

EXPOENTE¹¹

MATEMÁTICA A

OFERTA AO
ALUNO

Exercícios de Exame

- ✓ Exercícios de exame/testes intermédios, organizados por tema
- ✓ Soluções
- ✓ Resoluções de todos os exercícios disponíveis em www.expoente11.asa.pt

ASA

APRESENTAÇÃO

Esta publicação dá-te a possibilidade de resolveres alguns itens saídos nos últimos exames nacionais e nos testes intermédios (estes últimos são testes temáticos e periódicos que se realizaram até 2014).

Assim, apresentamos-te uma compilação de exercícios de exame / testes intermédios organizados pelos temas abordados no 11.º ano:

- Trigonometria e Funções Trigonométricas
- Geometria Analítica
- Sucessões
- Funções Reais de Variável Real
- Estatística

Cada tema encontra-se organizado em itens de seleção e itens de construção.

No final, disponibilizamos-te as soluções de todos os exercícios.

Terás ainda à tua disposição, em www.expoente11.asa.pt, as resoluções detalhadas destes exercícios, para te apoiar caso tenhas dúvidas.

Esperamos que este livro te seja muito útil.

Bom trabalho!

ÍNDICE

Exercícios de Exame

Tema I – Trigonometria e Funções Trigonométricas

• Itens de seleção	3
• Itens de construção	5

Tema II – Geometria Analítica

• Itens de seleção	7
• Itens de construção	9

Tema III – Sucessões

• Itens de seleção	13
• Itens de construção	14

Tema IV – Funções Reais de Variável Real

• Itens de seleção	17
• Itens de construção	20

Tema V – Estatística

• Itens de seleção	21
• Itens de construção	22

Soluções	24
----------------	----

Tema I

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Itens de seleção

1. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0,9$.

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, janeiro de 2011

2. Sejam α , β e θ três números reais. Sabe-se que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ • $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ • $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \theta$?

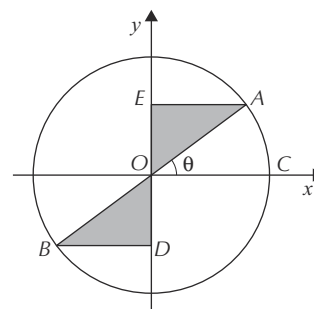
- (A) $2\sin \alpha + \cos \alpha$ (B) $2\sin \alpha - \cos \alpha$ (C) $-\cos \alpha$ (D) $\cos \alpha$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, janeiro de 2011

3. Na figura está representado, num referencial o. n. xOy , o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(1, 0)$;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy ;
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico;
- as retas EA e BD são paralelas ao eixo Ox ;
- θ é a amplitude do ângulo COA ;
- $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Qual das expressões seguintes representa o perímetro da região sombreada na figura?

- (A) $2(\cos \theta + \sin \theta)$ (B) $\cos \theta + \sin \theta$
(C) $2(1 + \cos \theta + \sin \theta)$ (D) $1 + \cos \theta + \sin \theta$

Exame Nacional de Matemática A, 2011, 2.ª fase

4. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{3}$?

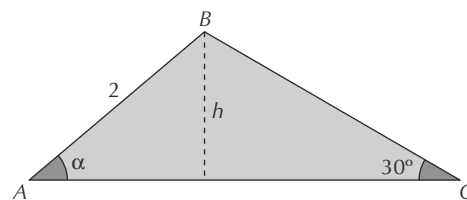
- (A) $\pi - \theta$ (B) $\pi + \theta$ (C) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \theta$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, fevereiro de 2012

5. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na figura.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $\widehat{ACB} = 30^\circ$



Seja $\alpha = \widehat{BAC} = 30^\circ$. Qual das expressões seguintes representa $\overline{BC}$, em função de α ?

- (A) $4\text{sen}\alpha$ (B) $6\text{sen}\alpha$ (C) $4\text{cos}\alpha$ (D) $6\text{cos}\alpha$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, fevereiro de 2012

6. Considere o intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$. Qual das equações seguintes não tem solução neste intervalo?

- (A) $\cos x = -0,5$ (B) $\sin x = -0,5$ (C) $\cos x = -0,9$ (D) $\sin x = -0,9$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2013

7. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$?

- (A) $\sin x + \cos x$ (B) $\frac{\cos x}{\tan x}$ (C) $\tan x - \sin x$ (D) $\sin x \times \tan x$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2014

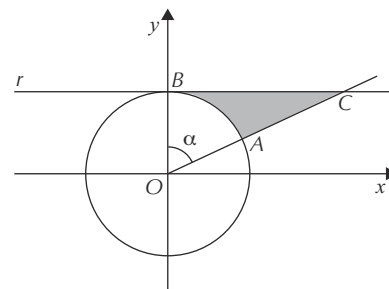
8. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\sin x = 0,3$.
Quantas soluções tem esta equação no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$?

- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2014

9. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy , a circunferência de centro O e a reta r .
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B ;
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{OA}$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Qual das expressões seguintes representa, em função de α , a área da região a sombreado?

