

07.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

TESTES

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Teste de Diagnóstico

1.

- 1.1. O termo com 8 círculos brancos é o sétimo termo. O termo geral da sequência do número de círculos cinzentos é $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim, $a_7 = \frac{7 \times 8}{2} = 28$.

Logo, o termo com 8 círculos brancos tem 28 círculos cinzentos.

- 1.2. Suponha-se que o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = 2n + 1$.

Tem-se então $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ e $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Logo, a opção (A) está errada, uma vez que o 2.º termo tem 6 círculos e não 5.

Suponha-se agora que o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = \frac{n+5}{2}$. Tem-se então $u_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ e $u_2 = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$. Logo, a opção (B) está errada, uma vez que o 2.º termo tem 6 círculos e não $\frac{7}{2}$.

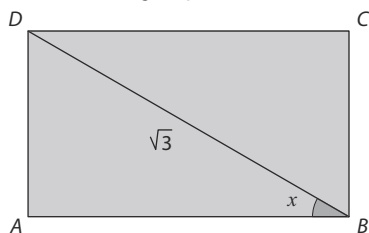
Suponha-se agora o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tem-se então $u_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Logo, a opção (C) está errada, uma vez que o 1.º termo tem 3 círculos e não 1.

Assim, a opção correta é a (D). Suponha-se então que $u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Tem-se então $u_1 = \frac{2 \times 3}{2} = 3$, $u_2 = \frac{3 \times 4}{2} = 6$, $u_3 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$, e assim sucessivamente.

2. Considere-se o esboço apresentado na figura abaixo.



$$\sin x = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{3} \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{3} \cos x$$

Logo, $A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{AB} = \sqrt{3} \sin x \times \sqrt{3} \cos x = 3 \sin x \cos x$, como se queria demonstrar.

3. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo, tem-se que $\cos \alpha$ é positivo, ou seja, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 4. \left(\frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a^3 b} \sqrt[4]{b}}{a^2 \sqrt{b}} \right)^2 &= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{a^2 b^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = \left(\frac{a^{\frac{13}{6}} b^{\frac{3}{4}}}{a^2 b^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = \\ &= \left(a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{4}} \right)^2 = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a} \sqrt{b} \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a (A).

5.

- 5.1. A é o centro da circunferência definida por $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, logo $A(2, 3)$.

B é um dos pontos de interseção da circunferência com a reta de equação $y = x + 1$. Substituindo na equação da circunferência y por $x + 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (x+1-3)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2(x-2)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x-2 &= \sqrt{2} \vee x-2 = -\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Uma vez que o outro ponto de interseção da circunferência com a reta de equação $y = x + 1$ é o ponto D e que a abscissa de B é menor que a abscissa de D, tem-se que $B(2 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$.

E é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy, pelo que, substituindo x por 0 na equação da circunferência, obtém-se:

$$\begin{aligned} (0-2)^2 + (y-3)^2 &= 4 \Leftrightarrow 4 + (y-3)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow (y-3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $E(0, 3)$.

Uma vez que o raio da circunferência é 2, tem-se que $F = E + (2, 2) = (2, 5)$.

- 5.2. $E(0, 3)$ e $F(2, 5)$

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \sqrt{(0-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \\ &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- 5.3. Uma vez que a reta EF é paralela à reta de equação $y = x + 1$, um seu vetor diretor é o vetor de coordenadas (1, 1). Assim, uma equação vetorial da reta EF é:

$$EF: (x, y) = (0, 3) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$$

5.4. $(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$
 $\Leftrightarrow 4y = -4x + 20$
 $\Leftrightarrow y = -x + 5$
 Assim, $y = -x + 5$ é a equação reduzida da mediatriz de $[EF]$.

5.5. $\vec{EF} = F - E = (2, 5) - (0, 3) = (2, 2)$
 Como o vetor $\vec{u}$ é colinear com $\vec{EF}$, tem-se que $\vec{u}(2k, 2k), k \in \mathbb{R}$.
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{12}$
 $\Leftrightarrow 4k^2 + 4k^2 = 12 \Leftrightarrow k^2 = \frac{12}{8} \Leftrightarrow k^2 = \frac{3}{2}$
 Uma vez que o vetor $\vec{u}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{EF}$, então $k > 0$, logo $k = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
 Logo, $\vec{u} = (\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

6. $\neg((x < 3 \vee x \geq 5) \wedge y \leq 2)$
 $\Leftrightarrow \neg(x < 3 \vee x \geq 5) \vee \neg(y \leq 2)$
 $\Leftrightarrow (\neg(x < 3) \wedge \neg(x \geq 5)) \vee y > 2$
 $\Leftrightarrow (x \geq 3 \wedge x < 5) \vee y > 2$
 Logo, a opção correta é a (C).

7.

7.1. $A_{[ABC]} = \frac{A_{[ABCO]}}{2} = \frac{36}{2} = 18$
 $V_{[ABCE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABC]} \times 8 = \frac{1}{3} \times 18 \times 8 = 48$

Logo, o volume da pirâmide $[ABCE]$ é 48 cm³.

7.2. Uma vez que $A_{[ABCO]} = 36$, então $\overline{AB} = \overline{OA} = 6$.
 Assim, $A(6, 0, 0)$, $B(6, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$ e $E(6, 6, 8)$.

7.3.

7.3.1. $y = 6$

7.3.2. $x = 6 \wedge z = 8$

7.3.3. $0 \leq x \leq 6 \wedge y = 6 \wedge z = 0$

7.4.

7.4.1. $A + \vec{OF} = E$

7.4.2. $\vec{OC} - \vec{EC} = \vec{OC} + \vec{CE} = \vec{OE}$

7.4.3. $\vec{OF} + \vec{ED} = \vec{AD}$

7.4.4. $\|\vec{AB} + \vec{CF}\| = \|\vec{AB} + \vec{BE}\| = \|\vec{AE}\|$
 $\|\vec{AE}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BE}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{AE}\|^2 = 6^2 + 8^2$
 $\Leftrightarrow \|\vec{AE}\|^2 = 100$

Logo, $\|\vec{AE}\| = \sqrt{100} = 10$.

