

08.

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO
MANUAL**

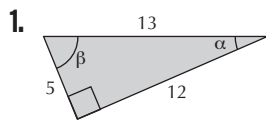
Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

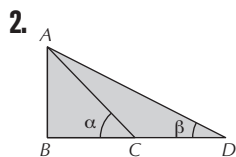
Unidade 1 - Revisões

Páginas 9 a 11



$$\sin \alpha = \frac{5}{13}; \cos \alpha = \frac{12}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{12}{13}; \cos \beta = \frac{5}{13}; \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\overline{AB}}{15} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4 \times 15}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 12$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{12}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \times 12}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 16$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 12^2 + \overline{BC}^2 = 15^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225 - 144 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 81$$

Logo, $\overline{BC} = 9$.

Tem-se, então, $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = 16 - 9 = 7$.

3.

a) $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 =$

$$= \frac{3}{4} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) $\frac{3 \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - 2 \cos 30^\circ} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} =$$

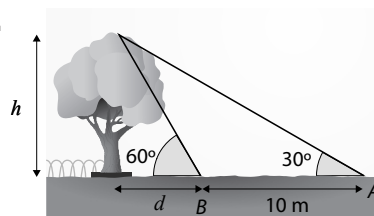
$$= -\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

c) $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$

d) $\sin 80^\circ - \cos 10^\circ = \sin 80^\circ - \sin (90^\circ - 10^\circ) =$
 $= \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$

e) $\operatorname{tg} 74^\circ \times \operatorname{tg} 16^\circ = \operatorname{tg} 74^\circ \times \frac{1}{\operatorname{tg} (90^\circ - 16^\circ)} = \frac{\operatorname{tg} 74^\circ}{\operatorname{tg} 74^\circ} = 1$

4.



Sejam h a altura da árvore e d a distância entre o ponto B e a árvore.

Então:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{d+10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+10}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3}$$

Por outro lado:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}d$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}d \Leftrightarrow \sqrt{3}d + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3}d$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}d = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow d = 5$$

Tem-se, então, que $h = \sqrt{3}d = 5\sqrt{3}$, ou seja, a altura da árvore é $5\sqrt{3}$ metros.

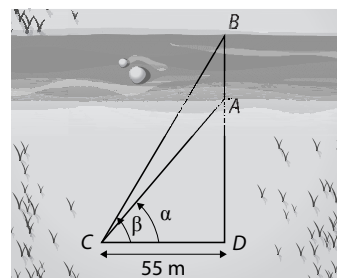
5.

a) $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x =$
 $= 1 - 2 \sin x \cos x$

b) $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x =$
 $= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) =$
 $= \sin^2 x - 1 + \sin^2 x =$
 $= 2 \sin^2 x - 1$

c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$
 $= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$

6.



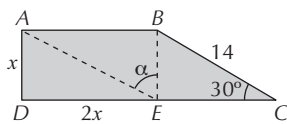
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{55} \Leftrightarrow \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 62^\circ = \frac{\overline{BD}}{55} \Leftrightarrow \overline{BD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ$$

Logo, $\overline{AB} = \overline{BD} - \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ - 55 \operatorname{tg} 40^\circ \approx 57,3$.
 Assim, a largura aproximada do rio é 57,3 metros.

7.

a)



$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{14} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{14}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = 7$$

$$\text{Logo, } \overline{DE} = 2 \times \overline{BE} = 2 \times 7 = 14.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EC}}{14}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{14\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 7\sqrt{3}.$$

Então, o perímetro do trapézio é:

$$7 + 14 + 7\sqrt{3} + 14 + 14 = 49 + 7\sqrt{3}$$

b) $\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{2x}{x} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2$

$$\text{Logo, } \alpha = \text{tg}^{-1}(2) \approx 63,43^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(\text{tg } 72^\circ + \text{tg } 63^\circ) = 120 \text{ tg } 72^\circ \\ x = \frac{120 \text{ tg } 72^\circ}{\text{tg } 72^\circ + \text{tg } 63^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{120 \text{ tg } 72^\circ}{\text{tg } 72^\circ + \text{tg } 63^\circ} \times \text{tg } 63^\circ \\ x = \frac{120 \text{ tg } 72^\circ}{\text{tg } 72^\circ + \text{tg } 63^\circ} \end{cases}$$

Logo, $h \approx 143,8$, ou seja, a largura do rio é aproximadamente de 143,8 metros.

b) $\widehat{BPA} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 72^\circ}{\overline{PA}} = \frac{\sin 45^\circ}{120} = \frac{\sin 63^\circ}{\overline{BP}}$$

Então:

$$\frac{\sin 72^\circ}{\overline{PA}} = \frac{\sin 45^\circ}{120} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{120 \sin 72^\circ}{\sin 45^\circ},$$

pelo que a distância entre a Ana e a pedra é aproximadamente de 161,4 metros.

Por outro lado:

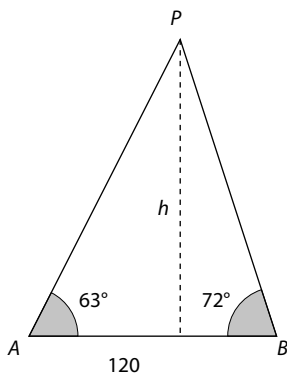
$$\frac{\sin 45^\circ}{120} = \frac{\sin 63^\circ}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{120 \sin 63^\circ}{\sin 45^\circ},$$

o que significa que a distância entre a Berta e a pedra é aproximadamente de 151,2 metros.

Unidade 2 - Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

Páginas 12 a 26

8.



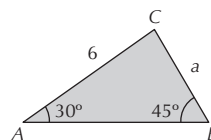
a) $\begin{cases} \text{tg } 63^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{tg } 72^\circ = \frac{h}{120 - x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \text{ tg } 63^\circ \\ h = 120 \text{ tg } 72^\circ - x \text{ tg } 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tg } 63^\circ = 120 \text{ tg } 72^\circ - x \text{ tg } 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tg } 72^\circ + x \text{ tg } 63^\circ = 120 \text{ tg } 72^\circ \end{cases}$$

9.



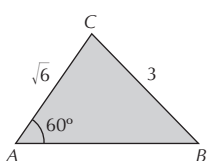
Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{6} \Leftrightarrow a = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$$

10.



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin \widehat{BCA}}{\overline{AB}}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{ABC}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{6} \sin 60^\circ}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{18}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\hat{ABC} = 45^\circ$ e $\hat{BCA} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

Assim:

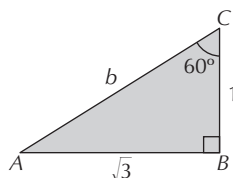
$$\frac{\sin \hat{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin \hat{BCA}}{AB} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 75^\circ}{AB}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow AB = \frac{2\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3} \sin 75^\circ$$

Ou seja, $AB \approx 3,35$.

11.



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

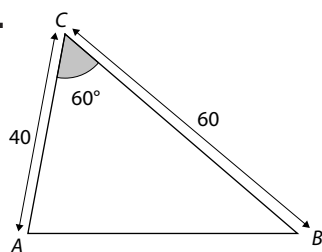
12.

a) $\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

13.



Pela Lei dos Cossenos:

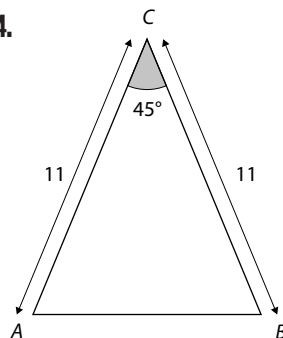
$$AB^2 = 40^2 + 60^2 - 2 \times 40 \times 60 \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 1600 + 3600 - 4800 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2800$$

Logo, $AB = \sqrt{2800} = 20\sqrt{7}$, ou seja, a distância entre os dois operários é de $20\sqrt{7}$ metros.

14.



Pela Lei dos Cossenos:

$$AB^2 = 11^2 + 11^2 - 2 \times 11 \times 11 \times \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 121 + 121 - 242 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

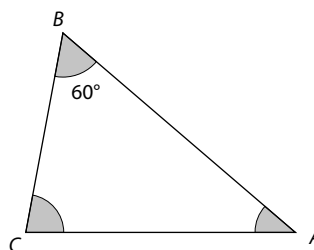
$$\Leftrightarrow AB^2 = 242 - 121\sqrt{2}$$

Logo, $AB = \sqrt{242 - 121\sqrt{2}}$.

Então, a área do círculo de raio AB é

$$\pi \times (\sqrt{242 - 121\sqrt{2}})^2 \approx 222,677 \text{ cm}^2.$$

15.



Pela Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = (2BC)^2 + BC^2 - 2 \times 2BC \times BC \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 4BC^2 + BC^2 - 2BC^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 3BC^2$$

Logo, $AC = \sqrt{3} BC$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{AC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{2 BC}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{\sin 60^\circ \times BC}{\sqrt{3} BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\hat{CAB} = 30^\circ$.

E:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{2 BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = \frac{\sin 60^\circ \times 2 BC}{\sqrt{3} BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = 1$$

Logo, $\hat{BCA} = 90^\circ$.

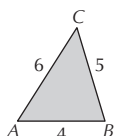
16.

a) $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17.



a) Pela Lei dos Cossenos:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 36 = 25 + 16 - 40 \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 40 \cos \hat{ABC} = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ABC} = \frac{5}{40}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{40}\right), \text{ pelo que } \hat{ABC} \approx 82,8^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 25 = 36 + 16 - 48 \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 48 \cos \hat{BAC} = 27$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{BAC} = \frac{27}{48}$$

$$\text{Logo, } \hat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{27}{48}\right), \text{ pelo que } \hat{BAC} \approx 55,8^\circ.$$

Pela lei dos Cossenos:

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \hat{ACB}$$

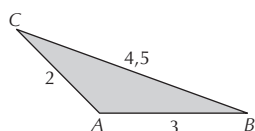
$$\Leftrightarrow 16 = 36 + 25 - 60 \cos \hat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 60 \cos \hat{ACB} = 45$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ACB} = \frac{45}{60}$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{45}{60}\right), \text{ pelo que } \hat{ACB} \approx 41,4^\circ.$$

b)



Pela Lei dos Cossenos:

$$2^2 = 4,5^2 + 3^2 - 2 \times 4,5 \times 3 \times \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 20,25 + 9 - 27 \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 27 \cos \hat{ABC} = 25,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ABC} = \frac{25,25}{27}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{25,25}{27}\right), \text{ pelo que } \hat{ABC} \approx 20,7^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$4,5^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 20,25 = 4 + 9 - 12 \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 12 \cos \hat{BAC} = -7,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{BAC} = -\frac{7,25}{12}$$

$$\text{Logo, } \hat{BAC} = \cos^{-1}\left(-\frac{7,25}{12}\right), \text{ pelo que } \hat{BAC} \approx 127,2^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$3^2 = 2^2 + 4,5^2 - 2 \times 2 \times 4,5 \times \cos \hat{ACB}$$

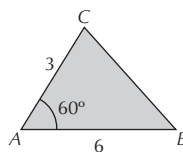
$$\Leftrightarrow 9 = 4 + 20,25 - 18 \cos \hat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 18 \cos \hat{ACB} = 15,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ACB} = \frac{15,25}{18}$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{15,25}{18}\right), \text{ pelo que } \hat{ACB} \approx 32,1^\circ.$$

c)



Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9 + 36 - 18$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 27$$

$$\text{Logo, } \overline{BC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Pela lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ABC}}{3} = \frac{\sin \hat{ACB}}{6}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ABC}}{3} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{3 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = 30^\circ.$$

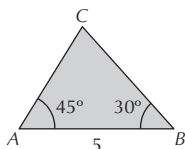
E:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ACB}}{6} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{6 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = 1$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = 90^\circ.$$

d)



$$\hat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 105^\circ}{5}$$

Então:

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 105^\circ}{5} \Leftrightarrow BC = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$$

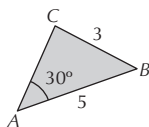
Logo, $BC \approx 3,7$.

E:

$$\frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 105^\circ}{5} \Leftrightarrow AC = \frac{5 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$$

Logo, $AC \approx 2,6$.

e)



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{ACB}}{5} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{5 \sin 30^\circ}{3}$$

$$\text{Então, } \hat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \sin 30^\circ}{3}\right).$$

Logo, $\hat{ACB} \approx 56,4^\circ$.

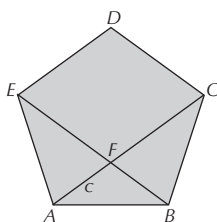
$$\hat{ABC} \approx 180^\circ - 30^\circ - 56,4^\circ \approx 93,6^\circ$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos \hat{ABC}$$

$$\text{Pelo que, } AC^2 \approx 34 - 24 \cos 93,6^\circ, \text{ ou seja, } AC \approx \sqrt{34 - 24 \cos 93,6^\circ} \approx 6.$$

18.



$$\hat{ABC} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\hat{CAB} = \hat{BCA} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \hat{ABF}$$

Pela lei dos Cossenos:

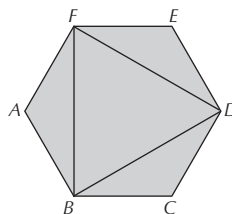
$$c^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow 9 = 6c \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{9}{6 \cos 36^\circ}$$

Logo, $c \approx 1,9$.

19.



$$\hat{FAB} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

Seja $x = FB$.

Pela Lei dos Cossenos:

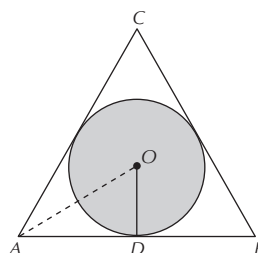
$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 27$$

Então, $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ e, portanto, o perímetro do triângulo $[BDF]$ é $3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

20.



$$\hat{BAC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\hat{OAD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\hat{DOA} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\overline{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 30^\circ}{OD} \Leftrightarrow OD = \frac{\sqrt{3} \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow OD = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow OD = 1$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2, \text{ logo } A_{\text{círculo}} = \pi \times 1^2 = \pi.$$

Unidade 3 - Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações

Páginas 27 a 31

21.

a)

i) / ii) D iii) H iv) /

b) Por exemplo, 160° ou -200° .

22.

a) I b) C c) C d) G e) F

23.

- a) $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$
 b) $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$
 c) $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$
 d) $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$

24.

- a) $25^\circ + 3 \times 360^\circ = 1105^\circ$
 b) $180^\circ + 1 \times 360^\circ = 540^\circ$
 c) $-39^\circ - 1 \times 360^\circ = -399^\circ$
 d) $-100^\circ - 4 \times 360^\circ = -1540^\circ$

25.

- a) Ponto B.
 b) Ponto D.
 c) Ponto D.
 d) Ponto C.

Unidade 4 - Razões trigonométricas de ângulos generalizados

Páginas 32 a 65

26.

- a) 85° pertence ao 1.º quadrante.
 b) 280° pertence ao 4.º quadrante.
 c) -25° pertence ao 4.º quadrante.
 d) 200° pertence ao 3.º quadrante.
 e) $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$ pertence ao 1.º quadrante.
 f) $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$ pertence ao 2.º quadrante.
 g) $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$ pertence ao 4.º quadrante.
 h) $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$ pertence ao 3.º quadrante.

27.

a) Abcissa de P:

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \cos 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ordenada de P:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \sin 30^\circ \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } P\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

b) Abcissa de P:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha$$

Ordenada de P:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha$$

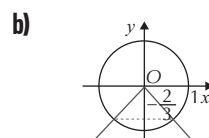
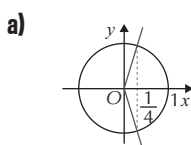
Logo, $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.

28.

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

b) $\cos \beta = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = -\frac{4}{5}$

29.



30. Ordenada de P: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

Uma vez que α é um ângulo do 2.º quadrante, tem-

$$\text{-se que } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

31.

a) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$

Valor mínimo: -4 Valor máximo: 4

b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \sin \alpha - 3 \leq -2$

Valor mínimo: -4 Valor máximo: -2

c) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2 \geq -2 \sin \alpha \geq -2 \Leftrightarrow 7 \geq 5 - 2 \sin \alpha \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3} \geq \frac{5 - 2 \sin \alpha}{3} \geq 1$$

Valor mínimo: 1 Valor máximo: $\frac{7}{3}$

d) $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$

Valor mínimo: 0 Valor máximo: 1

e) $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \cos^2 \alpha + 1 \leq 2$

Valor mínimo: 1 Valor máximo: 2

f) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos \alpha + 1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\cos \alpha + 1)^2 \leq 4$$

Valor mínimo: 0 Valor máximo: 4

32.

a) Afirmação falsa. No 2.º quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo, logo não têm o mesmo sinal.

b) Afirmação verdadeira.

- c) Afirmação verdadeira.
d) Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.
e) Afirmação falsa. No 2.º quadrante o seno é positivo.
f) Afirmação falsa.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{36}{49} = \frac{37}{49} \neq 1$$

33.

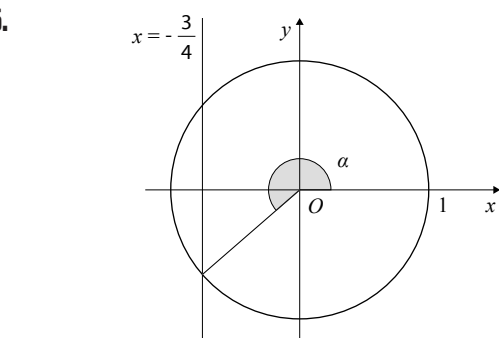
- a) Afirmação verdadeira.
b) Afirmação verdadeira.
c) Afirmação falsa. No 3.º quadrante o cosseno é crescente.
d) Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.
e) Afirmação verdadeira.
f) Afirmação falsa.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{36}{49} = \frac{37}{49} \neq 1$$

34.

- a) $\sin 50^\circ < \sin 80^\circ$
b) $\cos 50^\circ > \cos 80^\circ$
c) $\cos 105^\circ > \cos 162^\circ$
d) $\sin 200^\circ < \sin 90^\circ$
e) $\cos 180^\circ < \sin 5^\circ$
f) $\cos(-90^\circ) = \sin 180^\circ$

35.



$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$$

Uma vez que α pertence ao 3.º quadrante, tem-se:

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

36.

- a) O produto do seno pelo cosseno é positivo nos 1.º e 3.º quadrantes.
b) O seno é crescente e o cosseno é decrescente no 1.º quadrante.

- c) O seno e o cosseno são crescentes no 4.º quadrante.
d) O seno é decrescente e o cosseno é negativo nos 2.º e 3.º quadrantes.

37.

$$\begin{aligned} \text{a) } -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 3 \geq 3k \geq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq k \geq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

b) $x \in]180^\circ, 270^\circ[$, então:

$$\begin{aligned} -1 < \cos x < 0 &\Leftrightarrow -4 < 4 \cos x < 0 \\ &\Leftrightarrow -4 < \frac{k-10}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow -8 < k-10 < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 < k < 10 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in]2, 10[.$$

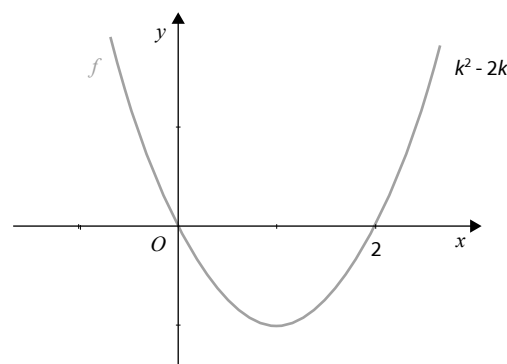
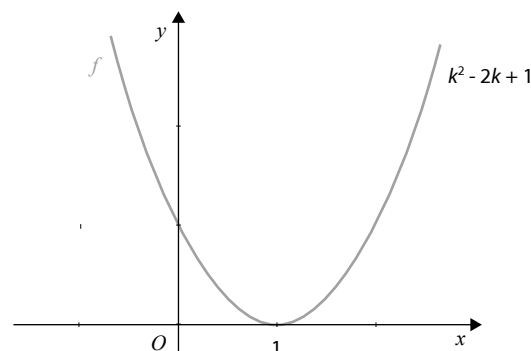
c) $x \in [0^\circ, 90^\circ[$, então:

$$\begin{aligned} 0 < \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < k^2 - 2k + 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k + 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k \leq 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$



$$\text{Logo, } k \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap [0, 2] = [0, 1[\cup]1, 2].$$

38.

$$a) \sin \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{BD}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{BD} = a \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 2a \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{AC} = a \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 2a \cos \theta$$

Assim, a área da peça é dada por:

$$\frac{2a \sin \theta \times 2a \cos \theta}{2} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta = A(\theta)$$

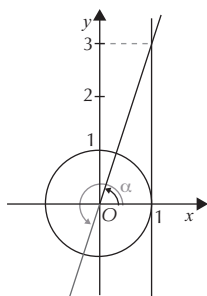
Se $\theta \leq 0^\circ$ ou se $\theta \geq 90^\circ$, a figura não é um losango, pelo que $\theta \in]0^\circ, 90^\circ[$.

$$b) A(45^\circ) = 2 \times 3^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \\ = 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$$

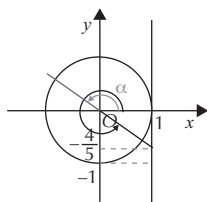
Quando $\theta = 45^\circ$ e $a = 3$, o losango $[ABCD]$ adquire a forma de um quadrado de lado 3.

39.

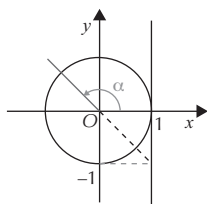
a)



b)



c)



40.

$$a) \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[.$$

$$b) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \in [3, +\infty[.$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha \in]-\infty, +\infty[, \text{ logo } \operatorname{tg} \alpha + 3 \in]-\infty, +\infty[.$$

$$d) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[\text{ e, portanto, } 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 \in [-1, +\infty[.$$

$$e) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } -\operatorname{tg}^2 \alpha \in]-\infty, 0], \text{ logo } 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \in]-\infty, 1] \text{ e, portanto, } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right].$$

41.

a) A tangente é negativa e o cosseno é positivo no 4.º quadrante.

b) O seno e a tangente são negativos no 4.º quadrante.

c) Não há nenhum quadrante em que a tangente seja decrescente.

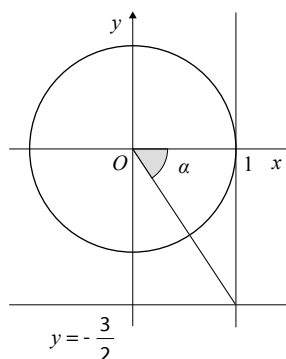
d) A tangente e o cosseno têm o mesmo sinal nos 1.º e 2.º quadrantes.

e) O seno é maior que a tangente em todos os ângulos do 2.º e do 4.º quadrantes.

42. Se o seno e o cosseno forem ambos positivos, então $\operatorname{tg} \alpha > 1$ se $\sin \alpha > \cos \alpha$.

Se o seno e o cosseno forem ambos negativos, então $\operatorname{tg} \alpha > 1$ se $|\sin \alpha| > |\cos \alpha|$.

43.



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{13}$$

Uma vez que α pertence ao 4.º quadrante, tem-se que:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{4}{13} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{13} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{13}$$

Como α pertence ao 4.º quadrante, tem-se que:

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

44.

$$a) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \\ - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha) = \\ = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ = 4 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$b) \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ = \sin \alpha \times 1 = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= 1 + 2 \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \frac{\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}} &= \frac{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}} = \\ &= \frac{-\sin^2 \alpha \times \sin \alpha}{-\cos^2 \alpha \times \cos \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \frac{\cos \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}} &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha}} = \\ &= \frac{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

45.

$$\text{a)} \sin (380^\circ) = \sin (360^\circ + 20^\circ) = \sin (20^\circ)$$

$$\text{b)} \cos (1205^\circ) = \cos (3 \times 360^\circ + 125^\circ) = \cos (125^\circ)$$

$$\text{c)} \operatorname{tg} (-940^\circ) = \operatorname{tg} (-2 \times 360^\circ - 220^\circ) = \operatorname{tg} (-220^\circ)$$

46.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sin (780^\circ) &= \sin (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \\ &= \sin (60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos (780^\circ) = \cos (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \cos (60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} (780^\circ) = \operatorname{tg} (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} (60^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sin (1125^\circ) &= \sin (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \\ &= \sin (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (1125^\circ) &= \cos (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \\ &= \cos (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} (1125^\circ) = \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} (45^\circ) = 1$$

$$\text{c)} \sin (1110^\circ) = \sin (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin (30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos (1110^\circ) = \cos (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \cos (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} (1110^\circ) = \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

47.

$$\begin{aligned} \text{a)} \cos (450^\circ) + 2 \sin (765^\circ) - \operatorname{tg} (720^\circ) &= \\ &= \cos (360^\circ + 90^\circ) + 2 \sin (2 \times 360^\circ + 45^\circ) - \\ &- \operatorname{tg} (2 \times 360^\circ) = \\ &= \cos (90^\circ) + 2 \sin (45^\circ) - \operatorname{tg} (0^\circ) = \\ &= 0 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \cos^2 (361^\circ) - \operatorname{tg} (405^\circ) + \sin^2 (721^\circ) &= \\ &= \cos^2 (360^\circ + 1^\circ) - \operatorname{tg} (360^\circ + 45^\circ) + \\ &+ \sin^2 (2 \times 360^\circ + 1^\circ) = \\ &= \cos^2 (1^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) + \sin^2 (1^\circ) = \\ &= 1 - 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sin (-30^\circ) + \cos (-60^\circ) + \operatorname{tg} (-45^\circ) &= \\ &= -\sin (30^\circ) + \cos (60^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sin (-780^\circ) - \cos (-1470^\circ) - \operatorname{tg} (-420^\circ) &= \\ &= -\sin (780^\circ) - \cos (1470^\circ) + \operatorname{tg} (420^\circ) = \\ &= -\sin (2 \times 360^\circ + 60^\circ) - \cos (4 \times 360^\circ + 30^\circ) + \\ &+ \operatorname{tg} (360^\circ + 60^\circ) = \\ &= -\sin (60^\circ) - \cos (30^\circ) + \operatorname{tg} (60^\circ) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sin (150^\circ) + \cos (120^\circ) + \operatorname{tg} (135^\circ) &= \\ &= \sin (180^\circ - 30^\circ) + \cos (180^\circ - 60^\circ) + \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = \\ &= \sin (30^\circ) - \cos (60^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sin (840^\circ) - \cos (510^\circ) - \operatorname{tg} (1215^\circ) &= \\ &= \sin (2 \times 360^\circ + 120^\circ) - \cos (360^\circ + 150^\circ) - \\ &- \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 135^\circ) = \\ &= \sin (120^\circ) - \cos (150^\circ) - \operatorname{tg} (135^\circ) = \\ &= \sin (180^\circ - 60^\circ) - \cos (180^\circ - 30^\circ) - \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = \\ &= \sin (60^\circ) + \cos (30^\circ) + \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

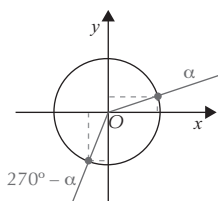
50.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 2 \operatorname{sen}(210^\circ) + 4 \cos(240^\circ) + \operatorname{tg}(600^\circ) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ) + 4 \cos(180^\circ + 60^\circ) + \\
 & + \operatorname{tg}(360^\circ + 180^\circ + 60^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(30^\circ) - 4 \cos(60^\circ) + \operatorname{tg}(60^\circ) = \\
 & = -2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \\
 & = -1 - 2 + \sqrt{3} = \\
 & = -3 + \sqrt{3} \\
 \text{b)} \quad & -2 \operatorname{sen}(600^\circ) - \cos(225^\circ) - 3 \operatorname{tg}(930^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(360^\circ + 240^\circ) - \cos(180^\circ + 45^\circ) - \\
 & - 3 \operatorname{tg}(2 \times 360^\circ + 210^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) + \cos(45^\circ) - 3 \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(60^\circ) + \cos(45^\circ) - 3 \operatorname{tg}(30^\circ) = \\
 & = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
 & = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

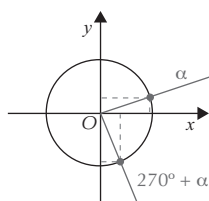
51.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 & = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\
 \text{b)} \quad & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = \\
 & = -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
 \end{aligned}$$

52.



$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\
 \cos(270^\circ - \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\
 \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
 \end{aligned}$$



$$\operatorname{sen}(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(270^\circ + \alpha)}{\cos(270^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

53.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) - \cos(720^\circ - \alpha) + \\
 & + \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha) = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos(-\alpha) + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \\
 \text{b)} \quad & -\operatorname{tg}(1080^\circ + \beta) - \cos(180^\circ - \beta) + \\
 & + \operatorname{sen}(270^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(360^\circ - \beta) = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \operatorname{sen}(90^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(-\beta) = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \cos \beta + \operatorname{sen} \beta = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta \\
 \text{c)} \quad & -2 \cos(450^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(540^\circ + \gamma) - \\
 & - \cos(\gamma - 180^\circ) - 3 \operatorname{sen}(-\gamma - 270^\circ) = \\
 & = -2 \cos(90^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(180^\circ + \gamma) - \\
 & - \cos(180^\circ - \gamma) + 3 \operatorname{sen}(270^\circ + \gamma) = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \cos \gamma = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma - 2 \cos \gamma \\
 \text{d)} \quad & 2 \operatorname{sen}(-270^\circ + \delta) - 3 \operatorname{sen}(\delta - 90^\circ) + \\
 & + 5 \cos(-180^\circ - \delta) + 2 \operatorname{tg}(-360^\circ + \delta) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(90^\circ + \delta) + 3 \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) + \\
 & + 5 \cos(180^\circ + \delta) + 2 \operatorname{tg} \delta = \\
 & = 2 \cos \delta + 3 \cos \delta - 5 \cos \delta + 2 \operatorname{tg} \delta = \\
 & = 2 \operatorname{tg} \delta \\
 \text{e)} \quad & \frac{\operatorname{sen}(-180^\circ - \epsilon) - \cos(270^\circ - \epsilon)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \epsilon) - 2 \cos(180^\circ + \epsilon)} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}(\epsilon + 180^\circ) = \\
 & = \frac{-\operatorname{sen}(180^\circ + \epsilon) + \cos(90^\circ - \epsilon)}{\cos \epsilon + 2 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{\operatorname{sen} \epsilon + \operatorname{sen} \epsilon}{3 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{2 \operatorname{sen} \epsilon}{3 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{4}{3} \operatorname{tg} \epsilon
 \end{aligned}$$

$$54. \operatorname{tg}(-\alpha) \times \operatorname{sen}(-90^\circ + \alpha) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha \times (-\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$$

Logo, a opção correta é a (B).

$$55. \cos(-90^\circ - \alpha) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(90^\circ + \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Como $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in]90^\circ, 270^\circ[$, então α pertence ao 2.º quadrante.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

Uma vez que α pertence ao 2.º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Então:

$$\sin(180^\circ - \alpha) \times \cos(180^\circ - \alpha) + \sin^2(-\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) =$$

$$= \sin \alpha \times (-\cos \alpha) + \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) =$$

$$= -\sin \alpha \times \cos \alpha + \sin^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{9}{25} + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{159}{100}$$

56. Uma vez que $\operatorname{tg} x > 0$ e que $x \in]-180^\circ, 0^\circ[$, então x pertence ao 3.º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

Como x pertence ao 3.º quadrante, então

$$\cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

Como x pertence ao 3.º quadrante, então

$$\sin x = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então:

$$\sin^2(180^\circ + x) - 3 \sin(90^\circ + x) + \cos(270^\circ + x) + \sin^2(90^\circ - x) =$$

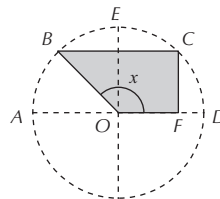
$$= \sin^2 x - 3 \cos x - \cos(90^\circ + x) + \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \cos x + \sin x =$$

$$= \frac{1}{3} - 3 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3} =$$

$$= 1 + \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

57.



$$\overline{OF} = -2 \cos x$$

$$\overline{FC} = 2 \sin x$$

$$\overline{BC} = -4 \cos x$$

A área do trapézio $[OBCF]$ é dada por:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{OF}}{2} \times \overline{FC} = \frac{-4 \cos x - 2 \cos x}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= -6 \cos x \sin x$$

58.

a) Sendo o comprimento do arco igual ao raio, então a amplitude do arco correspondente é 1 radiano.

$$\text{b) } \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ rad}$$

$$\text{c) } \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{1 \times 1}{2} = 0,5 \text{ rad}$$

$$\text{d) } \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{0,5 \times 1}{2} = 0,25 \text{ rad}$$

59.

$$\text{a) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, $\frac{2\pi}{3}$ é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de 120° .

$$\text{b) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Logo, $\frac{3\pi}{4}$ é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de 135° .

$$c) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de 150° .

$$d) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{200^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{200\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{9}.$$

Logo, $\frac{10\pi}{9}$ é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de 200° .

$$e) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{-70^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{-70\pi}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{18}.$$

Logo, $-\frac{7\pi}{18}$ é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de -70° .

60.

$$a) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{2\pi}{3} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{2\pi}{3}}{\pi} \Leftrightarrow x = 120.$$

Logo, 120 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

$$b) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{3} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \left(-\frac{5\pi}{3}\right)}{\pi} \Leftrightarrow x = -300.$$

Logo, -300 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de $-\frac{5\pi}{3}$ radianos.

$$c) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{7\pi}{6} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{7\pi}{6}}{\pi} \Leftrightarrow x = 210.$$

Logo, 210 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de $\frac{7\pi}{6}$ radianos.

$$d) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{3\pi}{4} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{3\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow x = 135.$$

Logo, 135 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianos.

$$e) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{4} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{\pi} \Leftrightarrow x = -225.$$

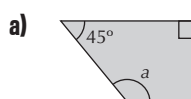
Logo, -225 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de $-\frac{5\pi}{4}$ radianos.

$$f) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 1}{\pi} \Leftrightarrow x \approx 57,3.$$

Logo, 57,3 é a medida aproximada em graus da amplitude de um ângulo de 1 radiano.

61.

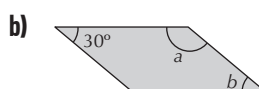


$$a = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$



$$a = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

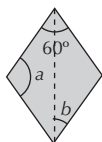
$$b = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } b = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

c)



$$a = \frac{360^\circ - 60^\circ - 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$b = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } b = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

62.

$$\text{a) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 1}{\pi} \approx 57,2958.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,2958^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,2958 \times 60}{1} = 17,748.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,748'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,748 \times 60}{1} \approx 45.$$

Logo, 1 radiano corresponde aproximadamente a $57^\circ 17' 45''$.

$$\text{b) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{\pi}{11} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{\pi}{11}}{\pi} \approx 16,3636.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,3636^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,3636 \times 60}{1} = 21,816.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,816'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,816 \times 60}{1} \approx 49.$$

Logo, $\frac{\pi}{11}$ radianos correspondem aproximadamente a $16^\circ 21' 49''$.

$$\text{c) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{6\pi}{7} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{6\pi}{7}}{\pi} \approx 154,2857.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,2857^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,2857 \times 60}{1} = 17,142.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,142'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,142 \times 60}{1} \approx 9.$$

Logo, $\frac{6\pi}{7}$ radianos correspondem aproximadamente a $154^\circ 17' 9''$.

$$\text{d) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{10,4 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 10,4}{\pi} \approx 595,8761.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,8761^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,8761 \times 60}{1} = 52,566.$$

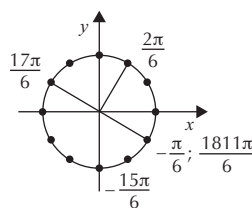
$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,566'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,566 \times 60}{1} \approx 34.$$

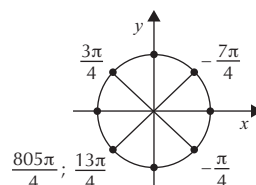
Logo, 10,4 radianos correspondem aproximadamente a $595^\circ 52' 34''$.

63.

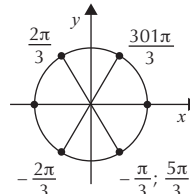
a)



b)



c)



64.

a) $13\pi = 6 \times 2\pi + \pi$ $-13\pi = -6 \times 2\pi - \pi$
 Ora, π e $-\pi$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo 13π e -13π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

b) $2016\pi = 1013 \times 2\pi$
 Ora, 0 e 2π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo 0 e 2016π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

c) $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$
 Ora, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

d) $\frac{32\pi}{3} = 5 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$
 Logo, $-\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{32\pi}{3}$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

e) $-\frac{15\pi}{4} + 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$ $-\frac{109\pi}{4} + 14 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$
 Logo, $-\frac{15\pi}{4}$ e $-\frac{109\pi}{4}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

f) $\frac{25\pi}{6} - 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$ $\frac{2018\pi}{6} - 168 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$
 Logo, $\frac{25\pi}{6}$ e $\frac{2018\pi}{6}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

65. $\frac{2\pi}{18} = \frac{2 \times 0,5 \times \pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 9$

A distância percorrida foi de 9 metros.

66. $\frac{2\pi}{x} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi \times \frac{\pi}{2}}{10\pi} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}$
 A amplitude do arco AB é $\frac{\pi}{10}$ radianos.

67. $\frac{2\pi}{5} = \frac{6^2\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \times 36\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 90$
 A área do setor circular é 90 cm^2 .

68. $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow 4 = \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow r^2 = 16$
 Logo, $r = \sqrt{16} = 4$.
 O raio do setor circular é 4 cm.

69.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2r\pi}{\pi} \\ \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{r^2\pi}{\pi} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = 4r \\ \frac{2\pi}{\alpha} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4r \\ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 4r = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r - 4) = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \vee r = 4 \\ \text{impossível} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \frac{2\pi}{\alpha} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{16} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \frac{\pi}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

O raio da circunferência é 4 cm e a amplitude do arco é $\frac{\pi}{8}$ radianos.

70.

a) $-2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(\frac{28\pi}{3}\right) =$
 $= -2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$
 $= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$
 $= 0$

c) $\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right) =$
 $= \cos\left(7\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\frac{1}{2} - 1 =$
 $= -\frac{3}{2}$

d) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \text{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$
 $= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{6}\right) &= \\
&= \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

71.

$$\begin{aligned}
\text{a)} 2 \operatorname{sen}(-x) + \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{sen} x - \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} -\cos(-x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -\cos x - \operatorname{tg} x + \cos x + \cos x = \\
&= -\operatorname{tg} x + \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} 2 \cos\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{sen}(3\pi - x) + \\
+ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(x - \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) &= \\
&= -\operatorname{sen} x + \cos(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\
&= -\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x = \\
&= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(\pi + x) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \\
+ \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= \\
&= (-\operatorname{sen} x)(-\cos x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)} 2 \operatorname{sen}(8\pi - x) + 3 \cos\left(-x - \frac{19\pi}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}(-x + 200\pi) &= \\
&= -2 \operatorname{sen} x + 3 \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}(-x) = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{tg} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \frac{2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sen}(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \operatorname{sen}(-x)} &= \\
&= \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{sen} x - \cos x - \operatorname{sen} x} = \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x}{-\cos x} = \\
&= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \\
&= -\operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$72. \cos\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$$

Como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, então α pertence ao 2.º quadrante.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Uma vez que α pertence ao 2.º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Então:

$$\cos(-4\pi - \alpha) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(3\pi - \alpha) =$$

$$= \cos \alpha - 2 \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{11\sqrt{2}}{12}$$

73. $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 2 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -2$

Como $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, então α pertence ao 4.º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

Uma vez que α pertence ao 4.º quadrante, então

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

Uma vez que α pertence ao 4.º quadrante, então

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(-\alpha) + \sin(\pi + \alpha) &= \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \\ &= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5} + 10}{5} \end{aligned}$$

74.

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{(1 + \operatorname{tg}(\pi + \alpha))^2}{1 + \operatorname{tg}^2(-\alpha)} &= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} &= -\frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha) \end{aligned}$$

75.

a) Seja M o ponto médio de $[AB]$.
 $\overline{OM} = 3$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AM}}{3} \\ &\Leftrightarrow \overline{AM} = -3 \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{3}{\overline{OA}} \\ &\Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Logo, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado por:

$$2 \times (-3 \operatorname{tg} \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha}\right) = -6 \operatorname{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= \frac{2}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{21}{25}$$

Como $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} -6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x} &= -6 \times \left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) - \frac{6}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = \\ &= \frac{12\sqrt{21}}{21} + \frac{30\sqrt{21}}{21} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

Unidade 5 - Funções trigonométricas

Páginas 66 a 91

76.

a) $f(x) = \sin x - 1$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [-2, 0].$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de f são da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $g(x) = 3 \sin x$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $D'_g = [-3, 3]$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de g são da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$c) h(x) = 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 2 - \left(\frac{x}{2}\right) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $D'_h = [1, 3]$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função h não tem zeros.

$$d) i(x) = 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \leq -3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $D'_i = [-5, -3]$.

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função i não tem zeros.

77.

$$a) f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = -\frac{1}{\sin x} = -f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, f é uma função ímpar.

$$b) g(x) = \frac{x}{\sin x + 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \sin x + 1 \neq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cálculo auxiliar

$$\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{\sin(-x) + 1} = \frac{-x}{-\sin x + 1}$$

Assim, existem valores reais para os quais

$g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$, logo g não é uma função par nem ímpar.

$$c) h(x) = \frac{\sin x}{2x}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 \times (-x)} = \frac{-\sin x}{-2x} = \frac{\sin x}{2x} = h(x), \forall x \in D_h$$

Logo, h é uma função par.

78.

$$a) f(x) = 1 + \cos x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [0, 2]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de f são da forma $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$b) g(x) = -5 \cos x$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \cos x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq -5 \cos x \geq -5$$

Logo, $D'_g = [-5, 5]$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -5 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de g são da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$c) h(x) = 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2$$

Logo, $D'_h = [2, 4]$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função h não tem zeros.

$$d) i(x) = -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow -1 \geq -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -3$$

Logo, $D'_i = [-3, -1]$.

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função i não tem zeros.

79.

$$a) f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, a função f é uma função par.

$$b) g(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{\cos(-x)} = -\frac{x}{\cos x} = -g(x), \forall x \in D_g$$

Logo, a função g é uma função ímpar.

$$c) h(x) = \sin x + \cos x$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$h(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$$

Assim, existem valores reais para os quais

$h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, logo h não é uma função par nem ímpar.

$$80. d(t) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

$$a) d(2) = 40 - 15 \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 40 - \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 29,4$$

Passados 2 segundos do início do movimento, a bola encontrava-se a uma distância do chão de aproximadamente 29,4 cm.

$$b) -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -15 \leq 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 15$$

$$\Leftrightarrow 15 \geq -15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq -15$$

$$\Leftrightarrow 55 \geq 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq 25$$

A distância máxima da bola ao chão é 55 cm e a distância mínima é 25 cm.

81.

$$a) f(x) = \tan(3x)$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

$$b) g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D'_g = \mathbb{R}$$

$$c) h(x) = \tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 2$$

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x + \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 2 \geq -2$$

$$\text{Logo, } D'_h = [-2, +\infty[.$$

82.

$$a) f(x) = \sin(3x)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, f é uma função periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

$$b) g(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$g(x + 10\pi) = \cos\left(\frac{x + 10\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, g é uma função periódica de período 10π .

$$c) h(x) = \tan\left(2\pi x + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$h\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{7}\right) =$$

$$= \tan\left(2\pi x + \pi + \frac{\pi}{7}\right) = \tan\left(2\pi x + \frac{\pi}{7}\right) = h(x), \forall x \in D_h$$

Logo, h é uma função periódica de período $\frac{1}{2}$.

83.

a) Seja M o ponto médio de $[PQ]$.

$$\overline{PM} = \sqrt{2} \cos \alpha$$

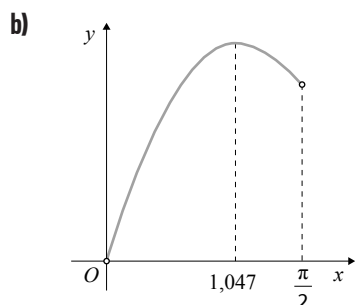
$$\overline{OP} = \sqrt{2} \sin \alpha$$

Logo, a área do triângulo $[PQO]$ é dada por:

$$\frac{2\sqrt{2} \cos \alpha \times \sqrt{2} \sin \alpha}{2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{(\sqrt{2})^2 \pi}{x} \Leftrightarrow x = \alpha$$

Logo, a área do setor circular é dada por α .
Assim, a área da região sombreada é dada por:
 $\alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$.



Logo, $\alpha \approx 1,047$.

84.

a) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

c) $5 \arcsen(-1) = 5 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}$

d) $\arcsen\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

85.

a) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c) $-2 \arccos(-1) = -2 \times \pi = -2\pi$

d) $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

e) $\cos(\arccos 0) = 0$

86.

a) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

c) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

d) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

87. $\cos\left(\arcsen \frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) =$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}$

88. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

a) Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \frac{\pi}{4}$.

b) Em $[0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

c) Em $[0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

d) Em $[\pi, 2\pi]$, nenhum valor de x satisfaz a condição.

e) Em $[\pi, 3\pi]$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$.

89.

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \vee x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{3\pi}{10} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 \vee \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

90. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

a) Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \frac{\pi}{6}$.

b) Em $[0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{6}$.

c) Em $[0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

d) Em $[-\pi, \pi]$, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$.

e) Em $[\pi, 3\pi]$, $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ ou
 $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.

f) Em $\mathbb{R}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

91.

a) $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1$
 $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 2$
 Eq. impossível

d) $2 \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

92. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

a) Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Em $[0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{3}$.

c) Em $[0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

d) Em $[-2\pi, \pi]$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ ou
 $x = -2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$.

e) Em $\mathbb{R}$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

93.

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

94.

a) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x =$
 $= (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) =$
 $= \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) =$
 $= \operatorname{sen}^2 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x =$
 $= 2 \operatorname{sen}^2 x - 1$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\operatorname{sen}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \vee \operatorname{sen} x = -1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

95.

a) $T(t) = 17 \Leftrightarrow 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 17$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(t+7)}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi(t+7) = 6\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t+7 = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k=1$, então $t=11$.

Se $k=2$, então $t=23$.

Logo, a água esteve à temperatura de 17 °C às 11 h e às 23 h.

96.

a) $\cos x = 0,7$

Cálculo auxiliar

$$\cos^{-1}(0,7) \approx 0,80$$

Então, $x \approx 0,80 + 2k\pi \vee x \approx -0,80 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Se $k=0$, então $x \approx 0,80 \text{ rad}$ ou $x \approx -0,80 \text{ rad}$ e ambos os valores pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\operatorname{sen}(2x) = \frac{3}{5}$

Cálculo auxiliar

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0,64$$

Então:

$$2x \approx 0,64 + 2k\pi \vee 2x \approx \pi - 0,64 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja:

$$2x \approx 0,64 + 2k\pi \vee 2x \approx 2,50 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pelo que:

$$x \approx 0,32 + k\pi \vee x \approx 1,25 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x \approx 0,32 \text{ rad}$ ou $x \approx 1,25 \text{ rad}$, e ambos os valores pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\text{tg}(3x) = -1,2$

Cálculo auxiliar

$$\text{tg}^{-1}(-1,2) \approx -0,88$$

Então:

$$3x \approx -0,88 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja:

$$x \approx -0,29 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 1$, então $x \approx 0,76 \text{ rad} \in [0, \pi]$.

Se $k = 2$, então $x \approx 1,80 \text{ rad} \in [0, \pi]$.

Se $k = 3$, então $x \approx 2,85 \text{ rad} \in [0, \pi]$.

97.

a) $2 \cos x \text{tg} x = -\text{tg} x$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \text{tg} x + \text{tg} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg} x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = 0 \in [0, 2\pi]$ ou

$$x = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi] \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} \notin [0, 2\pi].$$

Se $k = 1$, então $x = \pi \in [0, 2\pi]$ ou

$$x = \frac{8\pi}{3} \notin [0, 2\pi] \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi].$$

Se $k = 2$, então $x = 2\pi \in [0, 2\pi]$ ou

$$x = \frac{14\pi}{3} \notin [0, 2\pi] \text{ ou } x = \frac{10\pi}{3} \notin [0, 2\pi].$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

b) $-3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 3$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{20} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{7\pi}{20} \in]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{13\pi}{20} \in]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{33\pi}{20} \in]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{-\frac{7\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{33\pi}{20}\right\}.$$

c) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -x + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi \vee -\frac{x}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4k\pi \vee x = -2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3} \vee x = -2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = 0 \in [0, 2\pi]$ ou

$x = -2\pi \notin [0, 2\pi]$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$ ou

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$.

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

d) $\cos(2x) = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \vee 2x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ ou

$x = -\pi \in [-\pi, \pi]$.

Se $k = -1$, então $x = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ ou

$x = -3\pi \notin [-\pi, \pi]$.

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}.$$

98. $\cos^2 x + 2 \sin x = 2$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2 \sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$$

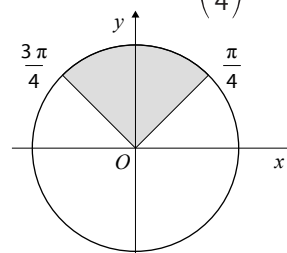
$$\Leftrightarrow \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$

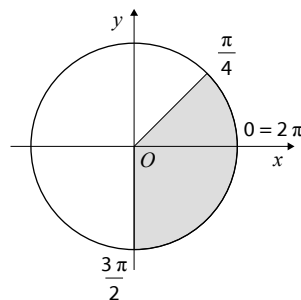
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

99.

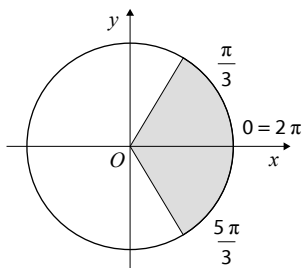
a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então C.S. = $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.



b) $\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



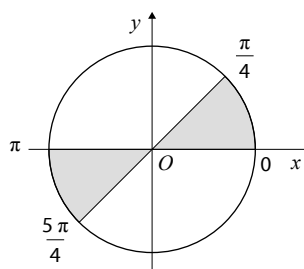
Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então

C.S. = $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então

C.S. = $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

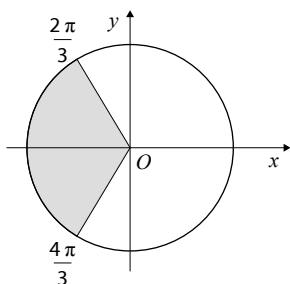
b) $\operatorname{tg} x \geq 0 \wedge \operatorname{tg} x \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg} 0 \wedge \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então

C.S. = $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$.

c) $\cos x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



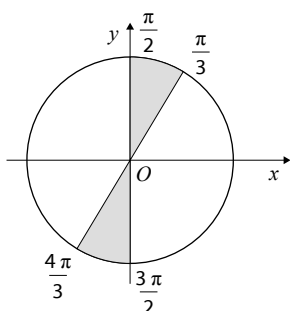
Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então C.S. = $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

c) $|\operatorname{sen} x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow |\operatorname{sen} x| < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

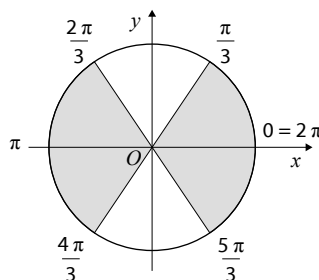
$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$



Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então

C.S. = $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então

C.S. = $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

100.

a) $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \wedge \cos x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Aprende Fazendo

Páginas 96 a 114

1. $\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2,3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2,3}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

Logo, $x \approx 6,32$ metros.

A opção correta é a (A).

2. $-2018^\circ = -6 \times 360^\circ + 142^\circ$

O lado extremidade de um ângulo de amplitude -2018° pertence ao 2.º quadrante.

A opção correta é a (B).

3. $P(2 \cos 120^\circ, 2 \sin 120^\circ) =$

$$= \left(2 \times \left(-\frac{1}{2} \right), 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-1, \sqrt{3})$$

A opção correta é a (C).

4. $\frac{9\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8}$, logo $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{9\pi}{8}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$-\frac{19\pi}{10} = -2\pi + \frac{\pi}{10}$, logo $\frac{\pi}{10}$ e $-\frac{19\pi}{10}$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$, logo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{2016\pi}{6} = 351\pi$, logo $\frac{2016\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

A opção correta é a (B).

5. $\sin 1 < \sin \pi \Leftrightarrow \sin 1 < 0$ é uma afirmação falsa, uma vez que o ângulo de amplitude 1 rad é um ângulo do 1.º quadrante, pelo que o seu seno é positivo.

$\cos 2 > \cos 1$ é uma afirmação falsa, uma vez que os ângulos de amplitudes 1 rad e 2 rad são ângulos do 1.º quadrante e, neste quadrante, o cosseno é decrescente.

$\cos 2 > \cos \pi \Leftrightarrow \cos 2 > -1$ é uma afirmação verdadeira.

$\operatorname{tg} 3 > 0$ é uma afirmação falsa, uma vez que o ângulo de amplitude 3 rad é um ângulo do 2.º quadrante, pelo que a sua tangente é negativa.

A opção correta é a (C).

6. $\sin \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\cos x$. Uma vez que

$x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$, então $\cos x < 0$ e, portanto, $-\cos x > 0$.

$\sin (-24\pi + x) = \sin x$. Uma vez que $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$, então $\sin x < 0$.

Uma vez que $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$, então $\operatorname{tg} x > 0$.

$\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$. Uma vez que $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$, então $\sin x < 0$ e, portanto, $-\sin x > 0$.

A opção correta é a (B).

7. $\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{4} \right) =$
 $= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) =$
 $= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

A opção correta é a (B).

8. $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\sin \alpha < 0$.

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\cos \beta > 0$.

Logo, $\sin \alpha \cos \beta < 0$ e a afirmação é verdadeira.

$\sin (-\pi - \alpha) \cos \left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) =$

$= -\sin (\pi + \alpha) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha \left(-\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) =$

$= \sin \alpha \sin \alpha$. Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\sin \alpha < 0$.