- (A) $\frac{\text{sen}\alpha - \alpha}{2}$ (B) $\frac{\text{tg}\alpha - \alpha}{2}$ (C) $\frac{\text{tg}\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{2}$

Exame Nacional de Matemática A, 2014, época especial

Itens de construção

10. Determine o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$.

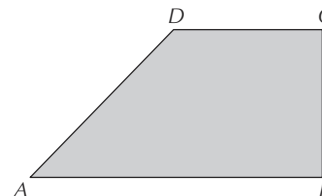
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, maio de 2011

11. Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$;
- $\overline{CD} = 1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC ;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

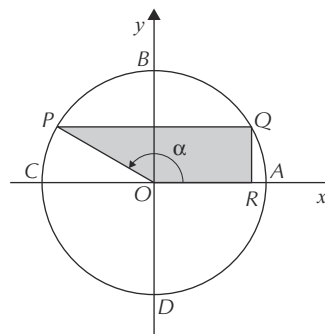
- 11.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α , por $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

- 11.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P(\theta)$.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática A, 2012, 1.ª fase

12. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de interseção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC , nunca coincidindo com B nem com C . Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q . Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\vec{OP}$ ($\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$).



Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

- 12.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$.

- 12.2. Para uma certa posição do ponto P , a reta OP intersesta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$. Determine, para essa posição do ponto P , a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2013

13. Na figura estão representados:

- o retângulo $[ABCD]$, em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$;
- o ponto O , ponto médio do segmento $[AD]$;
- uma semicircunferência de centro no ponto O e raio 1.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AB]$, nunca coincidindo com A , mas podendo coincidir com B . Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto de interseção da reta PO com a semicircunferência.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right]$.

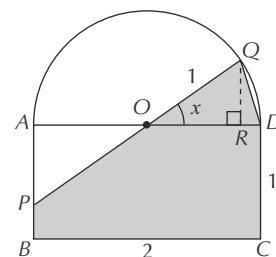
Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

13.1. Mostre que a área do polígono $[BCDQP]$, representado a sombreado, é dada, em função de x , por

$$2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}.$$

13.2. Para uma certa posição do ponto P , tem-se $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto P , a área do polígono $[BCDQP]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio de Matemática A, 11º ano, março de 2014



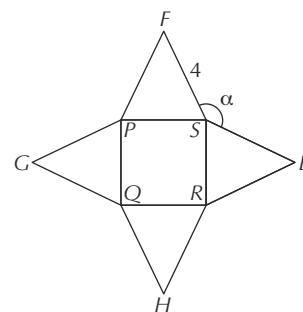
14. Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right]$. A aresta da

base da pirâmide e, conseqüentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α .

Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α , por $-32\cos\alpha$.

Sugestão: Atendendo a que $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP , que poderá designar por β .



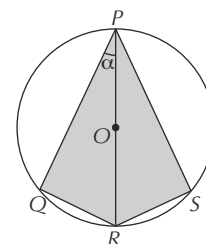
Adaptado de Teste Intermédio de Matemática A, 12º ano, abril de 2014

15. Na figura estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S . Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR ;
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero $[PQRS]$, em função de α .

Para um certo número real θ , com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$.

Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.



Exame Nacional de Matemática A, 2014, 2ª fase

Tema II

Geometria Analítica

Itens de seleção

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α , definido por $4x - z + 1 = 0$. Seja r uma reta perpendicular ao plano α .

Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $(x, y, z) = (0, 0, -1) + k(4, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(1, 0, 4), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (3, 1, 0) + k(4, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

Adaptado de Exame Nacional de Matemática A, 2014, 1ª fase

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A , de coordenadas $(1, 0, 3)$, e o plano α , definido por $3x + 2y - 4 = 0$. Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A .

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) $3x + 2y - 3 = 0$

(B) $2x - 3y - z + 1 = 0$

(C) $2x - 3y + z = 0$

(D) $3x + 2y = 0$

Exame Nacional de Matemática A, 2014, 2ª fase

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A , de coordenadas $(2, 0, 3)$, e o plano α , definido por $x - y - 2z = 3$. Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A .

Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $(x, y, z) = (-2, 0, -1) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

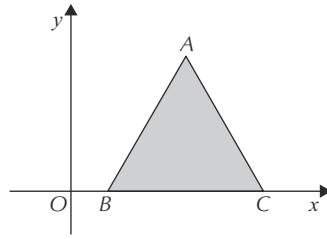
(B) $(x, y, z) = (5, -3, -3) + k(-1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, -1, -2) + k(2, 0, 3), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (2, 0, 3) + k(1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$

Adaptado de Exame Nacional de Matemática A, 2014, época especial

4. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1.

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

Exame Nacional de Matemática A, 2015, 1.ª fase

5. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2 + (y - 1)^2 = 2$. Esta circunferência intersesta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A . Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$

(D) $y = 2x - 2$

Exame Nacional de Matemática A, 2015, 2.ª fase

6. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -3

(B) -2

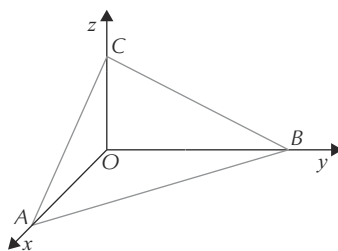
(C) 2

(D) 3

Exame Nacional de Matemática A, 2015, época especial

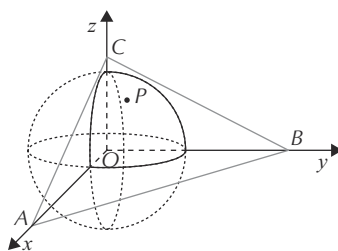
Itens de construção

7. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, parte do plano ABC , de equação $x + y + 2z = 12$.



Tal como a figura sugere, A , B e C são os pontos de interseção deste plano com os eixos coordenados.