7.5. $H = B + \frac{1}{4} \vec{CF} = (6, 6, 0) + \frac{1}{4} (0, 0, 8) = (6, 6, 2)$

Seja M o ponto médio de $[DH]$.

$M = \left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{8+2}{2} \right) = (6, 3, 5)$

$\|\vec{HM}\| = \sqrt{(6-6)^2 + (6-3)^2 + (2-5)^2} =$
 $= \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18}$

Logo, uma condição que define a esfera da qual os pontos D e H são as extremidades do seu diâmetro é $(x-6)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 \leq 18$.

8.

8.1. Abcissa do vértice da parábola: $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

Uma expressão analítica da função f é do tipo $f(x) = a(x+1)(x-2)$, onde $a \in \mathbb{R}^+$.

Tem-se que $f(0) = -2 \Leftrightarrow a(0+1)(0-2) = -2$
 $\Leftrightarrow a = 1$.

Logo, $f(x) = (x+1)(x-2)$.

Assim, a ordenada do vértice é:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = -\frac{9}{4}$

Então, $D'_f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

8.2.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$g(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$f(x) \times g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, 2[$

8.3. $f^{-1}(-2) + g \circ f(2) = 0 + g(0) = 0 + 1 = 1$

8.4. O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f através de uma translação associada ao vetor $(1, 0)$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Ox dos pontos de ordenada negativa e de uma translação segundo o vetor $(0, -1)$. Logo, a opção correta é a (D).

9. $x^3 + 2x = 2x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

A equação dada é possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\{0, 1\}$.

Logo, a opção correta é a (C).

10.

10.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{3+2+4+1+7}{5} = 3,4$

10.2. $SS_x = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 =$
 $= (3-3,4)^2 + (2-3,4)^2 + (4-3,4)^2 + (1-3,4)^2 +$
 $+ (7-3,4)^2 =$
 $= 0,16 + 1,96 + 0,36 + 5,76 + 12,96 =$
 $= 21,2$

$$10.3. s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{5-1}} = \sqrt{\frac{21,2}{4}} \approx 2,3$$

11. Ordenando os dados, vem:

147,6	234,5	308,1
160,3	240,6	327,9
178,4	241,3	352,3
179,6	252,8	456,0
210,1	307,7	497,3

$$Me = x_{\left(\frac{15+1}{2}\right)} = x_{(8)} = 241,3$$

Teste n.º 1

GRUPO I

1. Recorrendo à Lei dos Senos, tem-se que:

$$\frac{\sin \alpha}{6} = \frac{\sin 45^\circ}{5}$$

Assim:

$$\frac{\sin \alpha}{6} = \frac{\sin 45^\circ}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{6 \sin 45^\circ}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

Logo, a opção correta é a (C).

2. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Tem-se que $OM = \sin \alpha$ e $AM = MB = OC = \cos \alpha$.

Assim:

$$A_{[ABCO]} = \frac{(2 \cos \alpha + \cos \alpha) \times \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{3 \cos \alpha \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

Logo, a opção correta é a (A).

3. A opção (A) é falsa, uma vez que se $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tem-se $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\sin x \times \cos x < 0$.

A opção (B) é verdadeira, uma vez que se $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ tem-se $\sin x < 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\sin x \times \cos x < 0$.

A opção (C) é falsa, uma vez que se $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tem-se $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\frac{\sin x}{\cos x} < 0$.

A opção (D) é falsa, uma vez que se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tem-se $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, neste intervalo, para qualquer valor de x , tem-se $\frac{\sin x}{\cos x} > 0$.

4. $\frac{11\pi}{18} - \left(-\frac{\pi}{18}\right) = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$, que é o período positivo mínimo da função f .
Logo, a opção correta é a (D).

5. Sabe-se que $\cos \theta = -\frac{1}{5}$.

$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ e $-\sin \theta \neq \frac{1}{5}$ porque

$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção (A).

$\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta$ e $-\sin \theta \neq \frac{1}{5}$ porque

$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção (B).

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$ e $\cos \theta \neq \frac{1}{5}$, o que exclui a opção (C).

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$, pelo que a opção (D) é a correta.

GRUPO II

1.

$$1.1. -1 \leq \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -3$$

$$\Leftrightarrow 8 \geq 5 - 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 2$$

Ou seja, $D_f = [2, 8]$.

$$1.2. f(x) = 8 \Leftrightarrow 5 - 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1.3. f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 5 - 3 \sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right) + 5 -$$

$$- 3 \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 10 - 3 \sin\left(3x - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 10 - 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 10, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

2.

2.1. $g(0) = 3 + \arccos(1) = 3 + 0 = 3$

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 + \arccos\left(2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right) = 3 + \arccos\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 3 + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + \frac{\pi}{3}$$

2.2. $g(x) = 3 + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3 + \arccos(2x + 1) = 3 + \frac{\pi}{6}$
 $\Leftrightarrow \arccos(2x + 1) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 $\Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

3.

3.1. $A_{[AEF]} = A_{[ABCD]} - A_{[ABE]} - A_{[AFD]} - A_{[ECF]}$

$$A_{[ABCD]} = 1 \times 1 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BE}}{1} \Leftrightarrow \overline{BE} = \operatorname{tg} x$$

Nas condições do enunciado, tem-se que $\overline{BE} = \overline{DF}$, logo $\overline{DF} = \operatorname{tg} x$. Além disso, $\overline{EC} = \overline{CF} = 1 - \operatorname{tg} x$. Logo:

$$A_{[ABE]} = A_{[AFD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2} \text{ e}$$

$$A_{[ECF]} = \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \times (1 - \operatorname{tg} x)}{2} = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[AEF]} &= 1 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{2} = \\ &= 1 - \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} + \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x} = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cos^2 x}, \text{ como se pretendia demonstrar.} \end{aligned}$$

3.2. $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Uma vez que $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, tem-se que $x = 0$.

