

01.

**PROGRAMA
E METAS
CURRICULARES
MATEMÁTICA A
11º ANO**

| Articulação
Metas Curriculares vs Manual

Nota: Esta publicação inclui os excertos do documento *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* – Ensino Secundário, relativos ao 11.º ano.

Programa de Matemática A

ENSINO SECUNDÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

No âmbito da revisão curricular iniciada em 2011, cujo sentido é o de elevar os padrões de desempenho escolar dos alunos portugueses, e em continuidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado pelo Despacho nº 9888-A/2013, publicado no *Diário da República*, 2.ª série, nº 143, de 26 de julho de 2013, o presente Programa e Metas Curriculares estabelecem o conjunto de conhecimentos e de capacidades essenciais que os alunos devem adquirir e desenvolver no decurso do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A.

Alicerçado na análise de diferentes abordagens que têm sido adotadas para o ensino da Matemática neste nível de escolaridade (programas e avaliações nacionais e internacionais, literatura e investigação científica sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática), este documento pretende definir um padrão coerente que imprima rigor ao que é ensinado nas escolas, garantindo simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho.

Em concreto, o presente Programa foi elaborado tendo em conta a informação proporcionada por mais de dez anos de aplicação do Programa anterior. No entanto, ao optar-se pela elaboração de Metas Curriculares, muitos dos conteúdos transversais inerentes a um Programa de Matemática do Secundário encontram-se agora, em grande medida, explicitados, o que levou, por exemplo, à constituição do domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* no 10.º ano.

As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos.

O Programa e as Metas Curriculares respeitam a estrutura cumulativa que é característica da disciplina de Matemática, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos. De acordo com a investigação recente na área do ensino da Matemática, é desta forma progressiva que se pode ir desenvolvendo a compreensão, ou seja, que se pode ir construindo uma sólida rede de factos, conceitos, relações e procedimentos suscetível de ser mobilizada, de forma flexível, em diversos contextos. O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática.

Nessa conceção, tiveram-se igualmente em conta as avaliações internacionais em que Portugal participa, nomeadamente o PISA e o TIMSS. O *Programme for International Student Assessment* (PISA) tem por objetivo avaliar a literacia de Leitura, Matemática e Ciências nos jovens de 15 anos, independentemente do ano de escolaridade e da modalidade que frequentam. Ainda que a pertinência deste estudo seja indiscutível, serão mais relevantes, no quadro do presente Programa, os pressupostos do *Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* (adiante designado por *TIMSS-Advanced*), programa de avaliação internacional no qual Portugal participará a partir de 2015 e cujo objetivo é precisamente o de estudar os resultados obtidos pelos alunos que se encontram no final do Ensino Secundário nas disciplinas de Física e Matemática, em modalidades destinadas ao prosseguimento de estudos em áreas de ciências e tecnologias. Na definição e estruturação dos domínios cognitivos e de conteúdos a avaliar, o *TIMSS-Advanced* envolve todos os países participantes num processo colaborativo que passa por uma muito completa descrição dos tópicos e conteúdos dos currículos de Matemática e de Física desses países. No que se refere à Matemática, os domínios dos conteúdos (*Álgebra, Cálculo e Geometria*) e das capacidades cognitivas (*Knowing, Applying e Reasoning*) encontram-se devidamente contemplados no presente documento curricular conforme se explica nos tópicos seguintes.

No que diz respeito aos conteúdos programáticos, a análise destes elementos, bem como de currículos de outros países não participantes no *TIMSS-Advanced*, revela que a inclusão no Programa de alguns temas fundamentais, atualmente ausentes do Ensino Secundário em Portugal, contribui decisivamente para o alinhamento das opções curriculares nacionais com o plano internacional. Como exemplo refiram-se os que constam do domínio *Primitivas e Cálculo Integral*. Procedeu-se ainda ao reforço de alguns tópicos, como o da aplicação da trigonometria à resolução de triângulos ou o do estudo de limites de sucessões e de funções, que, quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva, levam com frequência à formação de conceções erradas e difíceis de reverter.

Finalmente, com o objetivo de promover o conhecimento da forma como a Matemática vai sendo construída, procurou-se justificar, em certas situações, a escolha de algumas definições consagradas desta disciplina. É, por exemplo, o caso da extensão das definições das razões trigonométricas, estudadas no Ensino Básico, a ângulos retos e obtusos, intimamente ligada neste Programa à Lei dos Senos e ao Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática, atividade essa que constitui o propósito primitivo da Trigonometria.

No respeito pela estrutura intrínseca da Matemática e do método que a caracteriza, procurou-se igualmente desenvolver no aluno o gosto por esta disciplina milenar, nas suas diversas vertentes, como o carácter organizador e agregador de conhecimento na sua expressão mais abstrata ou a eficácia de que se revestem os instrumentos matemáticos quando aplicados ao estudo do mundo real.

O calendário de aplicação deste Programa está definido no Despacho nº 159717/2012, de 14 de dezembro, estando prevista para o ano letivo 2015-16 a sua implementação no 10º ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11º e 12º anos de escolaridade.

2 – FINALIDADES DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Como finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário salientam-se a estruturação do pensamento e a aplicação da Matemática ao mundo real.

A estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato

Tal como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico, a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. Tratando-se de uma capacidade indispensável a um bom percurso escolar ou profissional, em qualquer área do conhecimento, o desenvolvimento do raciocínio abstrato deve ser considerado como uma finalidade em si.

A modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real

Os instrumentos matemáticos são indispensáveis à concretização de modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de sistemas reais cujo estudo se pode inserir nas mais diversas áreas do conhecimento. De um ponto de vista histórico é possível afirmar que alguns conceitos centrais da Matemática foram desenvolvidos com o propósito de serem utilizados na análise de certos fenómenos naturais. O Programa dá especial relevância a diversas aplicações da Matemática, prescrevendo, por exemplo, explicitamente, a aplicação do cálculo diferencial à cinemática do ponto ou das progressões geométricas ao cálculo de juros, o que permite em particular obter uma interpretação concreta do número de Neper.

A este propósito, é importante referir que a modelação matemática não consiste em associar de forma arbitrária – e sem qualquer critério ou justificação razoável – uma dada função matemática a uma dada grandeza. Proceder dessa forma é transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real. Por exemplo, a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra, o que se traduz, ao utilizar-se um modelo baseado em funções diferenciáveis, pela proporcionalidade entre a função que representa o fenómeno e a respetiva derivada. Uma tal justificação encontra-se explicitamente prevista no Programa.

De forma análoga prevê-se, no 12.º ano, o tratamento de situações em que uma função é proporcional, com constante de proporcionalidade negativa, à respetiva derivada de segunda ordem. É desta forma possível justificar a utilização de funções trigonométricas na modelação de alguns sistemas que exibem comportamento oscilatório. Em particular, é proposto estudar, neste contexto, a forma como a segunda Lei de Newton e a Lei de Hooke permitem deduzir que certos sistemas envolvendo massas atuadas por molas apresentam um comportamento de oscilador harmónico.

3 - OBJETIVOS

Os objetivos que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar ao longo do Ensino Secundário são explicitados por verbos a que se atribuem significados específicos e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares.

Requerem-se assim os seguintes cinco desempenhos, com o sentido que se descreve:

(1) Identificar/Designar/Referir: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

(2) Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

(3) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

(4) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

(5) Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer para a aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.

Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos – O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores. Por outro lado permitem determinar, *a priori*, que outra informação se poderia obter sem esforço a partir dos dados de um problema, o que possibilita elaborar novas estratégias com vista à sua resolução. A memorização de alguns factos tem igualmente um papel fundamental na aprendizagem da Matemática, pelo que é incorreto opô-la à compreensão: memorização e compreensão, sendo complementares, reforçam-se mutuamente. Conhecer factos elementares e enunciados de teoremas de memória permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direcionados para a execução de tarefas mais complexas. No *TIMSS-Advanced*, relativamente ao domínio cognitivo "*Knowing*", considera-se que os factos e propriedades elementares constituem, em conjunto, a linguagem básica da Matemática e a própria fundação do pensamento matemático, devendo o aluno ser capaz de os recordar de forma automática e sistemática. Relativamente aos procedimentos, entende-se que: "Os procedimentos formam uma ponte entre os conhecimentos elementares e a utilização da Matemática para a resolução de problemas rotineiros. Os alunos devem ser eficientes e precisos na utilização de uma variedade de procedimentos de cálculo e outras ferramentas. Devem saber que determinados procedimentos permitem resolver categorias inteiras de problemas e não apenas problemas avulso."

Raciocínio matemático – O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjecturas. Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos. O *TIMSS-Advanced*, no capítulo dedicado à capacidade cognitiva "*Reasoning*", estabelece também que os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas não rotineiros, frisando que estes problemas exigem recursos cognitivos acima dos necessários à resolução de problemas rotineiros, ainda que a respetiva resolução esteja dependente de conhecimentos e capacidades previamente adquiridas. No entanto (e tal como também se encontra cuidadosamente explicitado no *TIMSS-Advanced*), os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjecturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori*.

Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores preveem que os alunos da disciplina de Matemática A consigam, no final do Ensino Secundário, elaborar algumas demonstrações com segurança.

Resolução de problemas – A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. Este ponto é reforçado no *TIMSS-Advanced*, a propósito do domínio cognitivo "*Applying*". Considera-se, a propósito da resolução de problemas, que os alunos devem "aplicar conhecimentos de factos matemáticos, capacidades, procedimentos e conceitos para criar representações e resolver problemas". Faz-se ainda notar que "embora a respetiva dificuldade possa variar, os problemas a resolver no âmbito deste domínio cognitivo envolvem essencialmente a capacidade de selecionar e aplicar procedimentos previamente estudados".

Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente.

Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva e uma ilustração, nem sempre possível, de situações inteiramente inspiradas na vida corrente. Desta maneira, pode ser conveniente, em diversas situações, propor problemas descrevendo situações que não traduzam de modo plenamente realista aspetos da experiência quotidiana dos alunos, mas que sejam particularmente adaptados aos objetivos do ensino de determinadas matérias.

Comunicação matemática – A capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos e de identificar as questões que levantam pode ser desenvolvida através da sua explicitação e explicação, bem como da discussão de estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem, pois, ser incentivados a expor as suas ideias de modo claro, conciso e coerente, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo igualmente a redação escrita parte integrante da atividade matemática, devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas.

História da Matemática – A História da Matemática é um tema que está contemplado explicitamente em alguns descritores das Metas. Os professores deverão, não apenas nesses casos mas também a propósito de outros temas que para o efeito se revelem particularmente adequados, enquadrar de um ponto de vista histórico os conteúdos abordados. Tal atividade, para além de ilustrar a forma como a Matemática foi construída ao longo dos tempos, permite ainda, não só uma maior motivação para a aprendizagem, como, em muitos casos, também proporciona uma melhor compreensão dos próprios conceitos. Por outro lado, a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento como a Astronomia, a Física, a Biologia ou a Economia constituiu um dos motores essenciais à evolução global das ciências, incluindo a própria Matemática, pelo que o conhecimento histórico dessa interação é um fator essencial para uma compreensão mais profunda do pensamento científico.

