

05.

QUESTÕES DE AULA

Materiais disponíveis em formato editável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Enunciados
Soluções

Grupo I

1. De dois ângulos, de amplitudes α e β , sabe-se que $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ e $\beta \in \left] -2\pi, -\frac{3\pi}{2} \right[$.

Então, pode afirmar-se que:

[A] $\sin \alpha \times \cos \beta > 0$

[B] $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta > 0$

[C] $\sin \beta - \sin \alpha < 0$

[D] $\sin \alpha - \cos \beta < 0$

2. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $2 \cos x = 1$.

Quantas soluções tem esta equação no intervalo $\left] -\frac{\pi}{4}, 4\pi \right[$?

[A] 2

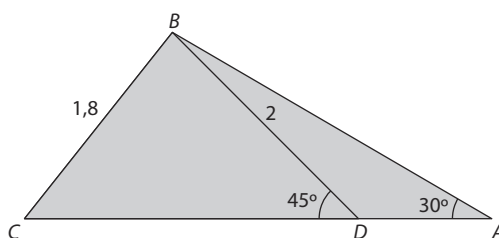
[B] 3

[C] 4

[D] 5

Grupo II

1. Tendo em conta as condições da figura, em que D pertence ao lado $[CA]$ e, numa dada unidade, $\overline{BC} = 1,8$, $\overline{BD} = 2$, $\widehat{BDC} = 45^\circ$ e $\widehat{BAD} = 30^\circ$, resolva o triângulo $[ABC]$.



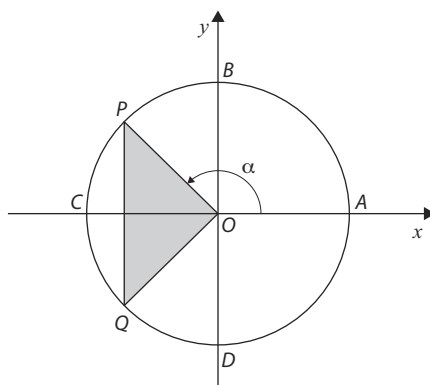
Apresente as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo e as medidas das amplitudes dos ângulos arredondadas às décimas.

Sempre que em cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

2. Considere a função f definida em $[0, \pi]$ por $f(x) = \cos x + \cos(2x)$.

Determine a área do polígono cujos vértices são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy , o círculo trigonométrico.



Os pontos A , B , C e D são os pontos de interseção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC , nunca coincidindo com B nem com C .

Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto do arco CD que tem abcissa igual à abcissa do ponto P .

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\vec{OP}$, $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

3.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $-\sin \alpha \cos \alpha$.

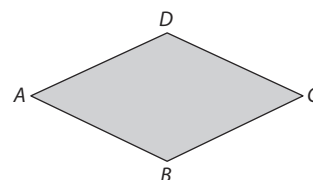
3.2. Para uma certa posição do ponto P , sabe-se que $\cos \left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{1}{4}$.

Determine, para essa posição do ponto P , a área do triângulo $[OPQ]$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Grupo I

1. Considere o losango $[ABCD]$ da figura, de lado a , e do qual se sabe que os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são equiláteros. Pode concluir-se que $\vec{AB} \cdot \vec{DB}$ é igual a:



- [A] $-\frac{a^2}{2}$
- [B] $\frac{a^2}{2}$
- [C] $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
- [D] $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
2. Considere, num referencial ortonormado do espaço, o plano α de equação $2x - z = 3$. Qual das condições seguintes define uma reta perpendicular ao plano α ?
- [A] $(x, y, z) = (1, 0, -1) + k(2, 0, 4), k \in \mathbb{R}$
- [B] $(x, y, z) = (2, 0, -1) + k(1, 0, -1), k \in \mathbb{R}$
- [C] $\frac{x}{2} = 1 - y \wedge 2z = 6$
- [D] $\frac{2x}{4} = \frac{5 - 5z}{5} \wedge y = 1$

Grupo II

1. Considere, num referencial ortonormado do plano, a circunferência de centro na origem e raio 5 e os pontos A e B da circunferência, sendo que A também pertence ao semieixo negativo das abcissas e B é um ponto do 1.º quadrante. Sabe-se ainda que a mediatriz de $[AB]$ é uma reta de declive -2 . Determine as coordenadas do ponto B .