3.3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}$
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{9} &= \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13} \\ \text{Logo, } A(x) &= 1 - \frac{1}{2 \times \frac{9}{13}} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

4. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 6^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 136$$

$$\text{Logo, } \overline{BD} = \sqrt{136}.$$

Recorrendo à Lei dos Cossenos:

$$\sqrt{136}^2 = 10^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times 10 \times \overline{BC} \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 136 = 100 + \overline{BC}^2 - 10 \overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 - 10 \overline{BC} - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \times 36}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10 \pm 2 \sqrt{61}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 5 \pm \sqrt{61}$$

$$\text{Logo, } \overline{BC} = 5 + \sqrt{61}.$$

Assim, o perímetro do quadrilátero $[ABCD]$ é:

$$10 + 6 + 10 + 5 + \sqrt{61} = 31 + \sqrt{61} \text{ m}$$

Teste n.º 2

GRUPO I

1. $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}} \Leftrightarrow x = \frac{180}{\pi}$

Assim, $x \approx 57^\circ$.

Logo, a opção correta é a (D).

2. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: 3 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cálculo auxiliar

$$3 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Então, } D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \wedge x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \wedge\right.$$

$$\left. \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}. \text{ Assim, } \frac{\pi}{4} \in D_f.$$

Logo, a opção correta é a (A).

3. $m_r = \operatorname{tg}(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta r é da forma

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Logo, a opção correta é a (D).

$$\begin{aligned}
 4. \vec{AB} \cdot \frac{1}{2} \vec{BA} &= \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{BA} = \\
 &= \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BA}\| \times \cos 180^\circ = \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times (-1) = \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a (B).

$$\begin{aligned}
 5. \vec{r}(a, -3, b), \vec{u}(2, 1, 1), \vec{v}(1, 1, -1) \\
 \begin{cases} (a, -3, b) \cdot (2, 1, 1) = 0 \\ (a, -3, b) \cdot (1, 1, -1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3 + b = 0 \\ a - 3 - b = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ a - 3 - 3 + 2a = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1. Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 60^\circ}{a} &= \frac{\sin 45^\circ}{b} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{b} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}b}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{3}b = \sqrt{2}a
 \end{aligned}$$

Como $a - b = \sqrt{3}$, ou seja, $a - \sqrt{3} = b$, então:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3}(a - \sqrt{3}) &= \sqrt{2}a \Leftrightarrow \sqrt{3}a - 3 - \sqrt{2}a = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})a = 3 \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} \\
 &\Leftrightarrow a = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 21. f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x + \sin x \cos x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos x (1 + \sin x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -1 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Uma vez que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então f não tem zeros.

$$\begin{aligned}
 22. \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -2 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = -2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \\
 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \\
 \text{Como } x &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ então } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{Como } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ então } \sin x = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \\
 &= -\sin \alpha + \cos \alpha (-\sin \alpha) = \\
 &= -\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \\
 &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \\
 &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5} = \\
 &= -\frac{2 + 2\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

$$23. \overline{AB} = 2 \cos \beta$$

Altura = $1 + \sin \beta$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\frac{2 \cos \beta \times (1 + \sin \beta)}{2} = \cos \beta + \sin \beta \cos \beta = f(\beta)$$

$$\begin{aligned}
 24. \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \times \cos x = \\
 &= \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} \times \cos x = \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} \times \cos x = \\
 &= (1 + \sin x) \cos x = \\
 &= \cos x + \sin x \cos x = \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, u+v}) = \\
 &= 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\
 &= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Por outro lado, } \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = \\
 &= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + \vec{u} \cdot \vec{v}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } 4 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} - 4.$$

4.

$$41. F\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right); \vec{OF}\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right); S\left(\frac{5}{2}, 5, z\right); \vec{OS}\left(\frac{5}{2}, 5, z\right)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \vec{OF} \cdot \vec{OS} &= 50 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}, 5, 5\right) \cdot \left(\frac{5}{2}, 5, z\right) = 50 \\
 &\Leftrightarrow \frac{25}{4} + 25 + 5z = 50 \\
 &\Leftrightarrow 5z = \frac{75}{4} \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{15}{4}
 \end{aligned}$$

$$4.2. P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right); Q(0, 5, 0); R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$$

$$\vec{QP} = P - Q = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) - (0, 5, 0) = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right)$$

$$\vec{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$$

$$\|\vec{QP}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$$

$$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$\|\vec{QR}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$$

$$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right) =$$

$$= -\frac{25}{4} + 0 + 0 = -\frac{25}{4}$$

Então:

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = \|\vec{QP}\| \cdot \|\vec{QR}\| \times \cos(\hat{PQR})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{25}{4} = \frac{\sqrt{61}}{2} \times \frac{\sqrt{61}}{2} \times \cos(\hat{PQR})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\hat{PQR}) = -\frac{25}{61}$$

Logo, $\hat{PQR} = \cos^{-1}\left(-\frac{25}{61}\right) \approx 114,2^\circ$.

$$4.3. G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right); B\left(\frac{5}{2}, 5, 0\right); H\left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right)$$

$$\vec{BH} = H - B = \left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) = (-5, -5, 5)$$

Logo, a equação pretendida é da forma
 $-5x - 5y + 5z + d = 0$.

Uma vez que G pertence ao plano:

$$-5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 5 \times 5 + 5 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{25}{2}$$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no vértice G e é perpendicular ao vetor $\vec{BH}$ é:

$$-5x - 5y + 5z - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x + 10y - 10z + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z + 5 = 0$$

$$4.4. P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right); Q(0, 5, 0); R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$$

$$\vec{QP} = P - Q = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) - (0, 5, 0) = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right)$$

$$\vec{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$$

Logo, $PQR: (x, y, z) =$

$$= \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) + s\left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) + t\left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$4.5. A\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right); G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$$

$$\vec{AG} = G - A = \left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right) = (-5, 5, 5)$$

Assim, um sistema de equações paramétricas que define a reta AG é:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5k \\ y = 5k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 5k \end{cases}$$

Teste n.º 3

GRUPO I

$$1. r: x - 2y = 3 \Leftrightarrow -2y = -x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

O declive da reta r é $\frac{1}{2}$, logo o declive da reta s , perpendicular a r , é -2 . Um vetor diretor da reta s pode ser então $(1, -2)$.

