$ Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{580}$ Faro
 $\xrightarrow{260}$ Lisboa $\xrightarrow{135}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra

Distância: 1245 quilómetros

Coimbra $\xrightarrow{170}$ Braga $\xrightarrow{580}$ Faro $\xrightarrow{260}$ Lisboa
 $\xrightarrow{355}$ Guimarães $\xrightarrow{50}$ Porto $\xrightarrow{75}$ Aveiro
 $\xrightarrow{115}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra

Distância: 1670 quilómetros

3.1.5

Aveiro $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria $\xrightarrow{135}$ Lisboa
 $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{530}$ Porto $\xrightarrow{50}$ Guimarães
 $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{125}$ Aveiro

Distância: 1245 quilómetros

3.1.6

Braga $\xrightarrow{20}$ Guimarães $\xrightarrow{50}$ Porto
 $\xrightarrow{75}$ Aveiro $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria
 $\xrightarrow{135}$ Lisboa $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{580}$ Braga

Distância: 1245 quilómetros

Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{55}$ Porto $\xrightarrow{75}$ Aveiro
 $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria $\xrightarrow{135}$ Lisboa
 $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{555}$ Guimarães

Distância: 1225 quilómetros

Porto $\xrightarrow{50}$ Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{125}$ Aveiro
 $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria $\xrightarrow{135}$ Lisboa
 $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{530}$ Porto

Distância: 1245 quilómetros

Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra $\xrightarrow{60}$ Aveiro $\xrightarrow{75}$ Porto
 $\xrightarrow{50}$ Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{360}$ Lisboa
 $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{360}$ Leiria

Distância: 1250 quilómetros

Lisboa $\xrightarrow{135}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra $\xrightarrow{60}$ Aveiro
 $\xrightarrow{75}$ Porto $\xrightarrow{50}$ Guimarães $\xrightarrow{20}$ Braga
 $\xrightarrow{580}$ Faro $\xrightarrow{260}$ Lisboa

Distância: 1245 quilómetros

Faro $\xrightarrow{260}$ Lisboa $\xrightarrow{135}$ Leiria $\xrightarrow{65}$ Coimbra
 $\xrightarrow{60}$ Aveiro $\xrightarrow{75}$ Porto $\xrightarrow{50}$ Guimarães
 $\xrightarrow{20}$ Braga $\xrightarrow{580}$ Faro

Distância: 1245 quilómetros

3.1.7

Braga $\xrightarrow{20}$ Guimarães $\xrightarrow{50}$ Porto $\xrightarrow{75}$ Aveiro
 $\xrightarrow{60}$ Coimbra $\xrightarrow{65}$ Leiria $\xrightarrow{135}$ Lisboa
 $\xrightarrow{260}$ Faro $\xrightarrow{580}$ Braga

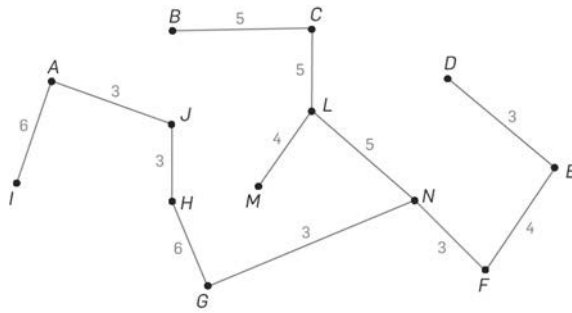
Distância: 1245 quilómetros

3.1.8 Não

FICHA 4

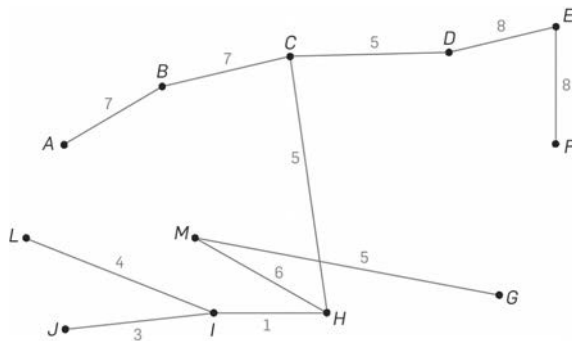
1. I, III e IV

2.2



Peso = 50

3.1



3.2 59 quilómetros

4.1

Tarefas	Tempo (dias)	Precedências
T_1	2	Nenhuma
T_2	5	Nenhuma
T_3	6	T_1
T_4	4	T_1 e T_2
T_5	1	T_3 e T_4
T_6	3	T_4
T_7	5	T_5

4.2 Sim. Consegue demorar exatamente 15 dias.

FICHA 5

1.1 30 litros/minuto

1.2 300 litros

1.3 $L(t) = 150 + 30t$

1.4 20 minutos

1.5 1500 litros

2.1 12,20 €

2.2 $P(n) = 5 + 0,3n$

2.3 7 fotografias

3.1 540 cm^3

3.2 $V(t) = 540 \times 0,88^t$

3.3 12 horas

4.1.1 $P(n) = 9745 \times 1,1^n$

4.1.2 $P(A) = 9745 \times 1,1^{A-1999}$

4.2 72 115 habitantes

5.1 $P(h) = P_0 \times 0,77^h$

5.2 2 horas, 39 minutos e 7 segundos

6.1 40 gramas

6.2 28 gramas

7.1 $A = 28$ e $B = \ln\left(\frac{14}{13}\right)$

7.2 $\frac{\ln 2}{B}$

FICHA 6

1.1 $r \approx 0,99$

1.2.1 652; 1,0502

1.2.2 100 733 €

2. 21,26 °C

3. Sim.

FICHA 7

1.1 $\approx 0,988$

1.2 Há três ou mais séculos obter-se-ia um número de habitantes em Portugal negativo, o que é absurdo. Por se tratar de um modelo linear, a população iria crescer indefinidamente, pelo que não é um bom modelo para fazer previsões a muito longo prazo.

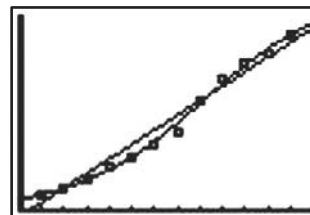
1.3 De acordo com o modelo linear apresentado, os efetivos populacionais previstos para 2010 e 2050 são aproximadamente 10,9 milhões e 12,8 milhões de habitantes, respetivamente. Comparando estes valores com os do INE, verifica-se que o primeiro está apenas um pouco acima, mas o segundo já está bastante afastado. Assim, o modelo linear será desadequado se se concretizarem as projeções do INE, uma vez que estas preveem um decréscimo da população, ao contrário do que o modelo apresentado sugere. A principal razão de ordem social é o facto de os níveis de fecundidade se encontrarem abaixo do limiar de substituição de gerações.

