

09.

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO**
**CADERNO DE EXERCÍCIOS
E TESTES**

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

Páginas 10 a 19

1.

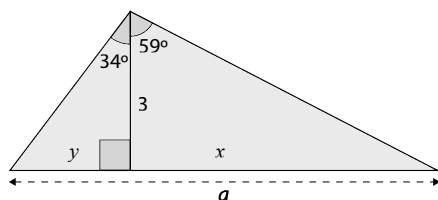
$$1.1. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2,8}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2,8}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

Logo, $a \approx 4,8$.

$$1.2. \cos 40^\circ = \frac{8,6}{a} \Leftrightarrow a = \frac{86}{\cos 40^\circ}$$

Logo, $a \approx 11,2$.

1.3.



$$\operatorname{tg} 59^\circ = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3 \operatorname{tg} 59^\circ$$

$$\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = 3 \operatorname{tg} 34^\circ$$

$$a = 3 \operatorname{tg} 59^\circ + 3 \operatorname{tg} 34^\circ$$

Logo, $a \approx 7,0$.

$$1.4. \sin 53^\circ = \frac{a}{5,2} \Leftrightarrow a = 5,2 \sin 53^\circ$$

Logo, $a \approx 4,2$.

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \frac{5,2 \sin 53^\circ}{\sin 45^\circ}$$

Logo, $b \approx 5,9$.

$$1.5. \cos 40^\circ = \frac{a}{5,3} \Leftrightarrow a = 5,3 \cos 40^\circ$$

Logo, $a \approx 4,1$.

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{b}{a+2} \Leftrightarrow b = (2 + 5,3 \cos 40^\circ) \operatorname{tg} 40^\circ$$

Logo, $b \approx 5,1$.

$$1.6. \operatorname{tg} 51^\circ = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \operatorname{tg} 51^\circ$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{b}{a+3} \Leftrightarrow b = (a+3) \operatorname{tg} 36^\circ$$

Assim:

$$a \operatorname{tg} 51^\circ = (a+3) \operatorname{tg} 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow a \operatorname{tg} 51^\circ - a \operatorname{tg} 36^\circ = 3 \operatorname{tg} 36^\circ$$

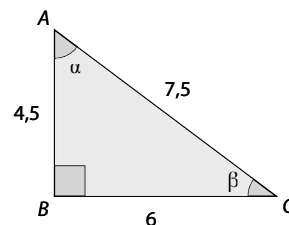
$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ}$$

Logo, $a \approx 4,3$.

$$b = \frac{3 \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ} \operatorname{tg} 51^\circ$$

Logo, $b \approx 5,3$.

2.



$$2.1. \overline{AC}^2 = 7,5^2 = 56,25$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$$

Como $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, então, pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo.

$$2.2. \sin \alpha = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}; \cos \beta = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \beta = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4}$$

3.

$$3.1. \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 60^\circ - \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3.2. \sin 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \times \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3.3. \cos 30^\circ - \sin 60^\circ + \sin 30^\circ - \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= 0$$

$$3.4. \operatorname{tg} 45^\circ + \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \sin 45^\circ =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

4.

$$4.1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo, então $\cos \alpha > 0$.

$$\text{Logo, } \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$4.2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}.$$

5.

$$5.1. 1 - \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \cos^2 \beta = 1 - (1 - \cos^2 \beta) + 2 \cos^2 \beta = \\ = 1 - 1 + \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \beta = \\ = 3 \cos^2 \beta$$

$$5.2. \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \\ = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{1 - \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$5.3. (\operatorname{sen} \beta + \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \beta - \cos \beta)^2 = \\ = \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta - \\ - 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta = \\ = 2(\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) = \\ = 2$$

$$5.4. \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta} + \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta} \times \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \beta} + \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} \times \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{1 - \cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{2}{\operatorname{sen} \beta}$$

6.

$$6.1. \cos (\widehat{ABV}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AV}}{\overline{AV}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } \widehat{ABV} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70,5^\circ.$$

$$6.2. \widehat{AVB} = 180^\circ - 2 \times \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 38,9^\circ.$$

6.3. Usando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \left(\frac{2}{3} \overline{AV} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \overline{AV} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{4}{9} \overline{AV}^2 + \frac{4}{9} \overline{AV}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{8}{9} \overline{AV}^2$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \overline{AV}.$$

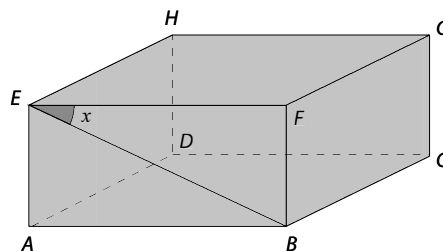
$$\cos (\widehat{AVC}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \overline{AV}}{\overline{AV}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Logo, } \widehat{AVC} = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 54,7^\circ.$$

$$6.4. \widehat{ACV} = \frac{180^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{2} \approx 62,6^\circ$$

7.

7.1.



$$a) \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\overline{AB} = \frac{3}{4} \overline{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{4} \overline{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4}{3 \operatorname{tg} x}$$

Logo, o volume do paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} \times 1 = \frac{4}{3 \operatorname{tg}^2 x}$$

b) A área total do paralelepípedo é dada por:

$$A = 2 \times \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} + 2 \times \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times 1 + 2 \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} \times 1 =$$

$$= \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{8}{3 \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{14}{3 \operatorname{tg} x}$$

7.2. Se $x = 30^\circ$, então:

$$V = \frac{4}{3 \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{4}{3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{4}{3 \times \frac{1}{3}} = 4$$

$$\text{e } A = \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 30^\circ} + \frac{14}{3 \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \frac{8}{3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} + \frac{14}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{8}{3 \times \frac{1}{3}} + \frac{14}{\sqrt{3}} =$$

$$= 8 + \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

8.

8.1. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 59^\circ}{5} = \frac{\sin 45^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 59^\circ}$$

Logo, $x \approx 4,1$.

8.2. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 4,2^2 + 5,3^2 - 2 \times 4,2 \times 5,3 \times \cos 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 45,73 - 44,52 \cos 56^\circ$$

Logo, $x = \sqrt{45,73 - 44,52 \cos 56^\circ} \approx 4,6$.

8.3. $180^\circ - 64^\circ - 55^\circ = 61^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 61^\circ}{x} = \frac{\sin 55^\circ}{4,5} \Leftrightarrow x = \frac{4,5 \sin 61^\circ}{\sin 55^\circ}$$

Logo, $x \approx 4,8$.

8.4. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 4^2 + 7,5^2 - 2 \times 4 \times 7,5 \times \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 75,25 - 60 \cos 30^\circ$$

Logo, $x = \sqrt{75,25 - 60 \cos 30^\circ} \approx 4,5$.

8.5. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 120^\circ}{x} = \frac{\sin 25^\circ}{4,5} \Leftrightarrow x = \frac{4,5 \sin 120^\circ}{\sin 25^\circ}$$

Logo, $x \approx 9,2$.

8.6. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 3,6^2 + 5,8^2 - 2 \times 3,6 \times 5,8 \times \cos 100^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 46,5 - 41,76 \cos 100^\circ$$

Logo, $x = \sqrt{46,5 - 41,76 \cos 100^\circ} \approx 7,3$.

9.

9.1. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 124^\circ}{5,8} = \frac{\sin \theta}{3,6} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{3,6 \sin 124^\circ}{5,8}$$

Logo, $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{3,6 \sin 124^\circ}{5,8} \right) \approx 31^\circ$.

9.2. Pela Lei dos Cossenos:

$$4^2 = 4,2^2 + 3,2^2 - 2 \times 4,2 \times 3,2 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 16 = 27,88 - 29,4 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{11,88}{29,4}$$

Logo, $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{11,88}{29,4} \right) \approx 66^\circ$.

9.3. Pela Lei dos Cossenos:

$$3,6^2 = 7,2^2 + 5,9^2 - 2 \times 7,2 \times 5,9 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 12,96 = 86,65 - 84,96 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{73,69}{84,96}$$

Logo, $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{73,69}{84,96} \right) \approx 30^\circ$.

9.4. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 72^\circ}{5} = \frac{\sin \theta}{3,2} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{3,2 \sin 72^\circ}{5}$$

Logo, $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{3,2 \sin 72^\circ}{5} \right) \approx 37^\circ$.

9.5. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 37^\circ}{3,1} = \frac{\sin \theta}{5} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{5 \sin 37^\circ}{3,1}$$

Logo, $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{5 \sin 37^\circ}{3,1} \right) \approx 76^\circ$.

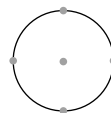
9.6. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 56^\circ}{4,2} = \frac{\sin \theta}{5} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{5 \sin 56^\circ}{4,2}$$

Logo, $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{5 \sin 56^\circ}{4,2} \right) \approx 81^\circ$.

10.

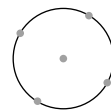
10.1. $x = 180^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



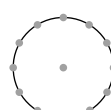
10.2. $x = -60^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



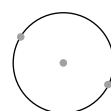
10.3. $x = -30^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



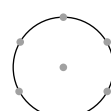
10.4. $x = 270^\circ + 30^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



10.5. $x = 330^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



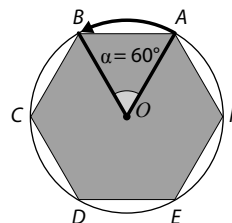
10.6. $x = -210^\circ + 60^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



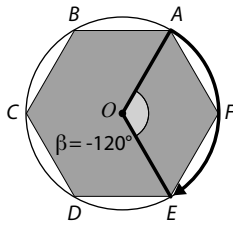
11.

11.1.

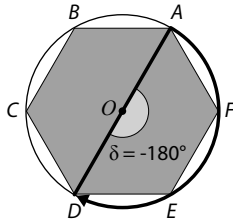
a) Ponto B.



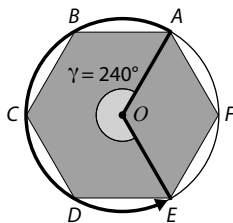
b) Ponto E.



c) Ponto D.



d) Ponto E.



11.2. Por exemplo, 180° , -180° e 540° .

11.3.

a) $480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$; ponto C.

b) $-420^\circ + 360^\circ = -60^\circ$; ponto F.

c) Ponto B.

d) Ponto C.

11.4.

a) Ponto B.

b) Ponto C.

c) Ponto E.

d) Ponto D.

12.

$$\begin{aligned}
 12.1. \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{sen} \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= 1 + \cos \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2. \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{sen}^2 \alpha - 1} &= \frac{-(1 - \cos^2 \alpha)}{-(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)} = \\
 &= \frac{-\operatorname{sen}^2 \alpha}{-\cos^2 \alpha} = \\
 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \\
 &= \operatorname{tg}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.3. \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.4. \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.5. \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.6. \operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= \\
 &= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\
 &= 1 \times (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.7. \operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha \times 1 + \cos^2 \alpha = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.8. \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \operatorname{sen} \alpha \right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) &= \\
 &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \\
 &= \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
 13.1. \quad & \sin(450^\circ + x) - \operatorname{tg}(900^\circ + x) + \sin(-90^\circ - x) = \\
 & = \sin(360^\circ + 90^\circ + x) - \operatorname{tg}(2 \times 360^\circ + 180^\circ + x) - \\
 & - \sin(90^\circ + x) = \\
 & = \sin(90^\circ + x) - \operatorname{tg} x - \sin(90^\circ + x) = \\
 & = -\operatorname{tg} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.2. \quad & \cos(x - 90^\circ) + \sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ - x) = \\
 & = \cos(90^\circ - x) - \sin x - \cos x = \\
 & = \sin x - \sin x - \cos x = \\
 & = -\cos x
 \end{aligned}$$

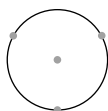
$$\begin{aligned}
 13.3. \quad & \operatorname{tg}(450^\circ - x) - \operatorname{tg}(180^\circ - x) - \sin(270^\circ - x) - \\
 & - \operatorname{tg}(-270^\circ - x) = \\
 & = \operatorname{tg}(360^\circ + 90^\circ - x) + \operatorname{tg} x - \sin(180^\circ + 90^\circ - x) - \\
 & - \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \\
 & = \operatorname{tg}(90^\circ - x) + \operatorname{tg} x + \sin(90^\circ - x) - \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \\
 & = \operatorname{tg} x + \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.4. \quad & \operatorname{tg}(-x - 90^\circ) + \operatorname{tg}(450^\circ + x) + \operatorname{tg}(x - 180^\circ) = \\
 & = -\operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg}(360^\circ + 90^\circ + x) - \operatorname{tg}(180^\circ - x) = \\
 & = -\operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg} x = \\
 & = \operatorname{tg} x
 \end{aligned}$$

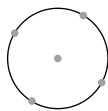
$$\begin{aligned}
 13.5. \quad & -\cos(270^\circ + x) - \sin(x - 180^\circ) - \cos(-x - 180^\circ) = \\
 & = -\cos(180^\circ + 90^\circ + x) + \sin(180^\circ - x) - \\
 & - \cos(180^\circ + x) = \\
 & = \cos(90^\circ + x) + \sin x + \cos x = \\
 & = -\sin x + \sin x + \cos x = \\
 & = \cos x
 \end{aligned}$$

14.

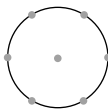
$$14.1. \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



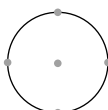
$$14.2. \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$14.3. \quad x = -\frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



$$14.4. \quad x = -\pi + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



15.

$$\begin{aligned}
 15.1. \quad & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi + x) = \\
 & = \sin x - \sin x + \sin x = \\
 & = \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.2. \quad & \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(5\pi + x) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \\
 & = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\
 & = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x + \cos x = \\
 & = \cos x + \operatorname{tg} x + \cos x = \\
 & = 2 \cos x + \operatorname{tg} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.3. \quad & \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \\
 & = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \\
 & = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\
 & = -\operatorname{tg} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.4. \quad & \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{2} - x\right) - \sin(29\pi - x) = \\
 & = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(11\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) = \\
 & = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = \\
 & = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = \\
 & = -\cos x + \sin x - \sin x = \\
 & = -\cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.5. \quad & \operatorname{tg}(x - \pi) + \cos\left(-\frac{17\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(x - 12\pi) = \\
 & = -\operatorname{tg}(\pi - x) + \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}(12\pi - x) = \\
 & = \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}(-x) = \\
 & = \operatorname{tg} x + \sin x + \operatorname{tg} x = \\
 & = \sin x + 2 \operatorname{tg} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.6. \quad & \sin\left(\frac{32\pi}{2} + x\right) - \sin\left(x - \frac{51\pi}{2}\right) - \cos(-x - 125\pi) = \\
 & = \sin(16\pi + x) + \sin\left(\frac{51\pi}{2} - x\right) - \cos(125\pi + x) = \\
 & = \sin x + \sin\left(25\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi + x) = \\
 & = \sin x + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \\
 & = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \\
 & = \sin x - \cos x + \cos x = \\
 & = \sin x
 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
 16.1. \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(10\pi + \alpha) &= \\
 &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha = \\
 &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha = \\
 &= -\sin \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha = \\
 &= -3 \sin \alpha \\
 \text{Uma vez que } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}, \\
 \text{então } -3 \sin \alpha &= -3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16.2. \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \\
 &= -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \\
 \text{Ora, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}. \\
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{25} \\
 \text{Como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ e } \sin \alpha < 0, \text{ então } \alpha \text{ pertence} &\text{ ao 3.º quadrante, pelo que } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}} = \\
 &= -\frac{2\sqrt{6}}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha &= \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{2\sqrt{6}}{5} = \\
 &= \frac{5\sqrt{6} - 24\sqrt{6}}{60} = \\
 &= -\frac{19\sqrt{6}}{60}
 \end{aligned}$$

17.

$$17.1. A(\cos \alpha, \sin \alpha); B(-\cos \alpha, -\sin \alpha); C(1, \operatorname{tg} \alpha); D(\sin \alpha + \cos \alpha, 0)$$

$$17.2. A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); C(1, \sqrt{3}); D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$17.3. A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \text{ ou seja, } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Então, } B\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right); C\left(1, \frac{4}{3}\right); D\left(\frac{7}{5}, 0\right).$$

$$17.4. C\left(1, \frac{\sqrt{7}}{7}\right), \text{ ou seja, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{7} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \cos \alpha &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{14}}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{7}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \sin \alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Então:}
 \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right); B\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$C\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{4}, 0\right)$$

18.

18.1.

$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \\
 &\Leftrightarrow 2 \leq 5 + 3 \sin x \leq 8
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_f = [2, 8].$$

$$\bullet D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \sin(2x) \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \geq -\sin(2x) \geq -1 \\
 &\Leftrightarrow 2 \geq 1 - \sin(2x) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_g = [0, 2].$$

$$\bullet D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq -6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \geq -6$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq 3 - 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \geq -3$$

$$\text{Logo, } D'_h = [-3, 9].$$

$$\bullet 3 + \cos x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ logo } D_i = \mathbb{R}.$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3 + \cos x} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{3 + \cos x} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } D'_i = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\bullet x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_j = \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$D'_j = \mathbb{R}$$

$$\bullet 5x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$D'_k = \mathbb{R}$$

$$\bullet D_l = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 3 - 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -1$$

$$\text{Logo, } D'_l = [-1, 3].$$

18.2.

• Uma vez que $D'_f = [2, 8]$, conclui-se que a função f não tem zeros.

$$\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• Uma vez que $D'_i = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, conclui-se que a função i não tem zeros.

$$\bullet j(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet l(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee$$

$$\vee \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

18.3.

$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$f(-x) = 5 + 3 \sin(-x) = 5 - 3 \sin x$$

Assim, existem valores reais para os quais

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, logo a função f não é par nem ímpar.

$$\bullet D_g = \mathbb{R}$$

$$g(-x) = 1 - \sin(-2x) = 1 + \sin(2x)$$

Assim, existem valores reais para os quais

$g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$, logo a função g não é par nem ímpar.

$$\bullet D_h = \mathbb{R}$$

$$h(-x) = 3 - 6 \cos \left(-\frac{1}{2}x \right) = 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}x \right) =$$

$$= h(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função h é uma função par.

$$\bullet D_i = \mathbb{R}$$

$$i(-x) = \frac{2}{3 + \cos(-x)} = \frac{2}{3 + \cos x} = i(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função i é uma função par.

18.4.

$$\bullet D'_g = [0, 2]$$

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 2 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_i = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$i(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3 + \cos x} = 1 \Leftrightarrow 3 + \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_l = [-1, 3]$$

$$l(x) = 3 \Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

18.5.

$$\bullet D'_f = [2, 8]$$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 5 + 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_h = [-3, 9]$$

$$h(x) = -3 \Leftrightarrow 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}x \right) = -3 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{1}{2}x \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_l = [-1, 3]$$

$$\begin{aligned} l(x) = -1 &\Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \vee \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

18.6.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(x + \pi) &= 1 - \sin(2(x + \pi)) = 1 - \sin(2x + 2\pi) = \\ &= 1 - \sin(2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função g é periódica de período π .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad h(x + 4\pi) &= 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}(x + 4\pi) \right) = \\ &= 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}x + 2\pi \right) = \\ &= 3 - 6 \cos \left(\frac{1}{2}x \right) = \\ &= h(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função h é periódica de período 4π .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad k \left(x + \frac{\pi}{5} \right) &= 1 + \operatorname{tg} \left(5 \left(x + \frac{\pi}{5} \right) + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg} \left(5x + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= k(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função k é periódica de período $\frac{\pi}{5}$.

19.

$$\text{19.1.} \quad \arcsen \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{19.2.} \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{19.3.} \quad \arcsen \left(\sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{19.4.} \quad \cos \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{19.5.} \quad \arccos \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{19.6.} \quad \operatorname{tg} \left(\arcsen \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

20.

$$\begin{aligned} \text{20.1.} \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \\ &\vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in [-\pi, \pi]$, tem-se que

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$\text{20.2.} \quad 2 \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ vem que } x = -\frac{\pi}{12} (\in [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = \frac{7\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ vem que } x = \frac{11\pi}{12} (\in [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = \frac{19\pi}{12} (\notin [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ vem que } x = -\frac{13\pi}{12} (\notin [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = -\frac{5\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Assim, C.S.} = \left\{ -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12} \right\}.$$

$$\text{20.3.} \quad 3 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ vem que } x = -\frac{\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ vem que } x = \frac{11\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Assim, C.S.} = \left\{ -\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}.$$

$$\text{20.4.} \quad \sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 1 - 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, vem que $x = 0 \in [-\pi, \pi]$

ou $x = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$.

Se $k = -1$, vem que $x = -\pi \in [-\pi, \pi]$

ou $x = -\frac{5\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$ ou $x = -\frac{7\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$.

Assim, C.S. = $\left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\right\}$.

20.5. $2 \sin x \cos x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, vem que $x = 0 \in [-\pi, \pi]$

ou $x = \frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$.

Se $k = -1$, vem que $x = -\pi \in [-\pi, \pi]$

ou $x = -\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$ ou $x = -\frac{8\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$.

Assim, C.S. = $\left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

20.6. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, vem que $x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$

ou $x = -\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$ ou $x = \frac{7\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$.

Se $k = -1$, vem que $x = -\frac{5\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

ou $x = \frac{11\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$.

Assim, C.S. = $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$.

21.

21.1. $4 \sin^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.2. 1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.3. (1 + \cos x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 \vee 1 + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \underbrace{\cos x = -2}_{\text{Eq. impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.4. \sin x \cos x = \sin(\pi - x) \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = \sin x (-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = -\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.5. \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.6. \sin(2x) - \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

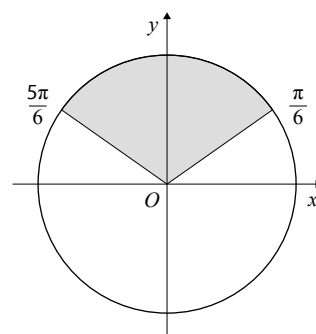
$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi}_{\text{Eq. impossível}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

22.

$$22.1. \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi], \text{ então } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$$

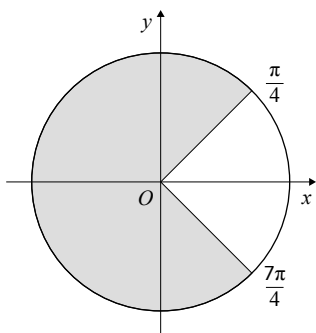


$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[.$$

$$22.2. 2 \cos x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}.$$

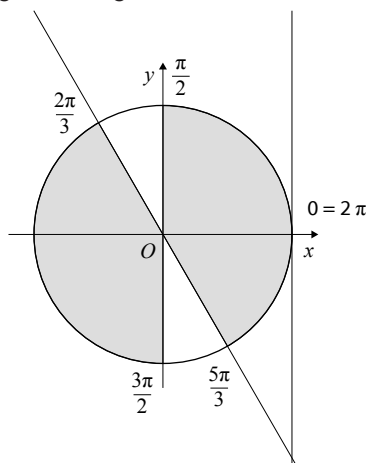


$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right[.$$

$$22.3. -\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

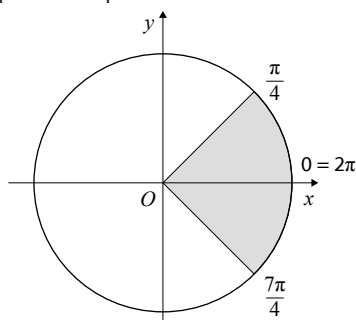


$$\text{Logo, C.S.} = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right[.$$

$$22.4. \sqrt{2} \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}.$$

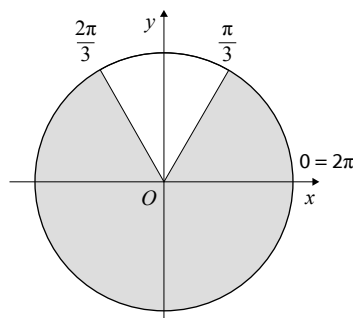


$$\text{Logo, C.S.} = \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[.$$

$$22.5. -2 \operatorname{sen} x \geq -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}.$$

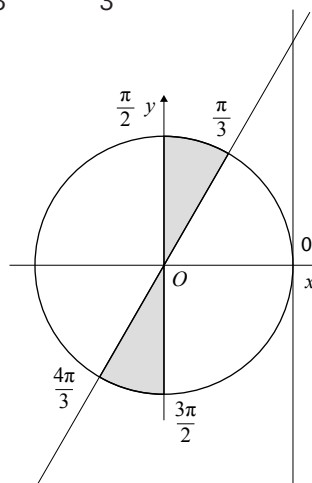


$$\text{Logo, C.S.} = \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi \right[.$$

$$22.6. 2 \operatorname{tg} x > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > \sqrt{3}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}.$$



$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right[.$$

23.

$$23.1. f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 + \operatorname{sen}(\pi + x)} + \frac{\cos(\pi - x)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{-\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \times \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \times \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x$$

$$23.2. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{15}{16}$$

$$\text{Como } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \text{ tem-se que } \cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{Logo, } f(\theta) = 2 \operatorname{tg} \theta = \frac{2\sqrt{15}}{15}.$$

$$23.3. f(x) = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} x = 2 \times 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

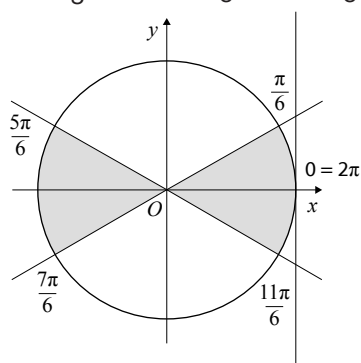
$$23.4. \left| \frac{1}{2} f(x) \right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |\operatorname{tg} x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se $x \in [0, 2\pi]$, então:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{e } \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$$



$$\text{Logo, C.S.} = \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right].$$

24.

$$24.1. N(50 + t) = N(t)$$

$$\Leftrightarrow A + B \cos \left(\frac{C(50 + t)\pi}{180} \right) =$$

$$= A + B \cos \left(\frac{Ct\pi}{180} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{50C\pi + Ct\pi}{180} \right) = \cos \left(\frac{Ct\pi}{180} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{50C\pi + Ct\pi}{180} = \frac{Ct\pi}{180} + 2k\pi \vee$$

$$\vee \frac{50C\pi + Ct\pi}{180} = \frac{-Ct\pi}{180} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 50C + Ct = Ct + 360k \vee$$

$$\vee 50C + Ct = -Ct + 360k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 50C = 360k \vee \underbrace{50C + 2Ct = 360k}_{\text{Não permite determinar o valor de C}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } C = \frac{360}{50} = 7,2.$$

$$24.2. N(t) = A + B \cos \left(\frac{7t\pi}{180} \right)$$

$$\text{a) } N(0) = 10 \Leftrightarrow A + B \cos 0 = 10 \Leftrightarrow A = 10$$

$$N(9) = 12,5 \Leftrightarrow 10 + B \cos \left(\frac{63\pi}{180} \right) = 12,5$$

$$\Leftrightarrow B \cos \left(\frac{7\pi}{20} \right) = 2,5 \Leftrightarrow B = \frac{2,5}{\cos \left(\frac{7\pi}{20} \right)}$$

$$\text{Logo, } B \approx 5,5.$$

$$\text{b) } N(t) = 10 + 5 \cos \left(\frac{7t\pi}{180} \right)$$

$$-1 \leq \cos \left(\frac{7t\pi}{180} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \cos \left(\frac{7t\pi}{180} \right) \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 10 + 5 \cos \left(\frac{7t\pi}{180} \right) \leq 15$$

O número mínimo de aves foi 5000 e o número máximo foi 15 000.