Logo, a opção correta é a (D).

$$2. (\vec{AB}, \vec{BC}) \text{ é um ângulo agudo, pelo que } \vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0.$$

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) \text{ é um ângulo obtuso, pelo que } \vec{AB} \cdot \vec{CD} < 0.$$

$$(\vec{AB}, \vec{DE}) \text{ é um ângulo obtuso, pelo que } \vec{AB} \cdot \vec{DE} < 0.$$

$$(\vec{AB}, \vec{EA}) \text{ é um ângulo agudo, pelo que } \vec{AB} \cdot \vec{EA} > 0.$$

Logo, a opção correta é a (B).

3. O ponto $(1, 0, 1)$ não pertence à reta r porque:

$$\begin{cases} 1 = 1 - k \\ 0 = 2 + 0k \\ 1 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 = 2 \text{ é um sistema impossível.} \\ k = -1 \end{cases}$$

O ponto $(1, 2, 2)$ pertence ao plano α porque:

$$\begin{cases} 1 = 1 + s - t \\ 2 = -1 + 2s + t \\ 2 = 1 - s + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ 3 = 2s + s \\ 1 = -s + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

O vetor $(1, 2, -1)$ não é normal ao plano α , uma vez que é um vetor paralelo a esse plano. A reta r não é perpendicular ao plano α , uma vez que o seu vetor diretor $(-1, 1, 2)$ é um vetor paralelo a esse plano.

Logo, a opção correta é a (B).

$$4. u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) - 1}{2(n+1) + 1} - \frac{2n - 1}{2n + 1} =$$

$$= \frac{2n + 1}{2n + 3} - \frac{2n - 1}{2n + 1} =$$

$$= \frac{(2n + 1)^2 - (2n - 1)(2n + 3)}{(2n + 3)(2n + 1)} =$$

$$= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n + 3}{(2n + 3)(2n + 1)} =$$

$$= \frac{4}{(2n + 3)(2n + 1)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

Assim, o primeiro termo da sucessão, $u_1 = \frac{1}{3}$, é o maior dos minorantes.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 1$$

Logo, 1 é o menor dos majorantes da sucessão.

Assim, o conjunto dos minorantes de (u_n) é $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right]$

e o conjunto dos seus majorantes é $[1, +\infty[$.

Logo, a opção correta é a (A).

5. A afirmação (I) é falsa, porque, por exemplo, a sucessão definida por $\left(-\frac{1}{n}\right)^n$ é um infinitésimo, mas não é uma sucessão monótona.

A afirmação (II) é verdadeira, já que um infinitésimo é uma sucessão que converge para 0.

A afirmação (III) é verdadeira, uma vez que toda a sucessão convergente é limitada.

Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1.

11. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 8 + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

Logo, $C(-1, 2)$.

$$\vec{CB} = (-4, 4) - (-1, 2) = (-3, 2)$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3, 2) \cdot (x+4, y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 12 + 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 3x + 20$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 10, \text{ que é a equação reduzida da reta } s.$$

12. $\vec{DA} = \vec{CB} = (-3, 2)$ é um vetor diretor da reta r .

Logo, o declive da reta r é $m = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$.

A inclinação da reta r é o valor α tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 146,3^\circ.$$

13. Como o declive da reta r é $m = -\frac{2}{3}$, a sua equação

reduzida é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como o ponto

D pertence à reta r , então:

$$5 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$$

Logo, $r: y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$.

O ponto A é a interseção das retas r e s :

$$\frac{3}{2}x + 10 = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9x + 60 = -4x + 34$$

$$\Leftrightarrow 13x = -26$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Então, $y = \frac{3}{2} \times (-2) + 10 = 7$. Logo, $A(-2, 7)$.

F é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox ,

$$\text{logo } -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$$

Então, $F\left(\frac{17}{2}, 0\right)$.

E é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox ,

$$\text{logo } \frac{3}{2}x + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x = -20 \Leftrightarrow x = -\frac{20}{3}$$

Então, $E\left(-\frac{20}{3}, 0\right)$.

Assim, $\overline{EF} = \frac{17}{2} + \frac{20}{3} = \frac{91}{6}$.

Logo, a área do triângulo $[AEF]$ é dada por:

$$\frac{\frac{91}{6} \times 7}{2} \approx 53,08 \text{ u.a.}$$

2.

21. Um vetor normal ao plano α é $\vec{a}'(1, 2, -1)$. Este vetor é também normal ao plano β , uma vez que os planos são paralelos.

Como o ponto A pertence ao plano β , então:

$$1(x-1) + 2(y-3) - 1(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2y - 6 - z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z - 9 = 0, \text{ que é uma equação cartesiana do plano } \beta.$$

22. O ponto A é exterior à reta r :

$$(1, 3, -2) = (1, -1, 1) + k(-1, 1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 - k \\ 3 = -1 + k \\ -2 = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 3 = -1 \\ -2 = 1 \end{cases} \text{ é um sistema}$$

impossível. Logo, o ponto A não pertence à reta r .

Um ponto da reta r é $B(1, -1, 1)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-1, 1, 2)$.

Assim, uma equação vetorial do plano γ é $(x, y, z) = (1, 3, -2) + s(0, -4, 3) + t(-1, 1, 2)$, $s, t \in \mathbb{R}$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -4, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4b + 3c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ -a + \frac{3}{4}c + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ a = \frac{11}{4}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(\frac{11}{4}c, \frac{3}{4}c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $c = 4$, por exemplo, obtém-se $\vec{u}(11, 3, 4)$.

Então, $\vec{u}(11, 3, 4)$ é um vetor normal ao plano γ e

$A(1, 3, -2)$ é um ponto do plano:

$$11(x-1) + 3(y-3) + 4(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x - 11 + 3y - 9 + 4z + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x + 3y + 4z - 12 = 0, \text{ que é uma equação cartesiana do plano } \gamma.$$

$$2.3. \|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}\| = 1$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -1$$

Seja θ a amplitude do ângulo que a reta r faz com o vetor $\vec{v}$.

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

Logo, $\theta \approx 114,1^\circ$.

3.

$$3.1. u_{n+1} - u_n = u_n + 2 - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

3.2. Uma vez que $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$, então a sucessão é uma progressão aritmética de diferença 2.

$$u_n = 4 + 2(n-1) = 4 + 2n - 2 = 2n + 2$$

3.3. A sucessão (u_n) é uma sucessão monótona crescente, logo $u_1 = 2$ é um minorante da sucessão.

A sucessão (u_n) não tem majorantes, uma vez que $\lim u_n = \lim (2n + 1) = +\infty$.