- 7.1. Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $D(1, 2, 3)$ e é paralelo ao plano ABC .
 7.2. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Determine uma equação vetorial da reta MB .
 7.3. O plano ABC é tangente, num ponto P , a uma esfera centrada na origem do referencial, tal como se ilustra na figura.



Determine o valor exato do volume dessa esfera.

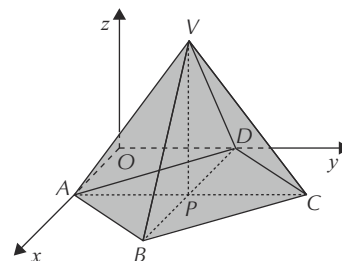
Nota: Tenha em conta que a reta OP é perpendicular ao plano ABC .

Adaptado de *Teste Intermédio de Matemática A*, 11º ano, março de 2014

8. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva. O ponto P é o centro da base da pirâmide.

Admita que:

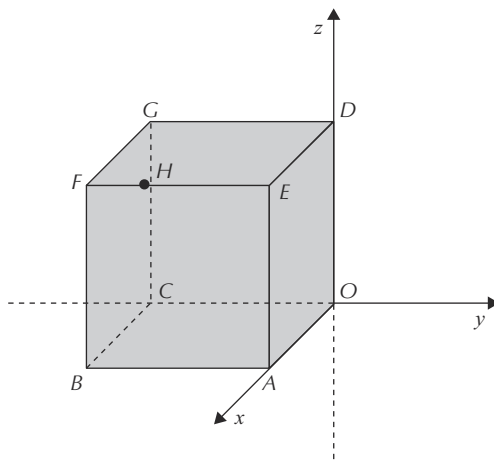
- $\overline{AV} = 10$;
- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual a 6;
- o vértice V tem abcissa e ordenada iguais a 6.



- 8.1. Mostre que o vértice V tem cota igual a 8.
 8.2. Seja M o ponto médio da aresta $[BV]$. Determine uma equação vetorial que defina a reta CM .
 8.3. Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta $[DV]$.

Adaptado de *Teste Intermédio de Matemática A*, 12º ano, abril de 2014

9. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 3.



Sabe-se que:

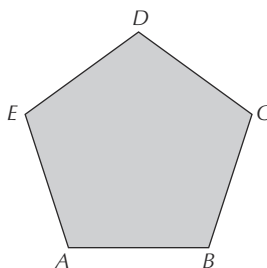
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy ;
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz ;
- o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC .

Determine o valor exato de $\sin^2 \alpha$, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional de Matemática A, 2014, 1.ª fase

10. Na figura está representado um pentágono regular $[ABCDE]$.
Sabe-se que $\overline{AB} = 1$.

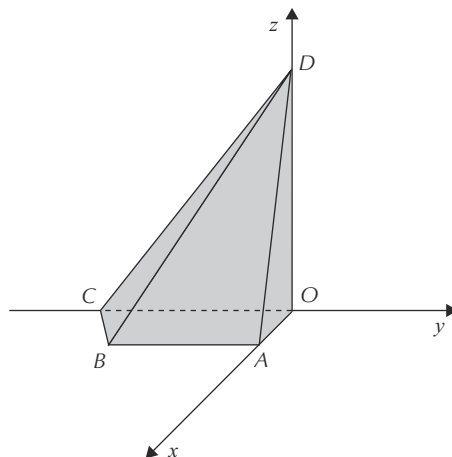


Mostre que $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$.
Use a igualdade $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática A, 2014, 2.ª fase

11. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCOD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- os pontos A e B têm igual abcissa;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada -3 ;
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy ;
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz ;
- a reta AD é definida por $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(3, 0, -5)$, $k \in \mathbb{R}$;
- $||\vec{CD}||^2 = 41$.

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática A, 2014, época especial

12. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0, 0, 2)$ e $B(4, 0, 0)$.

12.1. Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$. Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α .

12.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

12.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B ;
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$.

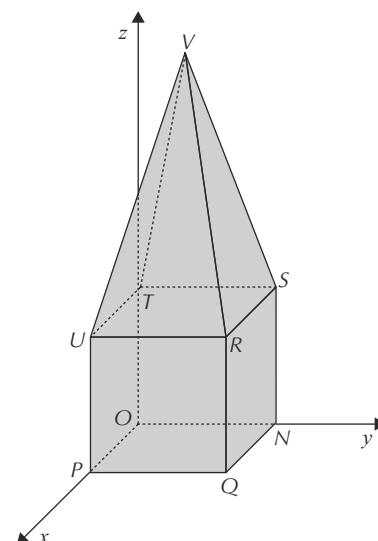
Determine a ordenada do ponto P .

Exame Nacional de Matemática A, 2015, 1ª fase

13. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox ;
- o vértice N pertence ao eixo Oy ;
- o vértice T pertence ao eixo Oz ;
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$.



- 13.1. Determine as coordenadas do ponto V .
- 13.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR .
- 13.3. Seja A um ponto pertencente ao plano QRS . Sabe-se que:
- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
 - os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame Nacional de Matemática A, 2015, 2ª fase

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$.

- 14.1. Considere o ponto $P(-2, 1, 3a)$, sendo a um certo número real. Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β , sendo O a origem do referencial. Determine o valor de a .

- 14.2. Considere o ponto $A(1, 2, 3)$. Seja B o ponto de interseção do plano β com o eixo Ox . Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz . Determine a amplitude do ângulo BAC . Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

- 14.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β . Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β .