4 – CONTEÚDOS

Em cada ano de escolaridade, os conteúdos encontram-se organizados por domínios. A articulação entre os domínios de conteúdos e os objetivos acima referidos – que constituem o conjunto de desempenhos que os alunos devem evidenciar – está materializada nas Metas Curriculares.

Nos quadros seguintes apresentam-se os conteúdos a lecionar e sugere-se, a título não prescritivo, o número de tempos letivos que poderá ser dedicado a cada um dos domínios, incluindo-se nesse número as aulas dedicadas à avaliação. Atendendo à autonomia atualmente conferida às escolas no que se refere à duração dos tempos letivos, esclarece-se que, nessas sugestões, se considerou, como unidade, o tempo letivo de 45 minutos.

11º ANO

No 11º ano, os domínios de conteúdos são cinco:

- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Geometria Analítica (GA)
- Sucessões (SUC)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

Após o estudo das razões trigonométricas dos ângulos agudos, realizado no Ensino Básico, o início do domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas* é consagrado a estabelecer uma definição para o seno e o cosseno de um qualquer ângulo convexo, justificando-se a escolha apresentada com a motivação de estender a ângulos internos retos e obtusos, a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática. É também requerido o uso adequado de uma calculadora científica para obter valores aproximados dos elementos de triângulos objeto de resolução trigonométrica. Aborda-se em seguida o estudo dos ângulos orientados e generalizados e respetivas medidas de amplitude – conceitos intimamente associados à noção de rotação – e generalizam-se as razões trigonométricas a estes ângulos, introduzindo-se o círculo trigonométrico. Após a definição do radiano como unidade de medida de amplitude, fica-se apto a definir as funções reais de variável real seno, cosseno e tangente e a estudar as respetivas propriedades.

No domínio *Geometria Analítica*, introduz-se, no 11º ano, a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades, como a simetria, a bilinearidade ou a relação deste conceito com a perpendicularidade. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda-se também do ponto de vista das coordenadas. É importante notar que as propriedades das funções trigonométricas abordadas no domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas* são fundamentais para uma correta apresentação e justificação de muitos destes resultados. Ainda neste domínio, completa-se o estudo das equações cartesianas de planos no espaço, iniciado no 10º ano.

No domínio *Sucessões*, após a apresentação de alguns aspetos gerais, é introduzido o princípio de indução matemática, que constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência. São estudadas as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos.

A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências conceptuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados.

No domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio *Sucessões*, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para a , para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a . Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por “limite por valores diferentes de a ”. Neste programa optou-se pela versão alternativa que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a ; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar por ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade) e em segundo lugar porque a própria noção de “limite por valores diferentes” (como outras afins como a de “limite à esquerda” e “à direita”) passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio.

A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, com o Teorema das funções enquadadas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões enquadadas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional.

A noção de derivada é igualmente introduzida neste domínio, fazendo-se uma interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto e estabelecendo-se fórmulas para a soma, diferença, produto, quociente e composta de funções diferenciáveis e calculando-se, diretamente a partir da definição, a derivada de algumas funções elementares. A ligação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma dada função é aqui estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desse resultado. Em contrapartida, pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual se uma função atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse mesmo ponto, desde que pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função. É também proposta especificamente a aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto.

No domínio *Estatística*, estudam-se as retas de mínimos quadrados associadas a uma sequência de pontos do plano. As coordenadas destes pontos podem em particular representar os valores de uma amostra bivariada, o que permite a aplicação deste conceito ao estudo da correlação de duas variáveis estatísticas definidas numa mesma população.

TABELA DE CONTEÚDOS

Domínio	Conteúdos
TRI11 38 aulas	Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos – Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos; Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. – Resolução de triângulos. Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações – Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respetivas medidas. – Rotações. – Ângulos generalizados; medidas de amplitude de ângulos generalizados. – Ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados – Circunferência trigonométrica (círculo trigonométrico). – Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados e às respetivas medidas de amplitude. – Medidas de amplitude em radianos. Funções trigonométricas – As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais. – Fórmulas trigonométricas de "redução ao 1.º quadrante": seno e cosseno de $x \pm \frac{\pi}{2}$ e de $x \pm \pi$, $x \in \mathbb{R}$. – Generalização da Fórmula Fundamental da Trigonometria. – Equações do tipo $\sin x = k$, $\cos x = k$ e $\operatorname{tg} x = k$. – Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado. – Funções trigonométricas inversas. – Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias. – Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas.
GA11 32 aulas	Declive e inclinação de uma reta do plano – Inclinação de uma reta do plano e relação com o respetivo declive. Produto escalar de vetores – Produto escalar de um par de vetores. – Ângulo formado por um par de vetores não nulos; relação com o produto escalar. – Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar. – Simetria e bilinearidade do produto escalar. – Cálculo do produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas. – Relação entre o declive de retas do plano perpendiculares. – Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar. Equações de planos no espaço – Vetores normais a um plano. – Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais. – Paralelismo entre vetores e planos. – Equações cartesianas, vetoriais e sistemas de equações paramétricas de planos.

