

Planificações

Planificação anual 4

Planos de aula 5

Testes

Teste de diagnóstico 112

Teste 1 – Trigonometria e Funções Trigonométricas 115

Teste 2 – Geometria Analítica 118

Teste 3 – Sucessões 121

Teste 4 – Funções Reais de Variável Real 124

Teste 5 – Funções Reais de Variável Real 127

Teste 6 – Estatística 130

Soluções 133

Resoluções*

Trigonometria e Funções Trigonométricas (Manual) 136

Sucessões (Caderno de atividades) 184

* As resoluções apresentadas referem-se ao domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas do volume 1 do Manual *Novo Ípsilon 11*, e a parte do domínio Sucessões do respetivo Caderno de atividades. As resoluções dos restantes exercícios do Manual e Caderno de atividades serão disponibilizadas aos professores utilizadores do projeto, em setembro de 2016, no e-Manual *Premium*.

P LANIFICAÇÕES

Período	Domínios	Previstas pelo NY11	Previstas pelo Programa
1.º Período	Trigonometria Trigonometria: ângulos retos, ângulos obtusos e resolução de triângulos. Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados Funções trigonométricas	44 aulas	38 aulas
	Geometria Analítica Declive e inclinação de uma reta do plano Produto escalar de vetores. Equações de planos no espaço	24 aulas	32 aulas
2.º Período	Sucessões Majorantes e minorantes de um conjunto de números reais. Generalidades sobre sucessões Princípio de indução matemática Progressões aritméticas e geométricas. Limites de sucessões	38 aulas	44 aulas
	Funções Limites segundo Heine de funções reais de variável real Continuidade de funções		
3.º Período	Assíntotas ao gráfico de uma função Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	70 aulas	56 aulas
	Estatística Amostras bivariadas, reta de mínimos quadrados e coeficiente de correlação.	8 aulas	8 aulas
	Total	184 aulas	178 aulas

Nota: No número de aulas proposto pelo NY11, já estão previstas avaliações de diagnóstico e avaliações formativas, não estando ainda previstas avaliações sumativas, que serão estipuladas por cada escola ou professor.

Tendo em conta a extensão do Programa e Metas Curriculares do 11.º ano, no caso de se implementar a planificação aqui proposta, pode ser necessário substituir algumas aulas previstas para tarefas de diagnóstico ou testes formativos (propondo esse trabalho para casa) para se aplicarem testes de avaliação sumativa.

Plano de aula 1

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Dedução dos valores de razões trigonométricas relativas a alguns ângulos. Problemas.

Sumário
Realização de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos
	Seno, cosseno e tangente. Razões trigonométricas.

Estratégias
Os alunos devem efetuar a tarefa proposta, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem. Recomenda-se a projeção da resolução dos itens da tarefa de diagnóstico, para que os alunos possam efetuar uma auto correção. (págs. 8 e 9 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Aplicações da trigonometria</i> (vídeo) • <i>Determinar a altura da pirâmide de Quéops</i> (vídeo) • <i>Resolução de problemas com triângulos</i> (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 2

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonómicas	Aplicar a Lei dos senos à resolução de problemas que envolvam triângulos.

Conteúdos
Lei dos senos

Sumário
Lei dos senos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 1.1.	Lei dos senos; Analogia dos senos

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz nos exercícios propostos. Sugere-se ainda a exploração dos recursos do e-Manual <i>Premium</i> apresentados nas páginas. (págs. 10 a 13 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (1 a 4 da pág. 2).	• <i>Lei dos Senos</i> (Geogebra e vídeo) • <i>Razões Trigonómicas de um ângulo agudo</i> (Geogebra) • <i>Lei dos Senos e dos Cossenos. Resolução de triângulos</i> (PowerPoint)

Observações	Notas

Plano de aula 3

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Aplicar a Lei dos senos à resolução de problemas que envolvam triângulos.

Conteúdos
Seno de ângulos retos e seno de ângulos obtusos.

Sumário
Seno de ângulos retos e seno de ângulos obtusos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 1.2. e 1.3.	Seno de um ângulo reto e seno de um ângulo obtuso.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz nos exercícios propostos. (págs. 14 a 17 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (6 a 9 das págs. 3 e 4).	• <i>Seno de um ângulo obtuso (Geogebra)</i>

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 4

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Aplicar a Lei dos cossenos à resolução de problemas que envolvam triângulos.