Exame Nacional de Matemática A, 2015, época especial

Tema III

Sucessões

Itens de seleção

1. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2n \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Seja (w_n) a sucessão de termo geral $w_n = 5n - 13$.

Qual é o valor de n para o qual se tem $w_n = u_2$?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, maio de 2011

2. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

- (A) $(-1)^n$
- (B) $(-1)^n \cdot n$
- (C) $-\frac{1}{n}$
- (D) $1 + n^2$

Exame Nacional de Matemática A, 2015, 2.ª fase

3. De uma progressão geométrica (a_n) , sabe-se que o terceiro termo é igual a $\frac{1}{4}$ e que o sexto termo é igual a 2.

Qual é o valor do vigésimo termo?

- (A) 8192
- (B) 16 384
- (C) 32 768
- (D) 65 536

Exame Nacional de Matemática A, 2015, época especial

Itens de construção

4. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais $a_n = 2^n$ e $b_n = n + 1$.
Mostre, por indução, que $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exame Nacional de Matemática, 2002, 1.ª fase, 2.ª chamada

5. Considere a sucessão (u_n) , definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{16}{9} \\ u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{3} \end{cases}$$

Utilizando o método de indução matemática, mostre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{2}{3^{n+1}}$.

Exame Nacional de Matemática, 2002, 2.ª fase

6. Estude, quanto à monotonia, a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{1 - 2n}{n + 3}$.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, maio de 2011

7. Para criar o logótipo de um aldeamento turístico, foi considerada uma sequência de circunferências concêntricas, em que o círculo central é branco e, a partir dele, as regiões exteriores a cada uma das circunferências e interiores à circunferência seguinte são, alternadamente, pretas e brancas, sendo a última preta, tal como sugere a figura 1. O logótipo foi pintado num dos muros do aldeamento e, tal como a figura 2 ilustra, consiste num quadrado com duas dessas sequências de circunferências concêntricas, uma das quais dividida em duas partes geometricamente iguais. De acordo com o esquema representado na figura 3, verifica-se que o conjunto I, o conjunto II e o conjunto III são tangentes entre si e que cada um deles é tangente a dois lados do quadrado que os circunscreve.

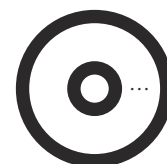


Figura 1

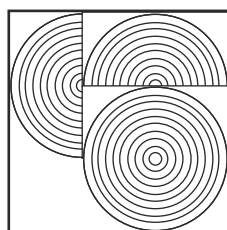


Figura 2

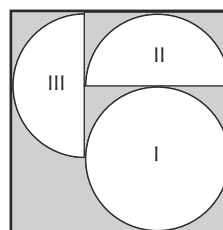


Figura 3

No logótipo pintado no muro do aldeamento:

- o conjunto I tem 20 circunferências concêntricas, que passarão a ser designadas, da menor para a maior: *circunferência um*, *circunferência dois*, ..., *circunferência vinte*;
- os raios dessas circunferências estão em progressão aritmética de razão 5 cm;
- o círculo central do conjunto I, limitado pela circunferência um, tem $25\pi \text{ cm}^2$ de área.

Relativamente ao conjunto I, designe por A_1 a área do círculo central, por A_2 a área da região exterior à circunferência um e interior à circunferência dois, e assim sucessivamente, até A_{20} , de acordo com o esquema representado na figura 4.

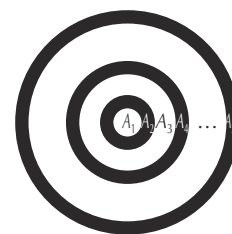


Figura 4

7.1. Considere, no logótipo pintado no muro do aldeamento, os valores correspondentes a $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$, em cm^2 . Justifique que $A_n = 50\pi n - 25\pi$.

7.2. Mostre que A_n é termo geral de uma progressão aritmética de razão 50π .

7.3. Na pintura do logótipo do muro do aldeamento, foram usadas tinta branca e tinta preta, com igual rendimento. Admita que, para pintar o círculo central do conjunto I, se gastou 1 centilitro de tinta branca.

Determine a quantidade total de tinta preta gasta na pintura dos conjuntos I, II e III do logótipo, admitindo que a quantidade de tinta gasta na pintura de uma região é diretamente proporcional à área dessa região.

Apresente o resultado em litros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B, 2014, 1ª fase

- 8.** Admita que, numa determinada mina de ouro, foi necessário construir um poço que permitisse um acesso direto às galerias da mina situadas a maior profundidade. Dadas as características geológicas do subsolo e a complexidade dos trabalhos de escavação, o número de metros escavados em cada dia foi progressivamente diminuindo, até se alcançar a profundidade pretendida. Sabe-se que:

- no final do primeiro dia de trabalho, o poço ficou com 30 metros de profundidade;
- no segundo dia, foram escavados 28,5 metros (95% de 30 metros), ficando o poço, no final desse dia, com 58,5 metros de profundidade.

Admita que os trabalhos prosseguiram, de modo que, em cada dia, a partir do segundo, a profundidade acrescentada ao poço, em metros, foi 95% da profundidade acrescentada ao poço no dia anterior.

Considere a sequência (p_n) , em que p_n é o número de metros acrescentados à profundidade do poço, no dia de trabalho de ordem n .