FICHA 8

1.1 $y = 8,2x - 3,5$

1.2 ≈ 124 animais

1.3 Observando os gráficos, concluímos que o modelo logístico é o que melhor se adequa à situação em questão.



Outras razões (não gráficas) afastam a hipótese do modelo linear. Se calcularmos o número de animais existentes no início da criação da área protegida ($x = 0$), obtemos:

- Modelo linear: $y = -3,5$, o que é absurdo.
 - Modelo logístico: $y \approx 6$, o que está mais de acordo com a informação da tabela (8 animais).
- Para além disto, enquanto com o modelo linear a população continuaria sempre a aumentar após os 25 anos, com o modelo logístico a população tende a estabilizar nos 125 animais, número que nunca vai ultrapassar.

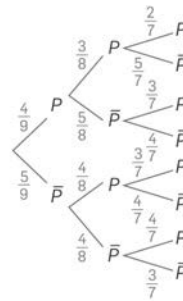
FICHA 9

- 1.1 $a \approx 2,28$; $k \approx 367,66$
 1.2 ≈ 368 cangurus
 1.3 ≈ 3 cangurus
 2.1.1 40 pessoas
 2.1.2 174 pessoas
 2.1.3 ≈ 10 horas
 2.1.4 5000 habitantes
 2.2 $a = 124$; $b > 0,3$
 3.1 $pH = 5$
 3.2 10^{-6} moles/litro
 3.3 $pH = 7$; 10^{-7} moles/litro
 4.1 $k = -2$
 4.2 1,71 dezenas de euros
 4.3 900 peças
 5.1 3 semanas e 3 dias
 5.2 6%

FICHA 10

- 1.1.1 $\Omega = \{(1, C), (1, P), (2, C), (2, P), (3, C), (3, P), (4, C), (4, P), (5, C), (5, P), (6, C), (6, P)\}$
 1.1.2 «Sair número de 1 a 6 e face comum ou portuguesa»
 1.1.3 «Sair número 7 e face comum»
 1.2.1 $P = \frac{1}{4}$ 1.2.2 $P = \frac{1}{4}$ 1.2.3 $P = \frac{1}{3}$
 2.1 16 maneiras diferentes
 2.2 4 maneiras diferentes
 3.1 27% 3.2 73% 3.3 17%
 4.1 $P = \frac{1}{3}$ 4.2 $P = \frac{5}{6}$ 4.3 $P = \frac{5}{6}$
 5.1.1 $P = \frac{15}{89}$ 5.1.2 $P = \frac{54}{89}$
 5.2.1 $P = \frac{3}{20}$ 5.2.2 $P = \frac{1}{2}$
 6. Nunca sair o número 6.
 7.1.1 $P = \frac{4}{195}$
 7.1.2 $P = \frac{59}{78}$
 7.2 $P = \frac{1}{50}$; $P = \frac{3}{4}$
 8. 10 000

9.1



$$9.2.1 \frac{5}{14}$$

$$9.2.2 \frac{1}{21}$$

$$9.2.3 \frac{5}{42}$$

$$9.3 f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{42} & \frac{10}{21} & \frac{5}{14} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$

FICHA 11

- 1.1 0 1.2 0,21 1.3 0,35
 2.1 57,9% 2.2 43,9%
 3. $\frac{6}{7}$
 4. 40%; 40%
 5.1 40% 5.2 25% 5.3 94,1%
 6.1 24% 6.2 95% 6.3 $\approx 18\%$
 7.1

	A	B	C	Total
AV	0,5	0,9	0,4	1,8
AV	49,5	29,1	19,6	98,2
Total	50	30	20	100

7.2 A impressora B.

- 8.1 63,25% 8.2 45%

FICHA 12

- 1.1 320 automóveis
 1.2.1 4,08% 1.2.2 13,04% 1.2.3 17,81%
 1.3 19 200 automóveis
 2.1 2 intoxicações/mês
 2.2 32,37%
 2.3 6,24%
 3.1 83 monitores
 3.2.1 1,17% 3.2.2 1,08%
 4.1 1008 gramas
 4.2.1 55,88% 4.2.2 29,41% 4.2.3 55,14%
 5.1 0,04
 5.2.1 38,29% 5.2.2 51,32% 5.2.3 14,60%
 6.1 4 minutos
 6.2.1 28,65% 6.2.2 39,35% 6.2.3 10,80%
 7.1 0,30 7.2 0,03⁴⁰ 7.3 0,66
 8. 0,06%

FICHA 13

- 1.1 5,79% 1.2 71,63% 1.3 87,36%
 1.4 19,15% 1.5 8,35% 1.6 60,39%
 2.1.1 27,98% 2.1.2 4,00% 2.1.3 46,48%
 2.2 41,4 horas 2.3 80,04 horas
 3.1 4,30% 3.2 39,18% 3.3 27,48%

4.1 $\mu \approx 11$ e $\sigma \approx 2,4$

4.2.1 4,78 % 4.2.2 84,66% 4.2.3 10,56%

FICHA 14

1.1 Peso médio de uma adolescente de 18 anos

1.2 57 quilogramas

2.1 $\mu \approx 9$ e $\sigma \approx 4,243$

2.2 25 amostras

2.3

$\bar{X}$	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15
P_i	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

2.4 $E(\bar{X}) = 9$

2.5 É não enviesado.