Conteúdos
Lei dos cossenos

Sumário
Lei dos cossenos Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 1.4.+.	Lei dos cossenos; Teorema de Carnot

Estratégias
Sugere-se uma análise conjunta com a turma da demonstração da Lei dos cossenos, cuja prova é sugerida pelo descritor. A análise do exercício resolvido fica a cargo do aluno, antes de dar início à resolução dos exercícios propostos. (págs. 18 e 19 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Lei dos cossenos</i> (Geogebra)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 5

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Aplicar a Lei dos cossenos à resolução de problemas que envolvam triângulos.

Conteúdos
Cosseno de ângulos retos e cosseno de ângulos obtusos.

Sumário
Cosseno de ângulos retos e cosseno de ângulos obtusos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 1.5. , 1.6.+ e 1.7.	Cosseno de ângulos retos e cosseno de ângulos obtusos.

Estratégias
Sugere-se uma análise conjunta dos exemplos e exercícios resolvidos antes de se iniciarem os exercícios propostos. (págs. 20 a 23 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (11 a 13 das págs. 4 e 5).	• <i>Cosseno de um ângulo obtuso</i> (Geogebra) • <i>Relação entre as razões trigonométricas de ângulos com igual amplitude</i> (Geogebra)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 6

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Calcular os comprimentos dos três lados de um triângulo e as amplitudes dos seus três ângulos internos.

Conteúdos
Resolução de triângulos. Lei dos senos. Lei dos cossenos.

Sumário
Resolução de triângulos. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 1.8.	Resolução de triângulos.

Estratégias
Na resolução de problemas o aluno desenvolverá a capacidade de escolha de estratégias de resolução dos problemas tendo em consideração as propriedades aprendidas. (págs. 24 e 25 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (14 e 15 da pág. 5).	

Observações	Notas

Planos de aula 7 a 9

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 3 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Consolidação das aprendizagens.

Conteúdos
Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos. Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respetivas razões trigonométricas.

Sumário
Resolução de problemas propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 9.1.+ e 9.2.+	Determinação de distâncias utilizando ângulos e as respetivas razões trigonométricas.

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos problemas resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. Os problemas propostos devem ser feitos em sala de aulas na perspetiva de um desenvolvimento assertivo dos conhecimentos. O acompanhamento por parte do professor do desempenho da turma permite um diagnóstico formativo dos conhecimentos. (págs. 26 a 31 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC, se necessário.	

Planos de aula 10 e 11

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Definir ângulos orientados e ângulos generalizados e as respetivas medidas de amplitude.

Conteúdos
Ângulos orientados. Ângulos generalizados. Medida de amplitude de ângulos generalizados

Sumário
Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações. Medidas de amplitude de ângulos generalizados. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 2.1., 2.2., 2.3., 3.1., 4.1., 4.2. e 4.3.	Ângulos orientados. Ângulos generalizados. Medida de amplitude de ângulos generalizados.

Estratégias
A análise conjunta dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno um desenvolvimento mais autónomo dos exercícios propostos. (págs. 32 a 35 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (16 a 18 da pág. 6).	• <i>Generalização da noção de ângulo</i> (vídeo) • <i>Ângulos orientados</i> (Geogebra) • <i>Ângulos orientados e ângulos generalizados</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 12 e 13

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Reconhecer o tipo de rotação associada aos ângulos generalizados.

Conteúdos
Ângulos generalizados e rotações

Sumário
Rotação segundo um ângulo generalizado. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 4.4. , 4.5. e 4.6.	Ângulos generalizados e rotações

Estratégias
Sugere-se a análise em conjunto dos exemplos apresentados. As figuras apresentadas associadas a cada exemplo podem ajudar o aluno a formar uma ideia construtiva dos conteúdos em análise e promover um bom desempenho nos exercícios propostos. (págs. 36 a 39 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (19 a 23 das págs. 7 e 8).	• <i>Ângulos generalizados e rotações (Tutorial)</i>

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Caso seja possível, os exercícios do Caderno de atividades sugeridos como TPC também devem ser desenvolvidos em aula, nomeadamente os exercícios 22 e 23. Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Planos de aula 14 e 15

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. Os problemas propostos devem ser feitos em sala de aulas na perspetiva de um desenvolvimento assertivo dos conhecimentos. O acompanhamento por parte do professor do desempenho da turma também permite um diagnóstico formativo dos conhecimentos. (págs. 40 a 43 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. O número de aulas deve ter em consideração o ritmo de aprendizagem dos alunos, motivo pelo qual é flexível.	