TABELA DE CONTEÚDOS

Domínio	Conteúdos
GA11 32 aulas (cont.)	– Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores. – Resolução de problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações envolvendo a noção de perpendicularidade. – Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de planos, em situações envolvendo a perpendicularidade. – Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.
SUC11 44 aulas	Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$ – Conjuntos minorados, majorados e limitados. – Máximo e mínimo de um conjunto. Generalidades acerca de sucessões – Sucessões numéricas; sucessões monótonas, majoradas, minoradas e limitadas. – Resolução de problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões. Princípio de indução matemática – Princípio de indução matemática. – Definição de uma sucessão por recorrência. – Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática. Progressões aritméticas e geométricas – Progressões aritméticas e geométricas; termos gerais e somas de N termos consecutivos. – Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Limites de sucessões – Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); unicidade do limite; caso de sucessões que diferem num número finito de termos. – Convergência e limitação. – Operações com limites e situações indeterminadas. – Levantamento algébrico de indeterminações. – Limites de polinómios e de frações racionais. – Limites $\lim_n a^n$, $\lim_n \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) e $\lim_n n^p$ ($p \in \mathbb{Q}$). – Resolução de problemas envolvendo limites de sucessões.
FRVR11 56 aulas	Limites segundo Heine de funções reais de variável real – Pontos aderentes a um conjunto de números reais. – Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio. – Limites laterais. – Limites no infinito. – Operações com limites e casos indeterminados; produto de uma função limitada por uma função de limite nulo. – Limite de uma função composta. – Levantamento algébrico de indeterminações. – Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios. – Resolução de problemas envolvendo a noção de limite de uma função.

	Continuidade de funções - Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio. - Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas. - Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional. Assíntotas ao gráfico de uma função - Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função. - Resolução de problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x - c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$ - Resolução de problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações - Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica. - Derivada de uma função num ponto; interpretação geométrica. - Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta; - Unidades de medida de velocidade. - Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis. - Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis. - Derivada da função composta. - Derivada da função definida por $f(x) = x^p$, p inteiro. - Sinal da derivada de funções monótonas; nulidade da derivada num extremo local de uma função. - Teorema de Lagrange; interpretação geométrica. - Monotonia das funções com derivada de sinal determinado num intervalo. - Cálculo e memorização da derivada das funções dadas pelas expressões x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$. - Cálculo da derivada de funções dadas por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (x não nulo se $n > 1$ ímpar, $x > 0$ se n par). - Cálculo e memorização das derivadas de funções dadas por $f(x) = x^\alpha$ (α racional, $x > 0$). - Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência. - Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função. - Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real. - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade. - Resolução de problemas envolvendo a aplicação do cálculo diferencial ao estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.
EST11 8 aulas	Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação - Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano. - Amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa. - Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos. - Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos. - Coeficiente de correlação. - Resolução de problemas envolvendo a determinação de retas de mínimos quadrados. - Resolução de problemas envolvendo amostras de dados bivariados quantitativos e o cálculo e interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados e do coeficiente de correlação.

5 - NÍVEIS DE DESEMPENHO

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo "+". Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
11.º ano	TRI11 1.6, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. GA11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. SUC11 3.3, 5.2, 5.3, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. FRVR11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 7.13, 9.1, 9.2, 9.3. EST11 1.3, 2.1, 2.2, 2.3.

Por outro lado, alguns descritores (TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo "+". Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios SUC11 e FRVR11 encontram-se assinalados com o símbolo "#" alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

6 - INDICAÇÕES METODOLÓGICAS

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjecturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

7 - AVALIAÇÃO

O Decreto-Lei nº 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei nº 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação científico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas Metas Curriculares.

Metas Curriculares

Matemática A

ENSINO SECUNDÁRIO

O presente documento descreve o conjunto das Metas Curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o 11.º ano. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

DOMÍNIO

Subdomínio

1. *Objetivo geral*

1. Descritor

2. Descritor

.....

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores ("identificar", "designar", "referir", "representar", "reconhecer", "saber", "provar", "demonstrar", "justificar") encontra-se definido no parágrafo intitulado "Leitura das Metas Curriculares".

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

É também disponibilizado aos professores um Caderno de Apoio às presentes Metas Curriculares contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

LEITURA DAS METAS CURRICULARES

"Identificar"/"Designar"/"Referir"/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

"Reconhecer": O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

"Saber": O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

"Provar"/"Demonstrar": O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

"Justificar": O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo "+".

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificou-se no Caderno de Apoio diferentes níveis de desempenho.
- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo "#", ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

1. Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos

1. Provar, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{ACB}$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, e designar estas igualdades por "Lei dos Senos" ou "Analogia dos Senos". 12
2. Estender a definição do seno aos ângulos retos, tomando $\sin \alpha = 1$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos Senos a triângulos retângulos. 15
3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin \alpha = \sin \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos Senos a triângulos obtusângulos. 16
4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A, que, se $\alpha = \widehat{BAC}$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, e designar este resultado por "Teorema de Carnot" ou "Lei dos Cossenos". 17
5. Estender a definição do cosseno aos ângulos retos, tomando $\cos \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos Cossenos ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao Teorema de Pitágoras. 19
6. +Estender a definição do cosseno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos \alpha = -\cos \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos Cossenos ao caso de um ângulo interno obtuso. 19
7. Estender a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\hat{\alpha}$. 20
8. Determinar, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos comprimentos dos três lados (LLL), as medidas do comprimento de dois dos lados e da amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou as medidas do comprimento de um dos lados e das amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA), as medidas dos comprimentos dos restantes lados e as medidas das amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo, designar este procedimento por "resolução do triângulo $[ABC]$ " e obter valores aproximados destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma máquina de calcular. 21

Orientação de ângulos num plano e rotações

2. Definir ângulos orientados e as respectivas medidas de amplitude

- 1. Identificar "ângulo orientado" como um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para "lado origem", designando o outro por "lado extremidade".
- 2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo "orientação negativa" quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado nesse plano π , os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade, identificar um ângulo orientado como tendo "orientação positiva" no caso contrário, e afetar do sinal "–" as amplitudes dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respectivas medidas.