8.1. Quantos metros foram acrescentados à profundidade do poço no décimo dia de trabalho?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resposta, comece por justificar que os termos da sequência (p_n) são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 0,95.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

8.2. Determine quantos dias de trabalho foram necessários para que a profundidade do poço ultrapassasse 575 metros.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame Nacional de Matemática B, 2014, 2ª fase

9. Desde muito cedo que o Dinis procura fazer economias, quer poupando quer investindo as suas poupanças para as rentabilizar.

9.1. No dia em que fez dezasseis anos, o Dinis decidiu iniciar uma poupança. Pensou em duas hipóteses diferentes:

- colocar 2 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, colocar no mealheiro mais 1 euro do que a quantia colocada no mês anterior;
- colocar 15 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, colocar novamente 15 euros no mealheiro.

O objetivo do Dinis era juntar, pelo menos, 500 euros.

Qual das duas hipóteses permite concretizar este objetivo mais rapidamente?

Justifique a sua resposta.

9.2. Quando o Dinis completou o Ensino Secundário, os pais e os avós deram-lhe algum dinheiro.

O Dinis decidiu rentabilizar esse dinheiro num depósito a prazo, obtendo juros, num regime de juro composto. Depois de se informar em várias instituições bancárias, o Dinis depositou o dinheiro que tinha recebido dos pais e dos avós numa conta a prazo com uma taxa de juro anual de 1,50%, com capitalizações anuais.

O Dinis fez alguns cálculos e verificou, corretamente, que, nas condições referidas, seis anos após a data de abertura da conta, o correspondente capital iria perfazer cerca de 1530,82 euros.

Determine a quantia que o Dinis recebeu dos pais e dos avós quando completou o Ensino Secundário. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Adaptado de *Exame Nacional de Matemática B*, 2015, 1.ª fase

10. O reservatório de um parque industrial tem a forma de um tronco de cone, tal como o que se apresenta na figura 1.

Na superfície lateral do reservatório, foram pintadas 27 circunferências, de espessura desprezável, contidas em planos paralelos equidistantes, como o esquema da figura 1 ilustra.

A figura 2 apresenta a vista de cima do reservatório, na qual estão representadas, no mesmo plano, algumas dessas circunferências.

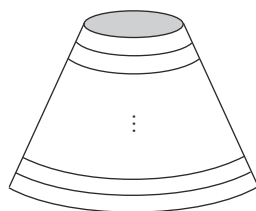


Figura 1

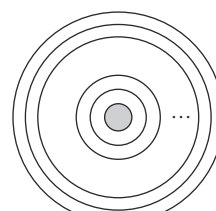


Figura 2

Sabe-se que a menor circunferência pintada no reservatório tem 6,9 metros de raio e que cada circunferência, da menor para a maior, tem mais 0,3 metros de raio do que a circunferência anterior.

Os perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório, da menor para a maior, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

10.1. Mostre que a razão dessa progressão é exatamente $0,6\pi$ metros.

10.2. Determine a soma dos perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório.

Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Adaptado de *Exame Nacional de Matemática B*, 2015, 2.ª fase

Tema IV

Funções Reais de Variável Real

Itens de seleção

1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Considere a função g definida por $g(x) = f(x+a) + k$, com $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$.
Sabe-se que as retas de equações $x = -2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de g .
Quais são os valores de a e de k ?

(A) $a = 1$ e $k = -2$ (B) $a = 1$ e $k = 2$ (C) $a = -1$ e $k = -2$ (D) $a = -1$ e $k = 2$

Teste Intermédio de Matemática A, 11º ano, março de 2013

2. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:
- as funções f e g são funções quadráticas;
 - a função f tem dois zeros distintos;
 - a função g tem um único zero;
 - os gráficos das funções f e g interseam-se no ponto de coordenadas $(3, 0)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

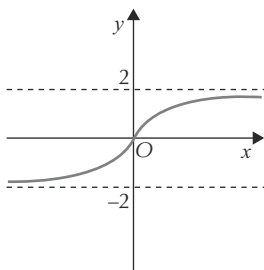
(A) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.(B) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.(C) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.(D) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

Teste Intermédio de Matemática A, 11º ano, março de 2013

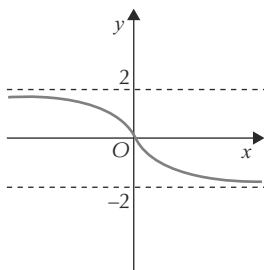
3. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. De uma certa função f , sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f ?

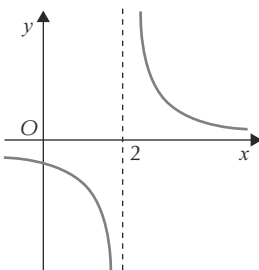
(A)



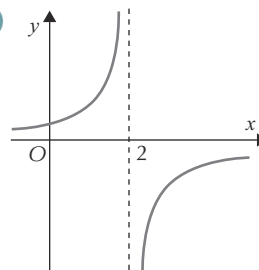
(B)



(C)