2.6 Erro padrão ≈ 3

3.1 São 125 amostras

3.2

$\bar{X}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P_i	$\frac{1}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{10}{125}$	$\frac{15}{125}$	$\frac{18}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{18}{125}$	$\frac{15}{125}$	$\frac{10}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$

3.3 $E(\bar{X}) = 9$

3.4 Erro padrão $\approx 2,45$

3.5 O aumento da amostra provocou uma diminuição do erro-padrão.

4. Valor médio = 45 e desvio-padrão $\approx 1,41$

5. 70 %

6.1 12 dispositivos 6.2 Erro-padrão $\approx 0,316$

7.1 Média = 134 e desvio-padrão $\approx 4,269$

7.2.1 0,49% 7.2.2 84,14% 7.2.3 17,36%

7.3 11,14%

FICHA 15

2.]51,27; 52,93[;]51,01; 53,19[

3.1 $k = 0,006$ 3.2 90%

4.]120,23; 133,17[

5.1 0,18

5.2]1,67; 1,97[

5.3 12 481 medições

6.1 68

6.2 96

6.3 166

6.4 Aumenta.

7.1 260 049

7.2 95%

FICHA 16

2.1 28% 2.2 5,6%

3.]6%, 10%[

4. Com 95% de confiança: $X -]17,4\%; 34,6\%[$

$Y -]25,7\%; 44,4\%[$; $Z -]5,6\%; 18,4\%[$

Todas -]8%; 22%[; Nenhuma -]5,6%; 18,4%[

Com 99% de confiança: $X -]14,7\%; 37,3\%[$

$Y -]22,71\%; 47,29\%[$; $Z -]3,62\%; 20,37\%[$

Todas -]5,8%; 24,2%[; Nenhuma -]3,62%; 20,37%[

5. 600 habitantes

6.1 6765

6.2 15 926

7. 1067 jovens

Teste diagnóstico

1.1 C

1.2 B

1.3 B

1.4 B

2. A

3. C

4.1 C

4.2 A

5. D

6. C

7. D

8. B

9. C

10.1 B

10.2 C

11. C

12. A

13. 1 B

13. 2 A

14. D

Questões de aula

QUESTÃO DE AULA 1

1.1.1 Verdadeira

1.1.2 Falsa

1.1.3 Falsa

1.1.4 Falsa

1.2

Vértice	Grau
A	2
B	2
C	4
D	4
E	3
F	5

1.3 Por exemplo, $C D E F$ e $C E F$

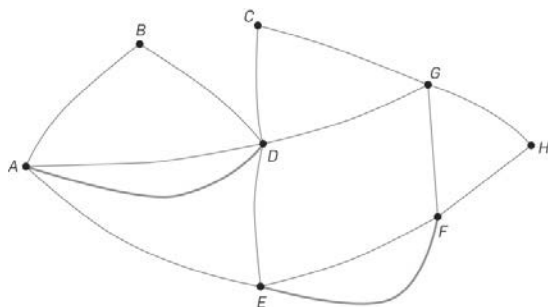
1.4 Por exemplo, $F E C B A F$

1.5 Por exemplo, $E F F A B C E D C D F$

QUESTÃO DE AULA 2

1.1 Não é possível porque existem vértices de grau ímpar (A, D, E e F).

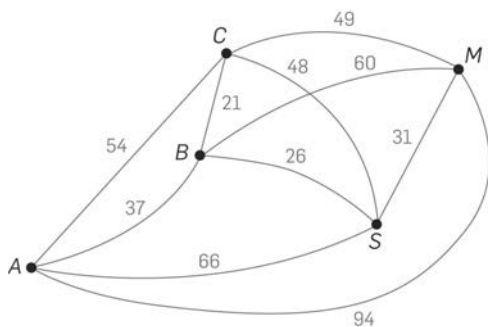
1.2



Percurso: C D B A D A E F D G F H G C

QUESTÃO DE AULA 3

1.1



1.2 B C S M A B (ou em sentido contrário)

Distância total: 231 quilômetros

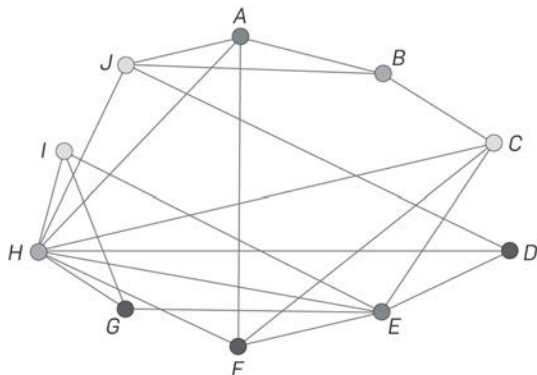
1.3 B C A M S B (ou em sentido contrário)

Distância total: 226 quilômetros

1.4 A Joana apresenta a melhor opção em termos de distância total percorrida. Ambas as opções obrigam à repetição de cidades já visitadas, atendendo às estradas existentes no mapa.

QUESTÃO DE AULA 4

1.1



1.2 Agendamento:

2.ª feira: A (funcionários F_9 e F_{10}) e E (F_2 , F_3 e F_5)

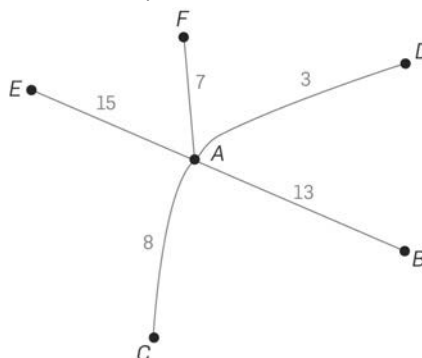
3.ª feira: B (funcionários F_1 , F_7 e F_{10}) e H (F_3 , F_4 , F_5 , F_8 e F_9)

4.ª feira: C (F_1 , F_4 e F_5), I (F_3 e F_4) e J (F_7 , F_8 e F_{10})

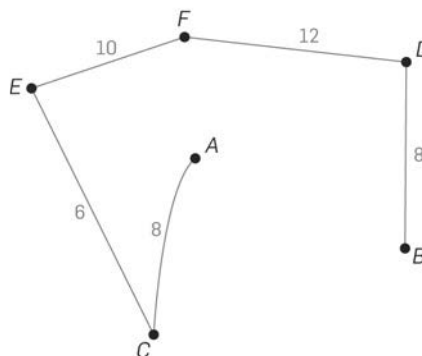
5.ª feira: D (F_2 e F_8), F (F_4 , F_5 e F_9) e G (F_3 e F_6)

QUESTÃO DE AULA 5

1.1 Por exemplo:

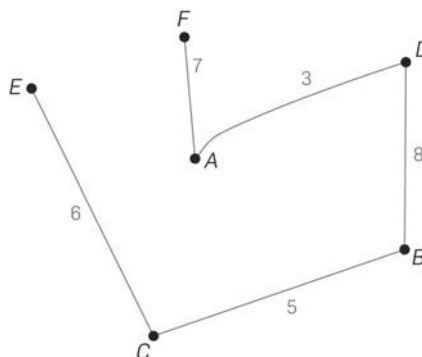


e

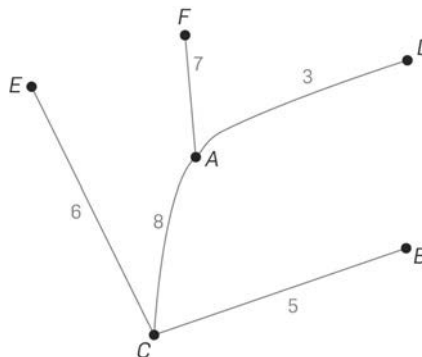


Pesos totais de 46 e 44, respectivamente.