Logo, $\sin \alpha \sin \alpha > 0$ e a afirmação é verdadeira.

$-\sin \left(\frac{7\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta = -\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta =$

$= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta = \cos \alpha - \cos \beta$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos \alpha < 0$.

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\cos \beta > 0$.

Logo, $\cos \alpha - \cos \beta < 0$ e a afirmação é verdadeira.

$-\operatorname{tg} (-\pi - \alpha) < -\operatorname{tg} (-\beta) \Leftrightarrow \operatorname{tg} (\pi + \alpha) < \operatorname{tg} \beta$
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\operatorname{tg} \beta < 0$. Logo, $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ e a afirmação é falsa.

A opção correta é a (D).

9. Uma vez que α é um ângulo do 2.º quadrante e β é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \beta > 0$, pelo que $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$.

Uma vez que α é um ângulo do 2.º quadrante e β é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que $\sin \alpha > 0$ e $\cos \beta < 0$, pelo que $\sin \alpha > \cos \beta$.

Uma vez que β é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que $\operatorname{tg} \beta > 0$ e $\cos \beta < 0$, pelo que $\operatorname{tg} \beta > \cos \beta$.

Uma vez que α é um ângulo do 2.º quadrante e β é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que $\cos \alpha < 0$ e $\sin \beta < 0$, pelo que $\cos \alpha + \sin \beta < 0$.
A opção correta é a (B).

10. $-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos(\pi t) + 5 \leq 6$

Logo, a distância do centro da rocha ao fundo do lago varia entre 4 metros e 6 metros.

A opção correta é a (A).

11. $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Então, no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, a equação tem três

soluções: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

A opção correta é a (C).

12. A afirmação (I) é falsa porque o valor do seno e o valor do cosseno são sempre menores ou iguais a 1. A afirmação (II) é falsa porque no 2.º quadrante o cosseno é decrescente.

A afirmação (III) é falsa porque $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$.

A opção correta é a (A).

13. Os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $300^\circ + k 180^\circ, k \in \mathbb{Z}_0^+$ situam-se nos 2.º e 4.º quadrantes.

A opção correta é a (B).

14. Para que $\tan \theta \times \sin \theta < 0$, então o lado extremidade de θ terá de se situar nos 2.º ou 3.º quadrantes. $800^\circ = 2 \times 360^\circ + 80^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 1.º quadrante.

$-440^\circ = -360^\circ - 80^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4.º quadrante.

$690^\circ = 360^\circ + 330^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4.º quadrante.

$-530^\circ = -360^\circ - 170^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 3.º quadrante.

A opção correta é a (D).

15.

a) $D = \{\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha \neq 0 \wedge 1 + \sin \alpha \neq 0\}$

Cálculos auxiliares

• $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• $1 + \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Logo, $D = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} =$

$= \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

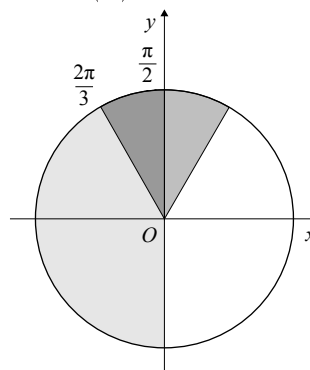
A opção correta é a (D).

b) $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} =$
 $= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \times \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} =$
 $= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} =$
 $= \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha) + \cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} =$
 $= \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

A opção correta é a (A).

16. $\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \tan \alpha < 0$

$\Leftrightarrow \sin \alpha \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \wedge \tan \alpha < \tan 0$



Logo, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

A opção correta é a (D).

17. Se $\sin \alpha \times \cos \alpha > 0$, então α é um ângulo do 1.º ou do 3.º quadrantes. Se $x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 < \cos x_2$, então o cosseno é crescente, e isso acontece no 3.º e no 4.º quadrantes. Logo, α é um ângulo do 3.º quadrante, onde o seno é decrescente.

A opção correta é a (B).

18. $\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - \beta$

$\beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{3\pi}{2} - \beta$

Assim:

$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \gamma =$
 $= \cos(\pi - \beta) + \cos \beta + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) =$
 $= -\cos \beta + \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\cos \beta =$
 $= -\cos(\pi - \alpha) =$

$$= \cos \alpha$$

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 19. |\cos x| = 1 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 20. f(x) &= \cos(2x) \\ \text{Maximizantes de } f: \\ \cos(2x) &= 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{Minimizantes de } f: \\ \cos(2x) &= -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

No intervalo $]0, 2\pi]$, a função f tem 4 maximizantes e minimizantes. Assim, no intervalo $]0, 50\pi]$ terá $4 \times 25 = 100$ maximizantes e minimizantes, mas um deles é 50π . Logo, no intervalo $]0, 50\pi]$, a função f tem 99 maximizantes e minimizantes. A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 21. \arcsen\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) - \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) &= \\ = \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \\ = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} &= \\ = -\frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

22.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \alpha &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \sin \gamma &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \cos \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 10^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 244$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}.$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

c) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$15^2 = \overline{AB}^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 81$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = 9.$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \cos \gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

d) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$17^2 = \overline{BC}^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225$$

$$\text{Logo, } \overline{BC} = 15.$$

$$\sin \alpha = \frac{15}{17}; \cos \alpha = \frac{8}{17}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$\sin \gamma = \frac{8}{17}; \cos \gamma = \frac{15}{17}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{8}{15}$$

$$23. \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ logo } \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53,1^\circ.$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{13}, \text{ logo } \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22,6^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{7}{5}, \text{ logo } \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) \approx 54,5^\circ.$$

24. Seja h a altura do pinheiro.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{3,2} \Leftrightarrow h = 3,2 \operatorname{tg} 60^\circ$$

Logo, a altura do pinheiro é de aproximadamente 5,54 metros.

$$25. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{150} \Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 50\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{150} \Leftrightarrow \overline{AC} = 150 \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow \overline{AC} = 150$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 150 - 50\sqrt{3} \text{ metros.}$$

26. Seja x o comprimento da escada e seja α o ângulo que a escada faz com o chão.

$$\cos \alpha = \frac{0,1x}{x} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,1$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}(0,1) \approx 84^\circ.$$

$$27. \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2 \times 2\overline{MB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } \widehat{MAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{2\overline{CB}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \widehat{CAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

$$\text{Assim, } \widehat{CAM} = \widehat{CAB} - \widehat{MAB} =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 12,5^\circ.$$

28.

a) O seno e o cosseno têm o mesmo sinal no 1.º quadrante (ambos são positivos) e no 3.º quadrante (ambos são negativos).

b) O cosseno e a tangente são negativos no 2.º quadrante.

c) O seno cresce e o cosseno decresce no 1.º quadrante.

d) O cosseno e a tangente crescem no 3.º e no 4.º quadrantes.

29. Miguel: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25} \neq 1$, o que contraria a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

$$\text{Filipa: } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Logo, a Filipa tem razão.

30.

$$\mathbf{a)} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{21}{25}$$

$$\text{Uma vez que } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\mathbf{b)} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

31.

$$\mathbf{a)} 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathbf{b)} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

32.

$$\mathbf{a)} \operatorname{sen} 45^\circ \times \cos 30^\circ - \cos^2 10^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen}^2 10^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (\cos^2 10^\circ + \operatorname{sen}^2 10^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 4}{4}$$

$$\mathbf{b)} (\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 45^\circ)^2 + \frac{\cos 68^\circ}{\operatorname{sen} 22^\circ} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\cos 68^\circ}{\operatorname{sen} (90^\circ - 22^\circ)} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 68^\circ}{\cos 68^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathbf{c)} \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\mathbf{d)} \operatorname{sen}^2 12^\circ + \operatorname{sen}^2 78^\circ + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \operatorname{sen}^2 12^\circ + \operatorname{sen}^2 (90^\circ - 12^\circ) + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \operatorname{sen}^2 12^\circ + \cos^2 12^\circ + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$= 1 + \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} =$$

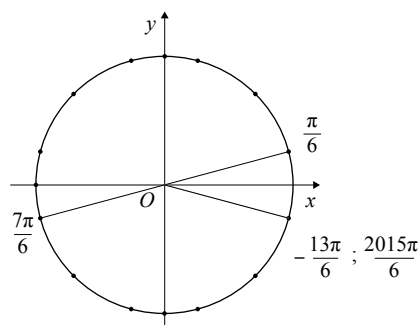
$$= 1 + \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= 1 + 2 - \sqrt{3} =$$

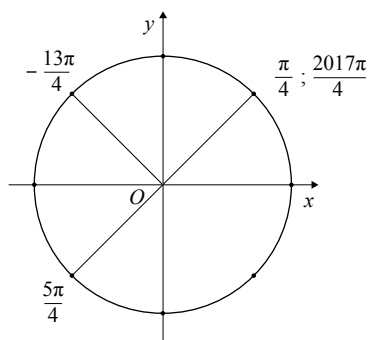
$$= 3 - \sqrt{3}$$

33.

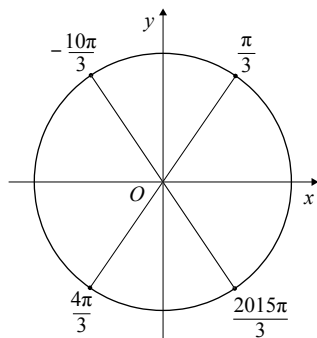
a)



b)



c)



34.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{0,5}{x} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{0,5 \times 180}{\pi}, \text{ logo } x \approx 28,6479. \\ \frac{0,6479}{y} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,6479 \Leftrightarrow y = 38,874 \\ \frac{0,874}{z} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,874 \Leftrightarrow z = 52,44 \end{aligned}$$

Logo, 0,5 radianos correspondem a, aproximadamente, $28^\circ 38' 52''$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{7}{x} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{7 \times 180}{\pi}, \text{ logo } x \approx 401,0705. \\ \frac{0,0705}{y} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,0705 \Leftrightarrow y = 4,23 \\ \frac{0,23}{z} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,23 \Leftrightarrow z = 13,8 \end{aligned}$$

Logo, 7 radianos correspondem a, aproximadamente, $401^\circ 4' 14''$.

$$\text{c)} \quad \frac{\frac{10\pi}{11}}{x} = \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{10\pi}{11} \times 180}{\pi}, \text{ logo}$$

$$x \approx 163,6364.$$

$$\frac{0,6364}{y} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,6364 \Leftrightarrow y = 38,184$$

$$\frac{0,184}{z} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,184 \Leftrightarrow z = 11,04$$

Logo, $\frac{10\pi}{11}$ radianos correspondem a, aproximadamente, $163^\circ 38' 11''$.

$$\text{d)} \quad \frac{\frac{24\pi}{7}}{x} = \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{24\pi}{7} \times 180}{\pi}, \text{ logo}$$

$$x \approx 617,1429.$$

$$\frac{0,1429}{y} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,1429 \Leftrightarrow y = 8,574$$

$$\frac{0,574}{z} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,574 \Leftrightarrow z = 34,44$$

Logo, $\frac{24\pi}{7}$ radianos correspondem a, aproximadamente, $617^\circ 8' 34''$.

$$\begin{aligned} 35. \quad & \cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}(-10\pi) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \\ & -\cos^2\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \\ & = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4\pi\right) + \operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \\ & -\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0 - \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ & = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{2} \end{aligned}$$

A Carlota tinha razão.

36.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= (1 - \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}^2 x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = \\ &= 2 - 2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \geq -2 \operatorname{sen} x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow 4 \geq 2 - 2 \operatorname{sen} x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_f = [0, 4].$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(x) &= \operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2 = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 1 + 2 \cos x = \\ &= 1 + 1 + 2 \cos x = \\ &= 2 + 2 \cos x = \\ &= 2(\cos x + 1) \end{aligned}$$

b) $D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2(\cos x + 1) \leq 4 \end{aligned}$$

Logo, $D'_g = [0, 4]$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(\cos x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, então

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } g(\alpha) &= 2(\cos \alpha + 1) = 2\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + 1\right) = \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2. \end{aligned}$$

38.

a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\operatorname{tg}^2 x \geq 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tg}^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x \leq 1$$

Logo, $D'_h =]-\infty, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{b) } h(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k = -1$, então $x = -\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{3\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Logo, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, os zeros de h são $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

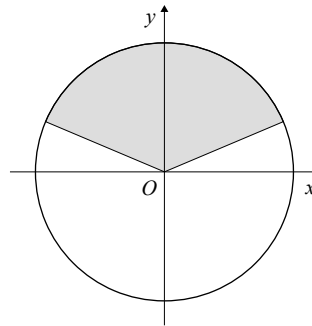
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{24}{25}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{24}$$

Logo, $h(\alpha) = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$.

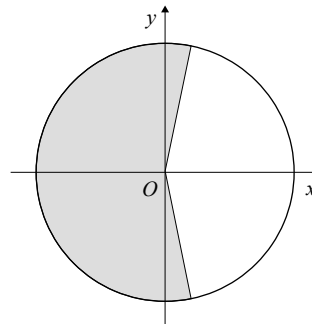
39.

a) $\sin x > \sin 25^\circ$



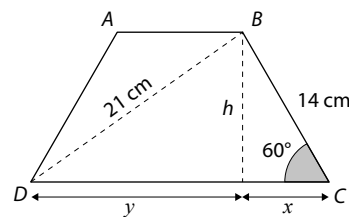
Logo, $x \in]25^\circ, 155^\circ[$.

b) $\cos x < \cos 80^\circ$



Logo, $x \in]80^\circ, 280^\circ[$.

40.



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{14} \Leftrightarrow h = 14 \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow h = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 7\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{14} \Leftrightarrow x = 14 \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 14 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 7$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$21^2 = y^2 + (7\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow y^2 = 441 - 147 \Leftrightarrow y^2 = 294$$

Logo, $y = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$.

Então, $\overline{AB} = 7\sqrt{6} - 7$.

Logo, o perímetro do trapézio é dado por:

$$14 + 7\sqrt{6} - 7 + 14 + 7 + 7\sqrt{6} = 28 + 14\sqrt{6} \text{ cm}$$

A área do trapézio é dada por:

$$\frac{7\sqrt{6} + 7 + 7\sqrt{6} - 7}{2} \times 7\sqrt{3} =$$

$$= \frac{14\sqrt{6}}{2} \times 7\sqrt{3} = 49\sqrt{18} = 147\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

41. Sejam x a altura do farol e y a distância entre o penhasco e a primeira posição do barco.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{y+100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 30^\circ \\ x = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y \operatorname{tg} 30^\circ = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y \operatorname{tg} 30^\circ - y \operatorname{tg} 15^\circ = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ) = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \times \operatorname{tg} 30^\circ \\ y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

Assim, $x = 50$ metros.

42. $\alpha + \beta = 18^\circ + 14^\circ = 32^\circ$

Sejam x a distância entre o pé do candeeiro e a luz que projeta e y a altura do candeeiro.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 14^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{x+0,75}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 14^\circ \\ x + 0,75 = y \operatorname{tg} 32^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y \operatorname{tg} 32^\circ - y \operatorname{tg} 14^\circ = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y (\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ) = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y = \frac{0,75}{\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ} \end{cases}$$

Assim, $y \approx 2$ metros.

43. $180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Sejam a a distância entre o ponto A e o barco e b a distância entre o ponto B e o barco.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{a}$$

Então:

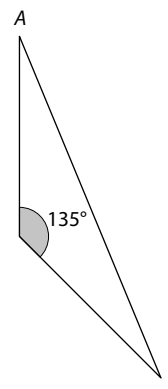
$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{a} \Leftrightarrow a = \frac{30 \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$$

Logo, $a \approx 19,6$ metros.

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{b} \Leftrightarrow b = \frac{30 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$$

Logo, $b \approx 26,4$ m.

44.



Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AB}^2 = 20^2 + 25^2 - 2 \times 20 \times 25 \times \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1025 - 1000 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1025 + 500\sqrt{2}$$

Assim, $\overline{AB} = \sqrt{1025 + 500\sqrt{2}}$ km.

45.

- a) Sejam α a amplitude do ângulo formado pelos dois cabos e β a amplitude do ângulo suplementar do ângulo que o cabo mais curto faz com o solo.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{70} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{50} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{50 \operatorname{sen} 42^\circ}{70}$$

Logo:

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{50 \operatorname{sen} 42^\circ}{70} \right) \approx 28,552^\circ$$

Então:

$$\beta \approx 180^\circ - 42^\circ - 28,552^\circ \approx 109,448^\circ$$

Seja x o comprimento do cabo mais comprido.

Novamente, pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{70} = \frac{\operatorname{sen} 109,448^\circ}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{70 \times \operatorname{sen} 109,448^\circ}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

Então, $x \approx 98,6$ metros.

- b) O ângulo que o cabo mais curto faz com o solo tem amplitude $180^\circ - 109,448^\circ = 70,552^\circ$, aproximadamente.

Seja h a altura do balão ao solo.

$$\operatorname{sen} 70,552^\circ = \frac{h}{70} \Leftrightarrow h = 70 \operatorname{sen} 70,552^\circ$$

Logo, $h \approx 66,0$ metros.

46.

a) Pela Lei dos Cossenos:

$$4^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow 16 = 85 - 84 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow 69 = 84 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{A}BC) = \frac{69}{84}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}BC = \cos^{-1}\left(\frac{69}{84}\right) \approx 34,8^\circ.$$

Analogamente:

$$6^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow 36 = 65 - 56 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow 29 = 56 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{C}AB) = \frac{29}{56}$$

$$\text{Logo, } \hat{C}AB = \cos^{-1}\left(\frac{29}{56}\right) \approx 58,8^\circ.$$

Analogamente:

$$7^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos (\hat{A}CB)$$

$$\Leftrightarrow 49 = 20 - 48 \cos (\hat{A}CB)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{A}CB) = \frac{3}{48}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}CB = \cos^{-1}\left(\frac{3}{48}\right) \approx 86,4^\circ.$$

b) Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BC}^2 = 23^2 + 35^2 - 2 \times 23 \times 35 \cos 61^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1754 - 1610 \cos 61^\circ$$

$$\text{Assim, } \overline{BC} = \sqrt{1754 - 1610 \cos 61^\circ} \approx 31,2.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}BC)}{23} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{35}$$

Logo:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}BC)}{23} \Leftrightarrow \sin (\hat{A}BC) = \frac{23 \sin 61^\circ}{31,2},$$

$$\text{o que significa que } \hat{A}BC = \sin^{-1}\left(\frac{23 \sin 61^\circ}{31,2}\right) \approx 40,1^\circ.$$

E:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{35} \Leftrightarrow \sin (\hat{A}CB) = \frac{35 \sin 61^\circ}{31,2},$$

$$\text{o que significa que } \hat{A}CB = \sin^{-1}\left(\frac{35 \sin 61^\circ}{31,2}\right) \approx 78,9^\circ.$$

c) $\hat{A}CB = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{8} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{AC}}$$

$$\text{Logo, } \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}, \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \overline{BC} \approx 7,0.$$

$$\text{E } \frac{\sin 80^\circ}{8} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}, \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \overline{AC} \approx 5,2.$$

d) Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 100^\circ}{14} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{A}CB) = \frac{12 \sin 100^\circ}{14}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}CB = \sin^{-1}\left(\frac{12 \sin 100^\circ}{14}\right) \approx 57,6^\circ.$$

$$\hat{A}BC \approx 180^\circ - 100^\circ - 57,6^\circ = 22,4^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 22,4^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 100^\circ}{14} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{14 \sin 22,4^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} \approx 5,4.$$

47. Seja α o ângulo que se quer determinar.

Pela Lei dos Cossenos:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos \alpha \Leftrightarrow 49 = 34 - 30 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 15 = -30 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ.$$

48. $\hat{B}DA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{2,7} = \frac{\sin 120^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2,7 \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2,7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2,7\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} \approx 4,7.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{2,4} = \frac{\sin (\hat{B}CD)}{2,7}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{2,7 \sin 60^\circ}{2,4}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{9}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Logo, } \hat{B}CD = \sin^{-1}\left(\frac{9\sqrt{3}}{16}\right) \approx 77^\circ.$$

$$\text{Assim, } \hat{C}BA \approx 180^\circ - 30^\circ - 77^\circ = 73^\circ.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 73^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 30^\circ}{2,4} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2,4 \sin 73^\circ}{0,5}$$

$$\text{Ou seja, } \overline{AC} \approx 4,6.$$

49. O quadrante em que o cosseno é crescente e a tangente é negativa é o 4.º quadrante.

a) No 4.º quadrante o seno é crescente, logo a afirmação é falsa.

b) No 4.º quadrante o cosseno é positivo, logo a afirmação é falsa.

c) No 4.º quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo, logo a afirmação é verdadeira.

d) No 4.º quadrante a tangente é crescente, logo a afirmação é falsa.

50.

a) $\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 90^\circ + \sin 120^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}$$

b) $\operatorname{tg} 225^\circ + (\sin 60^\circ + \sin 90^\circ)^2 - \cos 150^\circ =$

$$= \operatorname{tg} 45^\circ + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \cos 30^\circ =$$

$$= 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{11 + 6\sqrt{3}}{4}$$

c) $2 \cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ - \sin 45^\circ + 3 \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 135^\circ =$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{3} + 2$$

d) $\cos 120^\circ - \sin^2 135^\circ - \sin 150^\circ =$

$$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

51.

a) $\cos (180^\circ - x) + \sin (360^\circ + x) - \cos (90^\circ - x) =$

$$= -\cos x + \sin x - \sin x =$$

$$= -\cos x$$

b) $\cos (540^\circ - x) + \sin (90^\circ + x) - 2 \operatorname{tg} (-180^\circ - x) +$

$$+ \operatorname{tg} (-x + 270^\circ) =$$

$$= \cos (180^\circ - x) + \cos x + 2 \operatorname{tg} (180^\circ + x) + \operatorname{tg} (270^\circ - x) =$$

$$= -\cos x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (90^\circ - x) =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{\sin (90^\circ - x)}{\cos (90^\circ - x)} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

c) $\cos (90^\circ - x) \sin (180^\circ + x) - \operatorname{tg} (180^\circ - x) \sin (90^\circ - x) =$

$$= \sin x \times (-\sin x) + \operatorname{tg} x \times \cos x =$$

$$= -\sin^2 x + \sin x$$

d) $2 \cos (540^\circ - x) + 3 \sin (-x - 810^\circ) +$

$$+ 4 \operatorname{tg} (-x + 1080^\circ) =$$

$$= 2 \cos (180^\circ - x) + 3 \sin (-x - 90^\circ) + 4 \operatorname{tg} (-x) =$$

$$= -2 \cos x - 3 \cos x - 4 \operatorname{tg} x =$$

$$= -5 \cos x - 4 \operatorname{tg} x$$

52.

a) $\cos (-\beta) = \cos \beta = k$

b) $\cos (\pi - \beta) = -\cos \beta = -k$

c) $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta = \sqrt{1 - k^2}$

Cálculo auxiliar

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - k^2$$

$$\text{Como } \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \sin \beta = \sqrt{1 - k^2}.$$

d) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sqrt{1 - k^2}$

e) $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$

53.

a) $\sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) =$

$$= \sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) =$$

$$= \sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right) =$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$$

$$= 1$$

b) $(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha) = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \times \cos^2 \alpha =$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

54.

a) $\frac{3}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin \left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi + \sin \left(\frac{200\pi}{3}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \\
&= -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{-\sqrt{6} + 4}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{21\pi}{2}\right)\right)^2 - \cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &2 \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{39\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(2015\pi) = \\
&= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} \pi = \\
&= 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \\
&= 1 + \sqrt{2} + 1 = \\
&= 2 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad &\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

55.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &\cos(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}(-x) = \\
&= \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \\
&= \cos x - 3 \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(x + 11\pi) = \\
&= \cos x - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \cos(\pi + x) = \\
&= \cos x - 2 \cos x - 3 \cos x = \\
&= -4 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &\operatorname{tg}(-x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(8\pi + x) = \\
&= -\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + 3 \cos x - \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad &\operatorname{sen}(-2\pi + x) - 4 \operatorname{tg}(-\pi + x) + \cos(13\pi - x) \operatorname{tg}(x - 3\pi) = \\
&= \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{tg}(\pi - x) - \cos(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi - x) = \\
&= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \cos x \operatorname{tg} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \\
&= -4 \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad &\operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(-x) = \\
&= -\operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{tg} x \cos x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)} \quad &-\operatorname{sen}(-15\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi + x) + \\
&+ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \\
&= \operatorname{sen}(\pi + x) - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\
&= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad &-2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 7\pi) = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x) = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{56.} \quad &\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \sqrt{8} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8} \\
&1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \\
&\text{Como } \operatorname{tg} \alpha < 0 \text{ e } \alpha \in [2\pi, 3\pi], \text{ tem-se que} \\
&\alpha \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \text{ pelo que } \cos \alpha = -\frac{1}{3}. \\
&\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}(23\pi + \alpha) - \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\
&= -\operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \alpha) + \cos \alpha = \\
&= \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha = \\
&= \frac{8}{9} - \frac{1}{3} = \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{57.} \quad &4 \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \\
&\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(-\alpha) &= \cos(\pi - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{15} = \\ &= -\frac{19\sqrt{15}}{60} \end{aligned}$$

58. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \cos x \neq 0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\}$

Cálculos auxiliares

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $D_f \subset D_g = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = D$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = g(x) \end{aligned}$$

Assim, as funções f e g coincidem no domínio D .

59.

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(3x + 2) \leq 1 &\Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos(3x + 2) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 5 + 4 \cos(3x + 2) \leq 9 \end{aligned}$$

Logo, $D'_f = [1, 9]$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5 + 4 \cos(3x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(3x + 2) = -\frac{5}{4} \text{ que é uma equação impossível, visto que } -\frac{5}{4} < -1. \text{ Logo, a função } f \text{ não tem zeros.}$$

c) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 + 4 \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\right) =$
 $= 5 + 4 \cos(3x + 2\pi + 2) = 5 + 4 \cos(3x + 2) =$
 $= f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ logo } \frac{2\pi}{3} \text{ é período da função } f.$

60.

a) Seja h a altura do triângulo $[EAB]$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x$$

Então, a área do triângulo $[EAB]$ é dada por:

$$\frac{a \times \frac{a}{2} \operatorname{tg} x}{2} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x$$

Assim, a área da região sombreada da figura é dada por:

$$a^2 - 4 \times \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x = a^2 - a^2 \operatorname{tg} x = a^2(1 - \operatorname{tg} x) = A(x)$$

b) $A(x) = 36(1 - \operatorname{tg} x)$

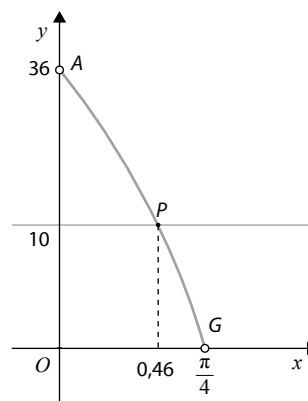
i) $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, então $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim, $A(\theta) = 36(1 - \operatorname{tg} \theta) = 36\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) =$
 $= 36 - 9\sqrt{2}.$

ii) $A(x) = 18 \Leftrightarrow 36(1 - \operatorname{tg} x) = 18$



Logo, $x \approx 0,46$ rad.

61.

a) $\widehat{DAB} = \widehat{CDA}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, uma vez que $[ABCD]$ é um trapézio isósceles.

$$\widehat{DAB} = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$$

Seja h a altura do trapézio e seja a tal que $\overline{AD} = \overline{BC} + 2a$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - x) &= \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen}(180^\circ - x) \\ &\Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - x) &= \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \cos(180^\circ - x) \\ &\Leftrightarrow a = -2 \cos x \end{aligned}$$

Então, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{(2 - 4 \cos x) + 2}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= \frac{4 - 4 \cos x}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= (2 - 2 \cos x) \times 2 \sin x =$$

$$= 4 \sin x - 4 \cos x \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= -\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow -\sin x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{5} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Como } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \cos x = -\frac{4}{5}.$$

Logo, a área do trapézio é:

$$4 \sin x - 4 \cos x \sin x = 4 \times \frac{3}{5} - 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{108}{25}$$

62.

$$\text{a) } 2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{6} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{7\pi}{6} \right\}.$$

$$\text{b) } \sqrt{3} + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, C.S.} = \emptyset.$$

$$\text{c) } 2 \sin(2x) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{8} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{5\pi}{8} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{7\pi}{8} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{13\pi}{8} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

$$\text{d) } 2\sqrt{3} \sin x = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{4} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

$$\text{e) } \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{3\pi}{2} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{f) } 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{8\pi}{3} \left(\notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

$$\text{g) } 6 \cos(2x) + \sqrt{18} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{9\pi}{8} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{7\pi}{8} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8} \right\}.$$

$$h) 2 \cos(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + 2k \vee x = -\frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \frac{7}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{5}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=2, \text{ então } x = \frac{13}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{11}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3} \right\}.$$

$$i) \operatorname{tg}(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=2, \text{ então } x = \frac{13\pi}{18} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=3, \text{ então } x = \frac{19\pi}{18} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=4, \text{ então } x = \frac{25\pi}{18} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{13\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{25\pi}{18} \right\}.$$

$$j) 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=0, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$k) \sqrt{12} + 2 \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$l) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \pi \left(\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \{\pi\}.$$

63.

$$a) 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sqrt{3} - 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) 2 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee 3x = \frac{9\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{3\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 2\sqrt{3} \cos(2x) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f) 2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{15} + 2k\pi \vee x = -\frac{7\pi}{15} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g) (2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{h) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{16} + \frac{3k\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{8} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{i) } \sin^2(3x) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x) = 1 \vee \sin(3x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{j) } \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{k) } \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin x = 3}_{\text{Eq. impossível}} \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{l) } 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{m) } \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{n) } \operatorname{tg}(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o) } 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{p) } \sqrt{12} + 2 \operatorname{tg}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{q) } \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{r) } \operatorname{tg}^2(\pi x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \operatorname{tg}(\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} + k \vee x = -\frac{1}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{s) } \operatorname{tg}^2(2x) + \sqrt{3} \operatorname{tg}(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) (\operatorname{tg}(2x) + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 0 \vee \operatorname{tg}(2x) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 0 \vee \operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

t) $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sen} x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x (1 + 2 \cos x) = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} x = 0 \vee 1 + 2 \cos x = 0) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{sen} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \wedge$$

$$\wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

64. $d(0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) =$
 $= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$$d(t) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

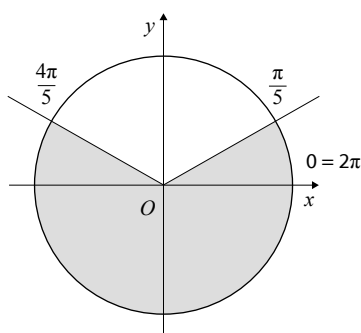
Se $k = 0$, então $t = 0$ ($\notin]0, 3]$) ou $t = \frac{2}{3}$ ($\in]0, 3]$).

Se $k = 1$, então $t = 2$ ($\in]0, 3]$) ou $t = \frac{8}{3}$ ($\in]0, 3]$).

O ponto P passou pelo ponto A aos $\frac{2}{3}$ s, 2 s e $\frac{8}{3}$ s.

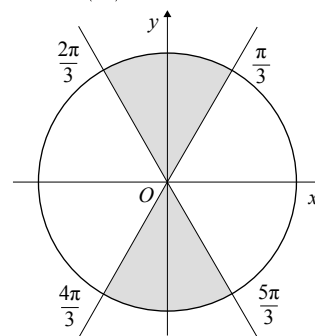
65.

a) $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{5} \right) \Leftrightarrow \left[0, \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, 2\pi \right]$



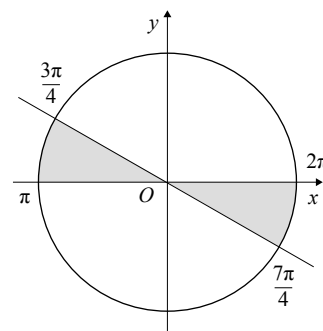
b) $|\cos x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \wedge \cos x \geq -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \wedge \cos x \geq \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$



$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$$

c) $\operatorname{tg} x \geq -1 \wedge \operatorname{tg} x \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \wedge \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 0$



$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$$

66. Considere-se o octógono inscrito numa circunferência. Uma vez que o octógono é regular, os seus vértices dividem a circunferência em oito arcos

com a mesma amplitude: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

Então, $\widehat{HIF} = \widehat{GJE} = \frac{2 \times 45^\circ + 4 \times 45^\circ}{2} = 135^\circ$, uma vez que são ângulos excêntricos com vértice no interior da circunferência.

Além disso, $\widehat{HGF} = \widehat{GFE} = \frac{180^\circ \times (8 - 2)}{6} = 135^\circ$, já

que $\widehat{HGF}$ e $\widehat{GFE}$ são ângulos internos do octógono. Assim, $\widehat{HGF} = \widehat{HIF}$ e $\widehat{GFE} = \widehat{GJE}$.

Por outro lado, $\widehat{JGF} = \widehat{FEJ} = \widehat{GFI} = \widehat{IHG} =$

$$= \frac{2 \times 45^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ já que } \widehat{JGF}, \widehat{FEJ}, \widehat{GFI} \text{ e } \widehat{IHG} \text{ são ângulos inscritos na circunferência.}$$

Assim, os quadriláteros $[GJEF]$ e $[HIFG]$ têm os ângulos iguais dois a dois, ou seja, são paralelogramos.

Como $\overline{HG} = \overline{GF} = 2$ e $[HIFG]$ é um paralelogramo, então também $\overline{HI} = 2$.

Como $\overline{FE} = \overline{GF} = 2$ e $[GJEF]$ é um paralelogramo, então $\overline{GJ} = 2$.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{HG}^2 + \overline{GJ}^2 = \overline{HJ}^2 \Leftrightarrow \overline{HJ}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{HJ}^2 = 8$$

Logo, $\overline{HJ} = 2\sqrt{2}$.

Assim, $\overline{IJ} = 2\sqrt{2} - 2 = c$.

$$67. \sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Sendo α um ângulo agudo, tem-se que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Por outro lado:

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{2}{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = 6$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + 6^2 - 2 \times \overline{AC} \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 36 - 8\sqrt{2} \times \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{36}{8\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin \alpha}{\overline{AC}} = \frac{\sin \theta}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \theta}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{2}{9\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Assim, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{AC} &= 6 + \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{4} = 6 + \frac{18}{4}\sqrt{2} = \\ &= 6 + \frac{9}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$68. \widehat{GEF} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{O'EH} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\widehat{HO'E} = 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 75^\circ$$

$$\overline{EH} = \frac{8}{2} = 4$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\overline{O'H}} = \frac{\sin 75^\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{O'H} = \frac{4 \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ}$$

Logo, $\overline{O'H} \approx 1,07$.

$$69. \widehat{ADB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 130^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 20^\circ}{4} &= \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \end{aligned}$$

$$\widehat{CBD} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 50^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{CD}}$$

Assim:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 50^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BD} \sin 50^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sin 20^\circ}, \text{ ou seja, } \overline{BC} \approx 4,5.$$

E:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{BD} \sin 40^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \sin 40^\circ, \text{ ou seja, } \overline{CD} \approx 3,8.$$

$$70. 100^\circ 59' 8'' = \left(100 + \frac{887}{900} \right)^\circ$$

$$11^\circ 56' 4'' = \left(100 + \frac{841}{900} \right)^\circ$$

Cálculos auxiliares

$$8'' = \left(\frac{8}{60} \right)'$$

$$\left(59 + \frac{8}{60} \right)' = \left(\frac{887}{900} \right)^\circ$$

$$4'' = \left(\frac{1}{15} \right)'$$

$$\left(56 + \frac{1}{15} \right)' = \left(\frac{841}{900} \right)^\circ$$

$$\alpha \approx \left(100 + \frac{887}{900} \right)^\circ - \left(11 + \frac{841}{900} \right)^\circ = \left(\frac{40\,073}{450} \right)^\circ$$

Logo:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{O_2T}}{\overline{TL}} \Leftrightarrow \cos \left(\left(\frac{40\,073}{450} \right)^\circ \right) = \frac{6366}{\overline{TL}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{TL} = \frac{6366}{\cos \left(\left(\frac{40\,073}{450} \right)^\circ \right)}$$

Assim, $\overline{TL} \approx 384\,409$ km.

$$71. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3,8}{1,6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{19}{8}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{19}{8} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{425}{64} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{64}{425}$$

Como α é um ângulo agudo,

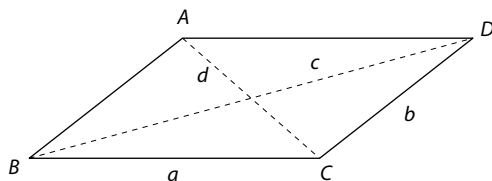
$$\cos \alpha = \frac{8}{5\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85}.$$

$$\beta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$$

Logo:

$$\cos \beta = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{8\sqrt{17}}{85}$$

72.



Pela Lei dos Cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

E:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{CDA})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \widehat{DAB})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

Assim:

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{DAB}) + a^2 + b^2 + 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

$$\Leftrightarrow c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

73. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Então:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

E:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\frac{c \sin A}{\sin C} + \frac{c \sin B}{\sin C}}{\frac{c \sin A}{\sin C} - \frac{c \sin B}{\sin C}} = \\ &= \frac{c \sin A + c \sin B}{c \sin A - c \sin B} = \\ &= \frac{c (\sin A + \sin B)}{c (\sin A - \sin B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \end{aligned}$$

74. $\sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{15}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow 15 - 15 \cos^2 \alpha = 16 \cos \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 15 \cos^2 \alpha + 16 \cos \alpha - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 900}}{30}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \vee \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Como α é um ângulo agudo, então $\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$.

75. $\sin \beta \times \cos \beta = 0,3$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta \times \cos^2 \beta = 0,09 \quad (\sin \beta > 0 \text{ e } \cos \beta > 0)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 \beta) \times \cos^2 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta - \cos^4 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \beta - \cos^2 \beta + 0,09 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0,36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{10} \vee \cos^2 \beta = \frac{9}{10}$$

Como $\beta \in]0^\circ, 45^\circ[$, então $\cos^2 \beta = \frac{9}{10}$ porque

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \beta < 1 \text{ e, então, } \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Logo, como $\beta \in]0^\circ, 45^\circ[$, tem-se $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}.$$

76. $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad (\sin \alpha > 0 \text{ e } \cos \alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como α é um ângulo agudo, então $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

77.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad \frac{\sin(\pi - x) - 2 \sin^3 x}{2 \cos^3 x - \cos(-x)} &= \\ = \frac{\sin x - 2 \sin^3 x}{2 \cos^3 x - \cos x} &= \\ = \frac{\sin x (1 - 2 \sin^2 x)}{\cos x (2 \cos^2 x - 1)} &= \\ = \operatorname{tg} x \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x - 1} &= \\ = \operatorname{tg} x \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} &= \\ = \operatorname{tg} x &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(-x)} - \frac{2}{\operatorname{tg}(-x)}}{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} &= \\ = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{1 + 2 \sin x \cos x} &= \\ = \frac{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2 \cos x}{\sin x}}{1 + 2 \sin x \cos x} &= \\ = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x}}{1 + 2 \sin x \cos x} &= \\ = \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{(1 + 2 \sin x \cos x) \sin^2 x} &= \\ = \frac{1}{\sin^2 x} &\end{aligned}$$

78.

a) Seja s a área do setor circular representado na figura.

$$\frac{s}{x} = \frac{3^2 \pi}{2\pi} \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} x$$

Seja h a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice C e seja $b = \overline{AB}$.

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{b}{6} \Leftrightarrow b = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{9}{2} x - \frac{6 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} &= \\ = \frac{9}{2} x - 9 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) &\end{aligned}$$

b) Seja c o comprimento do arco AB .

$$\frac{c}{x} = \frac{3 \times 2\pi}{2\pi} \Leftrightarrow c = 3x$$

Da alínea anterior vem que $\overline{AB} = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Assim, o perímetro da região sombreada é dado por $3x + 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

c) Se $x = \frac{\pi}{2}$, então a área da região sombreada é:

$$\begin{aligned}\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} - 9 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \\ = \frac{9\pi}{4} - 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\pi - 18}{4} &\end{aligned}$$

79. A área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$$\frac{\overline{OA} \times \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

A área a do setor circular é dada por:

$$\frac{x}{a} = \frac{2\pi}{\pi} \Leftrightarrow a = \frac{x}{2}$$

Como a área do triângulo $[OAB]$ é menor que a área do setor circular, tem-se:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x$$

Por outro lado, a área do triângulo $[OAC]$ é dada por:

$$\frac{\overline{OA} \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Como a área do triângulo $[OAC]$ é maior que a área do setor circular, tem-se $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow x < \operatorname{tg} x$.

Assim, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

80.

$$\text{a)} \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = 0$ ($\in [0, 2\pi]$) ou

$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ ($\in [0, 2\pi]$) ou } x = \frac{11\pi}{6} \text{ ($\in [0, 2\pi]$)}.$$

Se $k = 1$, então $x = \pi$ ($\in [0, 2\pi]$) ou

$$x = \frac{19\pi}{6} \text{ ($\notin [0, 2\pi]$) ou } x = \frac{23\pi}{6} \text{ ($\notin [0, 2\pi]$)}.$$

Se $k = 2$, então $x = 2\pi$ ($\in [0, 2\pi]$) ou

$$x = \frac{31\pi}{6} \text{ ($\notin [0, 2\pi]$) ou } x = \frac{35\pi}{6} \text{ ($\notin [0, 2\pi]$)}.$$

Sendo $x = 0$, tem-se $f(0) = \sin 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Sendo $x = \pi$, tem-se $f(\pi) = \sin \pi + 1 = 0 + 1 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Sendo } x = \frac{7\pi}{6}, \text{ tem-se } f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 1 = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sendo } x = \frac{11\pi}{6}, \text{ tem-se } f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sendo $x = 2\pi$, tem-se $f(2\pi) = \sin 2\pi + 1 = 0 + 1 = 1$.

Assim, as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos são:

$$(0, 1), (\pi, 1), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \times g)(x) = 0 &\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x + 1 = 0 \vee \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \cos x = \sin x \vee \cos x = -\sin x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, em $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \text{ e } \frac{7\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) = g(x) + 1 &\Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\quad \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, em $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são:

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Se } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ então } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\text{e } g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1,$$

obtendo-se o par $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{6}, \text{ então } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ e}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \text{ obtendo-}$$

se o par $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Se } x = \frac{5\pi}{6}, \text{ então } f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{e } g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

obtendo-se o par $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{d) } f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x + 1 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x > \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

$$\text{81. } f(x+P) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sin [2(x+P)] = \sin (2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin (2x+2P) = \sin (2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+2P = 2x+2k\pi \vee \underbrace{2x+2P = \pi - 2x+2k\pi}_{\text{Não permite determinar } P}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2P = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow P = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, f é uma função periódica de período positivo mínimo π .

82.

a) Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{d}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{r} = \frac{2}{d}$$

$$\Leftrightarrow d = 2r \cos \theta$$

$$\text{b) Se } \overline{BP} = \overline{PC}, \text{ então } \widehat{AOP} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ e}$$

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Por outro lado, da alínea anterior,

$$d = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3,70.$$

$$c) d = r \Leftrightarrow 2r \cos \theta = r \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Como θ é um ângulo agudo, então $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

O triângulo $[AOP]$ é, portanto, um triângulo equilátero.

$$\begin{aligned} A_{[AOP]} &= \frac{r \times r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \\ &= \frac{r^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}r^2}{4} \end{aligned}$$

$$d) \sqrt{3} = 2 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como θ é um ângulo agudo, então:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{6}$, então $\widehat{BOP} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Sendo c o comprimento do arco menor BP , tem-se:

$$\frac{c}{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi \times 1}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{c}{\frac{\pi}{3}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{3}$$

e)

i) $\widehat{OPQ} = \theta$ porque $[PAO]$ é um triângulo isósceles e, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

$\widehat{QOP} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$, uma vez que $\widehat{POB} = 2\theta$, por POB se tratar do ângulo ao centro correspondente ao mesmo arco que o ângulo inscrito PAO .

$$\text{Assim, } \widehat{PQO} = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{\pi}{2} + \theta$$

Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \widehat{PQO}}{r} &= \frac{\sin \widehat{OPQ}}{\overline{OQ}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{r} &= \frac{\sin \theta}{\overline{OQ}} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{r} &= \frac{\sin \theta}{\overline{OQ}} \\ \Leftrightarrow \overline{OQ} &= \frac{r \sin \theta}{\cos \theta} \\ \Leftrightarrow \overline{OQ} &= r \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

Sendo h a altura do triângulo $[OQP]$, tem-se:

$$\begin{aligned} h &= |r \sin \widehat{QOP}| = \left| r \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \right| = |r \cos(2\theta)| = \\ &= r |\cos(2\theta)| \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo $[OQP]$ é dada por:

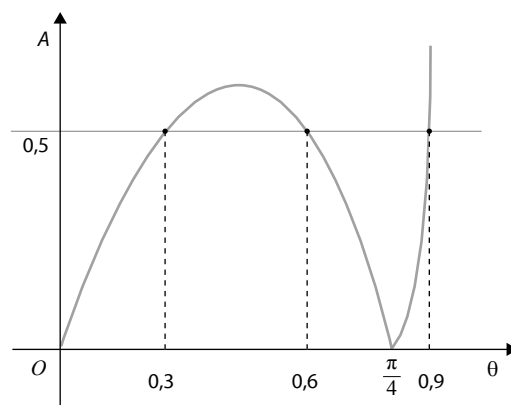
$$\frac{r \operatorname{tg} \theta \times r |\cos(2\theta)|}{2} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)|.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } A(\theta) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 0 \vee \cos(2\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = k\pi \vee 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = k\pi \vee \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Uma vez que θ é um ângulo agudo, tem-se que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Neste caso, obtém-se o triângulo isósceles e retângulo $[AOC]$.

$$\begin{aligned} \text{iii) } A(\theta) &= \frac{1}{2} \times 2^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)| = 2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)| \\ A(\theta) &= 0,5 \end{aligned}$$



$\theta \approx 0,3$; $\theta \approx 0,6$; $\theta \approx 0,9$.

Tema II - Geometria Analítica

Unidade 1 - Declive e inclinação de uma reta do plano

Páginas 119 a 121

1.

a) $y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4$: reta horizontal
Logo, a inclinação da reta é 0° .

b) $(x, y) = (1, \pi) + k(-1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$: reta horizontal
Logo, a inclinação da reta é 0° .

c) $x = 2$: reta vertical
Logo, a inclinação da reta é 90° .

2. A reta r contém os pontos de coordenadas $(0, 4)$ e $(-2, 0)$, logo:

$$m_r = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2 = \operatorname{tg} \alpha \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ onde } \alpha \text{ representa a inclinação da reta } r.$$

Então, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$.

A reta s contém os pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(3, -1)$, logo:

$$m_s = \frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3} = \operatorname{tg} \beta \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ, \text{ onde } \beta \text{ representa a inclinação da reta } s.$$

$$\text{Então, } \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 161,6^\circ.$$

3.

a) $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Assim, a equação da reta é do tipo $y = \sqrt{3}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 5)$ pertence à reta:

$$5 = \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 5 - \sqrt{3}$$

Logo, $y = \sqrt{3}x + 5 - \sqrt{3}$ é a equação da reta pedida.

b) $m = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

Assim, a equação da reta é do tipo $y = -x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(2, 0)$ pertence à reta:

$$0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Logo, $y = -x + 2$ é a equação da reta pedida.

4.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

b) $3x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3y = -3x + 4$

$$\Leftrightarrow y = -x + \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi.$$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

c) $m_t = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

5. A reta r contém os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, logo:

$$m_r = \frac{1-0}{0-\frac{1}{2}} = -2 = \operatorname{tg} \alpha \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ onde } \alpha \text{ representa a inclinação da reta } r.$$

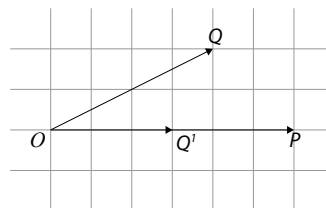
$$\text{Então, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-2) \approx 116,6^\circ.$$

Unidade 2 - Produto escalar de vetores

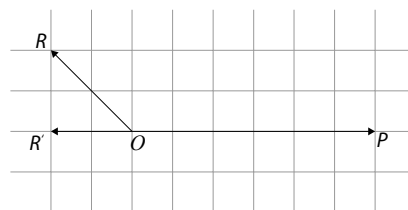
Páginas 122 a 142

6.

a) $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \overline{OP} \times \overline{OQ'} = 6 \times 4 = 24$

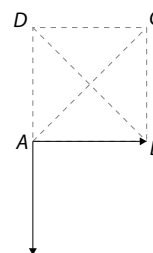


b) $\vec{OP} \cdot \vec{OR} = -\overline{OP} \times \overline{OR'} = -6 \times 2 = -12$

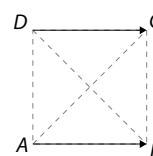


7.

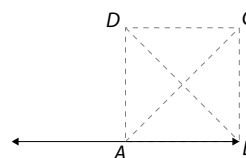
a) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 90^\circ$



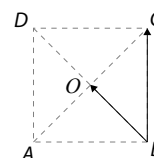
b) $(\vec{AB}, \vec{DC}) = 0^\circ$



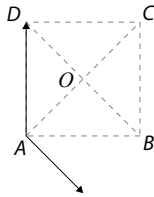
c) $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$



d) $(\vec{BC}, \vec{OD}) = 45^\circ$



e) $(\vec{AD}, \vec{DO}) = 135^\circ$



8.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$
 $= 2 \times 3 \times \cos 30^\circ =$
 $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$
 $= 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 16 \times \frac{1}{2} = 8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$
 $= 2018 \times 2018 \times \cos 90^\circ =$
 $= 2018 \times 2018 \times 0 =$
 $= 0$

9.

a) $\vec{DE} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DE}\| \|\vec{DC}\| \cos(\widehat{\vec{DE}, \vec{DC}}) =$
 $= 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = \|\vec{BC}\| \|\vec{AD}\| \cos(\widehat{\vec{BC}, \vec{AD}}) =$
 $= 1 \times 2 \times \cos 0^\circ = 2 \times 1 = 2$

c) $\vec{FA} \cdot \vec{AB} = \|\vec{FA}\| \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{FA}, \vec{AB}}) =$
 $= 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d) $\vec{AF} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AF}\| \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{\vec{AF}, \vec{AC}}) =$
 $= 1 \times \|\vec{AC}\| \times \cos 90^\circ = 1 \times \|\vec{AC}\| \times 0 = 0$

e) $\vec{EA} \cdot \vec{AB} = \|\vec{EA}\| \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{EA}, \vec{AB}}) =$
 $= \|\vec{EA}\| \times 1 \times \cos 90^\circ = \|\vec{EA}\| \times 1 \times 0 = 0$

10.

a) $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = a \times a \times \cos(0^\circ) = a^2$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{GH} = a \times a \times \cos(180^\circ) = -a^2$

c) $\vec{IJ} \cdot \vec{LD} = a \times 2a \times \cos(90^\circ) = 0$

d) $\vec{AC} \cdot \vec{JL} = \|\vec{AC}\| \|\vec{JL}\| \cos(90^\circ) = 0$

e) $\vec{IL} \cdot \vec{IK} = a \times a\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = a^2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Cálculo auxiliar

$$\overline{IK}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 2a^2, \text{ pelo que } \overline{IK} = \sqrt{2}a.$$

f) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = a \times a\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = a^2$

Cálculos auxiliares

$$\overline{AG}^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 3a^2, \text{ pelo que } \overline{AG} = \sqrt{3}a.$$

$$\cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AG}}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

g) $\vec{AL} \cdot \vec{EF} = \sqrt{5}a \times a \times \cos(90^\circ) = 0$

h) $\vec{LA} \cdot \vec{LH} = \sqrt{5}a \times a \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2a^2$

Cálculos auxiliares

$$\overline{LA}^2 = a^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow \overline{LA}^2 = 5a^2, \text{ pelo que } \overline{LA} = \sqrt{5}a.$$

$$\cos(\widehat{\vec{LA}, \vec{LH}}) = \frac{\overline{LD}}{\overline{LA}} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

11.

a) Por exemplo, $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$.

b) Por exemplo, $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$.

c) Por exemplo, $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$.

12.

a) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{15}{2}}{5 \times \sqrt{3}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} =$
 $= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30^\circ$.

b) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120^\circ$.

13.

a) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{5}}{3 \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{9}$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 75,6^\circ$.

ii) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{7 \times \frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 115,4^\circ$.

b) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 180^\circ - 115,4^\circ \approx 64,6^\circ$

14.

a) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 = 8$

b) $(-5\vec{u}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) = -\frac{5}{2}\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{5}{2} \times 4 = -10$

c) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 + (-3) = 1$

15.

$$\text{a)} (6\vec{u}) \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 \times 2 \times \cos 45^\circ = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{b)} (2017\vec{w}) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{v}\right) = -\frac{2017}{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c)} (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} \cdot \vec{u} &= \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} = \\ &= 2 \times 2 \times \cos 45^\circ + 0 - 3^2 \\ &= 2\sqrt{2} - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \vec{DA} \cdot \vec{BD} &= \vec{DA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) = \\ &= \vec{DA} \cdot \vec{BA} + \vec{DA} \cdot \vec{AD} = \\ &= 0 + k \times k \times \cos 180^\circ = \\ &= -k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \vec{AI} \cdot \vec{AJ} &= (\vec{AD} + \vec{DI}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BJ}) = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BJ} + \vec{DI} \cdot \vec{AB} + \vec{DI} \cdot \vec{BJ} = \\ &= 0 + \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 = \\ &= \|\vec{AB}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \vec{KC} \cdot \vec{DL} &= (\vec{KB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CL}) = \\ &= \vec{KB} \cdot \vec{DC} + \vec{KB} \cdot \vec{CL} + \vec{BC} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{CL} = \\ &= \frac{1}{4} \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 0 + 0 + \vec{BC} \cdot \frac{1}{4} \vec{CB} = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \frac{1}{4} \|\vec{BC}\| \times \\ &\quad \times \|\vec{CB}\| \cos 180^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{BC}\|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, uma vez que os vetores $\vec{KC}$ e $\vec{DL}$ são perpendiculares, então as retas KC e DL são perpendiculares.