25.

$$25.1. \overline{AB} = 7$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 7 \operatorname{tg} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{\cos x}$$

Logo, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado, em função de x , por:

$$7 + 7 \operatorname{tg} x + \frac{7}{\cos x} = 7 \left(1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) = P(x)$$

$$25.2. P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 7 \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} \right) =$$

$$= 7 \left(1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = 7(1 + \sqrt{3} + 2) = 7(3 + \sqrt{3})$$

$$25.3. \overline{AB} = 7$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 7 \operatorname{tg} x$$

$$\overline{AD} = 3$$

$$\overline{DB} = 7 - 3 = 4$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{DE} = 3 \operatorname{tg} x$$

Logo, a área do polígono $[BCED]$ é dada, em função de x , por:

$$\frac{7 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} x}{2} \times 4 = 5 \operatorname{tg} x \times 4 = 20 \operatorname{tg} x = A(x)$$

25.4. $A(x) = 20\sqrt{3} \Leftrightarrow 20 \operatorname{tg} x = 20\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Um vez que $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $x = \frac{\pi}{3}$.

25.5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$

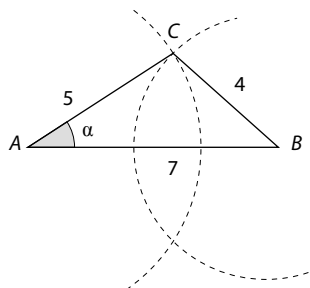
$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$

Uma vez que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $A(\alpha) = 20 \operatorname{tg} \alpha = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2}$.

26.
26.1.



Pela Lei dos Cossenos:

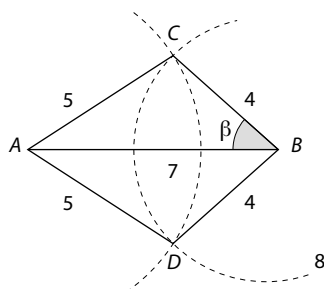
$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 16 = 74 - 70 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{58}{70}$$

Assim, $\widehat{BAC} = \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right) \approx 0,59 \text{ rad.}$

26.2.



Pela Lei dos Cossenos:

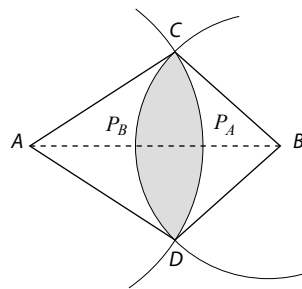
$$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow 25 = 65 - 56 \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{40}{56}$$

Assim, $\widehat{CBD} = 2\beta = 2 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right) \approx 1,55 \text{ rad.}$

26.3.



$$\frac{2\pi \times 5}{P_A} = \frac{2\pi}{2\widehat{BAC}} \Leftrightarrow P_A = 10 \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow P_A = 10 \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)$$

Logo, $P_A \approx 5,9425$.

$$\frac{2\pi \times 4}{P_B} = \frac{2\pi}{\widehat{CBD}} \Leftrightarrow P_B = 4 \widehat{CBD}$$

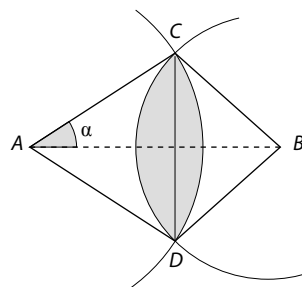
$$\Leftrightarrow P_B = 8 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right)$$

Logo, $P_B \approx 6,2015$.

Assim, o perímetro da região sombreada é dado por:

$$P_A + P_B \approx 5,9425 + 6,2015 \approx 12,14 \text{ cm}$$

26.4.



$$\frac{\pi \times 5^2}{A_A} = \frac{2\pi}{2\widehat{BAC}} \Leftrightarrow A_A = 25 \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow A_A = 25 \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)$$

Logo, $A_A \approx 14,8561$.

$$\frac{\pi \times 4^2}{A_B} = \frac{2\pi}{\widehat{CBD}}$$

$$\Leftrightarrow A_B = 8 \widehat{CBD}$$

$$\Leftrightarrow A_B = 8 \times 2 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right)$$

Logo, $A_B \approx 12,4031$.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \overline{CD}}{5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 10 \operatorname{sen} \alpha$$

Assim, $\overline{CD} = 10 \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)\right) \approx 5,5988$.

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$A_A + A_B - A_{[ADBC]} \approx$$

$$\approx 14,8561 + 12,4031 - \frac{7 \times 5,5988}{2} \approx 7,66 \text{ cm}^2$$

27.

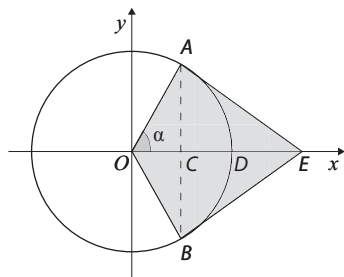
27.1. $\overline{AC} = \text{sen } \alpha$, logo $\overline{AB} = 2 \text{ sen } \alpha$. $\overline{OC} = \cos \alpha$, logo $\overline{CD} = 1 - \cos \alpha$ e, portanto, $\overline{OE} = \cos \alpha + 1 - \cos \alpha + 1 - \cos \alpha = 2 - \cos \alpha$.Assim, uma expressão, em função de α , para a área do quadrilátero $[AOBE]$ é:

$$A(\alpha) = \frac{(2 - \cos \alpha) \times 2 \text{ sen } \alpha}{2} =$$

$$= \frac{4 \text{ sen } \alpha - 2 \cos \alpha \text{ sen } \alpha}{2} =$$

$$= 2 \text{ sen } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

27.2.

 $\overline{AB} = 2 \text{ sen } \alpha$ e $\overline{CE} = 2 - 2 \cos \alpha$, pela alínea anterior.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (2 \text{ sen } \alpha)^2 + (2 - 2 \cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 4 \text{ sen}^2 \alpha + 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 4(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 4 - 8 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 8 - 8 \cos \alpha$$

Logo, $d(\alpha) = \sqrt{8 - 8 \cos \alpha}$.

$$27.3. \overline{OC} = \overline{CE} \Leftrightarrow \cos \alpha = 2 - 2 \cos \alpha \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,84 \text{ rad.}$$

$$27.4. d = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8 - 8 \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow 8 - 8 \cos \alpha = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Uma vez que $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Tema II - Geometria Analítica

Páginas 22 a 29

1.

$$1.1. 3y = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$$

O declive da reta é $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.A inclinação é a amplitude α tal que

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 30^\circ.$$

$$1.2. x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$$

O declive da reta é $m = -1$.A inclinação é a amplitude α tal que

$$\text{tg } \alpha = -1 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 135^\circ.$$

$$1.3. (x, y) = (1, 2) + k(1, -\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{O declive da reta é } m = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}.$$

A inclinação é a amplitude α tal que

$$\text{tg } \alpha = -\sqrt{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 120^\circ.$$

$$1.4. (x, y) = (0 - 2) + k(\sqrt{3}, -1), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{O declive da reta é } m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A inclinação é a amplitude α tal que

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 150^\circ.$$

2.

$$2.1. m = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

 $y = \sqrt{3}x + b$. Como A pertence à reta, tem-se:

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$.Se o declive da reta é $\sqrt{3}$, então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, \sqrt{3})$.

Assim, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (-2, \sqrt{3}) + k(1, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

$$2.2. m = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b. \text{ Como } B \text{ pertence à reta, tem-se:}$$

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 0$$

$$\text{Logo, a equação reduzida da reta é } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Se o declive da reta é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, então um vetor diretorda reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(-3, \sqrt{3})$.

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (\sqrt{3}, -1) + k(-3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

$$2.3. m = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma $y = -x + b$.Como a reta interseca o eixo Oy em $y = 5$, tem-se que a equação reduzida da reta é $y = -x + 5$.

Se o declive da reta é -1 , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(-1, 1)$.

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (0, 5) + k(-1, 1), k \in \mathbb{R}$$

2.4. $m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Como a reta interseca o eixo Ox em $x = -1$, tem-se:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Se o declive da reta é $\frac{\sqrt{3}}{3}$, então um vetor diretor

da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(3, \sqrt{3})$.

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (-1, 0) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

3. A reta a passa nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, 1)$, logo o seu declive é dado por $\frac{1-0}{0-(-3)} = \frac{1}{3}$.

A inclinação de a é a amplitude α tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 18,4^\circ.$$

A reta b passa nos pontos de coordenadas $(0, 3)$ e

$$(4, 0), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}.$$

A inclinação de b é a amplitude α tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 143,1^\circ.$$

A reta c passa nos pontos de coordenadas $(3, 3)$ e

$$(0, 0), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-0}{3-0} = 1. \text{ A in-}$$

clinação de c é a amplitude α tal que $\operatorname{tg} \alpha = 1 \wedge$

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 45^\circ.$$

A reta d passa nos pontos de coordenadas $(-1, 3)$ e

$$(0, 1), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-1}{-1-0} = -2.$$

A inclinação de d é a amplitude α tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 116,6^\circ.$$

4.

4.1. $\vec{AB} \cdot \vec{FE} = 2 \times 2 \times \cos 0^\circ = 4$

4.2. $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 2 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$

4.3. $\vec{AH} \cdot \vec{ED} = 2 \times 2 \times \cos 180^\circ = -4$

4.4. $\vec{GH} \cdot \vec{BC} = 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = -2\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar

$$\alpha = \frac{180^\circ \times (8-2)}{8} = 135^\circ, \text{ sendo } \alpha \text{ a amplitude de um ângulo interno do octógono.}$$

5.

5.1. $\vec{AB} \cdot \vec{LI} = 2 \times 4 \times \cos 0^\circ = 8$

5.2. $\vec{AF} \cdot \vec{EK} = 2 \times 5 \times \cos 90^\circ = 0$

5.3. $\vec{BE} \cdot \vec{JG} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$

5.4. $\vec{HI} \cdot \vec{CF} = 2 \times 4 \times \cos 120^\circ = -4$

5.5. $\vec{GJ} \cdot \vec{LE} = 4 \times \sqrt{29} \times \cos (\widehat{KLE}) =$
 $= 4 \times \sqrt{29} \times \frac{2\sqrt{29}}{29} = 8$

Cálculos auxiliares

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{LE}^2 = 2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{LE}^2 = 29$$

Ou seja, $\overline{LE} = \sqrt{29}$.

$$\text{Assim, } \cos (\widehat{KLE}) = \frac{\overline{LK}}{\overline{LE}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

5.6. $\vec{BC} \cdot \vec{EL} = 2 \times \sqrt{29} \times \cos (180^\circ - \widehat{KLE}) =$
 $= 2 \times \sqrt{29} \times \left(-\frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -4$

6.

6.1. $r: y = \frac{1}{2}x + 2$

Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(2, 1)$.

$$s: 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(2, 3)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{7}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, $29,7^\circ$.

6.2. $r: (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(2, -1)$.

$$s: (x, y) = (1, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(-3, 1)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times (-3) + (-1) \times 1 = -7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{7}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, $8,1^\circ$.

6.3. $r: (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$
 Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(-1, 2, 1)$.
 $s: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(0, 1, 2), k \in \mathbb{R}$
 Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(0, 1, 2)$.
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1) \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$
 $\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
 $\|\vec{s}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $\cos \alpha = \frac{|4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}$
 Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, $43,1^\circ$.

6.4. $r: (x, y, z) = (1, -2, 1) + k(-2, 3, 1), k \in \mathbb{R}$
 Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(-2, 3, 1)$.
 $s: y = 1 \wedge x = z$
 Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(1, 0, 1)$.
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2) \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -1$
 $\|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
 $\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\cos \alpha = \frac{|-1|}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}}$
 Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, $79,1^\circ$.

7.

$$\begin{aligned} 7.1. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \\ &= -2 + 0 = \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.2. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \\ &= 5^2 - 2^2 = \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.3. (-\vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) &= -2\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} = \\ &= -2\|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= -2 \times 2^2 - 2 = \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.4. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w} &= \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= -2 - 0 + 2^2 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 8.1. \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \\ &= \sqrt{3} \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

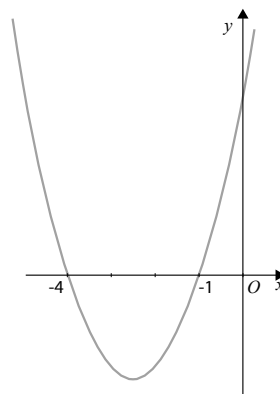
$$\begin{aligned} 8.2. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= (\sqrt{3})^2 - 18 + 36 = \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.3. \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (m, m+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}m - m - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow m(\sqrt{2} - 1) = 2 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \\ &\Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 1} \\ &\Leftrightarrow m = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.4. \vec{u} \cdot \vec{a} > 0 &\Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (-\sqrt{8}, 5k + k^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow -4 - 5k - k^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 + 5k + 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow k \in]-4, -1[\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} k^2 + 5k + 4 &= 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow k = -4 \vee k = -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 9. \vec{AB} \cdot \vec{AM} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BM}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BM} = \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BM}\| \cos 120^\circ = \\ &= a^2 + a \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= a^2 - \frac{1}{4} a^2 = \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

$$10. A_{[ADE]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE} \times 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

$$\begin{aligned}\vec{ED} \cdot \vec{DC} &= (\vec{EA} + \vec{AD}) \cdot \vec{DC} = \\ &= \vec{EA} \cdot \vec{DC} + \vec{AD} \cdot \vec{DC} = \\ &= 3 \times 4 \times \cos 180^\circ + 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = \\ &= -12\end{aligned}$$

11.

$$11.1. 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

O declive desta reta é $\frac{3}{2}$, logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{2}{3}$. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

$$11.2. (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$$

O declive desta reta é $-\frac{1}{2}$, logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é 2. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = 2x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$$1 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Logo, a equação pedida é $y = 2x - 3$.

$$11.3. \text{Um vetor diretor da reta definida por } \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3}$$

é, por exemplo, $\vec{r}(2, 3)$, pelo que o declive desta reta é $\frac{3}{2}$. Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{2}{3}$. Assim, a equação redu-

zida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

$$11.4. \text{Um vetor diretor da reta definida por}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

é, por exemplo, $\vec{r}(1, -2)$, pelo que o declive desta reta é -2 . Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $\frac{1}{2}$. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação pedida é $y = \frac{1}{2}x$.

12.

$$12.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 0 \times 3 + 4 \times (-2) = 0 + 0 - 8 = -8$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

$$12.2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 5 + 2 \times 0 + \sqrt{5} \times (-\sqrt{5}) = 5 + 0 - 5 = 0$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto.

$$12.3. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-3) \times (-1) + 1 \times (-2) = 6 + 3 - 2 = 7$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.

13.

$$13.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2 + 2a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a = -4$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

$$13.2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 + a^2 - 2a - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$$

$$14. \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow (m, 1, 1) \cdot (2, m-1, -3) = ((m, 1, 1) + (2, m-1, -3)) \cdot (2-m, m, m)$$

$$\Leftrightarrow 2m + m - 1 - 3 = (2+m, m, -2) \cdot (2-m, m, m)$$

$$\Leftrightarrow 3m - 4 = 4 - m^2 + m^2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow 5m = 8$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8}{5}$$

$$15. \vec{AB} = (1, 2, 1) - (1, 1, m) = (0, 1, 1-m)$$

$$\vec{AC} = (2, 1, 1) - (1, 1, m) = (1, 0, 1-m)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (0, 1, 1-m) \cdot (1, 0, 1-m) = \\ &= (1-m) \times (1-m) = m^2 - 2m + 1\end{aligned}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (1-m)^2} = \sqrt{1 + (1-m)^2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (1-m)^2} = \sqrt{1 + (1-m)^2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{\sqrt{1 + (1-m)^2} \times \sqrt{1 + (1-m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{1 + (1-m)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 1 + 1 - 2m + m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$$

16. Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor nas condições do enunciado.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 1 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a + a + 1 + c = 0 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ c = -2a - 1 \\ a^2 + (a + 1)^2 + (-2a - 1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 + 4a^2 + 4a + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 6a^2 + 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(0, 1, -1)$ ou $\vec{u}(-1, 0, 1)$.

17.

17.1. $\vec{AB} = (-3, 3, 6) - (3, 5, 3) = (-6, -2, 3)$
 $\vec{BC} = (-5, 0, 0) - (-3, 3, 6) = (-2, -3, -6)$
 $\vec{CD} = (1, 2, -3) - (-5, 0, 0) = (6, 2, -3) = -\vec{AB}$
 $\vec{DA} = (3, 5, 3) - (1, 2, -3) = (2, 3, 6) = -\vec{BC}$
Então, $[AB]$ é paralelo a $[CD]$ e $[BC]$ é paralelo a $[DA]$.

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\|\vec{BC}\| = \|\vec{DA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Logo, $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{DA}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (-6, -2, 3) \cdot (-2, -3, -6) = 12 + 6 - 18 = 0$$

Logo, $[AB]$ é perpendicular a $[BC]$ e, como $[AB]$ é paralelo a $[CD]$ e $[BC]$ é paralelo a $[DA]$, então os restantes lados também são perpendiculares dois a dois. Logo, $[ABCD]$ é um quadrado.

17.2. Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, tal que $\|\vec{u}\| = 7$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \|\vec{u}\| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-6, -2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, -3, -6) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 2b + 3c = 0 \\ -2a - 3b - 6c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 6a + 2b \\ -2a - 3b - 2(6a + 2b) = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6a + 2b}{3} \\ -2a - 3b - 12a - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6a - 4a}{3} \\ b = -2a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2a}{3} \\ b = -2a \\ a^2 + (-2a)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 + 4a^2 + \frac{4a^2}{9} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \frac{49a^2}{9} = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -6 \\ a = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} c = -2 \\ b = 6 \\ a = -3 \end{cases}$$

Então, $\vec{u}(3, -6, 2)$ ou $\vec{u}(-3, 6, -2)$.

• Se $\vec{u}(3, -6, 2)$, obtêm-se os pontos:

$$E = (3, 5, 3) + (3, -6, 2) = (6, -1, 5)$$

$$F = (-3, 3, 6) + (3, -6, 2) = (0, -3, 8)$$

$$G = (-5, 0, 0) + (3, -6, 2) = (-2, -6, 2)$$

$$H = (1, 2, -3) + (3, -6, 2) = (4, -4, -1)$$

• Se $\vec{u}(-3, 6, -2)$, obtêm-se os pontos:

$$E = (3, 5, 3) + (-3, 6, -2) = (0, 11, 1)$$

$$F = (-3, 3, 6) + (-3, 6, -2) = (-6, 9, 4)$$

$$G = (-5, 0, 0) + (-3, 6, -2) = (-8, 6, -2)$$

$$H = (1, 2, -3) + (-3, 6, -2) = (-2, 8, -5)$$

$$\begin{aligned} 18. \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \\ &\quad + \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \\ &= 2^2 + 0 + 2 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0 + 2^2 + 2 \times 1 \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \times 2 \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2 = \\ &= 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + \\ &\quad + 1 = \\ &= 4 + 1 + 4 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 = \\ &= 11 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$19. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| &= \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} = \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\ &= \sqrt{3^2 + 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2} = \\ &= \sqrt{9 + \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{\frac{23}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(\vec{u} - \vec{v})\| &= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\ &= \sqrt{3^2 - 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2} = \\ &= \sqrt{9 - \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{\frac{17}{2}}\end{aligned}$$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$. Então:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{8}{\sqrt{\frac{23}{2}} \times \sqrt{\frac{17}{2}}} = \\ &= \frac{16}{\sqrt{23} \times \sqrt{17}}\end{aligned}$$

Logo, $\alpha \approx 36^\circ$.

20.

20.1. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ é a circunferência de diâmetro $[AB]$:

$$\begin{aligned}(x-2, y-1) \cdot (x-1, y-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 + y^2 - 3y - y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 4y &= -5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 4y + 4 &= -5 + \frac{9}{4} + 4 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ou seja, a circunferência de centro $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ e raio

$$\text{igual a } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

20.2. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AC} \cdot \vec{CP} = 0$ é a reta tangente à circunferência de centro A no ponto C ou é a reta perpendicular à reta AC que passa no ponto C :

$$\begin{aligned}(-3, -2) \cdot (x+1, y+1) &= 0 \Leftrightarrow -3x - 3 - 2y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y = -3x - 5 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\vec{AC} = (-1, -1) - (2, 1) = (-3, -2)$$

20.3. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{BC} \cdot \vec{MP} = 0$, onde M é o ponto médio de $[BC]$, é a mediatriz do segmento de reta $[BC]$:

$$\begin{aligned}(-2, -4) \cdot (x, y-1) &= 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4y = -2x + 4 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\vec{BC} = (-1, -1) - (1, 3) = (-2, -4)$$

$$M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (0, 1)$$

21.

$$\mathbf{21.1.} \quad 2(x-1) + 1(y-1) + 3(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 3z - 9 = 0$$

$$\mathbf{21.2.} \quad -3(x-1) + 1(y+1) + 0(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3 + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 4 = 0$$

$$\mathbf{21.3.} \quad 1(x-0) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 3 = 0$$

22.

$$\mathbf{22.1.} \quad \vec{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 3) = (1, -1, 0)$$

$$\vec{AC} = (3, 1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -1, -1)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -1, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b - b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b \end{cases}\end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}(b, b, b)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{u}(1, 1, 1)$.

Então, $\vec{u}(1, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 2, 3)$ é um ponto do plano:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y - 2 + z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$$

$$\mathbf{22.2.} \quad \vec{AB} = (2, 1, -1) - (1, 1, 1) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{AC} = (5, -1, 0) - (1, 1, 1) = (4, -2, -1)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (4, -2, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 4a - 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ 8c - 2b - c = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = \frac{7}{2}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(2c, \frac{7}{2}c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 2$, obtém-se $\vec{u}(4, 7, 2)$.