1.2 Peso total: 29

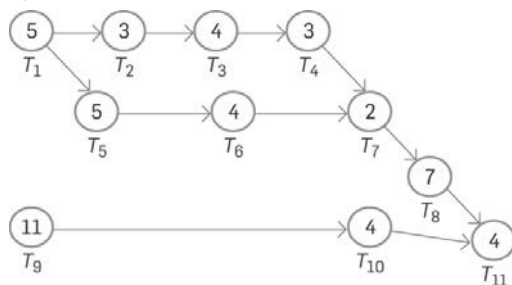


1.3 Peso total: 29



QUESTÃO DE AULA 6

1.1



1.2 28 dias

1.3 $T_1 - T_2 - T_3 - T_4 - T_7 - T_8 - T_{11}$

QUESTÃO DE AULA 7

1.1 7400 clientes por ano

1.2 70 200 clientes

1.3 $C(n) = 48\,000 + 7400n$

1.4.1 114 600 clientes

1.4.2 Em 2028.

QUESTÃO DE AULA 8

1.1 4,76 miligramas

1.2 $Q(t) = 4,76 \times e^{-0,13t}$

1.3.1 0,2102 miligramas

1.3.2 17 horas e 43 minutos

QUESTÃO DE AULA 9

1.1 254 telemóveis

1.2 $a \approx 3,00$; $b \approx 0,45$; $c \approx 1016,41$;

$$N(t) = \frac{1016,41}{1 + 3 \times e^{-0,45t}}$$

1.3.1 939 unidades

1.3.2 12 dias

QUESTÃO DE AULA 10

1.1 87,63 quilogramas

1.2 $P(t) = 1,23 + 3,48 \ln x$

1.3.1 79,2 quilogramas

1.3.2 20 semanas

QUESTÃO DE AULA 11

1.1.1 $A = \{(B, B, B)\}$

1.1.2 $B = \{(B, P, A), (B, A, P), (P, B, A), (P, A, B), (A, P, B), (A, B, P)\}$

1.1.3 $C = \{(B, B, B), (P, P, P), (A, A, A), (V, V, V)\}$

1.1.4 $D = \{ \}$

1.2 A: elementar; B: composto; C: composto; D: impossível

2.1.1 $\Omega = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0), (2, 3), (2, 5), (4, 0), (4, 3), (4, 5)\}$

2.1.2 A: «sair o número 6 numa das rodas»

2.1.3 B: «o produto dos números saídos é 0»

2.1.4 C: «a soma dos números saídos é 9»

2.2.1 $\Omega = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 4\}$

2.2.2 $A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{2\}$; $C = \{1\}$

QUESTÃO DE AULA 12

1.1 $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

1.2.1 $P(A) = \frac{1}{10}$

1.2.2 $P(B) = \frac{1}{5}$

2.1 14 casos

2.2 A probabilidade de um apostador obter o segundo prémio é de $\frac{3}{20}$ e a probabilidade de um apostador obter o terceiro prémio é de $\frac{1}{5}$.

QUESTÃO DE AULA 13

1.1 Não. A probabilidade de nascer rapaz é aproximadamente 51,05%.

1.2 19,03%

1.3.1 47,6%

1.3.2 25,36%

1.3.3 51,11%

QUESTÃO DE AULA 14

1.1 $\frac{2}{15}$

1.2 $\frac{1}{2}$

2.1 $\frac{3}{5}$

2.2 $\frac{3}{4}$

QUESTÃO DE AULA 15

1.1 Máquina A:

N.º de defeitos por artigo (x_i)	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,25	0,125	0,375	0,25

Máquina B:

N.º de defeitos por artigo (x_i)	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,125	0,125	0,25	0,5

1.2 $\bar{x}_A = 1,625$; $\bar{x}_B = 2,125$. A máquina B.

1.3 $\sigma_A = 1,11$; $\sigma_B = 1,05$

1.4 $p_1 \approx 0,67$

1.5 $p_2 \approx 0,50$

QUESTÃO DE AULA 16

1.1 42,32%

1.2 0,01%

2.1.1 0,05

2.1.2 0,045

2.2 20 dados

3.1 28,16%

3.2 0,042%

3.3 98,02%

QUESTÃO DE AULA 17

1.1 $E(X) = 19^\circ\text{C}$

1.2.1 37,5%

1.2.2 37,5%

2.1.1 55,07%

2.1.2 60,65%

2.1.3 23,87%

2.2 1000 horas

QUESTÃO DE AULA 18

1.1.1 68,27%

1.1.2 84%

1.1.3 2,275%

1.2 40 milímetros

2.1 6,68%

2.2 22,66%

2.3 53,28%

QUESTÃO DE AULA 19

1.1.1 $]170,49; 179,51[$

1.1.2 $]169,63; 180,37[$

1.1.3 $]167,95; 182,05[$

1.2 Aumenta.

1.3 Diminuiria.

2. $]288,68; 304,58[$. Sim.

QUESTÃO DE AULA 20

1.1 $]0,479; 0,541[$

1.2 3,1%

1.3 Não.

1.4 Diminuir a confiança ou aumentar a dimensão da amostra.

1.5 9600

Testes de avaliação

TESTE DE AVALIAÇÃO 1

1.1 Não.

1.2 A: 4; B: 3; C: 4; D: 4; E: 3

1.3 Não, pois os vértices não têm todos o mesmo grau.

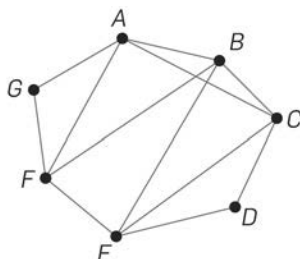
1.4 Sim. Por exemplo: $B C D E C A B D A E$.