Logo, a sucessão (u_n) não é limitada.

$$3.4. \sum_{k=5}^{20} u_k = S_{20} - S_4 =$$

$$= \frac{4 + (2 \times 20 + 2)}{2} \times 20 - \frac{4 + (2 \times 4 + 2)}{2} \times 4 =$$

$$= 460 - 28 = 432$$

4.

$$4.1. a_n = \frac{1}{4} a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica e a sua razão é $\frac{1}{4}$.

$$a_1 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4 \times 4^{1-n} = 4^{2-n}$$

$$4.2. S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{16}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$\lim S_n = \lim \frac{16}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{16}{3} (1 - 0) = \frac{16}{3}$$

A sucessão (S_n) é convergente.

5. Se $n = 1$:

$$4 \times 1 - 3 = \frac{1}{2} \times 1 \times (4 \times 1 - 2)$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 = \frac{1}{2} \times 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

$$\text{Hipótese: } 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3) = \frac{1}{2} n(4n - 2)$$

$$\text{Tese: } 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3) + (4n + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (n + 1)(4n + 2)$$

Demonstração:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3) + (4n + 1) =$$

$$= \frac{1}{2} n(4n - 2) + (4n + 1) =$$

$$= \frac{4n^2 - 2n}{2} + 4n + 1 =$$

$$= 2n^2 + 3n + 1 =$$

$$= 2(n + 1) \left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (n + 1)(2n + 1) =$$

$$= \frac{1}{2} (n + 1)(4n + 2)$$

$$\text{Logo, } 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3) = \frac{1}{2} n(4n - 2),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.$$

Teste n.º 4

GRUPO I

1. Uma vez que $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$ e $a_3 = -\frac{1}{4}$, a sucessão (a_n) não é monótona.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\text{Se } n \text{ é par: } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} < 0 \text{ e } \lim a_n = 0.$$

Logo, $a_2 = \frac{1}{3}$ é o maior dos termos de ordem par e é um majorante desta subsucessão.

Se n é ímpar: $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$ e $\lim a_n = 0$.

Logo, $a_1 = -\frac{1}{2}$ é o maior dos termos de ordem ímpar e é um minorante desta subsucessão.

Como $-\frac{1}{2} \leq a_n < \frac{1}{3}$, então a sucessão (a_n) é limitada.

Logo, a opção correta é a (A).

- 2.** Sendo (b_n) uma progressão geométrica de razão 3, então:

$$b_5 = b_3 \times 3^2 \Leftrightarrow 8x + 1 = (x - 1) \times 9$$

$$\Leftrightarrow 8x + 1 = 9x - 9$$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

$$\text{Assim, } b_4 = b_3 \times 3 = (10 - 1) \times 3 = 27.$$

Logo, a opção correta é a (C).

- 3.** $\lim u_n = \lim \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$

$$\lim v_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\lim w_n = \lim \frac{n^2}{n+2} = \lim \frac{n}{1+\frac{2}{n}} = +\infty$$

Assim, são infinitésimos as sucessões (u_n) e (v_n) .

Logo, a opção correta é a (A).

- 4.** $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(2)}{0^+} = -\infty$, uma vez que $f(2) < 0$.

Logo, a opção correta é a (C).

- 5.** $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

Assim, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

Assim, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

Logo, a opção correta é a (A).

GRUPO II

1.

- 1.1.** Se n é ímpar: $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$.

Então, uma vez que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, tem-se $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$.

$$\text{Se } n \text{ é par: } \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Então, uma vez que $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, tem-se

$$0 > -\frac{2}{n+1} \geq -2 \Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{2}{n+1} \geq 0.$$

Logo, $0 \leq a_n \leq 2$, ou seja, (a_n) é uma sucessão limitada.

1.2.

$$\text{1.2.1. } a_1 = 3 \quad a_2 = \frac{4}{3}$$

Logo, $a_2 - a_1 < 0$, o que significa que a proposição é falsa.

- 1.2.2.** Se existir um valor de n ímpar nas condições do enunciado, então:

$$\frac{2n+1}{n} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 18n+9 = 16n$$

$$\Leftrightarrow 2n = -9$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}, \text{ o que é impossível já que } n$$

é um número natural.

Se existir um valor de n par nas condições do enunciado, então:

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 18n = 16n + 16$$

$$\Leftrightarrow 2n = 16$$

$$\Leftrightarrow n = 8, \text{ que é um número natural e par.}$$

Logo, a proposição é verdadeira.

- 1.3.** Se n é ímpar:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Se n é par:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

Logo, a sucessão (a_n) é convergente para 2.

2.

$$\text{2.1. } u_3 = 12$$

$$u_{10} = 47 \Leftrightarrow u_3 + (10-3)d = 47$$

$$\Leftrightarrow 12 + 7d = 47$$

$$\Leftrightarrow 7d = 35$$

$$\Leftrightarrow d = 5$$

$$\text{Logo, } u_n = u_3 + (n-3)d = 12 + (n-3) \times 5 = 12 + 5n - 15 = 5n - 3.$$

$$\text{2.2. } u_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$$

$$S_n = 555 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 555$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + 5n - 3}{2} \times n = 555$$

$$\Leftrightarrow (5n - 1)n = 1110$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - n - 1110 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 22 \cdot 200}}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 149}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = 15 \vee n = -74$$

Logo, é necessário somar os 15 primeiros termos da sucessão.

3.

3.1. Se $n = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

Para $n > 1$:

Hipótese: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

Tese: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$

Demonstração:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{(2^n - 1) \times 2 + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 2 + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

Logo, $v_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$, como queríamos demonstrar.

3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$

4.

4.1. $x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0$

Logo, $f(x) = \frac{ax+b}{3x+4}$.

Como $y = \frac{2}{3}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico

de f , então $\frac{a}{3} = \frac{2}{3}$, logo $a = 2$.

Então, $f(x) = \frac{2x+b}{3x+4}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \times \frac{1}{2} + b}{3 \times \frac{1}{2} + 4} = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

Logo, $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$.