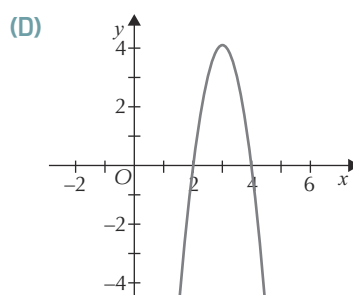
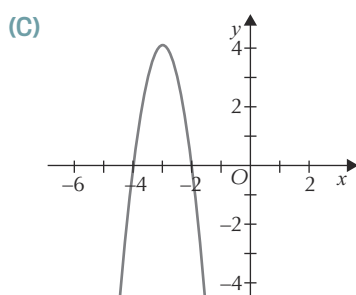
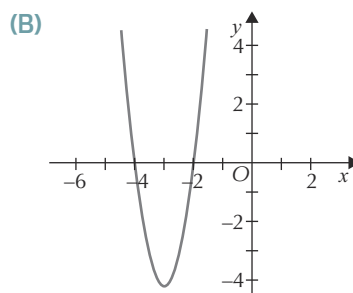
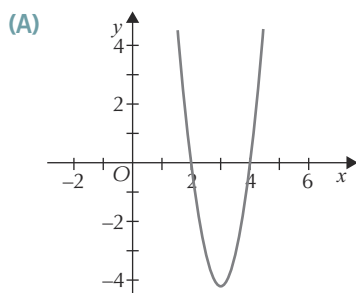
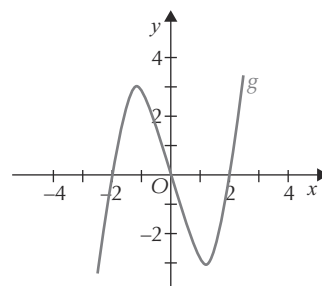
(D)



Teste Intermédio de Matemática A, 12º ano, fevereiro de 2013

4. Na figura está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial g , de grau 3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x - 3)$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f' , primeira derivada da função f ?

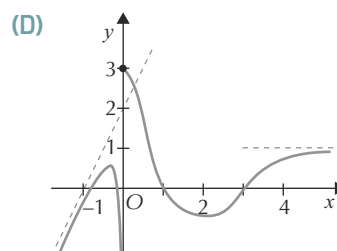
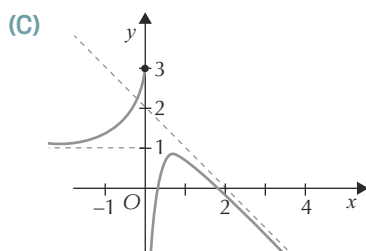
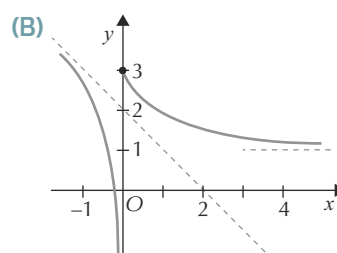
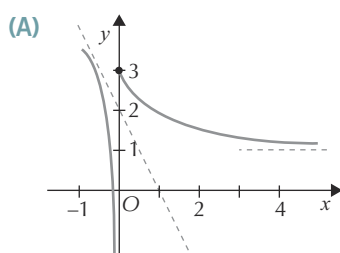


Exame Nacional de Matemática A, 2013, 2ª fase

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 2$

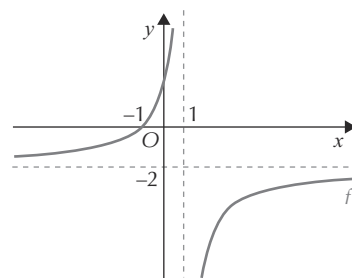
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?



Nota: Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, assíntotas desse gráfico.

Exame Nacional de Matemática A, 2013, época especial

6. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f . O gráfico da função f intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa -1 . As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f .



Qual é o conjunto-solução da condição $f(x) \leq 0$?

- (A) $]-\infty, -2[\cup]-2, 0]$
 (B) $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$
 (C) $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$
 (D) $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2014

7. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = 3x + 6$;
- a função g é uma função quadrática e é uma função par;
- $g(2) = 0$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.
 (B) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.
 (C) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.
 (D) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º ano, março de 2014

8. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{f(x)}$?

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) $+\infty$

Exame Nacional de Matemática A, 2014, época especial

9. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $f'(2) = 6$ (f' designa a derivada de f).

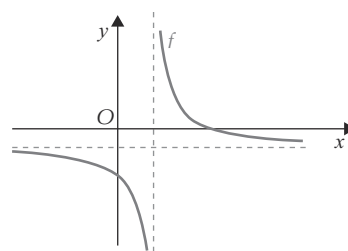
Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Exame Nacional de Matemática A, 2015, época especial

Itens de construção

10. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. As retas de equações $x = 2$ e $y = -1$ são as assíntotas do gráfico da função f .



- 10.1. Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

10.1.1. Qual é o valor de k para o qual a equação $f(x) = k$ é impossível?

10.1.2. Qual é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$?

- 10.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$.

10.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \frac{4-x}{x+2}$. Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

10.2.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$. A equação $(f \circ g)(x) = x$ tem exatamente duas soluções. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções. Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

Teste Intermédio de Matemática A, 11º ano, março de 2013

11. Considere duas funções g e h , de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico da função g ;
- a função h é definida por $h(x) = \frac{1 - [g(x)]^2}{x^2}$.

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

Exame Nacional de Matemática A, 2013, época especial

12. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 13 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x-3}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

12.1. Resolva analiticamente, em $]1, +\infty[$, a condição $f(x) < \frac{1}{x-2}$. Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

12.2. Considere, para cada número real k , a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = kx + 2$. Determine o valor de k para o qual se tem $(g \circ f)(-3) = 6$.