1.6 Circuito possível: $A B C D E C A B D A E A$

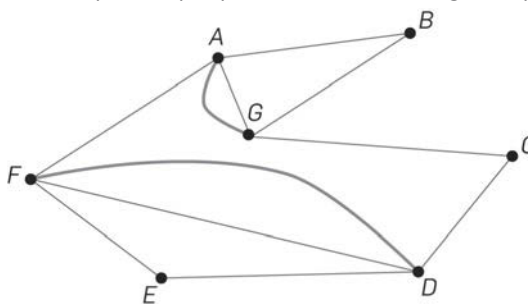
Eulerização do grafo: duplicar as arestas AB e AE

1.7 Sim. Por exemplo: $A B C D E A$.

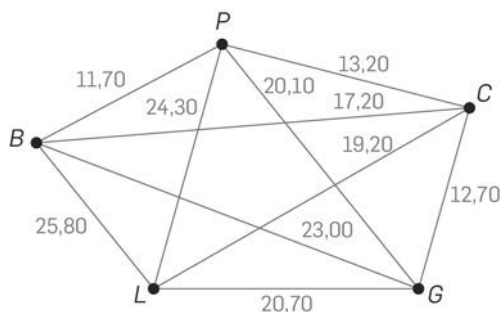
2. A: 4; B: 4; C: 4; D: 2; E: 4; F: 4; G: 2



3. Não é possível porque existem vértices de grau ímpar.



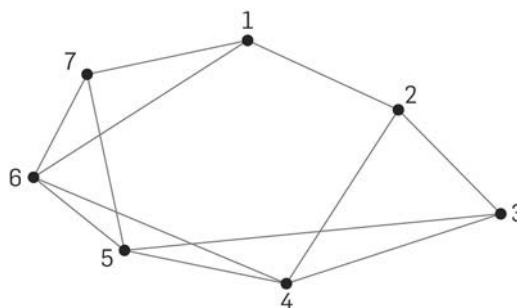
4.1



4.2.1 Percurso: $L - C - G - P - B - L$ (89,50 €)

4.2.2 Percurso: $L - G - C - P - B - L$ (84,10 €)

5.1

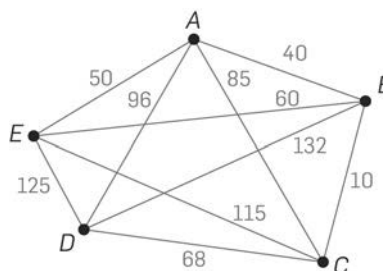


5.2 4 compartimentos

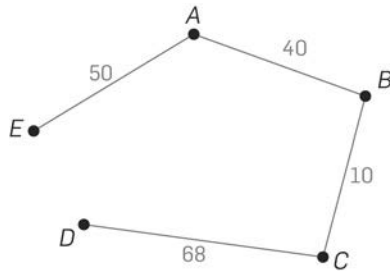
5.3 Por exemplo: 1 e 4; 2 e 5; 3 e 6; 7.

TESTE DE AVALIAÇÃO 2

1.1

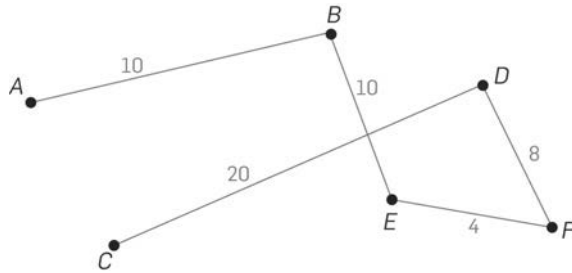


1.2

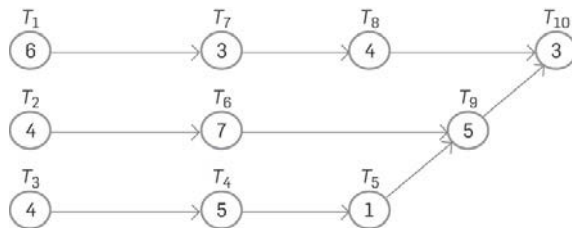


1.3 $E - A - B - C - D$; 1680 €/ano

2. Comprimento: 52



3.1



Vértices: representam as tarefas; arestas: representam a duração das tarefas

3.2 $T_1 - T_7 - T_8 - T_{10}$: 16

$T_2 - T_6 - T_9 - T_{10}$: 19

$T_3 - T_4 - T_5 - T_9 - T_{10}$: 18

3.3 19 semanas

4.1 973,21 €

4.2 $y = 27,31x + 836,57$

4.3.1 1246,22 €

4.3.2 A partir de 2029.

5.1 7200 habitantes

5.2 11 728 habitantes

5.3 Sim, em 1996.

5.4 Em abril de 2006.

TESTE DE AVALIAÇÃO 3

1.1 4

1.2 31 623

1.3 Apesar de M_1 ter uma magnitude 1,5 vezes superior a M_2 , a amplitude sísmica provocada por M_1 é cerca de 631 vezes superior à de M_2 .

2.1 3,204 metros

2.2 $a \approx 9,84$; $b \approx 0,52$; $c \approx 45,60$;

$$y = \frac{45,60}{1 + 9,84 \times e^{-0,52x}}$$

2.3.1 4325 milímetros

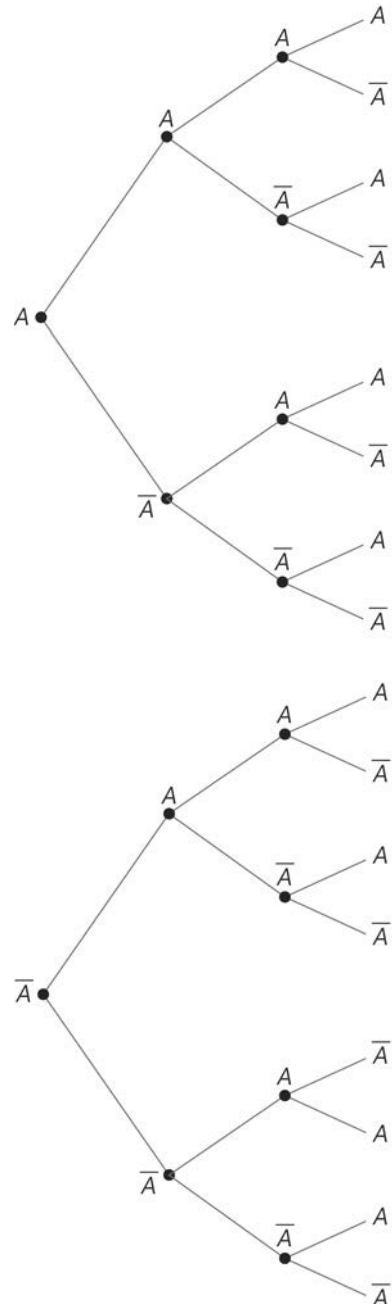
2.3.2 12 semanas e 5 dias

3.1 «Sair face 2»