Então, $\vec{u}(4, 7, 2)$ é um vetor normal ao plano e

$A(1, 1, 1)$ é um ponto do plano:

$$4(x-1) + 7(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 7y - 7 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 7y + 2z - 13 = 0$$

$$\mathbf{22.3.} \quad \vec{AB} = (2, -3, 0) - (-2, 2, 1) = (4, -5, -1)$$

$$\vec{AC} = (1, 3, -2) - (-2, 2, 1) = (3, 1, -3)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, -5, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 1, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5b - c = 0 \\ 3a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a - 5b \\ 3a + b - 12a + 15b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9a + 16b = 0 \\ c = 4a - \frac{45}{16}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{16}a \\ c = \frac{19}{16}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{19}{16}a \\ b = \frac{9}{16}a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(a, \frac{9}{16}a, \frac{19}{16}a\right)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $a = 16$, obtém-se $\vec{u}(16, 9, 19)$.

Então, $\vec{u}(16, 9, 19)$ é um vetor normal ao plano e

$A(-2, 2, 1)$ é um ponto do plano:

$$16(x+2) + 9(y-2) + 19(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x + 32 + 9y - 18 + 19z - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x + 9y + 19z - 5 = 0$$

23.

23.1. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(0, 1, 0)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(0, 1, 0)$.

Logo, as retas r e s ou são paralelas ou são coincidentes.

Um ponto da reta s é o ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$.

Substituindo na equação da reta r :

$$(1, 0, 2) = (1, 1, 3) + k(0, 1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 1 + k, \\ 2 = 3 \end{cases}$$

que é uma condição impossível.

Então, o ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$ não pertence à reta r . Logo, as retas r e s são paralelas. Sabe-se que $A(1, 1, 3)$ é um ponto da reta r e que $B(1, 0, 2)$ é um ponto da reta s .

$$\vec{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 3) = (0, -1, -1)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(a, 0, 0)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $a = 1$, obtém-se $\vec{u}(1, 0, 0)$.

Então, $\vec{u}(1, 0, 0)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 1, 3)$ é um ponto do plano:

$$1(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$$

23.2. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, -1, -1)$.

Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(2, 3, -1)$.

Logo, as retas r e s não são paralelas porque estes vetores não são colineares $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1}\right)$.

O ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$ pertence às duas retas. Logo, as retas r e s são concorrentes.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - b \\ 2a + 3b - a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a - b \\ a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5b \\ a = -4b \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(-4b, b, -5b)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{u}(-4, 1, -5)$.

Então, $\vec{u}(-4, 1, -5)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 0, 2)$ é um ponto do plano:

$$-4(x-1) + 1(y-0) - 5(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + y - 5z + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + y - 5z + 14 = 0$$

23.3. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(3, 2, -1)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(0, 1, 2)$.

Logo, as retas r e s não são paralelas porque estes vetores não são colineares $\left(\frac{0}{3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1}\right)$.

O ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence às duas retas. Logo, as retas r e s são concorrentes. Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 4c - c = 0 \\ b = -2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3}c \\ b = -2c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}\left(\frac{5}{3}c, -2c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 3$, obtém-se $\vec{u}(5, -6, 3)$.

Então, $\vec{u}(5, -6, 3)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 0, 1)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 5(x-1) - 6(y-0) + 3(z-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x - 5 - 6y + 3z - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x - 6y + 3z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

23.4. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-2, 4, 6)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(1, -2, -3)$.

Então, $\vec{r} = -2\vec{s}$, pelo que os vetores são colineares e as retas r e s ou são paralelas ou são coincidentes.

Um ponto da reta r é o ponto de coordenadas $(2, -1, 2)$.

Substituindo nas equações da reta s :

$$\begin{cases} 2 = 2 + k \\ -1 = 1 - 2k \\ 2 = -2 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ -1 = 1 \\ 2 = -2 \end{cases}, \text{ que é um sistema}$$

impossível.

Então, o ponto de coordenadas $(2, -1, 2)$ não pertence à reta s . Logo, as retas r e s são paralelas.

Sabe-se que $A(2, -1, 2)$ é um ponto da reta r e que $B(2, 1, -2)$ é um ponto da reta s .

$$\vec{AB} = (2, 1, -2) - (2, -1, 2) = (0, 2, -4)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 4, 6) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 4c = 0 \\ -2a + 4b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ -2a + 8c + 6c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ a = 7c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(7c, 2c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 1$, obtém-se $\vec{u}(7, 2, 1)$.

Então, $\vec{u}(7, 2, 1)$ é um vetor normal ao plano e $A(2, -1, 2)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 7(x-2) + 2(y+1) + 1(z-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x - 14 + 2y + 2 + z - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x + 2y + z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

24.

24.1. $A(1, 2, 3)$ é um ponto exterior à reta r e $B(2, 1, 2)$ é um ponto da reta r .

$$\vec{AB} = (2, 1, 2) - (1, 2, 3) = (1, -1, -1)$$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(0, 1, 0)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}(c, 0, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 1$, obtém-se $\vec{u}(1, 0, 1)$.

Então, $\vec{u}(1, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 2, 3)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 1(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 + z - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

24.2. $A(-1, 2, 1)$ é um ponto exterior à reta r e $B(2, 1, -2)$ é um ponto da reta r .

$$\vec{AB} = (2, 1, -2) - (-1, 2, 1) = (3, -1, -3)$$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 3, -1)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, -1, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 3c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 3c \\ 2a + 9a - 9c - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 3c \\ 11a = 10c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \times \frac{10}{11}c - 3c \\ a = \frac{10}{11}c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{11}c \\ a = \frac{10}{11}c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}\left(\frac{10}{11}c, -\frac{3}{11}c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 11$, obtém-se $\vec{u}(10, -3, 11)$.

Então, $\vec{u}(10, -3, 11)$ é um vetor normal ao plano e $A(-1, 2, 1)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 10(x+1) - 3(y-2) + 11(z-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x + 10 - 3y + 6 + 11z - 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x - 3y + 11z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

- 24.3.** $A(1, 1, -2)$ é um ponto exterior à reta r e $B(1, 0, 1)$ é um ponto da reta r .

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, -2) = (0, -1, 3)$$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 2, -1)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -1, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 2, -1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -b + 3c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ 2a + 6c - c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ 2a = -5c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = -\frac{5}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}\left(-\frac{5}{2}c, 3c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 2$, obtém-se $\vec{u}(-5, 6, 2)$.

Então, $\vec{u}(-5, 6, 2)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 1, -2)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} -5(x-1) + 6(y-1) + 2(z+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x + 5 + 6y - 6 + 2z + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x + 6y + 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- 24.4.** $A(-2, -1, 2)$ é um ponto exterior à reta r e $B(2, 1, 1)$ é um ponto da reta r .

$$\vec{AB} = (2, 1, 1) - (-2, -1, 2) = (4, 2, -1)$$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 3, 0)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 0) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - c = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6b + 2b - c = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases} & \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}b, b, -4b\right)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $b = 2$, obtém-se $\vec{u}(-3, 2, -8)$.

Então, $\vec{u}(-3, 2, -8)$ é um vetor normal ao plano e $A(-2, -1, 2)$ é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} -3(x+2) + 2(y+1) - 8(z-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x - 6 + 2y + 2 - 8z + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x + 2y - 8z + 12 &= 0 \end{aligned}$$

25.

- 25.1.** $(2, 1, 5)$ e $(1, 2, 3)$ são vetores paralelos ao plano α e o ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ é um ponto deste plano.

Assim:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 0) + s(2, 1, 5) + t(1, 2, 3), s, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= s(2, 1, 5) + t(1, 2, 3), s, t \in \mathbb{R}, \text{ é uma equação vetorial do plano } \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = s + 2t \\ z = 5s + 3t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

- 25.2.** $\vec{AB} = (2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (1, -1, 1)$

$$\vec{AC} = (-1, 2, 4) - (1, 2, 3) = (-2, 0, 1)$$

$\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são vetores paralelos ao plano α e o ponto A é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, -1, 1) + t(-2, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$, é uma equação vetorial do plano α .

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = 2 - s \\ z = 3 + s + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

- 25.3.** Por exemplo, os vetores $\vec{u}(0, -1, 2)$ e $\vec{v}(-2, 1, 0)$ são perpendiculares ao vetor dado e, portanto, são vetores paralelos ao plano α . O ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$ é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (2, 1, 4) + s(0, -1, 2) + t(-2, 1, 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α .

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 4 + 2s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

- 25.4.** Um plano paralelo ao plano de equação $x + 2y + 3z - 4 = 0$ tem como vetor normal, por exemplo, $(1, 2, 3)$. Os vetores $\vec{u}(0, -3, 2)$ e $\vec{v}(-3, 0, 1)$, por exemplo, são perpendiculares ao vetor de coordenadas $(1, 2, 3)$ e são vetores paralelos ao plano α . O ponto de coordenadas $(2, 1, 1)$ é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (2, 1, 1) + s(0, -3, 2) + t(-3, 0, 1)$,
 $s, t \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α .

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 3s \\ z = 1 + 2s + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

25.5. Um vetor normal ao plano de equação

$2x + y + z + 1 = 0$ é, por exemplo, $(2, 1, 1)$ e é um vetor paralelo ao plano α .

$\vec{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 3) = (1, -1, 0)$ também é um vetor paralelo ao plano α .

O ponto de coordenadas $(1, 2, 3)$ é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, 1, 1) + t(1, -1, 0)$,
 $s, t \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α .

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = 3 + s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

25.6. O vetor $(1, 0, 0)$ é paralelo ao plano α , visto que o plano α é paralelo ao eixo Ox .

$\vec{AB} = (-2, 1, 1) - (1, -2, 3) = (-3, 3, -2)$ também é um vetor paralelo ao plano α . O ponto de coordenadas $(1, -2, 3)$ é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(1, 0, 0) + t(-3, 3, -2)$,
 $s, t \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α .

$$\begin{cases} x = 1 + s - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

26.

26.1. As coordenadas dos pontos do eixo Ox são da forma $(x, 0, 0)$, sendo x um número real. Então:

$$2x + 0 - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo, o plano α interseca o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.

As coordenadas dos pontos do eixo Oy são da forma $(0, y, 0)$, sendo y um número real.

Então:

$$0 + y - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

Logo, o plano α interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -1, 0)$.

As coordenadas dos pontos do eixo Oz são da forma $(0, 0, z)$, sendo z um número real.

Então:

$$0 + 0 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Logo, o plano α interseca o eixo Oz no ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$.

26.2. Por exemplo, os vetores $\vec{u}(1, -2, 0)$ e $\vec{v}(0, 1, 1)$ são perpendiculares ao vetor $\vec{n}$ e são vetores paralelos ao plano α . O ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$ é um ponto deste plano.

Assim, $(x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, -2, 0) + t(0, 1, 1)$,
 $s, t \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α .

26.3.

$$\begin{cases} x = s \\ y = -2s + t \\ z = 1 + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano α .

26.4. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(2, 1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta r .

27.

27.1. $A(3, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ e $F(0, 3, 3)$

$$\vec{AC} = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)$$

$$\vec{AF} = (0, 3, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 3)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AC}$ e $\vec{AF}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 3, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 0 \\ -3a + 3b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(b, b, 0)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{u}(1, 1, 0)$.

Então, $\vec{u}(1, 1, 0)$ é um vetor normal ao plano e $A(3, 0, 0)$ é um ponto do plano:

$$1(x - 3) + 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + y = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0$, que é uma equação cartesiana do plano ACF .

27.2. $\vec{AC} = (-3, 3, 0)$ $\vec{AF} = (-3, 3, 3)$ $E(3, 3, 3)$

Um plano paralelo a ACF e que contém o ponto E pode ser definido pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (3, 3, 3) + s(-3, 3, 0) + t(-3, 3, 3), s, t \in \mathbb{R}$$

27.3.

a) $C(0, 3, 0)$, $D(3, 0, 3)$

O plano mediador do segmento de reta $[CD]$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0$, onde M é o ponto médio de $[CD]$.

$$M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\vec{CD} = (3, 0, 3) - (0, 3, 0) = (3, -3, 3)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (3, -3, 3) \cdot \left(x - \frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2} - 3y + \frac{9}{2} + 3z - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 3z - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6y + 6z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2z - 3 = 0$$

b) $A(3, 0, 0), G(0, 0, 3)$

A superfície esférica de diâmetro $[AG]$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{AP} \cdot \vec{GP} = 0$.

$$\vec{AP} \cdot \vec{GP} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y, z) \cdot (x, y, z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 + z^2 - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + z^2 - 3z + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{2}$$

c) $B(3, 3, 0), D(3, 0, 3)$

O plano tangente à esfera de centro B no ponto D é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{BD} \cdot \vec{DP} = 0$.

$$\vec{BD} = (3, 0, 3) - (3, 3, 0) = (0, -3, 3)$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{DP} = 0 \Leftrightarrow (0, -3, 3) \cdot (x-3, y, z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y + 3z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + z - 3 = 0$$

28.

28.1. A circunferência de diâmetro $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$.

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y+1) \cdot (x+1, y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3x - 3 + y^2 - 4y + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 7 + 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{41}{4}$$

28.2. $\vec{AB} = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$

$$AB: (x, y) = (3, -1) + k(-4, 5), k \in \mathbb{R}$$

28.3. O declive da reta AB é dado por $m = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$.

A inclinação da reta AB é α tal que $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{4}$ e $0 < \alpha < \pi$, ou seja, $\alpha \approx 2,25$ radianos.

28.4. Uma vez que o declive da reta AB é $-\frac{5}{4}$, o declive de uma reta qualquer perpendicular à reta AB é $\frac{4}{5}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = \frac{4}{5}x + b$.

Como $E(1, 1)$ pertence a esta reta, tem-se:

$$1 = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$$

Logo, a equação pedida é $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$.

28.5. $\vec{AF} = (-1, -2) - (3, -1) = (-4, -1)$

$$\vec{BF} = (-1, -2) - (-1, 4) = (0, -6)$$

$$\|\vec{AF}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{BF}\| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{BF} = -4 \times 0 + (-1) \times (-6) = 6$$

Assim, sendo α o ângulo formado pelas retas AF e BF , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{|6|}{\sqrt{17} \times 6}$$

Logo, $\alpha \approx 75,96^\circ$.

28.6. Seja $\beta = \widehat{(\vec{AC}, \vec{DC})}$.

$$\frac{\frac{2\pi}{41\pi}}{\frac{4}{24}} = \frac{\beta}{\frac{41\pi}{24}} \Leftrightarrow \frac{8}{41} = \frac{24\beta}{41\pi}$$

$$\Leftrightarrow 24\beta = \frac{8 \times 41\pi}{41} \Leftrightarrow 24\beta = 8\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{8\pi}{24} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DC} = \|\vec{AC}\| \|\vec{DC}\| \cos \beta =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{41}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{41}{8}$$

28.7. A reta t é tangente à circunferência de centro C no ponto A , logo é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0$.

$$\vec{CA} = (3, -1) - \left(1, \frac{3}{2} \right) = \left(2, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0 \Leftrightarrow \left(2, -\frac{5}{2} \right) \cdot (x-3, y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 - \frac{5}{2}y - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 12 - 5y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y = 4x - 17$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{17}{5}$$

28.8. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0$ é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$, pois C é o ponto médio de $[AB]$.

$$\vec{AB} = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0 \Leftrightarrow (-4, 5) \cdot \left(x-1, y-\frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + 5y - \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10y + 8 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10y = 8x + 7$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

29.

$$29.1. \vec{AE} = (0, 2, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 6)$$

$$\text{Assim, AE: } \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

$$29.2. M = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, 3 \right)$$

O plano mediador de $[AE]$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{AE} \cdot \vec{MP} = 0$, onde M é o ponto médio de $[AE]$.

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{MP} = 0 &\Leftrightarrow (-3, 2, 6) \cdot \left(x - \frac{3}{2}, y - 1, z - 3 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + \frac{9}{2} + 2y - 2 + 6z - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 2y + 6z - \frac{31}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x + 4y + 12z - 31 = 0 \end{aligned}$$

$$F(0, -2, 6)$$

$$-6 \times 0 + 4 \times (-2) + 12 \times 6 - 31 = 0 \Leftrightarrow 33 = 0,$$

que é uma proposição falsa.

Logo, F não pertence ao plano.

$$29.3. B(0, 2, 0), C(0, -2, 0)$$

$$\vec{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, -2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, -2, 0)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3, 2, 0) \cdot (-3, -2, 0) = 9 - 4 + 0 = 5$$

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Assim, } \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{5}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}.$$

$$\text{Logo, } (\widehat{AB, AC}) \approx 67,4^\circ.$$

29.4. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\vec{EP}$ é perpendicular a $\vec{CP}$ é a superfície esférica de diâmetro $[EC]$.

$$\begin{aligned} \vec{EP} \cdot \vec{CP} = 0 &\Leftrightarrow (x, y - 2, z - 6) \cdot (x, y + 2, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 + z^2 - 6z = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 4 + 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 13 \end{aligned}$$

$$29.5. D(3, 0, 6)$$

$$\vec{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$$

$$\vec{AD} = (3, 0, 6) - (3, 0, 0) = (0, 0, 6)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, 6) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \vec{u} \left(\frac{2}{3}b, b, 0 \right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por exemplo, se $b = 3$, obtém-se $\vec{u}(2, 3, 0)$.

Então, $\vec{u}(2, 3, 0)$ é um vetor normal ao plano e $A(3, 0, 0)$ é um ponto do plano:

$$2(x - 3) + 3(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 3y = 0$$

$\Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$, que é uma equação cartesiana do plano ABD .

29.6. Para que o plano α e o plano ABD sejam paralelos os seus vetores normais têm de ser colineares. Um vetor normal ao plano ABD é $(2, 3, 0)$ e um vetor normal ao plano α é $(1, a, b)$.

Para que estes vetores sejam colineares $b = 0$ e $\frac{2}{1} = \frac{3}{a} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

$$29.7. \vec{AC} = (0, -2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, -2, 0)$$

$$\vec{AD} = (3, 0, 6) - (3, 0, 0) = (0, 0, 6)$$

Assim, uma equação vetorial do plano ACD é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + s(-3, -2, 0) + t(0, 0, 6), s, t \in \mathbb{R}$$

$$29.8. F(0, -2, 6)$$

$$\vec{BF} = (0, -2, 6) - (0, 2, 0) = (0, -4, 6)$$

Um vetor diretor do eixo Oy é $(0, 1, 0)$.

$$(0, -4, 6) \cdot (0, 1, 0) = -4$$

$$\|(0, -4, 6)\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

$$\|(0, 1, 0)\| = 1$$

Seja α o ângulo que a reta BF faz com o eixo Oy .

Então:

$$\cos \alpha = \frac{|-4|}{\sqrt{52} \times 1}$$

$$\text{Logo, } \alpha \approx 56,3^\circ.$$

30.

30.1. Seja $C(a, b, c)$.

$$\begin{aligned} \vec{OC} = 2\vec{OA} &\Leftrightarrow (a, b, c) - (0, 0, 0) = 2((1, 2, 3) - (0, 0, 0)) \\ &\Leftrightarrow (a, b, c) = 2(1, 2, 3) \\ &\Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 4, 6) \end{aligned}$$

Logo, $C(2, 4, 6)$.

$$D = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (2, -1, 1)$$

$$30.2. \vec{CD} = (2, -1, 1) - (2, 4, 6) = (0, -5, -5)$$

Logo, uma equação vetorial da reta CD é:

$$(x, y, z) = (2, 4, 6) + k(0, -5, -5), k \in \mathbb{R}$$

$$30.3. \vec{AB} = (3, -4, -1) - (1, 2, 3) = (2, -6, -4)$$

Assim, $AB: (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, -6, -4), s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2s \\ 4 - 5k = 2 - 6s \\ 6 - 5k = 3 - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ 5k = 2 + 6 \times \frac{1}{2} \\ 5k = 3 + 4 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Assim, o ponto de interseção das retas CD e AB tem coordenadas $(2, -1, 1)$, ou seja, trata-se do ponto D .

$$30.4. \vec{CD} = (0, -5, -5) \quad \vec{AB} = (2, -6, -4)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0 + 30 + 20 = 50$$

$$\|\vec{CD}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56}$$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas CD e AB .

$$\cos \alpha = \frac{50}{\sqrt{50} \times \sqrt{56}}$$

Logo, $\alpha \approx 19^\circ$.

30.5. $\vec{OA} = (1, 2, 3)$ $\vec{OB} = (3, -4, -1)$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{OA} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{OB} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, -4, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 3a - 4b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c \\ -6b - 9c - 4b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c - 3c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}(-c, -c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = -1$, obtém-se $\vec{u}(1, 1, -1)$.

Então, $\vec{u}(1, 1, -1)$ é um vetor normal ao plano e $O(0, 0, 0)$ é um ponto do plano:

$$1(x - 0) + 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$, que é uma equação cartesiana do plano AOB .

30.6. Seja r uma reta perpendicular ao plano AOB que passa pelo ponto E .

Um vetor diretor da reta r é um vetor normal ao plano AOB , por exemplo, $(1, 1, -1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta r são da forma:

$$(1 + k, 1 + k, 1 - k), k \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano AOB , obtém-se:

$$1 + k + 1 + k - 1 - k = 0 \Leftrightarrow 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Logo, o ponto P de interseção da reta r com o plano AOB tem coordenadas:

$$\left(1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned} \overline{EP} &= \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

30.7. $\vec{OA} = (1, 2, 3)$

$$\vec{OB} = (3, -4, -1)$$

$\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são vetores paralelos a AOB e, logo, a qualquer plano paralelo a AOB .

Assim, uma equação vetorial do plano que é paralelo a AOB e contém o ponto $E(1, 1, 1)$ é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 3) + t(3, -4, -1), s, t \in \mathbb{R}$$

30.8. O lugar geométrico dos pontos que satisfazem a condição $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ é a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (x - 3, y + 4, z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 + 2y - 8 + z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 8 + 4 + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 14$$

31.

31.1. $O(0, 0, 0)$

$D(3, 4, 4)$, por se tratar do centro da superfície esférica referida no enunciado.

$G(0, 0, z)$, uma vez que a aresta $[OG]$ está contida no eixo Oz e G pertence à superfície esférica, logo:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 + (z - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow (z - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 4$$

Assim, $G(0, 0, 4)$.

$$\vec{A} = \vec{O} + \vec{GD} = (0, 0, 0) + (3, 4, 0) = (3, 4, 0)$$

$$\vec{OG} = 4 = \vec{AD}, \text{ logo } \vec{AB} = 8 = \vec{OC}.$$

Assim, $C(0, 8, 0)$.

$$\vec{F} = \vec{G} + (0, 8, 0) = (0, 8, 4)$$

De forma análoga se conclui que $E(3, 12, 4)$ e $B(3, 12, 0)$.

$$\overline{GD} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

$$\text{Logo, } H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 8\right) \text{ e } I\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{2}, 8\right).$$

31.2. $H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 8\right)$

$$D(3, 4, 4)$$

$$\vec{HD} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \text{ é um vetor diretor da reta } HD \text{ e}$$

é perpendicular a qualquer vetor normal ao plano α .

Um vetor normal ao plano α é $(m, -m, m - 1)$.

Assim:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \cdot (m, -m, m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}m - \frac{3}{2}m - 4m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

$$31.3. \vec{FG} = (0, 0, 4) - (0, 8, 4) = (0, -8, 0)$$

$$\vec{GA} = (3, 4, 0) - (0, 0, 4) = (3, 4, -4)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{FG}$ e $\vec{GA}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{FG} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{GA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -8, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 4, -4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8b = 0 \\ 3a + 4b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{4}{3}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(\frac{4}{3}c, 0, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 3$, obtém-se $\vec{u}(4, 0, 3)$.

Então, $\vec{u}(4, 0, 3)$ é um vetor normal ao plano FGA e a qualquer outro plano que seja paralelo a FGA .

Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo a FGA e que contém o ponto C é dada por:

$$4(x - 0) + 0(y - 8) + 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3z = 0$$

31.4. $\vec{u}(4, 0, 3)$ é um vetor normal ao plano FGA (de acordo com a alínea anterior) e o ponto $G(0, 0, 4)$ pertence ao plano FGA . Assim, uma equação deste plano é:

$$4(x - 0) + 0(y - 0) + 3(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3z - 12 = 0$$

$$\vec{OE} = (3, 12, 4)$$

Logo, $OE: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(3, 12, 4)$, $k \in \mathbb{R}$.