4.2. O ponto A pertence ao eixo Oy , logo a sua abscissa é 0.

$$f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{3 \times 0 + 4} = -\frac{1}{4}$$

Assim, $A\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

5.

5.1. $g(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2x}{x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$, a função g é contínua à esquerda em $x = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, a função g não é contínua em $x = 0$.

5.2. Assíntotas verticais:

Uma vez que a função g é contínua para $x < 0$ e para $x > 0$, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de g .

Da alínea anterior, vem que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Portanto, a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g .

6. A bissetriz dos quadrantes pares é a reta de equação $y = -x$.

Como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f , tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{f(x)}{x} = -1$$

Logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{f(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\frac{x+1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \\ &= \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de g .

Teste n.º 5

GRUPO I

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Logo, a opção correta é a (B).

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x-1} - 1) = \sqrt{1-1} - 1 = f(1)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x^2+x-2)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x+2)}{x+1} = \frac{3k}{2} \end{aligned}$$

Ora, para que a função f seja contínua em $x = 1$,
 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Então, $\frac{3k}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$.
 Logo, a opção correta é a (C).

3. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, então $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

O gráfico de g obtém-se do gráfico de f segundo uma translação associada ao vetor de coordenadas $(2, 1)$. Aplicando a mesma translação às assíntotas de f obtêm-se as assíntotas de g , que são então $x = 2$ e $y = 3$.

Logo, a opção correta é a (A).

$$4. f'(x) = \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)' = \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-4}{\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2} = \frac{-4}{(-2)^2} = -1$$

Assim, sendo α a inclinação da reta t , tem-se $\text{tg } \alpha = -1 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$, ou seja, $\alpha = 135^\circ$.
 Logo, a opção correta é a (C).

$$5. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, f é decrescente em $]-1, 1[$, f é crescente em $]1, +\infty[$ e f tem um máximo para $x = -1$, ou seja, a afirmação “ f tem um mínimo para $x = -1$ ” é uma afirmação falsa.

Logo, a opção correta é a (D).

GRUPO II

1.

$$1.1. \text{ Sendo } f(x) = \frac{x-5}{x-3}, \text{ então } g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{x-3}{x-5}.$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x-5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Uma vez que $g(x) = \frac{x-3}{x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$, então $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g . Logo,
 $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.2.

$$1.2.1. h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-5}{2x-6} =$$

$$= \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

Como $h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, então h não é contínua em $x = 1$.

$$1.2.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{2x-6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{2 - \frac{6}{x}} = \frac{1}{2}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h .

1.3.

$$1.3.1. f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \wedge x-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Assim, } A(5, 0), B(x, f(x)) = \left(x, \frac{x-5}{x-3}\right) \text{ e } C(x, 0).$$

Logo:

$$a(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{(5-x) \times \frac{x-5}{x-3}}{2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x-6}$$

$$1.3.2. a(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x-6} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x-6} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25 - 8x + 24}{2x-6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x-6} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \wedge 2x-6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$a(1) = \frac{1-5}{1-3} = 2$$

Logo, $B(1, 2)$.

1.3.3. Uma vez que $x \in]-\infty, 3[$, só faz sentido estudar a existência de assíntotas oblíquas ao gráfico de a quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x^2 - 6x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{10}{x} - \frac{25}{x^2}}{2 - \frac{6}{x}} = -\frac{1}{2} \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a(x) + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6} + \frac{1}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 10x - 25 + x^2 - 3x}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x - 25}{2x - 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - \frac{25}{x}}{2 - \frac{6}{x}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de a .

$$\begin{aligned} 1.4. f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x-5}{x-3} - 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5 - 3x + 9}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 4}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x - 3} = 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2.1. C'(t) &= \left(\frac{2t+1}{t^2+20} \right)' = \frac{2(t^2+20) - 2t(2t+1)}{(t^2+20)^2} = \\ &= \frac{2t^2 + 40 - 4t^2 - 2t}{(t^2+20)^2} = \frac{-2t^2 - 2t + 40}{(t^2+20)^2} \end{aligned}$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 2t + 40}{(t^2+20)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2t^2 - 2t + 40 = 0 \wedge (t^2+20)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \vee t = -5$$

Como $t \geq 0$, então $t = 4$.

t	0		4	$+\infty$
Sinal de C'		+	0	-
Varição de C		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Logo, a concentração do medicamento é máxima 4 horas após a sua administração.

$$2.2. \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{t^2+20} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{20}{t^2}} = 0$$

Quando $t \rightarrow +\infty$, a concentração do medicamento na corrente sanguínea tende para zero.

3.

$$3.1. m = f'(1) = \frac{1-3}{2 \times 1 \times 2^2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

A equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é da forma $y = -\frac{1}{4}x + b$.

O ponto A pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1, logo:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$$

Assim, a equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} 3.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{x^2 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1} = \\ &= f'(1) \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 1} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Teste n.º 6

GRUPO I

1. Como t.m.v._[a,b] (f) = 3, então o declive da reta AB é 3.

$\overline{OC} = \overline{CD} = 2$, logo $\overline{OD} = 4$ e $D(0, 4)$.

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = 3x + 4$.

Logo, a opção correta é a (D).

2. Uma vez que o gráfico de f é uma reta, então o gráfico da função f pode ser uma parábola, ou seja, f é uma função polinomial de grau 2.

Por outro lado, $f'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$ para $x \in]1, +\infty[$ e $f(1) = 0$, então a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e decrescente em $]1, +\infty[$, ou seja, a parábola que a representa tem a concavidade voltada para baixo.

Se $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, então $f'(x) = -2x + 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Se $f(x) = -x^2 + 2x + 2$, então $f'(x) = -2x + 2$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Logo, a opção correta é a (C).

3. $d(t) = 5t^2$, logo $d'(t) = 10t$.

Assim, $d'(10) = 10 \times 10 = 100$, pelo que a velocidade do corpo ao fim de 10 segundos é 100 m/s.

Logo, a opção correta é a (B).

4. No diagrama 1 os pontos estão sobre a mesma reta de declive positivo, pelo que $r_1 = 1$.

No diagrama 2 observa-se uma correlação linear negativa, pelo que $r_2 = -0,6$.