Planos de aula 16 e 17

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Identificar e reconhecer o seno e o cosseno na circunferência trigonométrica.

Conteúdos
Seno e cosseno na circunferência trigonométrica.

Sumário
Circunferência trigonométrica. Seno e cosseno de um ângulo orientado. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 5.1. , 5.2. e 5.3.	Circunferência trigonométrica. Seno e cosseno de um ângulo orientado.

Estratégias
A análise conjunta dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno um desenvolvimento mais autónomo dos exercícios propostos. (págs. 44 a 49 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• Razões trigonométricas de ângulos generalizados. • Circunferência trigonométrica (PowerPoint) • Seno e cosseno de um ângulo orientado (Geogebra)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 18 e 19

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Identificar e reconhecer a tangente na circunferência trigonométrica.

Conteúdos
Tangente de ângulos orientados. Razões trigonométricas de ângulos generalizados.

Sumário
Tangente de ângulos orientados. Razões trigonométricas de ângulos generalizados. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 5.4. , 5.5. e 5.6.	Tangente de ângulos orientados. Seno, cosseno e tangente de ângulos generalizados.

Estratégias
A análise dos exercícios resolvidos e exemplos promovem o saber. Os exemplos apresentados proporcionam ao aluno uma perspetiva da utilização dos conceitos, motivo pelo qual se sugere a sua análise. (págs. 50 a 53 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (24 a 29 da pág. 9)	• <i>Tangente de um ângulo orientado (Geogebra)</i>

Observações	Notas
Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Planos de aula 20 e 21

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Converter graus em radianos e vice-versa.

Conteúdos
Medidas de amplitude de ângulos em radianos.

Sumário
Medidas de amplitude em radianos. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 6.1. e 6.2.	Radiano. Medida de amplitude em radianos.

Estratégias
Analisar em grupo os exemplos e deixar que os alunos resolvam autonomamente os exercícios propostos. (págs. 54 a 57 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (30 a 34 da pág. 10).	• <i>O radiano</i> (vídeo) • <i>Sistema sexagesimal</i> (vídeo) • <i>Conversão de graus em radianos e vice versa</i> (vídeo) • <i>Resolução de exercícios sobre ângulos</i> (aula) • <i>Medidas de amplitude em radianos</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 22 a 25

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas que envolvam o seno, o cosseno e tangente de ângulos orientados.

Sumário
Resolução de Problemas. Resolução do teste proposto no final do subdomínio.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Antes de entrar nas funções trigonométricas sugerimos uma prática intensiva , acompanhada em sala de aula, quer dos problemas propostos, quer dos exercícios do caderno de atividades, que podendo ser resolvidos pelo aluno em casa, requerem uma verificação em sala de aula. O teste proposto no final deste subdomínio, sobre toda a matéria lecionada desde o início da trigonometria, permitirá ao professor avaliar o conhecimento dos alunos antes de entrar na matéria de funções trigonométricas, onde a consolidação dos conhecimentos adquiridos é importante. A consulta da síntese proporciona ao aluno o desenvolvimento do pensamento estrutural. (págs. 58 a 63 e 66 e 67 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (35 ao 38 das págs. 10 e 11).	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. O professor tem à sua disposição, neste livro do professor, as resoluções dos testes, que pode partilhar com os alunos para que apenas se discutam as resoluções em que tenha havido dificuldades. O número de aulas atribuído é flexível, tendo em consideração o ritmo de aprendizagem da turma em questão.	

Plano de aula 26

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Formula fundamental de trigonometria; Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e cosseno do mesmo ângulo.

Sumário
Realização de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos
	Fórmula fundamental da trigonometria.

Estratégias
Nesta aula sugerimos que se efetue uma avaliação diagnóstica, de carácter formativa. A visualização do recurso da Escola Virtual pode auxiliar os alunos na elaboração das questões que compõem o diagnóstico. (pág. 68 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (39 a 45 das págs. 12 e 13).	• <i>Fórmulas trigonométricas</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 27

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Reconhecer as propriedades da função seno.