3.2 «Sair face maior que 2»

3.3 «Sair face com o número 10»

4.1



$$4.2.1 \frac{1}{16}$$

$$4.2.2 \frac{1}{16}$$

$$4.2.3 \frac{1}{4}$$

$$4.2.4 \frac{11}{16}$$

$$5.1 \frac{1}{2}$$

$$5.3 \frac{1}{3}$$

$$5.5 \frac{1}{3}$$

$$5.2 \frac{1}{6}$$

$$5.4 \frac{5}{12}$$

$$5.6 \frac{2}{5}$$

TESTE DE AVALIAÇÃO 4

1.1.1 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.1.2 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{8\}$;
 $D = \{ \}$; $E = \Omega$

1.1.3 A: composto; B: composto; C: elementar;
D: impossível; E: certo

1.2.1 100

1.2.2.1 A: «sair número par nos dois giros» e B: «sair pelo menos um número ímpar nos dois giros»

1.2.2.2 A: «sair número par nos dois giros» e B: «sair número ímpar nos dois giros»

1.2.3.1 $X = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$

1.2.3.2 $Y = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (7, 0), (8, 0), (9, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9)\}$

1.2.3.3 $Z = \{(1, 4), (2, 2), (4, 1)\}$

$$2.1 \frac{1}{95}$$

$$2.2 \frac{7}{10}$$

$$2.3 \frac{3}{10}$$

$$2.4 \frac{1}{95}$$

$$3.1 \frac{11}{130}$$

$$3.2 \frac{7}{16}$$

4. 0,35

5.1

x_i	0	1	4	9	16	25
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

5.2 $\mu = 5,83$; $\sigma = 6,82$

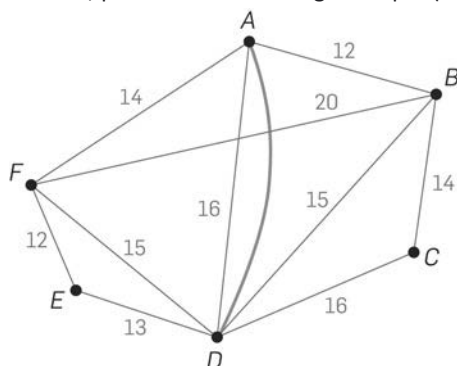
6.1 84,135%

6.2 31

TESTE DE AVALIAÇÃO 5

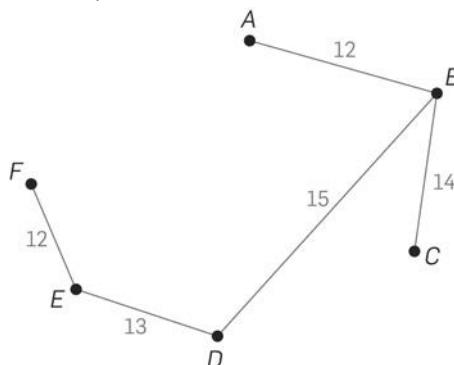
1.1 A B C D E A D B F D

1.2 Não, pois tem vértices de grau ímpar (A e D).



1.3 Por exemplo: A B C D E F A. Comprimento: 81

1.4 Comprimento: 66



2.1 Candidato A: 1400; Candidato B: 2800; B tem vantagem

2.2 B continua em vantagem.

2.3 Ao fim de 6 meses. Cerca de 1534 votantes.

2.4 Vence A com 1557 votos.

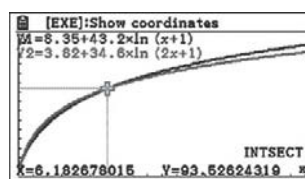
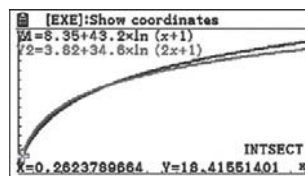
2.5 47,11%

3.1 8,35 centímetros

3.2 4 anos e 8 meses

3.3.1 4,53 centímetros

3.3.2 Ao fim de 3 meses, 18,42 centímetros e ao fim de 6 anos e 2 meses, 93,53 centímetros.



4.1 População: todos os portugueses adultos; amostra: os 84 portugueses em idade adulta

4.2 Estatística

4.3 A veracidade pode depender da forma como foi recolhida a amostra.

5.1 Valor médio: 950 €; desvio-padrão $\approx 27,277$

5.2.1 96,64%

5.2.2 99,46%

TESTE DE AVALIAÇÃO 6

$$1.1 \frac{1}{4}$$

$$1.2 \frac{1}{5}$$

$$1.3 \frac{3}{10}$$

$$1.4 \frac{1}{20}$$

$$1.5 \frac{21}{23}$$

$$2.1 \mu = 4,3$$

2.2.1

y_i	2	2,5	3	3,5	4
$P(Y = y_i)$	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

$$2.2.2 \mu = 2,9; \sigma = 0,62$$

$$3.1 6,68\%$$

$$3.2 30,85\%$$

$$3.3 38,3\%$$

$$4.1 E(X) = 6$$

$$4.2.1 16,06\%$$

$$4.2.2 7,86\%$$

$$5.1]5,802; 5,998[$$

$$5.2 271$$

$$6.1]0,025; 0,075[$$

$$6.2 1286$$

Testes-modelo de exame

TESTE-MODELO DE EXAME 1

1.1 Lista A: cinco mandatos; Lista B: dois mandatos; Lista C: um mandato; Lista D: um mandato; Lista E: zero mandatos

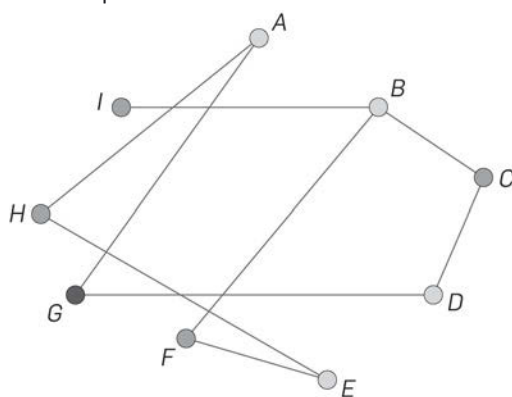
1.2 O candidato é da lista E e a afirmação é verdadeira. Por qualquer um dos métodos, a distribuição é: Lista A: quatro mandatos; Lista B: dois mandatos; Lista C: um mandato; Lista D: um mandato; Lista E: um mandato.