Os pontos da reta OE são então da forma

$$(3k, 12k, 4k), k \in \mathbb{R}.$$

Substituindo na equação do plano FGA :

$$4 \times 3k + 3 \times 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow 24k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Logo, o ponto de interseção da reta OE com o plano FGA tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 6, 2\right)$.

$$31.5. \vec{IE} = (3, 12, 4) - \left(\frac{3}{2}, \frac{21}{2}, 8\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right)$$

$$IE: (x, y, z) = (3, 12, 4) + k\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos P da reta IE são da forma:

$$\left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= \left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right) - (3, 12, 0) = \\ &= \left(\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{IE} \cdot \vec{BP} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \cdot \left(\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4}k + \frac{9}{4}k - 16 + 16k = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{2}k = 16 \Leftrightarrow k = \frac{32}{41}$$

$$\text{Logo, } \vec{BP} = \left(\frac{48}{41}, \frac{48}{41}, \frac{36}{41}\right).$$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa pelo vértice B e é concorrente e perpendicular à reta IE é, por exemplo:

$$(x, y, z) = (3, 12, 0) + k\left(\frac{48}{41}, \frac{48}{41}, \frac{36}{41}\right), k \in \mathbb{R}$$

31.6.

$$a) \vec{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\vec{OG} = (0, 0, 4)$$

$$\vec{OE} \cdot \vec{OG} = 0 + 0 + 16 = 16$$

$$\|\vec{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\vec{OG}\| = 4$$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas OE e OG .

$$\cos \alpha = \frac{16}{13 \times 4}$$

Logo, $\alpha \approx 72,1^\circ$.

$$b) \vec{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\vec{OA} = (3, 4, 0)$$

$$\vec{OE} \cdot \vec{OA} = 9 + 48 + 0 = 57$$

$$\|\vec{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

Seja β a amplitude do ângulo formado pelas retas OE e OA .

$$\cos \beta = \frac{57}{13 \times 5}$$

Logo, $\beta \approx 28,7^\circ$.

31.7. Seja M o ponto médio de $[CD]$.

$$C(0, 8, 0)$$

$$D(3, 4, 4)$$

$$M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{8+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 6, 2\right)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (3, -4, 4) \cdot \left(x - \frac{3}{2}, y - 6, z - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2} - 4y + 24 + 4z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y + 4z + \frac{23}{2} = 0, \text{ que é uma}$$

equação cartesiana do plano medidor de $[CD]$.

$$31.8. D(3, 4, 4)$$

$$G(0, 0, 4)$$

$$\vec{DG} \cdot \vec{GP} = 0 \Leftrightarrow (-3, -4, 0) \cdot (x, y, z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y = 0, \text{ que é uma equação}$$

cartesiana do plano tangente no ponto G à superfície esférica de centro D e que passa em G .

Tema III - Sucessões

Páginas 35 a 43

1.

$$1.1. a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$b_1 = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}; b_2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}; b_3 = \frac{-1}{2 \times 3} = -\frac{1}{6};$$

$$b_4 = \frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$c_1 = \frac{1+1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1; c_2 = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4};$$

$$c_3 = \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; c_4 = \frac{4+1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

$$d_1 = \frac{2 \times 1}{1+2} = \frac{2}{3}; d_2 = \frac{2 \times 2}{2+2} = 1;$$

$$d_3 = \frac{2 \times 3}{3+2} = \frac{6}{5}; d_4 = \frac{2 \times 4}{4+2} = \frac{4}{3}$$

$$e_1 = (2-1)^2 = 1; e_2 = (2-2)^2 = 0; e_3 = (2-3)^2 = 1;$$

$$e_4 = (2-4)^2 = 4$$

$$f_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f_2 = \cos \pi = -1; f_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$f_4 = \cos(2\pi) = 1$$

$$g_1 = 2 \times 1 = 2; g_2 = 2 \times 2 - 1 = 3; g_3 = 2 \times 3 = 6;$$

$$g_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$$

$$h_1 = 2 \times 1 = 2; h_2 = 2 \times 2 = 4; h_3 = 2 \times 3 - 3 = 3;$$

$$h_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

1.2. Se 41 for termo da sucessão (g_n) a sua ordem é par, uma vez que se trata de um número ímpar.

$$2n - 1 = 41 \Leftrightarrow 2n = 42 \Leftrightarrow n = 21$$

Mas, 21 não é um número par, logo 41 não é termo da sucessão (g_n) .

Se 41 for termo da sucessão (h_n) a sua ordem é superior a 3.

$$2n - 3 = 41 \Leftrightarrow 2n = 44 \Leftrightarrow n = 22$$

Assim, 21 é o termo de ordem 22 da sucessão (h_n) .

$$1.3. a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2^{n+1}} = \frac{-1}{2^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (a_n) é decrescente.

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0; b_3 - b_2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{12} < 0$$

Logo, (b_n) não é monótona.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{n+2}{2(n+1)} - \frac{n+1}{2n} = \\ &= \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{-1}{2n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (c_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{2n+2}{n+3} - \frac{2n}{n+2} = \\ &= \frac{(2n+2)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2n + 4 - 2n^2 - 6n}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{4}{(n+3)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (d_n) é crescente.

$$e_2 - e_1 = 0 - 1 = -1 < 0; e_3 - e_2 = 1 - 0 = 1 > 0$$

Logo, (e_n) não é monótona.

$$f_2 - f_1 = -1 - 0 = -1 < 0; f_3 - f_2 = 0 - (-1) = 1 > 0$$

Logo, (f_n) não é monótona.

Se n é par, então $n+1$ é ímpar e tem-se:

$$g_{n+1} - g_n = 2(n+1) - (2n-1) = 2n+2-2n+1 = 3 > 0$$

Se n é ímpar, então $n+1$ é par e tem-se:

$$g_{n+1} - g_n = 2(n+1) - 1 - 2n = 2n+2-1-2n = 1 > 0$$

Logo, $g_{n+1} - g_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (g_n) é crescente.

$$h_2 - h_1 = 4 - 2 = 2 > 0; h_3 - h_2 = 3 - 4 = -1 < 0$$

Logo, (h_n) não é monótona.

1.4. (a_n) não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$-\frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ logo } (b_n) \text{ é limitada.}$$

$$(c_n) \text{ é decrescente e } c_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{2} < c_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (c_n) é limitada.

$$\begin{aligned} (d_n) \text{ é crescente e } d_n &= \frac{2n}{n+2} = \frac{2n+4-4}{n+2} = \\ &= 2 - \frac{4}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \frac{2}{3} \leq d_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (d_n) é limitada.

(e_n) não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$-1 \leq f_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (f_n) é limitada.

(g_n) não é limitada, uma vez que não tem majores.

(h_n) não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$\begin{aligned} 1.5. c_p = d_p &\Leftrightarrow \frac{p+1}{2p} = \frac{2p}{p+2} \\ &\Leftrightarrow (p+1)(p+2) = 2p \times 2p \\ &\Leftrightarrow p^2 + 3p + 2 = 4p^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3p^2 - 3p - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \vee p = \frac{3 - \sqrt{33}}{6}$$

Ou seja, não existe qualquer número natural p para o qual $c_p = d_p$, pelo que a proposição dada é falsa.

2.

2.1. $A =]1, 3[$

Conjunto dos majorantes: $[3, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

2.2. $B = [2, 5[$

Conjunto dos majorantes: $[5, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 2]$

Máximo: não tem

Mínimo: 2

2.3. $C =]-1, 4]$

Conjunto dos majorantes: $[4, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, -1]$

Máximo: 4

Mínimo: não tem

2.4. $D = [2, 7]$

Conjunto dos majorantes: $[7, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 2]$

Máximo: 7

Mínimo: 2

2.5. $E =]-\infty, 2[$

Conjunto dos majorantes: $[2, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: não tem

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

2.6. $F = [1, +\infty[$

Conjunto dos majorantes: não tem

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$

Máximo: não tem

Mínimo: 1

3. Os conjuntos A , B , C e D são limitados, porque têm majorantes e minorantes.

O conjunto E não é limitado, porque não tem minorantes.

O conjunto F não é limitado, porque não tem majorantes.

4. $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 3x \leq -2\} = [1, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$$1 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: -2 + 3x \leq 4\} =]-\infty, 2]$$

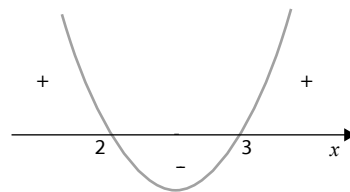
Cálculo auxiliar

$$-2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 \geq 0\} =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



4.

4.1. a) $A \cap B = [1, +\infty[\cap]-\infty, 2] = [1, 2]$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$

Conjunto dos majorantes: $[2, +\infty[$

b) $A \cup B = [1, +\infty[\cup]-\infty, 2] = \mathbb{R}$

Conjunto dos minorantes: não tem

Conjunto dos majorantes: não tem

c) $A \cap \overline{C} = [1, +\infty[\cap]2, 3[=]2, 3[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 2]$

Conjunto dos majorantes: $[3, +\infty[$

d) $B \cap C =]-\infty, 2] \cap (]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[) =]-\infty, 2]$

Conjunto dos minorantes: não tem

Conjunto dos majorantes: $[2, +\infty[$

e) $\overline{B} \cap \overline{C} =]2, +\infty[\cap]2, 3[=]2, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 2]$

Conjunto dos majorantes: não tem

f) $A \cup (\overline{B \cap C}) = [1, +\infty[\cup [2, +\infty[= [1, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$

Conjunto dos majorantes: não tem

4.2. a) $A \cap B = [1, 2]$

Máximo: 2

Mínimo: 1

b) $A \cup B = \mathbb{R}$

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

- c) $A \cap \overline{C} =]2, 3[$
 Máximo: não tem
 Mínimo: não tem
- d) $B \cap C =]-\infty, 2]$
 Máximo: 2
 Mínimo: não tem
- e) $\overline{B} \cup \overline{C} =]2, +\infty[$
 Máximo: não tem
 Mínimo: não tem
- f) $A \cup (\overline{B \cap C}) = [1, +\infty[$
 Máximo: não tem
 Mínimo: 1

5.

5.1. $P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

$P(1): 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

Tese: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$

Demonstração:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) =$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Logo, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2. $P(n): 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

$P(1): 2 = \frac{1 \times (3 \times 1 + 1)}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 \times 4}{2} \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese: $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) =$

$= \frac{n(3n+1)}{2}$

Tese: $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) + (3n+2) =$

$= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

Demonstração:

$2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) + (3n+2) =$

$= \frac{n(3n+1)}{2} + 3n + 2 =$

$= \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} =$

$= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

Cálculo auxiliar

$3n^2 + 7n + 4 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6}$

$\Leftrightarrow n = -1 \vee n = -\frac{4}{3}$

Assim:

$3n^2 + 7n + 4 = 3(n+1)\left(n + \frac{4}{3}\right) = (n+1)(3n+4)$

Logo, $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.3. $P(n): 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$
 $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$P(1): 1 \times 2 = \frac{1 \times (1+1) \times (1+2)}{3}$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Tese: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) +$

$+ (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Demonstração:

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Logo, $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.4. $P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(1): 1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tese: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Demonstração:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} =$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} =$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Cálculo auxiliar

$$2n^2 + 7n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = -2 \vee n = -\frac{3}{2}$$

Assim:

$$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$$

$$\text{Logo, } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.$$

5.5. $P(n)$: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$

$$P(1): 2 = 2(2^1 - 1) \Leftrightarrow 2 = 2 \times 1 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

$$\text{Tese: } 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2(2^{n+1} - 1)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = \\ &= 2(2^n - 1 + 2^n) = \\ &= 2(2 \times 2^n - 1) = \\ &= 2(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.6. $P(n)$: $3^n - 1$ é um número par.

$$P(1): 3^1 - 1 = 3 - 1 = 2, \text{ que é um número par.}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 3^n - 1 \text{ é um número par.}$$

$$\text{Tese: } 3^{n+1} - 1 \text{ é um número par.}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 1 &= 3^n \times 3 - 1 = 3^n \times 3 - 3 + 3 - 1 = \\ &= 3 \times (3^n - 1) + 2 \end{aligned}$$

Por hipótese, $3^n - 1$ é um número par, e, então, $3 \times (3^n - 1)$ é um número par.

2 também é um número par.

A soma de dois números pares é um número par, logo $3 \times (3^n - 1) + 2$ é um número par, ou seja, $3^{n+1} - 1$ é um número par.

Logo, $3^n - 1$ é um número par, $\forall n \in \mathbb{N}$.**5.7.** $P(n)$: $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

$$P(1): 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0, \text{ que é um múltiplo de 3.}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{Hipótese: } n^3 - n \text{ é um múltiplo de 3.}$$

$$\text{Tese: } (n+1)^3 - (n+1) \text{ é um múltiplo de 3.}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^2(n+1) - (n+1) = \\ &= (n^2 + 2n + 1)(n+1) - n - 1 = \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 - n - 1 = \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n = \\ &= (n^3 - n) + 3n(n+1) \end{aligned}$$

Por hipótese, $n^3 - n$ é um múltiplo de 3. $3n(n+1)$ também é um múltiplo de 3.

A soma de dois números múltiplos de 3 é ainda um múltiplo de 3, logo, $(n^3 - n) + 3n(n+1)$ é um múltiplo de 3, ou seja, $(n+1)^3 - (n+1)$ é um múltiplo de 3.

Logo, $n^3 - n$ é um múltiplo de 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.**5.8.** $P(n)$: $\sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 (3i^2 + i) = 1(1+1)^2 \Leftrightarrow 3 \times 1^2 + 1 = 1 \times 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3 + 1 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$$

$$\text{Tese: } \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) = (n+1)(n+2)^2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n+1)[n(n+1) + 3(n+1) + 1] = \\ &= (n+1)(n^2 + n + 3n + 3 + 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + 4n + 4) = \\ &= (n+1)(n+2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

6.

$$\text{6.1. } a_1 = 2; a_2 = 5 + 2 = 7; a_3 = 5 + 7 = 12;$$

$$a_4 = 5 + 12 = 17; a_5 = 5 + 17 = 22$$

$$b_1 = 2; b_2 = \frac{1}{2}; b_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; b_4 = \frac{1}{2};$$

$$b_5 = b_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$c_1 = 2; c_2 = 3 \times 2 = 6; c_3 = 3 \times 6 = 18;$$

$$c_4 = 3 \times 18 = 54; c_5 = 3 \times 54 = 162$$

6.2. $a_{n+1} - a_n = 5 + a_n - a_n = 5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.Logo, (a_n) é crescente.

$$b_2 - b_1 < 0; b_3 - b_2 > 0$$

Logo, (b_n) não é monótona.

$$\text{Tem-se que } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3c_n}{c_n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } (c_n)$$

é uma progressão geométrica de razão 3.

Uma vez que a razão de (c_n) é maior que 1 e que $c_1 = 2 > 0$, então (c_n) é crescente.

7.

$$\text{7.1. } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8.

$$8.1. u_n = u_3 + r(n-3) \Leftrightarrow u_n = -4 + 2(n-3) \\ \Leftrightarrow u_n = -4 + 2n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 2n - 10$$

$$8.2. u_{10} = u_1 + r(10-1) \Leftrightarrow 28 = 10 + 9r \\ \Leftrightarrow 9r = 18 \\ \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 10 + 2(n-1) \\ \Leftrightarrow u_n = 10 + 2n - 2 \\ \Leftrightarrow u_n = 2n + 8$$

$$8.3. u_{12} = u_4 + r(12-4) \Leftrightarrow -24 = 8 + 8r \\ \Leftrightarrow 8r = -32 \\ \Leftrightarrow r = -4$$

Logo:

$$u_n = u_4 + r(n-4) \Leftrightarrow u_n = 8 - 4(n-4) \\ \Leftrightarrow u_n = 8 - 4n + 16 \\ \Leftrightarrow u_n = -4n + 24$$

$$8.4. u_2 + u_5 = 12 \Leftrightarrow u_2 + u_2 + r(5-2) = 12 \\ \Leftrightarrow 2u_2 + 3 \times 3 = 12 \\ \Leftrightarrow 2u_2 = 12 - 9 \\ \Leftrightarrow u_2 = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$u_n = u_2 + r(n-2) \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3(n-2) \\ \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 3n - \frac{9}{2}$$

9.

$$9.1. \sum_{i=1}^{20} (2i+1) = \frac{(2 \times 1 + 1) + (2 \times 20 + 1)}{2} \times 20 = \\ = \frac{3 + 41}{2} \times 20 = 440$$

$$9.2. \sum_{i=1}^{17} \left(\frac{i+1}{5} \right) = \frac{\frac{1+1}{5} + \frac{17+1}{5}}{2} \times 17 = \\ = \frac{2+18}{10} \times 17 = 34$$

$$9.3. \sum_{i=5}^{15} (3i-5) = \frac{(3 \times 5 - 5) + (3 \times 15 - 5)}{2} \times 11 = \\ = \frac{10 + 40}{2} \times 11 = 275$$

$$9.4. \sum_{i=12}^{37} \left(\frac{i-3}{2} \right) = \frac{\frac{12-3}{2} + \frac{37-3}{2}}{2} \times 26 = \\ = \frac{9 + 34}{4} \times 26 = 559$$

10.

$$10.1. u_{16} = u_3 + (16-3)r \Leftrightarrow 59 = 7 + 13r \\ \Leftrightarrow 13r = 52 \\ \Leftrightarrow r = 4$$

Logo:

$$u_n = u_3 + (n-3)r \Leftrightarrow u_n = 7 + (n-3) \times 4 \\ \Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 12 \\ \Leftrightarrow u_n = 4n - 5$$

$$10.2. u_n = 131 \Leftrightarrow 4n - 5 = 131 \Leftrightarrow 4n = 136 \Leftrightarrow n = 34$$

Logo, 131 é o termo de ordem 34 da progressão aritmética (u_n) .

$$u_n = 313 \Leftrightarrow 4n - 5 = 313 \Leftrightarrow 4n = 318 \Leftrightarrow n = 79,5$$

Como $79,5 \notin \mathbb{N}$, então 313 não é um termo da progressão aritmética (u_n) .

$$10.3. u_3 + u_4 + \dots + u_{16} = \frac{u_3 + u_{16}}{2} \times 14 = \\ = \frac{7 + 59}{2} \times 14 = 462$$

11.

$$11.1. u_{n+1} - u_n = u_n + 3 - u_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

$$11.2. \text{Como a razão desta progressão aritmética é positiva, então } (u_n) \text{ é crescente.}$$

$$11.3. u_n = 2 + (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = 2 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 1$$

$$11.4. u_5 + u_6 + \dots + u_{20} = \frac{u_5 + u_{20}}{2} \times 16 = \\ = \frac{(3 \times 5 - 1) + (3 \times 20 - 1)}{2} \times 16 = \\ = \frac{14 + 59}{2} \times 16 = \\ = 584$$

$$11.5. S = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{2 + 3n - 1}{2} \times n = \\ = \frac{1 + 3n}{2} \times n = \\ = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$\begin{aligned}
11.6. S = 1650 &\Leftrightarrow \frac{3n^2 + n}{2} = 1650 \\
&\Leftrightarrow 3n^2 + n = 3300 \\
&\Leftrightarrow 3n^2 + n - 3300 = 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12 \times 3300}}{6} \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 199}{6} \\
&\Leftrightarrow n = -\frac{100}{3} \vee n = 33
\end{aligned}$$

Uma vez que n é um número natural, tem-se então que $n = 33$.

12.

12.1. A figura 1 é formada por 4 triângulos.

A figura 2 é formada por 8 ($= 4 + 4$) triângulos.

A figura 3 é formada por 12 ($= 8 + 4$) triângulos.

Logo, a figura 10 será formada por $12 + 4 \times 7 = 40$ triângulos.

$$12.2. a) \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b) $u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$
Uma vez que 4 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 4.

$$c) u_n = 4 + 4(n-1) \Leftrightarrow u_n = 4 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n$$

$$d) S = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{4 + 4 \times 20}{2} \times 20 = 840 \text{ triângulos.}$$

13.

$$13.1. u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 8 \times (-3)^{n-3}$$

$$13.2. u_5 = u_2 \times r^{5-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} = 4 \times r^3$$

$$\Leftrightarrow r^3 = -\frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } u_n = u_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow u_n = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}.$$

$$13.3. u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow 96 = 6 \times r^4$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \vee r = -2$$

Como (u_n) é crescente, então $r = 2$.

$$\text{Logo, } u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 6 \times 2^{n-4}.$$

$$13.4. u_9 = u_7 \times r^{9-7} \Leftrightarrow 18 = 9 \times r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \vee r = -\sqrt{2}$$

Como (u_n) é crescente, então $r = \sqrt{2}$.

$$\text{Logo, } u_n = u_7 \times r^{n-7} \Leftrightarrow u_n = 9 \times (\sqrt{2})^{n-7}.$$

14.

$$14.1. a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} = r$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} a_i &= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{59049}}{2} = \\
&= \frac{59048}{118098}
\end{aligned}$$

$$14.2. a_5 = a_2 \times r^{5-2} \Leftrightarrow 80 = 10 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

Assim, $a_n = a_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 10 \times 2^{n-2}$ e, portanto, $a_1 = 10 \times 2^{-1} = 5$.

Logo:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = 5 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 5115$$

$$14.3. a_4 = a_1 \times r^{4-1} \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=4}^{13} a_i &= -\frac{3}{8} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \\
&= -\frac{3}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}} = \\
&= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \\
&= -\frac{1023}{4096}
\end{aligned}$$

$$14.4. a_{12} = a_{10} \times r^{12-10} \Leftrightarrow 10 = 20 \times r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee r = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $r > 0$, então $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{19} a_i &= 20 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= 20 \times \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \\ &= 20 \times \frac{(32 - 1) \times 2}{32(2 - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{155}{4(2 - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{155}{4(2 - \sqrt{2})} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{155(2 + \sqrt{2})}{8}\end{aligned}$$

15.

15.1. $u_8 = u_3 \times r^{8-3} \Leftrightarrow 480 = 15 \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$

Assim:

$$u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 15 \times 2^{n-3}$$

15.2. $u_n = 120 \Leftrightarrow 15 \times 2^{n-3} = 120$

$$\Leftrightarrow 2^{n-3} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-3} = 2^3$$

$$\Leftrightarrow n - 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow n = 6$$

Logo, 120 é o termo de ordem 6 da sucessão (u_n) .

15.3. $u_3 + u_4 + \dots + u_{16} = 15 \times \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} = -15(1 - 16384) =$
 $= 245\,745$

16.

16.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

16.2. Como $u_1 = 2 > 0$ e $r = 3 > 1$, então (u_n) é crescente.

16.3. $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

16.4. $u_5 + u_6 + \dots + u_{14} = 2 \times 3^{5-1} \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} =$
 $= -3^4(1 - 3^{10}) =$
 $= 4\,782\,888$

16.5. $S = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = 2 \times \frac{1 - 3^n}{-2} =$
 $= -(1 - 3^n) =$
 $= 3^n - 1$

16.6. $S = 242 \Leftrightarrow 3^n - 1 = 242$

$$\Leftrightarrow 3^n = 243$$

$$\Leftrightarrow 3^n = 3^5$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

17.

17.1. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+5} - 0 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{2}{n+5} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+5} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 2 < (n+5)\delta \text{ (porque } n+5 > 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 2 < n\delta + 5\delta$$

$$\Leftrightarrow n\delta > 2 - 5\delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$$

Assim, se $n > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$, então $\left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta$, e, portanto,

se $p > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+5} = 0.$$

17.2. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{5n+10-5n+4}{25n-20} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{14}{25n-20} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{25n-20} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 14 < (25n-20)\delta$$

(porque $25n-20 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow 14 < 25n\delta - 20\delta$$

$$\Leftrightarrow 25n\delta > 14 + 20\delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$$

Assim, se $n > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$, então $\left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta$, e,

portanto, se $p > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$,

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta, \text{ ou}$$

$$\text{seja, que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5}.$$

17.3. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n + 2 > \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$n + 2 > \delta \Leftrightarrow n > -2 + \delta$$

Assim, se $n > -2 + \delta$, então $n + 2 > \delta$, e, portanto,

se $p > -2 + \delta$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n + 2 > \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim (n + 2) = +\infty.$$

17.4. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow -(n + 3) > \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$-(n + 3) > \delta \Leftrightarrow n - 3 > \delta$$

$$\Leftrightarrow n > 3 + \delta$$

Assim, se $n > 3 + \delta$, então $-(n + 3) > \delta$, e, portanto,

se $p > 3 + \delta$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow -(n + 3) > \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim (-n + 3) = -\infty.$$

$$\begin{aligned} 18. |u_n - 2| < 10^{-2} &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+3}{n+2} - 2 \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+3-2n-4}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow n+2 > 100 \\ &\Leftrightarrow n > 98 \end{aligned}$$

Logo, a menor ordem a partir da qual os termos de (u_n) são valores aproximados de 2 com erro inferior a 10^{-2} é 99.

$$\begin{aligned} 19. |u_n - 1| < 10^{-1} &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+(-1)^n}{3n} - 1 \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+(-1)^n-3n}{3n} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{3n} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow 3n > 10 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Logo, os termos de (u_n) são valores aproximados de 1 com erro inferior a 10^{-1} a partir do termo de ordem 4.