Conteúdos
Função seno. Período de uma função.

Sumário
Funções periódicas. Função seno. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 7.1. , 7.2. , 7.3. , 7.4. , 7.5. , 7.6. e 7.10.	Função periódica. Período de uma função. Função seno.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. Sugere-se a utilização da máquina de calculadora gráfica, para que o aluno possa construir uma ideia mais estruturada e global das funções trigonométricas. (pags. 69 a 72 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (62 a 64 e 66 da pág. 19).	• <i>Funções circulares ou trigonométricas</i> (vídeo) • <i>Função periódica e período positivo mínimo</i> (aula) • <i>Função seno</i> (Geogebra e vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 28

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Reconhecer as propriedades da função cosseno.

Conteúdos
Função cosseno.

Sumário
Funções cosseno. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 7.4. , 7.5. , 7.6. e 7.10.	Função cosseno.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. (págs. 73 a 76 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (65 e 69 das págs. 19 e 20).	• <i>Função cosseno</i> (Geogebra e vídeo) • <i>Variação das funções seno e cosseno</i> (vídeo) • <i>Enquadramento do seno e do cosseno de um ângulo qualquer</i> (vídeo) • <i>Exemplo resolvido: Determinar o período de uma função e o contradomínio</i> (vídeo) • <i>Funções trigonométricas e os modelos matemáticos</i> (aula)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 29

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonómicas	Reconhecer as propriedades da função tangente.

Conteúdos
Função tangente.

Sumário
Funções tangente. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 7.9. e 7.10.	Função tangente.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. Os exercícios propostos relacionam as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente tendo como intenção proporcionar uma perspetiva globalizante das mesmas. (págs. 77 a 80 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (70 da pág. 20).	• <i>Função tangente</i> (Geogebra e vídeo) • <i>A tangente enquanto razão entre o seno e o cosseno</i> (vídeo) • <i>Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente</i> (aula) • <i>Funções trigonométricas</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 30

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Generalizar a fórmula fundamental da trigonometria.

Conteúdos
Fórmula fundamental da trigonometria

Sumário
Generalização da fórmula fundamental da trigonometria. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 7.7.	Generalização da fórmula fundamental da trigonometria.

Estratégias
Pretende-se nesta aula verificar que a fórmula fundamental de trigonometria é válida para as funções trigonométricas. Os exercícios propostos tornam-se mais fáceis de resolver caso se analisem em conjunto os exercícios resolvidos. (págs. 81 a 83 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (46 a 49 das págs. 13 e 14).	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 31

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Reduzir ao primeiro quadrante.

Conteúdos
Relações entre razões trigonométricas de ângulos.

Sumário
Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude α e $\alpha - \pi$. Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude α e $\alpha + \pi$. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 7.8.	Relações entre razões trigonométricas.

Estratégias
A análise de exemplos, exercícios resolvidos e recursos <i>Geogebra</i> da Escola Virtual podem permitir ao aluno ultrapassar as dificuldades inerentes a esta matéria. (págs. 84 a 87 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no caderno de atividades (50 e 51 da pág. 16).	• <i>Redução ao 1.º quadrante</i> (aula) • <i>Razões trigonométricas de ângulos de amplitude α e $\alpha - \pi$</i> (<i>Geogebra</i>) • <i>Razões trigonométricas de ângulos de amplitude α e $\alpha + \pi$</i> (<i>Geogebra</i>)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 32 e 33

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Reduzir ao primeiro quadrante.

Conteúdos
Relações entre razões trigonométricas.

Sumário
Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude α e $\alpha - \frac{\pi}{2}$.
Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$.
Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude α e $-\alpha$.
Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 7.8.	Relações entre razões trigonométricas.

Estratégias
Sugere-se uma análise de exemplos e exercícios resolvidos antes da resolução de exercícios propostos.
Os recursos <i>Geogebra</i> e da Escola Virtual, podem permitir uma explicação da matéria com rigor geométrico, que podem representar uma mais valia na sala de aulas.
(págs. 88 a 91 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (52 a 60, 67 e 68 das págs. 16 a 19).	- Razões trigonométricas de ângulos de amplitude α e $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (<i>Geogebra</i>) - Razões trigonométricas de ângulos de amplitude α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (<i>Geogebra</i>) - Razões trigonométricas de ângulos de amplitude α e $-\alpha$ (<i>Geogebra</i>)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 34 e 35

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	

Conteúdos
Funções trigonométricas inversas.