19.

$$\text{a)} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} + 7 \times 0 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$$

$$\text{b)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-6) + 1 \times 3 = -12 + 3 = -9$$

$$\text{c)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-10) + (-2) \times (-15) = -30 + 30 = 0$$

20.

a) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.

b) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

c) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto.

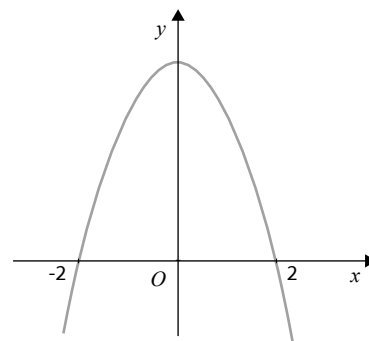
21.

$$\begin{aligned} \text{a)} \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 2 \times 3 + (-4) \times k < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 6 - 4k < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 4k > 6 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow k > \frac{3}{2} \wedge k \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow (k-1) \times 2 + 3 \times k = 0 \\ &\Leftrightarrow 2k - 2 + 3k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \wedge k \neq 0 &\Leftrightarrow 2 \times 2 + k \times (-k) > 0 \wedge k \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - k^2 > 0 \wedge k \neq 0 \end{aligned}$$



$$\text{Logo, } k \in]-2, 2[\setminus \{0\}.$$

22.

$$\text{a)} \vec{AB} = (3, 4) - (1, -2) = (2, 6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + 6 \times 5 = -4 + 30 = 26$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{u} \cdot (\vec{BA} - 3\vec{u}) &= \vec{u} \cdot \vec{BA} - 3\vec{u} \cdot \vec{u} = \\ &= -\vec{u} \cdot \vec{AB} - 3\|\vec{u}\|^2 = \\ &= -26 - 3 \times (\sqrt{29})^2 = -113 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

23.

$$\text{a)} \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$$

$$\text{Logo, } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 81,9^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -4 \times 2 + 7 \times 0 = -8 \\ \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-8}{\sqrt{65} \times 2} \\ \text{Logo, } (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &\approx 119,7^\circ \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \times (-1) + (-1) \times 4 = -4 - 4 = -8 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{a} \text{ e } \vec{b} &\text{ não são perpendiculares.} \\ \text{b) } \vec{c} \cdot \vec{d} &= 0 \times \sqrt{2} + 3 \times 0 = 0 + 0 = 0 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{c} \text{ e } \vec{d} &\text{ são perpendiculares.} \\ \text{c) } \vec{e} \cdot \vec{f} &= 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{e} \text{ e } \vec{f} &\text{ são perpendiculares.} \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \text{a) Por exemplo, } &(-5, 2), (5, -2), (10, -4). \\ \text{b) Por exemplo, } &(6, 1), (-6, -1), (12, 2). \\ \text{c) Por exemplo, } &(0, -4), (0, 1), (0, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26. } \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \Leftrightarrow (-1, 2) \cdot (x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2y)^2 + y^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5}y = 2 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, o vetor pedido é } \vec{v} \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right).$$

$$\text{27. } ax - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = ax - 2, \text{ pelo que o declive desta reta é } a.$$

O declive da reta definida por

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ é } -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{2}{3}.$$

Logo, a opção correta é a (D).

28.

$$\text{a) A equação da reta pretendida é da forma } y = -\frac{3}{2}x + b.$$

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$5 = -\frac{3}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{19}{2}$$

$$\text{Logo, } y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \text{ é a equação pedida.}$$

$$\text{b) } x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$$

A equação da reta pretendida é da forma $y = -x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$5 = -3 + b \Leftrightarrow b = 8$$

Logo, $y = -x + 8$ é a equação pedida.

$$\text{c) A reta definida por } (x, y) = (1, 10) + k(-2, 6), k \in \mathbb{R} \text{ tem declive } \frac{6}{-2} = -3.$$

A equação da reta pretendida é da forma

$$y = \frac{1}{3}x + b.$$

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$5 = \frac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 4$$

$$\text{Logo, } y = \frac{1}{3}x + 4 \text{ é a equação pedida.}$$

$$\text{d) A reta de equação } x = 1 \text{ é uma reta vertical, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma } y = b. \text{ Como o ponto A pertence a essa reta, então } y = 5 \text{ é a equação da reta pedida.}$$

$$\text{e) A reta de equação } y = 0 \text{ é uma reta horizontal, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma } x = a. \text{ Como o ponto A pertence a essa reta, então } x = 3 \text{ é a equação da reta pedida.}$$

29.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= C + \vec{BC} = (0, 2) + ((0, 2) - (3, 0)) = \\ &= (0, 2) + (-3, 2) = (-3, 4) \end{aligned}$$

$$\vec{AB} = 2\vec{BC} = 2(-3, 2) = (-6, 4)$$

$$m_{AC} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Assim, a equação da reta } t \text{ é da forma } y = \frac{3}{2}x + b.$$

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$4 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{2}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2} \text{ é a equação pedida.}$$

$$\text{b) } m_t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$$

$$\text{Logo, } \alpha \approx 56,3^\circ.$$

$$\text{c) A bissetriz dos quadrantes pares tem como vetor diretor, por exemplo, o vetor de coordenadas } (1, -1). \text{ Um vetor diretor da reta } t \text{ pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas } (2, 3).$$

$$\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$(1, -1) \cdot (2, 3) = 2 - 3 = -1$$

Assim, sendo α o ângulo pedido,

$$\cos \alpha = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}, \text{ pelo que}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 1,4 \text{ rad.}$$

30.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + (-3) \times (-1) + 9 \times (-2) = 5 + 3 - 18 = -10$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + 2 \times 0 + 5 \times (-1) = 5 + 0 - 5 = 0$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3} \times 0 + (-2) \times 0 + 4 \times \sqrt{5} = 0 + 0 + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

31.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-1) + (-1) \times 3 + 1 \times 7 = -4 - 3 + 7 = 0$

Logo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \times \sqrt{2} + 4 \times 0 + 3 \times \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ não são perpendiculares.

32.

a) Por exemplo, $(0, -5, -1)$, $(5, 0, 4)$, $(1, -4, 0)$.

b) Por exemplo, $(-7, 0, \sqrt{2})$, $(0, -7, 3)$, $(3, -\sqrt{2}, 0)$.

33. $(a, b, c) \cdot (0, c, -b) = 0 + bc - bc = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(0, c, -b)$ são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (c, 0, -a) = ac + 0 - ac = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(c, 0, -a)$ são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (b, -a, 0) = ab - ab + 0 = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(b, -a, 0)$ são perpendiculares.

34. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

a) $M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$

$$\vec{AB} = (1, 0) - (-3, 2) = (4, -2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1) \cdot (4, -2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x + 6$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 3, \text{ que é a equação pedida.}$$

b) $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$

$$\vec{AB} = (4, 5) - (1, 7) = (3, -2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}, y - 6\right) \cdot (3, -2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} - 2y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 3x + \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \text{ que é a equação pedida.}$$

35. $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1, y-3) \cdot (x-2, y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) + (y-3)(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 + y^2 - 5y - 3y + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 8y = -13$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 8y + 16 = -13 + \frac{1}{4} + 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{13}{4}, \text{ que é a equação pedida.}$$

36. $\vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0 \Leftrightarrow (-2-2, 1-(-1)) \cdot (x-2, y+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (-4, 2) \cdot (x-2, y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8 + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 5, \text{ que é a equação pedida.}$$

37.

a) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ é a circunferência de diâmetro $[AB]$:

$$(x+3, y-4) \cdot (x, y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 + 2y - 4y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - 2y = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 2y + 1 = 8 + \frac{9}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{45}{4}$$

Ou seja, a circunferência de centro $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{45}}{2}$.

b) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$, onde M é o ponto médio de $[AB]$, é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$:

Cálculos auxiliares

$$\vec{AB} = (0, -2) - (-3, 4) = (3, -6)$$

$$M = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$(3, -6) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{9}{2} - 6y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y = 3x + \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

c) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$ é a reta tangente à circunferência de centro A no ponto B ou é a reta perpendicular à reta AB que passa no ponto B :

$$\begin{aligned}(3, -6) \cdot (x, y + 2) &= 0 \Leftrightarrow 3x - 6y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6y = 3x - 12 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2\end{aligned}$$

38.

a) $M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$

$$\vec{AB} = (3, -1) - (-2, 5) = (5, -6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (5, -6) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - \frac{5}{2} - 6y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y = 5x + \frac{19}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{19}{12}, \text{ que é a equação pedida.}$$

b) $\vec{CA} = (-2, 5) - (1, 1) = (-3, 4)$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0 \Leftrightarrow (-3, 4) \cdot (x + 2, y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 6 + 4y - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x + 26$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}, \text{ que é a equação pe-}$$

dida.

39.

a) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (x - 0, y - 1) \cdot (x - 6, y - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 5y - y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13, \text{ que é a equa-}$$

ção pedida.

b) C e D são pontos da forma $(x, 0)$, uma vez que pertencem ao eixo das abscissas.

Substituindo na equação da circunferência de diâmetro $[AB]$:

$$(x - 3)^2 + (0 - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -2 \vee x - 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Assim, $C(1, 0)$ e $D(5, 0)$.

c) Seja M o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$; $M(3, 3)$

$$\vec{MC} \cdot \vec{CP} = 0 \Leftrightarrow (1 - 3, 0 - 3) \cdot (x - 1, y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x - 1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ que é a equação re-}$$

duzida da reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ em C .

$$\vec{MD} \cdot \vec{DP} = 0 \Leftrightarrow (5 - 3, 0 - 3) \cdot (x - 5, y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (x - 5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}, \text{ que é a equação re-}$$

duzida da reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ em D .

d)

i) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \geq 13 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \wedge$

$$\wedge y \geq \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \wedge y \leq 0$$

ii) Seja I o ponto interseção das retas tangentes à circunferência de diâmetro $[AB]$ em C e D .

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Então, } I\left(3, -\frac{4}{3}\right).$$

Seja M o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$; $M(3, 3)$

$$\overline{IM} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

Por outro lado, $\overline{CD} = 4$.

A área do losango $[CIBM]$ é então:

$$\frac{\frac{13}{3} \times 4}{2} = \frac{26}{3}$$

Um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto C é $(3, 2)$ e um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto D é, por exemplo, $(-3, 2)$.

$$\|(3, 2)\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = \|(-3, 2)\|$$

$$(3, 2) \cdot (-3, 2) = -9 + 4 = -5$$

Assim, o ângulo formado pelas duas retas é dado por:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|-5|}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}\right) \approx 67,380^\circ$$

Pelo que, a área a do setor circular de centro M e arco BD é dada por:

$$\frac{13\pi}{360^\circ} = \frac{a}{67,380^\circ}$$

Ou seja, $a \approx 7,644$.

Logo, a área da região sombreada é, aproximadamente, $\frac{26}{3} - 7,644 \approx 1,02$.

Unidade 3 - Equações de planos no espaço

Páginas 143 a 164

40. Um vetor normal ao plano dado é $(1, -2, 0)$.

Um vetor diretor da reta definida na opção A é $(3, 2, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção B é $(0, 0, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção C é $(1, -2, 0)$. Ora, este vetor é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção D é $(3, 0, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Assim, a opção correta é a (C).

41.

a) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\alpha(-2, 1, 3)$ e o ponto $P_1\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} -2(0 - 1) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) - 3(2 - z) = 0 &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} - 6 + 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow 3z = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Obtém-se o ponto $P_2\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$.

b) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\beta\left(-1, 1, \frac{1}{4}\right)$ e o ponto $P_1(-2, 0, 2)$.

Se, por exemplo, $y = 0$ e $z = 0$, tem-se:

$$-(x + 2) + 0 = -\frac{1}{4}(0 - 2) \Leftrightarrow -x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Obtém-se o ponto $P_2\left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right)$.

c) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\gamma\left(1, 2, \frac{1}{3}\right)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 0$, tem-se:

$$0 + 0 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 15$$

Obtém-se o ponto $P_1(0, 0, 15)$.

Se, por exemplo, $x = 1$ e $y = 1$, tem-se:

$$1 + 2 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 6$$

Obtém-se o ponto $P_2(1, 1, 6)$.

d) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\delta(3, 0, 2)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 100$, tem-se:

$$0 + 2z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

Obtém-se o ponto $P_1\left(0, 100, -\frac{1}{2}\right)$.

Se, por exemplo, $z = 0$ e $y = 2017$, tem-se:

$$3x + 0 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Obtém-se o ponto $P_2\left(-\frac{1}{3}, 2017, 0\right)$.

42.

a) $2(x + 1) - 1(y - 1) + 3(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 - y + 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 3 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

b) $1(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow y - 3 + 2z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 2z - 7 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

c) $-2(x + 2) + 5(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x - 4 + 5z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 5z - 14 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

d) $-3(x + 1) + 4(y + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x - 3 + 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4y + 1 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

e) $5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ que é a equação pedida.}$$

43.

a) Um vetor diretor da reta definida por $x = -4 \wedge y = 5$ é $(0, 0, 1)$, pois a reta é paralela ao eixo Oz . Como a reta é perpendicular ao plano α , então este vetor é normal ao plano α .

Assim:

$$z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$$

Logo, $z = -1$ é uma equação cartesiana do plano α .

b) Um vetor diretor da reta definida por $y = 21 \wedge z = -10$ é $(1, 0, 0)$, pois a reta é paralela ao eixo Ox . Como a reta é perpendicular ao plano α , então este vetor é normal ao plano α .

Assim:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo, $x = 1$ é uma equação cartesiana do plano α .

c) Um vetor diretor da reta definida por $x = -1 \wedge z = 0$ é $(0, 1, 0)$, pois a reta é paralela ao eixo Oy . Como a reta é perpendicular ao plano α , então este vetor é normal ao plano α .

Assim:

$$y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

Logo, $y = 3$ é uma equação cartesiana do plano α .

44.

a) Por exemplo, $\vec{a}$ (0, 1, 1), $\vec{b}$ (1, 0, -2) e $\vec{c}$ (1, 2, 0).

b) Seja $\vec{u}$ (a, b, c) um vetor não nulo.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ -2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 4c + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -3c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}$ (-2c, -3c, c), $c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = 1$, obtém-se $\vec{u}$ (-2, -3, 1).

45.

a) $\vec{AB} = (3, 2, 5) - (3, 4, 5) = (0, -2, 0)$

$$\vec{BC} = (1, 2, 3) - (3, 2, 5) = (-2, 0, -2)$$

Seja $\vec{u}$ (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, -2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 0 \\ -2a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}$ (-c, 0, c), $c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = 1$, obtém-se $\vec{u}$ (-1, 0, 1).

Então, $\vec{u}$ (-1, 0, 1) é um vetor normal ao plano e $A(3, 4, 5)$ é um ponto do plano:

$$-1(x - 3) + 0(y - 4) + 1(z - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 3 + z - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + z - 2 = 0$$

b) $\vec{AB} = (0, 2, 1) - (-1, 2, 0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{CA} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

Seja $\vec{u}$ (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CA}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ 2c + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}$ (-c, -c, c), $c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = 1$, obtém-se $\vec{u}$ (-1, -1, 1).

Então, $\vec{u}$ (-1, -1, 1) é um vetor normal ao plano e

$A(-1, 2, 0)$ é um ponto do plano:

$$-1(x + 1) - 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 - y + 2 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - y + z + 1 = 0$$

c) $\vec{AB} = (2, -1, 2) - (0, 1, 3) = (2, -2, -1)$

$$\vec{BC} = (1, 2, 0) - (2, -1, 2) = (-1, 3, -2)$$

Seja $\vec{u}$ (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 3, -2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - c = 0 \\ -a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a - 2b \\ -a + 3b - 4a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 5a = 7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{14}{5}b - 2b \\ a = \frac{7}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{5}b \\ a = \frac{7}{5}b \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}$ $\left(\frac{7}{5}b, b, \frac{4}{5}b\right)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = 5$, obtém-se $\vec{u}$ (7, 5, 4).

Então, $\vec{u}$ (7, 5, 4) é um vetor normal ao plano e $A(0, 1, 3)$ é um ponto do plano:

$$7(x - 0) + 5(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 5y - 5 + 4z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 5y + 4z - 17 = 0$$

46.

a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 2z - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x - 2y - z - 1 = 0$, que é uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$.

b) $\vec{AB} = (2, -1, 0) - (1, 1, 1) = (1, -2, -1)$

$$\vec{BC} = (0, 2, -3) - (2, -1, 0) = (-2, 3, -3)$$

$\frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{-3}$, logo os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ não são colineares e, portanto, os pontos A, B e C não são colineares.

47.

a) $\vec{r}$ (1, 1, -1)

$$\vec{s}$$
 (0, 0, 1)

$\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores das retas r e s, respectivamente.

Uma vez que a abcissa e a ordenada de $\vec{s}$ são 0 e as de $\vec{r}$ não são, então os vetores não são colineares.

Além disso, os pontos da reta s são da forma $(0, 1, z)$, sendo z um número real.

$$(0, 1, z) = (-1, 0, 2) + k(1, 1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 + k \\ 1 = 0 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ z = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, o ponto $(0, 1, 1)$ pertence às duas retas, logo, concluímos que as retas são concorrentes.

- b) Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano definido pelas retas r e s :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}(-b, b, 0)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{n}(-1, 1, 0)$.

Uma equação cartesiana do plano é:

$$-(x-0) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0$$

48.

- a) Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores das retas r e s , respectivamente.

$$\vec{r}(-2, 0, 0)$$

$$\vec{s}(1, 0, 0)$$

Tem-se que $\vec{r} = -2\vec{s}$, ou seja, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares, logo as retas r e s são paralelas ou coincidentes.

$(3, 1, 2)$ é um ponto da reta r mas não é um ponto da reta s , pois os pontos da reta s são da forma $(x, 2, 1)$, sendo x um número real.

Assim, as retas r e s são estritamente paralelas, logo definem um plano.

- b) Seja $A(3, 1, 2)$ um ponto da reta r e seja $B(1, 2, 1)$ um ponto da reta s .

$$\vec{AB} = (1, 2, 1) - (3, 1, 2) = (-2, 1, -1)$$

Este vetor é paralelo ao plano definido pelas retas r e s e não é colinear com $\vec{r}(-2, 0, 0)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b - c = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{u}(0, 1, 1)$.

Então, $\vec{u}(0, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano e $A(3, 1, 2)$ é um ponto do plano:

$$0(x-3) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + z - 3 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

49.

- a) Substituindo x , y e z na equação da reta r pelas coordenadas do ponto A , vem:

$$\begin{cases} -3 = 1 + 3k \\ 2 = 2k \\ 0 = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

que é uma condição impossível.

Logo, o ponto A é exterior à reta r .

Assim, a reta r e o ponto A definem um plano.

- b) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(3, 2, -1)$.

O ponto $B(1, 0, 1)$ é um ponto da reta r .

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (-3, 2, 0) = (4, -2, 1)$$

Este vetor é paralelo ao plano definido pela reta r e pelo ponto A e não é colinear com $\vec{r}$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4a + 2b \\ 3a + 2b + 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 7a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = 0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(0, b, 2b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = 1$, obtém-se $\vec{u}(0, 1, 2)$.

Então, $\vec{u}(0, 1, 2)$ é um vetor normal ao plano e $A(-3, 2, 0)$ é um ponto do plano:

$$0(x+3) + 1(y-2) + 2(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 2 + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 2z - 2 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

50.

- a) $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, 3, 1) + s(-1, 1, -2) + t(3, 2, 5)$, $s, t \in \mathbb{R}$ é a equação pedida.

- b) Se $x = 0$ e $y = 0$, então $z = 5$, e obtém-se o ponto $A(0, 0, 5)$ pertencente ao plano.

Se $x = 0$ e $z = 0$, então $y = 5$, e obtém-se o ponto $B(0, 5, 0)$ pertencente ao plano.

Se $y = 0$ e $z = 0$, então $x = 5$, e obtém-se o ponto $C(5, 0, 0)$ pertencente ao plano.

Então:

$$\vec{AB} = (0, 5, 0) - (0, 0, 5) = (0, 5, -5)$$

$$\vec{BC} = (5, 0, 0) - (0, 5, 0) = (5, -5, 0)$$

$\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ são vetores paralelos ao plano.

Logo, $(x, y, z) = (0, 0, 5) + s(0, 5, -5) + t(5, -5, 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$ é a equação pedida.

51.

$$\text{a) } \begin{cases} x = -\sqrt{2} - s + 3t \\ y = 3 + s + 2t, \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2s + 5t \end{cases}$$

b) Usando os pontos A, B e C e os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ do exercício anterior, obtém-se:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 5s - 5t, \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 5s \end{cases}$$

52. $IJK: x + y + z = 2$

Uma vez que o centro do cubo é a origem do referencial e que o ponto K pertence ao plano xOy , então $K(x, x, 0)$, sendo x um número real.

Como K pertence ao plano IJK , então $x + x + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Logo, $K(1, 1, 0)$. Conclui-se também que a aresta do cubo é 2 e que $D(1, -1, 1)$.

Assim, o plano paralelo a IJK e que passa em D é da forma $x + y + z = d$.

Como D pertence a esse plano:

$$1 - 1 + 1 = d \Leftrightarrow d = 1$$

A equação pedida é $x + y + z = 1$.

53. Um vetor normal ao plano α é $(1, -2, 1)$. Um plano que seja paralelo a α terá como vetor normal um vetor colinear com este, o que apenas acontece na opção (B), em que um vetor normal ao plano indicado é $(-2, 4, -2)$.

Assim, a opção correta é a (B).

54. Para que os dois planos sejam perpendiculares têm de ter vetores normais perpendiculares.

Assim:

$$(2, 4, -1) \cdot (2, k - 1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

55. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$\text{a) } M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1, 1)$$

$$\vec{AB} = (1, 0, 2) - (-3, 2, 0) = (4, -2, 2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1, z-1) \cdot (4, -2, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 2 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y + 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + z + 2 = 0, \text{ que é a equação}$$

pedida.

$$\text{b) } M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{7+5}{2}, \frac{2+3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 6, \frac{5}{2} \right)$$

$$\vec{AB} = (4, 5, 3) - (1, 7, 2) = (3, -2, 1)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}, y - 6, z - \frac{5}{2} \right) \cdot (3, -2, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} - 2y + 12 + z - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y + z + 2 = 0, \text{ que é a equação}$$

pedida.

$$\text{56. } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y+1, z-3) \cdot (x, y-2, z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y + y - 2 + z^2 - 5z - 3z + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y + z^2 - 8z = -13$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - 8z + 16 =$$

$$= -13 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + (z-4)^2 = \frac{7}{2}, \text{ que é a equação pedida.}$$

$$\text{57. } \vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2+2, -1-0, -3-1) \cdot (x-2, y+1, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4, -1, -4) \cdot (x-2, y+1, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 - y - 1 - 4z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - y - 4z - 21 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

58.

a) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ é a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3, y-4, z-2) \cdot (x-1, y, z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3x - 3 + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = 7 + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 12$$

b) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$, onde M é o ponto médio de $[AB]$, é o plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

$$M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = (-1, 2, 0)$$

$$\vec{AB} = (1, 0, -2) - (-3, 4, 2) = (4, -4, -4)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{MP} &= 0 \Leftrightarrow (4, -4, -4) \cdot (x+1, y-2, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 4 - 4y + 8 - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4y - 4z + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - z + 3 = 0\end{aligned}$$

- c) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$ é o plano tangente à superfície esférica de centro A no ponto B ou é o plano perpendicular à reta AB que passa no ponto B .

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{BP} &= 0 \Leftrightarrow (4, -4, -4) \cdot (x-1, y, z+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 - 4y - 4z - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4y - 4z - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - z - 3 = 0\end{aligned}$$

59.

a) $\vec{AB} = (3, 1, -1) - (-2, 5, 1) = (5, -4, -2)$

$$M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 3, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{MP} &= 0 \Leftrightarrow (5, -4, -2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - 3, z \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - \frac{5}{2} - 4y + 12 - 2z = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 4y - 2z + \frac{19}{2} = 0\end{aligned}$$

b) $\vec{CA} = (-2, 5, 1) - (1, 1, 1) = (-3, 4, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{CA} \cdot \vec{AP} &= 0 \Leftrightarrow (-3, 4, 0) \cdot (x+2, y-5, z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - 6 + 4y - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 4y - 26 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y + 26 = 0\end{aligned}$$

60. Qualquer ponto da reta r é da forma $(1+2k, -1-k, k)$, sendo k um número real. Substituindo na equação do plano:

$$\begin{aligned}1 + 2k - 2(-1-k) &= 4 \Leftrightarrow 1 + 2k + 2 + 2k = 4 \\ &\Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Assim, obtém-se o ponto de coordenadas

$$\left(1 + 2 \times \frac{1}{4}, -1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right), \text{ que é o ponto de interseção da reta } r \text{ com o plano } \alpha.$$

61.

- a) Substituindo na equação da reta (x, y, z) pelas coordenadas do ponto A , obtém-se:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}, 2, 2 \right) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = \frac{3}{2} \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto A pertence à reta s .

Substituindo na equação da reta (x, y, z) pelas coordenadas do ponto B , obtém-se:

$$\begin{aligned}(-1, 2, -1) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = -1 \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto B não pertence à reta s .

- b) Qualquer ponto do plano yOz é da forma $(0, y, z)$, onde y e z representam números reais.

Assim:

$$\begin{aligned}(0, y, z) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ 2 = y \\ 3 + 2\lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o plano yOz tem coordenadas $(0, 2, 5)$.

- c) Por exemplo, $r(x, y, z) = (-1, 2, -1) + k(-2, 0, 4)$, $k \in \mathbb{R}$.

- d) Sabe-se que o vetor de coordenadas $(-1, 0, 2)$ é um vetor diretor da reta s . Um vetor diretor da reta t terá de ser perpendicular a qualquer vetor diretor da reta s . Assim, um vetor diretor da reta t pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 5, 1)$.

Então, uma equação vetorial da reta t é, por exemplo, $t(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 2, 2 \right) + k(2, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

62.

a) $\vec{AB} = (2, 4, 1) - (1, 3, 2) = (1, 1, -1)$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , por estar inscrito numa semicircunferência, logo o vetor $\vec{AB}$ é normal ao plano BCD .

Então, como B pertence ao plano BCD e $\vec{AB}$ é um vetor normal a este plano, uma equação cartesiana do plano BCD é:

$$\begin{aligned}1(x-2) + 1(y-4) - 1(z-1) &= 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + y - 4 - z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0\end{aligned}$$

- b) $\vec{CD}$ é um vetor normal ao plano ABC e, como tal, é colinear com $(0, 1, 1)$ que é um vetor colinear a este plano.

Assim, $\vec{CD} = (0, k, k)$, para algum k real.

Como a altura do cilindro é $2\sqrt{2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\|\vec{CD}\| &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2\end{aligned}$$

Logo, $\vec{CD} = (0, 2, 2)$, de acordo com a figura.

Um ponto da base superior do cilindro é:

$$A + \vec{CD} = (1, 3, 2) + (0, 2, 2) = (1, 5, 4)$$

Como a base superior do cilindro é paralela ao plano BCD , então um vetor normal a este plano é

também um vetor normal ao plano que contém essa base. Assim, $(0, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano que contém a base superior do cilindro.

Tem-se então que uma equação da base superior do cilindro é:

$$0(x-1) + 1(y-5) + 1(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 5 + z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + z - 9 = 0$$

$$c) \begin{cases} y + z = 5 \\ 16x - 5y + 11z = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - z \\ 16x - 5(5 - z) + 11z = 23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 25 + 5z + 11z = 23 \\ 16x + 16z = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ y = 5 - z \\ x = 3 - z \end{cases}$$

Assim, os pontos que pertencem à interseção dos dois planos são os pontos da forma:

$$(3 - z, 5 - z, z), z \in \mathbb{R}$$

Mas, $(3 - z, 5 - z, z) = (3, 5, 0) + z(-1, -1, 1), z \in \mathbb{R}$.

Logo, uma equação vetorial da reta de interseção dos dois planos é:

$$(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(-1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

63.

a) Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$$M = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

Uma vez que a reta BD é paralela ao eixo Oy e que M é um ponto desta reta, então uma sua equação

$$\text{vetorial é } (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}.$$

Assim, as coordenadas do ponto B são da forma

$$\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2} \right) \text{ e as coordenadas do ponto } D \text{ são da}$$

forma $\left(\frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2} \right)$, sendo y um número real positivo.

$$\begin{aligned} \|\vec{AC}\| &= \|\vec{BD}\| \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0^2 + (-2y)^2 + 0^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4y^2} \\ &\Leftrightarrow 4y^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } y > 0, \text{ então } y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Logo, } B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$b) E = M = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \vec{EV} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{EV} \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}, y, z - \frac{1}{2}\right) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}, y, z - \frac{1}{2}\right) \cdot (0, \sqrt{2}, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

que são as equações cartesianas da reta EV .

c) A reta EV é perpendicular ao plano ABC . Logo, qualquer vetor diretor da reta é normal ao plano. Assim, o vetor $(1, 0, 1)$ é normal ao plano ABC e, consequentemente, é normal a qualquer plano que lhe seja paralelo.

Como o ponto V pertence à reta EV , tem-se que $V(a, 0, a), a \in \mathbb{R}^+$, de acordo com a figura.

$$V_{\text{pirâmide}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \overline{EV} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EV} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 3 \vee a - \frac{1}{2} = -3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{7}{2} \vee a = -\frac{5}{2}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $V\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2}\right)$.

Assim, uma equação do plano paralelo a ABC que contém V é:

$$1\left(x - \frac{7}{2}\right) + 0(y - 0) + 1\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{7}{2} + z - \frac{7}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + z = 7$$

Aprende Fazendo

Páginas 168 a 184

1. O declive da reta r é $-\frac{1}{3}$. Logo, o declive da reta s , que é perpendicular à reta r , é 3.

Assim, a reta r é da forma $y = 3x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 2)$ pertence à reta s , tem-se:

$$2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Logo, $s: y = 3x - 1$.

A opção correta é a (B).

2. O declive da reta de equação $y = 2x + 5$ é 2, pelo que o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{1}{2}$.

Na opção (A) tem-se:

$$y + \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$$

A opção correta é a (A).

3. A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas (4, 2) e raio 2. Assim, uma equação dessa circunferência é $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$, o que exclui as opções (B) e (C).

As retas p e r representadas na figura são perpendiculares, pelo que o produto dos seus declives é igual a -1 . Assim, exclui-se a opção (A).

A opção correta é a (D).

4. $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 - \|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\|^2$
A opção correta é a (C).

5. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$$\vec{AB} = (3, 0, -1) - (2, -4, -4) = (1, 4, 3)$$

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26}$$

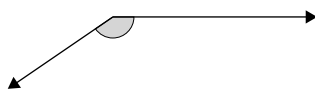
Logo, $\|\vec{u}\| \neq \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|$, o que significa que a proposição (I) é falsa.

$\frac{3}{1} \neq \frac{0}{4} \neq \frac{-1}{3}$, logo $\vec{u}$ e $\vec{AB}$ não são colineares e a proposição (II) é falsa.

$\vec{u} \cdot \vec{AB} = 3 \times 1 + 0 \times 4 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$, ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{AB}$ são perpendiculares e a proposição (III) é verdadeira.

A opção correta é a (D).

6. Se $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, então o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é um ângulo obtuso, o que apenas acontece na opção (A):



A opção correta é a (A).

7. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos 60^\circ = 18$

$$\Leftrightarrow x \times x \times \frac{1}{2} = 18 \Leftrightarrow x^2 = 36$$

Logo, $x = 6$, ou seja, a medida do lado do triângulo é 6. Assim, o seu perímetro é $3 \times 6 = 18$.

A opção correta é a (A).

8. $\vec{RQ} \cdot \vec{PO} = \|\vec{RQ}\| \|\vec{PO}\| \cos 120^\circ =$

$$= a \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$$

A opção correta é a (C).

9. O centro da circunferência é a origem do referencial. Seja T o ponto de tangência.

$$\vec{OT} = (3, 4), \text{ pelo que o declive da reta } OT \text{ é igual a } \frac{4}{3}.$$

Uma reta que seja tangente à circunferência no ponto T é perpendicular à reta OT e tem declive igual a $-\frac{3}{4}$.

A opção correta é a (D).

10. A reta tangente à circunferência de centro C no ponto A é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0$.

A opção correta é a (B).

11. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} \left(2, -1, \frac{1}{8}\right)$.

$$\begin{aligned} \left(2, -1, \frac{1}{8}\right) \cdot (16, -8, 1) &= 2 \times 16 + (-1) \times (-8) + \frac{1}{8} \times 1 = \\ &= 32 + 8 + \frac{1}{8} = \frac{321}{8} \end{aligned}$$

Ou seja, a reta r não é perpendicular à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{16} = \frac{-1}{-8} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8}$$

Logo, a reta r é paralela à reta definida por:

$$(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$$

A opção correta é a (B).

12. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} \left(2, \frac{5}{3}, 0\right)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas (2, 5, 0), logo este não é um vetor diretor da reta r .

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(6, 5, 0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas (6, 5, -4), logo este não é um vetor normal ao plano α .

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 2 \times 6 + \frac{5}{3} \times 5 + 0 \times 0 = \frac{61}{3}$, logo os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares e, portanto, a reta r não é estritamente paralela ao plano α .

Uma vez que $\frac{2}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$, então $\vec{r}$ é colinear a $\vec{n}$,

logo a reta r é perpendicular ao plano α .

A opção correta é a (D).

13. $(2, 4, -1) \cdot (2, k - 1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

A opção correta é a (B).

- 14.** Um vetor normal ao plano dado é $\vec{n}(1, -2, 0)$.
 $(1, -2, 0) \cdot (3, 2, 1) = 3 - 4 + 0 = -1$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (A).
 $(1, -2, 0) \cdot \left(3, \frac{2}{3}, -5\right) = 3 - \frac{4}{3} + 0 = \frac{5}{3}$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (B).
 $(1, -2, 0) \cdot (4, 5, 0) = 4 - 10 + 0 = -6$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (C).
 $(1, -2, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$, logo o plano é paralelo à reta definida na opção (D).
 A opção correta é a (D).

15. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2} =$
 $= \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} =$
 $= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$
 $= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$
 $= \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4^2} =$
 $= \sqrt{9 + 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$
 $= \sqrt{37}$
 $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2} =$
 $= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} =$
 $= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$
 $= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$
 $= \sqrt{3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4^2} =$
 $= \sqrt{9 - 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$
 $= \sqrt{13}$
 A opção correta é a (A).

16. $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} =$
 $= l \times l \times \cos 120^\circ + l \times l \times \cos 60^\circ =$
 $= -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} =$
 $= 0$
 A opção correta é a (D).

17. Seja $T(x, y)$ um ponto da reta t .
 $\vec{OP} \cdot \vec{PT} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$
 $\Leftrightarrow ax - a^2 + by - b^2 = 0$
 $\Leftrightarrow by = -ax + a^2 + b^2$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}$

Tendo em conta que a circunferência representa-
 da tem centro na origem e raio 1, tem-se que
 $a = \cos \alpha$ e $b = \sin \alpha$, onde α representa a inclina-
 ção da reta OP e, então, $a^2 + b^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Assim, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$ é a equação reduzida da reta t .

A ordenada do ponto Q é 0 e o ponto Q pertence à
 reta t , logo:

$$0 = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 = -ax + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$$

A opção correta é a (A).

18. Seja $\alpha = (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})$.

$$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Assim:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A opção correta é a (C).

19. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha(9, -6, 3)$.

Um vetor normal ao plano β é $\vec{n}_\beta(4, -\sqrt{2}, 8)$.

Um vetor normal ao plano γ é $\vec{n}_\gamma(-3, 2, -1)$.

$\vec{n}_\alpha = -3\vec{n}_\gamma$, logo, os planos α e γ são paralelos, mas
 as equações que os definem não são equivalentes,
 pelo que se trata de planos estritamente paralelos.

$\frac{9}{4} \neq \frac{-6}{-\sqrt{2}} \neq \frac{3}{8}$, pelo que os planos α e β não são

paralelos, e também não o são os planos β e γ .

A opção correta é a (D).

20.

a) $y = 3$ representa uma reta horizontal, logo a sua
 inclinação é 0 radianos.

b) $x = 4$ representa uma reta vertical, logo a sua incli-
 nação é $\frac{\pi}{2}$ radianos.

c) A reta de equação $y = x + 1$ tem declive 1.

Assim, sendo α a inclinação desta reta:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ radianos.}$$

d) $2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 2y = -2x + 7 \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{2}$

A reta de equação $2x + 2y - 7 = 0$ tem declive -1 .

Assim, sendo α a inclinação desta reta:

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ radianos.}$$

e) A reta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(6, 2\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{R}$

$$\text{tem declive } \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, sendo α a inclinação desta reta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ radianos.}$$

f) A reta definida por $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + \sqrt{3}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ tem

declive $\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.

Assim, sendo α a inclinação desta reta:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

Logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ radianos.

21. Reta r:

$$m_r = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

O ponto de coordenadas (0, -2) pertence à reta r.

Logo, $r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$.

Reta s:

$$m_s = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

O ponto de coordenadas (0, -2) pertence à reta s.

Logo, $s: y = x - 2$.

Reta t:

$$m_t = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

O ponto de coordenadas (0, -2) pertence à reta t.

Logo, $t: y = -\sqrt{3}x - 2$.

22. Reta r:

Os pontos de coordenadas (0, -4) e (5, 0) pertencem à reta r.

Logo, $m_r = \frac{-4 - 0}{0 - 5} = \frac{4}{5}$.

Como o ponto de coordenadas (0, -4) pertence à reta r, $r: y = \frac{4}{5}x - 4$.

Sendo α a inclinação da reta r:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Logo, $\alpha \approx 38,7^\circ$.

Reta s:

Os pontos de coordenadas (3, 1) e (5, 0) pertencem à reta s.

Logo, $m_s = \frac{1 - 0}{3 - 5} = -\frac{1}{2}$.

Assim, $s: y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como o ponto de coordenadas (5, 0) pertence à reta s:

$$0 = -\frac{1}{2} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Então, $s: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Sendo β a inclinação da reta s:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2} \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ$$

Logo, $\beta \approx 153,4^\circ$.

$$\begin{aligned} 23. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= 19 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19 \\ &\Leftrightarrow 10^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 100 - 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 81 \end{aligned}$$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{81} = 9$.

24.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB} &= (2, -5) - (0, 3) = (2, -8) \\ (2\vec{AB}) \cdot \vec{u} &= (4, -16) \cdot (-1, 4) = -4 - 64 = -68 \\ \text{b) } \vec{u} \cdot (\vec{u} + 6\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 0 = (-1)^2 + 4^2 = 17 \\ \text{c) } \vec{BA} &= -\vec{AB} = (-2, 8) \\ \left(\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{BA}\right) \cdot (3\vec{u}) &= 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{3}{2}\vec{BA} \cdot \vec{u} = \\ &= 3 \times 0 + (-3, 12) \cdot (-1, 4) = 3 + 48 = 51 \end{aligned}$$

25.

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$, sendo M o ponto médio do segmento de reta [AB], representa a mediatriz do segmento de reta [AB].
- b) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ representa a circunferência de diâmetro [AB].
- c) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 0$ representa o círculo de diâmetro [AB].
- d) $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$ representa a reta tangente à circunferência de centro em B e raio $\vec{AB}$ no ponto A ou reta perpendicular ao segmento de reta [AB] que passa em A.

26.

a)

i) $\vec{BO} \cdot \vec{CD} = 8 \times 4 \times \cos 0^\circ = 32$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 \times 4 \times \cos 180^\circ = -16$

iii) $\vec{OD} \cdot \vec{OB} = 4 \times 8 \times \cos 60^\circ = 32 \times \frac{1}{2} = 16$

iv) $\vec{OA} \cdot \vec{AD} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

- b) $\vec{PD} \cdot \vec{PA} = 0$ representa a circunferência de diâmetro [AD].

Seja h a altura do triângulo [OAD]. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$4^2 = 2^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow h^2 = 12$$

Pelo que, $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Assim, $D(2, 2\sqrt{3})$.

$$\begin{aligned}\vec{PD} \cdot \vec{PA} &= 0 \Leftrightarrow (2-x, 2\sqrt{3}-y) \cdot (4-x, -y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8-2x-4x+x^2-2\sqrt{3}y+y^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-2\sqrt{3}y=-8 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2\sqrt{3}y+3=-8+9+3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4\end{aligned}$$

27.

a) O declive da reta definida por

$$(x, y) = (5, \sqrt{2}) + k(3, -4), k \in \mathbb{R} \text{ é } -\frac{4}{3}.$$

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $\frac{3}{4}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$$2 = \frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$$

A equação pedida é $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

b) $x - 5y = 2 \Leftrightarrow 5y = x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

O declive da reta definida por $x - 5y = 2$ é $\frac{1}{5}$.

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é -5 .

Assim, a equação pedida é da forma $y = -5x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$$2 = -5 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 7$$

A equação pedida é $y = -5x + 7$.

c) O declive da reta é dado por $m = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$$2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A equação pedida é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) O declive da reta é dado por $m = \tan 45^\circ = 1$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$$

A equação pedida é $y = x + 1$.

28.

a) O declive da reta r é 2. Um vetor diretor desta reta é $\vec{r}(1, 2)$.

O declive da reta s é -4 . Um vetor diretor desta reta é $\vec{s}(1, -4)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (1, -4) = 1 - 8 = -7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

Seja α o ângulo formado pelas retas r e s .

$$\cos \alpha = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}$$

Logo, $\alpha \approx 40,6^\circ$.

b) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-2, 3)$.

$$5x + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -5x + 7 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

O declive da reta s é $-\frac{5}{2}$. Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(2, -5)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2, 3) \cdot (2, -5) = -4 - 15 = -19$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

Seja α o ângulo formado pelas retas r e s .

$$\cos \alpha = \frac{|-19|}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}}$$

Logo, $\alpha \approx 11,9^\circ$.

c) A reta r é uma reta horizontal e a reta s é uma reta vertical, logo o ângulo formado pelas retas r e s é 90° .

29.

a) $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$, sendo M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, representa o plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

b) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ representa a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

c) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 0$ representa a esfera de diâmetro $[AB]$.

d) $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$ representa o plano tangente à superfície esférica de centro em B e raio $\vec{AB}$ no ponto A ou plano perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ que passa em A .

$$\begin{aligned}30. \quad &\begin{cases} (x, y, 1) \cdot (6, 4, 0) = 0 \\ (x, y, 1) \cdot \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

31.

a) $\vec{AB} = (0, -1, 4) - (1, -1, 3) = (-1, 0, 1)$

Assim, um sistema de equações paramétricas da reta AB é:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) Sendo a reta s paralela ao eixo Oz , um vetor diretor desta reta é $(0, 0, 1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y, z) = (0, -1, 4) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

32.

a) $(0, 2, -1) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -1 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 \\ 2 = 2 \\ 4t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto A pertence à reta r .

$$(-5, 2, -3) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -3 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6 \\ 2 = 2 \\ 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 2 = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Logo, o ponto B não pertence à reta r .

- b) Os pontos do plano definidos por $y = x$ são da forma (x, x, z) , sendo x e z números reais.

$$(x, x, z) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ x = 2 \\ z = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - 2t \\ x = 2 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

O ponto de interseção da reta r com o plano $y = x$ tem coordenadas $(2, 2, -5)$.

c)

- i) Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $(-1, 0, 2)$, que é colinear com $(-2, 0, 4)$, que é um vetor diretor da reta r .

Assim, $s: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(-1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$.

- ii) Um vetor diretor da reta t tem de ser perpendicular ao vetor $(-2, 0, 4)$, podendo ser, por exemplo, $(4, 0, 2)$.

Assim, $t: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 0, 2), k \in \mathbb{R}$.

- iii) Um vetor normal ao plano α é $(-1, 2, -1)$, que é um vetor diretor da reta u , perpendicular ao plano α . Assim, $u: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$.

- iv) Um vetor normal ao plano β é $(1, -1, -2)$. Um vetor diretor da reta v tem de ser perpendicular ao vetor normal ao plano, por exemplo, $(1, 1, 0)$.

Assim, $v: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$.

33.

- a) Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 6), k \in \mathbb{R}$.

- b) Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 0), k \in \mathbb{R}$.

- c) Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

- d) Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

- e) Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-3, -1, 7), k \in \mathbb{R}$.

34.

a) $4(x-1) + 5(y-2) + 6(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 5y - 10 + 6z - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5y + 6z - 32 = 0$$

b) $\vec{AB} = (0, -2, 4) - (1, 2, 3) = (-1, -4, 1)$

$$\vec{AC} = (1, 0, 0) - (1, 2, 3) = (0, -2, -3)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, -4, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, -2, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 4b + c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 4 \times \left(-\frac{3}{2}c\right) + c = 0 \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 7c = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7c \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(7c, -\frac{3}{2}c, c\right), c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = 2$, obtém-se $\vec{u}(14, -3, 2)$.

Então, $\vec{u}(14, -3, 2)$ é um vetor normal ao plano e $A(1, 2, 3)$ é um ponto do plano:

$$14(x-1) - 3(y-2) + 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 14x - 14 - 3y + 6 + 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14x - 3y + 2z - 14 = 0$$

- c) Um vetor normal ao plano é, por exemplo, $(8, 0, 3)$.

$$8(x-1) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 3z = 17$$

d) $\sqrt{2}(x-1) + 1(y-2) - 1(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2} + y - 2 - z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + y - z = \sqrt{2} - 1$$

e) $0(x-1) + 1(y-2) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

35.

a) $V_{\text{sólido}} = 288 \Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{3}a^3 = 288$

$$\Leftrightarrow a^3 = 216$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

$$R(6, 0, 6), V(3, 3, 12), U(6, 6, 6)$$

$$\vec{RV} = (3, 3, 12) - (6, 0, 6) = (-3, 3, 6)$$

$$\vec{UV} = (3, 3, 12) - (6, 6, 6) = (-3, -3, 6)$$

$$\|\vec{RV}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{54}$$

$$\|\vec{UV}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{54}$$

$\vec{RV} \cdot \vec{UV} = (-3, 3, 6) \cdot (-3, -3, 6) = 9 - 9 + 36 = 36$
Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas RV e UV .

$$\cos \alpha = \frac{36}{\sqrt{54} \times \sqrt{54}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

Assim, $\alpha \approx 48,2^\circ$.

b) $\vec{RV} = (-3, 3, 6)$

Assim, $RV: (x, y, z) = (6, 0, 6) + k(-3, 3, 6), k \in \mathbb{R}$.

c) $M(3, 3, 6), T(0, 6, 6)$

$$\vec{MT} = (0, 6, 6) - (3, 3, 6) = (-3, 3, 0)$$

Assim,
$$\begin{cases} x = 6 - 3\lambda \\ y = 6 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 \end{cases}$$

é o sistema de equações paramétricas pedido.

d) Os pontos R, S e V não são colineares.

$$R(6, 0, 6)$$

$-2 \times 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, logo o ponto R pertence ao plano definido por $-2y + z - 6 = 0$.

$$S(0, 0, 6)$$

$-2 \times 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, logo o ponto S pertence ao plano definido por $-2y + z - 6 = 0$.

$$V(3, 3, 12)$$

$-2 \times 3 + 12 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, logo o ponto V pertence ao plano definido por $-2y + z - 6 = 0$.

Logo, o plano RSV pode ser definido por:

$$-2y + z - 6 = 0$$

e) $\vec{RP} \cdot \vec{TP} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 6, y, z - 6) \cdot (x, y - 6, z - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 12z + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 12z + 36 = 0$$

36.

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OE} = r \times r \times \cos 72^\circ = r^2 \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

Cálculo auxiliar

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = r \times r \times \cos (2 \times 72^\circ) = r^2 \cos 144^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

c) $\vec{AO} \cdot \vec{AE} = r \times l \times \cos \left(\frac{108^\circ}{2} \right) = r l \cos 54^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

Cálculo auxiliar

$$\frac{180^\circ \times (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

d) $\vec{CB} \cdot \vec{CD} = l \times l \times \cos 108^\circ \neq l^2 \cos 216^\circ$

Logo, a proposição é falsa.

e) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} = l \times l \times \cos \left(\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \right) = l^2 \cos 36^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

f) $\vec{DC} \cdot \vec{DB} = l \times 2l \cos 36^\circ \cos 36^\circ \neq 2l^2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é falsa.

Cálculo auxiliar

Pela Lei dos Cossenos:

$$l^2 = l^2 + \overline{DB}^2 - 2l \overline{DB} \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB}^2 - 2l \overline{DB} \cos 36^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB} (\overline{DB} - 2l \cos 36^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB} = 0 \vee \overline{DB} = 2l \cos 36^\circ$$

Logo, $\overline{DB} = 2l \cos 36^\circ$.

g) $\vec{DC} \cdot \vec{DA} = l \times 2l \cos 36^\circ \times \cos (108^\circ - 36^\circ) = 2l^2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

37. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \times 3\sqrt{3} \times \cos \left(\frac{60^\circ}{2} \right) = 18\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \times 3 = 27$

Cálculo auxiliar

Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 27$$

Logo, $\overline{AC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

38.

a) $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \Leftrightarrow \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$
 $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{w}$
 $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} = 0$
 $\Leftrightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$

Ou seja, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ quando e apenas quando os vetores $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ forem perpendiculares.

b) Uma vez que $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$, então os vetores $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são perpendiculares.

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB} = \vec{v} - \vec{w}$$

Então, as diagonais do quadrilátero $[ABCD]$ são perpendiculares e os seus lados têm comprimentos iguais, ou seja, $[ABCD]$ é um losango.

39.

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$
 $= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$
 $= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

b) Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares, tem-se $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ ou seja, a propriedade referida na alínea anterior reduz-se ao Teorema de Pitágoras.

c) Seja α o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v}$.

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Logo, $\alpha = 60^\circ$.

Cálculo auxiliar

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}$$

40.

a) Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\Leftrightarrow 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Assim:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} =$$

$$= \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

b)

$$\text{i) } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (6^2 + 5^2 - 4^2) = \frac{45}{2}$$

$$\text{ii) } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} (6^2 + 4^2 - 5^2) = \frac{27}{2}$$

$$\text{iii) } \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

41.

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5k < 3$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow k \in \left] -\infty, \frac{3}{5} \right[$$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k = 3$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (k+2, k+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 3k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = -3$$

42.

$$\text{a) } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y-1) \cdot (x-6, y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$$

b) Os pontos C e D são ambos da forma (x, 0), sendo x real.

Substituindo na equação da circunferência, vem:

$$(x-3)^2 + (0-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Assim, C(1, 0) e D(5, 0).

c) O ponto M(3, 3) é o centro da circunferência.

$$\vec{MC} \cdot \vec{CP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-3, 0-3) \cdot (x-1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x-1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x + 2$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto C.

$$\vec{MD} \cdot \vec{DP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-3, 0-3) \cdot (x-5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (x-5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 10$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto D.

d) O declive da reta definida por $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ é $-\frac{2}{3}$.
Então, um seu vetor diretor pode ser $\vec{u}(3, -2)$.

O declive da reta definida por $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ é $-\frac{2}{3}$.

Então, um seu vetor diretor pode ser $\vec{v}(3, 2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2) \cdot (3, 2) = 9 - 4 = 5$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{13}$$

Logo, $\alpha \approx 67,38^\circ$.

43.

$$a) m_t = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Logo, } m_u = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Então, } u: y = -\sqrt{3}x + b.$$

Como o ponto A pertence à reta u:

$$0 = -\sqrt{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Assim, } u: y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}.$$

b) Como B pertence à reta u:

$$y = -\sqrt{3} \times 4 + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } B(4, \sqrt{3}).$$

$C(x, 0)$, sendo x um número real.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4, 0 - \sqrt{3}) \cdot (x - 4, 0 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1, -\sqrt{3}) \cdot (x - 4, -\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Logo, a abscissa do ponto C é 1.

44.

a) 1.º processo

$$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DA}\| \|\vec{DC}\| \cos(\widehat{DA, DC}) =$$

$$= a \times a \times \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DB} = \|\vec{AD}\| \|\vec{DB}\| \cos(\widehat{AD, DB}) =$$

$$= a \times a \times \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

2.º processo

$$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = \vec{DA} \times \vec{DI} = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DB} = -\vec{AD} \times \vec{DI} = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \vec{AD} \cdot \vec{CB} &= \vec{AD} \cdot (\vec{CA} + \vec{AB}) = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{CA} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{CA} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\vec{AD}$ e $\vec{CB}$ são vetores perpendiculares.

45.

a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, 2, -1)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(2, 1, -2)$. Estes vetores não são colineares, já que $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$. Como o ponto de coordenadas $(1, 0, -1)$ é comum a ambas as retas, então r e s são retas concorrentes e, portanto, definem um plano.

b) Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = a + 2b \\ 2a + b - 2a - 4b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}(c, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = 1$ obtém-se $\vec{u}(1, 0, 1)$.

Então, $\vec{u}(1, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano definido pelas retas r e s e $(1, 0, -1)$ é um ponto do plano:

$$1(x - 1) + 0(y - 0) + 1(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + z = 0$$

Assim, o plano definido pelas retas r e s é estritamente paralelo ao plano de equação $x + z = 2$.

46.

a) O ponto A pertence ao plano xOy , pelo que $A(x, y, 0)$, onde x e y representam números reais positivos.

Uma vez que o triângulo $[OAB]$ é equilátero, tem-se $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{BA} = \overline{OB}$.

Como B pertence à reta BD e ao eixo Oy , tem-se que as suas coordenadas são $(0, 4, 0)$ e, então, $\overline{OB} = 4$.