12.3. Determine o contradomínio da função f . Para resolver este item, recorra à calculadora gráfica. Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função f que visualizar na calculadora (sugere-se a utilização da janela em que $x \in [-5, 5]$ e $y \in [-15, 10]$). Nesse referencial:
 - assinale o ponto do gráfico de abcissa 1 e indique a sua ordenada;
 - represente as assíntotas do gráfico de f ;
 - assinale o ponto do gráfico correspondente ao máximo relativo da função.
- apresentar o contradomínio da função f , usando a notação de intervalos de números reais.

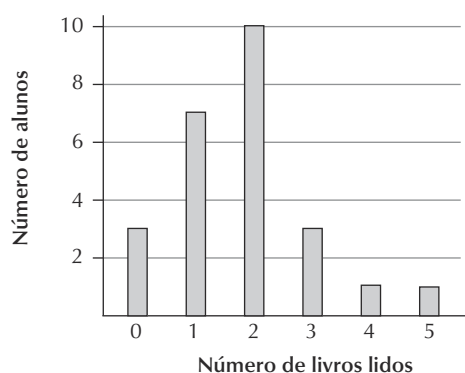
Teste Intermédio de Matemática A, 11º ano, março de 2014

Tema V

Estatística

Itens de seleção

1. Foi realizado um inquérito acerca do número de livros que cada um dos alunos de uma turma tinha lido nas férias.
Os resultados do inquérito estão representados no gráfico que se segue.



Em média, quantos livros foram lidos por aluno?

- (A) 1,8
- (B) 2
- (C) 2,5
- (D) 3

Teste Intermédio de Matemática A, 10º ano, maio de 2008

Itens de construção

2. Os diagramas de dispersão apresentados na figura 1 e na figura 2 foram construídos com base em dados estatísticos, divulgados pela Autoridade Nacional de Comunicações, relativos ao número de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa e ao número de mensagens escritas enviadas, no período compreendido entre os anos de 2004 e de 2011.

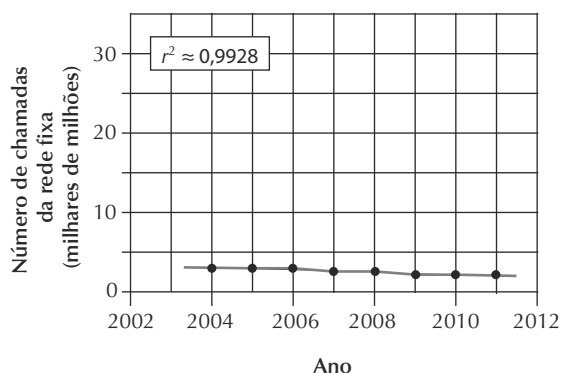


Figura 1

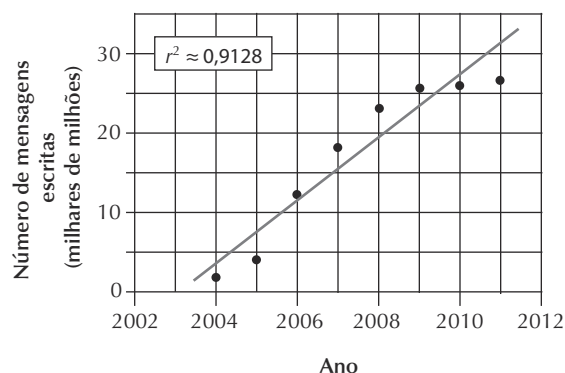


Figura 2

O diagrama de dispersão da figura 1 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

O diagrama de dispersão da figura 2 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de mensagens escritas enviadas durante esse ano.

Em cada diagrama de dispersão está representada a reta de regressão e é indicado um valor aproximado do quadrado do coeficiente de correlação linear.

Admita que a reta de regressão representada no diagrama de dispersão da figura 1 é definida pela equação $y = -0,1502x + 304,22$, em que x representa o ano e y representa o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

Considere as seguintes afirmações:

- (A) A correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 1 é positiva.
- (B) A correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 1 é mais forte do que a correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da figura 2.
- (C) De acordo com o modelo de regressão linear apresentado, o número estimado de chamadas que se efetuariam a partir de telefones da rede fixa durante o ano de 2012 seria superior a dois milhares de milhões.

Elabore uma pequena composição, na qual indique, justificando, quais as afirmações verdadeiras.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B, 2013, época especial

3. Na tabela seguinte apresentam-se os valores da altitude, em metros, de alguns locais de Portugal onde estão situadas estações meteorológicas. Apresentam-se também os valores, em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$), das médias anuais das temperaturas máximas, registadas nessas estações, no período 1971-2000 e no período 2001-2010.

Localização da estação meteorológica	Altitude (metros)	Médias anuais das temperaturas máximas ($^{\circ}\text{C}$)	
		1971-2000	2001-2010
Bragança	690	17,9	18,8
Vila Real	481	18,6	18,8
Braga	190	20,0	20,8
Viseu	443	19,6	18,6
Guarda	1019	14,7	15,7
Coimbra	35	21,2	21,2
Castelo Branco	386	21,0	21,5
Santarém	73	22,3	22,8
Portalegre	597	19,5	20,5
Setúbal	35	21,8	22,7
Évora	309	20,7	22,8
Beja	246	22,5	23,0
Faro	8	22,0	22,2

Fontes: www.ine.pt (adaptado), www.ipma.pt (adaptado) (consultados em setembro de 2013)

Considerando a altitude como variável explicativa x e a média anual das temperaturas máximas como variável resposta y , utilize uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo para resolver as seguintes questões.