20.

$$\begin{aligned} 20.1. u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+3}{n+1+4} - \frac{-2n+3}{n+4} = \\ &= \frac{-2n+1}{n+5} - \frac{-2n+3}{n+4} = \\ &= \frac{(-2n+1)(n+4) - (-2n+3)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2n^2 - 8n + n + 4 + 2n^2 + 10n - 3n - 15}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-11}{(n+5)(n+4)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3n+3}{n+6} - \frac{3n}{n+5} = \\ &= \frac{(3n+3)(n+5) - 3n(n+6)}{(n+6)(n+5)} = \\ &= \frac{3n^2 + 15n + 3n + 15 - 3n^2 - 18n}{(n+6)(n+5)} = \\ &= \frac{15}{(n+6)(n+5)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (v_n) é crescente.

$$w_1 = -\frac{1}{2}; w_2 = \frac{1}{5}; w_3 = -\frac{1}{10}$$

Uma vez que $w_2 - w_1 > 0$ e $w_3 - w_2 < 0$, então (w_n) não é monótona.

$$20.2. \lim u_n = \lim \frac{-2n+3}{n+4} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{-2+0}{1+0} = -2$$

$$\lim v_n = \lim \frac{3n}{n+5} = \lim \frac{3}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

$$\text{Se } n \text{ é par: } \lim w_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Se } n \text{ é ímpar: } \lim w_n = \lim \frac{-1}{n^2+1} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Logo, $\lim w_n = 0$.

20.3. A sucessão (u_n) é uma sucessão convergente para -2, logo é uma sucessão limitada.

A sucessão (v_n) é uma sucessão convergente para 3, logo é uma sucessão limitada.

A sucessão (w_n) é uma sucessão convergente para 0, logo é uma sucessão limitada.

$$\begin{aligned} 20.4. |v_n - 3| < 10^{-2} &\Leftrightarrow \left| \frac{3n}{n+5} - 3 \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{3n-3n-15}{n+5} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-15}{n+5} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{15}{n+5} < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+5} < \frac{1}{1500} \\ &\Leftrightarrow n+5 > 1500 \\ &\Leftrightarrow n > 1495 \end{aligned}$$

Logo, o termo a partir do qual os termos da sucessão (v_n) pertencem a $V_{10^{-2}}(3)$ é $u_{1495} = \frac{299}{100}$.

21.

$$21.1. \lim u_n = \lim (n^2 - 1) = +\infty$$

$$21.2. \lim v_n = \lim (-n^3 - 1) = -\infty$$

$$21.3. \lim w_n = \lim (-3n^2 + 1) = -\infty$$

$$21.4. \lim z_n = \lim \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$21.5. \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2-1}{-n^3-1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{-n-\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{-\infty-0} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$21.6. \lim \frac{u_n}{w_n} = \lim \frac{n^2-1}{-3n^2+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{-3+0} = -\frac{1}{3}$$

$$21.7. \lim \frac{v_n}{w_n} = \lim \frac{-n^3-1}{-3n^2+1} = \lim \frac{-n-\frac{1}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty-0}{-3+0} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty$$

$$21.8. \lim (u_n \times z_n) = \lim \left[(n^2-1) \times \frac{1}{3n+1} \right] = \lim \frac{n^2-1}{3n+1} = \lim \frac{n-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{-\infty-0}{-3+0} = +\infty$$

$$21.9. \lim (u_n + v_n) = \lim [(n^2-1) + (-n^3-1)] = \lim (-n^3 + n^2 - 2) = \lim \left[n^3 \left(-1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \right] = +\infty(-1+0+0) = -\infty$$

22.

$$22.1. \lim \frac{n-3}{2n+1} = \lim \frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$22.2. \lim \frac{n^2-3}{2n+1} = \lim \frac{n-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{+\infty-0}{2+0} = +\infty$$

$$22.3. \lim \frac{n-3}{2n^2+1} = \lim \frac{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

$$22.4. \lim \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

$$22.5. \lim \frac{2n^2+n}{\sqrt{n^4+1}} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}} = 2$$

$$22.6. \lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2+0=2$$

$$22.7. \lim \left(\frac{n+1}{3n-5} \right)^2 = \left(\lim \frac{n+1}{3n-5} \right)^2 = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$22.8. \lim \left(\frac{n+2}{3n^2-2} \times \frac{n}{2} \right) = \lim \frac{n^2+2n}{6n^2-4} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{6-\frac{4}{n^2}} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$$

$$22.9. \lim \left(\frac{n^2+3}{2n-1} \times \frac{1}{n^2} \right) = \lim \frac{n^2+3}{2n^3-n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

$$22.10. \lim \left(\frac{n+2}{3n^2-2} : \frac{2}{n} \right) = \lim \frac{n^2+2n}{6n^2-4n} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{6-\frac{4}{n}} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$$

$$22.11. \lim \left(\frac{n^2+3}{2n-1} : n^2 \right) = \lim \frac{n^2+3}{2n^3-n^2} = \lim \frac{1+\frac{3}{n^2}}{2n-1} = \frac{1+0}{+\infty-1} = 0$$

$$22.12. \lim \sqrt{\frac{16n^2+7}{n^2}} = \lim \sqrt{\frac{16+\frac{7}{n^2}}{1}} = \sqrt{16} = 4$$

$$22.13. \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$$

$$\begin{aligned}
22.14. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \lim \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \lim \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \frac{-1}{+\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.15. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n^2+2} - 2n) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n^2+2} - 2n)(\sqrt{n^2+2} + 2n)}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim \frac{n^2 + 2 - 4n^2}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim \frac{2 - 3n^2}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{\frac{2}{n} - 3n}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 2} = \\
&= \frac{0 - \infty}{1 + 2} = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.16. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \lim \frac{n^2+1 - n^2+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \frac{2}{+\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$22.17. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$22.18. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{3^n}{2^{n+1}} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$$

$$22.19. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{2^n + 5^n}{3^n} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{5}{3}\right)^n = 0 + \infty = +\infty$$

$$22.20. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{3^n}{3^n + 4^n} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
22.21. \lim_{(\infty-\infty)} (3^{n+1} - 2^n) &= \lim_{(\infty-\infty)} \left[3^n \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \right] = \\
&= +\infty(3 - 0) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.22. \lim_{(\infty-\infty)} (2^{n+1} - 3^n) &= \lim_{(\infty-\infty)} \left[3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 - 1 \right) \right] = \\
&= +\infty(0 \times 2 - 1) = -\infty
\end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned}
23.1. S_{n-1} &= 15(n-1) - 2(n-1)^2 = \\
&= 15n - 15 - 2(n^2 - 2n + 1) = \\
&= 15n - 15 - 2n^2 + 4n - 2 = \\
&= -2n^2 + 19n - 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.2. u_n = S_n - S_{n-1} &= 15n - 2n^2 - (-2n^2 + 19n - 17) = \\
&= 15n - 2n^2 + 2n^2 - 19n + 17 = \\
&= -4n + 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.3. u_{n+1} - u_n &= -4(n+1) + 17 - (-4n + 17) = \\
&= -4n - 4 + 17 + 4n - 17 = \\
&= -4, \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Uma vez que -4 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -4 .

$$24. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{\sqrt{2}}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o seu primeiro termo é a .

A soma de todos os termos desta progressão é dada por:

$$\begin{aligned}
\lim S &= \lim \left[a \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right] = \\
&= a \lim \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \\
&= a \lim \frac{\sqrt{2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right)}{\sqrt{2}-1} = \\
&= a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \lim \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} (1-0) = \\
&= \frac{2a + \sqrt{2}a}{2-1} = \\
&= 2a + \sqrt{2}a = \\
&= a(2 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

25.

25.1. Se $n < 4$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - (n+1) - (3-n) = \\ &= 3 - n - 1 - 3 + n = \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

Se $n > 4$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+1} - 2 - \left(\frac{2}{n} - 2 \right) = \\ &= \frac{2}{n+1} - 2 - \frac{2}{n} + 2 = \\ &= \frac{2n - 2(n+1)}{(n+1)n} = \\ &= \frac{2n - 2n - 2}{(n+1)n} = \\ &= \frac{-2}{(n+1)n} < 0 \end{aligned}$$

Se $n = 4$:

$$u_4 - u_3 = \frac{2}{4} - 2 - (3 - 3) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

Logo, $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é decrescente.

25.2. Pretende-se provar que $\lim u_n = -2$, ou seja,

$$\lim \left(\frac{2}{n} - 2 \right) = -2, \text{ isto é, } \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}:$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta.$$

Se $\delta \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow 2 < n\delta \text{ (porque } n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow n\delta > 2 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se $n > \frac{2}{\delta}$, então $\left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta$, e, portanto,

se $p > \frac{2}{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta.$$

25.3. Uma vez que (u_n) é uma sucessão convergente, então é uma sucessão limitada.

26.

26.1. $\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) =$

$$= \lim \left(1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \lim \left(2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \right) =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times (1 - 0) = \\ &= 2 \end{aligned}$$

26.2. $\lim \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{2n^2} = \lim \frac{\frac{2+2n}{2} \times n}{2n^2} =$

$$= \lim \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim \frac{n+n^2}{2n^2} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

26.3. $\lim \frac{\frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \dots + \frac{3^n}{2}}{3^n} =$

$$= \lim \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1-3^n}{1-3}}{3^n} =$$

$$= \lim \frac{-\frac{3}{4} (1-3^n)}{3^n} =$$

$$= \lim \left(\frac{3}{4} \times \frac{3^n - 1}{3^n} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \lim \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} (1 - 0) =$$

$$= \frac{3}{4}$$

27.

27.1. $u_n = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{2} \times 1 = \frac{2^{-n} + 2^{-n-1}}{2} =$

$$= \frac{2^{-n}(1+2^{-1})}{2} =$$

$$= 2^{-n-1} \times \left(1 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2^{-n-1} \times \frac{3}{2} =$$

$$= 3 \times 2^{-n-2}$$

27.2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{-n-1-2}}{3 \times 2^{-n-2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $\frac{1}{2}$ é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

27.3. $u_1 = 3 \times 2^{-1-2} = 3 \times 2^{-3} = \frac{3}{8}$

$$S = \lim \left(\frac{3}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} \times 2 \lim \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = \frac{3}{4} \times (1 - 0) = \frac{3}{4}$$

28.

$$28.1. \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{0,1u_{n-1}}{u_{n-1}} = 0,1 \text{ (constante)}$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 0,1.

$$28.2. S_p = 0,2 \times \frac{1-0,1^p}{1-0,1} = \frac{2}{9} (1-0,1^p)$$

$$28.3. \lim S_n = \lim \frac{2}{9} (1-0,1^n) = \frac{2}{9} (1-0) = \frac{2}{9}$$

Representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento n , de primeiro termo 0,2 e razão 0,1.

29.

$$29.1. \widehat{ACB} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

Uma vez que AB é paralela a CD e BC é concorrente a ambas, então $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.

Logo, os triângulos $[ACB]$ e $[BDC]$ têm dois ângulos correspondentes com as mesmas amplitudes, pelo que são triângulos semelhantes.

A razão de semelhança entre estes dois triângulos é $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$.

29.2. Procedendo de forma semelhante à alínea anterior, prova-se que, com a construção de cada segmento, se obtém um novo triângulo semelhante aos anteriores e cuja razão de semelhança em relação ao que lhe é imediatamente anterior é $\frac{1}{2}$.

Assim, pode concluir-se que cada novo segmento tem comprimento igual a metade do comprimento do segmento anterior.

Seja (u_n) a sucessão dos comprimentos dos segmentos da linha poligonal, onde n representa a ordem de construção de cada segmento.

De acordo com a alínea anterior, $u_1 = 2$ e

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n}{u_n} = \frac{1}{2}$, ou seja, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, o comprimento da linha poligonal caso esta tenha 8 segmentos é dado por:

$$S_8 = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{64}.$$

$$29.3. \lim S_n = \lim \left(2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 4$$

Representa o dobro do comprimento do primeiro segmento de reta.

30.

30.1. a) Seja $P(n): u_n > 1$.

$$P(1): u_1 > 1 \Leftrightarrow 3 > 1$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n > 1$

Tese: $u_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$\text{Como, por hipótese, } u_n > 1 \Leftrightarrow 2u_n - 1 > 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2u_n - 1} > 1$$

Logo, $u_{n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Seja $P(n): u_{n+1} < u_n$.

$$P(1): u_2 < u_1 \Leftrightarrow \sqrt{2u_1 - 1} < u_1 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 3$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_{n+1} < u_n$

Tese: $u_{n+2} < u_{n+1}$

Demonstração:

$$u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow 2u_{n+1} < 2u_n \\ \Leftrightarrow 2u_{n+1} - 1 < 2u_n - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2u_{n+1} - 1} < \sqrt{2u_n - 1} \\ \Leftrightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

Logo, $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é decrescente.

30.2. Das alíneas anteriores resulta que (u_n) é uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente.

Seja $L = \lim u_n$.

$$\text{Então, } L = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2u_n - 1} = \sqrt{2L - 1}.$$

Ou seja:

$$L = \sqrt{2L - 1} \Leftrightarrow L^2 = 2L - 1 \\ \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (L - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow L - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow L = 1$$

31.

31.1. Pretende-se mostrar que existe um valor de u_1 para o qual a sucessão é constante, ou seja, para o qual $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$3u_{n+1} = 2u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{Então, } u_2 - u_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} - u_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1$$

Suponha-se então, que $u_1 = 1$. Por indução, demonstra-se que para este valor de u_1 se tem $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $P(n): u_{n+1} - u_n = 0$

$$\begin{aligned} P(1): u_2 - u_1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} - u_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_{n+1} - u_n = 0$

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} = 0$

Demonstração:

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = \\ &= \frac{2}{3} \times 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, se $u_1 = 1$, então a sucessão é constante.

31.2. Sabemos que $3u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Então:

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{13}{9}$$

Como $v_n = u_n - h$, tem-se:

$$v_1 = 2 - h$$

$$v_2 = \frac{5}{3} - h$$

$$v_3 = \frac{13}{9} - h$$

Para que a sucessão (v_n) seja uma progressão geométrica, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tem de ser constante, para qualquer valor de n , sendo $n \in \mathbb{N}$, logo, em particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_2}{v_1} = k \\ \frac{v_3}{v_2} = k \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{5}{3} - h}{2 - h} = k \\ \frac{\frac{13}{9} - h}{\frac{5}{3} - h} = k \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 - 3h}{6 - 3h} = k \\ \frac{13 - 9h}{15 - 9h} = k \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{13 - 9h}{15 - 9h} = \frac{5 - 3h}{6 - 3h} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (13 - 9h)(6 - 3h) = (5 - 3h)(15 - 9h) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 27h^2 - 93h + 78 = 27h^2 - 90h + 75 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3h = 3 \\ k = \frac{5-3}{6-3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 1 \\ k = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Falta apenas verificar que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ é constante $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1}{\frac{2}{3}u_{n-1} - 1} = \\ &= \frac{\frac{2}{3}(u_n - 1)}{u_{n-1} - 1} = \\ &= \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, $h = 1$.

31.3. Da alínea anterior, vem que $h = 1$ e $k = \frac{2}{3}$, onde k representa a razão da progressão geométrica (v_n) . Além disso, $v_1 = 2 - 1 = 1$.

Então:

$$v_n = v_1 \times k^{n-1} \Leftrightarrow v_n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Como $v_n = u_n - h \Leftrightarrow u_n = v_n + h$, então

$$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{31.4.} \quad S_p &= \sum_{n=1}^p u_n = \sum_{n=1}^p \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^p 1 = \\ &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{1 - \frac{2}{3}} + p = \\ &= 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p \right) + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_p &= \sum_{n=1}^p v_n = \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{1 - \frac{2}{3}} = \\ &= 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim S_p &= \lim \left[3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^p \right) + p \right] = \\ &= 3 \times (1 - 0) + \infty = \\ &= +\infty \\ \lim S'_p &= \lim \left[3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^p \right) \right] = 3 \times (1 - 0) = 3\end{aligned}$$

Tema IV - Funções Reais de Variável Real

Páginas 50 a 59

1.

$$1.1. f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \wedge x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \wedge x \neq -1$$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq -1$, que é uma condição impossível.

Logo, f não tem zeros.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$$

$$\text{Assim, } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[\text{ e}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[.$$

$$1.2. h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\bullet D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

$$\bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x + 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \wedge x^2 + 5x + 6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Logo, 1 é um zero de h .

x	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+	0	+
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	0	+	+	+
$h(x)$	+	n.d.	-	n.d.	+	0	+

Assim:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[\text{ e}$$

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, -2[$$

$$1.3. i(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2 - 4}$$

$$\bullet D_i = \{x \in \mathbb{R}: (x-2)^2 \neq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\bullet i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2 - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-5(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+12}{(x-2)^2(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x+12=0 \wedge (x-2)^2(x+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Logo, 3 é um zero de i .

x	$-\infty$	-2		2		3	$+\infty$
$-4x+12$	+	+	+	+	+	0	-
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$i(x)$	-	n.d.	+	0	+	0	-

Assim:

$$i(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{e } i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[\cup]2, 3[$$

$$1.4. k(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

$$\bullet D_k = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$\bullet k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 1}{x + 1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3 - 1)x(x - 1) + (x - 1)(x + 1) - (x^3 + 1)x(x + 1)}{(x + 1)x(x - 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^4 - x^2 - 1}{(x + 1)x(x - 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^4 - x^2 - 1 = 0 \wedge (x + 1)x(x - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{-4}, \text{ que é uma equação im-}$$

possível em $\mathbb{R}$.

Logo, k não tem zeros.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x^4 - x^2 - 1$	-	-	-	-	-	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$k(x)$	+	n.d.	-	n.d.	+	n.d.	-

Assim:

$$k(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$$

$$e \ k(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

2.

$$\begin{aligned} 21. \ x + 3 &= \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow x + 3 - \frac{3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - x - 3 - 3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 6}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{7} \vee x = -1 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$C.S. = \{-1 - \sqrt{7}, -1 + \sqrt{7}\}$$

$$\begin{aligned} 22. \ \frac{x-2}{2} + \frac{x+1}{2-x} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{x+1}{2-x} - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(2-x) + 4(x+1) - (2-x)}{4(2-x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 13x - 6}{4(2-x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + 13x - 6 = 0 \wedge 4(2-x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169-48}}{-4} \wedge x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 6\right) \wedge x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 6 \\ C.S. &= \left\{\frac{1}{2}, 6\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \ \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} &= -1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x - 6 - 2x + x^2 - 2x}{x(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \wedge x(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$C.S. = \{-2, 3\}$$

$$\begin{aligned} 24. \ \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} &= \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-x-2-x^2}{x^2+2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-x}{x^2+2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(-x-1)}{x(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x-1 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$C.S. = \{-1\}$$

$$\begin{aligned} 25. \ \frac{x}{x+5} - \frac{x}{x-2} &= \frac{3}{x^2+3x-10} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+5} - \frac{x}{x-2} - \frac{3}{x^2+3x-10} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-x^2-5x-3}{(x+5)(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-7x-3}{(x+5)(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -7x-3 = 0 \wedge (x+5)(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$$

$$C.S. = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

$$\begin{aligned} 26. \ \frac{3}{x-1} - \frac{10}{x^2+3x-4} &= \frac{x}{x+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - \frac{10}{x^2+3x-4} - \frac{x}{x+4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x+12-10-x^2+x}{(x-1)(x+4)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+2}{(x-1)(x+4)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+4x+2 = 0 \wedge (x-1)(x+4) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{-2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{6} \vee x = 2 + \sqrt{6}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

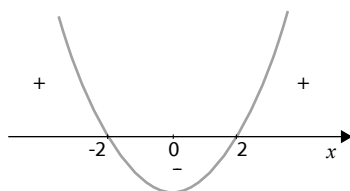
$$\text{C.S.} = [2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}]$$

3.

$$3.1. \frac{-2}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$3.2. \frac{x-1}{-2x+1} \geq 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$-2x+1$	+	0	-	-	-
$\frac{x-1}{-2x+1}$	-	n.d.	+	0	-

$$\text{C.S.} = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$3.3. \frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6} \leq 0$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	-3		-1		2		3	$+\infty$
x^2+4x+3	+	0	-	0	+	+	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6}$	+	0	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+

$$\text{C.S.} = [-3, -1] \cup]2, 3[$$

$$3.4. \frac{x+1}{2x+1} < \frac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{x} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x-1-4x^2-2x}{x(2x+1)} < 0$$

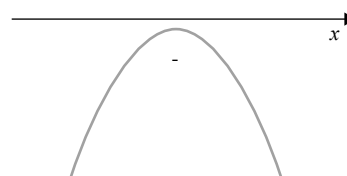
$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2-3x-1}{x(2x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x+1) > 0$$

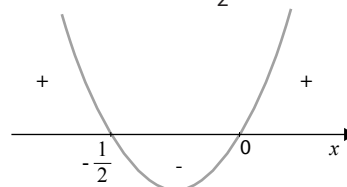
Cálculos auxiliares

$$-3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{-6}, \text{ que é uma}$$

equação impossível em $\mathbb{R}$.



$$x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup]0, +\infty[$$

$$3.5. \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-6-2x+x^2-2x}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		0		2		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

$$\text{C.S.} = [-2, 0[\cup]2, 3]$$

$$\begin{aligned} 3.6. 1 - \frac{1}{x+1} &\geq \frac{4}{x^2+x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2+x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-x-4}{x^2+x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+x} \geq 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1		0		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2+x}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2] \cup]-1, 0[\cup [2, +\infty[$$

4.

4.1. Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \rightarrow 1$.

$$x_n \rightarrow 1$$

$$x_n + 1 \rightarrow 2$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow \frac{3}{2}, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}.$$

4.2. Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \rightarrow +\infty$.

$$x_n \rightarrow +\infty$$

$$x_n + 1 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 0$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 1$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow 1, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

4.3. Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \rightarrow -1$ e $x_n > -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_n \rightarrow -1^+$$

$$x_n + 1 \rightarrow 0^+$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow +\infty$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow +\infty$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow +\infty, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

5.

$$5.1. \lim a_n = \lim \frac{2n+1}{n+2} = \lim \left(2 - \frac{3}{n+2} \right) = 2^-$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2n+1 \quad | \quad n+2 \\ -2n-4 \quad | \quad 2 \\ \hline -3 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2.$$

$$5.2. \lim b_n = \lim \frac{-n+1}{n+2} = \lim \left(-1 + \frac{3}{n+2} \right) = -1^+$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -n+1 \quad | \quad n+2 \\ n+2 \quad | \quad -1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(b_n) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1.$$

$$5.3. \lim c_n = \lim \frac{-n-2}{n+1} = \lim \left(-1 - \frac{1}{n+1} \right) = -1^-$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -n-2 \quad | \quad n+1 \\ n+1 \quad | \quad -1 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(c_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2.$$

$$5.4. \lim d_n = \lim \frac{-2n+1}{n+2} = \lim \left(-2 + \frac{5}{n+2} \right) = -2^+$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -2n+1 \quad | \quad n+2 \\ +2n+4 \quad | \quad -2 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(d_n) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3.$$

$$5.5. \lim u_n = \lim \frac{-n^2+1}{n+2} = \lim \frac{-n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = -\infty$$

$$\text{Logo, } \lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

6.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2 = 0^2 = 0$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

7.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2) = \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right] =$$

$$= -\infty(1 + 0 + 0) =$$

$$= -\infty$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{+\infty}{1} =$$

$$= +\infty$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{x - 4 + \frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{2 + 0}{+\infty - 4 + 0} =$$

$$= 0$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} =$$

$$= \frac{-1}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{2}{3x+1}} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x+4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} \times \frac{1}{3x} \right) = \lim_{(0 \times \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{-x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x+2)] =$$

$$= +\infty$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) =$$

$$= \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1-x-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{-2}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

7.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}} =$

$$= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

8.

8.1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1) = 1 + 2 + 1 = 4$

8.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

8.3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

8.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 1) = 1$

8.5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 2)}{(x-1)(x+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} =$$

$$= \frac{1+3+2}{1+1} =$$

$$= 3$$

Cálculo auxiliar

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

8.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1+1+1}{2 \times 2} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

8.7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x} + 2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [(x+2)\sqrt{x} + 2] =$$

$$= 0$$

8.8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

8.9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{(x-3)(x-2)}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x-3}\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-2}} =$$

$$= 1$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

8.10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - x}{x^3 - x^2} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x)}{(x^3 - x^2)(\sqrt{x} + x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{(x^3 - x^2)(\sqrt{x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x)}{x^2(x-1)(\sqrt{x} + x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x(\sqrt{x+x})} = \\
&= \frac{-1}{0^+} = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{x+1-x^2-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{x(1-x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{1-x} = \\
&= \frac{1 \times (1+1)}{1} = \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8.12. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{x-1-x^2+1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{x(1-x)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1}}{x} = \\
&= - \frac{0+0}{1} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

9. Como $1 \in D_f$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe se e só se

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-1}{x-2} + k \right) = \\
&= 0 + k = \\
&= k
\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe se e só se $k = 3$.