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{BA} = \overline{OB} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 4 \\ \sqrt{x^2 + (y - 4)^2 + 0^2} = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 8y + 16 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 16 - 8y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 16 \\ \text{---} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo, $A(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

b) $E(0, 0, 6)$

$$\vec{AE} = (-2\sqrt{3}, -2, 6)$$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta AE é:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 6 + 6\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) $\vec{AB} = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta AB é:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = (-2\sqrt{3}, -2, 6) \cdot (-2\sqrt{3}, 2, 0) = 12 - 4 + 0 = 8$

$$\|\vec{AE}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{12 + 4 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{12 + 4 + 0} = 4$$

$$\cos(\widehat{AE, AB}) = \frac{|8|}{\sqrt{52} \times 4}$$

Logo, $(\widehat{AE, AB}) \approx 73,9^\circ$.

e) Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AE}$ e $\vec{AB}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2\sqrt{3}, -2, 6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2\sqrt{3}, 2, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2b + 6c = 0 \\ -2\sqrt{3}a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a + 6c = 0 \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6c = 4\sqrt{3}a \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(a, \sqrt{3}a, \frac{2\sqrt{3}a}{3}\right), a \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $a = 1$, obtém-se $\vec{u}\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Então, $\vec{u}\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ é um vetor normal ao

plano ABE e $(2\sqrt{3}, 2, 0)$ é um ponto do plano:

$$1(x - 2\sqrt{3}) + \sqrt{3}(y - 2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z - 4\sqrt{3} = 0$$

f) Um vetor diretor da reta é o vetor normal ao plano ABE de coordenadas $\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABE e que contém o ponto O é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), k \in \mathbb{R}$$

g) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ que satisfazem a condição $\vec{BE} \cdot \vec{MP} = 0$ é o plano mediador do segmento de reta $[BE]$.

$$\vec{BE} = (0, 0, 6) - (0, 4, 0) = (0, -4, 6)$$

$$M = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0, 2, 3)$$

$$\vec{BE} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (0, -4, 6) \cdot (x, y - 2, z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y + 8 + 6z - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y + 6z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y + 3z - 5 = 0$$

47.

a) Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 8$$

Assim, $\overline{AD} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ou seja, a aresta do cubo mede $2\sqrt{2}$.

b) $A(2, 0, 0); B(4, 2, 0); C(2, 4, 0); D(0, 2, 0); E(2, 0, 2\sqrt{2}); F(4, 2, 2\sqrt{2}); G(2, 4, 2\sqrt{2}); H(0, 2, 2\sqrt{2})$

c)

$$\text{i) } \vec{BG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 0) = (-2, 2, 2\sqrt{2})$$

Um vetor diretor da reta BG é, por exemplo,

$$(-1, 1, \sqrt{2}) \left(= \frac{1}{2} \vec{BG} \right).$$

Assim, uma equação vetorial da reta BG é:

$$(x, y, z) = (4, 2, 0) + k(-1, 1, \sqrt{2}), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } \vec{FH} = (0, 2, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-4, 0, 0)$$

Assim, as equações cartesianas da reta FH são $y = 2 \wedge z = 2\sqrt{2}$.

$$\text{iii) } \vec{FG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-2, 2, 0)$$

Assim, uma equação vetorial da reta paralela à reta FG e que passa na origem do referencial é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-2, 2, 0), k \in \mathbb{R}$$

iv) O plano BDH é paralelo ao plano xOz e contém o ponto $B(4, 2, 0)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano BDH é $y = 2$.

$$v) \vec{EF} = (4, 2, 2\sqrt{2}) - (2, 0, 2\sqrt{2}) = (2, 2, 0)$$

$$\vec{EC} = (2, 4, 0) - (2, 0, 2\sqrt{2}) = (0, 4, -2\sqrt{2})$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{EF}$ e $\vec{EC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{EF} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{EC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 4, -2\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 4b - 2\sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = \frac{2}{\sqrt{2}}b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = \sqrt{2}b \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(-b, b, \sqrt{2}b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = -1$ obtém-se $\vec{u}(1, -1, -\sqrt{2})$.

Então, $\vec{u}(1, -1, -\sqrt{2})$ é um vetor normal ao plano

EFC e $(2, 0, 2\sqrt{2})$ é um ponto do plano:

$$1(x-2) - 1(y-0) - \sqrt{2}(z-2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - y - \sqrt{2}z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - \sqrt{2}z = -2$$

$$vi) \vec{FG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-2, 2, 0)$$

$$-2(x-0) + 2(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0$$

48.

a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(2, 4, -1)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2}$, pelo que a reta não é paralela ao plano α , ou seja, a reta r é concorrente ao plano α .

b) Os pontos da reta r são da forma $\left(1 + \frac{k}{4}, 2 + \frac{k}{2}, 2 + k\right)$, sendo k um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times \left(1 + \frac{k}{4}\right) + 4 \left(2 + \frac{k}{2}\right) - (2 + k) = -4$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{k}{2} + 8 + 2k - 2 - k = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k = -12$$

$$\Leftrightarrow k = -8$$

Então, o ponto de interseção da reta r com o plano α tem coordenadas:

$$\left(1 - \frac{8}{4}, 2 - \frac{8}{2}, 2 - 8\right) = (-1, -2, -6)$$

49.

a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-2, 3, 4)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(0, 4, -3)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 + 12 - 12 = 0$, pelo que a reta r é estritamente paralela ao plano α ou a reta r é coincidente com o plano α .

Um ponto da reta é o ponto de coordenadas $(1, 0, -7)$. Substituindo estas coordenadas na equação do plano, tem-se:

$$4 \times 0 - 3 \times (-7) = 1 \Leftrightarrow 21 = 1, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

Logo, a reta r é estritamente paralela ao plano α .

b) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, -3, 1)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(2, -1, -1)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 4 + 3 - 1 = 6$, pelo que a reta r não é paralela ao plano α , ou seja, a reta r é concorrente ao plano α .

Os pontos da reta r são da forma $(1 + 2k, -2 - 3k, k)$, sendo k um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times (1 + 2k) - (-2 - 3k) - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4k + 2 + 3k - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 6k = 2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Então, o ponto de interseção da reta r com o plano α tem coordenadas:

$$\left(1 + \frac{2}{3}, -2 - 1, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -3, \frac{1}{3}\right)$$

50.

a) A reta EV é perpendicular ao plano ABC , pelo que um vetor normal a este plano é um vetor diretor da reta. Um vetor normal ao plano ABC e um vetor diretor da reta EV é $\vec{n}(-1, 6, 1)$.

Assim, uma equação vetorial que defina a reta EV

$$\text{é } (x, y, z) = \left(-1, \frac{19}{2}, 4\right) + k(-1, 6, 1), k \in \mathbb{R}.$$

b) O ponto E é o ponto de interseção da reta EV com o plano ABC .

Os pontos da reta EV são da forma

$$\left(-1 - k, \frac{19}{2} + 6k, 4 + k\right), \text{ sendo } k \text{ um número real.}$$

Substituindo na equação do plano ABC :

$$-(-1 - k) + 6\left(\frac{19}{2} + 6k\right) + (4 + k) + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + k + 57 + 36k + 4 + k + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 38k = -76$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Então, o ponto E tem coordenadas

$$\left(-1 + 2, \frac{19}{2} - 12, 4 - 2\right) = \left(1, -\frac{5}{2}, 2\right).$$

c) Se $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar. Tem-se que $\vec{n}(-1, 6, 1) = 0$, sendo $(-1, 6, 1)$ um vetor normal ao plano ABC , e que $\vec{n}\left(1, \frac{25}{2}, 2\right) = 0$, onde $\left(1, \frac{25}{2}, 2\right)$ é um vetor diretor da reta VA . Assim:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 6, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot \left(1, \frac{25}{2}, 2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b + c = 0 \\ a + \frac{25}{2}b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b + c \\ 6b + c + \frac{25}{2}b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12b + 2c + 25b + 4c = 0 \\ 37b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \times \left(-\frac{6}{37}\right)c + c \\ b = -\frac{6}{37}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{37}c \\ b = -\frac{6}{37}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}\left(\frac{1}{37}c, -\frac{6}{37}c, c\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = -37$, obtém-se $\vec{n}(-1, 6, -37)$. Então, $\vec{n}(-1, 6, -37)$ é um vetor normal ao plano perpendicular a ABC e que contém a reta VA .

Como $v\left(-1, \frac{19}{2}, 4\right)$ é um ponto deste plano:

$$\begin{aligned} -1(x+1) + 6\left(y - \frac{19}{2}\right) - 37(z-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x - 1 + 6y - 57 - 37z + 148 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 6y - 37z + 90 &= 0 \end{aligned}$$

51.

a)

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OD} \cdot \vec{OF} &= \\ &= 4 \times 4 \times \cos 45^\circ + 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = \\ &= 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\text{ii) } \vec{AB} \cdot \vec{AF} = 4 \times 8 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \vec{DH} \cdot \vec{DF} &= 8 \times 4\sqrt{2} \cos 45^\circ = \\ &= 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 32 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DF}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{DF}^2 = 32$$

$$\text{Logo, } \overline{DF} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Como $\overline{HF} = \overline{DF}$ e $[DH]$ é um diâmetro da circunferência,

$$\widehat{HDF} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{DC} \cdot \vec{DE} &= l \times l \times \cos \widehat{EDC} = \\ &= \left(\sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2 \cos 135^\circ = \\ &= 32 \times \sin^2 22,5^\circ \times \frac{\cos 135^\circ}{\sin^2 135^\circ} = \\ &= 32 \sin^2 22,5^\circ \times \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \\ &= -32\sqrt{2} \sin^2 22,5^\circ \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\widehat{EDC} = \frac{180^\circ (8-2)}{8} = 135^\circ$$

$$\widehat{DEC} = \widehat{ECD} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

$$\overline{CE} = \overline{DF} = \sqrt{32}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 22,5^\circ}{l} = \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow l = \sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{c) Já foi visto que } l = \sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}.$$

$\widehat{DAH} = 90^\circ$, já que o triângulo $[DAH]$ está inscrito numa semicircunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DH}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{DA}^2 \Leftrightarrow 8^2 = \left(\sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2 + \overline{DA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA}^2 = 64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2$$

$$\text{Logo, } \overline{DA} = \sqrt{64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2}.$$

$[DH]$ é um diâmetro da circunferência e $\widehat{GHA} = 135^\circ$, por se tratar de um ângulo interno do octógono.

$$\text{Logo, } \widehat{DHA} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

$$\text{Então, } \widehat{HDA} = 180^\circ - 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

$$\text{Assim, } \vec{DH} \cdot \vec{DA} =$$

$$= 8 \times \sqrt{64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2} \times \cos 225^\circ \approx 54,62.$$

$$\begin{aligned}
 52. \vec{CF} \cdot \vec{BG} &= \\
 &= (\vec{CB} + \vec{BF}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AG}) = \\
 &= \vec{CB} \cdot \vec{BA} + \vec{CB} \cdot \vec{AG} + \vec{BF} \cdot \vec{BA} + \vec{BF} \cdot \vec{AG} = \\
 &= \|\vec{CB}\| \|\vec{BA}\| \cos 90^\circ + \|\vec{CB}\| \|\vec{AG}\| \cos 180^\circ + \\
 &+ \|\vec{BF}\| \|\vec{BA}\| \cos 0^\circ + \|\vec{BF}\| \|\vec{AG}\| \cos 90^\circ = \\
 &= 0 - \overline{AB} \times \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AB} + 0 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo, $\vec{CF}$ e $\vec{BG}$ são vetores perpendiculares.

$$\begin{aligned}
 53. \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 &= \\
 &= \|\vec{CA}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 = \\
 &= \vec{CA} \cdot \vec{CA} + \vec{CB} \cdot \vec{CB} = \\
 &= (\vec{CM} + \vec{MA}) \cdot (\vec{CM} + \vec{MA}) + (\vec{CM} + \vec{MB}) \cdot (\vec{CM} + \vec{MB}) = \\
 &= \vec{CM} \cdot \vec{CM} + 2\vec{CM} \cdot \vec{MA} + \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \vec{CM} \cdot \vec{CM} + \\
 &+ 2\vec{CM} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MB} = \\
 &= 2\vec{CM} \cdot \vec{CM} + 2\vec{CM} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \\
 &+ \vec{MB} \cdot \vec{MB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + 2\vec{CM} \cdot \vec{0} + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + 0 + 2 \times \frac{1}{4} \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + \frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 = \\
 &= 2\overline{CM}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 54. \vec{AM} \cdot \vec{AN} &= \\
 &= (\vec{AB} + \vec{BM}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DN}) = \\
 &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DN} + \vec{BM} \cdot \vec{AD} + \vec{BM} \cdot \vec{DN} = \\
 &= \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 90^\circ + \|\vec{AB}\| \times \\
 &\times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \\
 &+ \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 90^\circ = \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{8} \|\vec{AB}\|^2 + 0 = \\
 &= \frac{5}{8} \|\vec{AB}\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 55. \|\vec{a} + \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \\
 &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \\
 &= \sqrt{6^2 + 2 \times 0 + 3^2} = \\
 &= \sqrt{45} = \\
 &= 3\sqrt{5} \\
 \|\vec{a} - \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \\
 &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \\
 &= \sqrt{6^2 - 2 \times 0 + 3^2} = \\
 &= \sqrt{45} = \\
 &= 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 56. \overline{AC}^2 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \\
 &= (\vec{BC} - \vec{BA}) \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) = \\
 &= \vec{BC} \cdot \vec{BC} - 2\vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{BA} \cdot \vec{BA} = \\
 &= \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BA}\|^2 - 2\|\vec{BC}\| \|\vec{BA}\| \cos(\widehat{BC, BA}) = \\
 &= \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{BA} \times \cos(\widehat{BC, BA})
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{BA}$$

$$\begin{aligned}
 57. \vec{CB} &= \vec{CD} + \vec{DB} \\
 \vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DB} \\
 \text{Assim:} \\
 \vec{CB} \cdot \vec{AB} &= \\
 &= (\vec{CD} + \vec{DB}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DB}) = \\
 &= \vec{CD} \cdot \vec{AD} + \vec{CD} \cdot \vec{DB} + \vec{DB} \cdot \vec{AD} + \vec{DB} \cdot \vec{DB} = \\
 &= \overline{CD} \times \overline{AD} \cos 180^\circ + \overline{CD} \times \overline{DB} \times \cos 90^\circ + \overline{DB} \times \\
 &\times \overline{AD} \cos 90^\circ + \overline{DB} \times \overline{DB} \cos 0^\circ = \\
 &= -\overline{DA} \times \overline{DC} + 0 + 0 + \overline{BD}^2 = \\
 &= -\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2
 \end{aligned}$$

Uma vez que $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B , tem-se:

$$\vec{CB} \cdot \vec{AB} = \overline{CA} \times \overline{CB} \cos 90^\circ = 0$$

Logo:

$$-\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{DA} \times \overline{DC} = \overline{BD}^2$$

$$\begin{aligned}
 58. \vec{BA} &= (1, 2) - (4, 6) = (-3, -4) \\
 \|\vec{BA}\| &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \\
 \text{Seja } D &\text{ o vértice oposto a } B. \\
 D = A + \vec{BA} &= (1, 2) + (-3, -4) = (-2, -2)
 \end{aligned}$$

Sejam C e E os restantes vértices.

Uma vez que $[BCDE]$ é um quadrado, as suas diagonais são perpendiculares e têm o mesmo comprimento.

Seja $\vec{u}(a, b)$ um vetor não nulo perpendicular a $\vec{BA}$ e cujo comprimento é igual ao comprimento de $\vec{BA}$.

Tem-se então que $\vec{BA} \cdot \vec{u} = 0$ e $\|\vec{u}\| = \|\vec{BA}\|$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \vec{BA} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{BA}\| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-3, -4) \cdot (a, b) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ \frac{16}{9}b^2 + b^2 = 25 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então, $\vec{u}(-4, 3)$ ou $\vec{u}(4, -3)$.

Seja $\vec{u}(-4, 3)$.

Então:

$$C = A + \vec{u} = (1, 2) + (-4, 3) = (-3, 5)$$

$$E = A - \vec{u} = (1, 2) - (-4, 3) = (1, 2) + (4, -3) = (5, -1)$$

- 59.** O declive da reta de equação $y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$ é $-\frac{3}{4}$, pelo que um seu vetor diretor é, por exemplo, $\vec{r}(4, -3)$.

Seja $\vec{u}(a, b)$ o vetor com origem em T e extremidade no centro de uma circunferência nas condições do enunciado.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (4, -3) \cdot (a, b) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 0 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ \frac{9}{16}b^2 + b^2 = 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ b^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -6 \\ b = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, os centros das circunferências são os pontos de coordenadas:

$$(-3, -1) + (6, 8) = (3, 7) \text{ e } (-3, -1) + (-6, -8) = (-9, -9)$$

- 60.** Sejam r , s e t , respetivamente, as retas definidas no enunciado:

$r \cap s$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 2x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x - 5 = 6x - 1 \Leftrightarrow 4x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$y = \frac{2}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$A\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$$

$r \cap t$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow -2x - 5 = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 4x = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$y = \frac{2}{3} \times 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$C\left(5, \frac{5}{3}\right)$$

$s \cap t$:

$$2x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow 6x - 1 = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 8x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$y = 2 \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$C\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

Pretende-se determinar a área do triângulo $[ABC]$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Seja h a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice C .

h é a distância entre o ponto C e a reta $AB = r$.

Seja u a reta perpendicular a r que passa em C .

$$u: y = -\frac{3}{2}x + b$$

Como C pertence à reta u :

$$\frac{11}{3} = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{20}{3}$$

$$\text{Logo, } u: y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}.$$

$r \cap u$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow 13x = 50$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{50}{13}$$

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{50}{13} - \frac{5}{3} = \frac{35}{39}$$

$$D\left(\frac{50}{13}, \frac{35}{39}\right)$$

$$\begin{aligned} h = \overline{CD} &= \sqrt{\left(\frac{50}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{35}{39} - \frac{11}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{36}{13}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1296}{169}} = \sqrt{\frac{144}{13}} \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{\frac{144}{13}}}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

- 61.** Seja r a reta perpendicular à reta de equação

$$y = \frac{3}{2}x - 6 \text{ e que passa no ponto } A.$$

$$r: y = -\frac{2}{3}x + b$$

Como A pertence a r :

$$-5 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$$

$$\text{Então, } r: y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}.$$

Seja B o ponto de interseção da reta r com a reta definida no enunciado.

$$\frac{3}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$$

$$y = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 6 = -\frac{57}{13}$$

Logo, $B\left(\frac{14}{13}, -\frac{57}{13}\right)$.

A distância do ponto $A(2, -5)$ à reta de equação

$$y = \frac{3}{2}x - 6 \text{ é igual a } \overline{AB}.$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\left(\frac{14}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{57}{13} + 5\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{64}{169}} = \\ &= \frac{\sqrt{208}}{13} = \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{13}\end{aligned}$$

62. $r: x + y = 5 \Leftrightarrow y = -x + 5$

Como o declive da reta r é -1 , um vetor diretor desta reta é, por exemplo, $\vec{r}(1, -1)$.

$$s: x + 7y = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$$

Como o declive da reta s é $-\frac{1}{7}$, um vetor diretor desta reta é, por exemplo, $\vec{s}(7, -1)$.

Seja $C(a, b)$ o centro da circunferência.

Como as retas r e s são tangentes à circunferência, respetivamente, nos pontos B e A , tem-se:

$$\begin{cases} \vec{BC} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2, b - 3) \cdot (1, -1) = 0 \\ (a - 1, b - 1) \cdot (7, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 - b + 3 = 0 \\ 7a - 7 - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ 7a - 7 - a - 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ 6a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{6} \\ a = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Logo, $C\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$.

63. $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = a + b + c$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a + b + c = \frac{3}{2}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = a + c$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } \vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a + c = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a + c = 1.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - c)^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 1 - c + b + c = \frac{3}{2} \\ a = 1 - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2c + c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 - 2c + \frac{1}{4} = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores $\vec{u}$ nas condições do enunciado são:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \text{ e}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right).$$

64. Um vetor normal ao plano de equação

$$4x - 3y + 12z = 6 \text{ é, por exemplo, } \vec{n}(4, -3, 12).$$

A reta perpendicular ao plano e que contém o ponto A tem as seguintes equações cartesianas:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 4}{-3} = \frac{z - 2}{12}$$

As coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano dado são:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 12z = 6 \\ \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 4}{-3} \\ \frac{y - 4}{-3} = \frac{z - 2}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3 = 4y - 16 \\ -4y + 16 = z - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(-\frac{4}{3}y + \frac{19}{3}\right) - 3y + 12(-4y + 18) = 6 \\ x = -\frac{4}{3}y + \frac{19}{3} \\ z = -4y + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16}{3}y + \frac{76}{3} - 3y - 48y + 216 = 6 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 169y = 706 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{706}{169} \\ x = \frac{129}{169} \\ z = \frac{218}{169} \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(\frac{129}{169}, \frac{706}{169}, \frac{218}{169}\right)$.

A distância entre o ponto A e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{129}{169}\right)^2 + \left(4 - \frac{706}{169}\right)^2 + \left(2 - \frac{218}{169}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{40}{169}\right)^2 + \left(\frac{30}{169}\right)^2 + \left(\frac{120}{169}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16\,900}{169^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{100}{169}} = \frac{10}{13}$$

- 65.** Para se saber a medida do raio da superfície esférica é necessário determinar a distância entre o seu centro e o plano α .

O plano α é definido por $2x + y + z - 3 = 0$, logo um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(2, 1, 1)$.

A reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto C tem a seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 4) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, os pontos da reta são da forma:

$$(-1 + 2k, k, 4 + k), k \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano:

$$2(-1 + 2k) + k + 4 + k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4k + k + 4 + k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(-1 + \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 4 + \frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right)$.

Assim, a distância entre o ponto C e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(4 - \frac{25}{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Logo, o raio da superfície esférica é $\sqrt{\frac{1}{6}}$ e a sua equação é $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{1}{6}$.

$$66. \vec{AB} = \left(0, 1, \frac{5}{2}\right) - (0, 0, 2) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AC} = (6, 6, 2) - (0, 0, 2) = (6, 6, 0)$$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (6, 6, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{2}c = 0 \\ 6a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = -b \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(-b, b, -2b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $b = -1$, obtém-se $\vec{u}(1, -1, 2)$.

Então, $\vec{u}(1, -1, 2)$ é um vetor normal ao plano ABC e $(0, 0, 2)$ é um ponto do plano:

$$1(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 4 = 0$$

Assim, para que D seja coplanar com os pontos A, B e C tem de pertencer ao plano ABC:

$$m - m + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

67.

- a) Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(-1, 2, 1)$.
Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $\vec{s}(2, 1, 1)$.

Estes dois vetores não são colineares, já que

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}. \text{ Logo, as retas não são paralelas.}$$

Substituindo, na equação da reta r , x, y e z por

$$\begin{cases} x = -1 + 2k' \\ y = 2 + k' \\ z = k' \end{cases} \text{ (ponto genérico da reta } s), \text{ obtém-se:}$$

$$\begin{cases} -1 + 2k' = 1 - k \\ 2 + k' = 2k \\ k' = -\frac{4}{5} + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k' = 2 - k \\ k' = 2k - 2 \\ 2k - 2 = -\frac{4}{5} + k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ k' = 2 \times \frac{6}{5} - 2 \\ k = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times \frac{2}{5} = 2 - \frac{6}{5} \\ k' = \frac{2}{5} \\ k = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \\ k' = \frac{2}{5} \\ k = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Assim, as retas r e s são retas concorrentes.

- b)** Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 2b \\ 2a + b + a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 6b \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = 3a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}(a, 3a, -5a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $a = -1$, obtém-se $\vec{u}(-1, -3, 5)$.

Então, $\vec{u}(-1, -3, 5)$ é um vetor normal ao plano e $(-1, 2, 0)$ (ponto pertencente à reta s) é um ponto do plano:

$$-1(x+1) - 3(y-2) + 5(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 - 3y + 6 + 5z = 0$$

$\Leftrightarrow -x - 3y + 5z + 5 = 0$, que é a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s .

- 68.** Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-5, p, 0)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(1, p, -1)$.

Para que a interseção da reta com o plano seja um conjunto vazio, a reta tem de ser estritamente paralela ao plano, ou seja, estes dois vetores têm de ser perpendiculares.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-5, p, 0) \cdot (1, p, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5 + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}$$

- 69.** De acordo com a sugestão do enunciado, $A(a, 0, 0)$,

$$C(0, a, 0), V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right).$$

$$\vec{AC} = (-a, a, 0)$$

$$\vec{AV} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right)$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\|\vec{AV}\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3a)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{19}{2}}a$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AV} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = a^2$$

Seja α a amplitude do ângulo que uma aresta lateral faz com a diagonal da base concorrente com ela.

$$\cos \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{19}{2}}a} =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{19}a^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{19}}$$

Assim, $\alpha \approx 76,74^\circ$.

70.

- a)** Para que o raio da circunferência de interseção do plano α com a superfície esférica seja $\sqrt{3}$, basta que uma das parcelas que compõem a equação da superfície esférica seja igual a 1.

Assim:

$$\bullet \text{ se } (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \vee x-1 = -1$$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$, obtém-se, por exemplo, o plano de equação $x = 2$, para o qual a interseção do plano α com a superfície esférica é uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

$$\bullet \text{ se } (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow y-2 = 1 \vee y-2 = -1$$

$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = 1$, obtém-se, por exemplo, o plano de equação $y = 3$, para o qual a interseção do plano α com a superfície esférica é uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

$$\bullet \text{ se } z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1, \text{ obtém-se, por exemplo, o plano de equação } z = 1, \text{ para o qual a interseção do plano } \alpha \text{ com a superfície esférica é uma circunferência de raio } \sqrt{3}.$$

- b)** Um vetor normal do plano cuja equação se pretende escrever é $(1, 1, 0)$, por exemplo, uma vez que este plano é paralelo ao plano α .

Este vetor é o vetor diretor de uma reta que passa pelo ponto de tangência do plano com a superfície esférica e pelo centro desta, sendo uma equação vetorial dessa reta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos desta reta são da forma $(1+k, 2+k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto de tangência pertence a esta reta e à superfície esférica, logo:

$$(1 + k - 1)^2 + (2 + k - 2)^2 + 0^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$$

Seja $k = \sqrt{2}$ (para $k = -\sqrt{2}$ obter-se-ia um outro ponto de tangência, diametralmente oposto ao que se vai determinar). Então, as coordenadas do ponto de tangência são $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0)$.

Assim, uma equação cartesiana de um plano tangente à superfície esférica e paralelo ao plano α : $x + y = 0$ é:

$$1(x - 1 - \sqrt{2}) + 1(y - 2 - \sqrt{2}) + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{2} + y - 2 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

71.

a) O ponto A pertence ao eixo Ox , logo é da forma $(x, 0, 0)$. Substituindo na equação do plano ABC :

$$2x + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Logo, $A(4, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao eixo Oy , logo é da forma $(0, y, 0)$. Substituindo na equação do plano ABC :

$$0 + 2y + 0 = 8 \Leftrightarrow y = 4$$

Logo, $B(0, 4, 0)$.

O ponto C pertence ao eixo Oz , logo é da forma $(0, 0, z)$. Substituindo na equação do plano ABC :

$$0 + 0 + z = 8 \Leftrightarrow z = 8$$

Logo, $C(0, 0, 8)$.

b) Se o plano é paralelo ao plano ABC , então tem como vetor normal, por exemplo, $\vec{n}(2, 2, 1)$, que é um vetor normal ao plano ABC .

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $D(-1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano ABC é:

$$2(x + 1) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 + 2y - 2 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z = 2$$

c) $M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2, 2, 0)$

$$\vec{CM} = (2, 2, 0) - (0, 0, 8) = (2, 2, -8)$$

Logo, uma equação vetorial da reta CM é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 8) + k(2, 2, -8), k \in \mathbb{R}$$

d) Uma reta que passe pela origem do referencial e seja perpendicular ao plano ABC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$. Os pontos desta reta são da forma $(2k, 2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$. O ponto P é um desses pontos e pertence ao plano ABC , logo:

$$2 \times 2k + 2 \times 2k + k = 8 \Leftrightarrow 9k = 8$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{9}$$

$$\text{Assim, } P\left(\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

O raio da esfera é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{576}{81}} = \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Logo, uma condição que define a esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{64}{9}$$

72.

a) Um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(3, 2, 6)$.

Um vetor normal ao plano β é, por exemplo,

$$\vec{m}(1, 1, -1).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = 3 + 2 - 6 = -1$$

Logo, os planos α e β não são perpendiculares.

b) VC é uma reta perpendicular ao plano α . Assim, um vetor diretor de VC é o vetor $\vec{n}(3, 2, 6)$. Como C pertence a esta reta, uma equação vetorial de VC é:

$$(x, y, z) = \left(1, 3, -\frac{1}{2}\right) + k(3, 2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta VC , e também em particular o ponto V , são da forma $\left(1 + 3k, 3 + 2k, -\frac{1}{2} + 6k\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Assim, } \vec{CV} = (3k, 2k, 6k), k \in \mathbb{R}.$$

$$\|\vec{CV}\| = 14 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + (6k)^2} = 14$$

$$\Leftrightarrow 49k^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$$

Como C pertence ao primeiro octante, $k = \frac{14}{7}$.

Logo:

$$\begin{aligned} V &= \left(1 + 3 \times 2, 3 + 2 \times 2, -\frac{1}{2} + 6 \times 2\right) = \\ &= \left(7, 7, \frac{23}{2}\right) \end{aligned}$$

c) Se o plano γ é paralelo ao plano α , então um seu vetor diretor é $\vec{n}(3, 2, 6)$.

O ponto V pertence ao plano γ .

Então, uma equação do plano γ que contém o ponto V e é paralelo ao plano α é:

$$3(x - 7) + 2(y - 7) + 6\left(z - \frac{23}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 21 + 2y - 14 + 6z - 69 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 104 = 0$$

Tema III - Sucessões

Unidade 1 - Propriedades elementares de sucessões reais

Páginas 6 a 18

1.

a) $u_1 = -10 = -10 \times 1$
 $u_2 = -20 = -10 \times 2$
 $u_3 = -30 = -10 \times 3$
 E assim sucessivamente.
 Logo, $u_n = -10n$.

b) $u_1 = 1 = \frac{1}{2 \times 1 - 1}$
 $u_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 2 - 1}$
 $u_3 = \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \times 3 - 1}$
 E assim sucessivamente.
 Logo, $u_n = \frac{1}{2n - 1}$.

c) $u_1 = \frac{4}{3} = \frac{1 + 3}{3^1}$
 $u_2 = \frac{5}{9} = \frac{2 + 3}{3^2}$
 $u_3 = \frac{6}{27} = \frac{3 + 3}{3^3}$
 E assim sucessivamente.
 Logo, $u_n = \frac{n + 3}{3^n}$.

2.

a) $u_n = 2n - 1$
 $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
 $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$
 $u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$
 $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$
 $u_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$

b) $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$
 $v_1 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2$
 $v_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$
 $v_3 = 1 + \frac{1}{3^2} = \frac{10}{9}$
 $v_4 = 1 + \frac{1}{4^2} = \frac{17}{16}$
 $v_5 = 1 + \frac{1}{5^2} = \frac{26}{25}$

c) $w_n = \sqrt{n}$
 $w_1 = \sqrt{1} = 1$
 $w_2 = \sqrt{2}$

$$w_3 = \sqrt{3}$$

$$w_4 = \sqrt{4} = 2$$

$$w_5 = \sqrt{5}$$

d) $t_n = \frac{(-1)^n}{n}$
 $t_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$
 $t_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$
 $t_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$
 $t_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$
 $t_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$

e) $s_n = \cos(n\pi)$
 $s_1 = \cos(1\pi) = -1$
 $s_2 = \cos(2\pi) = 1$
 $s_3 = \cos(3\pi) = -1$
 $s_4 = \cos(4\pi) = 1$
 $s_5 = \cos(5\pi) = -1$

3.

a) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$
 $u_1 = 0$
 $u_2 = 1$
 $u_3 = 0$
 $u_4 = 1$
 $u_5 = 0$
 $u_{2018} = 1$

b) $v_n = \begin{cases} n^3 + 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$
 $v_1 = 1^3 + 1 = 2$
 $v_2 = -\frac{1}{2}$
 $v_3 = 3^3 + 1 = 28$
 $v_4 = -\frac{1}{4}$
 $v_5 = 5^3 + 1 = 126$
 $v_{2018} = -\frac{1}{2018}$

c) $w_n = \begin{cases} |n - 3| & \text{se } n < 10 \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$
 $w_1 = |1 - 3| = 2$
 $w_2 = |2 - 3| = 1$
 $w_3 = |3 - 3| = 0$
 $w_4 = |4 - 3| = 1$

$$w_5 = |5 - 3| = 2$$

$$w_{2018} = \frac{2018}{2} = 1009$$

$$4. u_n = \frac{13-2n}{4n+1}$$

$$a) u_{10} = \frac{13-2 \times 10}{4 \times 10 + 1} = -\frac{7}{41}$$

$$b) u_n = 10 \Leftrightarrow \frac{13-2n}{4n+1} = 10$$

$$\Leftrightarrow 13-2n = 40n+10$$

$$\Leftrightarrow 42n = 3$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{14} (\notin \mathbb{N})$$

Logo, 10 não é um termo da sucessão.

$$c) u_5 - u_{20} = \frac{13-2 \times 5}{4 \times 5 + 1} - \frac{13-2 \times 20}{4 \times 20 + 1} = \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{21}$$

$$d) u_{n-1} = \frac{13-2 \times (n-1)}{4 \times (n-1) + 1} = \frac{13-2n+2}{4n-4+1} = \frac{15-2n}{4n-3}$$

$$u_{2n} = \frac{13-2 \times 2n}{4 \times 2n + 1} = \frac{13-4n}{8n+1}$$

$$e) u_n < 0 \Leftrightarrow \frac{13-2n}{4n+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 13-2n < 0$$

$$\Leftrightarrow -2n < -13$$

$$\Leftrightarrow 2n > 13$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{13}{2}$$

O primeiro número natural maior que $\frac{13}{2}$ é 7.

Logo, a partir da ordem 7 todos os termos da sucessão são negativos.

$$5. u_n = \sqrt{2n^2+1}; v_n = n-3$$

$$a) u_n = 17 \Leftrightarrow \sqrt{2n^2+1} = 17$$

$$\Leftrightarrow 2n^2+1 = 289$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 = 288$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -12$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 12$, ou seja, 17 é o termo de ordem 12 da sucessão (u_n) .

$$v_n = 17 \Leftrightarrow n-3 = 17 \Leftrightarrow n = 20$$

17 é o termo de ordem 20 da sucessão (v_n) .

$$b) u_p = v_p \Leftrightarrow \sqrt{2p^2+1} = p-3$$

$$\Leftrightarrow 2p^2+1 = p^2-6p+9$$

$$\Leftrightarrow p^2+6p-8=0$$

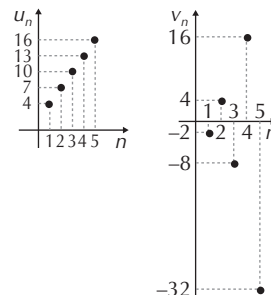
$$\Leftrightarrow p = \frac{-6 \pm \sqrt{36+32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-6 \pm 2\sqrt{17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = -3 + \sqrt{17} \vee p = -3 - \sqrt{17}$$

Como $-3 + \sqrt{17} \notin \mathbb{N}$ e $-3 - \sqrt{17} \notin \mathbb{N}$, então a equação é impossível em $\mathbb{N}$. Logo, a proposição dada é falsa.

$$6. u_n = 3n+1; v_n = (-2)^n$$



7.

$$a) u_n = \frac{1}{2}n+1$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(n+1)+1 - \left(\frac{1}{2}n+1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}n - 1 = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é crescente.

$$b) v_n = \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} =$$

$$= \frac{2n+2-2n-4}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (v_n) é decrescente.

$$c) w_n = (-1)^n \times n$$

$$w_1 = -1$$

$$w_2 = 2$$

$$w_3 = -3$$

Tem-se que $w_2 - w_1 > 0$ e $w_3 - w_2 < 0$, logo a sucessão (w_n) não é monótona.

8.

$$a) u_n = \frac{2n-5}{3n+4}$$

$$u_{n+1} - u_n =$$

$$= \frac{2(n+1)-5}{3(n+1)+4} - \frac{2n-5}{3n+4} =$$

$$= \frac{2n-3}{3n+7} - \frac{2n-5}{3n+4} =$$

$$= \frac{(2n-3)(3n+4) - (2n-5)(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} =$$

$$= \frac{6n^2+8n-9n-12-6n^2-14n+15n+35}{(3n+7)(3n+4)} =$$

$$= \frac{23}{(3n+7)(3n+4)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é crescente.

$$b) u_n = \frac{10n-5}{5n-3}$$

$$u_{n+1} - u_n =$$

$$= \frac{10(n+1)-5}{5(n+1)-3} - \frac{10n-5}{5n-3} =$$

$$= \frac{10n+5}{5n+2} - \frac{10n-5}{5n-3} =$$

$$= \frac{(10n+5)(5n-3) - (10n-5)(5n+2)}{(5n+2)(5n-3)} =$$

$$= \frac{50n^2 - 30n + 25n - 15 - 50n^2 - 20n + 25n + 10}{(5n+2)(5n-3)} =$$

$$= \frac{-5}{(5n+2)(5n-3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é decrescente.

$$c) u_n = \frac{(-2)^n}{n}$$

$$u_1 = \frac{-2}{1} = -2$$

$$u_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_3 = -\frac{8}{3}$$

Tem-se que $u_2 - u_1 > 0$ e $u_3 - u_2 < 0$, logo a sucessão (u_n) não é monótona.

$$d) u_n = (n+10)^2$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+11)^2 - (n+10)^2 = \\ &= n^2 + 22n + 121 - n^2 - 20n - 100 = \\ &= 2n + 21 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é crescente.

$$e) u_n = (n-10)^2$$

$$u_9 = 1$$

$$u_{10} = 0$$

$$u_{11} = 1$$

Tem-se que $u_{10} - u_9 < 0$ e $u_{11} - u_{10} > 0$, logo a sucessão (u_n) não é monótona.

$$9. u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \leq 4 \\ 2n & \text{se } n > 4 \end{cases}; v_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq 4 \\ 3n & \text{se } n > 4 \end{cases}$$

$$u_3 = 9$$

$$u_4 = 16$$

$$u_5 = 10$$

Tem-se que $u_4 - u_3 > 0$ e $u_5 - u_4 < 0$, logo a sucessão (u_n) não é monótona.

Se $n < 4$, então $v_{n+1} - v_n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0$.

Se $n > 4$, então $v_{n+1} - v_n = 3n + 3 - 3n = 3 > 0$

$$v_5 - v_4 = 15 - 8 = 7 > 0$$

Logo, $v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (v_n) é crescente.

$$10. A =]-2, 9] \cup \{12\}$$

a) Por exemplo, 13 e 100 são majorantes de A.
Por exemplo, -100 e -2 são minorantes de A.

b) O conjunto dos majorantes de A é $[12, +\infty[$.
O conjunto dos minorantes de A é $]-\infty, -2]$.

$$11. B =]-\infty, 1]$$

a) Por exemplo, $\frac{3}{2}$ e π são majorantes de B.
B não tem minorantes.

b) O conjunto dos majorantes de B é $[1, +\infty[$.

12. O ínfimo de C é 3 e o supremo de C é 7.

13.

a) Um conjunto majorado, mas não limitado é, por exemplo, $]-\infty, 1]$.

b) Um conjunto minorado, mas não limitado é, por exemplo, $]2, +\infty[$.

c) Um conjunto limitado é, por exemplo, $[3, 4[$.

14.

$$a)]-\infty, 1]$$

O máximo deste conjunto é 1 e não tem mínimo.

$$b)]2, +\infty[$$

Este conjunto não tem máximo nem mínimo.

$$c) [3, 4[$$

O mínimo deste conjunto é 3 e não tem máximo.

15.

$$a) a_n = n^2 + 1$$

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 17, \dots$$

O conjunto dos minorantes de (a_n) é $]-\infty, 2]$.
 (a_n) não tem majorantes.

$$b) b_n = -3n$$

$$b_1 = -3, b_2 = -6, b_3 = -9, b_4 = -12, \dots$$

O conjunto dos majorantes de (b_n) é $[-3, +\infty[$.
 (b_n) não tem minorantes.

$$c) c_n = (-1)^n$$

$$c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1, \dots$$

O conjunto dos minorantes de (c_n) é $]-\infty, -1]$.
O conjunto dos majorantes de (c_n) é $[1, +\infty[$.

$$d) d_n = (-2)^n$$

$$d_1 = -2, d_2 = 4, d_3 = -8, d_4 = 16, \dots$$

(d_n) não tem minorantes nem majorantes.

16. Uma vez que a sucessão (u_n) é crescente, então $u_1 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, todos os seus termos são inferiores a 2017, ou seja, $u_n < 2017, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, (u_n) é limitada, pois $u_1 \leq u_n < 2017, \forall n \in \mathbb{N}$.

17.

a) $a_n = \frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (a_n) é limitada.

b) $b_n = \frac{2n}{n+3} = \frac{2n+6-6}{n+3} = 2 - \frac{6}{n+3}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 > -\frac{6}{n+3} \geq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{6}{n+3} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (b_n) é limitada.

c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Como $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, então $0 > -\frac{1}{n} \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $-1 \leq c_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (c_n) é limitada.

d) $d_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - 1$

Tem-se que $-1 \leq \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $-2 \leq \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (d_n) é limitada.

18. Sabemos que (w_n) é uma sucessão de termos negativos tal que $\frac{6}{w_n} < -2$, para todo o número natural n .

Assim, $\frac{6}{w_n} < -2 \Leftrightarrow \frac{w_n}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow w_n > -3$.

Tem-se, então, que $0 > w_n > -3, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão (w_n) é limitada.

19. $u_n = \frac{3n+1}{2n+3}$

$|u_n| \leq L \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+3} \leq L$

$\Leftrightarrow 3n+1 \leq 2nL+3L$

$\Leftrightarrow 3n-2nL \leq 3L-1$

$\Leftrightarrow n(3-2L) \leq 3L-1$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3L-1}{3-2L} \wedge 3-2L < 0$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3L-1}{3-2L} \wedge L > \frac{3}{2}$

Tomando, por exemplo, $L = 2$, vem que

$n \geq \frac{3 \times 2 - 1}{3 - 2 \times 2}$, ou seja, $n \geq -5$, que é uma condição

universal em $\mathbb{N}$.

Conclui-se, assim, que existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$.

Unidade 2 - Princípio de indução matemática

Páginas 19 a 25

20.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$

Seja $P(n): 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$.

$P(1): 2^1 \times 7^1 = (2 \times 7)^1 \Leftrightarrow 2 \times 7 = 2 \times 7$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$

Tese: $2^{n+1} \times 7^{n+1} = (2 \times 7)^{n+1}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \times 7^{n+1} &= 2^n \times 2 \times 7^n \times 7 = \\ &= 2^n \times 7^n \times 2 \times 7 = \\ &= (2 \times 7)^n \times (2 \times 7) = \\ &= (2 \times 7)^{n+1} \end{aligned}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$.

- b) Dado $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos da sucessão dos números naturais é igual a $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$.

Seja $P(n): S_n = \frac{n^2 + n}{2}$.

$P(1): 1 = \frac{1^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$

Tese: $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) = \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1) + (n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$$

Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos da sucessão dos números naturais é igual a

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{Seja } P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$P(1): 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{Tese: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Demonstração:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right)^2 \times (n+1)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)^2}{4} \right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$$\text{Logo, } \forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$d) \forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2 \text{ é um número par.}$$

Seja $P(n): 3n^2 + n - 2$ é um número par.

$P(1): 3 \times 1^2 + 1 - 2 = 2$ é um número par.

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $3n^2 + n - 2$ é um número par.

Tese: $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$ é um número par.

Demonstração:

$$3(n+1)^2 + (n+1) - 2 = 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2 =$$

$$= 3n^2 + 7n + 2 =$$

$$= (3n^2 + n - 2) + (6n + 4) =$$

$$= (3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$$

Por hipótese, $3n^2 + n - 2$ é um número par. Além disso, $2(3n + 2)$ é um número par.

A soma de dois números pares é um número par.

Logo, $(3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$ é um número par, ou

seja, $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$ é um número par.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$ é um número par.

$$e) \forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

Seja $P(n): n^3 - n$ é divisível por 3.

$P(1): 1^3 - 1 = 0$ é divisível por 3.

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $n^3 - n$ é divisível por 3.

Tese: $(n+1)^3 - (n+1)$ é divisível por 3.

Demonstração:

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1) - n - 1 =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Por hipótese, $n^3 - n$ é divisível por 3. Além disso,

$3(n^2 + n)$ é divisível por 3.

A soma de dois números divisíveis por 3 é um número divisível por 3.

Logo, $(n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ é divisível por 3, ou seja, $(n+1)^3 - (n+1)$ é divisível por 3.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ é divisível por 3.

$$f) \forall n \in \mathbb{N}, (2^{n+2} + 3^{2n+1}) \text{ é múltiplo de 7.}$$

Seja $P(n): (2^{n+2} + 3^{2n+1})$ é múltiplo de 7.

$P(1): 2^{1+2} + 3^{2+1} = 8 + 27 = 35$ é múltiplo de 7.

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $(2^{n+2} + 3^{2n+1})$ é múltiplo de 7.

Tese: $(2^{n+3} + 3^{2n+3})$ é múltiplo de 7.

Demonstração:

$$2^{n+3} + 3^{2n+3} = 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 9 =$$

$$= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times (2 + 7) =$$

$$= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 2 + 3^{2n+1} \times 7 =$$

$$= (2^{n+2} + 3^{2n+1}) \times 2 + 3^{2n+1} \times 7$$

Por hipótese, $(2^{n+2} + 3^{2n+1})$ é múltiplo de 7, logo

$(2^{n+2} + 3^{2n+1}) \times 2$ é múltiplo de 7. Além disso,

$3^{2n+1} \times 7$ é múltiplo de 7. A soma de dois números

múltiplos de 7 é um múltiplo de 7.

Logo, $(2^{n+3} + 3^{2n+3})$ é múltiplo de 7.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, (2^{n+2} + 3^{2n+1})$ é múltiplo de 7.

$$21. \text{ Seja } P(n): 9^n - 1 \text{ é um múltiplo de 8.}$$

$P(1): 9^1 - 1 = 8$, que é um múltiplo de 8.

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $9^n - 1$ é um múltiplo de 8.

Tese: $9^{n+1} - 1$ é um múltiplo de 8.

Demonstração:

$$9^{n+1} - 1 = 9^n \times 9 - 1 =$$

$$= 9^n \times 9 - 9 + 9 - 1 =$$

$$= 9(9^n - 1) + 8$$

Como, por hipótese, $9^n - 1$ é um múltiplo de 8 e 8

é um múltiplo de 8, então $9(9^n - 1) + 8$ é um múltiplo de 8, por se tratar da soma de dois múltiplos de 8.

Logo, $9^n - 1$ é, para todo o número natural n , um múltiplo de 8.

22. Seja $P(n)$: $n^2 > 2n$.

$$P(3): 3^2 > 2 \times 3 \Leftrightarrow 9 > 6$$

Logo, $P(3)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $n^2 > 2n$

Tese: $(n+1)^2 > 2(n+1)$

Demonstração:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 2n + 1 > 4n + 1$$

Basta então provar que $4n + 1 > 2(n+1)$.

$$4n + 1 > 2(n+1) \Leftrightarrow 4n + 1 > 2n + 2 \Leftrightarrow 2n > 0$$

$$\Leftrightarrow n > 0, \text{ o que é verdade } \forall n \geq 3.$$

Logo, $n^2 > 2n, \forall n \in \mathbb{N}_3$.

23. $t_1 = 1$

$$t_2 = 1 + 2 = 3$$

$$t_3 = 3 + 3 = 6$$

$$t_4 = 6 + 4 = 10$$

...

Logo:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, \forall n > 1 \end{cases}$$

24.

a) $a_n = 2n + 1$

$$a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

Logo:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

b) $b_n = 3^n$

$$b_1 = 3^1 = 3$$

$$b_2 = 3^2 = 9$$

$$b_3 = 3^3 = 27$$

$$b_4 = 3^4 = 81$$

$$b_5 = 3^5 = 243$$

Logo:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 3b_{n-1}, \forall n > 1 \end{cases}$$

25.

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_1 = 5 (= 3 \times 1 + 2)$$

$$a_2 = 5 + 3 = 8 (= 3 \times 2 + 2)$$

$$a_3 = 8 + 3 = 11 (= 3 \times 3 + 2)$$

$$a_4 = 11 + 3 = 14 (= 3 \times 4 + 2)$$

$$a_5 = 14 + 3 = 17 (= 3 \times 5 + 2)$$

Logo, $a_n = 3n + 2$.

$$\text{b) } \begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 2 + b_{n-1}, \forall n > 1 \end{cases}$$

$$b_1 = 3 (= 2 \times 1 + 1)$$

$$b_2 = 2 + 3 = 5 (= 2 \times 2 + 1)$$

$$b_3 = 2 + 5 = 7 (= 2 \times 3 + 1)$$

$$b_4 = 2 + 7 = 9 (= 2 \times 4 + 1)$$

$$b_5 = 2 + 9 = 11 (= 2 \times 5 + 1)$$

Logo, $b_n = 2n + 1$.

$$\text{26. } u_1 = 1 \wedge u_{n+1} = \frac{4 + 2u_n}{4}$$

a) Seja $P(n)$: $u_n < 2$.

$$P(1): u_1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n < 2$

Tese: $u_{n+1} < 2$

Demonstração:

Por hipótese, $u_n < 2$.

Então:

$$2u_n < 4 \Leftrightarrow 4 + 2u_n < 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 2u_n}{4} < 2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} < 2$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{n+1} - u_n &= \frac{4 + 2u_n}{4} - u_n = \\ &= \frac{4 + 2u_n - 4u_n}{4} = \\ &= \frac{4 - 2u_n}{4} \end{aligned}$$

Pela alínea anterior, $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo:

$$2u_n < 4 \Leftrightarrow -2u_n > -4$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2u_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - 2u_n}{4} > 0$$

Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

27. Seja $P(n): \forall n \in \mathbb{N}_0, u_n = \frac{2}{2n+1}$.

$$P(0): u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1} \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{0+1} \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo, $P(0)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } u_n = \frac{2}{2n+1}$$

$$\text{Tese: } u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

Demonstração:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2n+2+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

$$\text{Logo, } \forall n \in \mathbb{N}_0, u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Unidade 3 - Progressões aritméticas e geométricas

Páginas 26 a 42

28.

$$\begin{aligned} \text{a) } a_{n+1} - a_n &= 3(n+1) - 2 - (3n - 2) = \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } b_{n+1} - b_n &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \\ &= -\frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que $-\frac{1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (b_n) não é uma progressão aritmética.

$$\begin{aligned} \text{c) } c_{n+1} - c_n &= \frac{-2(n+1)^2 + (n+1)}{n+1} - \frac{-2n^2 + n}{n} = \\ &= \frac{(n+1)[-2(n+1)+1]}{n+1} - \frac{n(-2n+1)}{n} = \\ &= -2n - 2 + 1 - (-2n + 1) = \\ &= -2n - 1 + 2n - 1 = -2, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que -2 é uma constante, fica provado que (c_n) é uma progressão aritmética de razão -2.

$$\text{d) } d_{n+1} - d_n = d_n - \frac{1}{2} - d_n = -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $-\frac{1}{2}$ é uma constante, fica provado que (d_n) é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{2}$.

e) $e_{n+1} - e_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 2 \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Uma vez que 2×3^n não é uma constante, então (e_n) não é uma progressão aritmética.

$$\text{f) } f_{n+1} - f_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $2n + 1$ não é uma constante, então $f(n)$ não é uma progressão aritmética.

29.

$$\text{a) } u_{345} - u_{344} = 5$$

$$\text{b) } u_{2017} - u_{2015} = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{c) } u_{n+3} - u_n = 3 \times 5 = 15$$

30.

$$\text{a) } a_n = 1 - 4n$$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive -4, então $r = -4$. Como $r < 0$, então a progressão aritmética (a_n) é decrescente.

$$\text{b) } b_n = -2 + 3n$$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive 3, então $r = 3$. Como $r > 0$, então a progressão aritmética (b_n) é crescente.

$$\text{c) } c_n = -\frac{1-3n}{2} - n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n - n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive $\frac{1}{2}$, então $r = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2} > 0$, então a progressão aritmética (c_n) é crescente.

$$\text{c) } d_n = \frac{n-3n^2}{n} = \frac{n(1-3n)}{n} = 1 - 3n$$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive -3, então $r = -3$. Como $r < 0$, então a progressão aritmética (d_n) é decrescente.

31.

$$\begin{aligned} \text{a) } u_n &= u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -10 + (n-1)4 \\ &\Leftrightarrow u_n = -10 + 4n - 4 \\ &\Leftrightarrow u_n = 4n - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_n &= u_6 + (n-6)r \Leftrightarrow u_n = -2 + (n-6)5 \\ &\Leftrightarrow u_n = -2 + 5n - 30 \\ &\Leftrightarrow u_n = 5n - 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } u_{26} &= u_{10} + (26-10)r \Leftrightarrow 21 = 13 + 16r \\ &\Leftrightarrow 8 = 16r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$u_n = u_{10} + (n-10)r \Leftrightarrow u_n = 13 + (n-10)\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 13 + \frac{1}{2}n - 5$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 8$$

$$\begin{aligned} \text{d) } u_n &= u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + \sqrt{2}n - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow u_n = \sqrt{2}n - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

32.

$$\text{a) } v_{2017} = v_1 + (2107-1)r = 11 + 2016 \times (-3) = -6037$$

$$\text{b) } v_{2017} = v_4 + (2017-4)r = -\sqrt{5} + 2013 = 2013 - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } v_{130} &= v_{13} + (130-13)r \Leftrightarrow -259 = -25 + 117r \\ &\Leftrightarrow 117r = -234 \Leftrightarrow r = -2 \\ v_{2017} &= v_{13} + (2017-13)r = -25 + 2004 \times (-2) = \\ &= -4033 \end{aligned}$$

$$\text{d) } v_{2017} = v_1 + (2017-1)r = 0 + 2016 \times (-3) = -6048$$

33. O primeiro múltiplo natural de 4, que está entre 406 e 3002, é o 408, e o último múltiplo natural de 4, neste intervalo, é o 3000.