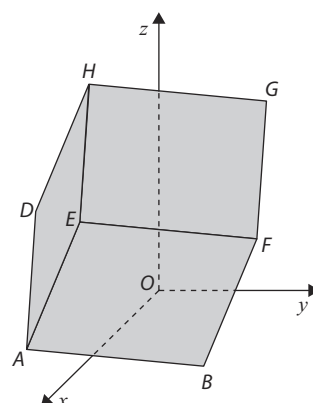
2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto C não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(11, -1, 2)$;
- o ponto B tem coordenadas $(8, 5, 0)$;
- o ponto D tem coordenadas $(5, -3, 5)$;
- o ponto E tem coordenadas $(13, 2, 8)$.

- 2.1. Prove que o plano ABE pode ser definido pela equação cartesiana $6x + 2y - 3z = 58$.

- 2.2. Escreva equações paramétricas da reta AC .



Grupo I

1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

- [A] (u_n) é monótona.
[B] (u_n) não é limitada.
[C] (u_n) é convergente para 0.
[D] $\lim u_n = +\infty$.

2. O limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ é:

- [A] $+\infty$
[B] 0
[C] $\sqrt{2} - 1$
[D] $2 + \sqrt{2}$

Grupo II

1. Seja (v_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2}{3} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 1.1. Prove, por indução matemática, que $v_n = \frac{n+1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- 1.2. Estude a sucessão (v_n) quanto à monotonia.

- 1.3. A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética?

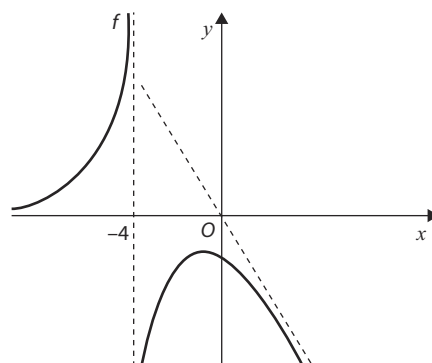
- 1.4. Indique, justificando, se a sucessão (v_n) é convergente.

- 1.5. Mostre que a sucessão (v_n) é limitada e indique o conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes dos termos da sucessão.

2. A soma dos quatro primeiros termos de uma determinada progressão geométrica de razão 2 é 75. De uma outra progressão, mas desta vez aritmética, sabe-se que a soma dos quatro primeiros termos também é 75 e que o seu primeiro termo é igual ao primeiro termo da progressão geométrica. Calcule a razão da progressão aritmética.

Grupo I

1. A figura representa parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. As retas de equações $x = -4$, $y = 0$ e $y = -3x$ são assíntotas ao gráfico de f .



- 1.1. Seja $u_n = \frac{-4n^2 + 3}{n^2}$. O valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$ é:

[A] 0 [B] -4
[C] $-\infty$ [D] $+\infty$

- 1.2. O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{f(x)} \right]$ é:

[A] 0 [B] -3
[C] $-\infty$ [D] $+\infty$

Grupo II

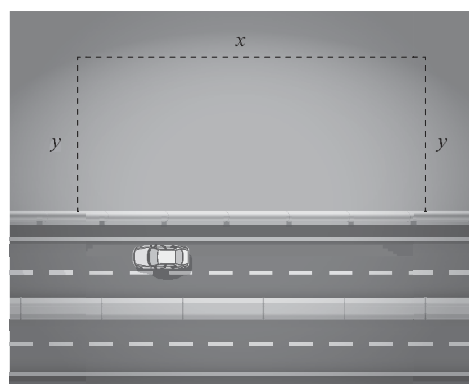
1. Considere a função f , real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} & \text{se } x < -2 \\ \frac{k - 3x}{k} & \text{se } x \geq -2 \end{cases}, \text{ com } k \neq 0$$

- 1.1. Prove que o valor de k para o qual a função é contínua em -2 é $k = -\frac{6}{5}$.

- 1.2. Utilizando $k = -\frac{6}{5}$, estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, escrevendo as suas equações, caso existam.

2. A empresa responsável pela manutenção de uma autoestrada está a planear construir uma área de descanso para os automobilistas. O parque irá ser retangular, com uma área de 5000 metros quadrados, e será vedado por uma cerca nos três lados não adjacentes à autoestrada, como indica a figura.



- 2.1. Mostre que a quantidade, em metros, de cerca necessária para vedar este parque nestas condições pode ser dada, em função do comprimento x assinalado na figura, por $P(x) = x + \frac{10\,000}{x}$.