Sumário
Funções trigonométricas inversas: arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 8.1.+.	Funções arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. Os exemplos apresentados sugerem situações que pretendem proporcionar ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos em estudo, motivo pelo qual se sugere a sua análise. (págs. 92 a 95 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (71 a 75 das págs. 20 e 21).	• Funções trigonométricas inversas (PowerPoint) • Funções trigonométricas inversas: arco-seno (vídeo) • Funções trigonométricas inversas: arco-cosseno (vídeo) • Funções trigonométricas inversas: arco-tangente (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 36 e 37

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Resolver equações trigonométricas

Conteúdos
Equações do tipo $\sin x = b$ e $\cos x = b$.

Sumário
Equações trigonométricas. Equações do tipo $\sin x = b$. Equações do tipo $\cos x = b$. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 8.2., 8.3. e 8.5.	Equações do tipo $\sin x = b$ e $\cos x = b$.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. A utilização dos recursos disponíveis na Escola Virtual podem ajudar significativamente na consolidação de aprendizagens. (págs. 96 a 99 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Equações trigonométricas</i> (vídeo) • <i>Equações da forma $\sin x = b$</i> (vídeo) • <i>Equações da forma $\cos x = b$</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 38

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Resolver equações

Conteúdos
Equações do tipo $\tan x = b$.

Sumário
Equações do tipo $\tan x = b$. Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos

Descritores	Termos e conceitos
Descritores TRI11 8.4. e 8.5.	Equações do tipo $\tan x = b$.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos em grupo. A utilização dos recursos disponíveis na Escola Virtual podem ajudar significativamente na consolidação de aprendizagens (págs. 100 e 101 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (76 a 82 das págs. 21 e 22).	• <i>Equações da forma $\tan x = b$</i> (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Plano de aula 39

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Resolver inequações trigonométricas

Conteúdos
Inequações trigonométricas.

Sumário
Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado Análise dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
A análise dos exemplos pode ajudar o aluno na resolução dos exercícios propostos. Sugere-se a resolução do exercício 83 do Caderno de atividades na aula, para consolidação das aprendizagens. (págs. 102 e 103 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (83 da pág. 22).	

Observações	Notas

Planos de aula 40 a 43

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Consolidação de aprendizagens

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas, funções trigonométricas inversas, equações trigonométricas e inequações trigonométricas.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor TRI11 9.3.+ e 9.4.+.	

Estratégias
Sugere-se que a resolução de problemas seja feita em aula e acompanhado pelo professor. Sempre que necessário sugere-se a projeção das resoluções no sentido de promover a estruturação e rigor da resposta. A síntese pode ser utilizada como auxiliar de memória à resolução dos problemas propostos. (págs. 104 a 113 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas</i> (tutorial) • <i>Resolução de problemas envolvendo equações trigonométricas</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. O número de aulas atribuído é flexível, tendo em consideração o ritmo de aprendizagem da turma em questão. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 44

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Trigonometria e Funções Trigonométricas	Diagnóstico de aprendizagens

Conteúdos

Sumário
Teste final do domínio.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Sugere-se a realização do teste em aula, individualmente ou em grupo. Em qualquer um dos casos, a sua correção deve ser efetuada no final de aula com a projeção da resolução que se encontra no caderno de apoio do professor. (págs. 118 e 119 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução do teste.	

Observações	Notas
O professor tem à sua disposição, neste livro do professor, as resoluções dos testes, que pode partilhar com os alunos para que apenas se discutam as resoluções em que tenha havido dificuldades.	

Plano de aula 45

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Retas no plano; equação reduzida, declive da reta e vetores diretores. Norma de um vetor. Equação da circunferência. Equações vetoriais e paramétricas de uma reta no espaço. Plano mediador de um segmento de reta.

Sumário
Realização de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos
	Retas no plano; equação reduzida, declive da reta e vetores diretores. Norma de um vetor. Equação da circunferência. Equações vetoriais e paramétricas de uma reta no espaço. Plano mediador de um segmento de reta.

Estratégias
Os alunos devem efetuar a tarefa proposta, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem. Recomenda-se a projeção da resolução dos itens da tarefa de diagnóstico, para que os alunos possam efetuar uma auto correção. (págs. 122 e 123 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas

Plano de aula 46

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Estudar o declive e a inclinação de uma reta.