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

$$\text{Logo, } 3000 = 408 + (n-k)4$$

$$\Leftrightarrow n-k = \frac{3000-408}{4} \Leftrightarrow n-k = 648$$

Assim, o número de múltiplos naturais de 4 compreendidos entre 406 e 3002 é $n-k+1 = 649$.

34. Sejam $l-r$, l e $l+r$ as medidas dos lados do triângulo e r a razão da progressão.

Uma vez que o perímetro do triângulo mede 36 cm, vem que:

$$(l-r) + l + (l+r) = 36 \Leftrightarrow 3l = 36 \Leftrightarrow l = 12$$

Por outro lado, dado que se trata de um triângulo retângulo, verifica-se que:

$$(l+r)^2 = l^2 + (l-r)^2$$

Como $l = 12$, temos que:

$$(12+r)^2 = 12^2 + (12-r)^2$$

$$\Leftrightarrow 144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2$$

$$\Leftrightarrow 24r = 144 - 24r$$

$$\Leftrightarrow 48r = 144$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

Concluimos assim que 9, 12 e 15 são as medidas dos lados do triângulo.

35. Seja $P(n)$: $u_n = 3 + (n-1) \times 5$

$$P(1): u_1 = 3 + (1-1) \times 5 \Leftrightarrow 3 = 3 + 0 \times 5 \Leftrightarrow 3 = 3$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } u_n = 3 + (n-1) \times 5$$

$$\text{Tese: } u_{n+1} = 3 + n \times 5$$

Demonstração:

$$u_{n+1} = u_n + 5 = 3 + (n-1) \times 5 + 5 =$$

$$= 3 + 5n - 5 + 5 = 3 + 5n$$

Assim, fica provado que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é uma proposição verdadeira.

36. $u_1 + u_{19} = 13$: soma do primeiro e do último termos da progressão aritmética (u_n).

a) $u_2 + u_{18} = 13$: soma do segundo e do penúltimo termos da progressão aritmética (u_n).

b) $u_3 + u_{17} = 13$: soma do terceiro e do antepenúltimo termos da progressão aritmética (u_n).

c) $u_{10} = \frac{13}{2}$: termo central da progressão aritmética (u_n).

37.

$$\text{a) } S = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = \frac{-8 + 82}{2} \times 19 = 703$$

Cálculos auxiliares

$$a_1 = 5 \times 1 - 13 = -8$$

$$a_{19} = 5 \times 19 - 13 = 82$$

$$\text{b) } S = \frac{b_{11} + b_{50}}{2} \times 40 = \frac{-25 - 142}{2} \times 40 = -3340$$

Cálculos auxiliares

$$b_{11} = -3 \times 11 + 8 = -25$$

$$b_{50} = -3 \times 50 + 8 = -142$$

38.

$$\text{a) } 14 + 21 + 28 + \dots + 224$$

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 7.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1)7 \Leftrightarrow u_n = 14 + (n-1)7$$

$$\Leftrightarrow u_n = 14 + 7n - 7$$

$$\Leftrightarrow u_n = 7n + 7$$

É agora necessário saber a ordem do termo 224:

$$u_n = 224 \Leftrightarrow 7n + 7 = 224 \Leftrightarrow n = 31$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 31 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{14 + 224}{2} \times 31 = 3689.$$

$$\text{b) } -22 - 11 + 11 + 22 + \dots + 253$$

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 11.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1)11 \Leftrightarrow u_n = -22 + (n-1)11$$

$$\Leftrightarrow u_n = -22 + 11n - 11$$

$$\Leftrightarrow u_n = 11n - 33$$

É agora necessário saber a ordem do termo 253:

$$u_n = 253 \Leftrightarrow 11n - 33 = 253 \Leftrightarrow n = 26$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 26 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{-22 + 253}{2} \times 26 = 3003.$$

39. Pretende-se calcular $63 + 66 + \dots + 243$.

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 3.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = 63 + (n-1)3 \\ &\Leftrightarrow u_n = 63 + 3n - 3 \\ &\Leftrightarrow u_n = 3n + 60 \end{aligned}$$

É agora necessário saber a ordem do termo 243:

$$u_n = 243 \Leftrightarrow 3n + 60 = 243 \Leftrightarrow n = 61$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 61 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{63 + 243}{2} \times 61 = 9333.$$

40. Seja $P(p): \sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}$

$$P(1): u_1 = 1 \times \frac{u_1 + u_1}{2} \Leftrightarrow u_1 = u_1$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}$$

$$\text{Tese: } \sum_{n=1}^{p+1} u_n = (p+1) \frac{u_1 + u_{p+1}}{2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} u_n &= \sum_{n=1}^p u_n + u_{p+1} = \\ &= p \frac{u_1 + u_p}{2} + u_{p+1} = \\ &= \frac{pu_1 + pu_p + 2u_{p+1}}{2} = \\ &= \frac{p u_1 + p(u_1 + (p-1)r) + 2(u_p + r)}{2} = \\ &= \frac{pu_1 + pu_1 + p(p-1)r + 2(u_1 + (p-1)r + r)}{2} = \\ &= \frac{2p u_1 + 2u_1 + p(p-1)r + 2[(p-1)r + r]}{2} = \\ &= \frac{(2p+2)u_1 + p(p-1)r + 2pr}{2} = \\ &= \frac{(2p+2)u_1 + pr(p-1+2)}{2} = \\ &= \frac{2(p+1)u_1 + pr(p+1)}{2} = \\ &= \frac{(p+1)(2u_1 + pr)}{2} = \end{aligned}$$

$$= (p+1) \frac{u_1 + u_1 + pr}{2} =$$

$$= (p+1) \frac{u_1 + u_{p+1}}{2}$$

Assim, fica provado que, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}.$$

41. Como $u_1 + u_2 = 18$, então tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= 52 \Leftrightarrow 18 + u_1 + 2r + u_2 + 2r = 52 \\ &\Leftrightarrow 36 + 4r = 52 \\ &\Leftrightarrow 4r = 16 \\ &\Leftrightarrow r = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } u_1 + u_2 &= 18 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 4 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 = 14 \\ &\Leftrightarrow u_1 = 7 \end{aligned}$$

O termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = 7 + 4(n-1) \Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n + 3$$

Então, $u_{10} = 4 \times 10 + 3 = 43$.

$$\text{Logo, } S = \frac{7 + 43}{2} \times 10 = 250.$$

$$\begin{aligned} \text{42. } S &= 525 \Leftrightarrow \frac{-\frac{39}{2} + u_n}{2} \times n = 525 \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{39}{2} + \left(-\frac{39}{2} + \frac{1}{2}(n-1)\right)\right)n = 1050 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{39}{2} - \frac{39}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)n = 1050 \\ &\Leftrightarrow -\frac{79}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = 1050 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 79n - 2100 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{79 \pm \sqrt{79^2 + 4 \times 2100}}{2} \\ &\Leftrightarrow n = 100 \vee n = -21 \end{aligned}$$

Uma vez que n é um número natural, tem-se que $n = 100$.

43.

a) A sucessão do número de páginas lidas pela Isaura é uma progressão aritmética de razão 2 e cujo primeiro termo é 5.

O termo geral desta progressão é:

$$u_n = 5 + 2(n-1) \Leftrightarrow u_n = 5 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 3$$

O dia 7 de dezembro é o décimo segundo dia de leitura da Isaura.

Assim, $u_{12} = 2 \times 12 + 3 = 27$, ou seja, no dia 7 de dezembro a Isaura lê 27 páginas.

$$\begin{aligned} \text{b) } S = 480 &\Leftrightarrow \frac{5+2n+3}{2} \times n = 480 \\ &\Leftrightarrow (8+2n)n = 960 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 + 8n - 960 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 8 \times 960}}{4} \\ &\Leftrightarrow n = 20 \vee n = -24 \end{aligned}$$

Como n é um número natural, então $n = 20$.

Logo, a Isaura terminará a leitura do livro no dia 15 de dezembro.

44.

$$\text{a) } u_1 = 5; u_2 = 5 \times 2 = 10; u_3 = 10 \times 2 = 20; \\ u_4 = 20 \times 2 = 40$$

$$\text{b) } u_1 = -5; u_2 = -5 \times 2 = -10; u_3 = -10 \times 2 = -20; \\ u_4 = -20 \times 2 = -40$$

$$\text{c) } u_1 = 5; u_2 = 5 \times (-2) = -10; u_3 = -10 \times (-2) = 20; \\ u_4 = 20 \times (-2) = -40$$

$$\text{d) } u_1 = \frac{1}{5}; u_2 = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}; u_3 = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}; \\ u_4 = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$$

$$\text{e) } u_1 = \frac{1}{5}; u_2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}; u_3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}; \\ u_4 = \frac{1}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$$

45.

$$\text{a) } \frac{u_{13}}{u_{12}} = 3$$

$$\text{b) } \frac{u_{2017}}{u_{2018}} = \frac{1}{\frac{u_{2018}}{u_{2017}}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{u_{100}}{u_{98}} = \frac{u_{100}}{u_{99}} \times \frac{u_{99}}{u_{98}} = 3 \times 3 = 9$$

46.

$$\text{a) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (a_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n-1+n} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que 2 é uma constante, fica provado que (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

$$\text{c) } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4 \times (-2)^{n+1}}{4 \times (-2)^n} = (-2)^{n+1-n} = -2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que -2 é uma constante, fica provado que (c_n) é uma progressão geométrica de razão -2.

$$\text{d) } \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{-\pi \times (\sqrt{2})^{n+1}}{-\pi \times (\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\sqrt{2}$ é uma constante, fica provado que (d_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

$$\text{e) } \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{5^n}} = \frac{3^{n+2} \times 5^n}{5^{n+1} \times 3^{n+1}} = \frac{3}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{3}{5}$ é uma constante, fica provado que (e_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{5}$.

47.

$$\text{a) } u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$\text{b) } \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2 = r$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow u_n = 2^{n-1}$$

$$\text{c) } \frac{u_{50}}{u_{49}} = -1 = r$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \times (-1)^{n-1}$$

$$\text{d) } u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{32}{5} = \frac{1}{5} \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2^{n-1}}{5}$$

$$\text{e) } u_7 = u_4 \times r^{7-4} \Leftrightarrow 320 = 40 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 40 \times 2^{n-4} \\ \Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^3 \times 2^{n-4} \\ \Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$\text{f) } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4u_n}{3}}{u_n} = \frac{4}{3}$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

48.

a) Se (u_n) é uma progressão geométrica crescente e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser maior que 1. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo, $u_n = 2 \times 3^{n-1}$.

b) Se (u_n) é uma progressão geométrica decrescente e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser positiva e menor que 1. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condi-

ções é, por exemplo, $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

c) Se (u_n) é uma progressão geométrica não monótona e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser negativa. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo, $u_n = 2 \times (-3)^{n-1}$.

d) Se (u_n) é uma progressão geométrica crescente e a sua razão é maior que 1, então o seu primeiro termo é positivo. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo, $u_n = 5 \times 2^{n-1}$.

e) Se (u_n) é uma progressão geométrica decrescente e a sua razão é maior que 1, então o seu primeiro termo é negativo. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo, $u_n = -5 \times 2^{n-1}$.

49.

$$\text{a)} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez $\frac{1}{3}$ que é uma constante, fica provado que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

b) $v_1 = \frac{2}{3} > 0$ e $0 < r = \frac{1}{3} < 2$, logo (v_n) é uma progressão geométrica decrescente.

50.

$$\text{a)} S = 1 \times \frac{1-3^{15}}{1-3} = 7\,174\,453$$

$$\text{b)} S = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{c)} S = 3 \times \frac{1 - (-1)^{15}}{1 - (-1)} = 3$$

d) $S = 4 \times 15 = 60$, uma vez que se trata de uma sucessão constante.

$$\text{51. } v_1 = \frac{6^2}{2} = 18$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{6^{n+2}}{2^{n+1}}}{\frac{6^{n+1}}{2^n}} = \frac{6^{n+2} \times 2^n}{6^{n+1} \times 2^{n+1}} = \frac{6}{2} = 3 = r$$

$$\text{Logo, } S = 18 \times \frac{1-3^n}{1-3} = -9(1-3^n).$$

$$\text{52. } u_1 = 1$$

$$r = 2$$

$$S = 1 \times \frac{1-2^{30}}{1-2} = 1\,073\,741\,823$$

Se os seus pais aceitassem as condições, a Joana receberia 1 073 741 823 cêntimos, ou seja, 10 737 418,23 euros.

$$\text{53. Seja } P(p): \sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}$$

$$P(1): u_1 = a \frac{1-r}{1-r} \Leftrightarrow a = a$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}$$

$$\text{Tese: } \sum_{n=1}^{p+1} u_n = a \frac{1-r^{p+1}}{1-r}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} u_n &= \sum_{n=1}^p u_n + u_{p+1} = \\ &= a \frac{1-r^p}{1-r} + u_1 r^p = \\ &= a \frac{1-r^p}{1-r} + a r^p = \\ &= a \left(\frac{1-r^p}{1-r} + r^p \right) = \\ &= a \frac{1-r^p + r^p - r \times r^p}{1-r} = \\ &= a \frac{1-r^{p+1}}{1-r} \end{aligned}$$

Assim, fica provado que, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}.$$

$$\text{54. } u_1 = 10\,000$$

$$r = 1 + 0,31 = 1,031$$

$$u_n = 10\,000 \times 1,031^{n-1}$$

$$u_{10} = 10\,000 \times 1,031^9 \approx 13\,162$$

Ao décimo dia da experiência haverá, aproximadamente, 13 162 bactérias.

$$\text{55. } u_1 = 4500$$

$$r = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$u_n = 4500 \times 0,85^{n-1}$$

$$u_4 = 4500 \times 0,85^3 \approx 2349$$

No quarto ano do estudo, a aldeia terá, aproximadamente, 2764 habitantes.

Aprende Fazendo

Páginas 44 a 57

1. $u_{2018} - u_{2017} = 1 - 2 = -1$

A opção correta é a (A).

2. $v_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Uma vez que $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que

$$1 + \frac{1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.

A opção correta é a (B).

3. $w_1 = 4$

$$w_2 = 2w_1 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$w_3 = 2w_2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$$

$$w_4 = 2w_3 + 1 = 2 \times 19 + 1 = 39$$

A opção correta é a (C).

4. $t_1 = 1 = 1^2$

$$t_2 = 4 = 2^2$$

$$t_3 = 9 = 3^2$$

$$t_4 = 16 = 4^2$$

E assim sucessivamente.

Logo, $t_n = n^2$.

A opção correta é a (B).

5. Seja (u_n) a progressão aritmética a que se refere o enunciado. Então:

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1)r \Leftrightarrow 81 = u_1 + 9 \times 5$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 81 - 45$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 36$$

A opção correta é a (B).

6. Se $u_n = \frac{2n + 6n^2}{n}$, então:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) + 6(n+1)^2}{n+1} - \frac{2n + 6n^2}{n} =$$

$$= 2 + 6(n+1) - 2 - 6n =$$

$$= 6n + 6 - 6n =$$

$$= 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 6 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética.

A opção correta é a (A).

7. $u_1 = -2$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = -6$$

Logo, (u_n) não é uma sucessão monótona, uma vez que $u_2 - u_1 > 0$ e $u_3 - u_2 < 0$. Também se pode já

concluir que (u_n) não é limitada, uma vez que não tem majorante nem minorante.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 2 + \frac{1}{n+1} - \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \\ &= \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (w_n) é decrescente.

Como (w_n) é decrescente, $w_1 = 3$ é um seu majorante, bem como qualquer outro número real superior a 3. Em particular, 4 é um majorante da sucessão (w_n) .

A opção correta é a (C).

8. (a_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função real de variável real f definida por $f(x) = x^2 + 6x + 5$, que é uma função quadrática e cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas $(-3, f(-3))$, tratando-se de uma função decrescente em $]-\infty, -3]$ e crescente em $[-3, +\infty[$. Assim, (a_n) é crescente.

Cálculo auxiliar

$$\text{Abcissa do vértice: } x = \frac{-6}{2} = -3$$

(b_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função real de variável real g definida por $g(x) = x^2 - 6x + 5$, que é uma função quadrática e cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas $(3, f(3))$, tratando-se de uma função decrescente em $]-\infty, 3]$ e crescente em $[3, +\infty[$. Assim, (b_n) não é monótona.

Cálculo auxiliar

$$\text{Abcissa do vértice: } x = \frac{6}{2} = 3$$

A opção correta é a (D).

9. Observe-se que $v_1 = 1, v_2 = -1, v_3 = 1, v_4 = -1$ e assim sucessivamente, pelo que uma outra forma de definir esta sucessão poderia ser:

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim, $v_{2014} = -1$.

A opção correta é a (A).

10. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2(n+1)}}{2^{-2n}} = 2^{-2n-2+2n} = 2^{-2} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $\frac{1}{4}$ é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

A opção correta é a (D).

$$11. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{2^{n+1}-4}}{2\sqrt{2^n-4}} = \sqrt{\frac{2^{n+1}-4}{2^n-4}} = \sqrt{2^{n-3-n+4}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

A opção correta é a (B).

$$12. v_1 = 4 \times 8 = 32$$

$$v_2 = 4 \times 4 = 16$$

$$v_3 = 4 \times 2 = 8$$

E assim sucessivamente.

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 32 e a razão é $\frac{1}{2}$.

$$\text{Assim, } v_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-6}}.$$

A opção correta é a (C).

13. $1 + \pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^{2016} + \pi^{2017}$ é a soma dos primeiros 2018 termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 1 e a razão é π .

Então:

$$1 + \pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^{2016} + \pi^{2017} = 1 \times \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi} = \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi}$$

A opção correta é a (D).

$$14. u_1 + u_2 = 12 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r = 12$$

$$\Leftrightarrow r + r + r = 12$$

$$\Leftrightarrow 3r = 12$$

$$\Leftrightarrow r = 4$$

A opção correta é a (B).

$$15. \frac{k+1}{k} = \frac{k}{k+2} \Leftrightarrow (k+1)(k+2) = k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 3k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

A opção correta é a (B).

$$16. u_n = 1300 \times 1,016^{n-1}$$

2012 corresponde a $n = 1$, logo 2030 corresponde a $n = 19$.

Assim, em 2030 a população será de $1300 \times 1,016^{18}$ milhares de habitantes.

A opção correta é a (A).

17. $13 + 15 + 17 + \dots + 2017$ é a soma de alguns termos de uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 13.

Então, o termo geral desta progressão é:

$$u_n = 13 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 11$$

Assim:

$$2017 = 2n + 11 \Leftrightarrow n = 1003$$

Assim:

$$13 + 15 + 17 + \dots + 2017 = 1003 \frac{13 + 2017}{2} = 1\,018\,045$$

A opção correta é a (D).

$$18. \frac{u_{1001}}{u_{1002}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{u_{1002}}{u_{1001}} = 2 \Leftrightarrow r = 2$$

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \frac{1-2^7}{1-2} = 381$$

$$\Leftrightarrow u_1 \times 127 = 381 \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Assim, $u_n = 3 \times 2^{n-1}$.

Logo, $u_{10} = 3 \times 2^9$.

A opção correta é a (C).

19. Como (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3, então $u_{n+1} - u_n = 3$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{-3u_{n+1}}}{2^{-3u_n}} = 2^{-3(u_{n+1} - u_n)} = 2^{-3 \times 3} = 2^{-9}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 2^{-9} é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2^{-9} .

A opção correta é a (A).

20. Seja h a altura do primeiro triângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 27$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Assim, a área do primeiro triângulo é:

$$a_1 = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Uma vez que os triângulos são semelhantes, e que os lados de cada triângulo têm metade do comprimento dos lados do triângulo anterior, a razão de semelhança entre os triângulos é $\frac{1}{2}$ e a razão entre

as suas áreas é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Então, a sucessão cujo termo geral representa a área, em cm^2 , de cada um dos triângulos é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo $9\sqrt{3}$. Logo:

$$a_n = 9\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{9\sqrt{3}}{(2^2)^{n-1}} = \frac{9\sqrt{3}}{2^{2n-2}}$$

A opção correta é a (A).

21. $p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6$ é a soma dos 7 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $-\frac{q}{p}$ e primeiro termo p^6 .

Assim:

$$p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6 =$$

$$= p^6 \frac{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^7}{1 + \frac{q}{p}} = p^6 \frac{1 + \frac{q^7}{p^7}}{1 + \frac{q}{p}} =$$

$$= p^6 \frac{\frac{p^7 + q^7}{p^7}}{\frac{p + q}{p}} = p^6 \frac{(p^7 + q^7)p}{(p + q)p^7} =$$

$$= p^6 \frac{p^7 + q^7}{(p + q)p^6} = \frac{p^7 + q^7}{p + q}$$

A opção correta é a (B).

22.

a) $u_1 = 2 = 2 \times 1$

$$u_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$u_3 = 6 = 2 \times 3$$

E assim sucessivamente.

Logo, $u_n = 2n$.

b) $u_1 = 1 = 1^2$

$$u_2 = 4 = 2^2$$

$$u_3 = 9 = 3^2$$

E assim sucessivamente.

Logo, $u_n = n^2$.

c) $u_1 = 3 = 1^2 + 2$

$$u_2 = 6 = 2^2 + 2$$

$$u_3 = 11 = 3^2 + 2$$

E assim sucessivamente.

Logo, $u_n = n^2 + 2$.

d) $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$$u_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

E assim sucessivamente.

Logo, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

e) $u_1 = 4 = 5 - 1$

$$u_2 = 3 = 5 - 2$$

$$u_3 = 2 = 5 - 3$$

E assim sucessivamente.

Logo, $u_n = 5 - n$.

23. $u_n = \frac{4n}{n+2}$

a) $u_6 = \frac{4 \times 6}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$

b) $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} = 6 \Leftrightarrow 4n = 6n + 12$

$$\Leftrightarrow -2n = 12$$

$$\Leftrightarrow n = -6$$

Como $-6 \notin \mathbb{N}$, então 6 não é um termo da sucessão (u_n) .

c) $u_{10} - u_4 = \frac{4 \times 10}{10+2} - \frac{4 \times 4}{4+2} = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

d) $u_{n+1} = \frac{4(n+1)}{(n+1)+2} + 1 = \frac{4n+4}{n+3}$

$$u_n + 1 = \frac{4n}{n+2} + 1 = \frac{4n+n+2}{n+2} = \frac{5n+2}{n+2}$$

e) $u_n > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 8n > 5n + 10$

$$\Leftrightarrow 3n > 10$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{10}{3}$$

Logo, a partir do termo de ordem 4, todos os termos da sucessão são superiores a $\frac{5}{2}$.

24. Se n ímpar:

$$u_n = 36 \Leftrightarrow n + 2 = 36 \Leftrightarrow n = 34, \text{ que não é um número ímpar.}$$

Assim, se 36 for termo da sucessão, então (u_n) não é um termo de ordem ímpar.

Se n par:

$$u_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -6$$

Logo, 36 é o 6.º termo da sucessão (u_n) .

Se $n < 5$:

$$v_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -6$$

Assim, se 36 for termo da sucessão, então (v_n) não é um termo de ordem inferior a 5.

Se $n \geq 5$:

$$v_n = 36 \Leftrightarrow 7n = 36 \Leftrightarrow n = \frac{36}{7}, \text{ que não é um número natural.}$$

Logo, 36 não é um termo da sucessão (v_n) .

25.

a) $a_1 = -1$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = -1$$

Tem-se que $a_2 - a_1 > 0$ e $a_3 - a_2 < 0$, logo a sucessão (a_n) não é monótona.

b) $b_{n+1} - b_n = 4(n+1) - 5 - (4n - 5) =$

$$= 4n + 4 - 5 - 4n + 5 =$$

$$= 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (b_n) é uma sucessão crescente.

c) $c_{n+1} - c_n = \frac{3n+5}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$

$$= \frac{3n^2 + 5n - (3n^2 + 5n + 2)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (c_n) é uma sucessão decrescente.

26.

a) $a_1 = 1^3 + 2 = 3$

$$a_2 = 2^3 + 2 = 10$$

$$a_3 = 3^3 + 2 = 29$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos minorantes de (a_n) é $]-\infty, 3]$

e (a_n) não tem majorantes.

b) $b_1 = -5 \times 1 - 1 = -6$

$$b_2 = -5 \times 2 - 1 = -11$$

$$b_3 = -5 \times 3 - 1 = -16$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos majorantes de (b_n) é $[-6, +\infty[$

e (b_n) não tem minorantes.

c) $c_1 = -\frac{1}{2}$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos minorantes de (c_n) é $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

e o conjunto dos majorantes de (c_n) é $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

d) $d_1 = -1$

$$d_2 = 2$$

$$d_3 = -3$$

$$d_4 = 4$$

E assim sucessivamente.

Então, (d_n) não tem majorantes nem minorantes.

27.

a) $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (u_n) é limitada.

b) $v_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 3 > 3 - \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (v_n) é limitada.

c) $w_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Logo, $-1 \leq w_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, a sucessão (w_n) é limitada.

28.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}n + 1\right) =$
 $= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{5}n - 1 =$
 $= \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $\frac{2}{5}$ é uma constante, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{5}$.

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$
 $= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$
 $= \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{n(n+1)} =$
 $= \frac{-1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $\frac{-1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (v_n) não é uma progressão aritmética.

c) $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) =$
 $= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n =$
 $= 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $2n + 2$ não é uma constante, então (w_n) não é uma progressão aritmética.

d) $x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1)}{n+1} - \frac{n^2 - 2n}{n} =$
 $= \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n - 2}{n+1} - \frac{n(n-2)}{n} =$
 $= \frac{n^2 - 1}{n+1} - (n-2) =$
 $= \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} - n + 2 =$
 $= n - 1 - n + 2 =$
 $= 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que 1 é uma constante, então (x_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

e) $y_{n+1} - y_n = y_n - \pi - y_n = -\pi, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que $-\pi$ é uma constante, então (y_n) é uma progressão aritmética de razão $-\pi$.

29.

$$a) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi^{n+1}}{2\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que π é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão π .

$$b) \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3})^{n-1}} = (\sqrt{3})^{n-n+1} = \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\sqrt{3}$ é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} c) \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{(n+1)^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{n^2 + n} = \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + n} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{n+2}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{n+2}{n}$ não é uma constante, então (w_n) não é uma progressão geométrica.

$$d) \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5}}{\frac{4^n}{5}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 4 é uma constante, então (x_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

$$e) \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{4}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{1}{5}$ é uma constante, então (y_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

30. $u_n = 3n + 9$

$$a) u_n = 100 \Leftrightarrow 3n + 9 = 100 \Leftrightarrow 3n = 91 \Leftrightarrow n = \frac{91}{3},$$

que não é um número natural.

Logo, 100 não é um termo da sucessão (u_n) .

$$\begin{aligned} b) u_p &> 400 \Leftrightarrow 3p + 9 > 400 \\ &\Leftrightarrow 3p > 391 \\ &\Leftrightarrow p > \frac{391}{3} \end{aligned}$$

Logo, a partir do termo de ordem 131 todos os termos da sucessão são superiores a 400.

$$\begin{aligned} c) u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 9 - (3n + 9) = \\ &= 3n + 3 + 9 - 3n - 9 = \\ &= 3 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão crescente.

Uma vez que 3 é uma constante, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

$$d) S_n = 957 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 957$$

$$\Leftrightarrow (12 + 3n + 9)n = 1914$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 21n - 1914 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 + 4 \times 3 \times 1914}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm 153}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = 22 \vee n = -87$$

Como n tem de ser um número natural, então $n = 22$.

Logo, o número de termos consecutivos a adicionar ao primeiro termo de forma a obter a soma 957 é 21.

$$31. u_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$a) u_n = 20 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 = 20n$$

$$\Leftrightarrow -18n = 1$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{18} (\notin \mathbb{N})$$

Logo, 20 não é um termo da sucessão (u_n) .

$$\begin{aligned} b) u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \\ &= \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 2n + n + 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Uma vez que $\frac{1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (u_n) não é uma progressão aritmética.

$$d) u_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Logo, } 0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{1}{n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, a sucessão (u_n) é limitada, sendo, por exemplo, 1 um minorante e 2 um majorante do conjunto dos termos da sucessão.

32.

a) O número de bolotas que o esquilo apanha em cada dia é dado por uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo 7.

Assim, o número de bolotas que o esquilo apanha no n -ésimo dia do mês é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} u_n &= 7 + (n-1) \times 3 = \\ &= 7 + 3n - 3 = \\ &= 3n + 4 \end{aligned}$$

b) $u_{25} = 3 \times 25 + 4 = 79$

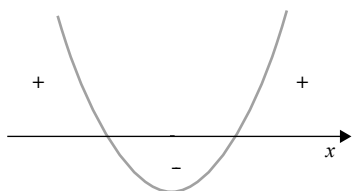
No 25.º dia, o esquilo apanhou 79 bolotas.

c) $S_n > 1000 \Leftrightarrow \frac{7+3n+4}{2} \times n > 1000$
 $\Leftrightarrow 3n^2 + 11n - 2000 > 0$

Cálculo auxiliar

$$3n^2 + 11n - 2000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 24\,000}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{24\,121}}{6}$$



Logo, $n \approx -27,7 \vee n \approx 24,1$.

Logo, ao fim de 25 dias, o número de bolotas ultrapassou pela primeira vez as 1000 bolotas.

33.

a) $u_{36} = 20 + 35 \times 10 = 370$

A 36.ª prestação foi de 370 euros.

b) $S_{36} = \frac{20+370}{2} \times 36 = 7020$

A Teresa pagou 7020 euros pelo carro.

34. $u_n = 10 + (n-1) \times 2 = 2n + 8$

$u_{15} = 2 \times 15 + 8 = 38$

$S_{15} = \frac{10+38}{2} \times 15 = 360$

O estudante fez 360 exercícios diferentes.

35.

a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = \frac{a}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = a^3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{a} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

36.

a) $a_3 = 6$

$a_4 = 12$

$a_5 = 10$

Tem-se que $a_4 - a_3 > 0$ e $a_5 - a_4 < 0$, logo a sucessão (a_n) não é monótona.

b) (b_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função real de variável real f definida por $f(x) = (4-x)^2$, que é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas $(4, 0)$, tratando-se de uma função decrescente em $]-\infty, 4]$ e crescente em $[4, +\infty[$. Assim, (b_n) não é monótona.

c) $c_{n+1} - c_n = 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} =$

$= 3 \times 2^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2} \times 2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (c_n) é uma sucessão crescente.

d) $d_{n+1} - d_n =$

$= \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} =$

$= \frac{2n^2 + n + 4n + 2 - 2n^2 - 3n - 2n - 3}{(2n+3)(2n+1)} =$

$= \frac{-1}{(2n+3)(2n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (d_n) é uma sucessão decrescente.

e) $e_9 = 9$

$e_{10} = 10$

$e_{11} = 6$

Tem-se que $e_{10} - e_9 > 0$ e $e_{11} - e_{10} < 0$, logo a sucessão (e_n) não é monótona.

37.

a) $u_n = \frac{n+1}{n+3} = \frac{n+3-2}{n+3} =$
 $= 1 - \frac{2}{n+3}$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então:

$0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 > -\frac{2}{n+3} \geq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{2}{n+3} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Assim, a sucessão (u_n) é limitada.

b) Tem-se que $-1 \leq \cos(n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $3 \leq 4 + \cos(n) \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (v_n) é limitada.

c) $w_n = \pi^{-n} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\pi}$ e primeiro termo $\frac{1}{\pi}$. Como $0 < \frac{1}{\pi} < 1$, (w_n) é decrescente. Assim, um majorante dos termos da sucessão é $w_1 = \frac{1}{\pi}$.

Além disso, tem-se que $\left(\frac{1}{\pi}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $0 < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \leq \frac{1}{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (w_n) é limitada.

38.

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{n+1} - u_n &= \frac{4n+4}{3n+5} - \frac{4n}{3n+2} = \\ &= \frac{12n^2 + 8n + 12n + 8 - 12n^2 - 20n}{(3n+5)(3n+2)} = \\ &= \frac{8}{(3n+5)(3n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, um minorante do conjunto dos termos de (u_n) é $u_1 = \frac{4}{5}$.

$$u_1 = \frac{4}{5}$$

$$u_n = \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3(3n+2)} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9n+6}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 4n & 3n+2 \\ -4n - \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \hline & -\frac{8}{3} \end{array}$$

Como $\frac{8}{9n+6} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$-\frac{8}{9n+6} < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{8}{9n+6} < \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $\frac{4}{5} \leq u_n < \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

$$\begin{aligned} \text{b) } v_{n+1} - v_n &= 1 - \frac{1}{2}(n+1) - \left(1 - \frac{1}{2}n\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}n = \\ &= -\frac{1}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (v_n) é decrescente.

A sucessão (v_n) não tem minorantes, logo não é uma sucessão limitada.

$$\text{c) } w_1 = -1$$

$$w_2 = 2$$

$$w_3 = -3$$

$$w_4 = 4$$

E assim sucessivamente.

Tem-se que $w_2 - w_1 > 0$ e $w_3 - w_2 < 0$, logo a sucessão (w_n) não é monótona.

A sucessão (w_n) não tem minorantes nem majorantes, logo não é uma sucessão limitada.

$$\text{d) } x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Tem-se que $x_2 - x_1 > 0$ e $x_3 - x_2 < 0$, logo a sucessão (x_n) não é monótona.

$$x_n = 3 + (-1)^n \times \frac{1}{n} = \begin{cases} 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $3 < 3 + \frac{1}{n} < 4$, se n é par, e $0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 3 > 3 - \frac{1}{n} \geq 2$, se n é ímpar.

Assim, $2 \leq x_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, a sucessão (x_n) é limitada.

39.

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{2014} - u_{2015} &= \\ &= 1 - 2 \sin\left(\frac{2014\pi}{3}\right) - 1 + 2 \sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \sin\left(671\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(672\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } u_n = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

Todos os termos de ordem $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$, são termos iguais a 1.

c) Por exemplo:

$$u_3 - u_2 = 1 - 2 \operatorname{sen} \pi - \left(1 - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} > 0 \text{ e}$$

$$u_6 - u_5 = 1 - 2 \operatorname{sen}(2\pi) - \left(1 - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right) = -\sqrt{3} < 0,$$

logo (u_n) é não monótona.

d) Sabe-se que $-1 \leq \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Então:

$$2 \geq -2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 1 - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \geq -1$$

Assim, $-1 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é limitada.

40.

$$\text{a)} u_n = 4 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow u_n = 4 - 3n + 3 \\ \Leftrightarrow u_n = -3n + 7$$

Uma vez que $r = -3 < 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética decrescente.

$$\text{b)} u_n = -46 + (n-10) \times (-5) \Leftrightarrow u_n = -46 - 5n + 50 \\ \Leftrightarrow u_n = -5n + 4$$

Uma vez que $r = -5 < 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética decrescente.

$$\text{c)} u_{60} = u_{10} + (60-10)r \Leftrightarrow 33 = 8 + 50r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$u_n = 8 + (n-10) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 8 + \frac{1}{2}n - 5$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 3$$

Uma vez que $r = \frac{1}{2} > 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética crescente.

$$\text{d)} u_{200} = u_{180} + (200-180)r \Leftrightarrow 0 = 10 + 20r \\ \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = 0 + (n-200) \times \left(-\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + 100$$

Uma vez que $r = -\frac{1}{2} < 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética decrescente.

$$\text{e)} u_9 = u_2 + (9-2)r \Leftrightarrow -2 = -16 + 7r \Leftrightarrow r = 2 \\ u_n = -16 + (n-2) \times 2 \Leftrightarrow u_n = -16 + 2n - 4 \\ \Leftrightarrow u_n = 2n - 20$$

Uma vez que $r = 2 > 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética crescente.

$$\text{f)} u_n = -17 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -17 + 6n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 6n - 23$$

Uma vez que $r = 6 > 0$, então (u_n) é uma progressão aritmética crescente.

$$\text{41. } u_n = 3 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4 \\ \Leftrightarrow u_n = 4n - 1$$

$$S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 4n - 1}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow (4n+2)n = 930$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 930 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 14\,880}}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 122}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = 15 \vee n = -62$$

Como n é um número natural, então $n = 15$.

42.

$$\text{a)} u_n = -3 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -3 + 6n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 6n - 9$$

$$\text{b)} u_8 + u_9 + \dots + u_{43} = \frac{u_8 + u_{43}}{2} \times (43 - 8 + 1) = \\ = \frac{6 \times 8 - 9 + 6 \times 43 - 9}{2} \times 36 = \\ = 144 \times 36 = \\ = 5184$$

$$\text{c)} S_n = 37\,629 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 37\,629 \\ \Leftrightarrow \frac{-3 + 6n - 9}{2} \times n = 37\,629 \\ \Leftrightarrow (6n - 12)n = 75\,258 \\ \Leftrightarrow 6n^2 - 12n - 75\,258 = 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - 2n - 12\,543 = 0 \\ \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 50\,172}}{2} \\ \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 224}{2} \\ \Leftrightarrow n = 113 \vee n = -111$$

Como n é um número natural, então $n = 113$.

43.

$$\text{a)} u_n = 1 + (n-1) \times 0,1 \Leftrightarrow u_n = 1 + 0,1n - 0,1 \\ \Leftrightarrow u_n = 0,1n + 0,9$$

$$u_n = 100 \Leftrightarrow 0,1n + 0,9 = 100 \\ \Leftrightarrow 0,1n = 99,1 \\ \Leftrightarrow n = 991$$

A sequência tem 991 elementos.

$$\text{b)} S_{991} = \frac{1 + 100}{2} \times 991 = 50\,045,5$$

44.

$$\text{a)} v_n = 4 \times 3^{n-1}$$

Uma vez que $v_1 = 4 > 0$ e $r = 3 > 1$, então (v_n) é uma progressão geométrica crescente.

$$\text{b)} 93\,750 = 150 \times r^{7-3} \Leftrightarrow r^4 = 625 \Leftrightarrow r = 5 \vee r = -5$$

Como $r < 0$, então $r = -5$.

$$150 = v_1 \times (-5)^{3-1} \Leftrightarrow 150 = v_1 \times 25 \Leftrightarrow v_1 = 6$$

$$v_n = 6 \times (-5)^{n-1}$$

Uma vez que $r = -5 < 0$, então (v_n) é uma progressão geométrica não monótona.

45.

$$a) \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{1}{3}$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

b) $0 < r = \frac{1}{3} < 1$ e $w_1 = \frac{2}{3} > 0$, logo (w_n) é uma progressão geométrica decrescente.

$$c) S_n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

46.

$$a) u_1 = 2r$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 = 24 &\Leftrightarrow u_1 + u_1 \times r = 24 \\ &\Leftrightarrow 2r + 2r \times r = 24 \\ &\Leftrightarrow 2r^2 + 2r - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 + r - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm 7}{2} \\ &\Leftrightarrow r = -4 \vee r = 3 \end{aligned}$$

Como a razão é positiva, então $r = 3$.

$$\begin{aligned} b) \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} &\Leftrightarrow \frac{5a-3}{8a} = \frac{a+3}{5a-3} \\ &\Leftrightarrow 25a^2 - 30a + 9 = 8a^2 + 24a \\ &\Leftrightarrow 17a^2 - 54a + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{54 \pm \sqrt{2304}}{34} \\ &\Leftrightarrow a = 3 \vee a = \frac{3}{17} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} &\Leftrightarrow \frac{a+3}{5a-3} = \frac{a}{a+3} \\ &\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 5a^2 - 3a \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 9a - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{8} \\ &\Leftrightarrow a = 3 \vee a = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Logo, $a = 3$.

Então, $u_1 = 24$ e $u_2 = 12$.

$$\text{Assim, } r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

47.

$$a) u_1 = 2000 \times 1,013 = 2026 \text{ euros}$$

$$u_4 = 2000 \times 1,013^4 \approx 2106 \text{ euros}$$

$$b) u_n = 2026 \times 1,013^{n-1}$$

48.

a) Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} P_1 = 6\pi \\ P_n = \frac{1}{2} P_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Termo geral da sucessão: } P_n = 6\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) Se a medida do diâmetro da primeira circunferência é 6, então a medida do raio é 3.

$$\text{Logo, } A_1 = \pi \times 3^2 = 9\pi.$$

Se a razão de semelhança entre as medidas dos diâmetros das circunferências é $\frac{1}{2}$, então a razão de semelhança entre as respectivas áreas é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} A_1 = 9\pi \\ A_n = \frac{1}{4} A_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Termo geral da sucessão: } A_n = 9\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$49. \text{ Seja } P(n) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$P(2): 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $P(2)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Tese: } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$50. \text{ Seja } P(n): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$P(1): \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Tese:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

51. Seja $P(n)$: $v_n = 7 + (n-1) \times 2$.

$$P(1): v_1 = 7 + (1-1) \times 2 \Leftrightarrow 7 = 7 + 0 \Leftrightarrow 7 = 7$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $v_n = 7 + (n-1) \times 2$

Tese: $v_{n+1} = 7 + n \times 2$

Demonstração:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2 = 7 + (n-1) \times 2 + 2 = \\ &= 7 + 2n - 2 + 2 = \\ &= 7 + 2n = \\ &= 7 + n \times 2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } v_n = 7 + (n-1) \times 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

52. Seja $P(n)$: $u = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\begin{aligned} P(1): u_1 &= 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \Leftrightarrow 7 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow 7 = 7 \times 1 \Leftrightarrow 7 = 7 \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Tese: $u_{n+1} = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Demonstração:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} = \frac{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \\ &= 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

53.

$$\begin{aligned} \text{a) } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| \frac{3}{2n+1} \right| < L \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < L \\ &\Leftrightarrow 3 < 2nL + L \\ &\Leftrightarrow 2nL > 3 - L \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3-L}{2L} \end{aligned}$$

Se, por exemplo, $L = 2$, vem que $n = \frac{3-2}{2 \times 2}$, ou seja, $n > \frac{1}{4}$, que é uma condição universal em $\mathbb{N}$.

Então, existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$.

$$\begin{aligned} \text{b) } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{3} \right| < L \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3} < L \\ &\Leftrightarrow 2n+1 < 3L \\ &\Leftrightarrow 2n < 3L - 1 \\ &\Leftrightarrow n < \frac{3L-1}{2} \end{aligned}$$

Ou seja, apenas verificam a condição $|u_n| < L$, os termos cuja ordem é inferior a $\frac{3L-1}{2}$. Logo, não existe nenhum número real L nas condições dadas.

$$\begin{aligned} \text{54. } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| -4 - \frac{1}{n} \right| < L \Leftrightarrow \left| -\left(4 + \frac{1}{n}\right) \right| < L \\ &\Leftrightarrow 4 + \frac{1}{n} < L \\ &\Leftrightarrow 4n + 1 < Ln \\ &\Leftrightarrow 4n - Ln < -1 \\ &\Leftrightarrow -4n + Ln > 1 \\ &\Leftrightarrow n(-4 + L) > 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{L-4} \end{aligned}$$

Se, por exemplo, $L = 1$, vem que $n > \frac{1}{1-4}$, ou seja, $n > -\frac{1}{3}$, que é uma condição universal em $\mathbb{N}$.

Então, existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$.

55. Pretende-se calcular $151 + 153 + \dots + 413$.

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 2.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 151 + (n-1)2 \\ &\Leftrightarrow u_n = 151 + 2n - 2 \\ &\Leftrightarrow u_n = 2n + 149 \end{aligned}$$

É agora necessário saber a ordem do termo 413: $u_n = 413 \Leftrightarrow 2n + 149 = 413 \Leftrightarrow 2n = 264 \Leftrightarrow n = 132$
Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 132 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{151 + 413}{2} \times 61 = 37\,224.$$

56. Seja $P(n): \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n$.

$$P(1): \sum_{k=1}^2 (-1)^k \times (2k+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \times (2 \times 1 + 1) + 1 \times (2 \times 2 + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -3 + 5 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n.$$

$$\text{Tese: } \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \times (2k+1) = 2n+2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \times (2k+1) = \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) + (-1)^{2n+1} \times (2(2n+1) + 1) + \\ &+ (-1)^{2n+2} \times (2(2n+2) + 1) = \\ &= 2n - (4n+2+1) + (4n+4+1) = \\ &= 2n - 4n - 3 + 4n + 5 = \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

57.

a) Seja $P(n): 3^{2n} - 1$ é divisível por 8.

$$P(1): 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8, \text{ que é divisível por 8.}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 3^{2n} - 1 \text{ é divisível por 8.}$$

$$\text{Tese: } 3^{2n+2} - 1 \text{ é divisível por 8.}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} - 1 &= 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 3^{2n} \times 9 - 9 + 9 - 1 = \\ &= 9(3^{2n} - 1) + 8 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $3^{2n} - 1$ é divisível por 8 e 8 é divisível por 8, então $9(3^{2n} - 1) + 8$ é divisível por 8, por se tratar da soma de dois números divisíveis por 8.

Logo, $3^{2n} - 1$ é, para todo o número natural n , divisível por 8.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$ é um número par.

Seja $P(n): 3n^2 + n - 2$ é um número par.

$$P(1): 3 \times 1^2 + 1 - 2 = 2 \text{ é um número par.}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 3n^2 + n - 2 \text{ é um número par.}$$

$$\text{Tese: } 3(n+1)^2 + (n+1) - 2 \text{ é um número par.}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 + (n+1) - 2 &= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2 = \\ &= 3n^2 + 7n + 2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3n^2 + n - 2) + (6n + 4) = \\ &= (3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2) \end{aligned}$$

Por hipótese, $3n^2 + n - 2$ é um número par. Além disso, $2(3n + 2)$ é um número par. A soma de dois números pares é um número par.

Logo, $(3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$ é um número par, ou seja, $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$ é um número par.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$ é um número par.

c) Seja $P(n): 4^n > n^2$.

$$P(1): 4^1 > 1^2 \Leftrightarrow 4 > 1$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 4^n > n^2$$

$$\text{Tese: } 4^{n+1} > (n+1)^2$$

Demonstração:

$$4^{n+1} = 4^n \times 4 > 4n^2$$

Basta então provar que $4n^2 \geq (n+1)^2$.

$$4n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3n+1)(n-1) \geq 0$$

Uma vez que $3n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e que $n-1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $(3n+1)(n-1) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $4^n > n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

58. Seja $P(n): a^n - 1$ é um múltiplo de $a - 1$.

$$P(1): a^1 - 1 = a - 1, \text{ que é um múltiplo de } a - 1.$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } a^n - 1 \text{ é um múltiplo de } a - 1.$$

$$\text{Tese: } a^{n+1} - 1 \text{ é um múltiplo de } a - 1.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1 &= a^n \times a - 1 = \\ &= a^n \times a - a + a - 1 = \\ &= a(a^n - 1) + a - 1 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $a^n - 1$ é um múltiplo de $a - 1$ e $a - 1$ é um múltiplo de $a - 1$, então $a(a^n - 1) + a - 1$ é um múltiplo de $a - 1$, por se tratar da soma de dois múltiplos de $a - 1$.

Logo, $a^n - 1$ é, para todo o número natural n , um múltiplo de $a - 1$.

59.

a) Seja $P(n): u_n > 1$.

$$P(1): u_1 > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } P(n): u_n > 1$$

$$\text{Tese: } P(n): u_{n+1} > 1$$

Demonstração:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3} > \frac{1 + 2}{3} = 1, \text{ ou seja, } u_{n+1} > 1.$$

Logo, $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2}{3} - u_n = \\ &= \frac{u_n + 2 - 3u_n}{3} = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} u_n \end{aligned}$$

Pela alínea anterior:

$$u_n > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} u_n > \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} u_n < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{2}{3} u_n < 0$$

Logo, como $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (u_n) é decrescente.

60. Sejam $u_n = u_1 + (n-1)r$ e $v_n = v_1 + (n-1)r'$ os termos gerais de duas progressões aritméticas (u_n) e (v_n) de razões r e r' , respetivamente. Seja (w_n) a sucessão cujo termo geral é a soma dos termos gerais de (u_n) e (v_n) .

$$\begin{aligned} w_n = u_n + v_n &= u_1 + (n-1)r + v_1 + (n-1)r' = \\ &= u_1 + v_1 + (n-1)(r+r') \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \\ &= u_1 + v_1 + n(r+r') - (u_1 + v_1 + (n-1)(r+r')) = \\ &= u_1 + v_1 + n(r+r') - u_1 - v_1 - n(r+r') + (r+r') = \\ &= r+r', \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Uma vez que $r+r'$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão aritmética de razão $r+r'$.

$$\begin{aligned} \text{61. } u_{n+1} - u_n &= a(n+1) + b - (an + b) = \\ &= an + a + b - an - b = \\ &= a \end{aligned}$$

Uma vez que a é uma constante, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão a .

62.

$$\begin{aligned} \text{a) } u_2 - u_1 &= u_3 - u_2 \Leftrightarrow x^2 - (x-1) = x+5 - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x+5 - x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Uma vez que x é negativo, então $x = -1$.

Assim:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 - 1 = -2 \\ u_2 &= (-1)^2 = 1 \\ u_3 &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } r &= u_2 - u_1 = 1 - (-2) = 3 \\ u_n &= u_5 + 3(n-5) \Leftrightarrow u_n = 4 + 3n - 15 \\ &\Leftrightarrow u_n = 3n - 11 \end{aligned}$$

63. Sejam $x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r$ as medidas de amplitude dos ângulos internos do pentágono, em graus.

$$x + x + r + x + 2r + x + 3r + x + 4r = 180^\circ(5-2)$$

$$\Leftrightarrow 5x + 10r = 540^\circ$$

$$\Leftrightarrow x + 2r = 108^\circ$$

Assim, $x + 2r = 108^\circ$ é a amplitude do ângulo mediano do pentágono considerado.

$$\text{64. } \begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 18 \\ u_k \times u_{k+1} \times u_{k+2} = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + r + u_k + 2r = 18 \\ u_k \times (u_k + r) \times (u_k + 2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3r = 18 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + r = 6 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 6 - r \\ (6-r) \times (6-r+r) \times (6-r+2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ (6-r) \times 6 \times (6+r) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ 36 - r^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ r^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ r = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} u_k = 11 \\ r = -5 \end{cases}$$

Se $u_k = 1$ e $r = 5$, então $u_{k+1} = 6$ e $u_{k+2} = 11$.

Se $u_k = 11$ e $r = -5$, então $u_{k+1} = 6$ e $u_{k+2} = 1$.

$$\text{65. } u_{n+1} - u_n = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{2^{-3u_{n+1}}}{2^{-3u_n}} = 2^{-3u_{n+1} + 3u_n} = \\ &= 2^{-3(u_{n+1} - u_n)} = \\ &= 2^{-3 \times 3} = \\ &= 2^{-9} = \\ &= \frac{1}{512}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{512}$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{512}$.

66. Sejam $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ e $v_n = v_1 \times r'^{n-1}$ os termos gerais de duas progressões geométricas (u_n) e (v_n) de razões r e r' , respetivamente. Seja (w_n) a sucessão cujo termo geral é o produto dos termos gerais de (u_n) e (v_n) .

$$\begin{aligned} w_n &= u_n \times v_n = u_1 \times r^{n-1} \times v_1 \times r'^{n-1} = \\ &= u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1} \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^n}{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1}} =$$

$$= (r \times r')^{n-n+1} =$$

$$= r \times r', \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $r \times r'$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão geométrica de razão $r \times r'$.

$$67. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times b^{c(n+1)+d}}{a \times b^{cn+d}} =$$

$$= \frac{b^{cn+c+d}}{b^{cn+d}} =$$

$$= b^{cn+c+d-cn-d} =$$

$$= b^c, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que b^c é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão b^c .

68.

a) A medida do lado do quadrado $[ABCD]$ é 16.

$$\overline{AE} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\overline{AF} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{EF}^2 = 4^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 160$$

Logo, $\overline{EF} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$, isto é, a medida do lado do quadrado $[EFGH]$ é $4\sqrt{10}$.

$$\overline{EI} = \frac{4\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10}$$

$$\overline{EJ} = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{IJ}^2 = (\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow \overline{IJ}^2 = 100$$

Logo, $\overline{IJ} = \sqrt{100} = 10$, isto é, a medida do lado do quadrado $[IJKL]$ é 10.

b)

i) $A_1 = 16$

$$A_2 = 4\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{4} \times 16$$

$$A_3 = 10 = \frac{\sqrt{10}}{4} \times 4\sqrt{10}$$

E assim sucessivamente.

$$\text{Então, } A_1 = 16 \wedge A_{n+1} = \frac{\sqrt{10}}{4} A_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4} A_n}{A_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $\frac{\sqrt{10}}{4}$ é uma constante, então (A_n) é

uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

ii) Uma vez que (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{10}}{4}$ e primeiro termo 16, então o seu termo

$$\text{geral é } A_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim:

$$A_n = 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= 16 \times (\sqrt{10})^{n-1} \times 4^{-n+1} =$$

$$= 2^4 \times (2^2)^{-n+1} \times (10^{\frac{1}{2}})^{n-1} =$$

$$= 2^4 \times 2^{-2n+2} \times 10^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{4-2n+2} \times (2 \times 5)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{-2n+6} \times 2^{\frac{n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{-2n+6+\frac{n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{-4n+12+n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}}$$

$$c) A_n = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} = 5^2 \times 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11-3n}{2} = -2 \\ \frac{n-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11-3n = -4 \\ n-1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3n = -15 \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

Sim, para $n = 5$ tem-se que $A_n = \frac{25}{4}$.

$$d) B_n = A_n \times A_n =$$

$$= 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} \times 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= 256 \times \left(\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}\right)^2 =$$

$$= 256 \times \left(\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2\right)^{n-1} =$$

$$= 256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n}{256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-n+1} = \frac{5}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{5}{8}$ é uma constante, então (B_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{5}{8}$ e termo geral

$$\begin{aligned} B_n &= 256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 2^8 \times \frac{5^{n-1}}{2^{3n-3}} = \\ &= 2^{8-3n+3} \times 5^{n-1} = \\ &= 2^{11-3n} \times 5^{n-1} \end{aligned}$$

69. Se $0 \leq p \leq n-1$, e uma vez que os termos da sequência $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ estão em progressão geométrica, tem-se que:

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 \times r^{n-1-p} \\ u_{n-p} &= u_1 \times r^{n-n+p} = u_1 \times r^p \\ u_n &= u_1 \times r^{n-1} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} u_{1+p} \times u_{n-p} &= u_1 \times r^{n-1-p} \times u_1 \times r^p = \\ &= u_1 \times u_1 \times r^{n-1-p+p} = \\ &= u_1 \times u_1 \times r^{n-1} = \\ &= u_1 \times u_n \end{aligned}$$

Unidade 4 - Limites de sucessões

Páginas 58 a 94

56.

a) $u_n = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100$

Logo, a partir do termo de ordem 100, os termos da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ são menores que 0,01.

b) $u_n < 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{1000}$
 $\Leftrightarrow 2n+1 > 1000$
 $\Leftrightarrow n > 499,5$

Logo, a partir do termo de ordem 499, os termos da sucessão $u_n = \frac{1}{2n+1}$ são menores que 0,001.

c) $\left| \frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{3n-3n-1}{3(3n+1)} \right| < \frac{1}{10\,000}$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{3(3n+1)} \right| < \frac{1}{10\,000}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+1)} < \frac{1}{10\,000}$
 $\Leftrightarrow 3(3n+1) > 10\,000$
 $\Leftrightarrow 3n+1 > \frac{10\,000}{3}$
 $\Leftrightarrow n > \frac{9997}{9}$

Logo, uma vez que $\frac{9997}{9} \approx 1110,8$, a partir do termo de ordem 1110, os termos da sucessão $u_n = \frac{n}{3n+1}$ distam de $\frac{1}{3}$ menos de 0,0001.