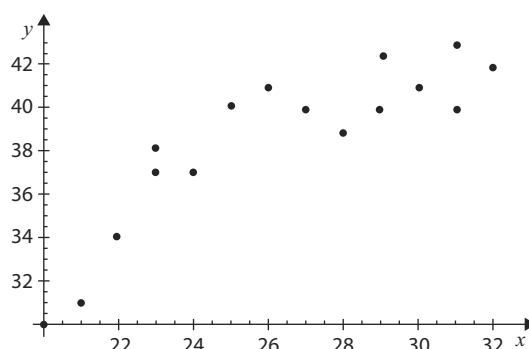
- 2.2. Determine analiticamente qual é a menor quantidade de cerca que se pode gastar neste parque. E que dimensões terá o parque nesse caso?

Grupo I

1. De uma amostra bivariada de dados (x_i, y_i) , determinou-se a reta dos mínimos quadrados de equação $y = 2x - 5$. Sabendo que $S_x = 2$ e $S_y = 5$, qual dos seguintes valores pode corresponder a esta amostra?

- [A] $r = -0,8$
 [B] $r = 1,3$
 [C] $|r| = 0,8$
 [D] $r = 0,4$

2. De uma amostra bivariada de dados (x_i, y_i) , construiu-se a seguinte nuvem de pontos:



Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- [A] Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois elementos da amostra, se $x_1 < x_2$, então $y_1 < y_2$.
 [B] O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta dos mínimos quadrados.
 [C] Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois elementos da amostra, se $x_1 > x_2$, então $y_1 < y_2$.
 [D] O ponto $(0,0)$ pertence à reta dos mínimos quadrados.

Grupo II

1. Na tabela seguinte estão representados o número de vendas e o lucro, aproximados às unidades de euro, de uma loja de roupa, nos últimos seis dias do mês de janeiro.

Número de vendas	15	13	19	12	25	35
Lucro (em €)	400	310	490	300	700	750

- 1.1. Indique qual é a variável explicativa e qual é a variável resposta.

Utilize uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões.

- 1.2.** Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável considerar que as variáveis estão linearmente associadas.
 - 1.3.** Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos, arredondando os coeficientes às centésimas.
 - 1.4.** A partir da reta obtida na alínea anterior, determine o valor esperado para o lucro num dia em que se realizaram 20 vendas.
- 2.** Considere a seguinte amostra bivariada de dados.

$$(x_i, y_i) = ((15, 15), (20, 12), (25, 10), (x_4, y_4))$$

Sabendo que $\bar{x} = 22,5$ e que a equação reduzida da reta t dos mínimos quadrados é $y = -0,76x + 27,1$, determine o par ordenado (x_4, y_4) .

Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

Grupo I

1. Opção (D)
2. Opção (C)

Grupo II

1. $\overline{AB} \approx 2,8$; $\overline{AC} \approx 3,6$; $\widehat{ACB} \approx 51,8^\circ$; $\widehat{CBA} \approx 98,2^\circ$

2. $A_{\text{polígono}} = \frac{2\pi}{3}$

3. $\frac{\sqrt{15}}{16}$

Tema II - Geometria Analítica

Grupo I

1. Opção (B)
2. Opção (D)

Grupo II

1. (3, 4)

2.

2.2.
$$\begin{cases} x = 11 - 9k \\ y = -1 + 4k, k \in \mathbb{R} \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Tema III - Sucessões

Grupo I

1. Opção (C)
2. Opção (D)

Grupo II

1.

1.2. (v_n) é uma sucessão crescente.

1.3. (v_n) não é uma progressão aritmética.

1.4. (v_n) é uma sucessão convergente para 1.

1.5. Conjunto dos minorantes: $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$

Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$

2. $r = \frac{55}{6}$

Tema IV - Funções Reais de Variável Real

Grupo I

1.

- 1.1. Opção (C)
- 1.2. Opção (B)

Grupo II

1.

1.2. $y = \frac{5}{2}x + 1$ e $y = 2x + 2$ são assíntotas oblíquas ao gráfico de f .

2.

2.2. 200 metros. O parque terá 100 metros de comprimento e 50 metros de largura.

Tema V - Estatística

Grupo I

1. Opção (C)
2. Opção (B)

Grupo II

1.