Conteúdos
Inclinação de uma reta que contém a origem. Inclinação de uma reta que não contém a origem.

Sumário
Declive e inclinação de uma reta no plano. Inclinação de uma reta que contém a origem. Inclinação de uma reta que não contém a origem. Relação da inclinação de uma reta com o respetivo declive. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 1.1. , 1.2. e 1.3.	Declive e inclinação de uma reta no plano.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem e um desempenho eficaz nos exercícios propostos. (págs. 124 a 127 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (84 a 95 das págs. 23 a 25)	• <i>Inclinação de uma reta no plano</i> (vídeo) • <i>Relação entre o declive de uma reta e a sua inclinação</i> (vídeo) • <i>Inclinação de uma reta</i> (Geogebra) • <i>Declive e inclinação de uma reta no plano</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 47

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	

Conteúdos
Produto escalar de vetores.

Sumário
Produto escalar de dois vetores. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor GA11 2.1.	Produto escalar ou produto interno.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exercícios resolvidos antes de se efetuar os exercícios propostos. A projeção da resolução dos exercícios atribui rigor às representações geométricas, dado que no quadro esse rigor é frequentemente comprometido. (págs. 128 a 131 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (96 a 99 das págs. 26 e 27).	• <i>Produto escalar de vetores (PowerPoint)</i> • <i>Produto escalar de vetores (Geogebra)</i>

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 48

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Determinar o produto escalar, usando a sua relação com o ângulo de dois vetores.

Conteúdos
Ângulo de dois vetores. Relação do ângulo de dois vetores com o produto escalar.

Sumário
Ângulo de dois vetores. Relação com o produto escalar. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 2.2. e 2.3.	Ângulos e produto escalar.

Estratégias
Sugere-se uma análise conjunta com a turma da demonstração da relação existente entre ângulos e produto escalar para facilitar a sua compreensão. A análise dos exercícios resolvidos podem representar uma mais valia para a resolução dos exercícios propostos. (págs. 132 a 135 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (100 a 105 da pág. 27).	• <i>Ângulo de dois vetores</i> (Geogebra e vídeo) • <i>Ângulo de dois vetores no espaço</i> (vídeo) • <i>Produto escalar em função das normas e do ângulo dos vetores</i> (Geogebra) • <i>Aplicação do produto escalar na física</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 49

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Relacionar vetores perpendiculares com o produto escalar. Aplicar propriedades do produto escalar.

Conteúdos
Vetores perpendiculares e a sua relação com o produto escalar.

Sumário
Vetores perpendiculares. Relação com o produto escalar. Sinal do produto escalar. Simetria e bilinearidade do produto escalar. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 2.4. , 2.5. , 2.6. , 2.7. , 2.8.+ e 2.9.+.	Vetores perpendiculares. Produto escalar. Simetria e bilinearidade.

Estratégias
Sugere-se uma análise cuidada dos exercícios resolvido antes de se iniciarem os exercícios propostos. (págs. 136 a 139 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (106, 111 e 112 das págs. 28 e 29).	• <i>Propriedade do produto escalar: comutatividade</i> (aula) • <i>Propriedade do produto escalar: distributividade</i> (aula) • <i>Perpendicularidade de vetores e retas</i> (aula) • <i>Projeção de um vetor sobre outro</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	A demonstração (facultativa para alunos com nível de desempenho avançado) da propriedade distributiva consta das págs. 18 e 19 do Caderno de Apoio às Metas.

Plano de aula 50

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Calcular o produto escalar de um par de vetores.

Conteúdos
Produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas.

Sumário
Cálculo do produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas no plano e no espaço. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 2.10. , 2.12.	Produto escalar. Coordenadas de um vetor.

Estratégias
Os exercícios propostos devem ser efetuados individualmente pelos alunos e feita uma correção no final com a projeção das resoluções. Esta metodologia promove a autonomia nos alunos e deve ser desenvolvida sempre que possível. (págs. 140 e 141 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (108 a 110 e 114 a 117 das págs. 28 e 29).	Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 51

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Relacionar os declives de retas perpendiculares do plano.

Conteúdos
Equações de retas; Vetores diretores.