57.

a) i) $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,03 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < 0,03$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < 0,03$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < 0,03$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}$
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > \frac{100}{3}$
 $\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{50}{3}$
 $\Leftrightarrow n > \frac{47}{6} (\approx 7,8)$

Logo, a partir do termo de ordem 7, $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,03$.

ii) $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,001 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < 0,001$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < 0,001$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \frac{1}{1000}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{1000}$
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > 1000$
 $\Leftrightarrow 2n+1 > 500$
 $\Leftrightarrow n > 249,5$

Logo, a partir do termo de ordem 249, os termos da sucessão (u_n) distam de $\frac{1}{2}$ menos de 0,001.

iii) $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < \delta$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \delta$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \delta$
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > \frac{1}{\delta}$
 $\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\delta}$
 $\Leftrightarrow 2n > \frac{1}{2\delta} - 1$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{1-2\delta}{2\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1-2\delta}{4\delta}$$

Logo, a partir do termo de ordem p , sendo $n \geq p$ e $p > \frac{1-2\delta}{4\delta}$, os termos da sucessão (u_n) distam de $\frac{1}{2}$ menos de δ .

- b)** Pela alínea anterior, se $n > \frac{1-2\delta}{4\delta}$, então $\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{1-2\delta}{4\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

58.

- a)** Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, se $n > \frac{1}{\delta}$, então $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{1}{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

- b)** Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{6n-6n-3}{2n+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3}{2n+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{3} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{3}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{3-\delta}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3-\delta}{2\delta}$$

Assim, se $n > \frac{3-\delta}{2\delta}$, então $\left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{3-\delta}{2\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+1} = 3$.

- c)** Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n^2-n^2-1}{n^2+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n^2+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow n^2+1 > \frac{1}{\delta}$$

Assim, se $n > \sqrt{\frac{1}{\delta}-1}$, então $\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \sqrt{\frac{1}{\delta}-1}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$.

- d)** Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3-6n+6n+8}{3(3n+4)} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{11}{3(3n+4)} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{3(3n+4)} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3n+4)}{11} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n+4 > \frac{11}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n > \frac{11}{3\delta} - 4$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{11}{9\delta} - \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{11-36\delta}{9\delta}$$

Assim, se $n > \frac{11-36\delta}{9\delta}$, então $\left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta$, e,

portanto, se $p > \frac{11-36\delta}{9\delta}$, fica provado que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta,$$

ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+4} = -\frac{2}{3}$.

59. Pretende-se provar que a proposição $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |2n+3-3| < \delta$ é falsa. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$|2n+3-3| < \delta \Leftrightarrow 2n < \delta \Leftrightarrow n < \frac{\delta}{2}$$

Assim, os únicos termos da sucessão que são valores aproximados de 3 com erro inferior a δ são os de ordem inferior a $\frac{\delta}{2}$ e não todos a partir de uma certa ordem.

Logo, a proposição acima é falsa, ou seja, a sucessão (u_n) não tende para 3.

60.

a) Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{n}$ é convergente para 0.

b) Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = -2 + \frac{1}{n}$ é convergente para -2.

c) Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = n$ é divergente, já que $\lim u_n = +\infty$.

61. A afirmação (I) é falsa.

Contraexemplo: seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$. Tem-se que $\lim u_n = 2$, mas a sucessão não é monótona, já que $u_2 - u_1 = 1,5 - 3 < 0$ e $u_3 - u_2 = \frac{5}{3} - 1,5 > 0$.

A afirmação (II) é falsa, uma vez que $\lim u_n = 2$ e a afirmação dada é equivalente a $\lim u_n = 3$.

A afirmação (III) é verdadeira, pois, sendo (u_n) uma sucessão convergente, é limitada.

62.

a) Contraexemplo: a sucessão de termo geral $u_n = n$ é monótona e não é convergente.

b) Contraexemplo: a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é limitada e não é convergente.

c) Contraexemplo: a sucessão de termo geral $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente mas não é monótona.

63. $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é decrescente.

Uma vez que (u_n) é decrescente, $u_1 \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é limitada.

Assim, (u_n) é monótona e é limitada, logo (u_n) é convergente. No entanto, os dados do enunciado não permitem concluir para que valor tende a sucessão.

Então, a afirmação que não é necessariamente verdadeira é a opção (D).

64.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2} = \\ &= \frac{3n^2 - 3n^2 - 6n - 3}{(n+1)^2 n^2} = \\ &= \frac{-6n-3}{(n+1)^2 n^2} = \\ &= -\frac{6n+3}{(n+1)^2 n^2} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (a_n) é decrescente.

Por outro lado, como $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, então $0 < \frac{3}{n^2} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, a sucessão (a_n) é limitada.

Assim, a sucessão (a_n) é convergente, por se tratar de uma sucessão monótona e limitada.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad b_{n+1} - b_n &= \frac{6(n+1)-1}{n+1} - \frac{6n-1}{n} = \\ &= \frac{6n+5}{n+1} - \frac{6n-1}{n} = \\ &= \frac{6n^2+5n-6n^2-6n+n+1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (b_n) é crescente.

Por outro lado, $b_n = \frac{6n-1}{n} = 6 - \frac{1}{n}$ e, como $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 6 > 6 - \frac{1}{n} \geq -5, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (b_n) é limitada.

Assim, a sucessão (b_n) é convergente, por se tratar de uma sucessão monótona e limitada.

65. Tem-se que $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão de termo geral $u_n = \sin n$ é uma sucessão limitada.

Por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$\text{Logo, } \lim \left(\sin n \times \frac{1}{n} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\sin n}{n} = 0.$$

66.

a) $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow 2n + 1 > 10\,000 \Leftrightarrow n > 4999,5$
 A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são maiores que 10 000 é 4999.

b) $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow 3n^2 - 6n > 10\,000$
 $\Leftrightarrow 3n^2 - 6n - 10\,000 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$3n^2 - 6n - 10\,000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12 \times 10\,000}}{6}$$

Logo, $n \approx -56,744 \vee n \approx 58,744$.

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são maiores que 10 000 é 58.

c) $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow n^2 - 1 > 10\,000 \Leftrightarrow n^2 - 10\,001 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$n^2 - 10\,001 = 0 \Leftrightarrow n = \sqrt{10\,001} \vee n = -\sqrt{10\,001}$$

Logo, $n \approx -100,005 \vee n \approx 100,005$.

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são maiores que 10 000 é 100.

d) $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow \sqrt{n} + 4 > 10\,000$
 $\Leftrightarrow \sqrt{n} > 9996$
 $\Leftrightarrow n > 99\,920\,016$

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são maiores que 10 000 é 99 920 016.

67.

a) $u_n < -10\,000 \Leftrightarrow -2n + 10 < -10\,000$
 $\Leftrightarrow -2n < -10\,010$
 $\Leftrightarrow 2n > 10\,010$
 $\Leftrightarrow n > 5005$

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são menores que -10 000 é 5005.

b) $u_n < -10\,000 \Leftrightarrow -n^2 - 10n < -10\,000$
 $\Leftrightarrow -n^2 - 10n + 10\,000 < 0$
 $\Leftrightarrow n^2 + 10n - 10\,000 > 0$

Cálculo auxiliar:

$$n^2 + 10n - 10\,000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 40\,000}}{2}$$

Logo, $n \approx -105,12 \vee n \approx 95,125$.

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão (u_n) são menores que -10 000 é 95.

68.

a) Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$n - 10 > L \Leftrightarrow n > L + 10$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $L + 10$, tem-se $n - 10 > L$, desde que $n \geq p$.

Fica provado que $\lim (n - 10) = +\infty$.

b) Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$6 - 2n < -L \Leftrightarrow -2n < -L - 6$$

$$\Leftrightarrow 2n > L + 6$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L + 6}{2}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{L + 6}{2}$, tem-se

$$6 - 2n < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim (6 - 2n) = -\infty$.

69.

a) Se (u_n) é uma progressão aritmética de razão $r > 0$, então $u_n = u_1 + r(n - 1)$.

Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$u_1 + r(n - 1) > L \Leftrightarrow r(n - 1) > L - u_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n - 1}_{r > 0} > \frac{L - u_1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L - u_1}{r} + 1$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{L - u_1}{r} + 1$, tem-se

$$u_1 + r(n - 1) > L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim u_n = +\infty$.

b) Se (u_n) é uma progressão aritmética de razão $r < 0$, então $u_n = u_1 + r(n - 1)$.

Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$u_1 + r(n - 1) < -L \Leftrightarrow r(n - 1) < -L - u_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n - 1}_{r < 0} > \frac{L - u_1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L - u_1}{r} + 1$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{L - u_1}{r} + 1$, tem-se

$$u_1 + r(n - 1) < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim u_n = -\infty$.

70.

a) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+6-3n-1}{3(3n+1)} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{5}{3(3n+1)} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3(3n+1)} < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} < \frac{3\delta}{5} \\ &\Leftrightarrow 3n+1 > \frac{5}{3\delta} \\ &\Leftrightarrow 3n > \frac{5}{3\delta} - 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Assim, se $n > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3}$, então $\left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta$, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}$.

b) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{4} > L &\Leftrightarrow 2n-1 > 4L \\ &\Leftrightarrow 2n > 4L+1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{4L+1}{2} \end{aligned}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{4L+1}{2}$, tem-se

$$\frac{2n-1}{4} > L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4} = +\infty$.

c) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{-n+5}{7} < -L &\Leftrightarrow -n+5 < -7L \\ &\Leftrightarrow -n < -7L+5 \\ &\Leftrightarrow n > 7L-5 \end{aligned}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $7L-5$, tem-se

$$\frac{-n+5}{7} < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+5}{7} = -\infty$.

d) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta \Leftrightarrow 0 < \delta \Leftrightarrow \delta < 0$$

Assim, para qualquer $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta$, qualquer que seja n natural, ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$.

71.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n+2} = \frac{6}{3} = 2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{10} = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{-4} = -\infty$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} 9 = 9$

72.

a) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$n^2 > L \Leftrightarrow n > \sqrt{L}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\sqrt{L}$, tem-se $n^2 > L$, desde que $n \geq p$.

Fica provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

b) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\sqrt{n} > L \Leftrightarrow n^2 > L^2$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a L^2 , tem-se $\sqrt{n} > L$, desde que $n \geq p$.

Fica provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$.

c) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \delta \\ &\Leftrightarrow n^2 > \delta \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se $n > \sqrt{\delta}$, então $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \sqrt{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}:$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

d) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} > \delta$$

$$\Leftrightarrow n > \delta^2$$

Assim, se $n > \delta^2$, então $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta$, e, portanto,

se $p > \delta^2$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta$, ou seja, que

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

73.

a) $\lim n^3 = +\infty$

b) $\lim \sqrt{n^2} = +\infty$

c) $\lim n^{\frac{3}{4}} = +\infty$

d) $\lim n^{-\frac{3}{4}} = 0$

e) $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

f) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^5}} = 0$

74.

a) $a_1 + b_1 = -1 + 2 = 1$

$a_2 + b_2 = 1 + 1 = 2$

$a_3 + b_3 = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

b) $a_n + b_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$

75.

a) $c_1 \times d_1 = \frac{2}{6} \times 2 = \frac{2}{3}$

$c_2 \times d_2 = \frac{4}{11} \times 1 = \frac{4}{11}$

$c_3 \times d_3 = \frac{6}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

b) $c_n \times d_n = \frac{2n}{5n+1} \times \frac{2}{n} = \frac{4}{5n+1}$

c) $\lim c_n = \lim \frac{2n}{5n+1} = \frac{2}{5}$

$\lim d_n = \lim \frac{2}{n} = 0$

$\lim (c_n \times d_n) = \lim \frac{4}{5n+1} = 0$

d) $\lim \frac{1}{c_n} = \lim \frac{5n+1}{2n} = \frac{5}{2}$

76.

a) $\frac{e_n}{f_n} = \frac{\frac{6n+1}{n}}{\frac{2n+7}{n+1}} = \frac{(6n+1)(n+1)}{n(2n+7)} = \frac{6n^2+7n+1}{2n^2+7n}$

b) $\lim e_n = \lim \frac{6n+1}{n} = 6$

$\lim f_n = \lim \frac{2n+7}{n+1} = 2$

c) $\lim \left(\frac{e_n}{f_n} \right) = \frac{6}{2} = 3$

$\lim \left(\frac{f_n}{e_n} \right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

77.

a) $\lim g_n = \lim n^{-2} = 0$

$\lim h_n = \lim \frac{4n}{2n+1} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\lim (2016g_n) = 2016 \times 0 = 0$

c) $\lim (7h_n) = 7 \times 2 = 14$

d) $\lim (g_n - h_n) = 0 - 2 = -2$

e) $\lim (2g_n - 3h_n) = 2 \times 0 - 3 \times 2 = -6$

78.

a) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n =$
 $= \lim \frac{-n+5}{4n+4} + \lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) =$
 $= -\frac{1}{4} + 3 =$
 $= \frac{11}{4}$

b) $\lim (b_n \times c_n) = \lim b_n \times \lim c_n =$
 $= \lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) \times \lim \frac{1}{n^3} =$
 $= 3 \times 0 =$
 $= 0$

c) $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n} = \frac{1}{\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{3}$

d) $\lim \frac{c_n}{b_n} = \frac{\lim c_n}{\lim b_n} = \frac{\lim \frac{1}{n^3}}{\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{0}{3} = 0$

e) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{\lim \frac{-n+5}{4n+4}}{\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12}$

f) $\lim (a_n)^2 = (\lim a_n)^2 = \left(\lim \frac{-n+5}{4n+4} \right)^2 = \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}$

$$\text{g) } \lim (b_n)^{\frac{1}{2}} = (\lim b_n)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$79. \lim \frac{2v_n - 5u_n}{(u_n)^2} = \frac{2 \times 3 - 5 \times (-1)}{(-1)^2} = 6 + 5 = 11$$

80.

$$\text{a) } \lim u_n = \lim n^3 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim v_n = \lim 5 = 5$$

$$\text{c) } \lim w_n = \lim (-n) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim t_n = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

$$\text{e) } \lim (u_n + v_n) = +\infty + 5 = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (u_n + t_n) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim (v_n + w_n) = 5 + (-\infty) = -\infty$$

81.

$$\text{a) } \lim (a_n + b_n) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim (a_n + d_n) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{c) } \lim (a_n + e_n) = +\infty + (-2) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim (a_n + c_n) = +\infty + (-\infty) \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{e) } \lim (a_n \times b_n) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (a_n \times c_n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{g) } \lim (a_n \times e_n) = +\infty \times (-2) = -\infty$$

$$\text{h) } \lim (c_n \times e_n) = -\infty \times (-2) = +\infty$$

$$\text{i) } \lim (b_n \times d_n) = +\infty \times 0 \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{j) } \lim (c_n \times d_n) = -\infty \times 0 \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{k) } \lim (c_n^{2016}) = (-\infty)^{2016} = +\infty$$

$$\text{l) } \lim (c_n^{2017}) = (-\infty)^{2017} = -\infty$$

82.

$$\text{a) } \lim (n^2 - n) = \lim \left(n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim (-n^2 + n) = \lim \left(-n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = -\infty \times (1 - 0) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \left(2n^3 - 4n^2 + \frac{6}{5}n - 9 \right) &= \\ &= \lim \left(2n^3 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{5n^2} - \frac{9}{2n^3} \right) \right) = \\ &= +\infty \times (1 - 0 + 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim (-\pi n^4 + 3n^2 - n + 4) &= \\ &= \lim \left(-\pi n^4 \left(1 - \frac{3}{\pi n^2} + \frac{1}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^4} \right) \right) = \\ &= -\infty \times (1 - 0 + 0 - 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim (-4n^5 - n^4 + 4n^3 + 6n - 9) &= \\ &= \lim \left(-4n^5 \left(1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n^4} + \frac{9}{4n^5} \right) \right) = \\ &= -\infty \times (1 + 0 - 0 - 0 + 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim \left(\frac{8}{3}n^{10} + n^7 - 4n^2 + 6n - 9 \right) &= \\ &= \lim \left(\frac{8}{3}n^{10} \left(1 + \frac{3}{8n^3} - \frac{3}{2n^8} + \frac{9}{4n^9} - \frac{27}{8n^{10}} \right) \right) = \\ &= +\infty \times (1 + 0 - 0 + 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

83.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \frac{6n^3 - 2n^2 + n}{2n^3 - n} &= \lim \frac{n^3 \left(6 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left(2 - \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{6 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim \frac{8n - 9}{-4 - n} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \frac{2n^2 - 7n + 1}{n^2 + 1} &= \lim \frac{n^2 \left(2 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{2 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim \frac{n^3 + 5n + 1}{3 - n^2} &= \lim \frac{n^3 \left(1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} - 1 \right)} = \\ &= \lim \frac{n \left(1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\frac{3}{n^2} - 1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim \frac{n^2}{n^3 + 1} &= \lim \frac{n^2}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \\ &= \lim \frac{n^2}{n^3} \times \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = \\ &= \lim \frac{1}{n} \times \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = \\ &= 0 \times 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^4 - 2n + 1}{-3n^3 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(-6 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^3 \left(-3 - \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-6 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{-3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty \end{aligned}$$

84.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n^2 + 1}}{\frac{n^2}{2n^4 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(2n^4 + 1)}{n^2(n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 4}{n^3 + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(8 + \frac{4}{n^4} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(8 + \frac{4}{n^4} \right)}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{3n+1} \times \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2 + 1} \times (n+2) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

85.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n^2+2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n} \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1 - n^2-2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+4n+2n}}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(9 + \frac{4}{n} \right) + 2n}}{n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2n}}{n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2} \right)}{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{3+2}{1} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \sqrt{n+2}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{(1 + \sqrt{n+2})(1 - \sqrt{n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{1 - n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{-n - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{n \left(-1 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n+2}}{-1 - \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{-\infty}{-1} = +\infty \end{aligned}$$

86.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{7} \right)^n = 0$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 9^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9^n \left(\left(\frac{2}{9} \right)^n - 1 \right) \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

87. A sequência 0,9; 0,09; 0,009; ... é uma progressão geométrica de razão 0,1. Assim:

$$\begin{aligned} 0,9 &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0,9 \times \frac{1 - 0,1^n}{1 - 0,1} \right) = 0,9 \times \frac{1 - 0}{0,9} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{88. } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + 0,1^n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 \times \frac{1 - 0,1^n}{1 - 0,1} \right) = 10 \times \frac{1 - 0}{0,9} = \\ &= 10 \times \frac{10}{9} = \frac{100}{9} \end{aligned}$$

Aprende Fazendo

Páginas 98 a 104

1. $\lim u_n = \lim \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + 0 = 3$

A opção correta é a (D).

2. $\lim v_n = \lim \frac{n-5}{n} = \lim \left(1 - \frac{5}{n} \right) = 1 - 0 = 1$

Logo, (v_n) é uma sucessão convergente.

A opção correta é a (C).

3. Como o gráfico da sucessão (w_n) está sobre uma reta de declive positivo, então $w_n \rightarrow +\infty$.

A opção correta é a (B).

4. $\lim t_n = \lim (100 - n)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

Logo, (t_n) é uma sucessão divergente.

A opção correta é a (A).

5. $\lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - 0 = 2$

Logo, (u_n) é uma sucessão convergente para 2.

A opção correta é a (C).

6. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral $a_n = (-1)^n$ é limitada mas não é convergente.

A afirmação (B) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral $b_n = n$ é monótona mas não é convergente.

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente mas não é monótona.

A afirmação (D) é verdadeira. Se (d_n) é uma sucessão convergente para a , então, pela definição de limite, para qualquer $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |d_n - a| < \delta$. Ora, $|d_n - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < d_n - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < d_n < a + \delta$, pelo que (d_n) é uma sucessão limitada.

A opção correta é a (D).

7. $\lim (b_n \times c_n)$ conduz a uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$.

$$\lim (a_n \times b_n) = -1 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim \left(\frac{c_n}{b_n} \right) = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 8. \lim u_n &= \lim \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \\ &= \lim \left(1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1 - 0}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

9. A proposição (I) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é tal que $\lim u_n = 0$ e $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, mas (u_n) não é monótona.

A proposição (II) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral $v_n = -n$ é não limitada e $\lim v_n = -\infty$.
A opção correta é a (B).

10. Como a sucessão (b_n) é decrescente, então $b_1 \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $-1 < b_n \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (b_n) é limitada. Uma vez que (b_n) é monótona e limitada, então (b_n) é convergente.

A opção correta é a (D).

11. $\lim u_n = \lim (n^3 - n) = \lim \left[n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] = +\infty \times 1 = +\infty$

Logo, a proposição (I) é verdadeira.

$$\lim v_n = \lim [2n + (-1)^n]$$

Se n é par, então $\lim v_n = \lim (2n + 1) = +\infty$.

Se n é ímpar, então $\lim v_n = \lim (2n - 1) = +\infty$.

Logo, $\lim v_n = +\infty$ e a proposição (II) é verdadeira.

A opção correta é a (A).

$$\begin{aligned} 12. \lim w_n &= \lim \frac{kn^4 + n^2 - 3n + 4}{-6n^3 + n^2} = \\ &= \lim \frac{n^3 \left(kn + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(-6 + \frac{1}{n} \right)} = \\ &= \lim \frac{kn + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{-6 + \frac{1}{n}} = \lim \frac{kn}{-6} \end{aligned}$$

Como $\lim w_n = -\infty$, então $k > 0$.

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 13. \lim \left(x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots + \frac{x}{3^{n-1}} \right) &= 30 \\ \Leftrightarrow \lim \left(x \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) &= 30 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = 30$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 20$$

A opção correta é a (C).

14.

$$\text{a) } \lim \frac{3n+1}{3n-4} = \lim \frac{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 - \frac{4}{n} \right)} = \lim \frac{3 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{4}{n}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{b) } \lim \frac{-5n+1}{10} = \lim \left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{10} \right) = -\infty$$

$$\text{c) } \lim \frac{-n-1}{-4} = \lim \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4} \right) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim \left(-\frac{2}{5} \right) = -\frac{2}{5}$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

15.

$$\text{a) } \lim n^4 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \sqrt{n^3} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim n^{2018} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim n^{-2018} = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{n^3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{f) } \lim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{16. } \lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \lim \frac{n}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} =$$

$$= \lim \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim v_n = \lim n^{-2} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim w_n = \lim \frac{12n+1}{2n+5} = \lim \frac{12 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 6$$

$$\text{a) } \lim (u_n + v_n) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim (v_n + w_n) = 0 + 6 = 6$$

$$\text{c) } \lim (3v_n - w_n) = 3 \times 0 - 6 = -6$$

$$\text{d) } \lim (u_n \times v_n) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{f) } \lim \frac{1}{u_n w_n} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{g) } \lim \frac{v_n}{w_n} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\text{h) } \lim (u_n)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{i) } \lim (w_n)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

17.

$$\text{a) } \lim (a_n + b_n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim (c_n + d_n) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{c) } \lim (a_n + f_n) = -\infty + 3 = -\infty$$

$$\text{d) } \lim (b_n + c_n) = -\infty + (+\infty) \text{ Indeterminação}$$

$$\text{e) } \lim (f_n + c_n) = 3 + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (a_n \times b_n) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim (a_n \times c_n) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{h) } \lim (a_n \times f_n) = -\infty \times 3 = -\infty$$

$$\text{i) } \lim (c_n \times e_n) = -\infty \times 0 \text{ Indeterminação}$$

$$\text{j) } \lim (a_n \times d_n) = -\infty \times 0 \text{ Indeterminação}$$

$$\text{k) } \lim (a_n^4) = (-\infty)^4 = +\infty$$

$$\text{l) } \lim (a_n^5) = (-\infty)^5 = -\infty$$

$$\text{m) } \lim \left(\frac{1}{c_n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{n) } \lim \left(\frac{1}{b_n} \right) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\text{o) } \lim \left(\frac{a_n}{c_n} \right) = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ Indeterminação}$$

$$\text{p) } \lim \left(\frac{e_n}{f_n} \right) = \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{q) } \lim \left(\frac{d_n}{e_n} \right) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminação}$$

$$\text{r) } \lim \left(\frac{f_n}{e_n} \right) = \frac{3}{0} \text{ Não há dados suficientes para resolver o exercício.}$$

18.

$$\text{a) } \lim 4^n = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{5^n}{2^n} = \lim \left(\frac{5}{2} \right)^n = +\infty$$

$$\text{c) } \lim \frac{7^n}{\pi^{n+1}} = \lim \left(\frac{7}{\pi} \right)^n \times \frac{1}{\pi} = +\infty \times \frac{1}{\pi} = +\infty$$

d) $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

e) $\lim \frac{2^n}{10^n} = \lim \left(\frac{2}{10}\right)^n = 0$

f) $\lim (3^n - 6^n) = \lim \left(6^n \left(\left(\frac{3}{6}\right)^n - 1\right)\right) = +\infty (0 - 1) = -\infty$

19.

a) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$$

Assim, se $n > \frac{2}{\delta}$, então $\left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta$, e, portanto, se

$p > \frac{2}{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta, \text{ ou seja, que } \lim \frac{2}{n} = 0.$$

b) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{10n - 10n - 5}{2n+1}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2n+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{5} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{5}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{5}{\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{5-\delta}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5-\delta}{2\delta}$$

Assim, se $n > \frac{5-\delta}{2\delta}$, então $\left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta$, e, por-

tanto, se $p > \frac{5-\delta}{2\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta, \text{ ou seja,}$$

$$\text{que } \lim \frac{10n}{2n+1} = 5.$$

c) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n^2 - 3n^2 - 1}{3(3n^2+1)}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(3n^2+1)} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 3(3n^2+1) > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n^2+1 > \frac{1}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 > \frac{1}{3\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 > \frac{1-3\delta}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1-3\delta}{9\delta}$$

Assim, se $n > \sqrt{\frac{1-3\delta}{9\delta}}$, então $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta$ e,

portanto, se $p > \sqrt{\frac{1-3\delta}{9\delta}}$, fica provado que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta,$$

$$\text{ou seja, que } \lim \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}.$$

20.

a) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$2n+5 > L \Leftrightarrow 2n > L-5 \Leftrightarrow n > \frac{L-5}{2}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{L-5}{2}$, tem-se

$$2n+5 > L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que $\lim (2n+5) = +\infty$.

b) Dado $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{3-n}{2} < -L \Leftrightarrow 3-n < -2L$$

$$\Leftrightarrow -n < -2L-3$$

$$\Leftrightarrow n > 2L+3$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $2L+3$, tem-se

$$\frac{3-n}{2} < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

$$\text{Fica provado que } \lim \left(\frac{3-n}{2}\right) = -\infty.$$

21.

a) Proposição verdadeira.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é limitada, mas não tem limite.

b) Proposição falsa.

Uma sucessão limitada é minorada e majorada, logo não pode tender para infinito.

c) Proposição verdadeira.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ é limitada e tende para zero.

d) Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = -n + 3$ tem termos positivos (nomeadamente o primeiro e o segundo termos) e tende para $-\infty$.

e) Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{n}$ é crescente e não tende para $+\infty$, mas para zero.

f) Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = n$ é monótona, mas não é convergente.

g) Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, mas não é monótona.

h) Proposição verdadeira.

22.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{2n^2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+4n-5}{2n^3-5n^2+1} = \frac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n+2}{4n-3}} = \sqrt{\frac{9 + \frac{2}{n}}{4 - \frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{2n+1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{\sqrt{2n^2+1}+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 3n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2} + 3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + 3} \times \frac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} - 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 3}{2 - 9} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \right) = +\infty \times (\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n \times 2 = 0 \times 2 = 0$$

$$\text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^{n+1}}{\pi^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{\pi} \right)^n \times \frac{1}{\pi^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\pi} \right)^n \times \frac{3}{\pi^2} =$$

$$= +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+2} - 5^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5^n \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n \times 9 - 1 \right) \right) =$$

$$= +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

23.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{3}{n} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{3}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^5+3n^2}{4n^5+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{4 + \frac{1}{n^5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2+3n^4}{4n+1} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + 3n^3}{4 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \cdot (n^2+2) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\text{f) } \lim \left(\frac{1}{n^2+3} : \frac{2}{n} \right) \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \frac{n}{2n^2+6} = \lim \frac{1}{2n+\frac{6}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{g) } \lim \left(\sqrt{\frac{12n}{n+1}} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \sqrt{\frac{12}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{h) } \lim (n^{2017} - n^2) \underset{(\infty - \infty)}{=} \lim \left(n^{2017} \left(1 - \frac{1}{n^{2015}} \right) \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

$$\text{i) } \lim (n^2 - n^{2016}) \underset{(\infty - \infty)}{=} \lim \left(n^{2016} \left(\frac{1}{n^{2014}} - 1 \right) \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

$$\text{j) } \lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Se n é par, então $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 + 0 = 2$.

Se n é ímpar, então $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - 0 = 2$.

Logo, $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2$.

$$\text{k) } \lim \left(-n + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Se n é par, então $\lim \left(-n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left(-n + \frac{1}{n} \right) = -\infty + 0 = -\infty$.

Se n é ímpar, então $\lim \left(-n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left(-n - \frac{1}{n} \right) = -\infty - 0 = -\infty$.

Logo, $\lim \left(-n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = -\infty$.

$$\text{l) } \lim (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{m) } \lim (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) &\underset{(\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim \frac{n^2+1-n^2-2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim \frac{-1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{n) } \lim \left(\frac{1+2^n+3^n}{3^n} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n + \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\text{o) } \lim \left(\frac{-2+4^{n+1}}{2^n} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{-1}{2^{n-1}} + \lim 2^n \times 4 = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{24. } \lim u_n = \lim (\pi + (-1)^n)$$

Se n é par, então $\lim u_n = \pi + 1$.

Se n é ímpar, então $\lim u_n = \pi - 1$.

Logo, a sucessão (u_n) é divergente.

$$\lim v_n = \lim (\pi - (-1)^n)$$

Se n é par, então $\lim v_n = \pi - 1$.

Se n é ímpar, então $\lim v_n = \pi + 1$.

Logo, a sucessão (v_n) é divergente.

$$\begin{aligned} \lim (u_n \times v_n) &= \lim ((\pi + (-1)^n)(\pi - (-1)^n)) = \\ &= \lim (\pi^2 - (-1)^{2n}) = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Logo, a sucessão $(u_n \times v_n)$ é convergente.

25.

$$\text{a) } \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que $\frac{1}{3}$ é uma constante, fica provado que (w_n) é uma progressão geométrica.

b) $w_1 = \frac{2}{3} > 0$ e $r = \frac{1}{3} < 1$, logo (w_n) é uma sucessão decrescente.

$$\begin{aligned} \text{c) } S_n &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim S_n = \lim \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = 1 - 0 = 1$$

26.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim S_n &= \lim \left(2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_6 &= u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{3}{3125} = 3 \times r^5 \\ &\Leftrightarrow r^5 = \frac{1}{3125} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim \left(3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = 3 \times \frac{1-0}{\frac{4}{5}} = \\ &= 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

27. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+.$

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, se $n > \frac{1}{2\delta}$, então $\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{1}{2\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}:$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

28. Pretende-se provar que a proposição $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 4 \right| < \delta \text{ é falsa.}$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+.$

$$\left| \frac{n+1}{n} - 4 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-4n}{n} \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{n} \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 3 \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} - 3 < \delta \wedge \frac{1}{n} - 3 > -\delta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 3 + \delta \wedge \frac{1}{n} > 3 - \delta \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{3+\delta} \wedge n < \frac{1}{3-\delta}$$

Assim, os únicos termos da sucessão que são valores aproximados de 4 com erro inferior a δ são aqueles cuja ordem é superior a $\frac{1}{3+\delta}$ e inferior a $\frac{1}{3-\delta}$ e não todos a partir de uma certa ordem.

Logo, a proposição acima é falsa, ou seja, a sucessão (u_n) não tende para 4.

29.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \cos n}{3n^2 + \sin n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\cos n}{n^2}}{3 + \frac{\sin n}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt{n^2+1} - 5n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5n \right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5n \right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(3\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5 \right) \right) = +\infty (3-5) = -\infty$$

$$\text{c) } \text{Seja } v_n = \frac{n^4}{5^n}.$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^4}{5^{n+1}} - \frac{n^4}{5^n} = \frac{(n+1)^2(n+1)^2}{5^{n+1}} - \frac{n^4}{5^n} = \\ = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 5n^4}{5^{n+1}} = \\ = \frac{n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1 - 5n^4}{5^{n+1}} = \\ = \frac{-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{5^{n+1}}$$

Uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1) = -\infty$,
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-4n^4 \left(1 - \frac{3}{4n} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n^3} - \frac{1}{4n^4} \right) \right) = -\infty \times 1 = -\infty$,
 então, a partir de uma certa ordem $-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1 < 0$, pelo que, a partir
 dessa ordem, $\frac{-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{5^{n+1}} < 0$ e a

sucessão (v_n) é decrescente.

Por outro lado, $\frac{n^4}{5^n} > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão (v_n) é minorada.

Assim, $0 < v_n \leq v_1, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja (v_n) é uma sucessão limitada.

Ora, $u_n = v_n \times \frac{1}{n}$, logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(v_n \times \frac{1}{n} \right) = 0$, já que (v_n) é uma sucessão limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

30.

a) Para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) + 1} = \\ = \frac{\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2u_n} - 1}{\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2u_n} + 1} = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n^2 + 1 + 2u_n} = \\ = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n + 1)^2} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right)^2 = v_n^2, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$\text{b) } \text{Seja } P(n): v_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{1-1}} \Leftrightarrow \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^0} \Leftrightarrow \frac{2-1}{2+1} = \left(\frac{1}{3} \right)^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } v_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}$$

$$\text{Tese: } v_{n+1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^n}$$

Demonstração:

$$v_{n+1} = v_n^2 = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \right]^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^{2 \times 2^{n-1}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^n}$$

$$\text{Logo, } v_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ &\Leftrightarrow (u_n + 1) \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \times \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \times \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} - u_n = -1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow u_n \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \right) = 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{2^{n-1}}}}{1 + \frac{1}{3^{2^{n-1}}}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{3^{2^{n-1}} - 1}{3^{2^{n-1}} + 1} \\ \text{d) } \lim u_n &= \lim \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \\ \lim v_n &= \lim \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Tema IV - Funções Reais de Variável Real**Unidade 1 - Funções racionais**

Páginas 6 a 15

1.

$$\text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{c) } D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$\text{d) } D_i = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Condição universal em $\mathbb{R}$

$$\text{e) } D_j = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-5}\}$$

$$\text{f) } D_k = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 5x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{-2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

2.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{2x^2 - 18}{2x + 6} &= \frac{2(x^2 - 9)}{2(x + 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \\ &\text{em } \mathbb{R} \setminus \{-3\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 6x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{3x^2 - 6x - 9}{2x^2 + 6x + 4} &= \frac{3(x^2 - 2x - 3)}{2(x^2 + 3x + 2)} = \\ &= \frac{3(x + 1)(x - 3)}{2(x + 2)(x + 1)} = \\ &= \frac{3(x - 3)}{2(x + 2)} = \\ &= \frac{3x - 9}{2x + 4}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} &= \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0

$$\text{d) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \cdot x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3 = 0 &\Leftrightarrow x^3(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Divisores de 3: -3, -1, 1, 3

	1	5	7	3
-1		-1	-4	-3
	1	4	3	0

$$\begin{aligned} \cdot x^2 + 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3} &= \frac{x^2(x^2 + 4x + 3)}{x^3(x+1)(x^2 + 4x + 3)} = \\ &= \frac{1}{x(x+1)} = \\ &= \frac{1}{x^2 + x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\} \end{aligned}$$

3.

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: x + h \neq 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$

$$\cdot \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-h}{x(x+h)} = \frac{-h}{x^2+xh}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}: x-3 \neq 0 \wedge x^2-9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$$\cdot \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9} = \frac{x+1}{x^2-9}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

c) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-9 \neq 0 \wedge x^2+3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{6}{x^2-9} + \frac{x}{x^2+3x} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} + \frac{x}{x(x+3)} = \\ &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \\ &= \frac{6+x-3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{1}{x-3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\} \end{aligned}$$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \neq 0 \wedge x^2-5x+6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{5 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{1}{x-2} + \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{x-3+x-1}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2x-4}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2}{x-3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \end{aligned}$$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2+5x+6 \neq 0 \wedge x^2+4x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \cdot x^2 + 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3 \\ \cdot x^2 + 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x+1}{x^2+5x+6} + \frac{x+2}{x^2+4x+3} &= \\ &= \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} + \frac{x+2}{(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x+1) + (x+2)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2+2x+1+x^2+4x+4}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{2x^2+6x+5}{(x+2)(x+3)(x+1)}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\} \end{aligned}$$

4.

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: x+5 \neq 0 \wedge 2x^3-2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x = 0 &\Leftrightarrow 2x(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{2x}{x+5} \times \frac{x+5}{2x^3-2x} &= \frac{2x(x+5)}{(x+5)2x(x^2-1)} = \\ &= \frac{1}{x^2-1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\} \end{aligned}$$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}: x+3 \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^2-x-2}{x+3} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-1} &= \frac{(x-2)(x+1)(x+3)^2}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-2)(x+3)}{x-1} = \\ &= \frac{x^2+x-6}{x-1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x - 6 \neq 0 \wedge 2x^2 + 12x \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet x^2 - 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 2x^2 + 12x = 0 &\Leftrightarrow 2x(x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{x^2 - 36}{x^2 - 5x - 6} \times \frac{x^4 - 1}{2x^2 + 12x} &= \\ &= \frac{(x - 6)(x + 6)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 6)(x + 1) 2x(x + 6)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{2x} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\} \end{aligned}$$

5.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 \neq 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{x^2 + 3x}{x - 2} : \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} &= \frac{x^2 + 3x}{x - 2} \times \frac{4 - x^2}{x^2 - 9} = \\ &= \frac{x(x + 3)(2 - x)(2 + x)}{(x - 2)(x - 3)(x + 3)} = \\ &= \frac{-x(2 + x)}{x - 3} = \\ &= \frac{-x^2 - 2x}{x - 3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 \neq 0 \wedge 5x \neq 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\frac{x^4 - 1}{x^4}}{\frac{x^2 + 1}{5x}} &= \frac{(x^4 - 1) 5x}{x^4(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) 5}{x^3(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{5(x - 1)(x + 1)}{x^3} = \\ &= \frac{5x^2 - 5}{x^3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \left\{x \in \mathbb{R} : x - 5 \neq 0 \wedge x + 5 \neq 0 \wedge \frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5} \neq 0\right\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x + 5) - 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x - 5x + 25}{(x - 5)(x + 5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 25}{(x - 5)(x + 5)} = 0, \text{ que é uma equação} \\ &\text{impossível em } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(\frac{x}{x - 5} + \frac{5}{x + 5}\right) : \left(\frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5}\right) &= \\ &= \frac{x(x + 5) + 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x(x + 5) - 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 5x + 5x - 25}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x^2 + 5x - 5x + 25}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x^2 + 25}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{(x - 5)(x + 5)} \times \frac{(x - 5)(x + 5)}{x^2 + 25} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{x^2 + 25}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \end{aligned}$$

6.

$$\text{a) } \frac{1}{x + 2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4x(x + 2) + 3(x + 2)}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 4x^2 - 8x + 3x + 6}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 2x + 6}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 2x + 6 = 0 \wedge 3x(x + 2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2} \vee x = 1\right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} = \frac{6 - 5x}{4 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} - \frac{6 - 5x}{4 - x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{1}{x - 2} + \frac{6 - 5x}{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2 + 6 - 5x}{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+4}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+4=0 \wedge (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow (x=3+\sqrt{5} \vee x=3-\sqrt{5}) \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5} \vee x=3-\sqrt{5}$$

$$\text{C.S.} = \{3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\}$$

c) $\frac{x-2}{2x^2-x-1} = \frac{x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{1}{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(2x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(2x+1)(x+1)} + \frac{1}{2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1) - (x+1)(x-1) + (x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \wedge (2x+1)(x-1)(x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-1) \wedge x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

$$\bullet 2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$$

d) $-\frac{3}{-x^2+x+2} - 1 = \frac{1}{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x-2)} - 1 - \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - (x+1)(x-2) - (x+1)}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x^2+x+2-x-1}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+4=0 \wedge (x+1)(x-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-2) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

$$\text{C.S.} = \{-2\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$$

7.

a) $\frac{x-3}{x^2-1} > 0$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
x-3	-	-	-	-	-	0	+
x^2-1	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x^2-1}$	-	n.d.	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-1, 1[\cup]3, +\infty[$$

b) $\frac{x^2-3x+2}{x+2} \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=1$$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	+	+	0	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2-3x+2}{x+2}$	-	n.d.	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup [1, 2]$$

c) $\frac{3-x^2}{x-2} \leq -x-3 \Leftrightarrow \frac{3-x^2}{x-2} + x + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x^2+x^2-2x+3x-6}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x-3	-	-	-	0	+
x-2	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x-2}$	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]2, 3]$$

d) $\frac{x^2+3x}{x-4} > x-3 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x}{x-4} - x + 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-x^2+4x+3x-12}{x-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x-12}{x-4} > 0$$

x	$-\infty$	$\frac{6}{5}$		4	$+\infty$
$10x-12$	-	-	-	0	+
$x-4$	-	0	+	+	+
$\frac{10x-12}{x-4}$	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{6}{5} \right[\cup] 4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{1}{x-x^2} &> -\frac{1}{3} - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{3} + \frac{1}{x-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3+x(x-1)+3x}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3+x^2-x+3x}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{3x(x-1)} > 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2+2x-3=0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3		0		1	$+\infty$
$(x+3)(x-1)$	+	0	-	-	-	0	+
$3x(x-1)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{(x+3)(x-1)}{3x(x-1)}$	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -3[\cup] 0, 1[\cup] 1, +\infty[$$

8.

$$\begin{aligned} \text{a) } h(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x(x-3)} - \frac{3}{5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20x+25-3(x-3)}{5x(x-3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{17x+34}{5x(x-3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x+34=0 \wedge 5x(x-3) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

O zero de h é -2.

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$17x+34$	-	0	+	+	+	+	+
$5x(x-3)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{17x+34}{5x(x-3)}$	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+

h é positiva em $]-2, 0[\cup] 3, +\infty[$.

h é negativa em $]-\infty, -2[\cup] 0, 3[$.

$$\begin{aligned} \text{b) } j(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x-2) \times x(x-5)}{-2(x-5) \times (2-x)(2+x)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3(x-2)x(x-5) = 0 \wedge -2(x-5) \times (2-x)(2+x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=2 \vee x=0 \vee x=5) \wedge x \neq 5 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

O zero de j é 0.

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2} = \\ &= \frac{3(x-2) \times x(x-5)}{-2(x-5) \times (2-x)(2+x)} = \\ &= \frac{3x(x-2)(x-5)}{2(x-5)(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0		2		5	$+\infty$
$(x-2)(x-5)$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$3x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$2(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$3x(x-2)(x-5)$	-	-	-	0	+	0	-	0	+
$2(x-5)(x-2)(x+2)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{3x(x-2)(x-5)}{2(x-5)(x-2)(x+2)}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	n.d.	+

j é positiva em $]-\infty, -2[\cup] 0, 2[\cup] 2, 5[\cup] 5, +\infty[$.

j é negativa em $]-2, 0[$.

$$\begin{aligned} \text{c) } p(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+3) = 0 \wedge (x-1)(x-3) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=3 \vee x=-3) \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3 \end{aligned}$$

Os zeros de p são -1 e -3.

Cálculo auxiliar

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

Assim:

$$\begin{aligned} x^3+x^2-9x-9 &= (x+1)(x^2-9) = \\ &= (x+1)(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3		-1		1		3	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x-3)(x+3)$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
x^3+x^2-9x-9	-	0	+	0	-	-	-	0	+
x^2-4x+3	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3}$	-	0	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

p é positiva em $]-3, -1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$.

p é negativa em $]-\infty, -3[\cup]-1, 1[$.

$$d) r(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{16x-x^5}{5-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x-x^5 = 0 \wedge 5-x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(16-x^4) = 0 \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x(4-x^2)(4+x^2) = 0 \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee 4-x^2=0 \vee \underbrace{4+x^2=0}) \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

Eq. impossível em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=2 \vee x=-2) \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-2$$

Os zeros de r são 0, 2 e -2.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		-2		0		2		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x(4+x^2)$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$4-x^2$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$16x-x^5$	+	+	+	0	-	0	+	0	-	-	-
$5-x^2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{16x-x^5}{5-x^2}$	-	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	n.d.	+

r é positiva em $]-\sqrt{5}, -2[\cup]0, 2[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

r é negativa em $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-2, 0[\cup]2, \sqrt{5}[$.

Unidade 2 - Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Páginas 16 a 41

9.

a) $[-1, 5]$

b) $[0, 4] \cup \left[\sqrt{19}, \frac{9}{2}\right]$

c) $[-2, 0] \cup \{\sqrt{2}, \pi\}$

10.

a) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \rightarrow 0$.

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{(x_n-1)^2} \right) = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n-1)^2} = \\ &= \frac{4}{1} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-1)^2} = 4$.

b) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \rightarrow 1$.

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{(x_n-1)^2} \right) = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n-1)^2} = \\ &= \frac{4}{0^+} = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} = +\infty$.

11. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+5) = 3$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

12.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 7 = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$

c) Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 7$, então $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 7$.

13.

a) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 4-x \geq 0\} =]-\infty, 4]$

b) Seja f a função real de variável real definida por $h(x) = \sqrt{4-x}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_h =]-\infty, 4]$ tal que $x_n \rightarrow 4$.

Então:

$$\begin{aligned}\lim h(x_n) &= \lim \sqrt{4 - x_n} = \\ &= \sqrt{\lim (4 - x_n)} = \\ &= \sqrt{4 - \lim x_n} = \\ &= \sqrt{4 - 4} = \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4 - x} = 0$.

- 14.** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ tal que $x_n \rightarrow +\infty$.

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \frac{4}{x_n^2 - 1} = \\ &= \frac{\lim 4}{\lim (x_n^2 - 1)} = \\ &= \frac{4}{\lim x_n^2 - \lim 1} = \\ &= \frac{4}{(\lim x_n)^2 - 1} = \\ &= \frac{4}{+\infty - 1} = \\ &= \frac{4}{+\infty} = \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

15.

- a)** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \rightarrow 2$.

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left(2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{2 - 1} = \\ &= 2 - 3 = \\ &= -1\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 2} \left(2 - \frac{3}{x - 1} \right) = -1$.

- b)** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \rightarrow +\infty$.

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left(2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{+\infty - 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{+\infty} = \\ &= 2 - 0 = \\ &= 2\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x - 1} \right) = 2$.

- c)** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \rightarrow 1^+$.

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left(2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{1^+ - 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{0^+} = \\ &= 2 - (+\infty) = \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 - \frac{3}{x - 1} \right) = -\infty$.

16.

- a)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim \left(-1 - \frac{1}{n^2} \right) = -1 - 0^+ = -1^-$

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$

A opção correta é a (C).

b) Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = +\infty$, logo $\lim v_n = 1^+$.

Ora:

$$\lim n^2 = +\infty$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1^+$$

$$\lim (-n^2) = -\infty$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$$

A opção correta é a (B).

17.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x-4}{x+1} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x-4}{x+1} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

b) Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

18.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 \times 3 = -6$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^2 = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)} = \sqrt{0} = 0$$

19.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2+1} = \frac{-3}{(+\infty)^2+1} = \frac{-3}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)^3 - \frac{2}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

20.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + x^2 + 5x - 2) &= \\ &= 4 \times (-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) - 2 = \\ &= -4 + 1 - 5 - 2 = \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3) = (-\infty)^2 - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3}{-2} = \frac{(-\infty)^3 + 3}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7-x} = \frac{0}{7-0} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 3}{x^4} = \frac{\frac{1}{+\infty} + 3}{(+\infty)^4} = \frac{0 + 3}{+\infty} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{3 - \sqrt{9-x}} = \frac{2 \times 5}{3 - \sqrt{9-5}} = \frac{10}{3-2} = 10$$

21. $-1 \leq \sin(4x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 10} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2 + 2x - 10} = 0.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4) = 5$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -1} g(x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -2.$$

$$23. \text{ Seja } y = \frac{\pi}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \text{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \text{tg } y = +\infty.$$

24.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{4x-12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-\frac{5}{2}x+1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2}$$

Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$.

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \times \frac{1}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - x - 1) = -3$$

25.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

26.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x) = -8 + 2 = -6$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^4 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4} \right) \right] = +\infty \times (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(x^2 - 1)) =$$

$$= -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^4 - 3x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

27.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x-9}{4-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{9}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x + 1}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 1} =$$

$$= \frac{-\infty + 0 + 0}{0 - 1} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

28.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x^2 + 1}}{\frac{x^2}{2x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 + 4x}{x^4 + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3x+1} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x^2 + 1} \times (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

$$\text{29. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3}) =$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

30.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} - \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) \right] =$$

$$= +\infty(\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}}{3x+2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} - \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}}{3x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x+2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{+\infty + 0} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2-0}{1} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} \right) = - \frac{2-0}{1} = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2-0}{1+1} = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9} \times \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x^2-9) \sqrt{x-3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3) \sqrt{x-3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3) \sqrt{x-3}} = \frac{1}{6 \times 0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5) \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1) \sqrt{x^2-1}}{(x-1)(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \frac{5 \times 0}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+2}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+3x)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{3x+2-x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{2} = \\
&= \frac{3 \times (\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-2x)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x+\sqrt{x})}{x-1} = \\
&= \frac{-2 \times 0}{-1} = 0
\end{aligned}$$

31.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}$$

Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{2-x} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2-x} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2-x}$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+|x|}{x}$$

Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+|x|}{x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4+|x|}{x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4+|x|}{x}$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+|x|}{x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-10x}{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x-10)}{x} + \frac{|x|}{|x|} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-10+1) = 0-9 = -9$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-3}{9-x^2} = \frac{0-3}{9-0} = -\frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x|-3}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3+x} = -\frac{1}{6}$$

32.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|5x-2x^2|}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x+2x^2}{5x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-5+2x)x}{\left(5+\frac{3}{x}\right)x} =$$

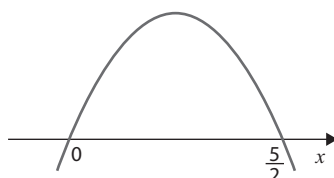
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5+2x}{5+\frac{3}{x}} = \frac{-5+\infty}{5+0} = +\infty$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet |5x-2x^2| = \begin{cases} 5x-2x^2 & \text{se } 5x-2x^2 \geq 0 \\ -5x+2x^2 & \text{se } 5x-2x^2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x-2x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ -5x+2x^2 & \text{se } x < 0 \vee x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\bullet 5x-2x^2=0 \Leftrightarrow x(5-2x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{2}$$



$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{2x^2-5x+2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{(2x-1)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{|2x-1| \sqrt{\frac{x-2}{2x-1}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{2x-1}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x-2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0}{-\frac{3}{2}}} = 0$$

33.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-64}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-64}{x^2-8x+16} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{64}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x+16}{x-4} = \frac{48}{0^-} = -\infty$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-64
4		4	16	64
	1	4	16	0

Logo, $x^3-64 = (x-4)(x^2+4x+16)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Unidade 3 - Continuidade de funções

Páginas 42 a 47

34.

a) $a \notin D_f$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, logo a função f tem limite quando $x \rightarrow a$.

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = g(a)$, logo a função g tem limite quando $x \rightarrow a$.

$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \neq h(a)$, logo a função h não tem limite quando $x \rightarrow a$.

$\lim_{x \rightarrow a^-} i(x) = b \neq c = \lim_{x \rightarrow a^+} i(x)$, logo a função i não tem limite quando $x \rightarrow a$.

$\lim_{x \rightarrow a} j(x) = b = j(a)$, logo a função j tem limite quando $x \rightarrow a$.

$\lim_{x \rightarrow a^-} k(x) = +\infty \neq b = \lim_{x \rightarrow a^+} k(x)$, logo a função k não tem limite quando $x \rightarrow a$.

b) $a \notin D_f$, logo não faz sentido falar de continuidade de f em a .

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = g(a)$, logo a função g é contínua em a .

A função h não tem limite quando $x \rightarrow a$, logo não é contínua em a .

A função i não tem limite quando $x \rightarrow a$, logo não é contínua em a .