1.1. Variável explicativa: "número de vendas"
Variável resposta: "lucro"

1.2.



É razoável considerar que as variáveis estão linearmente associadas.

1.3. $y = 21,04x + 74,34$

1.4. 495,14 €

2. $(x_4, y_4) = (30, 3)$

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO**
QUESTÕES DE AULA

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em



Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

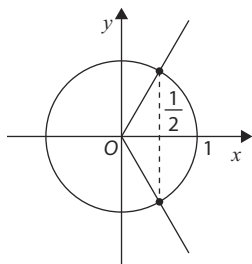
Grupo I

1. Como $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, então α pertence ao terceiro quadrante, e dado que $\beta \in \left] -2\pi, -\frac{3\pi}{2} \right[$, então β pertence ao primeiro quadrante.

Assim, sabemos que $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ e $\tan \alpha > 0$ e sabemos também que $\sin \beta > 0$, $\cos \beta > 0$ e $\tan \beta > 0$. Donde se conclui que $\sin \alpha < 0$, $-\cos \beta < 0$ e, como a soma de dois números negativos é um número negativo, então $\sin \alpha - \cos \beta < 0$.

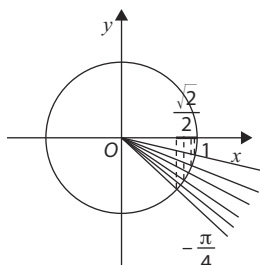
Assim, a opção correta é a (D).

2. A equação $\cos x = \frac{1}{2}$ tem duas soluções no intervalo $[0, 2\pi[$: uma no intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ e outra no intervalo $\left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$.



Como a função cosseno é periódica, de período 2π , a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ tem também duas soluções no intervalo $[2\pi, 4\pi[$.

No intervalo $\left] -\frac{\pi}{4}, 0 \right[$ o cosseno toma todos os valores do intervalo $\left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right[$.



Tem-se $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$, portanto $\cos x = \frac{1}{2}$ não tem

soluções em $\left] -\frac{\pi}{4}, 0 \right[$.

Logo, a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ tem quatro soluções no intervalo $\left] -\frac{\pi}{4}, 4\pi \right[$.

Assim, a opção correta é a (C).

Grupo II

1. Como os ângulos CDB e BDA são suplementares, $\hat{BDA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , $\hat{DBA} = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{\sin 135^\circ}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2AB} = \frac{\sin 15^\circ}{AD}$$

$$\begin{cases} 2AB = 4\sqrt{2} \\ \frac{\sin 15^\circ}{AD} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 2\sqrt{2} \\ AD = 4\sin 15^\circ \end{cases}$$

Novamente pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 45^\circ}{1,8} = \frac{\sin \hat{C}}{2}, \text{ isto é,}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1,8} \Leftrightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{1,8}.$$

Logo, $\hat{C} \approx 51,783^\circ$.

Então, $\hat{CBD} \approx 180^\circ - (45^\circ + 51,783^\circ) = 83,217^\circ$.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 83,217^\circ}{CD} = \frac{\sin 45^\circ}{1,8}, \text{ isto é,}$$

$$CD = \frac{1,8 \times \sin 83,217^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Logo, $CD \approx 2,528$.

Assim:

$$\bullet AB = 2\sqrt{2} \approx 2,8$$

$$\bullet AC = AD + DC = 4 \sin 15^\circ + 2,528 \approx 3,6$$

$$\bullet \hat{ACB} \approx 51,8^\circ$$

$$\bullet \hat{CBA} = \hat{CBD} + \hat{DBA} \approx 83,217^\circ + 15^\circ \approx 98,2^\circ$$

2. • Interseção do gráfico de f com o eixo Oy :

$$f(0) = \cos(0) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

O ponto de coordenadas $(0, 2)$ é a interseção do gráfico de f com o eixo Oy .

- Interseção do gráfico de f com o eixo Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \vee 2x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } [0, \pi]: x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi:$$

Os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ e $(\pi, 0)$ são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox .

$$A_{\text{polígono}} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} \times 2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

3.

- 3.1. A área do triângulo $[OPQ]$ é dada por:

$$\frac{\overline{QP} \times |\text{abscissa de } P|}{2}$$

As coordenadas do ponto P são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tem-se que $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$.

Portanto, $|\text{abscissa de } P| = -\cos \alpha$.