3. Definir rotações segundo ângulos orientados

- 1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por "imagem do ponto M pela rotação de centro O e de ângulo orientado α " quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\hat{OM'}$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\hat{OM}$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

4. Definir ângulos generalizados

- 1. Identificar um "ângulo generalizado" (ou "ângulo trigonométrico") como um par ordenado (α, n) , onde α é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e n é um número inteiro, que é positivo ou nulo se α tiver orientação positiva e negativo ou nulo se α tiver orientação negativa, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n .
- 2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por "lado origem (respetivamente extremidade) dos ângulos generalizados (α, n) " e um ângulo nulo ω também como "lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n) ".
- 3. Identificar, fixado um ângulo unidade e sendo g a medida de amplitude dos ângulos giros, a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) como $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α .
- 4. Reconhecer que dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') têm a mesma amplitude se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude e $n = n'$ e justificar, fixado um ângulo unidade que, dado um número real x e fixada uma semirreta para lado origem, existe um e apenas um ângulo generalizado cuja medida de amplitude é igual a x .
- 5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n) , a "rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) ", no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α e ao ponto O associa o próprio ponto O .
- 6. Reconhecer, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') , α, α' ângulos orientados, que as rotações de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') coincidem se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude ou se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respetivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro.

5. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados

1. Designar um referencial ortonormado num dado plano como "direto" quando o primeiro quadrante, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com o semieixo positivo Oy , tem orientação positiva.32
2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por "circunferência trigonométrica" (ou, por abuso de linguagem, por "círculo trigonométrico").32
3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um ângulo orientado α desse plano, o "seno de α " (respetivamente o "cosseno de α ") como a ordenada (respetivamente a abcissa) do ponto P , interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\text{sen}(\alpha)$, $\sin \alpha$ ou $\text{sen } \alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos \alpha$), reconhecer que este valor não depende da escolha do referencial, e que esta definição estende a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos convexos, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo orientado com a mesma amplitude.34
4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um ângulo orientado α desse plano de lados não perpendiculares, a "tangente de α " como a ordenada do ponto P , interseção da reta de equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a reta suporte do lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-la por $\tan(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$, $\tan \alpha$ ou $\text{tg } \alpha$, reconhecer que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e que esta definição estende a definição de tangente de um ângulo agudo, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.39
5. Identificar, dado um ângulo generalizado $\theta = (\alpha, n)$, o "seno de θ ", o "cosseno de θ " e a "tangente de θ " como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α .44
6. Justificar, dados ângulos generalizados θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.44

6. Definir medidas de ângulos em radianos

1. Designar por "radiano" a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio e reconhecer que o radiano não depende da escolha da circunferência, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.51
2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.52

7. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades

- 66 1. Identificar, dado um número real x , a "tangente de x " (respetivamente o "seno de x " e o "cosseno de x ") como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um ângulo generalizado de medida de amplitude igual a x , em radianos, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por "(função) tangente" (respetivamente "(função) seno" e "(função) cosseno"), representando-a por "tan" ou "tg" (respetivamente por "sin" ou "sen" e por "cos") e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$ (respetivamente por " $\sin x$ " ou " $\operatorname{sen} x$ " e por " $\cos x$ ").
- 66 2. Identificar, dado um número $P > 0$, uma função f como "periódica de período P " ou " P -periódica" se para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x + P) = f(x)$.
- 66 3. Designar, dada uma função f , o número $P_0 > 0$ por "período fundamental de f " ou por "período positivo mínimo de f " se f for P_0 -periódica e não admitir outro período P inferior a P_0 .
- 67 4. Justificar que as funções reais de variável real seno e cosseno têm domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1,1]$ e período fundamental $P_0 = 2\pi$.
- 68 5. Provar que os zeros da função seno (respetivamente da função cosseno) são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
- 69 6. Justificar que a função seno (respetivamente a função cosseno) admite extremos locais nos pontos de abcissa da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
- 67 7. Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a Fórmula Fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.
- 69 8. Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.
- 44 9. Justificar que a função real de variável real tangente tem domínio $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período fundamental $P_0 = \pi$ e que os respetivos zeros são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 46 10. Justificar que as funções seno e tangente são ímpares e a função cosseno é par.

8. Definir funções trigonométricas inversas

- 75 1. +Reconhecer que as funções $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$, $\cos: [0,\pi] \rightarrow [-1,1]$ e $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções $\sin$, $\cos$ e $\tan$ aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por "(função) arco-seno" ($\arcsin$ ou arcsen), "(função) arco-cosseno" ($\arccos$) e "(função) arco-tangente" ($\arctan$ ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.
- 76 2. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\cos x = \cos \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.
- 77
- 78
- 81

- 3. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\sin x = \sin \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$. 80
- 4. Reconhecer, dados números reais x e α do domínio da função tangente, que $\tan x = \tan \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + k\pi$. 83
- 5. Resolver equações da forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$. 79
80
82

9. Resolver problemas

- 1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos. 96 a 114
- 2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respectivas razões trigonométricas. 96 a 114
- 3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas. 96 a 114
- 4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas. 96 a 114

GEOMETRIA ANALÍTICA GA11

Declive e inclinação de uma reta

1. Definir a inclinação de uma reta

- 1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dada uma reta r que passa pela origem e é distinta do eixo Ox , a "inclinação de r " como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semieixo positivo das abcissas e a semirreta $\vec{OP}$, onde P é um qualquer ponto de r de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
- 2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O , a inclinação de uma reta r como a inclinação da reta paralela a r que passa por O .
- 3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