No diagrama 3 não há correlação, pelo que $r_3 = 0$. Logo, a opção correta é a (A).

5. Uma vez que o declive da reta de mínimos quadrados é 1,41, então a equação dessa reta é da forma $y = 1,41x + b$.

O ponto de coordenadas (2,15; 1,99) pertence à reta de mínimos quadrados.

$1,99 = 1,41 \times 2,15 + 2,15$ é uma proposição falsa.

$1,99 = 1,41 \times 2,15 + 1,99$ é uma proposição falsa.

$1,99 = 1,41 \times 2,15 - 1,04$ é uma proposição verdadeira.

Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1.

$$1.1. f'(1) = \frac{-4}{1+2+1} = -1$$

Logo, como existe derivada finita da função f em $x = 1$, e como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, pode concluir-se que f é contínua em $x = 1$.

$$1.2. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{x^4 + 2x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+
Variação de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo em $x = 0$.

$$1.3. (f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \times g'(2) = f'(1) \times (-1) = (-1) \times (-1) = 1$$

$$2. \text{ Tem-se que } f(2) = 3 \Leftrightarrow 8 + 2a + b = 3 \Leftrightarrow b = -5 - 2a$$

$$x + 5y = 6 \Leftrightarrow 5y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$$

$$f'(x) = 4x + a$$

$$\text{Assim, } f'(2) = 5 \Leftrightarrow 8 + a = 5 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$\text{Logo, } b = -5 + 6 = 1.$$

3.

3.1. A variável explicativa é o número de horas de estudo por dia. A variável resposta é a classificação.

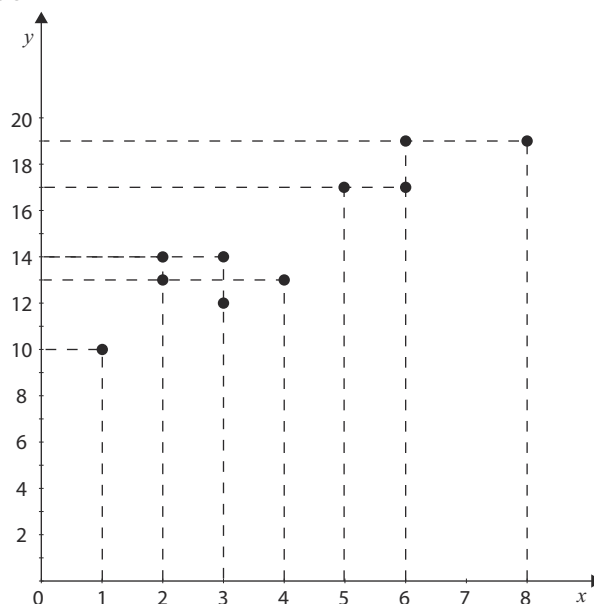
3.2. Média do número de horas de estudo por dia:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 3 + 1 + 6 + 8 + 3 + 2 + 5}{10} = 4$$

Média das classificações:

$$\bar{y} = \frac{14 + 13 + 17 + 14 + 10 + 19 + 19 + 12 + 13 + 17}{10} = 14,8$$

3.3.



Existe correlação linear positiva.

$$3.4. r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{55}{\sqrt{44 \times 83,6}} \approx 0,91$$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
2	14	-2	-0,8	1,6	4	0,64
4	13	0	-1,8	0	0	3,24
6	17	2	2,2	4,4	4	4,84
3	14	-1	-0,8	0,8	1	0,64
1	10	-3	-4,8	14,4	9	23,04
6	19	2	4,2	8,4	4	17,64
8	19	4	4,2	16,8	16	17,64
3	12	-1	-2,8	2,8	1	7,84
2	13	-2	-1,8	3,6	4	3,24
5	17	1	2,2	2,2	1	4,84
				$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 55$	$SS_x = 44$	$SS_y = 83,6$

$$3.5. r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow a = r \sqrt{\frac{SS_y}{SS_x}}$$

$$\text{Logo, } a \approx 0,91 \sqrt{\frac{83,6}{44}} \approx 1,25.$$

$$3.6. y = 1,25x + b$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (4; 14,8)$ pertence à reta, logo:

$$14,8 = 1,25 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 9,8$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 1,25x + 9,8$.

3.7. $1,25 \times 7 + 9,8 = 18,55$ seria a classificação esperada de um aluno que tenha estudado 7 horas por dia.

$$3.8. 16 = 1,25x + 9,8 \Leftrightarrow 1,25x = 6,2 \Leftrightarrow x = 4,96$$

Um aluno que obteve 16 valores teria estudado, aproximadamente, 5 horas por dia.

Teste Global

GRUPO I

$$\begin{aligned} 1. \sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right) + \cos\left(\arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a (D).

2. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é isósceles e que $AC = BC$, então os vetores $\vec{CP}$ e $\vec{MP}$, onde M é o ponto médio de $[AB]$ são colineares. Assim, o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0$ é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Logo, a opção correta é a (A).

$$3. u_n = -2 \Leftrightarrow -\frac{5n+10}{3n} = -2 \Leftrightarrow 5n+10 = 6n \Leftrightarrow n = 10$$

Ou seja, existe um termo da sucessão (u_n) igual a -2 .

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{5n+5+10}{3n+3} + \frac{5n+10}{3n} =$$

$$= -\frac{5n+15}{3(n+1)} + \frac{5n+10}{3n} =$$

$$= \frac{-(5n+15)n + (5n+10)(n+1)}{3(3n+3)n} =$$

$$= \frac{10}{3n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona crescente.

$u_1 = -\frac{5+10}{3} = -5$ é um minorante da sucessão e 0 é um seu majorante, uma vez que todos os seus termos são negativos, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5n+10}{3n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5 + \frac{10}{n}}{3}\right) = -\frac{5}{3}, \text{ ou seja,}$$

a sucessão (u_n) não é divergente.

Logo, a opção correta é a (D).