Logo, a área do triângulo é dada por

$$\frac{2 \sin \alpha \times (-\cos \alpha)}{2} = -\sin \alpha \cos \alpha, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, tem-se:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Portanto, a área pedida é:

$$\begin{aligned} -\sin \alpha \times \cos \alpha &= -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{15}}{16} \end{aligned}$$

Tema II - Geometria Analítica

Grupo I

$$\begin{aligned} 1. \vec{AB} \cdot \vec{DB} &= \vec{DC} \cdot \vec{DB} = \\ &= \|\vec{DC}\| \times \|\vec{DB}\| \times \cos 60^\circ = \\ &= a \times a \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Assim, a opção correta é a (B).

2. $\alpha: 2x - z = 3$, logo um vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha(2, 0, -1)$.

Procuramos, então, uma reta com vetor diretor colinear com $\vec{n}_\alpha$:

- Na opção (A), um vetor diretor da reta é $\vec{u}(2, 0, 4)$, que não é colinear com $\vec{n}_\alpha$.

- Na opção (B), um vetor diretor da reta é $\vec{u}(1, 0, -1)$, que também não é colinear com $\vec{n}_\alpha$.

- Na opção (C), um vetor diretor da reta é $\vec{u}(2, -1, 0)$, que também não é colinear com $\vec{n}_\alpha$.

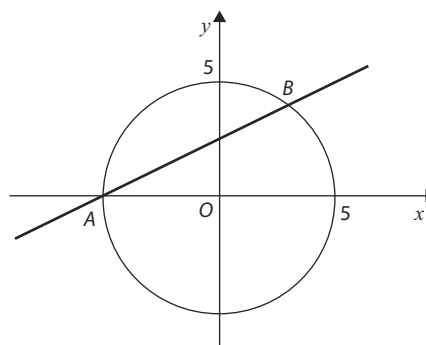
- Na opção (D), um vetor diretor da reta é $\vec{u}(2, 0, -1)$, que é colinear com $\vec{n}_\alpha$.

$$\frac{2x}{4} = \frac{5-5z}{5} \wedge y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z-1}{-1} \wedge y = 1$$

Assim, a opção correta é a (D).

Grupo II

1.



Começamos por determinar a equação da reta AB :

$y = mx + b$, onde $m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$, pois sabe-se que a mediatriz de $[AB]$ tem declive -2 e $-\frac{1}{-2}$ é o declive de uma reta que lhe é perpendicular.

Assim, $y = \frac{1}{2}x + b$. Como A tem coordenadas $(-5, 0)$ e pertence à reta AB , vem que:

$$0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } AB: \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

O ponto B é então a interseção da reta AB definida por $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ com a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{75}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 5x^2 + 10x - 75 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$5x^2 + 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$$

Como B pertence ao 1.º quadrante, vem que $x > 0$ e, portanto, $x = 3$.

$$\text{Logo, } y = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = 4.$$

As coordenadas do ponto B são, então, $(3, 4)$.

2.

$$21. A(11, -1, 2) \quad B(8, 5, 0) \quad E(13, 2, 8)$$

$$\vec{AB} = B - A = (-3, 6, -2)$$

$$\vec{AE} = E - A = (2, 3, 6)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABE , então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b - 2c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}c \\ 2a + 3\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}c\right) + 6c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \frac{7}{2}a + 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}a\right) \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \vec{n} \left(a, \frac{1}{3}a, -\frac{1}{2}a \right).$$

Seja $a = 6$, por exemplo, então $\vec{n}(6, 2, -3)$.

A condição que define o plano é da forma $6x + 2y - 3z = d$.

Como o ponto B pertence ao plano, vem que:

$$6 \times 8 + 2 \times 5 - 3 \times 0 = d \Leftrightarrow d = 58$$

Assim, fica provado que, de facto, uma equação cartesiana do plano ABE é $6x + 2y - 3z = 58$.

$$22. C = D + \vec{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (11, -1, 2) = (-9, 4, 1)$$

Assim, as equações paramétricas da reta AC são:

$$\begin{cases} x = 11 - 9k \\ y = -1 + 4k, k \in \mathbb{R} \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Tema III - Sucessões

Grupo I

$$1. u_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

$$\text{Temos que } u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2} \text{ e } u_3 = -\frac{1}{3}.$$

- u_n é uma sucessão não monótona;
- u_n é uma sucessão limitada, uma vez que $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\lim u_n = 0$, isto é, a sucessão é convergente para 0.