10.

$$\begin{aligned}
10.1. \bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\bullet g(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$, então g não é contínua em $x = 0$.

$$10.2. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{0+1}}{\sqrt{0-3}} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet i(0) = -\frac{1}{3}$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = i(0) = -\frac{1}{3}$, conclui-se que i é contínua em $x = 0$.

11.

$$11.1. \bullet g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1$$

Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

Logo, $k = 2$.

$$11.2. \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{kx+1}{x} = \frac{-k+1}{-1} = k-1 = i(-1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-k) = -1-k$$

Para que a função i seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
i(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) \Leftrightarrow k-1 = -1-k \\
&\Leftrightarrow 2k = 0 \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

Logo, $k = 0$.

12.

12.1. No intervalo $]-\infty, 0[$ a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo $]0, +\infty[$ a função é contínua, pois é uma função racional.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{4 - 4 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sqrt{4-x}) = \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 4) = 4$$

$$\bullet f(0) = 4$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 4$, conclui-se que f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

12.2. No intervalo $]-\infty, 1[$ a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função afim e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo $]1, +\infty[$ a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a raiz quadrada de uma função afim.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ e, então, g não é contínua em $x = 1$.

Logo, g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

13.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 = f(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então f não é contínua em $x = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = 0 = g(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, então g não é contínua em $x = 1$.

$$\mathbf{13.2} \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1 + \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2x^2-2x-3}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2+x+1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2x-3}{x-2} = \\ &= \frac{2-2-3}{1-2} = \\ &= 3 = (f+g)(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x} = \\ &= \frac{1+1+1}{1} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como $(f+g)(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x)$, então $f+g$ é contínua em $x = 1$.

14.

$$14.1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$14.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$14.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$14.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2-1}{1-0} = 1$$

$$14.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 1$$

15.

$$15.1. f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x + 2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{x^2 + 2}{3x + 2} = \frac{\frac{4}{9} + 2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -\frac{2}{3}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, por se tratar de uma função irracional com este domínio.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x + 2} - \frac{1}{3}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2x}{9x + 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x} - 2}{9 + \frac{6}{x}} = \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x + 2} - \frac{1}{3}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 2x}{9x + 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6}{x} - 2}{9 + \frac{6}{x}} = \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$15.2. f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{30}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x+3} = \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 3$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, por se tratar de uma função irracional com este domínio.

Assíntotas horizontais

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

15.3. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x+2} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0

Logo, a reta de equação $x = -1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, por se tratar de uma função irracional com este domínio.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 3x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = x - 3$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$15.4. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge \sqrt{x}-3 \neq 0\} = [0, 9[\cup]9, +\infty[$$

Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 9$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $[0, 9[\cup]9, +\infty[$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-3}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x}-3)} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

$$15.5. f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Assíntotas verticais

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x+1}{x^2-x} = \\ &= \frac{1}{0^-} = \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x-1|}{x^2-x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^3-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{|x-1|}{x^2-x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^3-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x^2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = \\ &= \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

15.6. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \geq 0 \wedge x^2-4 \neq 0\} =]2, +\infty[$$

Assíntotas verticais

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \frac{1}{0^+} = \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $]2, +\infty[$ por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
\bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x(x^2-4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \frac{1}{+\infty} = \\
&= 0 \\
\bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

16.

16.1. a) Por exemplo $[0, 2]$, uma vez que $f(2) - f(0) = 2 - 0 = 2$.

b) Por exemplo $[3, 4]$, uma vez que

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{0 - 2}{1} = -2.$$

c) Por exemplo $[-2, 2]$, uma vez que

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{2 - 2}{4} = 0.$$

d) Por exemplo $[0, 2]$, uma vez que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1.$$

16.2. a) $f(6) - f(-2) = 3 - 2 = 1$

b) t.m.v. $_{[2, 4]} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 2}{2} = -1$

t.m.v. $_{[0, 6]} = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{1}{2}$

17.

17.1. Como $f'(1) = 2$, então uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1 é da forma $y = 2x + b$.

O ponto de coordenadas $(1, 1)$ pertence a esta reta, logo:

$$1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Assim, a equação pedida é $y = 2x - 1$.

17.2. O declive da reta t é 3. Logo, o declive de uma reta perpendicular a t é $-\frac{1}{3}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = -\frac{1}{3}x + b$.

O ponto de interseção do gráfico de t com o gráfico de f é o ponto de tangência cuja abscissa é 2.

A ordenada deste ponto é $y = 3 \times 2 - 1 = 5$.

Assim, o ponto de coordenadas $(2, 5)$ pertence à reta pretendida, logo:

$$5 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$$

A equação pedida é $y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$.

17.3. a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x - 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + f(1)] =$
 $= f'(1) \times 2f(1) = 2 \times 2 \times 1 = 4$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \\ &= \frac{1}{f'(2)} \times (2 + 2) = \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} 18.1. f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.2. f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1 - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 2x + 3)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 3) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.3. f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x-3} - (-3)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1+3(x-3)}{x-3}}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{4x-8}{x-3}}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x-3} = \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.4. f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{3}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x - 3}{(x + 1)(\sqrt{2-x} + \sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - 1}{(x + 1)(\sqrt{2-x} + \sqrt{3})} = \end{aligned}$$

19.

$$19.1. f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2$$

$$\begin{aligned} 19.2. f'(x) &= \left[\frac{1}{2} (x^4 - 2x^3 + 6x) \right]' = \\ &= \frac{1}{2} (4x^3 - 6x^2 + 6) = \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.3. f'(x) &= \left(\frac{x^3 - 3x + 9}{3} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (3x^2 - 3) = \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.4. f'(x) &= [(x^2 + 3x)^2]' = \\ &= 2(x^2 + 3x)(x^2 + 3x)' = \\ &= 2(x^2 + 3x)(2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.5. f'(x) &= [(-2x^3 + x + 1)^4]' = \\ &= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-2x^3 + x + 1)' = \\ &= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-6x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.6. f'(x) &= [(x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)]' = \\ &= (x^2 + 2x)'(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)' = \\ &= (2x + 2)(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(4x^3 - 3x^2) = \\ &= 2x^5 - 2x^3 + 4x + 4 + 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = \\ &= 6x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.7. f'(x) &= [(x + 3)^3(2x - 5)]' = \\ &= [(x + 3)^3]'(2x - 5) + (x + 3)^3(2x - 5)' = \\ &= 3(x + 3)^2(2x - 5) + (x + 3)^3 \times 2 = \\ &= (x + 3)^2[3(2x - 5) + 2(x + 3)] = \\ &= (x + 3)^2(6x - 15 + 2x + 6) = \\ &= (x + 3)^2(8x - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.8. f'(x) &= [(x^2 - 5x + 6)^2(x - 3)^3]' = \\ &= [(x^2 - 5x + 6)^2]'(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2[x - 3]^3' = \\ &= 2(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 6)'(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2 3(x - 3)^2 = \\ &= 2(x^2 - 5x + 6)(2x - 5)(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2 3(x - 3)^2 = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 [2(x - 3)(2x - 5) + \\ &\quad + 3(x^2 - 5x + 6)] = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 (4x^2 - 22x + 30 + \\ &\quad + 3x^2 - 15x + 18) = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 (7x^2 - 37x + 48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.9. f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x+3} \right)' = \\
 &= \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \\
 &= \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \\
 &= \frac{4}{(x+3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.10. f'(x) &= \left[\frac{x^2-3x+4}{(x-1)^2} \right]' = \\
 &= \frac{(x^2-3x+4)'(x-1)^2 - (x^2-3x+4)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} = \\
 &= \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x+4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1)[(2x-3)(x-1) - 2(x^2-3x+4)]}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2x^2-5x+3-2x^2+5x-8}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{x-5}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.11. f'(x) &= \left[\frac{(x+1)^3}{x^3-1} \right]' = \\
 &= \frac{[(x+1)^3]'(x^3-1) - (x+1)^3(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(x^3-1) - (x+1)^3 3x^2}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2[x^3-1 - (x+1)x^2]}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(x^3-1-x^3-x^2)}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(-1-x^2)}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{-3(x+1)^2(x^2+1)}{(x^3-1)^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.12. f'(x) &= \left[\left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^2 \right]' = \\
 &= 2 \left(\frac{x+2}{2x-1} \right) \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)' = \\
 &= 2 \left(\frac{x+2}{2x-1} \right) \frac{(x+2)'(2x-1) - (x+2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \\
 &= 2 \left(\frac{x+2}{2x-1} \right) \frac{2x-1-2(x+2)}{(2x-1)^2} = \\
 &= \frac{2(x+2)(2x-1-2x-4)}{(2x-1)^3} = \\
 &= \frac{-10(x+2)}{(2x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.13. f'(x) &= (\sqrt{x+1})' = \\
 &= \left[(x+1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.14. f'(x) &= [2\sqrt{(x+2)^2-1}]' = \\
 &= 2 \left[((x+2)^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} ((x+2)^2-1)^{-\frac{1}{2}} ((x+2)^2-1)' = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}} \times 2(x+2) = \\
 &= \frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.15. f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} \right)' = \\
 &= \left[\left(\frac{3x+2}{2x-3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3x+2}{2x-3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3x+2}{2x-3} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{(3x+2)'(2x-3) - (3x+2)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{3(2x-3) - 2(3x+2)}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{6x-9-6x-4}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{-13}{2(2x-3)^2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.16. f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x+4}}{2x+5} \right)' = \\
 &= \frac{\left[(x+4)^{\frac{1}{2}} \right]' (2x+5) - \sqrt{x+4} (2x+5)'}{(2x+5)^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} (2x+5) - 2\sqrt{x+4}}{(2x+5)^2} = \\
 &= \frac{\frac{2x+5}{2\sqrt{x+4}} - 2\sqrt{x+4}}{(2x+5)^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2x+5-4(x+4)}{2\sqrt{x+4}(2x+5)^2} =$$

$$= \frac{-2x-11}{2\sqrt{x+4}(2x+5)^2}$$

$$19.17. f'(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)' =$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' + \left((2x)^{-\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} (2x)^{-\frac{3}{2}} \times 2 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x)^3}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}$$

$$19.18. f'(x) = (\sqrt{x+1} (2x-1)^2)' =$$

$$= \left((x+1)^{\frac{1}{2}} \right)' (2x-1)^2 + \sqrt{x+1} ((2x-1)^2)' =$$

$$= \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} (2x-1)^2 + \sqrt{x+1} \times 2(2x-1) \times$$

$$\times 2 =$$

$$= \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x+1}} + 4(2x-1) \sqrt{x+1} =$$

$$= \frac{(2x-1)^2 + 8(2x+1)(x+1)}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{(2x-1)[(2x-1) + 8(x+1)]}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{(2x-1)(10x+7)}{2\sqrt{x+1}}$$

20.

$$20.1. a) (f \circ g)(1) = (f(g(1))) = f(4) = 24$$

$$b) (g \circ f)(1) = (g(f(1))) = g(3) = 10$$

$$c) (f \circ g)'(1) = (f'(g(1))) \times g'(1) =$$

$$= f'(4) \times g'(1) =$$

$$= 10 \times 3 =$$

$$= 30$$

Cálculos auxiliares

$$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2$$

$$g'(x) = (3x + 1)' = 3$$

$$d) (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) =$$

$$= g'(3) \times f'(1) =$$

$$= 3 \times 4 =$$

$$= 12$$

$$20.2. a) (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) =$$

$$= f'(3x+1) \times g'(x) =$$

$$= [2(3x+1) + 2] \times 3 =$$

$$= 18x + 12$$

$$b) (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) =$$

$$= g'(x^2 + 2x) \times f'(x) =$$

$$= 3 \times (2x + 2) =$$

$$= 6x + 6$$

21.

$$21.1. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$, então g é contínua em $x = 1$.

$$21.2. g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{x(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} =$$

$$= -1$$

$$g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 + 1) - 2 - 2(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{2(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{2(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como $g'(1^-) \neq g'(1^+)$, então não existe $g'(1)$, ou seja, g não é diferenciável em $x = 1$.

$$21.3. g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

22.

22.1. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$f(1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$f'(x) = (-x^2 + 3x + 1)' = -2x + 3$$

$$f'(1) = -2 + 3 = 1$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = x + b$.

Como (1, 3) é o ponto de tangência:

$$3 = 1 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Logo, a equação pedida é $y = x + 2$.

22.2. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

$$f(1) = \frac{4}{1} = 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{2x-1}\right)' = \frac{2x-1-(x+3) \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-7}{1} = -7$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = -7x + b$.

Como (1, 4) é o ponto de tangência:

$$4 = -7 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 11$$

Logo, a equação pedida é $y = -7x + 11$.

22.3. $f(x) = (2x^3 - 3x)^2$

$$f(1) = (2 - 3)^2 = 1$$

$$f'(x) = ((2x^3 - 3x)^2)' = 2(2x^3 - 3x)(6x^2 - 3)$$

$$f'(1) = 2 \times (-1) \times 3 = -6$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = -6x + b$.

Como (1, 1) é o ponto de tangência:

$$1 = -6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 7$$

Logo, a equação pedida é $y = -6x + 7$.

22.4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

$$f(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 3x})' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$f'(1) = \frac{5}{2\sqrt{1+3}} = \frac{5}{4}$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = \frac{5}{4}x + b$.

Como (1, 2) é o ponto de tangência:

$$2 = \frac{5}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$$

Logo, a equação pedida é $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$.

23. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

23.1. a) $f(-1) = \frac{-2}{-2} = 1$

$$f'(-1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como (-1, 1) é o ponto de tangência:

$$1 = -\frac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

b) $f(0) = 0$

$$f'(0) = -2$$

Assim, a equação pedida é da forma $y = -2x + b$.

Como (0, 0) é o ponto de tangência:

$$0 = -2 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação pedida é $y = -2x$.

23.2. a) $f(-2) = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$$f'(-2) = \frac{-2}{9}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa -2 é da forma

$$y = -\frac{2}{9}x + b.$$

Como $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$ é o ponto de tangência:

$$\frac{4}{3} = -\frac{2}{9} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{8}{9}$$

Logo, a equação referida é $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$.

$$4x + 9y = 1 \Leftrightarrow 9y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$$

Assim, a abscissa do ponto de interseção das duas retas é dada por:

$$-\frac{2}{9}x + \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9} \Leftrightarrow -2x + 8 = -4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

A ordenada do ponto de interseção das duas retas é:

$$y = -\frac{2}{9} \times \left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{8}{9} = \frac{15}{9}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa -2 com a reta de equação

$$4x + 9y = 1 \text{ são } \left(-\frac{7}{2}, \frac{15}{9}\right).$$

b) O declive da reta tangente ao gráfico de f a que se refere o enunciado é $m = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2} \vee x-1 = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Assim, as coordenadas dos pontos de tangência das retas tangentes ao gráfico de f com inclinação 135° são $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

23.3. $f'(3) = \frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2}$

Então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 153,4^\circ$.

24.

24.1. $d(0) = -4,9 \times 0 + 19,6 \times 0 + 7,8 = 7,8$

No instante em que foi lançado, o homem-bala estava a uma altura de 7,8 metros.

24.2. $d(t) = 1,5 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 19,6t + 7,8 = 1,5$
 $\Leftrightarrow -4,9t^2 + 19,6t + 6,3 = 0$
 $\Leftrightarrow t = \frac{-19,6 \pm \sqrt{19,6^2 - 4 \times (-4,9) \times 6,3}}{2 \times (-4,9)}$

Então, $t \approx -0,3$ ou $t \approx 4,3$.

O homem-bala esteve no ar, aproximadamente, 4,3 segundos.

24.3. $d'(t) = -9,8t + 19,6$

$d'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 19,6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	0		2		4,3
Sinal de d'		+	0	-	
Variação de d		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

$d(2) = -4,9 \times 4 + 19,6 \times 2 + 7,8 = 27,4$

A altura máxima atingida pelo homem-bala foi 27,4 metros.

24.4. A velocidade média nos primeiros dois segundos é dada por:

$\frac{d(2) - d(0)}{2 - 0} = \frac{27,4 - 7,8}{2} = 9,8 \text{ m/s}$

24.5. $d'(t) = -9,8t + 19,6$

$d'(0,5) = -9,8 \times 0,5 + 19,6 = 14,7$

No instante em que tinham decorridos 0,5 segundos desde o início do lançamento, a velocidade do homem-bala era 14,7 m/s.

24.6. $d'(3) = -9,8 \times 3 + 19,6 = -9,8$

A velocidade do homem-bala no instante $t = 3$ era de -9,8 m/s.

25.

25.1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	0	-
Variação de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$f(-1) = 2 + 3 - 12 + 6 = -1$

$f(2) = -16 + 12 + 24 + 6 = 26$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-1, 2]$; tem um máximo relativo 26 em $x = 2$ e tem um mínimo relativo -1 em $x = -1$.

25.2. $f(x) = 2(x-1)(x-2)^2$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2[(x-2)^2 + (x-1)2(x-2)] =$

$= 2(x-2)(x-2+2x-2) =$

$= 2(x-2)(3x-4)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(3x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 3x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$

$f(2) = 2 \times 1 \times 0 = 0$

f é estritamente crescente em $]-\infty, \frac{4}{3}]$ e em $[2, +\infty[$

e é estritamente decrescente em $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$; tem um

máximo relativo $\frac{8}{27}$ em $x = \frac{4}{3}$ e tem um mínimo relativo 0 em $x = 2$.

25.3. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1-2x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f'(x) = \frac{2(x-1)(1-2x) - (x-1)^2(-2)}{(1-2x)^2} =$

$$= \frac{2(x-1)(1-2x+x-1)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	n.d.	+	0	-
Variação de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; tem um mínimo relativo 1 em $x = 0$ e tem um máximo relativo 0 em $x = 1$.

25.4. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 - 1) - (x^2 - 1)3x^2}{(x^3 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x-1)(x^2+x+1) - 3x^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(x-1)[2(x^2+x+1) - 3x(x+1)]}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(2x^2+2x+2-3x^2-3x)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(-x^2-x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

Cálculos auxiliares

	1	0	0	-1
-1		1	1	1
	1	1	1	0

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \text{ que é uma equação}$$

impossível em $\mathbb{R}$.

$$\text{Logo, } x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\text{Logo, } -x^2 - x + 2 = -(x+2)(x-1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	0	-	n.d.	-
Variação de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

$$f(-2) = \frac{4-1}{-8-1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$f(0) = 1$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$, em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-2, 0]$; tem um mínimo relativo $-\frac{1}{3}$ em $x = -2$ e tem um máximo relativo 1 em $x = 0$.

25.5. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+3x+2) - (x^2-4x+4)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+2x^2-8x-8-2x^3+5x^2+4x-12}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{7x^2-4x-20}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x^2-4x-20}{(x^2+3x+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^2-4x-20 = 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+560}}{14} \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{10}{7}$$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{10}{7}$		-1		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-	0	-
Variação de f	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(-\frac{10}{7}\right) = \frac{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 4}{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 2} = -48$$

$$f(2) = 0$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$, em $\left]-2, -\frac{10}{7}\right]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{10}{7}, -1\right]$ e em $]-1, 2]$; tem um mínimo relativo 0 em $x = 2$ e tem um máximo relativo -48 em $x = -\frac{10}{7}$.

25.6. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

Logo, f é estritamente crescente em todo o seu domínio e tem um mínimo absoluto 0 em $x = \frac{1}{2}$.

25.7. $f(x) = \left(\frac{x-2}{3-x} \right)^3$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f'(x) = 3 \left(\frac{x-2}{3-x} \right)^2 \frac{3-x+x-2}{(3-x)^2} = \frac{3(x-2)^2}{(3-x)^2}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Logo, f é estritamente crescente em todo o seu domínio e não tem extremos relativos.

25.8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$$D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+2})^2} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+2})^2 \sqrt{x}}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in [0, +\infty[$$

Logo, f é estritamente decrescente em todo o seu domínio e tem um máximo absoluto $\frac{1}{2}$ em $x = 0$.

26.

26.1. A função f é descontínua em $x = 3$.

26.2. A função f é contínua mas não é diferenciável em $x = -2$ e em $x = 6$.

26.3. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [0, 3[\cup]3, 5] \cup]6, +\infty[$

26.4. $f(x) \times f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, 0[\cup]5, 6[$

x	$-\infty$	-3		-2		0		3		5		6	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	0	-	n.d.	0
$f(x) \times f'(x)$	-	0	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	0	-	n.d.	0

27.

27.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{c}{b} \right\}$

Uma vez que o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f , tem-se que:

$$f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 3$$

Como a reta de equação $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , então:

$$-\frac{3}{b} = -3 \Leftrightarrow b = 1$$

Como a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , então:

$$\frac{a}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

27.2. O gráfico da função g pode ser obtido do gráfico de f através de uma translação segundo o vetor $(-1, -2)$. Assim, as assíntotas ao gráfico de g são as retas de equações $x = -3 - 1 \Leftrightarrow x = -4$ e $y = 2 - 2 \Leftrightarrow y = 0$.

27.3. a) $\lim a_n = \lim \frac{3n-2}{1-n} = \lim \left(-3 + \frac{1}{1-n} \right) = -3^-$

Cálculo auxiliar

$$\frac{3n-2}{-3n+3} \frac{-n+1}{-3} = \frac{1}{1}$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty.$$

b) $\lim b_n = \lim \frac{n^2+2}{n-1} = \lim \frac{n + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = +\infty$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

27.4. a) Como a função f é contínua em todo o seu domínio, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$$

b) Uma vez que a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

28. Como a reta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota ao gráfico de f , tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2} \\
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - xf(x)}{2f(x)} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x - f(x))}{f(x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Logo, uma equação da assíntota não vertical ao gráfico de g é $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

29.

29.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas verticais ao gráfico de f , uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x-1}{(x-1)^2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^3-2x^2+x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x-1}{(x-1)^2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^3-2x^2+x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

29.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2(x-1) - (2x-1)2}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2x-2 - (4x-2)}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{-2x}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^3} = 8$$

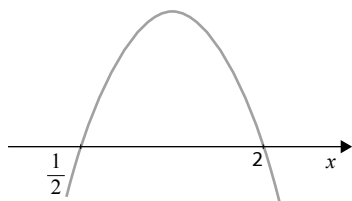
Então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de interseção deste com o eixo das abscissas é $\text{tg}^{-1}(8) \approx 82,9^\circ$.

$$\begin{aligned}
 29.3. \quad f(x) &\geq 2 + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} \geq 2 + \frac{1}{x-1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 2 - \frac{1}{x-1} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1-2(x-1)^2-(x-1)}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1-2x^2+4x-2-x+1}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$



$(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, logo:

$$\frac{-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, 2]$$

29.4. a) $A(x, f(x)) \quad B(x, 0) \quad C(1, 0) \quad D(1, 1)$

Logo:

$$\begin{aligned}
 A_{[ABCD]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{BC}}{2} = \\
 &= \frac{(f(x) + 1) \times (x-1)}{2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2} + 1\right) \times (x-1)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x-1} + x-1\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1+x^2-2x+1}{x-1}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{2x-2} = g(x)
 \end{aligned}$$

b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{2x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Não há outras assíntotas verticais ao gráfico de g , uma vez que g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x^2+x}{2x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x^2+x}{2x-2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}
\text{c) } g(x) = 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-2} = 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-2} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{2x-2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \wedge 2x-2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \wedge x \neq 1 \\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$$g(2) = \frac{2^2}{2 \times 2 - 2} = 2$$

Logo, $A(2, 2)$.

30.

30.1. Uma vez que existe derivada finita da função f em $x = -1$ e, como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, então f é contínua em $x = -1$.

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 2.$$

30.2. Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa -1 é da forma $y = x + b$.

O ponto de tangência tem coordenadas $(-1, 2)$, logo: $2 = -1 + b \Leftrightarrow b = 3$

Assim, a equação pedida é $y = x + 3$.

31.

$$\text{31.1. } D_f = \mathbb{R}^+$$

Assíntotas verticais

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\sqrt{x}}{x(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ não é uma assíntota ao gráfico de f .