Sumário
Relação entre o declive de retas perpendiculares do plano. Vetores diretores de retas perpendiculares. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor GA11 2.11.	Declive de uma reta. Vetor diretor. Retas perpendiculares.

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. Os problemas propostos devem ser feitos em sala de aula na perspetiva de um desenvolvimento assertivo dos conhecimentos. O acompanhamento por parte do professor do estudo da turma permite um diagnóstico formativo dos conhecimentos. (págs. 142 a 145 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Perpendicularidade de retas</i> (vídeo) • <i>Posições relativas de duas retas no plano</i> (vídeo) • <i>Declive de retas perpendiculares no plano</i> (Geogebra)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 52

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Determinar o ângulo de duas retas complanares.

Conteúdos
Ângulo de duas retas complanares.

Sumário
Ângulo de duas retas complementares. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 4.1.+ e 4.2.+.	Ângulo de duas retas.

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. (págs. 146 e 147 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (118 a 125 das págs. 29 a 31).	• Ângulo entre duas retas. Inclinação de uma reta (aula) • Equações da reta no espaço (vídeo) • Posição relativa de retas no espaço - exemplos (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 53 e 54

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Definir lugares geométricos por condições aplicando a noção de produto escalar.

Conteúdos
Mediatriz, plano mediador, circunferência, reta tangente a uma circunferência num ponto; plano tangente a uma superfície esférica num ponto. Superfície esférica. Plano tangente a uma superfície num ponto.

Sumário
Lugares geométricos no plano e no espaço. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor GA11 4.1.+.	Mediatriz, plano mediador, circunferência, reta tangente a uma circunferência num ponto; plano tangente a uma superfície esférica num ponto. Superfície esférica. Plano tangente a uma superfície num ponto.

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. (págs. 148 a 151 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (126 a 141 das págs. 31 a 34).	• <i>O produto escalar na definição de lugares geométricos – circunferência</i> (vídeo) • <i>O produto escalar na definição de lugares geométricos – mediatriz</i> (vídeo) • <i>O produto escalar na definição de lugares geométricos – reta tangente</i> (vídeo) • <i>Resolução de problemas sobre geometria no espaço</i> (aula)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 53 a 56

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço.

Sumário
Resolução dos problemas propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 4.1.+ e 4.2.+.	

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. Os problemas propostos devem ser feitos em sala de aula na perspetiva de um desenvolvimento assertivo dos conhecimentos. O acompanhamento por parte do professor do estudo da turma permite um diagnóstico formativo dos conhecimentos. (págs. 152 a 159 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Resolução de exercícios sobre geometria no espaço</i> (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Plano de aula 57

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Identificar a posição relativa de planos.

Conteúdos
Planos perpendiculares. Paralelismo entre vetores e planos.

Sumário
Vetores normais a um plano. Planos perpendiculares e planos paralelos. Vetores paralelos a um plano. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 3.1., 3.2. e 3.7.	Vetor normal. Relação entre a posição relativa de dois planos e respetivos vetores normais.

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. (págs. 160 a 163 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (142 da pág. 35).	• <i>Equações de planos no espaço (PowerPoint)</i>

Observações	Notas

Plano de aula 58

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Determinar uma equação cartesiana de um plano.

Conteúdos
Plano definido por um ponto e por um vetor normal.

Sumário
Equações cartesianas de planos. Plano definido por um ponto e por um vetor normal. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 3.3. , 3.4. , 3.5. e 3.6.	Equação cartesiana de um plano. Equação geral do plano.

Estratégias
Recomenda-se uma análise dos exemplos e exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. (págs. 164 a 166 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (143 a 145 da pág. 35).	- Equação geral do plano (vídeo) - Equação de um plano definido por um ponto e um vetor perpendicular (vídeo) - Equação de um plano perpendicular a uma reta (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 59

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Determinar uma equação vetorial de um plano e um sistema de equações paramétricas de um plano.

Conteúdos
Equação vetorial de um plano e sistema de equações paramétricas de um plano.

Sumário
Equações vetoriais e sistema de equações paramétricas de planos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 3.8.+ e 3.9.	Equação vetorial do plano e sistema de equações paramétricas de um plano.

Estratégias
Recomenda-se uma análise dos exemplos e exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. (págs. 167 e 168 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (146 a 154 das págs. 36 a 38).	- Equação vetorial de um plano (vídeo) - Sistema de equações paramétricas de um plano (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 60 a 64

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 5×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Consolidação de aprendizagens

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo a determinação da equação de um plano no espaço.