Das opções apresentadas, a opção correta é a (C).

$$\begin{aligned} 2. \lim u_n &= \lim \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)}_{\substack{\text{Soma dos } n \text{ termos de uma progressão geométrica} \\ \text{de primeiro termo 1 e razão } \frac{1}{\sqrt{2}}}} \\ &= \lim \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \times 1 \right) = \\ &= \frac{1 - 0}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \\
&= \frac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \\
&= \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = \\
&= 2+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Assim, a opção correta é a (D).

Grupo II

1.

1.1. Seja $P(n): v_n = \frac{n+1}{n+2}$

(i) $P(1): v_1 = \frac{1+1}{1+2} \Leftrightarrow v_1 = \frac{2}{3}$, que é uma proposição verdadeira.

(ii) **Hipótese de indução:** $v_n = \frac{n+1}{n+2}$

Tese: $v_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{2-v_n} = \\
&= \frac{1}{2-\frac{n+1}{n+2}} \quad (\text{por hipótese de indução}) \\
&= \frac{1}{\frac{2n+4-n-1}{n+2}} = \\
&= \frac{1}{\frac{n+3}{n+2}} = \\
&= \frac{n+2}{n+3}
\end{aligned}$$

Provou-se que $P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$.

Por (i) e (ii) ficou provado que $P(n)$ é verdadeira, isto é, $v_n = \frac{n+1}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.2. $v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{n+1}{n+2} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\
&= \frac{n^2+4n+4 - (n^2+n+3n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\
&= \frac{n^2+4n+4 - n^2-4n-3}{(n+3)(n+2)} = \\
&= \frac{1}{(n+3)(n+2)}
\end{aligned}$$

Como se verifica que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, conclui-se que (v_n) é uma sucessão crescente.

1.3. Como foi visto na alínea anterior, $v_{n+1} - v_n$ depende de n , isto é, não é uma constante. Assim, (v_n) não é uma progressão aritmética.

1.4. $\lim v_n = \lim \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{1} = 1$, que é um número real. Logo, (v_n) é uma sucessão convergente para 1.

1.5. Como toda a sucessão convergente é limitada, vem que (v_n) é uma sucessão limitada:

$$v_1 \leq v_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ isto é, } \frac{2}{3} < v_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, o conjunto dos minorantes é $\left] -\infty, \frac{2}{3} \right]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty[$.

2. Seja (a_n) a progressão geométrica e (b_n) a progressão aritmética. Sabe-se que:

$$\frac{1-2^4}{1-2} \times a_1 = 75 \Leftrightarrow \frac{-15}{-1} \times a_1 = 75 \Leftrightarrow a_1 = 5$$

Também se sabe que:

$$\frac{b_1+b_4}{2} \times 4 = 75 \Leftrightarrow \frac{5+b_4}{2} \times 4 = 75, \text{ pois } b_1 = a_1.$$

$$\Leftrightarrow 5 + b_4 = \frac{75}{2}$$

$$\Leftrightarrow b_4 = \frac{65}{2}$$

Assim, sendo (b_n) uma progressão aritmética de razão r , vem que:

$$b_4 = b_1 + 3r \Leftrightarrow \frac{65}{2} = 5 + 3r \Leftrightarrow r = \frac{55}{6}$$

Tema IV - Funções Reais de Variável Real

Grupo I

1.

1.1. $\lim u_n = \lim \left(\frac{-4n^2+3}{n^2} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim \left(-4 + \frac{3}{n^2} \right) = \\
&= -4 + 0^+ = -4^+
\end{aligned}$$

Quando uma sucessão de objetos tende para -4 por valores à sua direita, constatamos que a sucessão das respetivas imagens tende para $-\infty$, isto é, $\lim (u_n) = -\infty$.

Assim, a opção correta é a (C).

1.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= -3 + \frac{1}{-\infty} = \\
&= -3 + 0 = \\
&= -3
\end{aligned}$$

A opção correta é a (B).

Grupo II

1.