2. Mariana: mobiliário e recebe 50 333,33 €

Pedro: automóvel e recebe 28 333,33 €

Susana: apartamento e paga 78 666,67 €

3.1 Vértices: representam as diferentes espécies; arestas: representam as incompatibilidades entre as espécies.



3.2 Três divisórias: uma para A, B, D e E; outra para C, F, H e I; outra para G.

$$4.1 65 \text{ decibéis}$$

$$4.2 1 \text{ W/m}^2$$

$$4.3 \text{ Varia entre } 10^{-6} \text{ W/m}^2 \text{ e } 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$5.1.1 \frac{5}{17}$$

$$5.1.2 \frac{11}{17}$$

5.2

Altura (em cm)	[18, 22[	[22, 26[	[26, 30[	[30, 34[	[34, 38[
F_{r_i}	20%	44%	72%	88%	100%
f_i	5	6	7	4	3
F_i	5	11	18	22	25

$$5.3]0,20; 0,44[$$

$$5.4 81,86\%$$

TESTE-MODELO DE EXAME 2

1.1.1 Alegria

1.1.2 Venceria a Partilha.

1.2.1 A soma das quotas arredondadas é igual a 17.

1.2.2 Grupo Harmonia: seis lugares; grupo Alegria: cinco lugares; grupo Partilha: sete lugares

2.1 Rita: toalha; Luísa: colcha e caixa

2.2 Rita: 45 pontos; Luísa: 80 pontos

2.3 Rita: toalha e 63,6% da colcha; Luísa: caixa e 36,4% da colcha

2.4 60,9 pontos

3.1 1,80 milímetros

3.2 42,654%

$$3.3 y = 4,243 + 0,992 \ln x$$

3.4.1 6,53 milímetros

3.4.2 16 segundos

4.1 80%

4.2 25%

4.3 5,74%

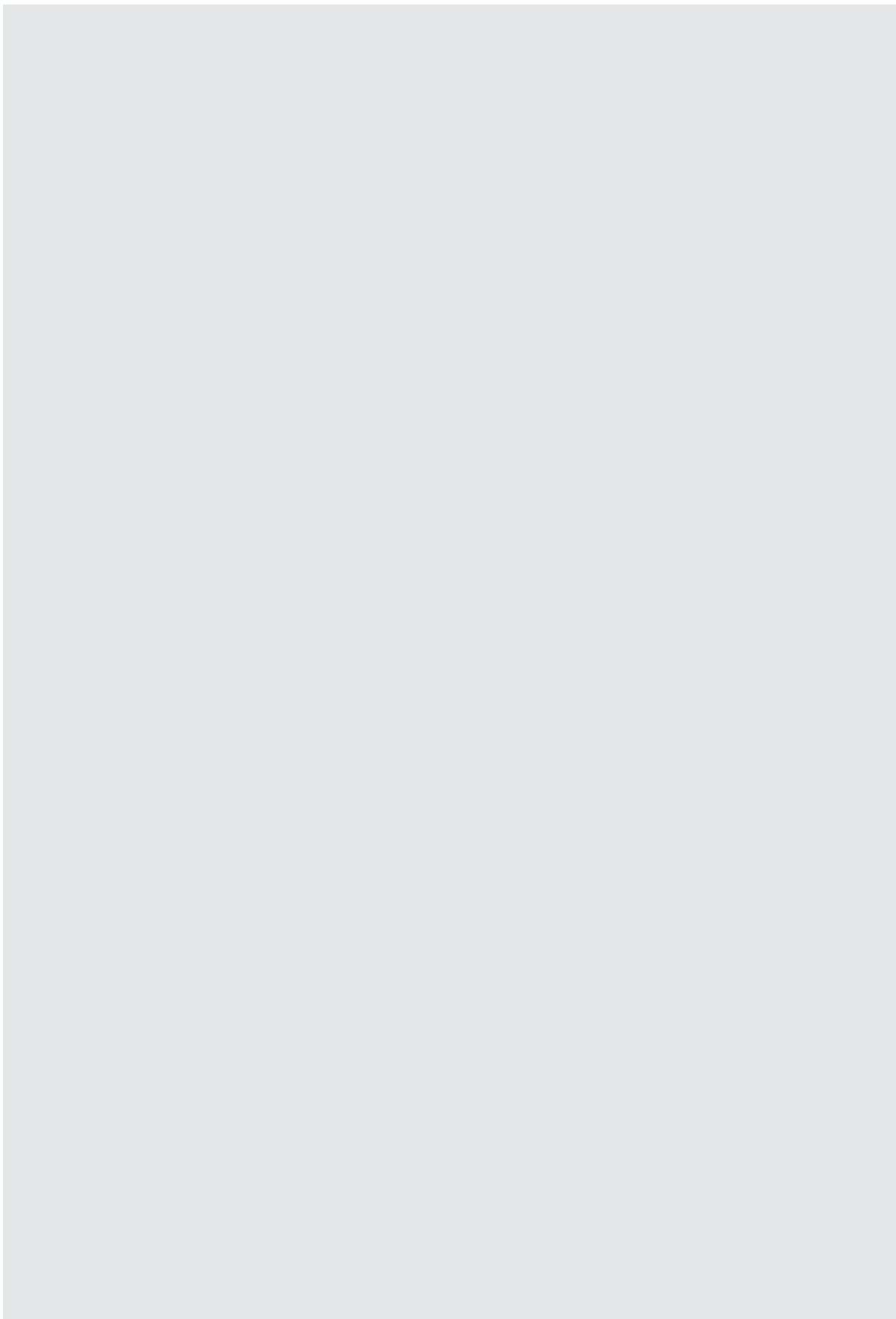
4.4 0,465

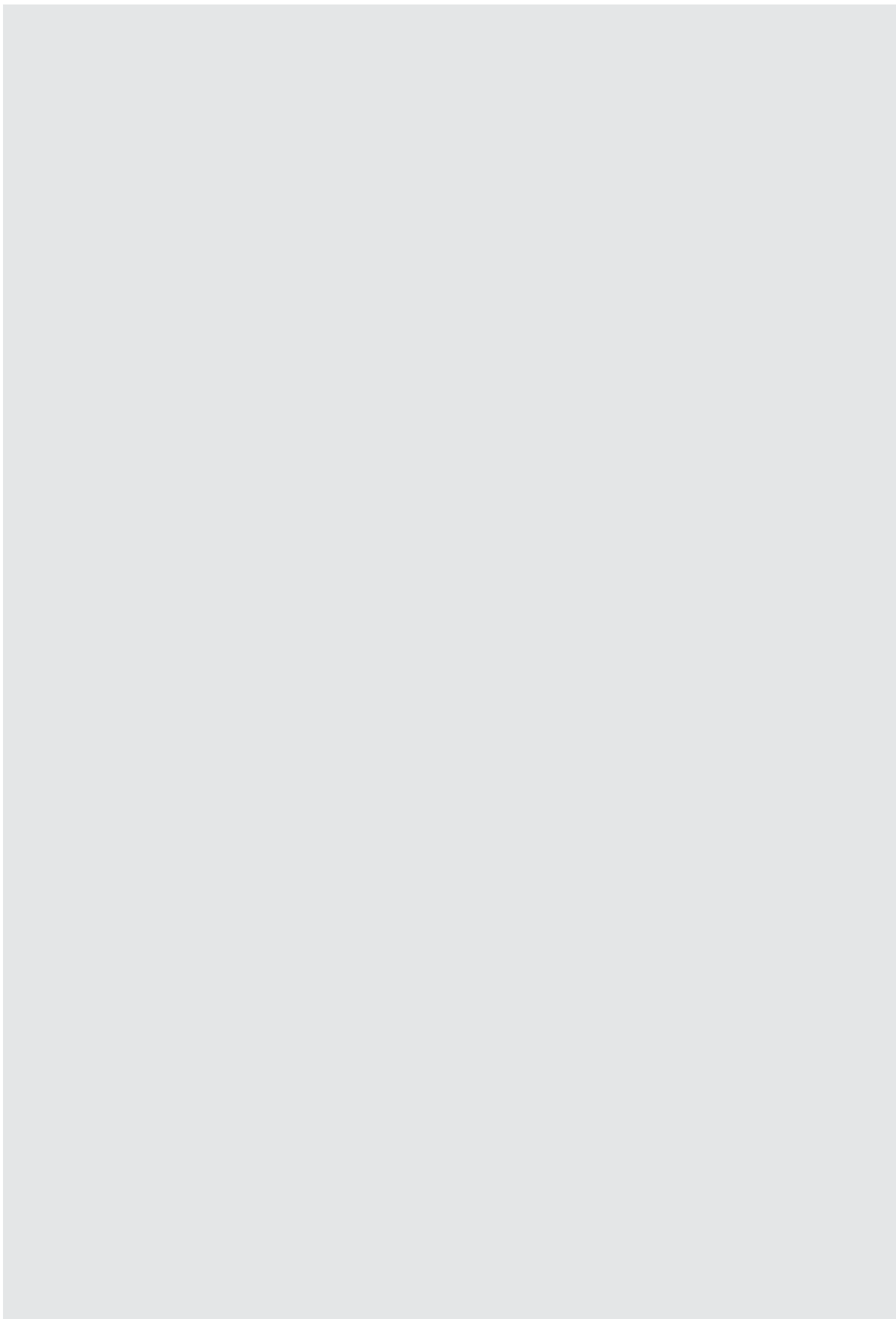
5.1

Peso (em gramas)	[9,7; 9,8[	[9,8; 9,9[	[9,9; 10[	[10; 10,1[	[10,1; 10,2[
Frequência absoluta	25	5	15	15	20
Frequência relativa (%)	31,25	6,25	18,75	18,75	25
Frequência relativa acumulada (%)	31,25	37,5	56,25	75	100

5.2 20 bolachas por saco

- BERGE, Claude, *Théorie des Graphes et ses Applications*, 2.^a ed., Dunod, Paris, 1967.
- BOLT, Brian, *A Caixa de Pandora da Matemática*, Gradiva, Lisboa, 1996.
- BOLT, Brian, *Mais Actividades Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1992.
- BOLT, Brian, *Uma Paródia Matemática*, Gradiva, Lisboa, 1997.
- CASELLA, George, *Inferência Estatística*, Editora Cengage, 2011.