Produto escalar

2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

- 1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o "produto escalar (ou interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ " como o número $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$, (respetivamente o número $-\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$) onde, fixado um ponto O , $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP , se $\overrightarrow{OQ'}$ e $\overrightarrow{OP}$ tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto O , identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por " $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ".
- 2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, "ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ " como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, reconhecendo que têm todos a mesma amplitude, designar também essa amplitude por "ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ " quando essa designação não for ambígua, e representá-la por " $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ".
- 3. Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- 4. Identificar vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como "perpendiculares" quando um deles for nulo ou quando, não sendo nulo nenhum dos dois, forem perpendiculares duas retas de vetores diretores respetivamente iguais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e indicar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares escrevendo " $\vec{u} \perp \vec{v}$ ".
- 5. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
- 6. Justificar, dado um vetor $\vec{u}$, que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- 7. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- 8. +Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ , que $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- 9. +Provar, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
- 10. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

11. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que duas retas de declives respetivamente iguais a m e a m' são perpendiculares se e somente se $mm' = -1$.	135
12. Justificar, fixado um referencial ortonormado do espaço e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$.	137
3. Determinar equações de planos no espaço	
1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como "normal a um plano α " se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .	143
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β , que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.	155 156
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \cdot \vec{v} = 0$.	143
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.	144
5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.	145
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.	145
7. Identificar, dado um plano α , um vetor $\vec{v}$ como "paralelo a α " se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α .	143
8. +Provar, dado um plano α , um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por "equação vetorial do plano α ".	154
9. Justificar, dado um plano α , um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por "sistema das equações paramétricas do plano α ".	154
4. Resolver problemas	
1. +Resolver problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores.	168 a 184
2. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.	168 a 184
3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.	168 a 184
4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.	168 a 184

SUCESSÕES SUC11

Generalidades sobre sucessões

1. Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais

- 1. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como "majorado" quando existe um número real M tal que $\forall a \in A, a \leq M$ e designar M por "majorante de A ".
- 2. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como "minorado" quando existe um número real m tal que $\forall a \in A, a \geq m$ e designar m por "minorante de A ".
- 3. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como "limitado" quando for majorado e minorado.
- 4. Designar por "máximo" (respetivamente por "mínimo") de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ um majorante (respetivamente um minorante) de A pertencente a A e justificar que se existir é único.

2. Estudar propriedades elementares de sucessões reais

- 1. Identificar uma "sucessão real" (ou simplesmente "sucessão" quando esta designação não for ambígua) como uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e de conjunto de chegada $\mathbb{R}$, e representar por " u_n ", dito "termo geral da sucessão", a imagem $u(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ por u e por " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ " (ou simplesmente por " (u_n) ", ou ainda por " u_n ", quando estas notações não forem ambíguas) a própria sucessão u .
- 2. Identificar uma sucessão (u_n) como "crescente" (respetivamente "decrescente") quando o for como função real de variável real, ou seja, quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} > u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} < u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ (respetivamente $u_{n+1} < u_n$).
- 3. Identificar uma sucessão (u_n) como "crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato" quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \geq u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \leq u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (respetivamente $u_{n+1} \leq u_n$).
- 4. Identificar uma sucessão (u_n) como "majorada" se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for majorado e designar os majorantes deste conjunto também por "majorantes da sucessão".
- 5. Identificar uma sucessão (u_n) como "minorada" se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for minorado e designar os minorantes deste conjunto também por "minorantes da sucessão".
- 6. Designar por "limitada" uma sucessão (u_n) simultaneamente majorada e minorada.

Princípio de indução matemática

3. Utilizar o princípio de indução matemática

1. Saber, dada uma condição $T(n)$, que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, T(n)$ é verdadeira se $T(1)$ for verdadeira e se, além disso, para todo $n \in \mathbb{N}, T(n) \Rightarrow T(n+1)$, designar este resultado por "princípio de indução (matemática)", $T(n)$, enquanto antecedente da implicação $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, por "hipótese de indução" e a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, T(n) \Rightarrow T(n+1)$ por "hereditariedade" da propriedade $T(n)$ e saber que o princípio de indução pode estender-se, *mutatis mutandis*, fixado um número inteiro p e uma condição $T(n)$, à demonstração da proposição $\forall n \in \mathbb{N}_p, T(n)$, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z}: n \geq p\}$.
2. Saber, dada uma função $f: A \rightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) "por recorrência" e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A , onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z}: n \geq p\}$, também designadas por "sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)".
3. +Utilizar o princípio de indução para efetuar demonstrações.

Progressões aritméticas e geométricas

4. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por "progressão aritmética de primeiro termo a e razão r " a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
2. Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.
3. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por "progressão geométrica de primeiro termo a e razão r " a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times r$.
4. Justificar que o termo geral da progressão geométrica de primeiro termo a e razão r não nula é dado por $u_n = ar^{n-1}$.

5. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por "progressão aritmética (finita) de comprimento N " (respetivamente "progressão geométrica (finita) de comprimento N "), a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ "dos N primeiros termos" de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n) .
2. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento $N, (u_1, u_2, \dots, u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^N u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.
3. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento N , de primeiro termo u_1 e de razão r diferente de 1, é dada por $S = u_1 \frac{1 - r^N}{1 - r}$.

Limites de sucessões

6. Definir o limite de uma sucessão

1. Identificar, dada uma sucessão (u_n) , um número real l como "limite da sucessão (u_n) " ou como "limite de u_n quando n tende para $+\infty$ " quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que " u_n tende para l " (" $u_n \rightarrow l$ "), e designar a sucessão (u_n) por "convergente" quando um tal limite l existe e por "divergente" quando não for convergente.

61

2. Provar que uma sucessão convergente (u_n) admite um único limite e representá-lo por " $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ", " $\lim_n u_n$ " ou simplesmente por " $\lim u_n$ ".