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x + 3) = 11$$

$f_1(1) = 3 + 2 = 5$, pelo que a função f_1 não representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

$f_2(1) = 1 + 1 = 2$, mas $f_2(4) = 4 + 1 = 5$, pelo que a função f_2 não representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

$f_3(1) = 3 - 1 = 2$ e $f_3(4) = 12 - 1 = 11$, pelo que a função f_3 representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

Logo, a opção correta é a (C).

5. Como o coeficiente de correlação não é igual ao declive da reta de mínimos quadrados, excluem-se as hipóteses (B) e (C).

$$0,25 \times 4 + 3,6 = 4,6$$

Logo, a opção correta é a (A).

GRUPO II

1.

$$11. \overline{OC} = 1$$

Seja D a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox .

$$\overline{OD} = \cos \alpha$$

$$\text{Logo, } A = \frac{\cos \alpha \times 1}{2} = \frac{\cos \alpha}{2} = f(\alpha).$$

$$12. \text{ Se } \alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ então } P\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$C(0, -1)$$

$$\vec{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) - (0, -1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Logo, o declive da reta CP é:

$$m = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Como $C(0, -1)$ pertence a esta reta, tem-se que a equação reduzida da reta CP é $y = \sqrt{3}x - 1$.

$$13. \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(-3\pi + \theta) + \text{tg}(-\pi - \theta) = -\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta) - \text{tg}(\pi + \theta) = -\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\cos \theta + \cos \theta - \text{tg} \theta = -\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg} \theta = \frac{3}{7}$$

Assim:

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{49} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{58}{49} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{49}{58}$$

$$\text{Logo, como } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos \theta = \sqrt{\frac{49}{58}} = \frac{7\sqrt{58}}{58}.$$

$$\text{Então, } f(\theta) = \frac{\cos \theta}{2} = \frac{7\sqrt{58}}{116}.$$

$$14. (1 - \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} + \text{tg} x\right) =$$

$$= (1 - \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= (1 - \sin x) \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right) = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} =$$

$$= \cos x = 2 \times \frac{\cos x}{2} = 2f(x)$$

2.

- 21.** O vetor $\vec{EF}(1, -2, -2)$ é um vetor normal ao plano ABC e o ponto $F(-2, 1, -1)$ é um ponto pertencente a esse plano.

Assim:

$$1(x+2) - 2(y-1) - 2(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 2y + 2 - 2z - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ABC .

- 22.** As retas ED e EA são retas concorrentes que definem o plano ADE .

$\vec{r}(1, -5, 1)$ é um vetor diretor da reta EA .

$\vec{s}(1, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta ED .

O ponto $(-3, 3, 1)$ é um ponto da reta EA e também do plano ADE .

Logo, $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + r(1, -5, 1) + s(1, 1, 1)$, $r, s \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano ADE .

- 23.** O ângulo AEF é o ângulo entre o vetor diretor da reta EA e o vetor $\vec{EF}$.

$\vec{r}(1, -5, 1)$ é um vetor diretor da reta EA .

$\vec{EF}(1, -2, -2)$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\|\vec{EF}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{r} \cdot \vec{EF} = 1 + 10 - 2 = 9$$

$$\cos(\hat{AEF}) = \frac{9}{3\sqrt{3} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $\hat{AEF} \approx 54,74^\circ$.

- 24.** O ponto E pertence às retas EA e ED .

$ED: (x, y, z) = (-6, 1, -2) + k'(1, 1, 1)$, $k' \in \mathbb{R}$

Assim, os pontos da reta ED são da forma $(-6 + k', 1 + k', -2 + k')$, $k' \in \mathbb{R}$

Substituindo na condição que define EA :

$$\begin{cases} -6 + k' = -3 + k \\ 1 + k' = 3 - 5k \\ -2 + k' = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = 3 + k \\ 1 + 3 + k = 3 - 5k \\ -2 + 3 + k = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 6k = -1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = \frac{17}{6} \\ k = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } E\left(-6 + \frac{17}{6}, 1 + \frac{17}{6}, -2 + \frac{17}{6}\right) = \left(-\frac{19}{6}, \frac{23}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

3.

- 3.1.** $b_1 = 15$

A sucessão é uma progressão geométrica, uma vez que a razão entre dois termos consecutivos é 0,6. Assim, $b_n = b_1 \times r^{n-1} = 15 \times 0,6^{n-1}$.

- 3.2.** $\lim S_n = \lim \left(15 \frac{1-0,6^n}{1-0,6}\right) = \frac{15}{0,4} = 37,5$

4. Se $n = 1$:

$2^{1-1} = 2^1 - 1 \Leftrightarrow 2^0 = 2 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.

$n > 1$:

Hipótese: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Tese: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Demonstração:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n =$$

$$= 2 \times 2^n - 1 =$$

$$= 2^{n+1} - 1, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Logo, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

5.

- 5.1.** f é uma função racional, logo é contínua em todo o seu domínio, ou seja, é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{2x^2+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{2x^2+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

Logo, $y = 0$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f .

- 5.2.** $g'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)' = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2+1)}{(x^2+2)^2} =$

$$= \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g'	-	0	+
Variação de g	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, a função g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo em $x = 0$.

- 5.3.** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-3}{2x^2+4} - \left(-\frac{1}{6}\right)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-3}{2x^2+4} + \frac{1}{6}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 9 + x^2 + 2}{3(x^2+2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{3(x^2+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{3(x^2+2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{3(x^2+2)} = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned}
 5.4. f'(x) &= \left(\frac{2x-3}{2x^2+4} \right)' = \frac{2(2x^2+4) - 4x(2x-3)}{(2x^2+4)^2} = \\
 &= \frac{4x^2+8-8x^2+12x}{(2x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+12x+8}{(2x^2+4)^2}
 \end{aligned}$$

Os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico da função f é horizontal são os valores de x tais que:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-4x^2+12x+8}{(2x^2+4)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow -4x^2+12x+8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2-3x-2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. a &= \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 5\bar{x}^2} = \\
 &= \frac{2819 - 5 \times \frac{72}{5} \times \frac{198}{5}}{1122 - 5 \left(\frac{72}{5} \right)^2} \approx 0,3779 \approx -0,38
 \end{aligned}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx \frac{198}{5} + 0,3779 \times \frac{72}{5} \approx 45,04$$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = -0,38x + 45,04$.