1.1. Sabemos que $-2 \in D_f$. Assim, para f ser contínua em -2 tem de existir $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, isto é:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(2x^2 - 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 2x + 4}{x-2} = \\ &= \frac{2 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 4}{-2 - 2} = \\ &= \frac{16}{-4} = \\ &= -4\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	2	2	0	8
-2		-4	4	-8
	2	-2	4	0

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{k-3x}{k} \right) = \\ &= \frac{k+6}{k}\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{k+6}{k} &= -4 \Leftrightarrow k+6 = -4k \\ &\Leftrightarrow 5k = -6 \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{6}{5}\end{aligned}$$

1.2. Se $k = -\frac{6}{5}$, então:

$$\frac{-\frac{6}{5} - 3x}{-\frac{6}{5}} = \frac{\frac{6+15x}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{2+5x}{2}$$

Assim:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2+5x}{2} & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Assíntotas verticais:

Verifica-se que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Assim, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

• Para $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2+5x}{2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+5x}{2x} = \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{5}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+5x}{2} - \frac{5}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+5x-5x}{2} \right) = 1\end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{5}{2}x + 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

• Para $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^3 - 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = \\ &= 2 \times \frac{1+0+0}{1-0} = \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 2x^2 + 8 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 - 4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{1 - \frac{4}{x^2}} = \\ &= 2 \times \frac{1+0+0}{1-0} = \\ &= 2\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função f quando $x \rightarrow -\infty$.

2.

21. $P(x) = x + 2y = x + 2 \times \frac{5000}{x} = x + \frac{10\,000}{x}$, como queríamos demonstrar.

Cálculo auxiliar

$$x \times y = 5000 \Leftrightarrow y = \frac{5000}{x}$$

22. $P'(x) = \left(x + \frac{10\,000}{x}\right)' = 1 - \frac{10\,000}{x^2}$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{10\,000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10\,000 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 10\,000 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{10\,000} \wedge x \neq 0$$

Logo, $x = 100$, pois $D =]0, +\infty[$.

x	0		100	$+\infty$
Sinal de P'	n.d.	-	0	+
Variação de P	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A menor quantidade de cerca verifica-se quando $x = 100$, logo:

$$P(100) = 100 + \frac{10\,000}{100} = 200 \text{ m}$$

O parque terá $x = 100$ metros de comprimento e $y = \frac{5000}{100} = 50$ metros de largura.

Tema V - Estatística

Grupo I

1. Sabemos que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$, onde a é o coeficiente do termo em x da equação reduzida da reta dos mínimos quadrados. Assim, seja qual for a dimensão n da amostra, temos que:

$$r = 2 \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = 2 \sqrt{\frac{\frac{SS_x}{n-1}}{\frac{SS_y}{n-1}}} = 2 \frac{\sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}}{\sqrt{\frac{SS_y}{n-1}}} =$$

$$= 2 \times \frac{S_x}{S_y} = 2 \times \frac{2}{5} = 0,8$$

Assim, a opção correta é a (C).

2. Seja qual for a amostra bivariada de dados (x, y) , o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence necessariamente à reta dos mínimos quadrados.
Assim, a opção correta é a (B).

Grupo II

1.

11. É de esperar que o número de vendas possa ser utilizado para prever o lucro. Assim, a variável explicativa é o “número de vendas” e a variável resposta é o “lucro”.

12.



Uma vez que os pontos da nuvem se encontram dispostos de forma aproximadamente linear, é razoável considerar que as variáveis estão linearmente relacionadas.

13. LinearReg

```
a = 21.0415773
b = 74.3420488
r = 0.95621179
r^2 = 0.914341
MSE = 4032.04029
y = ax + b
```

[COPY]

De acordo com o que é indicado pela calculadora gráfica, temos que a reta dos mínimos quadrados, com os coeficientes arredondados às décimas, é definida pela equação reduzida $y = 21,04x + 74,34$.

14. Tendo em conta a reta obtida na alínea anterior, temos:

$$y = 21,04 \times 20 + 74,34 = 495,14$$

Assim, espera-se que num dia em que se realizaram 20 vendas, o lucro seja de 495,14 €.

2. Como $\bar{x} = 22,5$, temos que

$$22,5 = \frac{15 + 20 + 25 + x_4}{4}, \text{ ou seja, } x_4 = 30.$$

Uma vez que a reta t é a reta dos mínimos quadrados, sabemos que o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta. Temos, então, $\bar{y} = -0,76 \times 22,5 + 27,1 = 10$.

$$\text{Assim, } 10 = \frac{15 + 12 + 10 + y_4}{4}, \text{ pelo que } y_4 = 3.$$

Podemos então concluir que $(x_4, y_4) = (30, 3)$.