Não há outras assíntotas ao gráfico de f , uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
\bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} \right)' = \\
&= \frac{2\sqrt{x}(x+1) - 2x \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + \sqrt{x} \right]}{[\sqrt{x}(x+1)]^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{x}(x+1) - x \left(\frac{x+1+2x}{\sqrt{x}} \right)}{x(x+1)^2} = \\
&= \frac{2x(x+1) - x(3x+1)}{x\sqrt{x}(x+1)^2} = \\
&= \frac{2x+2-3x-1}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \\
&= \frac{-x+1}{\sqrt{x}(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{\sqrt{x}(x+1)^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -x+1 = 0 \wedge \sqrt{x}(x+1)^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	+	0	-
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(1) = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

A função f é estritamente crescente em $]0, 1]$ e é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$ e tem um máximo 1 em $x = 1$.

$$\begin{aligned}
 31.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - 1^2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 1)(f(x) + 1)}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 1) = \\
 &= f'(1) \times (1 + 1) = \\
 &= 0 \times 2 = 0
 \end{aligned}$$

32.

$$32.1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

$$\bullet f(0) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, então f é contínua em $x = 0$.

32.2. Uma vez que f é contínua em $x = 0$, então a reta de equação $x = 0$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Não há outras assíntotas verticais, já que f é contínua no restante domínio.

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 1$$

As retas de equações $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de f .

32.3. Se $x > 0$, então:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = \\
 &= - \frac{1}{2\sqrt{x+1}^2} = \\
 &= - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$f'(1) = - \frac{1}{4\sqrt{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = 1$ é da forma $y = - \frac{\sqrt{2}}{8} x + b$.

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como o ponto de tangência tem coordenadas $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, vem que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = - \frac{\sqrt{2}}{8} + b \Leftrightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

Logo, a equação pedida é $y = - \frac{\sqrt{2}}{8} x + \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

$$32.4. \bullet f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{x\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = - \frac{1}{2}$$

$$\bullet f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 - 2}{x(x^2 + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x^2 + 2} = -1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, então a função f não é diferenciável em $x = 0$.

32.5. Se $x > 0$, então:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$$

Assim, $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$, logo f é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

Se $x < 0$, então:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} \right)' =$$

$$= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2) - (x^2 - 2x + 2)2x}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4}{(x^2 + 2)^2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0
Sinal de f'	+	0	-	
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2 - 2(-\sqrt{2}) + 2}{(-\sqrt{2})^2 + 2} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2}{2 + 2} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Assim, f é estritamente crescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e é estritamente decrescente em $]-\sqrt{2}, 0]$. A função f tem um máximo $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ para $x = -\sqrt{2}$.

33.

33.1. $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = 1$ é da forma $y = \frac{1}{8}x + b$.

$$f(1) = 0$$

Como o ponto de tangência tem coordenadas $(1, 0)$, vem que:

$$0 = \frac{1}{8} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}$$

Logo, a equação pedida é $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$.

33.2. $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$

Uma vez que existe derivada finita da função f em $x = 1$ e, como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, então f é contínua em $x = 1$.

33.3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^3} = 0$, que é uma equação impossível.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f'	-	n.d.	+
Variação de f	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e é estritamente crescente em $]-1, +\infty[$. A função f não tem extremos relativos.

34. A afirmação (I) é falsa, uma vez que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$, ou seja, a reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico da função f quando x tende para $+\infty$, e não pode haver simultaneamente duas assíntotas quando x tende para $+\infty$. Nada se pode concluir quanto ao valor lógico da afirmação (II). Apenas se sabe que $\frac{f(4) - f(2)}{2} = 3$,

ou seja, a taxa média de variação da função f no intervalo $[2, 4]$ é positiva, mas isso nada garante quanto à monotonia da função nesse intervalo. A afirmação (III) é verdadeira, já que f é uma função par e a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f , logo a reta de equação $x = -1$ também é uma assíntota ao gráfico de f .

Tema V - Estatística

Páginas 62 a 65

1.

1.1. $\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6}{3} = 4$

$$\bar{y} = \frac{3 + 5 + 4}{3} = 4$$

1.2. $b = \bar{y} - a\bar{x} = 4 - 4a$

Logo:

$$f(a) = \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - b)^2 =$$

$$= (3 - 2a - 4 + 4a)^2 + (5 - 4a - 4 + 4a)^2 +$$

$$+ (4 - 6a - 4 + 4a)^2 =$$

$$= (-1 + 2a)^2 + 1^2 + (-2a)^2 =$$

$$= 1 - 4a + 4a^2 + 1 + 4a^2 =$$

$$= 8a^2 - 4a + 2$$

13. $f'(a) = (8a^2 - 4a + 2)' = 16a - 4$

14. $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 16a - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

a	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$
Varição de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

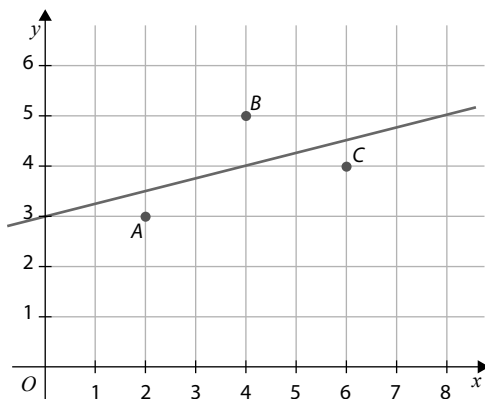
Logo, f tem um mínimo absoluto em $m = \frac{1}{4}$.

15.
$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 3\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 4 - 3 \times 4 \times 4}{2^2 + 4^2 + 6^2 - 3 \times 4^2} =$$

$$= \frac{6 + 20 + 24 - 48}{4 + 16 + 36 - 48} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = m$$

16. $a = \frac{1}{4}$ e $b = 4 - 4 \times \frac{1}{4} = 3$, logo $y = \frac{1}{4}x + 3$ é a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados desta sequência de pontos.



2.

2.1. Gráfico 1: Associação linear positiva forte.

Gráfico 2: Associação linear nula.

Gráfico 3: Associação linear negativa forte.

Gráfico 4: Associação linear positiva fraca.

2.2. Gráfico 1: $r_2 = 1$

Gráfico 2: $r_4 = 0,8$

Gráfico 3: $r_1 = -1$

Gráfico 4: $r_7 = 0$

Gráfico 5: $r_3 = -0,8$

Gráfico 6: $r_6 = 0,3$

Gráfico 7: $r_5 = -0,3$

3. $y = 3,2x + 1,3$

Substituindo x por $\bar{x}$ e y por $\bar{y}$, obtém-se:

$4,1 = 3,2 \times 3,4 + 1,3 \Leftrightarrow 4,1 = 12,18$, que é uma proposição falsa.

Logo, como o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ não pertence à reta de equação $y = 3,2x + 1,3$, esta não pode ser a reta dos mínimos quadrados que melhor se ajusta a esta amostra.

4. $y = -1,2x + 4,2$

Então:

$$\bar{y} = -1,2\bar{x} + 4,2 \Leftrightarrow 3,6 = -1,2\bar{x} + 4,2$$

$$\Leftrightarrow 1,2\bar{x} = 0,6$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 0,5$$

5.

5.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{29}{5} = 5,8$$

5.2.
$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 5\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{144 - 5 \times 4,2 \times 5,8}{115 - 5 \times 4,2^2} \approx 0,8284 \approx 0,83$$

5.3. $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 5,8 - 0,8284 \times 4,2 \approx 2,32$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 0,83x + 2,32$.

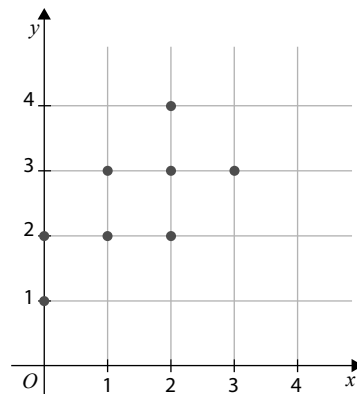
5.4.
$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \approx 0,8284 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 5\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i)^2 - 5\bar{y}^2}} =$$

$$= 0,8284 \sqrt{\frac{115 - 5 \times 4,2^2}{195 - 5 \times 5,8^2}} \approx 0,83$$

6. Seja x a variável "número de filhos" e seja y a variável "número de quartos".

6.1. $\bar{x} = 1,4$ $\bar{y} = 2,5$

6.2. A nuvem de pontos parece indicar uma associação linear positiva entre as variáveis.



6.3. $y = 0,60x + 1,67$

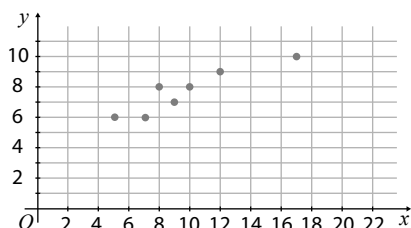
6.4. $r \approx 0,68$

7. Seja x a variável "número de champôs" e seja y a variável "número de condicionadores".

7.1. $\bar{x} = \frac{10 + 7 + 5 + 9 + 12 + 17 + 8}{7} \approx 9,71$

$\bar{y} = \frac{8 + 6 + 6 + 7 + 9 + 10 + 8}{7} \approx 7,71$

7.2. A nuvem de pontos parece indicar uma associação linear positiva entre as variáveis.



7.3. $r = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} =$
 $= \frac{32,429}{\sqrt{91,429 \times 13,429}} =$
 $\approx 0,925 \approx 0,93$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
10	8	0,29	0,286	0,286
7	6	-2,71	-2,714	-1,714
5	6	-4,71	-4,714	-1,714
9	7	-0,71	-0,714	-0,714
12	9	2,29	2,286	1,286
17	10	7,29	7,286	2,286
8	8	-1,71	-1,714	2,286
				$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 32,429$

$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0,082	0,082
4,653	7,367
8,082	22,224
0,510	0,510
2,939	5,224
16,653	53,082
-0,490	2,939
$SS_x = 91,429$	$SS_y = 13,429$

7.4. $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow a = r \sqrt{\frac{SS_y}{SS_x}}$

Logo, $a \approx 0,925 \sqrt{\frac{13,429}{91,429}} \approx 0,3545 \approx 0,35$.

$y = 0,35x + b$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (9,714; 7,714)$ pertence à reta, logo:

$7,714 = 0,355 \times 9,714 + b \Leftrightarrow b = 4,26553$

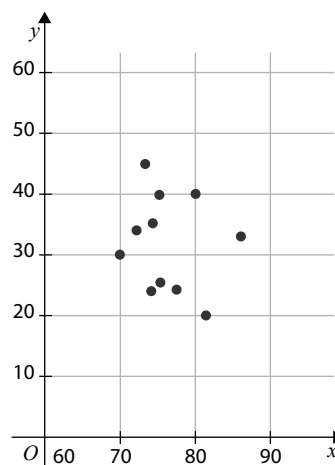
Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 0,35x + 4,27$.

8.

8.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{916}{12} \approx 76,33 \text{ kg}$

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{12} = \frac{382}{12} \approx 31,83 \text{ km}$

8.2. A nuvem de pontos parece indicar que existe associação linear negativa fraca.



8.3. $a = \frac{\sum_{i=1}^{12} xy_i - 12\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} xy_i - 12\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 12\bar{x}^2} =$
 $= \frac{29\,108 - 12 \times \frac{916}{12} \times \frac{382}{12}}{70\,142 - 12 \times \left(\frac{916}{12}\right)^2} \approx -0,2326 \approx -0,23$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 31,8333 - (-0,2326) \times 76,3333 \approx 49,59$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = -0,23x + 49,59$.

$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \approx -0,2326 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i)^2 - 12\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{12} (y_i)^2 - 12\bar{y}^2}}$
 $\approx -0,2326 \sqrt{\frac{70\,142 - 12 \times 76,333^2}{12\,796 - 12 \times 31,833^2}} \approx -0,14$

9.

9.1. $\bar{x} \approx 79,04$

$\bar{y} \approx 83,84$

9.2. $y = 0,61x + 35,25$

$r \approx 0,69$

9.3. $y = 0,61 \times 77,6 + 35,25$

Logo, $\approx 82,6$ anos.

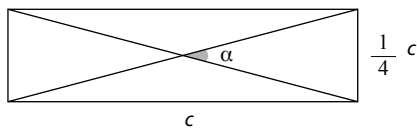
Testes de Avaliação

Teste n.º 1

Páginas 69 a 71

Grupo I

1.



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}c}{\frac{c}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}c}{c}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Logo, $\frac{\alpha}{2} \in]0^\circ, 90^\circ[$ e $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$, ou seja,

$\frac{\alpha}{2} \approx 14,04^\circ$ e, portanto, $\alpha \approx 28^\circ$.

A opção correta é a (B).

2. $A = (2 \cos 225^\circ, 2 \sin 225^\circ) =$

$$= \left(2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

A opção correta é a (D).

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - \cos x \neq 0\}$

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{Equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\text{Ora, } \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[, \frac{5\pi}{4} \in \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right[\text{ e } \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

A opção correta é a (D).

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{x+2}{x^2-3} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \vee \frac{x+2}{x^2-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee (x+2=0 \wedge x^2-3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

A opção correta é a (B).

5. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 136 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

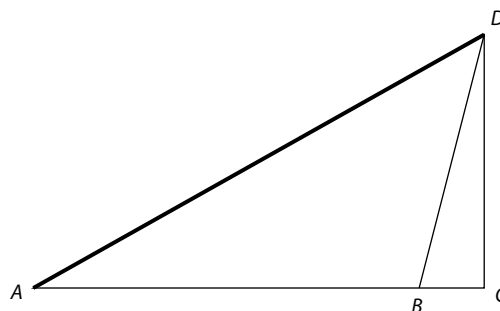
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 196$$

Logo, $\overline{AC} = 14$ cm.

A opção correta é a (B).

Grupo II

1.



$$\widehat{DBA} = 180^\circ - 21^\circ = 159^\circ$$

$$\widehat{BDA} = 180^\circ - 159^\circ - 4^\circ = 17^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 4^\circ}{BD} = \frac{\sin 17^\circ}{20} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{20 \sin 4^\circ}{\sin 17^\circ}$$

Novamente pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 21^\circ}{CD} = \frac{\sin 90^\circ}{BD} \Leftrightarrow \overline{CD} = \sin 21^\circ \times \frac{20 \sin 4^\circ}{\sin 17^\circ}$$

Ou seja, $\overline{CD} \approx 1,710$ km = 1710 m.

2.

2.1. $T(6) = 6,9 \sin \frac{\pi(6-4,8)}{6} + 15,2 \approx 19,3^\circ\text{C}$

2.2. $-1 \leq \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} \leq 1$

$$\Leftrightarrow -6,9 \leq 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} \leq 6,9$$

$$\Leftrightarrow 8,3 \leq 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} + 15,2 \leq 21,9$$

Assim, a temperatura média varia entre os $8,3^\circ\text{C}$ e os $21,9^\circ\text{C}$.

2.3. $T(n) > 18,65 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} + 15,2 > 18,65$

$$\Leftrightarrow 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > 3,45$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \frac{\pi}{6} \wedge \frac{\pi(n-4,8)}{6} < \frac{5\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow n-4,8 > 1 \wedge n-4,8 < 5 \\
&\Leftrightarrow n > 5,8 \wedge n < 9,8
\end{aligned}$$

A temperatura média é superior a 18,65 °C nos meses de junho, julho, agosto e setembro.

3.

$$\begin{aligned}
3.1. f(x) &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2} = \\
&= \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos x + 1)(\cos x + 2)} = \\
&= \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(2 + \cos x)} = \\
&= \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.2. f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos x = 2 + \cos x \\
&\Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \\
&\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $x \in]-\pi, \pi[$, então $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$3.3. f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = f(x), \forall x \in]-\pi, \pi[$$

Logo, f é uma função par.

$$\begin{aligned}
3.4. f\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{1 - \cos\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2 + \cos\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \\
&= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \\
&= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \times \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \\
&= \frac{8 - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3}{16 - 3} = \\
&= \frac{11 - 6\sqrt{3}}{13}
\end{aligned}$$

4.

$$4.1. A(\alpha) = A_{[AOB]} + A_{[OCA]}$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times h}{2} = \frac{1 \times \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$A_{[OCA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{1 \times (-\operatorname{tg} \alpha)}{2} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Como α é um ângulo obtuso, então $\operatorname{tg} \alpha < 0$, pelo que $\overline{AC} = -\operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Logo, } A(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2} + \left(-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

$$4.2. \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

Da Fórmula Fundamental da Trigonometria, vem que:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ então } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right)}{2} = \\
&= \frac{15 + 4\sqrt{15}}{120}
\end{aligned}$$

Teste n.º 2

Páginas 74 a 76

Grupo I

1. Num intervalo de 35 minutos, a ponta do ponteiro dos minutos percorre $\frac{7}{12}$ do total percorrido numa hora.

Ora, o total percorrido numa hora é $2 \times \pi \times 12 = 24\pi$.

Assim, em 35 minutos, a distância percorrida é

$$\frac{7}{12} \times 24\pi = 14\pi.$$

A opção correta é a (B).

2. $\overline{AO} = \overline{OC} = 1$

$$\overline{OD} = \cos \alpha, \text{ logo } \overline{BD} = 1 + \cos \alpha.$$

$$\overline{AD} = \sin \alpha$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2 \cos \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 + 2 \cos \alpha$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Assim, } P_{[ABCO]} = 2 + 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}.$$

Tem-se então:

$$2 + 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \cos \alpha = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

A opção correta é a (A).

3. Seja m o declive da reta r .

$$m = \operatorname{tg} 150^\circ \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, então são vetores diretores da reta r , por exemplo, $(-3, \sqrt{3})$ ou $(-\sqrt{3}, 1)$.

Das equações apresentadas, apenas uma apresenta um destes vetores, não havendo qualquer equação com outro vetor diretor colinear com estes.

A opção correta é a (C).

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 0, a) \cdot (a, 0, -a) = 0 + 0 - a^2 = -a^2 < 0$,
 $\forall a \in \mathbb{R}$.

Logo, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

A opção correta é a (D).

5. $\vec{r}(m, 2, m)$ é um vetor diretor da reta r .

$\vec{a}(1, -1, 1)$ é um vetor ortogonal ao plano α .

Para que a reta r seja perpendicular ao plano α estes dois vetores têm que ser colineares.

$$\text{Assim, } \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{m}{1}, \text{ pelo que } m = -2.$$

A opção correta é a (A).

Grupo II

1.

- 1.1. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BD}^2 = 16^2 + 30^2 - 2 \times 16 \times 30 \times \cos 72^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 1156 + 960 \cos 72^\circ$$

$$\text{Logo, } \overline{BD} \approx 38 \text{ u.c.}$$

1.2. $\sin 72^\circ = \frac{h}{16} \Leftrightarrow h = 16 \sin 72^\circ$

$$\text{Então, } A_{[ABCD]} = \frac{30 + 15}{2} \times 16 \sin 72^\circ \approx 342,4 \text{ u.a.}$$

2.

$$\begin{aligned} 2.1. f(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}} = \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\sin x + 1} = \\ &= \cos x \end{aligned}$$

2.2. $\cos \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

Assim:

$$\left(-\frac{3}{5} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ e } \sin \alpha < 0, \text{ então } \cos \alpha > 0,$$

$$\text{logo } \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ou seja, } f(\alpha) = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}
2.3. f(x) = 1 + \sin^2 x &\Leftrightarrow \cos x = 1 + \sin^2 x \\
&\Leftrightarrow \cos x = 1 + 1 - \cos^2 x \\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\cos x = -2}_{\text{Equação impossível}} \vee \cos x = 1 \\
&\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $x = 0$.

3.

3.1. C é o ponto de interseção das retas AC e BC .

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \\ -2x + 3y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2x + 3\left(-\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}\right) = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2x - \frac{3}{4}x + \frac{33}{4} = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -8x - 3x + 33 = -44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -11x = -77 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \times 7 + \frac{11}{4} \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Logo, $C(7, 1)$.

$$3.2. BC: $-2x + 3y = -11 \Leftrightarrow 3y = 2x - 11 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$$$

O declive da reta BC é $\frac{2}{3}$. Logo, o declive de uma reta perpendicular à reta BC é $-\frac{3}{2}$ e um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta BC é, por exemplo, $(-2, 3)$.

Assim, $r: (x, y) = (-1, 3) + k(-2, 3), k \in \mathbb{R}$.

3.3. Uma vez que o declive da reta AC é $-\frac{1}{4}$, um vetor diretor desta reta é, por exemplo, $\vec{u}(-4, 1)$.

Uma vez que o declive da reta BC é $\frac{2}{3}$, um vetor diretor desta reta é, por exemplo, $\vec{v}(3, 2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4, 1) \cdot (3, 2) = -12 + 2 = -10$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Então, sendo α a amplitude do ângulo das retas AC e BC , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{|-10|}{\sqrt{17} \times \sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{221}}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right) \approx 47,7^\circ.$$

3.4. Como $A(-1, 3)$ e B é o simétrico de A relativamente à origem do referencial, então $B(1, -3)$.

Assim, o declive da reta AB é dado por:

$$\frac{3 - (-3)}{-1 - 1} = -3$$

Sendo α a inclinação da reta AB , $\alpha \in]0^\circ, 180^\circ[\wedge \text{tg } \alpha = -3$, logo $\alpha \approx 108,4^\circ$.

3.5. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ é a circunferência de diâmetro $[AB]$.

$$\begin{aligned}
\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 &\Leftrightarrow (x+1, y-3) \cdot (x-1, y+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10
\end{aligned}$$

4.

4.1. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 3, 1)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(2, 1, -1)$.

Como $\frac{2}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares. Logo, as retas r e s não são paralelas.

Como, além disso, o ponto de coordenadas $(1, -1, 2)$ pertence a ambas as retas, então as retas r e s são concorrentes e, por isso, definem um plano.

4.2. Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo normal ao plano definido pelas retas r e s .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 2a + b = 0 \\ c = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4b \\ c = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -2b + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

Logo, $\vec{u}(-b, b, -b), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, $\vec{u}(1, -1, 1)$.

Os vetores diretores do plano π são $(0, 1, 1)$ e $(2, 1, -1)$

Como $(1, -1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$ e

$(1, -1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$, então o plano definido pelas retas r e s é paralelo ao plano π .

Teste n.º 3

Páginas 79 a 81

Grupo I

1. Se $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, então:

$$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2-k}{3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 2-k \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq k \geq -1$$

$$\text{Logo, } k \in \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

A opção correta é a (A).

2. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 4 - 9 = -5$, logo a afirmação (A) é verdadeira.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9 = 11, \text{ logo a afirmação (B) é verdadeira.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2 = 8 + 5 + 18 = 31, \text{ logo a afirmação (C) é falsa.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= 8 - 6 = 2, \text{ logo a afirmação (D) é verdadeira.} \end{aligned}$$

A opção correta é a (C).

3. Um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $(1, 1, -1)$.

Na opção (A), um vetor normal ao plano dado é $(3, 2, -5)$. Então, $(1, 1, -1) \cdot (3, 2, -5) = 3 + 2 + 5 = 10$, pelo que este plano não é perpendicular a α .

Na opção (B), um vetor normal ao plano dado é $(4, -1, 3)$. Então, $(1, 1, -1) \cdot (4, -1, 3) = 4 - 1 - 3 = 0$, pelo que este plano é perpendicular a α . No entanto, $4 \times 2 + 1 \times 3 \times 3 + 1 = 19$, pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a α mas não contém o ponto A.

Na opção (C), um vetor normal ao plano dado é $(5, -2, 3)$. Então, $(1, 1, -1) \cdot (5, -2, 3) = 5 - 2 - 3 = 0$, pelo que este plano é perpendicular a α . No entanto, $5 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 \times 3 + 7 = 28$, pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a α mas não contém o ponto A.

Na opção (D), um vetor normal ao plano dado é $(2, -1, 1)$. Então, $(1, 1, -1) \cdot (2, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0$, pelo que este plano é perpendicular a α e $2 \times 2 - (-1) + 3 - 8 = 0$, pelo que o ponto A pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a α e contém o ponto A.

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 4. u_{n+1} - u_n &= -\frac{2n+1}{3n+4} + \frac{2n-1}{3n+1} = \\ &= \frac{-6n^2 - 3n - 2n - 1 + 6n^2 - 3n + 8n - 4}{(3n+4)(3n+1)} = \\ &= \frac{-5}{(3n+4)(3n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é decrescente.

$$u_n = -\frac{2n-1}{3n+1} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+1}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\frac{5}{3}}{3n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$-\frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+1} > -\frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como (u_n) é decrescente, então $u_n \leq u_1 = -\frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $-\frac{2}{3} < u_n \leq -\frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

$$\lim u_n = \lim \left(-\frac{2n-1}{3n+1} \right) = \lim \left(-\frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \right) = -\frac{2}{3},$$

logo a sucessão (u_n) é convergente para $-\frac{2}{3}$.

A opção correta é a (D).

5. Como as medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo estão em progressão aritmética e a menor delas é 24° , então:

$$\begin{aligned} 24 + (24 + x) + (24 + 2x) &= 180 \Leftrightarrow 72 + 3x = 180 \\ &\Leftrightarrow 3x = 108 \\ &\Leftrightarrow x = 36 \end{aligned}$$

Logo, a amplitude do ângulo maior é:

$$24^\circ + 2 \times 36^\circ = 96^\circ$$

A opção correta é a (C).