62

3. +Reconhecer que as sucessões convergentes são limitadas.

63

4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.

66

5. Identificar uma sucessão (u_n) como "tendo limite $+\infty$ " ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_n u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que " u_n tende para $+\infty$ " (" $u_n \rightarrow +\infty$ ") e reconhecer que uma tal sucessão é divergente.

66

6. Identificar uma sucessão (u_n) como "tendo limite $-\infty$ " ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, $\lim_n u_n = -\infty$, ou $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que " u_n tende para $-\infty$ " (" $u_n \rightarrow -\infty$ ") e reconhecer que uma tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).

62

68

7. Reconhecer, dada uma sucessão (u_n) com limite $l \in \mathbb{R}$ ou tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente sem limite), que qualquer sucessão (v_n) que possa ser obtida de (u_n) alterando apenas um número finito de termos, tem o mesmo limite (respetivamente não tem limite).

65

8. +Provar, dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (v_n) com limite nulo, que $\lim u_n v_n = 0$.

68

69

70

9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($cn+d \neq 0$ para todo o n) é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d'}$ se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.

71

10. Provar, utilizando a definição de limite, que, dado um número racional p , $\lim n^p = +\infty$, se $p > 0$ e $\lim n^p = 0$ se $p < 0$.

72

11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_v + v_n)$ é convergente e que $\lim(u_v + v_n) = l_1 + l_2$.

73

12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_v v_n)$ é convergente e que $\lim u_v v_n = l_1 l_2$.

73

74

13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 , então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.

74

14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a , que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim(au_n) = a \lim u_n$.

74

15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r , que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim(u_n)^r = (\lim u_n)^r$.

76

77

16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por " $+\infty + l = +\infty$ " (ou por " $+\infty + (+\infty) = +\infty$ ").

- 17.** #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por " $-\infty + l = -\infty$ " (ou por " $-\infty + (-\infty) = -\infty$ "). 77
78
- 18.** Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por "indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ ". 78
- 19.** #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por " $(+\infty) \times l = +\infty$ " e " $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ " (respetivamente por " $(+\infty) \times l = -\infty$ " e " $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ "). 79
- 20.** #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por " $(-\infty) \times l = -\infty$ " (respetivamente por " $(-\infty) \times l = +\infty$ " e " $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ "). 80
- 21.** #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por " $(+\infty)^r = +\infty$ " (respetivamente por " $(-\infty)^r = +\infty$ " se r for par e por " $(-\infty)^r = -\infty$ " se r for ímpar). 81
- 22.** Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por "indeterminação do tipo $\infty \times 0$ ". 81
- 23.** #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo (" $\lim v_n = 0^+$ "), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por " $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ". 82
- 24.** #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo (" $\lim v_n = 0^-$ "), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por " $\frac{1}{0^-} = -\infty$ ". 83
- 25.** #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por " $\frac{1}{\infty} = 0$ ". 83
- 26.** Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por "indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ " (respetivamente "indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ "). 84
- 27.** Justificar, dado um polinómio $P(x)$ de grau superior ou igual a 1, que a sucessão $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim P(n) = +\infty$ se o coeficiente do termo de maior grau da forma reduzida de P for positivo e que $\lim P(n) = -\infty$ no caso contrário. 85
- 28.** Calcular, dadas sucessões $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, $Q(x)$ sem raízes naturais, o limite $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ e relacioná-lo com os graus de $P(n)$ e $Q(n)$ e com os coeficientes dos termos de maior grau das respetivas formas reduzidas. 86

92

29. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ e que $\lim a^n = 0$ se $a < 1$.

94

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

71
92
94

31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral n^p ($p \in \mathbb{Q}$), a^n e $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

7. Resolver problemas

44 a 57
98 a 104

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.

44 a 57
98 a 104

2. +Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

44 a 57
98 a 104

3. +Calcular, por meios algébricos, o limite de sucessões em situação indeterminada e referir esse cálculo como um "levantamento da indeterminação".

44 a 57
98 a 104

4. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite de uma sucessão.

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL FRVR11

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respectivas propriedades fundamentais

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como "ponto aderente a A " quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$. 16
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como "limite de $f(x)$ quando x tende para a " quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ", referir, nesta situação, que " $f(x)$ tende para b quando x tende para a " e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos. 19
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o "limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a " quando $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, designá-lo também por "limite de $f(x)$ à esquerda de a ", referir, nesta situação, que " $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a " e estender esta definição ao caso de limites infinitos. 20
21
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o "limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a " quando $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, designá-lo também por "limite de $f(x)$ à direita de a ", referir, nesta situação, que " $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a " e estender esta definição ao caso de limites infinitos. 20
21
5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f , que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. 21
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. 22
7. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado como "limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito" quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que " $f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito" e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos. 24
8. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado como "limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito" quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que " $f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito" e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos. 25

28
29
30

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, se calculam, em pontos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesses pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.
10. Justificar, dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$ e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

31

32

2. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

19

42

43

43

45

6

45

45

45

46

46

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por "contínua em a " quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
3. Designar, dada uma função real de variável real f de domínio D_f , a função f por "contínua no conjunto $A \subset D_f$ " quando f é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por "contínua" quando é contínua em todos os pontos de D_f .
4. Saber que se uma função real de variável real f de domínio D_f for contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$), então existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a , então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a .
6. Designar por "função racional" uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.
7. Justificar que as funções polinomiais e racionais são contínuas.
8. Justificar que as potências de expoente racional são contínuas.
9. Saber que as funções seno e cosseno são contínuas e justificar que a função tangente é contínua.
10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .
11. Justificar a continuidade de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções "de referência para a continuidade": funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções cosseno, seno e tangente.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

48

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como "assíntota vertical ao gráfico de f " quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) por "assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ " (respetivamente por "assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ ") se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por "assíntota horizontal".
3. Provar, dada uma função real de variável real f , que a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um "levantamento da indeterminação".
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

5. Definir a noção de derivada

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a "taxa média de variação de f entre a e b " como $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
2. Justificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a "taxa instantânea de variação de f no ponto x_0 " como o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por "derivada de f no ponto x_0 ", representá-lo por " $f'(x_0)$ " e, nesse caso, identificar a função f como "diferenciável em x_0 " ou "derivável em x_0 ".
4. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.
5. Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a "reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ " como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in D_f$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) = f'(x_0)$.

6. Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto

- 92 1. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L e um intervalo I , uma função $p: I \rightarrow \mathbb{R}$, como "função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I ", se, para cada $t \in I$, $p(t)$ for a abscissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo T depois de τ_0 se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo T antes de τ_0 se $t < 0$, designando também por "instante", neste contexto, cada $t \in I$.
- 92 2. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo I , a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I , e dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a "velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T " como a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 , $\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a "velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T " como a derivada de p em t , $p'(t)$, caso exista.

7. Operar com derivadas

- 94 1. Designar, dada uma função real de variável real f , a "função derivada de f " como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$, faz corresponder $f'(x)$.
- 94 2. Identificar uma função real de variável real como "diferenciável num conjunto A " quando é diferenciável em todos os pontos de A .
- 109 3. Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).
- 93 4. Provar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se f é diferenciável em a , f é contínua em a e justificar que a recíproca não é verdadeira.
- 96 5. Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k , que as funções $f+g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
- 97 6. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- 97 7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
- 100 8. +Provar, dada uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D'_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e que $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
- 98 9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das "funções de referência (para o cálculo de derivadas)" definidas por x , x^2 , x^3 , $\frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.

- 10.** Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como "funções de referência (para o cálculo de derivadas)" e saber de memória este resultado. 99
101
- 11.** +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. 101
- 12.** Provar, para todo o número racional α , que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como "funções de referência (para o cálculo de derivadas)" e saber de memória este resultado. 102
- 13.** +Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência. 103

8. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções

- 1.** Provar, dada uma função real de variável real f com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$), e diferenciável em $x_0 \in I$, que se f atinge um extremo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e dar um contraexemplo para a implicação recíproca. 110
- 2.** Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a, b]$, ($a < b$), e diferenciável em $]a, b[$ que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por "Teorema de Lagrange". 111
- 3.** Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$) então f é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) no intervalo I . 113
- 4.** Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$) então f é crescente em sentido lato (respetivamente decrescente em sentido lato) no intervalo I . 113
- 5.** Justificar que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante em I . 113

9. Resolver problemas

- 1.** +Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real. 122 a 132
- 2.** +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade. 122 a 132
- 3.** +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos. 122 a 132

Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

1. Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados

- 142
- 142
- 143
- 137
- 138
- 138
- 138
151
1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) por "desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t " ($i \in \{1, \dots, n\}$) a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por " e_i ".
2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que as condições $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.
3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^n e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t , que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $\bar{y} - a\bar{x}$) por "reta de mínimos quadrados" da sequência de pontos.
4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , a "amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y " (ou simplesmente "amostra de dados bivariados (quantitativos)") como a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, representá-la por " (x, y) " e designar por "dimensão da amostra bivariada" o número natural n .
5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.
6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por "variável resposta" e a variável considerada independente por "variável explicativa".
7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos " (x, y) " $= ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, por "nuvem de pontos" o conjunto $\{(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))\}$ e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.
9. Designar, dado um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos " (x, y) ", por "coeficiente de correlação linear" o quociente $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por " r ", reconhecer que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que $|r|$ é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, estão alinhados e referir que a "associação linear entre as variáveis estatísticas" é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais "forte" quanto mais perto de 1 estiver $|r|$.

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2. +Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
3. +Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

144

152
153

160 a 170

160 a 170

160 a 170

Título
Expoente¹¹
Programa e Metas Curriculares de Matemática A
Ensino Secundário
11.º Ano de Escolaridade

Execução Gráfica
CEM, Artes Gráficas, S.A.

Depósito Legal
N.º 404 753/16

ISBN
978-888-89-0664-5

Ano / Edição / Tiragem / N.º de Exemplares
2016 / 1.ª Edição / 1.ª Tir. / 6500 Ex.



© 2016, ASA, uma editora do Grupo LeYa

E-mail: apoio@leyaeducacao.com
Internet: www.asa.pt
Livraria Online: www.leyaonline.com

Apoio ao Professor
707 231 231
210 417 495

LIVRARIAS

Aveiro
LeYa em Aveiro
Centro Comercial Glicínias Plaza, Lj 68-70
Rua D. Manuel Barbuda e Vasconcelos
3810-498 Aveiro

Funchal
LeYa no Funchal
Rua do Hospital Velho, 44
Sta. Maria Maior
9060-129 Funchal

Lisboa
LeYa na Buchholz
Rua Duque de Palmela, 4
1200-098 Lisboa

Porto
LeYa na Latina
Rua de Santa Catarina, 2-10
4000-441 Porto

Santarém
LeYa em Santarém
Rua Pedro de Santarém, 41
2000-223 Santarém

Viseu
LeYa na Pretexto
Rua Formosa, 83
3500-135 Viseu

		978-888-89-0664-5
www.leya.com	www.asa.pt	

AMOSTRA
NÃO COMERCIALIZÁVEL

De acordo com a lei n.º 47/2006, este exemplar destina-se ao órgão da escola competente para a avaliação e a adoção de projetos escolares