- CLEGG, Frances, *Estatística para Todos*, Coleção: Aprender/Fazer Ciência, Gradiva, Lisboa, 1995.
- CRISLER, Nancy et al., *Discrete Mathematics Through Applications*, 2.^a ed., COMAP, W. H. Freeman and Company, New York, 1999.
- Dicionário Prático Ilustrado*, Lello e Irmão Editores, Porto, 1995.
- DORAN, Jody e HERNANDÉZ, Eugenio, *Las Matemáticas en la Vida Cotidiana*, Addison – Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1999.
- Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, Editorial Verbo, Lisboa, 1992.
- For all Practical Purposes*, 5.^a ed., COMAP, W. H. Freeman and Company, New York, 2000.
- Grande Enciclopédia Luso-Brasileira*, Editorial Enciclopédia Limitada, Lisboa, Rio de Janeiro, s.d.
- MARQUÊS DE SÁ, Joaquim, *O Acaso*, Gradiva, Lisboa, 2006.
- MARTINS, Maria Eugénia Graça, *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, n.º 174, Universidade Aberta, 2009.
- MLODINOW, Leonard, *O Passeio do Bêbado, Como o Acaso Rege as Nossas Vidas*, Edições Bizâncio, Lisboa, 2009.
- MURTEIRA, Bento, *Probabilidades e Estatística*, vols. I e II, McGraw-Hill Portugal, Lisboa, 1980.
- NETTO, Paulo O. B., *Grafos, Teoria, Modelos e Algoritmos*, 4.^a ed., Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2006.
- NETTO, Paulo O. B., *Grafos, Introdução e Prática*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2009.
- NEUHAUSER, Claudia, *Calculus for Biology and Medicine*, Prentice Hall, Inc. Upper Sanddle River, New Jersey, 2000.
- ORE, Oystein, *Graphs and Their Uses*, Random House, New York, 1963.
- PEREIRA, Wilson et al., *Elementos de Estatística*, McGraw-Hill Brasil, 1984.
- SAMUELSON e NORDHAUS, *Economia*, 12.^a ed., McGraw-Hill, Lisboa, 1991.
- STEEN, L. A., *For All Practical Purposes Introduction to Contemporary Mathematics*, COMAP, W. H. Freeman and Company, New York, 1999.
- WERKEMA, Cristina, *Inferência Estatística*, Elsevier, Filadélfia, 2014.





AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-4008-3  9 781111 140083
--	---	---



	
www.leyaeducacao.com	