Grupo II

1. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 3,6^2 + 4,1^2 - 2 \times 3,6 \times 4,1 \times \cos 48^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 29,77 - 29,52 \cos 48^\circ$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \sqrt{29,77 - 29,52 \cos 48^\circ} \approx 3,165.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 39^\circ}{3,165} = \frac{\sin (\hat{CAB})}{4,1} \Leftrightarrow \sin (\hat{CAB}) = \frac{4,1 \sin 39^\circ}{3,165}$$

$$\text{Logo, } \hat{CAB} \approx 54,6^\circ.$$

2.

2.1. $m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

Assim, AC: $y = -\sqrt{3}x + b$.

Como o ponto A pertence à reta AC, então:

$$3 = -\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 3 + \sqrt{3}$$

Logo, AC: $y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$ e $C(0, 3 + \sqrt{3})$.

2.2. Seja $T(x, y)$ um ponto da reta tangente no ponto B à circunferência de centro A e que passa em B.

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{BT} &= 0 \Leftrightarrow (-3, -2) \cdot (x + 2, y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - 6 - 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y = -3x - 4 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 2, \text{ que é a equação pe-} \\ &\text{dida.}\end{aligned}$$

3. $\vec{BP} \cdot \vec{CQ} = (\vec{BA} + \vec{AP}) \cdot (\vec{CA} + \vec{AQ}) =$
 $= \vec{BA} \cdot \vec{CA} + \vec{BA} \cdot \vec{AQ} + \vec{AP} \cdot \vec{CA} + \vec{AP} \cdot \vec{AQ} =$
 $= 0 + \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \cos 180^\circ + \|\vec{AB}\| \times$
 $\times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \cos 180^\circ + 0 =$
 $= -\frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 =$
 $= -\|\vec{AB}\|^2$

4.

4.1. B é o ponto de interseção da reta BC com o plano xOy :

$$(x, y, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

C é o ponto de interseção da reta BC com o plano yOz :

$$(0, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo, $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

O ponto A pertence ao eixo Oy , logo é da forma $(0, y, 0)$. Como $[OAC]$ é um triângulo equilátero, a ordenada de C é metade da ordenada de A, logo $A(0, \sqrt{3}, 0)$.

4.2. O vetor $\vec{v}(-1, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta BC e pertence ao plano OBC.

O ponto $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ pertence à reta BC, logo

o vetor $\vec{OP}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ pertence ao plano OBC.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo normal ao plano OBC.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{OP} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ -c + \sqrt{3}b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ \sqrt{3}b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -\sqrt{3}c \end{cases}\end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}(c, -\sqrt{3}c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Consideremos, por exemplo, $\vec{u}(1, -\sqrt{3}, 1)$.

Então, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano OBC é:

$$\begin{aligned}1(x - 0) - \sqrt{3}(y - \sqrt{3}) + 1(z - 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + 3 + z &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + z + 3 &= 0\end{aligned}$$

5.

5.1. $u_n = -2 \Leftrightarrow -\frac{3n-1}{n+2} = -2$
 $\Leftrightarrow \frac{3n-1}{n+2} = 2$
 $\Leftrightarrow 3n-1 = 2n+4$
 $\Leftrightarrow n = 5$

Logo, -2 é o termo de ordem 5 da sucessão (u_n) .

5.2. $u_n = -\frac{3n-1}{n+2} = -3 + \frac{7}{n+2}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, logo:

$$\begin{aligned}0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 0 < \frac{7}{n+2} \leq \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow -3 < -3 + \frac{7}{n+2} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Ou seja, $-3 < u_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, o que significa que a sucessão (u_n) é limitada.

5.3. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{7}{n+2} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \delta \\ &\Leftrightarrow 7 < (n+2)\delta \quad (\text{porque } n+2 > 0, \\ &\quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow 7 < n\delta + 2\delta \\ &\Leftrightarrow n\delta > 7 - 2\delta \\ &\Leftrightarrow n > \frac{7-2\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se $n > \frac{7-2\delta}{\delta}$, então $\left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta$ e,

portanto, se $p > \frac{7-2\delta}{\delta}$, fica provado que

$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$n \geq p \Rightarrow \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta$, ou seja, que

$$\lim \left(-\frac{3n-1}{n+2} \right) = -3.$$

6.

6.1. A razão entre as medidas dos lados dos triângulos

é $\frac{1}{2}$, logo a razão entre as medidas das respetivas áreas é $\frac{1}{4}$. Logo, $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}$ (constante), $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$$A_1 = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Cálculo auxiliar

Pelo Teorema de Pitágoras, sendo h a altura do primeiro triângulo:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Então, } h = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\text{Logo, } A_n = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{6.2. } \lim S_n &= \lim \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4 \times \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3} \end{aligned}$$

7. Seja $P(n)$: $2^{2n-1} + 1$ é divisível por 3.

P(1): $2^{2-1} + 1 = 2 + 1 = 3$ é divisível por 3.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese: $2^{2n-1} + 1$ é divisível por 3.

Tese: $2^{2n+1} + 1$ é divisível por 3.

Demonstração:

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} + 1 &= 2^{2n-1} \times 2^2 + 1 = \\ &= 2^{2n-1} \times 2^2 + 2^2 - 2^2 + 1 = \\ &= 2^2(2^{2n-1} + 1) - 2^2 + 1 = \\ &= 4 \times (2^{2n-1} + 1) - 3 \end{aligned}$$

Por hipótese, $2^{2n-1} + 1$ é divisível por 3, logo $4 \times (2^{2n-1} + 1)$ é divisível por 3. Como 3 também é divisível por 3, e a diferença entre dois números divisíveis por 3 é ainda divisível por 3, então $4 \times (2^{2n-1} + 1) - 3$ é divisível por 3.

Logo, $2^{2n+1} + 1$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teste n.º 4

Páginas 84 a 86

Grupo I

$$\begin{aligned} 1. \cos(\pi + \alpha) > 0 &\Leftrightarrow -\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 &\Leftrightarrow -\sin \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha < 0 \\ \text{Logo, } \alpha &\in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[. \end{aligned}$$

Assim:

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha > 0$$

$$\text{tg}(\alpha - \pi) = \text{tg} \alpha > 0$$

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha > 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha < 0$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 2. \vec{AE} \cdot \vec{ED} &= (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{EC} + \vec{CD}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{EC} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BE} \cdot \vec{EC} + \vec{BE} \cdot \vec{CD} = \\ &= 0 + a \times a \times \cos 180^\circ + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \cos 0^\circ + 0 = \\ &= -a^2 + \frac{a^2}{4} = \\ &= -\frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

3. $u_1 = a$

$$u_2 = (a+1)(a-1) = a^2 - 1$$

$$u_3 = (a^2 - 1 + 1)(a^2 - 1 - 1) = a^2(a^2 - 2) = a^4 - 2a^2$$

A opção correta é a (A).

$$4. \lim u_n = \lim \frac{3n}{1-n} = \lim \frac{3}{\frac{1}{n}-1} = -3^-$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+1}{x+3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

A opção correta é a (A).

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, logo o gráfico de f poderá ter uma assíntota oblíqua de declive -1 . Nas opções (B) e (C) esta situação é impossível.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, logo o gráfico de f tem uma assíntota vertical em $x = 0$. Na opção (A) tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

A opção correta é a (D).

Grupo II

1.

$$1.1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\overline{PA} = \overline{QC}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} = 1 - \overline{PA} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$A(\alpha) = A_{[ABCD]} - A_{[OPQ]} - A_{[PAB]} - A_{[CQB]} =$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}{2} - 2 \times \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \times 1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)$$

- 1.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então a inclinação, em radianos, da reta PB é $\frac{\pi}{3}$. Logo, o declive desta reta é $m = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

O declive de qualquer reta perpendicular à reta PB é, então, $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, a equação reduzida da reta perpendicular a PB que

passa no ponto A é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Uma vez que o ponto $A(1, 0)$ pertence a esta reta:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta perpendicular a PB que passa no ponto A é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.

- 2.1. Um vetor normal a um plano da família de planos dada é $\vec{n}(1, m, m)$, $m \in \mathbb{R}$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, -1, 2)$.

Para esta reta ser paralela ao plano:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (1, m, m) \cdot (2, -1, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - m + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

- 2.2. Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor, não nulo, normal ao plano β .

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4a + c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = -2a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(a, -2a, -5a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então, por exemplo, $\vec{u}(1, -2, -5)$ é um vetor normal ao plano β .

Um vetor normal ao plano α é $\vec{v}(1, -1, -1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2, -5) \cdot (1, -1, -1) = 1 + 2 + 5 = 8$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Seja θ o ângulo formado pelos dois vetores normais. Então:

$$\cos \theta = \frac{8}{\sqrt{30} \times \sqrt{3}}$$

Logo, $\theta \approx 32,5^\circ$.

3.

- 3.1. Seja $P(n): 2 \leq u_n < 3$.

$$P(1): 2 \leq u_1 < 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2 < 3$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $2 \leq u_n < 3$

Tese: $2 \leq u_{n+1} < 3$

Demonstração:

Como, por hipótese, $2 \leq u_n < 3 \Leftrightarrow 5 \leq u_n + 3 < 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{u_n + 3} < \sqrt{6}$, então $\sqrt{5} \leq u_{n+1} < \sqrt{6}$ e,

em particular, $2 \leq u_{n+1} < 3$.

Logo, $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2. Da alínea anterior e do enunciado resulta que (u_n) é uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente.

Seja $L = \lim u_n$.

Então, $L = \lim u_{n+1} = \lim (\sqrt{u_n + 3}) = \sqrt{L + 3}$.

Ou seja:

$$L = \sqrt{L + 3} \Leftrightarrow L^2 = L + 3$$

$$\Leftrightarrow L^2 - L - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \vee L = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Como, $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, então $L = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

4.

4.1. Como $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função, então $c = 2$.

Como $y = 4$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função, então $a = 4$.

Como $\left(0, \frac{11}{2}\right)$ pertence ao gráfico da função:

$$f(0) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 4 + \frac{b}{0-2} = \frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{b}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 - b = 11$$

$$\Leftrightarrow b = -3$$

4.2.

$$\mathbf{4.2.1.} \quad f(x) \leq \frac{9}{x} \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} \leq \frac{9}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} - \frac{9}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 9x - 9x + 18}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 18x + 18}{x(x-2)} \leq 0$$

Cálculos auxiliares

$$4x^2 - 18x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$		2		3	$+\infty$
$4x^2 - 18x + 18$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x(x-2)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{4x^2 - 18x + 18}{x(x-2)}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left]0, \frac{3}{2}\right] \cup]2, 3]$$

$$\mathbf{4.2.2.} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x-9=0 \wedge x-2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Logo, $A\left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

$$f(0) = \frac{0-9}{0-2} = \frac{9}{2}$$

Logo, $C\left(0, \frac{9}{2}\right)$.

$$\text{Assim, } A_{[OABC]} = \overline{OA} \times \overline{OC} = \frac{9}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{81}{8} \text{ u.a.}$$

5.

$$\mathbf{5.1.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(k + \frac{5x+1}{3x+1}\right) = k+1 = f(0)$$

Para que a função f seja contínua em $x = 0$,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ ou seja, } k+1=0 \Leftrightarrow k=-1.$$

5.2. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$,

então $x = 0$ não é uma assíntota vertical ao gráfico da função f .

Como f é contínua em $]-\infty, 0[$, por se tratar da soma de duas funções contínuas, então não pode haver outras assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right) =$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

Teste n.º 5

Páginas 89 a 92

Grupo I

1. $x^2 + y^2 = 3$ é uma equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{3}$.

A reta r é tangente a esta circunferência no ponto de coordenadas $(\sqrt{3}, 0)$, que é um dos pontos de interseção da reta com o eixo Ox . Logo, $r: x = \sqrt{3}$. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(0, 1)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto da reta s :

$$(1, \sqrt{2}) \cdot (x - 1, y - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ que é a equação reduzida da reta } s.$$

Como o declive da reta s é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, um vetor diretor desta reta é $\vec{s}(-2, \sqrt{2})$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (0, 1) \cdot (-2, \sqrt{2}) = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{r}\| = 1$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

Logo, sendo α a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas duas retas, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 \times \sqrt{6}}$ e, portanto, $\alpha \approx 55^\circ$.

A opção correta é a (C).

2. $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é uma sucessão limitada.

A opção correta é a (D).

3. $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

x	$-\infty$	-3		-2		1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+	0	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-

Logo, $D_h =]-\infty, -3] \cup]-2, 1]$.

A opção correta é a (B).

4. $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 3} = \\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

A opção correta é a (A).

5.

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	0	-	0	+
Variação de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A opção correta é a (B).

Grupo II

1.

- 1.1. Um vetor normal ao plano ABF é $\vec{u}(6, 2, -3)$.

O plano CHG é estritamente paralelo ao plano ABF . Logo, $\vec{u}$ é também um vetor normal ao plano CHG .

Como $D(17, 1, -1)$ pertence ao plano CHG , então:

$$6(x - 17) + 2(y - 1) - 3(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 102 + 2y - 2 - 3z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2y - 3z - 107 = 0$$

- 1.2. O ponto E é o ponto de interseção da reta EH com o plano EBF .

$$EH: (x, y, z) = (1, -2, 14) + k(-12, -4, 6), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x = 1 - 12k \\ y = -2 - 4k, k \in \mathbb{R}, \text{ são as coordenadas de} \\ z = 14 + 6k \end{cases}$$

um ponto genérico desta reta.

Substituindo na equação do plano, vem:

$$6(1 - 12k) + 2(-2 - 4k) - 3(14 + 6k) - 58 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 72k - 4 - 8k - 42 - 18k - 58 = 0$$

$$\Leftrightarrow -98 - 98k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Assim, $E(13, 2, 8)$.

2.

21. Seja $P(n)$: $u_n > 1$.

$P(1)$: $7 > 1$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n > 1$

Tese: $u_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$u_n > 1 \Leftrightarrow u_n + 2 > 3 \Leftrightarrow \frac{u_n + 2}{3} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > 1$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{3} - u_n = \frac{u_n + 2 - 3u_n}{3} = \frac{2 - 2u_n}{3}$

Como, da alínea anterior, $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$2u_n > 2 \Leftrightarrow -2u_n < -2 \Leftrightarrow 2 - 2u_n < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 2u_n}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (u_n) é decrescente.

2.3. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{3} - 1}{u_n - 1} =$
 $= \frac{\frac{u_n + 2 - 3}{3}}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $\frac{1}{3}$ é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

$$v_n = u_1 - 1 = 7 - 1 = 6$$

Assim, o termo geral de (v_n) é $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+	+
$f(x-1)$	-	0	+	0	-
$\frac{g(x)}{f(x-1)}$	+	n.d.	+	n.d.	-

Assim, C.S. = $]-\infty, -2[\cup]-2, 3[$.

4. Uma vez que a reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f , tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 1$.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) - x)(f(x) + x)}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - x}{f(x)} \times (f(x) + x) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{x}{f(x)}\right) \times (f(x) + x) \right) = \left(1 - \frac{1}{-1}\right) \times 1 = 2$$

Logo, $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

5.

5.1. $f(1) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 2 \times 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+5)}{x+2} = \frac{12}{3} = 4$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então f é contínua em $x = 1$.

5.2. Se $x > 1$, então:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} \right)' =$$

$$= \frac{(4x + 8)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^2 + 8x - 10)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4(x+2)(x-1)(x+2) - (2x+1)2(x+5)(x-1)}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)[2(x+2)^2 - (2x+1)(x+5)]}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$= \frac{2(2x^2 + 8x + 8 - 2x^2 - 11x - 5)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2(3-3x)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= -\frac{6}{(x+2)^2}$$

5.3. $f(2) = \frac{8 + 16 - 10}{4 + 2 - 1} = \frac{7}{2}$

$$f'(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{3}{8}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2 é do tipo $y = -\frac{3}{8}x + b$.

$$\frac{7}{2} = -\frac{3}{8} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$$

Logo, $y = -\frac{3}{8}x + \frac{17}{4}$ é a equação pretendida.

6.

6.1. $t.m.v._{[0,2]} =$

$$= \frac{-\frac{1}{10} \times 2(2^2 - 19 \times 2 - 20) - \left(-\frac{1}{10}\right) \times (-20)}{2 - 0} =$$

$$= 4,4 \text{ m/s}$$

6.2. $p'(t) = -\frac{1}{10}(t^2 - 19t - 20 + t(2t - 19)) =$

$$= -\frac{1}{10}(3t^2 - 38t - 20)$$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}(3t^2 - 38t - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 38t - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 + 12 \times 20}}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{38 \pm \sqrt{1684}}{6}$$

Logo, $t \approx -0,506 \vee t \approx 13,173$.

t	0		13,173		20
Sinal de p'		+	0	-	
Variação de p		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

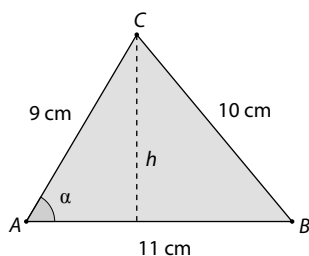
$$p(13,173) = -\frac{1}{10} \times 13,173(13,173^2 - 19 \times 13,173 - 20)$$

$$\approx 127,461$$

A profundidade máxima atingida pelo mergulhador foi 127 metros e ocorreu aos 13 minutos de mergulho.

Teste n.º 6**Páginas 95 a 98****Grupo I**

1. Pela Lei dos Cossenos:



$$10^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \times 11 \times 9 \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 100 = 202 - 198 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 198 \cos \alpha = 102$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{17}{33}$$

Assim:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{17}{33}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{800}{1089}$$

Como α é um ângulo agudo, então $\sin \alpha = \sqrt{\frac{800}{1089}}$.

Mas, $\sin \alpha = \frac{h}{9}$. Logo, $h = 9 \times \sqrt{\frac{800}{1089}}$.

Logo, a área do triângulo é:

$$\frac{11 \times 9 \times \sqrt{\frac{800}{1089}}}{2} \approx 42,4 \text{ cm}^2$$

A opção correta é a (A).

2. As retas AB e DH não são estritamente paralelas nem concorrentes, logo não definem um plano.As retas AB e CE não são estritamente paralelas nem concorrentes, logo não definem um plano.Os pontos A , B e M são colineares, logo não definem um plano.Os pontos A , B e H são pontos não colineares, logo definem um plano.

A opção correta é a (C).

3. $\sum_{k=1}^{100} u_k = 100 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 100$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 99r)}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 99r = 2$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 1 - \frac{99}{2}r$$

$$\sum_{k=1}^{200} u_k = 300 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = 300$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 199r)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{99}{2}r\right) + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - 99r + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 100r = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow r = 0,01$$

A opção correta é a (C).

4. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x-3}\right) = 1 + \frac{a}{-3} = 1 - \frac{a}{3}$$

Para que a função seja contínua em $x = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{a}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = 3 - a \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - \sqrt{3} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

A opção correta é a (B).

5. Por observação do gráfico, conclui-se que $r > 0$ e $a > 0$.

A opção correta é a (A).

Grupo II

1.

1.1. $f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow 4 \cos \alpha = 2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) \times \arcsen\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ & = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \arcsen\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \\ & = \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

1.2. $f(x) = \sin x + 3 \cos x \Leftrightarrow 4 \cos x = \sin x + 3 \cos x$
 $\Leftrightarrow \cos x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee \underbrace{x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi}_{\text{Equação impossível}}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{R}$$

- 1.3. Sendo β a amplitude do ângulo BOC :

$$A = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\beta \times 2^2}{2} = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Assim, } \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

2.

- 2.1. $\vec{AB} = (-1, 2, 0) - (2, 3, 1) = (-3, -1, -1)$ é um vetor diretor da reta AB .

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, 1, -1)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo ortogonal ao plano definido pelas retas AB e r .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - b - c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ 2a + b + 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2b = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a + \frac{5}{2}a \\ b = -\frac{5}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2}a \\ b = -\frac{5}{2}a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(a, -\frac{5}{2}a, -\frac{1}{2}a\right), a \in \mathbb{R}$.

Consideremos, por exemplo, $\vec{u}(2, -5, -1)$.

Como o ponto $A(2, 3, 1)$ pertence ao plano, então:

$$2(x-2) - 5(y-3) - 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 - 5y + 15 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5y - z + 12 = 0, \text{ que é a equação pretendida.}$$

2.2. $\vec{AB} = (-1, 2, 0) - (2, 3, 1) = (-3, -1, -1)$

$$\vec{r}(2, 1, -1)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{r} = (-3, -1, -1) \cdot (2, 1, -1) = -6 - 1 + 1 = -6$$

Logo, sendo α a amplitude do ângulo entre os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$, tem-se que $\cos \alpha = \frac{-6}{\sqrt{11} \times \sqrt{6}}$.

Assim, $\alpha \approx 137,6^\circ$.

3.

- 3.1. Seja (u_n) a sucessão dos comprimentos dos segmentos da linha poligonal definida.

$$\text{Tem-se que } \begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3} u_n}{u_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{2}{3}$ é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

$$\text{Logo, } u_n = 12 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

$$3.2. \lim \left[12 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 12 \times \frac{1 - 0}{\frac{1}{3}} = 36$$

4. Seja $P(n): \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$

$$P(1): 3 \times 1^2 + 1 = 1 \times (1+1)^2 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

Assim, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $\sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$

Tese: $\sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) = (n+1)(n+2)^2$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) + [3(n+1)^2 + (n+1)] = \\ &= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n+1)[n(n+1) + 3(n+1) + 1] = \\ &= (n+1)(n^2 + n + 3n + 3 + 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + 4n + 4) = \\ &= (n+1)(n+2)^2 \end{aligned}$$

Assim, $\sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.

5.1. $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} \frac{4x+1}{2x+3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

Logo, $x = -\frac{3}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, por se tratar de uma função racional, então não há outras assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = 2$$

Logo, $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = 2$$

Logo, $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

5.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} = 0$
 $\Leftrightarrow 4x+1 = 0 \wedge 2x+3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

Logo, o ponto A tem coordenadas $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x+1}{2x+3}\right)' = \frac{4(2x+3) - 2(4x+1)}{(2x+3)^2} = \\ &= \frac{8x+12-8x-2}{(2x+3)^2} = \\ &= \frac{10}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{10}{\left(2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 3\right)^2} = \frac{10}{\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2} = \\ &= \frac{10}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{10}{\frac{25}{4}} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto A é do tipo $y = \frac{8}{5}x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta, vem:

$$0 = \frac{8}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{5}$$

Assim, a equação pretendida é $y = \frac{8}{5}x + \frac{2}{5}$.

5.3. $f(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} \leq \frac{\sqrt{3+1}}{2+3}$
 $\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} \leq \frac{2}{5}$
 $\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} - \frac{2}{5} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{20x+5-4x-6}{5(2x+3)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{16x-1}{5(2x+3)} \leq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{16}$	$+\infty$
$16x-1$	-	-	-	0	+
$5(2x+3)$	-	0	+	+	+
$\frac{16x-1}{5(2x+3)}$	+	n.d.	-	0	+

Logo, C.S. = $\left]-\frac{3}{2}, \frac{1}{16}\right]$.

5.4. $g'(x) = \left(\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x+3}\right)' =$
 $= \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}(2x+3) - 2\sqrt{3x^2+1}}{(2x+3)^2} =$
 $= \frac{6x(2x+3) - 4(3x^2+1)}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} =$
 $= \frac{12x^2+18x-12x^2-4}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} =$
 $= \frac{18x-4}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} =$
 $= \frac{9x-2}{(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{9}$	$+\infty$
Sinal de g'	-	n.d.	-	0	+
Varição de g	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, a função g é estritamente decrescente em $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e em $\left]-\frac{3}{2}, \frac{2}{9}\right]$ e é estritamente crescente em $\left]\frac{2}{9}, +\infty\right[$. A função g tem um mínimo relativo em $x = \frac{2}{9}$.

6.

$$6.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{235}{15} = \frac{47}{3} \approx 15,67$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{240}{15} = 16$$

$$6.2. a = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i - 15 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i - 15 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 - 15 \bar{x}^2} =$$

$$= \frac{3827 - 15 \times \frac{47}{3} \times 16}{3741 - 15 \left(\frac{47}{3}\right)^2} \approx 1,1292 \approx 1,13$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 16 + 1,1292 \times \frac{47}{3} \approx -1,69$$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 1,13x - 1,69$.

$$6.3. r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 - 15 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{15} (y_i)^2 - 15 \bar{y}^2}}$$

$$\approx 1,1292 \sqrt{\frac{3741 - 15 \left(\frac{47}{3}\right)^2}{3952 - 15 \times 16^2}} \approx 0,82$$