$\lim_{x \rightarrow a} j(x) = b = j(a)$, logo a função j é contínua em a .

A função k não tem limite quando $x \rightarrow a$, logo não é contínua em a .

35. Para que f seja contínua em $x = 1$ terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$f(1) = 5k$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x-1) = -2\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } 5k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{5}.$$

36.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4-x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 1$, então f é contínua em $x = 3$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$, então g não tem limite quando $x \rightarrow -1$, logo g não é contínua em $x = -1$.

37.

$$\begin{aligned}\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-5) = -4\end{aligned}$$

$$f(1) = -4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -4$, então f é contínua em $x = 1$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, logo g não é contínua em $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x+5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x+5}} \times \frac{3 + \sqrt{2x+5}}{3 + \sqrt{2x+5}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{9 - 2x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{4 - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{-2(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{-2} = -6\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Logo, $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} |x-3| = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$, então não existe

$\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$, logo h não é contínua em $x = 2$.

38.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então não existe

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, logo f não é contínua em $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$g(0) = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$, então g não é contínua em $x = 0$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times x \right) = 1$$

$$(f \times g)(0) = -1 \times (-1) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = (f \times g)(0) = 1$, então $f \times g$ é contínua em $x = 0$.

39. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ é uma função racional contínua em $\mathbb{R}$.

40.

a) No intervalo $]1, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

No intervalo $]-\infty, 1[$ a função é contínua, por se tratar de uma função afim.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x - 3) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 2) = -2 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$, então f é contínua em $x = 1$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) No intervalo $]-\infty, 0[$ a função é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial e outra que é uma função afim, que não se anula no intervalo considerado.

No intervalo $]0, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas, ambas polinomiais, cujo denominador não se anula no intervalo considerado.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x^2 + 3x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2 + 3x + 1} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, então não existe

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, logo g não é contínua em $x = 0$.

Logo, g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

41. Nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas: uma que é uma função trigonométrica e outra que é a composta de uma função trigonométrica com uma função racional.

$$f(0) = 0$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 0$ e que $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ então } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \sin \frac{1}{x} \right) = f(0) = 0$, então f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

42. No intervalo $]-\infty, 2[$ a função h é contínua, por se tratar de uma função quadrática.

No intervalo $]5, +\infty[$ a função h é contínua, por se tratar de uma função constante.

Uma extensão de h a $\mathbb{R}$ que seja contínua pode ser, por exemplo, da forma:

$$h_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b & \text{se } 2 < x < 5 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 2} h_1(x) = h_1(2) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 5} h_1(x) = h_1(5) = 10$.

Logo, os pontos $A(2, -1)$ e $B(5, 10)$ têm de pertencer ao gráfico de $y = mx + b$.

$$m = \frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = \frac{10 + 1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{11}{3}x + b.$$

Como A pertence à reta:

$$-1 = \frac{11}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{25}{3}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{11}{3}x - \frac{25}{3}.$$

$$\text{Assim, } h_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{11}{3}x - \frac{25}{3} & \text{se } 2 < x < 5 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

43. No intervalo $]-\infty, 0[$ a função é contínua, por se tratar de uma função constante.

No intervalo $]0, 4[$ a função é contínua, por se tratar do quociente entre funções contínuas: uma é a

diferença entre a função raiz quadrada e uma função constante, a outra é uma função afim, que não se anula no intervalo considerado.

No intervalo $]4, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar de uma função constante.

Para que f seja contínua em $x = 0$ terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{2}$$

Assim, $a = \frac{1}{2}$.

Para que f seja contínua em $x = 4$ terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

$$f(4) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Assim, $b = \frac{1}{4}$.

Unidade 4 - Assíntotas ao gráfico de uma função

Páginas 48 a 62

44. Uma vez que a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f , que f é positiva em todo o seu domínio e que $D_f =]-\infty, 2[$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

A opção correta é a (C).

45.

- a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

A reta de equação $x = 3$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

- b) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

- c) $D_i = \mathbb{R}$

A função i é contínua em $\mathbb{R}$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais). Logo, não há assíntotas verticais ao gráfico de i .

46. Como a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0.$$

A opção correta é a (B).

47. Como a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$.

A opção correta é a (D).

48.

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = 2$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

A reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

Assíntotas verticais

A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Assíntotas verticais

A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{4x+3}{2x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4+0}{2-0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4+0}{2-0} = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h .

49. $D_j = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Assíntotas verticais

A função j é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Só a reta de equação $x = -4$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de j .

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|2x-3|}{x+4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -4$ é uma assíntota vertical ao gráfico de j .

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x-3|}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de j .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-3|}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x+4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = -2$$

A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de j .

50. Uma vez que $D_g = \mathbb{R}^+$ e que a reta de equação

$y = 2x + 4$ é uma assíntota ao gráfico de g , tem-se

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 4$.

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 4 = 8.$$

A opção correta é a (C).

51.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = -2$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x+6}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x^3+4x^2+4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

b) $D_g = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função racional.

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x}{x^3+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3+x}{x^2+1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x-2x^3-2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de g .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Assíntotas verticais

A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, por se tratar de uma função racional.

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+4x+3}{x^3-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

d) $D_j = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Assíntotas verticais

A função j é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = -3$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de j .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2+3}{x+3} = \frac{21}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de j .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [j(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{x + 3} - 2x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 6x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x + 3}{x + 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-6}{1} = -6
 \end{aligned}$$

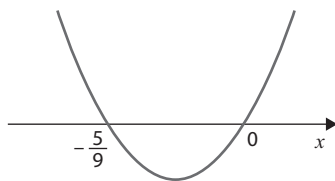
A reta de equação $y = 2x - 6$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de j .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

$$\begin{aligned}
 e) D_p &= \{x \in \mathbb{R} : 9x^2 + 5x \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} = \\
 &= \left(\left[-\infty, -\frac{5}{9} \right] \cup [0, +\infty[\right) \setminus \{-1\}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$9x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(9x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{9}$$



Assíntotas verticais

A função p é contínua em D_p , por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Só a reta de equação $x = -1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de p .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} p(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \frac{2}{0^-} = -\infty
 \end{aligned}$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de p .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} \right)}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \frac{3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} \right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{3}{1} = 3
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de p .

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} \right)}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \frac{-3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} \right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{-3}{1} = -3
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de p .

$$f) D_r = \mathbb{R}$$

A função r é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da composta da função raiz quadrada com uma função polinomial.

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [r(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de r .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [r(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de r .

g) $D_s = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Assíntotas verticais

A função s é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, por se tratar do quociente de funções contínuas.

Só a reta de equação $x = 5$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de s .

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 3}{|5 - x|} = \frac{22}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 5$ é uma assíntota vertical ao gráfico de s .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x|5 - x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x(-5 + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (s(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{|5 - x|} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{-5 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3 + 5x - x^2}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = \frac{5}{1} = 5 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de s .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x|5 - x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x(5 - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{-x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{-1 + \frac{5}{x}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (s(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{|5 - x|} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{5 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3 + 5x - x^2}{5 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3}{5 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{-1 + \frac{5}{x}} = \frac{5}{-1} = -5 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x - 5$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de s .

52. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$, então a reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

A função g é contínua no seu domínio, que é $]-\infty, -1[$, logo não há outras assíntotas ao gráfico de g .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) - 2x}{4x} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{4x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 4 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx + 1) &= 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = 2, m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 4x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de g .

53. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ e que a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , vem que $c = 1$.

A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , logo $a = -2$.

Tem-se então que $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$.

Como o ponto $A(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f , vem que:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{b}{-1-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - \frac{b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

Assim, $a = -2$, $b = -4$ e $c = 1$

Aprende Fazendo

Páginas 68 a 85

1. A função f é ímpar, uma vez que o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$, logo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Como se pode observar no gráfico de f , a função f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

Por observação do gráfico de f , $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, logo é falso que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

A opção correta é a (D).

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ logo}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

A opção correta é a (D).

3. A afirmação (A) é falsa. Para a função f ser contínua em $x = a$, sendo $a \in D_f$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

A afirmação (B) é falsa. Se $a \notin D_f$, a função f pode ter limite no ponto de abscissa a e não é contínua nesse ponto.

A afirmação (C) é falsa. Se $a \notin D_f$, mas

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \text{ então existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

A afirmação (D) é verdadeira. Se f é contínua em $x = a$, então $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

A opção correta é a (D).

$$4. D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & x+1 \\ -2x-2 & 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

A opção correta é a (D).

5. Em todas as opções encontram-se representadas funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, tais que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Apenas na função cuja representação gráfica é a da opção (C) se tem que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$, ou seja, que a reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

A opção correta é a (C).

6. Se $g(x) = x$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^3 + x} \times x) = 0$$

Se $g(x) = \frac{1}{x^2}$, então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x(x^2 + 1)}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty \end{aligned}$$

Se $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Se $g(x) = \sqrt{x}$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^3 + x} \times \sqrt{x}) = 0$$

A opção correta é a (C).

$$7. \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-5}{(5-x)^4} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-1}{(5-x)^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A opção correta é a (B).

8.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

A opção correta é a (B).

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{h(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A opção correta é a (D).

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{g}{h} \right)(x) = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{g}{h} \right)(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

A opção correta é a (B).

9. O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $(3, 0)$. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$$

A opção correta é a (B).

$$10. \lim u_n = \lim (-n^2 - n) = -\infty$$

$$\text{Logo, } \lim h(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2.$$

$$\lim v_n = \lim \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) = -1^-$$

$$\text{Logo, } \lim h(v_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty.$$

A opção correta é a (C).

11. Para que a função f tenha limite no ponto de abscissa 3 terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{kx}{3} - \frac{k}{2} \right) = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{3x-x}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{3x-x}}{x-3} \times \frac{\sqrt{3x+x}}{\sqrt{3x+x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-x^2}{(x-3)(\sqrt{3x+x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x(x-3)}{(x-3)(\sqrt{3x+x})} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x}{\sqrt{3x+x}} =$$

$$= \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } \frac{k}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -1.$$

A opção correta é a (B).

$$12. \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1+x-2}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1+x}{x^2-4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

A opção correta é a (A).

$$13. \lim f(x_n) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty. \text{ Logo, } \lim x_n = 1^-.$$

$$\text{Se } x_n = 1 + \frac{1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 1^+.$$

$$\text{Se } x_n = \frac{2n-1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 2^-.$$

$$\text{Se } x_n = \frac{n-1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 1^-.$$

$$\text{Se } x_n = 2 + \frac{1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 2^+.$$

A opção correta é a (C).

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1+x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-1+x} =$$

$$= \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2+1-3x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} \times \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x}{x(1-x)\sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

A opção correta é a (B).

15. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (B) é verdadeira. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (D) é falsa. Contraexemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

A opção correta é a (B).

16. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : a + bx \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , logo $\frac{2}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -2$.

Uma vez que a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , vem que:

$$-\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

A opção correta é a (A).

17. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = -a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{(x - a)(x + a)}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -a^-} (x - a) = -2a$$

Quando $x \rightarrow -a^+$, os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

A reta de equação $x = -a$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = -\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas horizontais.

A opção correta é a (D).

18. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -4$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$, então as retas de equações $y = -4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais ao gráfico de g . Logo, o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas, já que tem duas assíntotas horizontais.

Não há dados suficientes para concluir que o gráfico de g não tem assíntotas verticais; o gráfico de g pode ter assíntotas verticais.

A opção correta é a (D).

19. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A afirmação (B) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

A afirmação (D) é verdadeira. Por exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A opção correta é a (D).

20. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - ax^2}{ax + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - a}{\frac{a}{x} + 2} = -\frac{a}{2}$

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

Para que a assíntota oblíqua ao gráfico de f seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$m = 1 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = -2$$

A opção correta é a (B).

21. O gráfico de f é uma reta a que pertencem os pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, -2)$.

Logo, $f(x) = mx - 2$.

$$m = \frac{0 + 2}{2 - 0} = 1$$

Assim, $f(x) = x - 2$.

a) $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{f(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$, pelo que a função g é negativa no intervalo $]-\infty, 3[$ e é positiva no intervalo $]3, +\infty[$.

$$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ já que } 2 - 3 = -1.$$

A opção correta é a (C).

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x = 3$

Logo, a função g tem um único zero.

A opção correta é a (D).

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)}{x - 2} = -1$, logo o gráfico da função g não tem assíntotas verticais.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty$ e

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) = -\infty$, o gráfico da função g não tem assíntotas horizontais.

A opção correta é a (D).

22.

a) $\lim f(u_n) = +\infty$, logo $\lim u_n = 1^-$.

Ora, $u_n = \frac{4n+a}{4n} = 1 + \frac{a}{4n}$. Assim, para que

$\lim u_n = 1^-$ tem que se ter $a < 0$.

A opção correta é a (A).

b) $1 \notin D_f$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x)} = 0.$$

A opção correta é a (B).

c) O gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Logo, se as assíntotas ao gráfico de f são as retas de equações $x = 1$ e $y = -2$, então as assíntotas ao gráfico de f^{-1} são as retas de equações $x = -2$ e $y = 1$.

A opção correta é a (C).

23.

a) A assíntota oblíqua ao gráfico de f contém os pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, -3)$, pelo que a sua equação é $y = -x - 3$.

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 3) = 0.$$

A opção correta é a (C).

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{f(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} - 1 = \frac{1}{-1} - 1 = -2$$

A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

A opção correta é a (D).

24. O gráfico da função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $(1, -3)$.

Assim, como o gráfico da função f tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$, então o gráfico da função g tem uma assíntota vertical de equação $x = 1$. Por outro lado, é possível obter uma função f nas condições do enunciado e cujo contradomínio seja $]-1, +\infty[$, pelo que também é possível que a função g tenha contradomínio $]-4, +\infty[$.

O gráfico da função h é a imagem do gráfico da função f por uma reflexão de eixo Oy .

Assim, como o gráfico da função f tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$, então o gráfico da função h tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$. Por outro lado, o contradomínio da função h é igual ao contradomínio da função f .

A opção correta é a (D).

25. Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, logo a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, logo a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $(-2, 1)$ seguida da reflexão em relação ao eixo Ox .

Assim, as retas de equações $x = -2$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico de g .

A opção correta é a (C).

26. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$, então a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f . Uma vez que $g(x) = f(|x|)$, então as retas de equações $y = 2x - 1$ e $y = -2x - 1$ são assíntotas ao gráfico de g .

O gráfico de f admite uma única assíntota vertical. Se essa assíntota se situar à esquerda do eixo Oy , então o gráfico de g não admite assíntotas verticais. Se essa assíntota se situar à direita do eixo Oy , então o gráfico de g admite duas assíntotas verticais, simétricas em relação a Oy . Se a assíntota vertical ao gráfico de f for a reta de equação $x = 0$, então o gráfico de g admite também a reta de equação $x = 0$ como assíntota vertical.

Assim, o gráfico da função g tem no mínimo duas assíntotas.

A opção correta é a (B).

27.

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$D'_f =]-\infty, 1] \cup]2, 5]$$

$$\text{b) i) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

$$\text{c) } f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Como $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então não existe limite no ponto de abscissa 1.

$$4 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 5$$

Como $4 \notin D_f$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, então existe limite no ponto de abscissa 4.

d) Por exemplo, $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

28.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

29.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - x^3) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x) = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x).$$

b) Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1) = 0$, então h é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1.

c) Como não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$, então h é descontínua em $x = 1$.

d) Por exemplo, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right] = -\infty \times (-1) = +\infty$

30.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \wedge x^2 - x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \wedge x(x - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Os zeros de f são $\frac{1}{2}$ e 2.

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - x$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-	0	+

f é positiva em $]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{2}, 1[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $\left] 0, \frac{1}{2} \right[\cup]1, 2[$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{2x^2 + x - 3} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 2x^2 + x - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

O zero de g é -1.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	-	-	0	+	0	-
$2x^2 + x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{1 - x^2}{2x^2 + x - 3}$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-

g é positiva em $\left] -\frac{3}{2}, -1 \right[$ e é negativa em $\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{2x^2-x} + \frac{2x+17}{4x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{x(2x-1)} + \frac{2x+17}{2(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2x-1) - 2(x+4) + x(2x+17)}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x - 5 - 2x - 8 + 2x^2 + 17x}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 25x - 13}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 25x - 13 = 0 \wedge 2x(2x-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 104}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-25 \pm 27}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \vee x = -13\right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -13$$

O zero de h é -13 .

$$h(x) = \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{2x^2-x} + \frac{2x+17}{4x-2} =$$

$$= \frac{2x^2+25x-13}{2x(2x-1)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$

x	$-\infty$	-13		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2 + 25x - 13$	+	0	-	-	-	0	+
$2x(2x-1)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{2x^2+25x-13}{2x(2x-1)}$	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

h é positiva em $]-\infty, -13[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ e é negativa em $]-13, 0[$.

d) $i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-x^2}{2-2x} \times \frac{x^2-1}{x^3-9x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x(3+x)(x-1)(x+1)}{2(1-x)x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2(x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \wedge 2(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \wedge x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

O zero de i é -1 .

$$i(x) = \frac{-3x-x^2}{2-2x} \times \frac{x^2-1}{x^3-9x} = \frac{x+1}{2(x-3)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1, 3\}$$

x	$-\infty$	-3		-1		0		1		3	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$2(x-3)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{2(x-3)}$	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-	n.d.	-	n.d.	+

i é positiva em $]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 3[$.

e) $j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x^2-12} : \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)^2}{3(x^2-4)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(x+2)} = 0, \text{ que é uma equação impossível.}$$

A função j não tem zeros.

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Assim, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

$$j(x) = \frac{x-1}{3x^2-12} : \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{3(x+2)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
1	+	+	+	+	+	+	+
$3(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{1}{3(x+2)}$	-	n.d.	+	n.d.	+	n.d.	+

j é positiva em $]-2, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[$.

f) $k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

O zero de k é 0 .

Cálculo auxiliar

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Assim, $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$.

$$k(x) = \frac{x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
x^2+1	+	+	+	+	+
$\frac{x}{x^2+1}$	-	0	+	n.d.	+

k é positiva em $]0, 2[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, 0[$.

31.

a) $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1^+$

$$\lim g(a_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

$$\lim b_n = \lim \frac{n-1}{n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$$

$$\lim g(b_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4$$

b) Como $\lim g(a_n) = 2$ e $\lim g(b_n) = 4$, então não é verdade que para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_g , convergente para 1, $g(x_n)$ tende para o mesmo limite. Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

c) Por exemplo, $c_n = 2 + \frac{1}{n}$.

32. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 1$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_f = \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow 2$.

Então:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim (x_n^2 - 1) = \\ &= \lim x_n^2 - 1 = \\ &= (\lim x_n)^2 - 1 = \\ &= 2^2 - 1 = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$.

33.

$$\text{a)} f(u_n) = f\left(-1 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 - \left(-1 + \frac{1}{n^2}\right) = 3 - \frac{1}{n^2}$$

$$f(v_n) = f\left(-1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{-1 - \frac{1}{n}}{3} = \frac{3 - 1 - \frac{1}{n}}{3} = \frac{2n - 1}{3n}$$

$$\lim f(u_n) = \lim \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$$

$$\lim f(v_n) = \lim \frac{2n - 1}{3n} = \lim \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3n}\right) = \frac{2}{3}$$

b) Como $\lim f(u_n) = 3$ e $\lim f(v_n) = \frac{2}{3}$, então não é verdade que para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f , convergente para -1 , $f(x_n)$ tende para o mesmo limite. Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

c) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 2 - x$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $] -1, +\infty[$ tal que $x_n \rightarrow 0$.

Então:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim (2 - x_n) = \\ &= 2 - \lim x_n = \\ &= 2 - 0 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

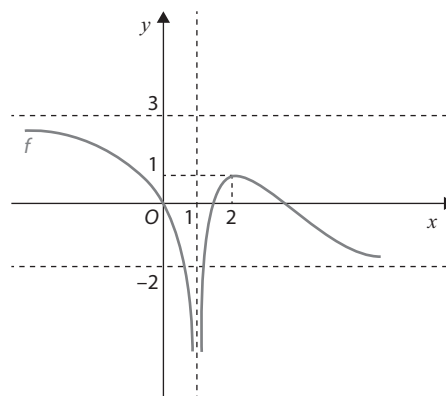
Conclui-se assim que $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

34. Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, então a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$, então as retas de equações $y = 3$ e $y = -2$ são assíntotas horizontais ao gráfico de f .

Um possível gráfico de f é:



35.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - x^3) = 8 - 2^3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x).$$

$$\begin{aligned} \text{b)} (f+g)(x) &= \begin{cases} 8 - x^3 + x^2 - 3 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x} - 1 + \frac{x+1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x} - 1 + 1 + \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 2^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x^3 + x^2) = 5 - 2^3 + 2^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1 = (f+g)(2)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (f+g)(x) = (f+g)(2)$,
então existe $\lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x)$.

36.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^2) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 5x + 1}{x - 4} \right)^3 = \left(\frac{1 - 5 + 1}{1 - 4} \right)^3 = 1^3 = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1) = +\infty + (+\infty) - 1 = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1) = \lim_{(\infty - \infty) \ x \rightarrow +\infty} \left(x^5 \left(-1 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^5} \right) \right) =$
 $= +\infty \times (-1) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x}) =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+x^2} - x) \times (\sqrt{x+x^2} + x)}{\sqrt{x+x^2} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 - x^2}{\sqrt{x+x^2} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right)} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1 \right)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1} = \frac{1}{2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x-4)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{16-x^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x}}{x} = 2$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(a + \frac{1}{x} \right)}}{x} = 2$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{a + \frac{1}{x}}}{x} = 2$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{a + \frac{1}{x}}}{x} = 2$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{a + \frac{1}{x}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$

$\Leftrightarrow a = 4$

38.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)^4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-2)^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)^4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x-2)^3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Como $2 \notin D$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)^4} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)^4}$, então
existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^4}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - \frac{x-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 - \frac{x-1}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$

Como $1 \notin D$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right)$,
então não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right)$.

39.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{\left(\frac{0}{0} \right) \ x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4}$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Assim, $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{3x-x^3} - \frac{5}{x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right)} - \frac{5}{x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^2} - 1} - \frac{5}{x} \right) = -1 - 0 = -1$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} &= \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	-6	12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	0

Assim:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= (x-2)(x^2 - 4x + 4) = \\ &= (x-2)(x-2)^2 = \\ &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2} &= \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Assim, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{x^3 - 1}{x - x^3} \right) &= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x - x^3} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-4)}}{x-4} &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} \right)}}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{1 - \frac{4}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)(2x+5)(3x-7)}{2x^3 + x^2 + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + 19x^2 - 32x - 105}{2x^3 + x^2 + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(6 + \frac{19}{x} - \frac{32}{x^2} - \frac{105}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{19}{x} - \frac{32}{x^2} - \frac{105}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{x+2} + 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt[4]{x^4 + 2}} &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt[4]{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^4} \right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^3 - x}{x^2 + 2} \right) &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - x^3 + x}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \right) &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(x-1)} = -2 \end{aligned}$$

40.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 1) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 3x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(4 - \frac{3}{x^2} \right) \right) = -\infty \times 4 = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{5x+3} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(5 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{2x + 1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3x + 5 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{5x^3 + x^2 - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}{x \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+5}}{\frac{3}{4-x}} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x}{3x+15} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{4}{x} - 1 \right)}{x \left(3 + \frac{15}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} - 1}{3 + \frac{15}{x}} = -\frac{1}{3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x+1} \times (x^2 - 7x + 1) \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{5}{x^2 - 4} - \frac{3}{x - 2} \right) \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5 - 3(x+2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x - 1}{x^2 - 4} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{1-x^2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{1+x} = -\frac{5}{2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+4)}{x-3} = \frac{10}{-2} = -5$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$\text{Assim, } 2x^2 + 6x - 8 = (x-1)(x+4).$$

$$\bullet x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$\text{Assim, } x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 7x + 6} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2}{(x-1)(x^2 + x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x^2 + x - 6} = 0$$

Cálculo auxiliar

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

$$\text{Assim, } x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6).$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x+3)}{x^2(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+3)}{x(x-4)}$$

Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(x+3)}{x(x-4)} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x+3)}{x(x-4)} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2}, \text{ então não}$$

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2}.$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^3} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\text{Seja } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 5x + 6 > 0\} = \\ &=]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\cap]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[= \\ &=]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[\end{aligned}$$

Como 2 não é ponto aderente a D_f , não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

41.

a) A função f é contínua em $]-\infty, 4[$, por se tratar de uma função racional.

b) Para que a função f seja contínua em $x = 4$, terá de se verificar $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

$$f(4) = \frac{k^2 - 4}{8 - 4} = \frac{k^2 - 4}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{k^2 - x}{8 - x} = \frac{k^2 - 4}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} \times \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{\sqrt{2x + 1} + 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2x + 1 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2(x - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{2} = 3 \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{k^2 - 4}{4} = 3 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow k = 4 \vee k = -4$$

Como se pede o valor de k positivo, então $k = 4$.

42.

a) A função f é contínua em todo o seu domínio, por se tratar de uma função racional.

b) Para que a função g seja contínua em $x = 1$, terá de se verificar $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$\text{Assim, } x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

$$\text{Assim, } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

43.

$$\mathbf{a)} } D_f = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Assíntotas verticais

A função f é contínua no seu domínio, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função racional). Assim, só as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} \right) = 2 - \frac{3}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} \right) = 8 + \frac{3}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5 + \frac{x}{9 - x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{9 - x^2} \right) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} - x \right) =$$

$$= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9 - x^2} = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{9}{x} - x} = 5 + 0 = 5$$

A reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$\mathbf{b)} } D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Assíntotas verticais

A função g é contínua no seu domínio, por se tratar de uma função racional. Assim, só as retas de

equações $x = -2$ e $x = 2$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{6}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	-5	2	8
2		2	-6	-8
	1	-3	-4	0

Assim, $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x-2)(x^2 - 3x - 4)$.

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 2$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} - x\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 6x + 8}{x^2 - 4} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-5 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = -5\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x - 5$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$c) D_h = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Assíntotas verticais

A função h é contínua no seu domínio, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função racional). Assim, só a reta de equação $x = 3$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x + 1 - \frac{3x}{x-3}\right) = 4 - \frac{9}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{3x}{x-3}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}\right) = 1 + 0 - 0 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{3x}{x-3} - x\right) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-3} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - \frac{3}{x}} = 1 - 3 = -2\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x - 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$d) D_i = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x + 2 \geq 0\} = [-2, 0[\cup]0, +\infty[$$

Assíntotas verticais

A função i é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de i .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de i .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{2x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+2}}{2x^2} \times \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{2x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+2}}{2x} \times \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x\sqrt{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de i .

e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: |x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assíntotas verticais

A função j é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de j .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2}{|x|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de j .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{|x|}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (j(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{|x|} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de j quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{|x|}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{2}{x^2} \right) = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (j(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{|x|} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{-x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de j quando $x \rightarrow -\infty$.

f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0 \wedge x \geq 0\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

Assíntotas verticais

A função k é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação $x = 1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de k .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de k .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x(x - 1)} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x-1)(\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x+1})} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de k .

44.

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3+x}{2-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3+x = 0 \wedge 2-x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

O zero de g é -3 .

b) $g(x) = \frac{3+x}{2-x} = -1 + \frac{5}{2-x} = -1 + \frac{-5}{x-2}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} x+3 & -x+2 \\ \hline -x+2 & -1 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Assim, $a = -5$, $b = -1$ e $c = 2$.

c) A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g e a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

d) $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

e) A função g não é ímpar, uma vez que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e, portanto, $-2 \in D_g$ mas $2 \notin D_g$.

f) O gráfico de h obtém-se do gráfico de g por uma translação de vetor $(-3, 1)$, logo as assíntotas ao gráfico de h são as retas de equações $x = 2 - 3 \Leftrightarrow x = -1$ e $y = -1 + 1 \Leftrightarrow y = 0$.

45.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

b) A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = -4$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

c) Uma vez que as retas de equações $x = 2$ e $y = -4$ são assíntotas ao gráfico de f , tem-se:

$$f(x) = -4 + \frac{k}{x-2}$$

O ponto de coordenadas $(3, 0)$ pertence ao gráfico de f , logo:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{k}{3-2} = 0 \Leftrightarrow -4 + k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

$$\text{Assim, } f(x) = -4 + \frac{4}{x-2}.$$

d) O gráfico de h obtém-se do gráfico de f através de uma translação de vetor $(0, 2)$ seguida de uma reflexão de eixo Ox dos pontos de ordenada negativa. Logo, $D'_h = [0, +\infty[$.

46.

a) Para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ terá de se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1+ax}{ax-1} = \frac{1+2a}{2a-1}$$

Assim:

$$\frac{1+2a}{2a-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{1+2a}{2a-1} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2a-6a+3}{2a-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4a+4}{2a-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4a+4 = 0 \wedge 2a-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

b) Para que a função f seja contínua, terá de se verificar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$.

$$\text{Assim, } h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \\ \frac{1+x}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+ax}{ax-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} + a \right)}{x \left(a - \frac{1}{x} \right)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + a}{a - \frac{1}{x}} = \frac{a}{a} = 1, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, qualquer elemento desta família de funções tem uma assíntota horizontal de equação $y = 1$.

47.

a) $f(0) = \frac{0}{2} = 0$, ou seja, o gráfico de f intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-x^2 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \end{aligned}$$

Os pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) < 1 &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-x^2-x-2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x+2} > 0 \end{aligned}$$

Como $x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x+2} > 0 &\Leftrightarrow x+2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução da inequação é $]-2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{x-x^2}{x+2} = \\ &= -x + 3 - \frac{6}{x+2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + x & x+2 \\ \hline x^2 + 2x & -x+3 \\ \hline 3x & \\ -3x-6 & \\ \hline -6 & \end{array}$$

Assim, $a = -1, b = 3, c = -6$ e $d = -2$.

d) As assíntotas ao gráfico de f são as retas de equações $x = -2$ e $y = -x + 3$.

48.

a)

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ é o declive da reta que passa nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, -1)$.

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \frac{0+1}{-2-0} = \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

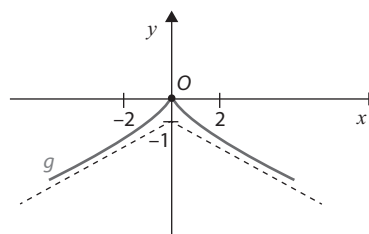
ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| = |-\infty| = +\infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right) = -1$, uma vez que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right)$ é a ordenada na origem da reta que passa no ponto de coordenadas $(0, -1)$.

b)

i)



ii) g é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0.$$

iii) As assíntotas ao gráfico de g são as retas de equações $y = -\frac{1}{2}x - 1$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right)$$

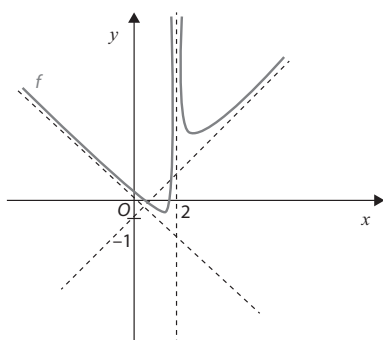
$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

49. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$, logo a reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, logo a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$, logo a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Assim, um possível gráfico de f é:



50.

$$\begin{aligned} \text{a) } V(t) &= 1 + \frac{1}{t+1} - \frac{6}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{(t+1)^2 + t + 1 - 6}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{t^2 + 2t + 1 + t - 5}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } V(30) = \frac{30^2 + 3 \times 30 - 4}{31^2} = \frac{986}{961} \approx 1,026$$

30 dias após o início da campanha, o volume de vendas diárias foi de 1026 u.m., aproximadamente.

$$\begin{aligned} \text{c) } V(t) \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4 - t^2 - 2t - 1}{(t+1)^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t - 5}{(t+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Como $(t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{t-5}{(t+1)^2} \leq 0 &\Leftrightarrow t-5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow t \leq 5 \end{aligned}$$

O volume de vendas não ultrapassou as 1000 unidades nos primeiros 5 dias.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 3t - 4}{t^2 + 2t + 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \left(1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}\right)}{t^2 \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Com o decorrer do tempo, o volume de vendas tende a estabilizar nas 1000 unidades.

51.

$$\text{a) } g(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x - 1}$$

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, por se tratar de uma função racional.

$$\begin{aligned} \text{ii) } m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{2x - 1} - \frac{1}{2}x\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x - 8 - 2x^2 + x}{2(2x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x - 8}{4x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 - \frac{8}{x}}{4 - \frac{2}{x}} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$\text{b) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - a \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}, \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

Logo, nenhum elemento da família tem domínio $\mathbb{R}$.

c) O gráfico de f não admite assíntotas verticais se o numerador e o denominador admitirem zeros comuns.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Se 4 for um zero do denominador:

$$2 \times 4 - a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Se -1 for um zero do denominador:

$$2 \times (-1) - a = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Assim, se $a = 8$ ou $a = -2$, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

52. Se o gráfico de f admite uma assíntota de equação

$$y = 2x + b, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^5 + 3x^4 + 8x}{3x^5 + 4x} = 2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(a + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^4} \right)}{x^5 \left(3 + \frac{4}{x^4} \right)} = 2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^4}}{3 + \frac{4}{x^4}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{3} = 2 \\ &\Leftrightarrow a = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{6x^5 + 3x^4 + 8x}{3x^4 + 4}.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^5 + 3x^4 + 8x}{3x^4 + 4} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 3x^4 + 8x - 6x^5 - 8x}{3x^4 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{3x^4 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{x^4 \left(3 + \frac{4}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3 + \frac{4}{x^4}} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

53.

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Cálculos auxiliares

	1	-1	0	2
-1		-1	2	-2
	1	-2	2	0

• $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$

• $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$, que é uma equação

impossível em $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 2} = 0$
 $\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \wedge x^3 - x^2 + 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0) \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

A afirmação é falsa, uma vez que a função g admite dois zeros.

c) $g(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 2} =$
 $= \frac{x^2(x^2 - 1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} =$
 $= \frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} =$
 $= \frac{x^2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} =$
 $= \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) Assíntotas verticais

Uma vez que $g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e que

$x^2 - 2x + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

54.

a) A primeira torneira enche o recipiente em 8 horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está $\frac{1}{8}$ cheio.

A segunda torneira enche o recipiente em 4 horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está $\frac{1}{4}$ cheio.

A terceira torneira enche o recipiente em t horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está $\frac{1}{t}$ cheio.

Se as três torneiras funcionarem simultaneamente, ao fim de 1 hora o recipiente estará

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{t} = \frac{3t+8}{8t} \text{ cheio.}$$

Assim:

$$\frac{1 \text{ hora}}{\frac{3t+8}{8t} \text{ recipiente}} = \frac{h \text{ horas}}{1 \text{ recipiente}}$$

$$\text{Logo, } h(t) = \frac{8t}{3t+8}, t > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } h(t) = 1,5 &\Leftrightarrow \frac{8t}{3t+8} - \frac{3}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{16t - 9t - 24}{6t+16} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7t-24}{6t+16} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7t-24 = 0 \wedge 6t+16 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{24}{7} \wedge t \neq -\frac{16}{6}$$

$$\text{Logo, } t = \frac{24}{7} \text{ h.}$$

55.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x-4|}{x^2-16} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x+4}{(x-4)(x+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x+4} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \times \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4-4)(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9-9)(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{3-|x+3|} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{3-x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{-x} = 1 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

56.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2-1}{y-1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y+1)}{y-1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} (y+1) = 2 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = \sqrt{x}, \text{ logo } x = y^2.$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3-8}{y-2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{y-2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} (y^2+2y+4) = 4+4+4 = 12 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = \sqrt[3]{x}, \text{ logo } x = y^3.$$

Se $x \rightarrow 8$, então $y \rightarrow 2$.

Cálculos auxiliares

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$57. \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{-\infty - 1}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = -1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x)) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x - 1)) = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = -2x - 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2.$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -2 - 0 = -2 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

Unidade 5 - Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Páginas 86 a 118

54.

$$a) \text{ t.m.v.}_{[2, 3]} = \frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{30 - 14}{1} = 16 \text{ m/s}$$

$$b) \text{ t.m.v.}_{[2, 2,5]} = \frac{d(2,5) - d(2)}{2,5 - 2} = \frac{21,25 - 14}{0,5} = 14,5 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ t.m.v.}_{[2, x]} &= \frac{d(x) - d(2)}{x - 2} = \frac{3x^2 + x - 14}{x - 2} = \\ &= \frac{3(x - 2)\left(x + \frac{7}{3}\right)}{x - 2} = \\ &= (3x + 7) \text{ m/s} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 14 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 13}{6} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$55. \text{ t.m.v.}_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9b - 9a}{b - a} = \frac{9(b - a)}{b - a} = 9, \text{ quaisquer que sejam os valores de } a \text{ e de } b.$$

56. (I) Proposição verdadeira

Seja f uma função crescente em $[a, b]$. Se $a < b$, então $f(a) < f(b)$, ou seja, $f(b) - f(a) > 0$.

$$\text{Logo, t.m.v.}_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

(II) Proposição falsa

Contraexemplo:

Seja $f(x) = x^2$. Tem-se que $\text{t.m.v.}_{[-1, 2]} > 0$, mas a função não é crescente em $[-1, 2]$.

57.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{(x - 2)(x + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \\ &= -\frac{1}{4} \times f'(-2) = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(-2 + h) - f(-2)} &= 3 \times \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}} = \\ &= 3 \times \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

58.

$$\begin{aligned} a) f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 6)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + 6) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x(x + 1)) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x-3} + 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1 + 3x - 9}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x - 3} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

59.

$$\text{a) } t.m.v._{[2, 20]} = \frac{C(20) - C(2)}{20 - 2} = \frac{5 - 9,86}{18} = -0,27$$

Cálculos auxiliares

- $C(20) = -0,005 \times 20^3 + 0,225 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15 = 5$
- $C(2) = -0,005 \times 2^3 + 0,225 \times 2^2 - 3 \times 2 + 15 = 9,86$

A cotação das ações diminui em média 0,27 euros por dia, no período indicado.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } C'(15) &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{C(t) - C(15)}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 15 - 3,75}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 11,25}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{(t - 15)(-0,005t^2 + 0,15t - 0,75)}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} (-0,005t^2 + 0,15t - 0,75) = 0,375
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	-0,005	0,225	-3	11,25
15		-0,075	2,25	-11,25
	-0,005	0,15	-0,75	0

Passados 15 dias, a cotação das ações estava a aumentar à taxa de 0,375 euros por dia.

60.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - x - 1}{(x - 3)4(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 3}{(x - 3)4(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{4(x + 1)} = -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

b) Como $f(3) = -\frac{1}{16}$, a equação pedida é da forma

$$y = -\frac{1}{16}x + b.$$

O ponto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{4}\right)$ pertence a esta reta tangente ao gráfico de f , logo:

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{16} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{16}$$

Assim, a equação pedida é $y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{16}$.

c) A equação pedida é da forma $y = 16x + b$.

O ponto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{4}\right)$ pertence a esta

reta, logo $\frac{1}{4} = 16 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{191}{4}$.

Assim, a equação pedida é $y = 16x - \frac{191}{4}$.

61. A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$, cujo declive é 1. Logo:

$$f(4) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 1$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned}
 \text{62. } f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Como o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é 0, então trata-se de uma reta horizontal.

63.

$$\text{a) } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 6}{x - 1}$$

Limites laterais

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 6}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 5 - 6}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x+1) = 3$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+3-6}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-6}{x-1} = 3$, então

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-6}{x-1} = 3, \text{ ou seja, } f'(1) = 3.$$

- b)** A função f é contínua no ponto de abscissa 1, uma vez que é diferenciável em 1, como se verificou na alínea anterior.

64. Continuidade

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

$$g(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$, então a função g é contínua em $x = 0$.

Diferenciabilidade

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x}, \text{ então } f \text{ não}$$

admite derivada em $x = 0$.

65.

$$\text{a) } h'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{20t-t^2-0}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(20-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (20-t) = 20$$

A velocidade inicial do projétil é 20 m/s.

$$\text{b) } h(t) = 0 \Leftrightarrow 20t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t(20-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 20-t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 20$$

O projétil atinge o solo 20 segundos após o lançamento.

$$h'(20) = \lim_{t \rightarrow 20} \frac{h(t)-h(20)}{t-20} = \lim_{t \rightarrow 20} \frac{20t-t^2-0}{t-20} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{t(20-t)}{t-20} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 20} (-t) = -20$$

No momento em que o projétil atinge o solo a velocidade é -20 m/s.

$$\text{c) } h'(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(t+x)-h(t)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20(t+x) - (t+x)^2 - (20t-t^2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20t+20x-t^2-2tx-x^2-20t+t^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x-2tx-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (20-2t-x) = 20-2t$$

66.

$$\text{a) } f'(x) = x' = 1$$

$$\text{b) } g'(x) = (x+\pi)' = x' + \pi' = 1+0 = 1$$

$$\text{c) } (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 1+1 = 2$$

$$\text{67. } g'(x) = (f(x)+1)' = f'(x) + 1' = f'(x)$$

Logo, a representação gráfica da função derivada da função g está na figura (II).

68.

$$\text{a) } (f \times g)'(5) = f'(5) \times g(5) + f(5) \times g'(5) =$$

$$= 1 \times (5+3\pi) + 5 \times 1 =$$

$$= 5+3\pi+5 =$$

$$= 10+3\pi$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet f'(x) = x' = 1$$

$$\bullet g'(x) = (x+3\pi)' = 1+0 = 1$$

$$\text{b) i) } (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) =$$

$$= 1 \times (x+3\pi) + x \times 1 =$$

$$= x+3\pi+x =$$

$$= 2x+3\pi$$

$$\text{ii) } \left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)} =$$

$$= \frac{1 \times x - (x + 3\pi) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x - x - 3\pi}{x^2} = -\frac{3\pi}{x^2}$$

69.

a) $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -2 + 1 = -1$

b) $(5f)'(2) = 5f'(2) = 5 \times (-2) = -10$

c) $(f \times g)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) =$
 $= -2 \times (-3) + 4 \times 1 =$
 $= 6 + 4 = 10$

d) $\left(\frac{1}{f}\right)'(2) = \frac{0 - f'(2)}{f^2(2)} = -\frac{-2}{4^2} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{g^2(2)} =$
 $= \frac{-2 \times (-3) - 4 \times 1}{(-3)^2} = \frac{2}{9}$

f) $\left(\frac{1}{f+g}\right)'(2) = \frac{0 - (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = -\frac{-1}{(4-3)^2} = 1$

g) $(g \times g)'(2) = g'(2) \times g(2) + g(2) \times g'(2) =$
 $= 1 \times (-3) + (-3) \times 1 = -6$

h) $\left(\frac{f}{f+g}\right)'(2) = \frac{f'(2)(f+g)(2) - f(2)(f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} =$
 $= \frac{-2 \times 1 - 4 \times (-1)}{(4-3)^2} =$
 $= \frac{-2+4}{1} = 2$

70. $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f que tem inclinação 60° .

Logo:

$$f'(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)' = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

71. $f'(x) = (x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$

$$f'(1) = 3 - 2 = 1$$

Assim, $1 = \operatorname{tg} \theta$, com $0^\circ < \theta < 180^\circ$, ou seja, $\theta = 45^\circ$.

Logo, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é 45° .

72.

a) $f'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5$

b) $g'(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2020\right)' = \frac{3}{2}x^2 - 1$

c) $h'(x) = (x^3 \sqrt{x})' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' =$
 $= 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{6x^2 \times x + x^3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{7x^3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{7x^3 \sqrt{x}}{2x} =$$

$$= \frac{7x^2 \sqrt{x}}{2}$$

d) $p'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{0 - 5 \times x'}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$

e) $q'(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\sqrt{x}\right)' =$
 $= -\frac{1}{x^2} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
 $= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $r'(x) = \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)' =$
 $= \frac{2 \times (x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} =$
 $= \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

73.

a) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 3 \times 16 - 5 = 43$

b) $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

Cálculo auxiliar

$$f'(x) = (3x^2 - 5)' = 6x$$

74.

a) $\alpha'(x) = \left(4x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 2x + 7\right)' = 12x^2 - \frac{6}{5}x - 2$

b) $b'(x) = \left(\pi x^{10} - \frac{1}{e}x^7 - 2x^3 + 9\right)' = 10\pi x^9 - \frac{7}{e}x^6 - 6x^2$

c) $c'(x) = ((2x^2 - 3)^4)' = 4(2x^2 - 3)^3(2x^2 - 3)' =$
 $= 4(2x^2 - 3)^3 \times 4x =$
 $= 16x(2x^2 - 3)^3$

d) $d'(x) = ((x^4 - 5x^2)^3(x^6 - 5x^5))' =$
 $= ((x^4 - 5x^2)^3)'(x^6 - 5x^5) + (x^4 - 5x^2)^3((x^6 - 5x^5))' =$
 $= 3(x^4 - 5x^2)^2(x^4 - 5x^2)'(x^6 - 5x^5) +$
 $+ (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4) =$
 $= 3(x^4 - 5x^2)^2(4x^3 - 10x)(x^6 - 5x^5) +$
 $+ (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4)$

e) $e'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)\right)' =$
 $= \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)'(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)' =$
 $= -x(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(-3x^2) =$

$$= -3x + x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 =$$

$$= \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 - 3x$$

$$\text{f)} f(x) = \left(\frac{2x-5}{3x+1} \right)' =$$

$$= \frac{2(3x+1) - (2x-5) \times 3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x+2-6x+15}{(3x+1)^2} = \frac{17}{(3x+1)^2}$$

$$\text{g)} g'(x) = \left(\left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^3 \right)' =$$

$$= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)' =$$

$$= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2(x^2-4) - (2x-3)2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2x^2-8-4x^2+6x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{3(2x-3)^2(-2x^2+6x-8)}{(x^2-4)^4}$$

$$\text{h)} h'(x) = (\sqrt{x^2+3})' = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}' =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} (x^2+3)' =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \times 2x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\text{i)} i'(x) = (\sqrt[3]{2x^4-1})' = (2x^4-1)^{\frac{1}{3}}' =$$

$$= \frac{1}{3} (2x^4-1)^{-\frac{2}{3}} (2x^4-1)' =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}} \times 8x^3 =$$

$$= \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}$$

$$\text{j)} j''(x) = \left(\sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}} \right)' = \left(\left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{2(3x+1) - (2x-1) \times 3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{6x+2-6x+3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{5}{2(3x+1)^2}$$

$$\text{k)} k'(x) = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x+2}} \right)' =$$

$$= \frac{-(x + \sqrt{x+2})'}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \left((x+2)^{\frac{1}{2}} \right)'}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{\frac{-2\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}(x + \sqrt{x+2})^2}$$

$$75. f'(x) = (3x^2)' = 6x$$

$$g'(x) = \left(\frac{4}{1+x^2} \right)' = \frac{-4 \times 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}$$

a) Primeiro processo

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = g'(3x^2) \times 6x =$$

$$= -\frac{8 \times 3x^2}{(1 + (3x^2)^2)^2} \times 6x$$

$$= -\frac{144x^3}{(9x^4 + 1)^2}$$

Segundo processo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2) = \frac{4}{1 + (3x^2)^2} = \frac{4}{1 + 9x^4}$$

$$(g \circ f)'(x) = \left(\frac{4}{1 + 9x^4} \right)' =$$

$$= -\frac{4(1 + 9x^4)'}{(1 + 9x^4)^2} =$$

$$= -\frac{4 \times 36x^3}{(9x^4 + 1)^2} =$$

$$= -\frac{144x^3}{(9x^4 + 1)^2}$$

b) Primeiro processo

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) =$$

$$= f' \left(\frac{4}{1+x^2} \right) \times \left(-\frac{8x}{(1+x^2)^2} \right) =$$

$$= 6 \times \frac{4}{1+x^2} \times \left(-\frac{8x}{(1+x^2)^2} \right) =$$

$$= -\frac{192x}{(x^2+1)^3}$$

Segundo processo

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{4}{1+x^2}\right) = \\
 &= 3 \times \left(\frac{4}{1+x^2}\right)^2 = \\
 &= \frac{48}{(x^2+1)^2} \\
 (f \circ g)'(x) &= \left(\frac{48}{(x^2+1)^2}\right)' = \\
 &= -\frac{48 \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} = \\
 &= -\frac{192x}{(x^2+1)^3}
 \end{aligned}$$

c) Primeiro processo

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)'(x) &= f'(f(x)) \times f'(x) = f'(3x^2) \times 6x = \\
 &= 6 \times 3x^2 \times 6x = \\
 &= 108x^3
 \end{aligned}$$

Segundo processo

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(3x^2) = 3 \times (3x^2)^2 = 3 \times 9x^4 = 27x^4 \\
 (f \circ f)'(x) &= (27x^4)' = 4 \times 27x^3 = 108x^3
 \end{aligned}$$

$$76. f'(x) = \left(\frac{x+1}{4x}\right)' = \frac{4x - (x+1) \times 4}{(4x)^2} = \frac{4x - 4x - 4}{16x^2} = \frac{-1}{4x^2}$$

$$h'(x) = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$$

$$a) (f \circ h)(2) = f(h(2)) = f(2^2 - 3 \times 2) = f(-2) = \frac{-2+1}{4 \times (-2)} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
 b) (f \circ h)'(2) &= f'(h(2)) \times h'(2) = f'(-2) \times (2 \times 2 - 3) = \\
 &= \frac{-1}{4 \times (-2)^2} \times 1 = \\
 &= -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) (f \circ h)'(x) &= f'(h(x)) \times h'(x) = f'(x^2 - 3x) \times (2x - 3) = \\
 &= \frac{-1}{4(x^2 - 3x)^2} \times (2x - 3) = \\
 &= \frac{3 - 2x}{4(x^2 - 3x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 77. f'(x) &= (\sqrt{x^2+5})' = \left((x^2+5)^{\frac{1}{2}}\right)' = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a) (f+g)'(-1) &= f'(-1) + g'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{6}} + 3 = \\
 &= \frac{-1 + 3\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{-\sqrt{6} + 18}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) (f \times g)'(-1) &= f'(-1) \times g(-1) + f(-1) \times g'(-1) = \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{6}} \times 2 + \sqrt{6} \times 3 = \\
 &= \frac{-2}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{6} = \\
 &= \frac{-2 + 18}{\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{16\sqrt{6}}{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

$$c) (f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \times g'(-1) = f'(2) \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

78.

$$a) f(x) = (4x^3)' = 12x^2$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 12 \times 2 = 24$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$ é da forma $y = 24x + b$.

O ponto de coordenadas $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$ pertence a esta reta, logo:

$$-8\sqrt{2} = 24 \times (-\sqrt{2}) + b \Leftrightarrow b = 16\sqrt{2}$$

Assim, a equação pedida é $y = 24x + 16\sqrt{2}$.

b) A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$, cujo declive é 1.

Como a reta r é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, então o seu declive é também 1.

Logo, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = x + b$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \Leftrightarrow 12x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{12} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

As abscissas dos pontos do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares são $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{18} \\
 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{18}
 \end{aligned}$$

O ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right)$ pertence

à reta r , logo $\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{6} + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Assim, $r: y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}$.

O ponto de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{18}\right)$ pertence à reta r , logo $-\frac{\sqrt{3}}{18} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{9}$.
Assim, $r: y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}$.

c) Para que as retas tangentes aos gráficos sejam perpendiculares, o produto dos seus declives terá de ser igual a -1 . Assim:

$$f'(x) \times g'(x) = -1 \Leftrightarrow 12x^2 \times \frac{-a}{x^2} = -1 \Leftrightarrow -12a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$$

79.

a) Como f é uma função contínua em $[0, 4]$ e diferenciável em $]0, 4[$, pelo Teorema de Lagrange existe $c \in]0, 4[$ tal que $f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7$.

$$f'(x) = (x^2 + 3x)' = 2x + 3$$

$$f'(x) = 7 \Leftrightarrow 2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo, $c = 2$.

b) $f'(c) = 7$, logo a equação pedida é do tipo $y = 7x + b$.
 $f(2) = 10$

O ponto de coordenadas $(2, 10)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f em c , logo:

$$10 = 7 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$$

A equação pedida é $y = 7x - 4$.

80.

a) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = (x - 3)^2$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1 - 4}{3} = -\frac{3}{4} < 0, \text{ mas } f \text{ não é decrescente em }]1, 4[.$$

b) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = x^3$$

$f'(0) = 0$, mas a função não tem extremo em $x = 0$.

c) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = |x|$$

A função f tem um mínimo relativo em $x = 0$, mas não existe $f'(0)$.

d) A afirmação é verdadeira, pelo Teorema da página 110.

81.

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 7)' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx. 12	$\searrow$	Mín. -20	$\nearrow$

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 3]$; 12 é um máximo relativo em -1 ; -20 é um mínimo relativo em 3 .

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g'(x) = \left(\frac{x+4}{x-1}\right)' = \frac{x-1-(x+4)}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{5}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$; não tem extremos.

c) $D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+1)^2 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de h'	-	0	+	0	-
Variação de h	$\searrow$	Mín. $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{2}$	$\searrow$

$$h(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{2}$$

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-1, 1]$; $-\frac{1}{2}$ é um mínimo relativo em -1 ; $\frac{1}{2}$ é um máximo relativo em 1 .

82.

$$a) f(x) = (4x^2 - 16x + 3)' = 8x - 16$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+
Variação de f	$\searrow$	Mín. -13	$\nearrow$

$$f(2) = 16 - 32 + 3 = -13$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$; -13 é um mínimo absoluto em 2.

$$b) h'(x) = \left(2x + \frac{4}{x}\right)' = 2 - \frac{4}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \wedge x \neq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de h'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação de h	$\nearrow$	Máx. $-4\sqrt{2}$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. $4\sqrt{2}$	$\nearrow$

$$h(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

$$h(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

h é estritamente crescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-\sqrt{2}, 0[$ e em $]0, \sqrt{2}]$; $-4\sqrt{2}$ é um máximo relativo em $-\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ é um mínimo relativo em $\sqrt{2}$.

$$c) p'(x) = (\sqrt{x^2 + 4})' = \left((x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 + 4} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de p'	-	0	+
Variação de p	$\searrow$	Mín. 2	$\nearrow$

$$p(0) = \sqrt{4} = 2$$

p é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$; 2 é o mínimo absoluto em 0.

$$d) r'(x) = \left(\frac{4}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$r'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de r'	+	0	-
Variação de r	$\nearrow$	Máx. 4	$\searrow$

$$r(0) = \frac{4}{1} = 4$$

r é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; 4 é o máximo absoluto em 0.