- 3.1. Represente a nuvem de pontos num referencial ortogonal.
- 3.2. Determine, com uma casa decimal, a média dos valores de cada uma das amostras representadas.
- 3.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com cinco casas decimais.
- 3.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.
- 3.5. Utilizando a equação obtida em 3.4., determine a média anual das temperaturas máximas esperada para uma altitude de 1000 metros.
- 3.6. Calcule, com três casas decimais, o valor do coeficiente de correlação linear, r , e interprete-o, no contexto da situação descrita.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B, 2014, 1ª fase

4. Uma das estações meteorológicas em que se registam os valores mais elevados de precipitação total anual em Portugal é a de Viana do Castelo.

Relativamente aos valores de precipitação total anual registados na estação meteorológica de Viana do Castelo, no período 2010-2013, verifica-se que:

- a média dos valores de precipitação total anual, nesses quatro anos, é 1270,125 mm e a mediana é 1314,350 mm;
- desses quatro anos, 2012 foi o ano de menor precipitação total anual e 2013 foi o ano de maior precipitação total anual.

Determine a média, em mm, dos valores de precipitação total anual dos últimos dois anos desse período de tempo, 2012 e 2013.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B, 2015, 2ª fase

Tema I - Trigonometria e Funções Trigonómicas

Itens de seleção (pág. 3)

1. Opção (C) 2. Opção (D) 3. Opção (C)
4. Opção (B) 5. Opção (A) 6. Opção (D)
7. Opção (C) 8. Opção (B) 9. Opção (B)

Itens de construção (pág. 5)

10. $\frac{9}{4}$
11. $3 + \sqrt{2}$
12. $\frac{252}{625}$
12.2. $\frac{77}{40}$
13. $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

Tema II - Geometria Analítica

Itens de seleção (pág. 7)

1. Opção (D) 2. Opção (B) 3. Opção (B)
4. Opção (D) 5. Opção (B) 6. Opção (B)

Itens de construção (pág. 9)

7. $x + y + 2z = 9$
7.1. $(x, y, z) = (0, 12, 0) + k(-6, 12, -3), k \in \mathbb{R}$
7.3. $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{24})^3$
8. $(x, y, z) = (6, 12, 0) + k(3, -6, 4), k \in \mathbb{R}$
8.2. $6x + 8z = 36$
9. $\frac{198}{247}$
10. Comece por mostrar que $D\hat{A}B = \frac{2\pi}{5}$.
11. $(-5, 15, -12)$
12. $x - 2y + z - 2 = 0$
12.1. $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$
12.2. $2\sqrt{15}$
13. $(1, 1, 6)$ 13.2. $x + y + z - 2 = 0$ 13.3. $\approx 1,52$
14. $-\frac{1}{3}$ 14.2. $\approx 55^\circ$ 14.3. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$

Tema III - Sucessões

Itens de seleção (pág. 13)

1. Opção (B) 2. Opção (C) 3. Opção (C)

Itens de construção (pág. 20)

6. (u_n) é decrescente.

7. $A_2 + A_4 + \dots + A_{20} = 5250\pi$ e a tinta gasta é 4,2 litros.
8. 18,9 m
8.1. $30 \times \frac{1 - 0,95^n}{1 - 0,95} > 575 \rightarrow n = 62$
9. 1ª hipótese, pois $2 + \frac{3 + n + 2}{2} \times n > 500 \rightarrow n = 30$ meses (e na 2ª hipótese é ao fim de 33 meses).
9.2. 1400 €.
10. $p_{27} = 29,4\pi$ e $S_{27} \approx 1832$ m.

Tema IV - Funções Reais de Variável Real

Itens de seleção (pág. 17)

1. Opção (B) 2. Opção (A) 3. Opção (C)
4. Opção (A) 5. Opção (A) 6. Opção (D)
7. Opção (C) 8. Opção (C) 9. Opção (A)

Itens de construção (pág. 20)

10. -1 10.1. -1 10.1.2. -1
10.2. $]-2, 2[\cup [10, +\infty[$ 10.2.2. $-1,63$ e $1,53$
11. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$, chega-se a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$.
12. $]-2, +\infty[$ 12.2. -1 12.3. $]-\infty, -4] \cup]-2, +\infty[$

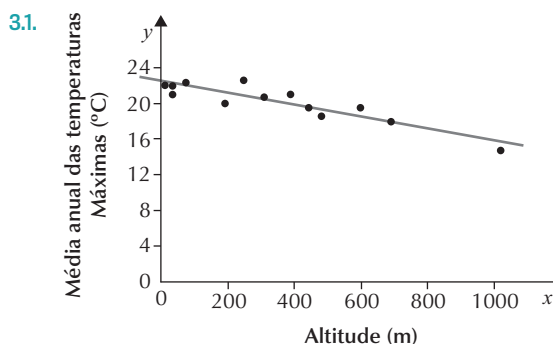
Tema V - Estatística

Item de seleção (pág. 21)

1. Opção (A)

Itens de construção (pág. 22)

2. São verdadeiras as afirmações (B) e (C).
3. $\bar{x} \approx 347,1$ e $\bar{y} \approx 20,1$



- 3.2. $\bar{x} \approx 347,1$ e $\bar{y} \approx 20,1$
3.3. $-0,00658$
3.4. $y = -0,00658x + 22,423$
3.5. $\approx 15,8^\circ\text{C}$
3.6. $-0,912$
4. $1225,9$ mm