83.

$$a) t.v.m._{[0, 20]} = \frac{d(20) - d(0)}{20 - 0} = \frac{247 - 7}{20} = 12$$

Nos primeiros 20 minutos a velocidade média do balão foi 12 m/min.

$$b) d'(t) = (-0,02t^3 + t^2 + 7)' = -0,06t^2 + 2t$$

$$d'(5) = -0,06 \times 25 + 2 \times 5 = 8,5$$

A velocidade instantânea relativamente ao solo do balão aos 5 minutos era de 8,5 m/min.

$$c) d'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t^2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(-0,06t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,06t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3}$$

t	0		$\frac{100}{3}$		50
Sinal de d'	0	+	0	-	-
Variação de d	Mín. 7	$\nearrow$	Máx. 377	$\searrow$	Mín. 7

$$d\left(\frac{100}{3}\right) \approx 377$$

$$\frac{100}{3} \approx 33$$

O balão atinge a altura máxima de 377 metros aos 33 minutos.

$$84. f(q) = \frac{C(q)}{q}$$

$$f'(q) = \left(\frac{2q^2 - 15q + 3200}{q} \right)' = \frac{(4q - 15)q - (2q^2 - 15q + 3200)}{q^2} = \frac{4q^2 - 15q - 2q^2 + 15q - 3200}{q^2} = \frac{2q^2 - 3200}{q^2}$$

$$f'(q) = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2 - 3200}{q^2} = 0 \\ \Leftrightarrow 2q^2 - 3200 = 0 \wedge q^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow q^2 = 1600 \wedge q \neq 0 \\ \Leftrightarrow q = 40 \vee q = -40$$

q	0		40	+
Sinal de f'	n.d.	-	0	+
Variação de f	n.d.	↘	Mín. 145	↗

$$f(40) = \frac{C(40)}{40} = 145$$

O custo médio é mínimo para $q = 40$ unidades.

85.

a) A base da caixa é um quadrado de lado $6 - 2x$ e a altura da caixa é x . Logo:

$$V(x) = (6 - 2x)^2 x = (36 - 24x + 4x^2)x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \text{ com } x \in]0, 3[.$$

b) $V'(x) = (4x^3 - 24x^2 + 36x)' = 12x^2 - 48x + 36$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

x	0		1		3
Sinal de V'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de V	n.d.	↗	Máx. 16	↘	n.d.

$$V(1) = 4 - 24 + 36 = 16$$

O volume da caixa é máximo quando $x = 1$ e, nesse caso, o volume da caixa é 16 cm^3 .

86. $A(x) = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3$, com $x \in]0, 1[$.

$$A'(x) = (2x - 2x^3)' = 2 - 6x^2$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	↗	Máx. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	n.d.

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

O valor máximo da área é $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

87. $12 \text{ l} = 12 \text{ dm}^3$

$$V = \pi r^2 \times h, \text{ logo } \pi r^2 \times h = 12 \Leftrightarrow h = \frac{12}{\pi r^2}.$$

$$\text{Assim, } A(r) = 2\pi r \times \frac{12}{\pi r^2} + 2 \times \pi r^2 = \frac{24}{r} + 2\pi r^2, r > 0.$$

$$A'(r) = \left(\frac{24}{r} + 2\pi r^2\right)' = -\frac{24}{r^2} + 4\pi r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{24}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-24 + 4\pi r^3}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -24 + 4\pi r^3 = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{6}{\pi} \wedge r \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$		+
Sinal de A'	n.d.	-	0	+	
Variação de A	n.d.	↘	Mín.	↗	

A medida do raio da base deverá ser $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \text{ dm}$.

88. Seja $[ABCD]$ um retângulo nas condições do enunciado.

O triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo, uma vez que está inscrito numa semicircunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = 100 - \overline{AB}^2$$

$$\text{Logo, } \overline{CB} = \sqrt{100 - \overline{AB}^2}.$$

Seja $\overline{AB} = x$, a área do retângulo $[ABCD]$ é dada por $A(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, com $x \in]0, 10[$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= (x\sqrt{100 - x^2})' = \\ &= \sqrt{100 - x^2} + x \left((100 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \sqrt{100 - x^2} + x \times \frac{1}{2} (100 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \\ &= \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \wedge \sqrt{100 - x^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 50 \wedge x \in D_A \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \end{aligned}$$

x	0		$\sqrt{50}$		10
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

O retângulo de área máxima é o quadrado de lado $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Aprende Fazendo

Páginas 122 a 132

1. Os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(0, -2)$ pertencem à reta t .

Então:

$$m_t = \frac{0 + 2}{1 - 0} = 2 = f'(0)$$

A opção correta é a (C).

2. A afirmação (I) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = |x|$

f é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável em $x = 0$.

A afirmação (II) é verdadeira.

A opção correta é a (C).

- 3.

$$\text{a) } t.v.m._{[0, 3]} = \frac{S(3) - S(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 0}{3} = 6$$

A velocidade média, nos primeiros três segundos após o lançamento da bola, é 6 m/s.

A opção correta é a (B).

$$\text{b) } S'(t) = (-6t^2 + 24t)' = -12t + 24$$

$$S'(1) = -12 + 24 = 12$$

A velocidade da bola ao fim de um segundo é 12 m/s.

A opção correta é a (C).

$$\text{4. } f(x) = (kx^3 - 2kx^2)' = 3kx^2 - 4kx$$

O declive da reta de equação $y = 2x - 1$ é 2, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é $-\frac{1}{2}$. Logo:

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k - 4k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

A opção correta é a (C).

$$\text{5. } x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

O declive da reta de equação $y = x - 1$ é 1. Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto A é -1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(3x + 3 + \frac{2}{x} \right)' = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, então $x = 1$.

A opção correta é a (C).

6. Como o declive da reta de equação $y = -3x + 2$, tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -2, é -3, então $g'(-2) = -3$.

Se $x = -2$, então $y = 6 + 2 = 8$. Logo, as coordenadas do ponto de tangência são $(-2, 8)$, e, portanto, $g(-2) = 8$. Assim:

$$g'(-2) = -3 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2 + h) - g(-2)}{h} = -3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2 + h) - 8}{h} = -3$$

A opção correta é a (D).

$$\text{7. } f(x) = (ax^2 + (a - 1)x - 2)' = 2ax + a - 1$$

A abscissa do extremo relativo de f é um zero de f' , já que f é uma função quadrática. Assim:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

A opção correta é a (A).

8. Se a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 3 tem declive igual a 2, então $h'(3) = 2$. Como h é uma função par, então $h'(-3) = -2$. A opção correta é a (C).

9. $m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} = g'(1)$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = g'(1) \times 1 = -\sqrt{3}$$

A opção correta é a (A).

10. Como a reta de equação $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 , tem-se que $f'(-1) = 3$.
Se $f(x) = x^3 - x$, então $f'(x) = 3x^2 - 1$, e, portanto, $f'(-1) = 2$.
Se $f(x) = x + x^2$, então $f'(x) = 1 + 2x$, e, portanto, $f'(-1) = -1$.
Se $f(x) = x^3 + x$, então $f'(x) = 3x^2 + 1$, e, portanto, $f'(-1) = 4$.
Se $f(x) = x - x^2$, então $f'(x) = 1 - 2x$, e, portanto, $f'(-1) = 3$.
A opção correta é a (D).

11. Para que a função f seja diferenciável, é necessário que seja contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 - x) = a - 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + b) = 2 + b$$

Assim:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = a - 3$$

Por outro lado, tem que se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^3 - x - (a - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(ax^2 + ax + a - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + ax + a - 1) = 3a - 1 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	a	0	-1	$-(a - 1)$
1	a	a	a	$a - 1$
	a	a	$a - 1$	0

Assim, $ax^3 - x - (a - 1) = (x - 1)(ax^2 + ax + a - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + b - (a - 1)}{x - 1} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + a - 3 - a + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2 \end{aligned}$$

Logo, $3a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$ e, portanto, $b = -2$.

A opção correta é a (C).

12. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} < 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 0$, então podemos afirmar que $f'(2)$ não existe. A opção correta é a (D).

13. $g'(-2) > 0$ e $g'(1) < 0$, logo $g'(-2) \times g'(1) < 0$.

$$g'(-2) > 0 \text{ e } g'(3) > 0, \text{ logo } \frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0.$$

$$g'(1) < 0 \text{ e } g'(-2) > 0, \text{ logo } \frac{g'(1)}{g'(-2)} < 0.$$

$$g'(-3) > 0 \text{ e } g'(2) = 0, \text{ logo } g'(-3) \times g'(2) = 0.$$

A opção correta é a (B).

14. Na opção (A), tem-se $h(x) > 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) > 0, \forall x \in D_h$, logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h$.
Na opção (B), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) > 0, \forall x \in D_h$, logo $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in D_h$.
Na opção (C), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) < 0, \forall x \in D_h$, logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h$.
Na opção (D), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$ e $h'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$, logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[$, mas $h(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$ e $h'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[$, logo $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[$.
A opção correta é a (B).

15. Apesar de a função h' não ser contínua em $x = 1$, nada se pode concluir quanto à continuidade de h em $x = 1$.

Se $x < 0$, então $h'(x) < 0$, pelo que a função h é decrescente em $]-\infty, 0[$, logo $h(-2) > h(-1)$.

Se $x > 1$, então $h'(x) < 0$, pelo que a função h é decrescente em $]1, +\infty[$, logo $h(2) > h(3)$.

Como $h'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, 0[$, $h'(x) > 0$ se $x \in]0, 1[$ e $h'(0) = 0$, então 0 é um mínimo relativo de h .

A opção correta é a (C).

16. $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e f é uma função crescente em $\mathbb{R}$. No entanto, por observação do gráfico de f , conclui-se que o declive das retas tangentes a este gráfico aumenta até ao ponto de abscissa 0 e diminui daí em diante, sendo sempre positivo, o que não se encontra representado no gráfico de g . Logo, g não pode ser a função derivada da função f .

A função f não tem extremos relativos, uma vez que é estritamente crescente.

A função g tem um mínimo relativo igual a 1.

A função f pode ser a função derivada da função g , já que $f(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$ e g é decrescente neste intervalo; $f(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$ e g é crescente neste intervalo; $f(x) = 0$ e g tem um mínimo relativo no ponto de abscissa 0.

A opção correta é a (D).

17. A função f é crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]1, +\infty[$ e é decrescente em $]-2, 1[$. Logo, a função f' é positiva em $]-\infty, -2[$ e em $]1, +\infty[$ e é negativa em $]-2, 1[$.

Por observação do gráfico de f , conclui-se que não existe $f'(1)$.

A opção correta é a (D).

18. Como a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0 é horizontal, tem-se que $g'(0) = 0$.

Como a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 0 é paralela à reta de equação $y = -4x - 4$, tem-se que $h'(0) = -4$.

Assim:

$$\begin{aligned} f'(0) &= (g \times h)'(0) = g'(0) \times h(0) + g(0) \times h'(0) = \\ &= 0 \times 1 + (-4) \times 4 = \\ &= -16 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

19. $f(x) = (x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Se n for ímpar, então $n - 1$ é par e tem-se $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é crescente em $\mathbb{R}$.

A opção correta é a (A).

20.

- a) A função f não é contínua em $\mathbb{R}$, já que não é contínua em $x = 1$, pois $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

- b) A função f não é diferenciável nos pontos de abscissas 1 e 4.

c) t.m.v. _{$[-2, 1]$} = $\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{-3 - 0}{3} = -1$

- d) Os pontos de coordenadas (0, 12) e (6, 0) pertencem à reta t . Logo, $m_t = \frac{12 - 0}{0 - 6} = -2$.

Assim, $t: y = -2x + 12$.

e) $f'(6) = m_t = -2$

21.

a) $d'(t) = -4,9 \times 2t + 20 = -9,8t + 20$

$$d'(0) = -9,8 \times 0 + 20 = 20$$

A velocidade inicial é 20 m/s.

b) $d(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t = 0$
 $\Leftrightarrow t(-4,9t + 20) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -4,9t + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{200}{49}$$

$$d'\left(\frac{200}{49}\right) = -9,8 \times \frac{200}{49} + 20 = -20$$

A velocidade com que o objeto atingiu o solo é -20 m/s.

c) $d'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{49}$

t	0		$\frac{100}{49}$		$\frac{200}{49}$
Sinal de d'	+	+	0	-	-
Variação de d	Mín.	$\nearrow$	Máx. 20,4	$\searrow$	Mín.

$$d\left(\frac{100}{49}\right) = -4,9 \times \left(\frac{100}{49}\right)^2 + 20 \times \frac{100}{49} \approx 20,4$$

O objeto atinge a altura máxima de 20,4 metros, aproximadamente.

22.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 - 2x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3 - 2x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{3 - 2x} + 1}{\sqrt{3 - 2x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 2x - 1}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\sqrt{3 - 2x} + 1} = \\ &= \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

- b) Seja α a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

$$\text{tg } \alpha = -1$$

Logo, $\alpha = 135^\circ$.

23.

- a) A função f é diferenciável no ponto de abscissa -1, já que a reta tangente ao gráfico de f neste ponto tem declive igual a -3. Logo, a função f é contínua em $x = -1$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 2$.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 2 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 2 \\ -2a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ a - b - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b = -1 \\ -2a - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo, $f(x) = x^2 - x$.

24.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= ((1-x)^3(3-x^2))' = \\ &= ((1-x)^3)'(3-x^2) + (1-x)^3(3-x^2)' = \\ &= 3(1-x)^2(-1)(3-x^2) + (1-x)^3(-2x) = \\ &= (1-x)^2(-3(3-x^2) - 2x(1-x)) = \\ &= (1-2x+x^2)(5x^2-2x-9) = \\ &= 5x^4 - 12x^3 + 16x - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}} \right)' = \\ &= -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = \\ &= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \left(\frac{2x^3 - 12x + 1}{1+x^2} \right)' = \\ &= \frac{(2x^3 - 12x + 1)'(1+x^2) - (2x^3 - 12x + 1)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{(6x^2 - 12)(1+x^2) - (2x^3 - 12x + 1)2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2x^4 + 18x^2 - 2x - 12}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \left(\frac{4}{x^2} + \sqrt{2x-x^2} \right)' = \\ &= \left(\frac{4}{x^2} \right)' + \left((2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{-4 \times 2x}{x^4} + \frac{1}{2} (2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} (2-2x) = \\ &= -\frac{8}{x^3} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{2+3x} \right)^4 \right)' = \\ &= 4 \left(\frac{x+1}{2+3x} \right)^3 \left(\frac{x+1}{2+3x} \right)' = \\ &= 4 \left(\frac{x+1}{2+3x} \right)^3 \frac{2+3x - (x+1) \times 3}{(2+3x)^2} = \\ &= 4 \times \frac{(x+1)^3}{(2+3x)^3} \times \frac{-1}{(2+3x)^2} = \\ &= \frac{-4(x+1)^3}{(2+3x)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= (\sqrt[4]{1+x^4})' = \left((1+x^4)^{\frac{1}{4}} \right)' = \\ &= \frac{1}{4} (1+x^4)^{-\frac{3}{4}} (4x^3) = \\ &= \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \text{a) } h'(x) &= \left(\left(-\frac{1}{x-1} \right)^2 \right)' = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{x-1} \right) \left(-\frac{0-1(x-1)'}{(x-1)^2} \right) = \\ &= -\frac{2}{x-1} \times \frac{1}{(x-1)^2} = \\ &= -\frac{2}{(x-1)^3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } m = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{(x-1)^3} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 = -\frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow x-1 = -\sqrt[3]{\frac{8}{3}} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Logo, $x \approx -0,39$.

$$h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) \approx 0,52$$

Assim, $C(-0,39; 0,52)$.

26.

a) Como g é diferenciável para $x = 1$, então g é contínua em $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= (\sqrt[3]{x^2+7})' = \left((x^2+7)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (x^2+7)^{-\frac{2}{3}} (2x) = \\ &= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \left(\frac{f}{g} \right)'(1) &= \frac{f'(1) \times g(1) - f(1) \times g'(1)}{g^2(1)} = \\ &= \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{64}} \times (-2) - \sqrt[3]{8} \times (-2)}{(-2)^2} = \\ &= \frac{-\frac{4}{12} + 4}{4} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} (f \circ g)'(1) &= f'(g(1))g'(1) = f'(-2) \times (-2) = \\ &= \frac{-4}{3\sqrt[3]{121}} \times (-2) = \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{121}} \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= \left(\frac{3x^2 + 3}{x^2} \right)' = \\ &= \frac{6x \times x^2 - (3x^2 + 3) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ logo se } x \in D_f, \text{ então } -x \in D_f. \\ f(-x) &= \frac{3(-x)^2 + 3}{(-x)^2} = \frac{3x^2 + 3}{x^2} = f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Logo, f é uma função par.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ logo se } x \in D_f, \text{ então } -x \in D_f. \\ f(-x) &= -\frac{6}{(-x)^3} = -\frac{6}{-x^3} = \frac{6}{x^3} = -f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Logo, f é uma função ímpar.

$$\begin{aligned} \text{c)} f(x) = 6 &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 3}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$f(1) = -\frac{6}{1^3} = -6$$

$$f(-1) = -\frac{6}{(-1)^3} = 6$$

Logo, as retas tangentes ao gráfico da função nos pontos cuja ordenada é 6 não são paralelas porque não têm declives iguais.

$$\text{d)} f'(x) = -\frac{6}{x^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	-
Variação de f	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$; não tem extremos relativos.

28.

$$\text{a)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 0$$

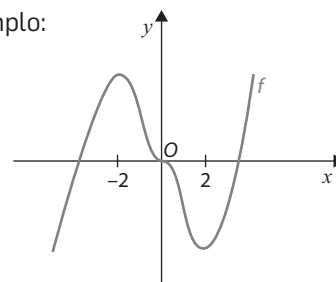
b) A proposição é falsa.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A função f tem dois extremos relativos.

c) A função f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-2, 2]$; tem um máximo em $x = -2$ e um mínimo em $x = 2$.

d) Por exemplo:



29.

$$\text{a)} f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{x}{x^2-4}$$

Cálculo auxiliar

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

Assim, $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 4x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus [-2, 1, 2]$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2-4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2-4} \right)' = \frac{x^2-4-x \times 2x}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0		1		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x^2-4	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-	n.d.	+
$f'(x)$	-	n.d.	-	-	-	n.d.	-	n.d.	-
$f(x) \times f'(x)$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	n.d.	-

$$\text{Logo, } f(x) \times f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [0, 1[\cup]1, 2[.$$

c) Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, por se tratar de uma função racional. Portanto, as retas de equações $x = -2$, $x = 1$ e $x = 2$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{1}{3}$$

A reta de equação $x = 1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{4}{x}} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

30.

$$\begin{aligned} \text{a) } g'(x) &= \left(\frac{mx^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2mx(x^2 + 1) - mx^2 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2mx}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Se $m > 0$, $g'(x) < 0$ para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$ e, portanto, g tem um mínimo relativo.

Se $m < 0$, $g'(x) > 0$ para $x < 0$ e $g'(x) < 0$ para $x > 0$ e, portanto, g tem um máximo relativo.

Assim, seja qual for o valor de $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função tem sempre um extremo relativo.

$$\text{b) } g(x) = \frac{-x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{i) } g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	0	$-$
Variação de g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; tem um máximo relativo em $x = 0$.

ii) Assíntotas verticais

$$D_g = \mathbb{R}$$

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função racional, logo o gráfico de g não possui assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2 + 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

Quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

iii) Tendo em conta que a função g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$, é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$ e tem um máximo relativo em $x = 0$, não há assíntotas verticais ao gráfico de g e a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$, então $D'_g =]-1, 0]$.

31.

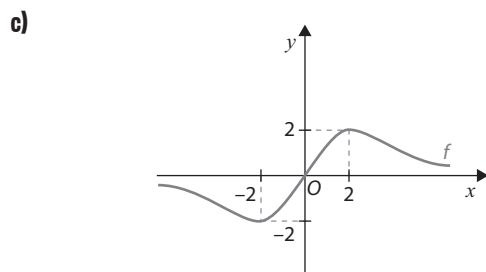
a) Como $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -2[$ e $f(x) > 0$ se $x \in]-2, 0]$, e f é ímpar, então $f(x) < 0$ se $x \in]2, +\infty[$ e $f(x) > 0$ se $x \in [0, 2[$. Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, por se ter derivada finita em todos os pontos deste conjunto. Tem-se também que $f(2) = 0$, logo $f(-2) = 0$, por f ser uma função ímpar. Logo, f é diferenciável em $x = 2$ e em $x = -2$, pelo que é contínua nestes pontos.

Conclui-se, assim, que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

b)

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de f	$\searrow$	Mín. -2	$\nearrow$	Máx. 2	$\searrow$

A função f tem um mínimo relativo -2 em $x = -2$ e tem um máximo relativo 2 em $x = 2$.



32.

a) Continuidade

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 3x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$g(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$, então a função g é contínua no ponto de abscissa 0.

Diferenciabilidade

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$, então a função g não é diferenciável no ponto de abscissa 0.

b) Se $x < 0$:

$$g'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

Se $x > 0$:

$$g'(x) = x' = 1$$

De acordo com a alínea anterior, g não é diferenciável no ponto de abscissa 0.

$$\text{Logo, } g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Se $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

A função g' tem um zero em $x = -1$.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	0	$-$	n.d.	$+$
Variação de g	$\nearrow$	Máx. 2	$\searrow$	Mín. 0	$\nearrow$

A função g é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 0]$; tem um máximo relativo 2 em $x = -1$ e tem um mínimo relativo 0 em $x = 0$.

33.

a) $f(0) = |0^3| = 0$

O ponto de interseção com o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^3| = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O ponto de interseção com o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

b) $f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

c) Se $x > 0$, a função f é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

Se $x < 0$, a função f é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

Se $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$$

$$f(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, então a função f é contínua para $x = 0$.

Assim, f é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}$).

d) Se $x > 0$, então $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Se $x < 0$, então $f'(x) = (-x^3)' = -3x^2$.

Se $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, então a função f é diferenciável em $x = 0$.

Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

e) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A função f' tem apenas um zero em $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$
Variação de f	$\searrow$	Mín. 0	$\nearrow$

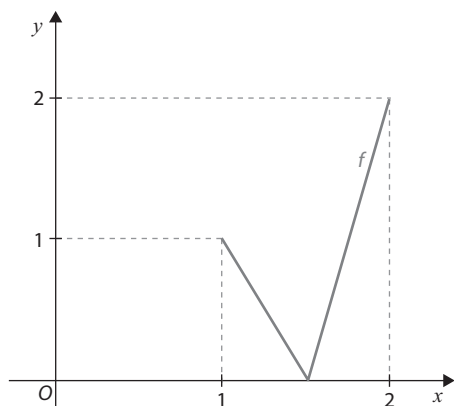
A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$; tem um mínimo relativo 0 em $x = 0$.

34.

a) i) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Seja f a função cuja representação gráfica é a que se segue.

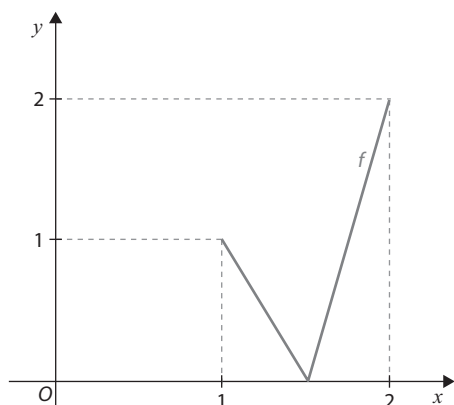


$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 1}{1} = 1$, mas f não é crescente no intervalo $[1, 2]$.

ii) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Seja f a função cuja representação gráfica é a que se segue.



Se $a = 1$ e $b = 2$, verifica-se que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1$, mas $f(a) < f(b)$.

b) Nada se pode concluir acerca da monotonia da função em $[a, b]$, como vimos nas alíneas anteriores.

35.

a) Seja x a medida da aresta da base do depósito e h a medida da sua altura.

$$V = x \times x \times h \Leftrightarrow 2 = x^2 h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{2}{x^2}$$

Assim:

$$A(x) = x \times x + 4 \times x \times \frac{2}{x^2} = x^2 + \frac{8}{x} = \frac{8}{x} + x^2$$

$$b) A'(x) = \left(\frac{8}{x} + x^2 \right)' = -\frac{8}{x^2} + 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{-8 + 2x^3}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 + 2x^3 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 4 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

x	0		$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
Sinal de A'	n.d.	-	0	+
Variação de A	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Para que a área total seja mínima, a aresta da base deve medir $\sqrt[3]{4}$ m.

36.

$$a) C(100) = 0,48 \times 100 + 1500 + \frac{120\,000}{100} = 2748$$

100 unidades de produto têm um custo de produção de 2748 unidades monetárias.

$$b) t.m.v._{[1000, 2000]} = \frac{C(2000) - C(1000)}{2000 - 1000} =$$

$$= \frac{2520 - 2100}{1000} =$$

$$= 0,42$$

$$c) C'(x) = \left(0,48x + 1500 + \frac{120\,000}{x} \right)' =$$

$$= 0,48 - \frac{120\,000}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,48 - \frac{120\,000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,48x^2 - 120\,000 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -500 \vee x = 500$$

x	0		500		6000
Sinal de C'	-	-	0	+	+
Variação de C	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

Para que o custo total seja mínimo, a fábrica deve produzir 500 unidades por mês.

37. Seja r a medida do raio do setor circular.

$$r + r + \alpha r = 60 \Leftrightarrow \alpha r = 60 - 2r \Leftrightarrow \alpha = \frac{60 - 2r}{r}$$

$$A(r) = \frac{1}{2} r^2 \times \frac{60 - 2r}{r} = 30r - r^2$$

$$A'(r) = 30 - 2r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 15$$

r	0		15		30
Sinal de A'	+	+	0	-	-
Variação de A	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

Para que a área do setor circular seja máxima, a medida do raio deve ser 15 cm.

- 38.** Seja r a medida do raio da base do cone e h a sua altura. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$25^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h^2 = 625 - r^2$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{625 - r^2}.$$

Então:

$$V(r) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times \sqrt{625 - r^2} = \frac{\pi r^2 \sqrt{625 - r^2}}{3}$$

$$\begin{aligned} V'(r) &= \left(\frac{\pi r^2 \sqrt{625 - r^2}}{3} \right)' = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(2r \sqrt{625 - r^2} - r^2 \left((625 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(2r \sqrt{625 - r^2} - r^2 \frac{1}{2} (625 - r^2)^{-\frac{1}{2}} 2r \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(2r \sqrt{625 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{2r(625 - r^2) - r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 2r^3 - r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 3r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'(r) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 3r^3}{\sqrt{625 - r^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1250r - 3r^3 = 0 \wedge \sqrt{625 - r^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow r(1250 - 3r^2) = 0 \wedge 625 - r^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (r = 0 \vee 1250 - 3r^2 = 0) \wedge r \neq 25 \wedge r \neq -25 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r = \sqrt{\frac{1250}{3}} \vee r = -\sqrt{\frac{1250}{3}} \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r = 25\sqrt{\frac{2}{3}} \vee r = -25\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

r	0		$25\sqrt{\frac{2}{3}}$		25
Sinal de V'	+	+	0	-	-
Variação de V	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

Para que a embalagem tenha capacidade máxima, a medida do raio da base deve ser $25\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm.

- 39.** Seja $P(x, f(x))$ um ponto do gráfico da função f .

Seja $A(1, 0)$.

$$\begin{aligned} d(x) = \overline{AP} &= \sqrt{(x-1)^2 + (f(x)-0)^2} = \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x^2+1})^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 1} = \\ &= \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'(x) &= (\sqrt{2x^2 - 2x + 2})' = \\ &= (2x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}}' = \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{2}} (4x - 2) = \\ &= \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \wedge \underbrace{\sqrt{2x^2 - 2x + 2} \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de d'	-	0	+
Variação de d	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

O ponto do gráfico de f cuja distância ao ponto A é mínima tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} 40. g'(x) &= \left(x \times f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\ &= x' f\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} \right)' = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} g'(-1) &= f\left(\frac{1}{-1}\right) - \frac{1}{-1} f'\left(\frac{1}{-1}\right) = \\ &= f(-1) + f'(-1) = \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Tema V - Estatística

Unidade 2 - Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação

Páginas 137 a 157

1.

a) A variável explicativa é "idade" e a variável resposta é "percentagem de massa muscular".

b) A variável explicativa é "temperatura ambiental" e a variável resposta é "comprimento da barra".

2.

a) O desvio vertical do ponto (x_i, y_i) em relação à reta $r: y = 1,2x + 0,3$ é dado por $e_i = y_i - 1,2x_i - 0,3$.

Assim:

$$\text{Ponto A: } e_1 = 2,1 - 1,2 \times 1 - 0,3 = 0,6$$

$$\text{Ponto B: } e_2 = 2,5 - 1,2 \times 2 - 0,3 = -0,2$$

$$\text{Ponto C: } e_3 = 4,1 - 1,2 \times 3 - 0,3 = 0,2$$

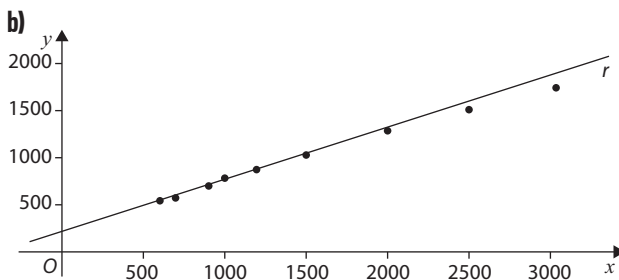
$$\text{Ponto D: } e_4 = 4,8 - 1,2 \times 4 - 0,3 = -0,3$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^4 e_i = 0,6 - 0,2 + 0,2 - 0,3 = 0,3$$

$$\begin{aligned} 3. \sum_{i=1}^n e_i &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \\ &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + b \\ &\Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

Logo, o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta $t: y = ax + b$.

$$\begin{aligned} 4. \text{a) } \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \\ &= \frac{600 + 700 + 900 + 1000 + 1200 +}{9} \\ &\quad \frac{+ 1500 + 2000 + 2500 + 3000}{9} \approx 1489 \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^9 y_i}{9} = \\ &= \frac{533 + 568 + 695 + 746 + 869 +}{9} \\ &\quad \frac{+ 1038 + 1282 + 1501 + 1769}{9} \approx 1000 \end{aligned}$$



c) O desvio vertical do ponto (x_i, y_i) em relação à reta $t: y = 0,55x + 230$ é dado por $e_i = y_i - 0,55x_i - 230$.

Assim:

$$(600, 533): e_1 = 533 - 0,55 \times 600 - 230 = -27$$

$$(700, 568): e_2 = 568 - 0,55 \times 700 - 230 = -47$$

$$(900, 695): e_3 = 695 - 0,55 \times 900 - 230 = -30$$

$$(1000, 746): e_4 = 746 - 0,55 \times 1000 - 230 = -34$$

$$(1200, 869): e_5 = 869 - 0,55 \times 1200 - 230 = -21$$

$$(1500, 1038): e_6 = 1038 - 0,55 \times 1500 - 230 = -17$$

$$(2000, 1282): e_7 = 1282 - 0,55 \times 2000 - 230 = -48$$

$$(2500, 1501): e_8 = 1501 - 0,55 \times 2500 - 230 = -104$$

$$(3000, 1769): e_9 = 1769 - 0,55 \times 3000 - 230 = -111$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sum_{i=1}^9 e_i &= -27 - 47 - 30 - 34 - 21 - 17 - 48 - 104 - 111 = \\ &= -439 \end{aligned}$$

e) A reta t não pode ser a reta dos mínimos quadrados, uma vez que a soma dos desvios verticais de cada um dos pontos não é igual a zero.

5. $S_x = 2$, logo:

$$S_x^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{n-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 4(n-1)$$

$S_y = 5$, logo:

$$S_y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{SS_y}{n-1} = 25$$

$$\Leftrightarrow SS_y = 25(n-1)$$

Então:

$$r = 2,3 \sqrt{\frac{4(n-1)}{25(n-1)}} =$$

$$= 2,3 \sqrt{\frac{4}{25}} =$$

$$= 0,92$$

6. Se todos os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$ se encontram sobre a reta de equação $y = mx + b$, então $y_i = mx_i + b$, para todo o $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pelas propriedades da média e da soma dos desvios, obtemos $\bar{y} = m\bar{x} + b$ e $SS_y = m^2 SS_x$. Desta forma:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i + b - (m\bar{x} + b))}{\sqrt{SS_x(m^2 SS_x)}} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i - m\bar{x})}{-m\sqrt{SS_x^2}} \text{ (pois } m < 0) \\
 &= -\frac{m}{m} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{SS_x} = \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

7. r_1 corresponde ao gráfico C, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear negativa fraca.

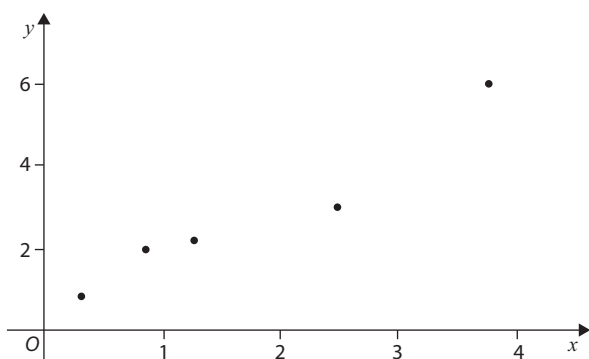
r_2 corresponde ao gráfico A, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear positiva.

r_3 corresponde ao gráfico B, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear negativa forte.

8.

a) A variável explicativa é "taxa de fluxo das águas" e a variável resposta é "quantidade de massa de solo transportado".

b) i)



ii) $\bar{x} = 1,728$ (2 c.d.)

$\bar{y} = 2,806$

iii) $a \approx 1,39$ (2 c.d.)

Aprende Fazendo

Páginas 162 a 170

1. $\bar{x} = \frac{20 + 34 + 36 + 40}{4} = 32,5$

$\bar{y} = \frac{30 + 40 + 50 + 56}{4} = 44$

$SS_x = (20 - 32,5)^2 + (34 - 32,5)^2 + (36 - 32,5)^2 + (40 - 32,5)^2 = 227$

$SS_y = (30 - 44)^2 + (40 - 44)^2 + (50 - 44)^2 + (56 - 44)^2 = 392$

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \\
 &= \frac{(20 - 32,5)(30 - 44) + (34 - 32,5)(40 - 44) + (36 - 32,5)(50 - 44) + (40 - 32,5)(56 - 44)}{\sqrt{227 \times 392}} \approx \\
 &\approx 0,94
 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

2. O coeficiente de correlação linear é um número que pertence ao intervalo $[-1, 1]$. Tratando-se de uma associação linear negativa forte esse valor está próximo de -1 .

A opção correta é a (C).

3. $\bar{x} = \frac{21 + 22 + 23 + 24 + 25}{5} = 23$

$\bar{y} = \frac{12,1 + 11,5 + 8,7 + 7,5 + 8,2}{5} = 9,6$

$SS_x = (21 - 23)^2 + (22 - 23)^2 + (23 - 23)^2 + (24 - 23)^2 + (25 - 23)^2 = 10$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \\
 &= \frac{21 \times 12,1 + 22 \times 11,5 + 23 \times 8,7 + 24 \times 7,5 + 25 \times 8,2 - 5 \times 23 \times 9,6}{10} \approx -1,18
 \end{aligned}$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 9,6 + 1,18 \times 23 = 36,74$

A opção correta é a (C).

4. $y = 0,35x + 307$

$0,35 \times 15 + 307 \approx 312$ patentes

A opção correta é a (D).

5. O coeficiente de correlação linear r_1 corresponde ao gráfico C, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear negativa forte.

O coeficiente de correlação linear r_2 corresponde ao gráfico A, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear positiva.

O coeficiente de correlação linear r_3 corresponde ao gráfico B, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear negativa fraca.

A opção correta é a (A).

6. O coeficiente de correlação linear é um número que pertence ao intervalo $[-1, 1]$. Tratando-se de uma associação linear negativa forte esse valor está próximo de -1 .

A opção correta é a (C).

$$7. \bar{x} = \frac{12 + 13 + 16 + 18 + 15 + 10}{6} = 14$$

$$\bar{y} = \frac{25 + 28 + 29 + 32 + 25 + 20}{6} = 26,5$$

$$\text{Tem-se que } \sum_{i=0}^6 e_i = 0 \Leftrightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Assim, procura-se o par ordenado (a, b) para o qual $b \neq 26,5 - 14a$.

$$\text{Na opção (A): } 26,5 - 14 \times 1 = 12,5$$

$$\text{Na opção (B): } 26,5 - 14 \times 1,3 = 8,3 \neq 0,2$$

$$\text{Na opção (C): } 26,5 - 14 \times 1,1 = 11,1$$

$$\text{Na opção (D): } 26,5 - 14 \times 1,5 = 5,5$$

A opção correta é a (B).

$$8. \bar{y} = a\bar{x} + 10 \Leftrightarrow -2 = a \times 3 + 10 \\ \Leftrightarrow 3a = -12 \\ \Leftrightarrow a = -4$$

A opção correta é a (A).

9. A afirmação (I) é falsa. Diz-se que as variáveis têm uma associação linear positiva forte quando o coeficiente de correlação é próximo de 1.

A afirmação (II) é verdadeira.

A afirmação (III) é falsa. Sendo r o coeficiente de correlação linear e a o declive da reta dos mínimos

quadrados, tem-se que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$.

A opção correta é a (B).

10. $S_x = 3$, logo:

$$S_x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{6-1} = 9 \\ \Leftrightarrow SS_x = 45$$

Assim:

$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow 0,85 = a \sqrt{\frac{45}{30}} \\ \Leftrightarrow a = 0,85 \times \sqrt{\frac{30}{45}}$$

Logo, $a \approx 0,7$.

A opção correta é a (D).

11. A soma dos desvios verticais dos pontos

$P_i (1 \leq i \leq 30)$ em relação à reta $t: y = ax + b$ é nula, logo $b = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$, ou seja, o ponto $P(100, 150)$ pertence à reta t .

A opção correta é a (D).

12. Sendo $r: y = ax + b$ a reta dos mínimos quadrados, sabe-se que $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Então:

$$26,1 = \frac{25 + 21 + 19 + 18 + y_4}{5} + 2,1 \times \\ \times \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5}$$

$$\Leftrightarrow 130,5 = 83 + y_4 + 2,1 \times 15$$

$$\Leftrightarrow y_4 = 16$$

A opção correta é a (B).

13. Sendo $r: y = ax + b$ a reta dos mínimos quadrados, sabe-se que o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence a r .

$$\text{Opção (A): } \frac{2}{3} \times 10 + 12 = \frac{56}{3} \neq 15$$

$$\text{Opção (B): } \frac{3}{2} \times 10 + 15 \neq 15$$

$$\text{Opção (C): } \frac{3}{5} \times 10 + 9 = 15$$

$$\text{Opção (D): } \frac{3}{5} \times 10 + 12,5 = 18,5 \neq 15$$

A opção correta é a (C).

14. $e_1 = y_1 - (ax_1 + b) \Leftrightarrow 0,5 = 5 - (2a + b) \\ \Leftrightarrow 4,5 = 2a + b \Leftrightarrow b = 4,5 - 2a$

$$e_7 = y_7 - (ax_7 + b) \Leftrightarrow -0,1 = 1 - (6a + b)$$

$$\Leftrightarrow 1,1 = 6a + b \Leftrightarrow 1,1 = 6a + 4,5 - 2a$$

$$\Leftrightarrow -3,4 = 4a \Leftrightarrow a = -0,85$$

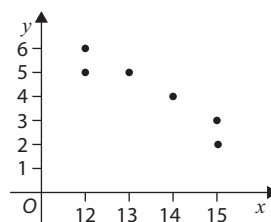
$$\text{Logo, } b = 4,5 - 2 \times (-0,85) = 6,2.$$

Então:

$$e_{15} = y_{15} - (ax_{15} + b) = 2 - (-0,85 \times 4 + 6,2) = -0,8$$

A opção correta é a (A).

- 15.



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear entre as variáveis.

16. Todas as nuvens apresentadas sugerem a existência de associação linear negativa entre as variáveis. Na amostra representada no gráfico A essa associação é a mais fraca e na amostra representada no gráfico C essa associação é a mais forte. Então, r_1 corresponde ao gráfico A, r_2 corresponde ao gráfico C e r_3 corresponde ao gráfico B.

17.

a) A variável explicativa é a variável "massa". A variável resposta é a variável "quantidade de medicamento".

$$b) r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{15,25}{\sqrt{101,5 \times 2,315}} \approx 0,999$$

Logo, as variáveis têm uma associação linear positiva.

Cálculos auxiliares

$$\bullet \bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 8 + 10 + 15}{6} = 7,5$$

$$\bullet \bar{y} = \frac{0,5 + 0,6 + 0,8 + 1,2 + 1,5 + 2,3}{6} = 1,15$$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
3	0,5	-4,5	-0,65	2,925	20,25	0,4225
4	0,6	-3,5	-0,55	1,925	12,25	0,3025
5	0,8	-2,5	-0,35	0,875	6,25	0,1225
8	1,2	0,5	0,05	0,025	0,25	0,0025
10	1,5	2,5	0,35	0,875	6,25	0,1225
15	2,3	7,5	1,15	8,625	56,25	1,3225
				$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 15,25$	$SS_x = 101,5$	$SS_y = 2,315$

$$c) a = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{3 \times 0,5 + 4 \times 0,6 + 5 \times 0,8 + 8 \times 1,2 + 10 \times 1,5 + 15 \times 2,3 - 6 \times 7,5 \times 1,15}{101,5} \approx 0,15$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 0,02$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 0,15x + 0,02$.

$$d) 0,15 \times 12 + 0,02 = 1,82$$

Uma criança com 12 kg deve tomar, aproximadamente, 1,82 ml de medicamento.

18.

a) A variável explicativa é "número de km" e a variável resposta é "valor da venda".

$$b) r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{-1544,6667}{\sqrt{237,7683 \times 17\,731,3333}} \approx -0,75$$

Logo, as variáveis têm uma associação linear positiva.

Cálculos auxiliares

$$\bullet \bar{x} = \frac{248 + 273 + 145 + 210 + 142 + 270}{6} = \frac{644}{3} \approx 214,6667$$

$$\bullet \bar{y} = \frac{12,5 + 13,9 + 17,5 + 12,5 + 29,9 + 12,2}{6} = \frac{197}{2} \approx 16,4167$$

x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
248	12,5	3100	33,3333	-3,9167
273	13,9	3794,7	58,3333	-2,5167
145	17,5	2537,5	-69,6667	1,0833
210	12,5	2625	-4,6667	-3,9167
142	29,9	4245,8	-72,6667	13,4833
270	12,2	3294	55,3333	-4,2167
		$\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 19\,597$		

$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
-130,5556	1111,1111	15,3403
-146,8056	3402,7778	6,3336
-75,4722	4853,4444	1,1736
18,2778	21,7778	15,3403
-979,7889	5280,4444	181,8003
-233,3222	3061,7778	17,7803
$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -1547,6667$	$SS_x = 17\,731,3333$	$SS_y = 237,7683$

$$c) a = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{19\,597 - 6 \times 214,6667 \times 16,4167}{17\,731,3333}$$

$$\approx -0,0873 \approx -0,09$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 16,4167 + 0,0873 \times 214,6667 \approx 35,15$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = -0,09x + 35,15$.

$$d) x = -0,09 \times 250 + 35,15 \Leftrightarrow x = 12,61$$

Logo, $x \approx 12,61$.

O valor da venda de um carro com 250 000 km é de aproximadamente 12,61 milhares de euros.

19.

a) Proposição falsa.

Quando o coeficiente de correlação entre duas variáveis é nulo, podemos concluir que não existe associação linear entre as variáveis, mas nada podemos afirmar sobre quaisquer outros tipos de associação.

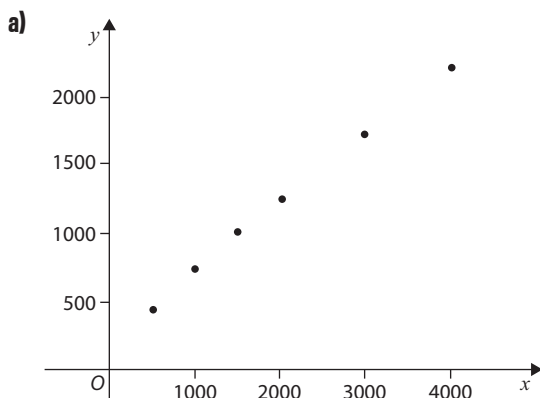
b) Proposição falsa.

Um valor do coeficiente de correlação próximo de -1 indica uma associação linear negativa forte entre as variáveis.

c) Proposição verdadeira.

O sinal do coeficiente de correlação tem sempre o mesmo sinal do declive da reta dos mínimos quadrados.

20.



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear forte entre as variáveis.

b) Recorrendo à calculadora gráfica, $y = 0,5x + 227,8$.

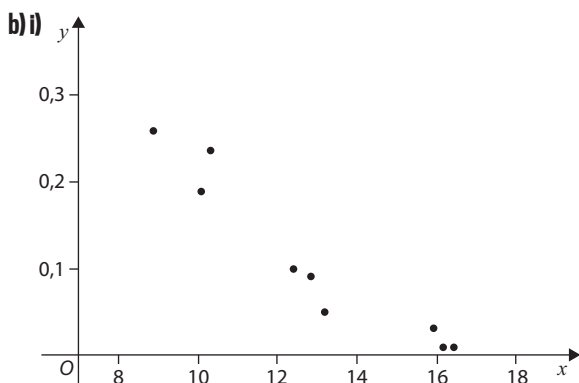
c) $y = 0,5 \times 750 + 227,8 = 602,8$

O valor do ordenado líquido de um funcionário com um ordenado bruto de 750 euros é 602,8 euros.

d) $589 - 602,8 = -13,8$ euros.

21.

a) A variável explicativa é "temperatura" e a variável resposta é "volume de gás".



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear negativa entre as variáveis.

ii) Recorrendo à calculadora gráfica, $\bar{x} = 12,9$ e $\bar{y} = 0,11$.

iii) Recorrendo à calculadora gráfica, $a \approx 0$.

iv) Recorrendo à calculadora gráfica, $y = -0,033x + 0,539$.

v) $y = -0,033 \times 7 + 0,539 = 0,308$

O consumo esperado num mês em que a temperatura média é 7°C é de aproximadamente $0,308 \text{ m}^3$.

22.

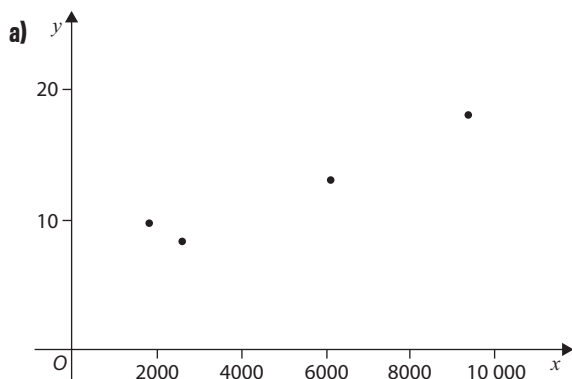
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} e_1 = y_1 - mx_1 - b \\ e_2 = y_2 - mx_2 - b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 = 8 - m - b \\ -0,3 = 6 - 2m - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -7,5 + m \\ -0,3 = 6 - 2m - 7,5 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8,7 \\ m = -1,2 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = -1,2x + 8,7$.

b) $e_3 = y_3 - mx_3 - b = 5 + 1,2 \times 3 - 8,7 = -0,1$

$e_4 = y_4 - mx_4 - b = 4 + 1,2 \times 4 - 8,7 = 0,1$

23.



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear positiva entre as variáveis.

b) Recorrendo à calculadora gráfica,

$y = 0,001x + 6,389$.

c) $y = 0,001 \times 3000 + 6,389 = 9,389$

R.: 9,389 espetadores

d) $e_1 = 9,9 - (0,001 \times 1787 + 6,389) = 1,724 \approx 1,72$

$e_2 = 18,3 - (0,001 \times 9339 + 6,389) = 2,572 \approx 2,57$

$e_3 = 8,4 - (0,001 \times 2610 + 6,389) = -0,599 \approx -0,60$

$e_4 = 13,2 - (0,001 \times 6095 + 6,389) = 0,716 \approx 0,72$

e) $1,72 + 2,57 - 0,60 + 0,72 = 4,41$

A soma dos desvios não é nula porque o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ não pertence à reta.

24. $\bar{y} = a\bar{x} - 5 \Leftrightarrow 21 = a \times 4 - 5$

$$\Leftrightarrow 4a = 26$$

$$\Leftrightarrow a = 6,5$$

25. $e_1 = 105 - (a + b)$

$e_2 = 208 - (1,1a + b)$

$e_3 = 209 - (1,6a + b)$

$e_4 = 302 - (1,8a + b)$

$e_5 = 250 - (2a + b)$

$$\sum_{i=1}^5 e_i = 0 \Leftrightarrow 1074 - 7,5a - 5b = 0$$

Se, por exemplo, $a = 1$, então $1074 - 7,5 - 5b = 0$
 $\Leftrightarrow b = 213,3$.

Se, por exemplo, $a = 10$, então $1074 - 7,5 - 5b = 0$
 $\Leftrightarrow b = 199,8$.

Então, os pares (a, b) pedidos podem ser $(1; 213,3)$ e $(10; 199,8)$.

- 26.** O coeficiente de correlação é um número pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, pelo que r_2 não pode ser um coeficiente de correlação.

Uma vez que o declive da reta dos mínimos quadrados relativa a esta amostra é positivo, então o coeficiente de correlação desta amostra tem de ser positivo. Logo, r_3 pode corresponder ao coeficiente de correlação linear desta amostra.

$$\begin{aligned} 27. S_x^2 = 10 &\Leftrightarrow \frac{SS_x}{35-1} = 10 \\ &\Leftrightarrow SS_x = 340 \end{aligned}$$

Assim:

$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = 54 \sqrt{\frac{340}{450}} \approx 0,87$$

- 28.** Como o coeficiente de correlação linear é positivo, o declive da reta dos mínimos quadrados também é positivo. Logo, a reta t_2 não pode ser a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Na reta t_1 : $60 = 10 + 50$ é uma proposição verdadeira.

Na reta t_3 : $60 = 10 \times 10 + 30$ é uma proposição falsa.

Logo, a reta t_1 pode ser a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

$$\begin{aligned} 29. \bar{y} = 1,8\bar{x} + 16,8 &\Leftrightarrow \frac{14 + 14 + 12 + 10 + y_5 + 6}{6} = \\ &= 1,8 \times \frac{-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6}{6} + 16,8 \\ &\Leftrightarrow 56 + y_5 = 1,8 \times (-21) + 100,8 \\ &\Leftrightarrow y_5 = 7 \end{aligned}$$

30.

- a)** Afirmação falsa.

Há infinitas retas a que pertence o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$.

- b)** Afirmação falsa.

O coeficiente de correlação linear é um valor do intervalo $[-1, 1]$, logo nunca pode ser inferior a -1 .

- c)** Afirmação verdadeira.

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{15} e_i = 0$$

- d)** Afirmação falsa.

Quando não há associação linear entre as variáveis, a reta dos mínimos quadrados não deve ser utilizada para prever o valor de y em função de x .

$$\begin{aligned} 31. \bar{x} = 114 &\Leftrightarrow \frac{100 + 101 + 112 + x_4}{4} = 114 \\ &\Leftrightarrow 313 + x_4 = 456 \\ &\Leftrightarrow x_4 = 143 \end{aligned}$$

$$\bar{y} = 0,05\bar{x} + 0,7 =$$

$$= 0,05 \times 114 + 0,7 =$$

$$= 6,4$$

$$\bar{y} = 6,4 \Leftrightarrow \frac{2,7 + 3,4 + 3,5 + y_4}{4} = 6,4$$

$$\Leftrightarrow 9,6 + y_4 = 25,6$$

$$\Leftrightarrow y_4 = 16$$

Logo, $(x_4, y_4) = (143, 16)$.

- 32.** Seja m o declive da reta dos mínimos quadrados da amostra (z, y) .

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i - n \bar{z} \bar{y}}{SS_z} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n k x_i y_i - n k \bar{x} \bar{y}}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{k \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right)}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{k SS_x} = \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \\ &= \frac{1}{k} \times a = \\ &= \frac{a}{k} \end{aligned}$$

- 33.** $S_x = 1,6$, logo:

$$S_x^2 = 2,56 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{29-1} = 2,56$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 71,68$$

$S_y = 3,6$, logo:

$$S_y^2 = 12,96 \Leftrightarrow \frac{SS_y}{29-1} = 12,96$$

$$\Leftrightarrow SS_y = 362,88$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= a\bar{x} + b \Leftrightarrow 34 = a \times 13 - \frac{45,6}{r} \\ \Leftrightarrow 13a &= 34 + \frac{45,6}{r} \\ \Leftrightarrow 13a &= \frac{34r + 45,6}{r} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{34r + 45,6}{13r}\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}r &= a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{34r + 45,6}{13r} \sqrt{\frac{71,68}{362,88}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{34r + 45,6}{13r} \times \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{9r}{4} &= \frac{34r + 45,6}{13r} \quad (r \neq 0) \\ \Leftrightarrow 117r^2 &= 136r + 182,4 \\ \Leftrightarrow 117r^2 - 136r - 182,4 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{136 \pm \sqrt{136^2 + 4 \times 117 \times 182,4}}{2 \times 117}\end{aligned}$$

Logo, $r \approx 1,958 \vee r \approx -0,796$.

Como $r \in [-1, 1]$, então $r \approx -0,796$.

Logo, $r \approx -0,8$.