Sumário
Resolução dos problemas propostos

Descritores	Termos e conceitos
Descritores GA11 4.3.+ e 4.4.+.	

Estratégias
Recomenda-se uma análise conjunta dos exercícios resolvidos, tendo em vista uma resposta às dificuldades mais comuns dos alunos. Os problemas propostos devem ser feitos em sala de aula na perspetiva de um desenvolvimento assertivo dos conhecimentos. O acompanhamento por parte do professor do estudo da turma permite um diagnóstico formativo dos conhecimentos. (págs. 169 a 182 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão dos exercícios propostos para as aulas.	• <i>Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço</i> (tutorial) • <i>Equação de um plano definido por três pontos não colineares</i> (vídeo) • <i>Equação de um plano definido por um ponto e uma reta</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 65 e 66

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Resolução do teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Sugere-se uma resolução individual, estando o professor disponível para esclarecer dúvidas que surjam relativas aos exercícios que o compõem. (págs. 187 a 189 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas
Resolução do teste disponível no Livro do Professor.	

Planos de aula 67 e 68

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Geometria Analítica	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Resolução do teste global.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Este teste de carácter geral e formativo, deve preceder uma avaliação sumativa. (págs. 190 a 191 do volume 1 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas

Plano de aula 69

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Sequências e sucessões como funções; Termo geral de uma sequência; Termo geral de uma sucessão.

Sumário
Realização de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos
	Sequências.

Estratégias
Os alunos devem efetuar a tarefa proposta, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem. Recomenda-se a projeção da resolução dos itens da tarefa de diagnóstico, para que os alunos possam efetuar uma auto correção. (pág. 6 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>A curva de perímetro infinito</i> (vídeo) • <i>Analisar a sucessão de comprimentos das linhas</i> (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 70

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Classificar um conjunto como minorado, majorado ou limitado.

Conteúdos
Conjuntos minorados, majorados e limitados. Máximo e mínimo de um conjunto.

Sumário
Conjuntos minorados, majorados e limitados. Máximo e mínimo de um conjunto. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 1.1. , 1.2. , 1.3. e 1.4.	Conjuntos minorados, majorados e limitados. Máximo e mínimo de um conjunto.

Estratégias
A análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem e a um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 7 e 9 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (155 a 160 da pág. 39).	• <i>Conjuntos majorados, minorados e limitados</i> (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Plano de aula 71

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Identificar a monotonia de uma sucessão. Escrever o termo geral de uma sucessão, a partir de um número finito de valores, suficientemente grande.

Conteúdos
Termo geral. Sucessões monótonas.

Sumário
Sucessões numéricas. Sucessões monótonas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 2.1. , 2.2. e 2.3.	Sucessões monótonas.

Estratégias
A análise dos exemplos apresentados em conjunto com a turma permitirão ao aluno uma aquisição organizada da informação. (págs. 10 a 13 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (161 a 165 da pág. 40).	• <i>Sucessões monótonas</i> (vídeo) • <i>Uma sucessão de triângulos (Geogebra)</i> • <i>Representação gráfica de uma sucessão</i> (vídeo) • <i>Termo geral de uma sucessão</i> (vídeo) • <i>Monotonia de uma sucessão</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 72

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Mostrar se uma sucessão é ou não limitada.

Conteúdos
Sucessões majoradas, minoradas e limitadas.

Sumário
Sucessões majoradas, minoradas e limitadas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 2.4.#, 2.5. e 2.6.	Sucessão majorada e sucessão minorada.

Estratégias
A análise do exemplo e do exercício resolvido permitirá ao aluno uma maior compreensão dos conceitos envolvidos. (págs. 14 e 15 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (166 a 169 da pág. 41).	• <i>Sucessões limitadas</i> (vídeo) • <i>Sucessões limitadas e monotonia</i> (vídeo) • <i>Sucessão majorada, minorada e limitada</i> (exercício)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 73 e 74

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo sucessões monótonas e sucessões limitadas.

Sumário
Resolução dos problemas propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 7.1.+.	

Estratégias
Sugere-se que se intensifique a prática do conceito de sucessões e das propriedades até agora estudadas, para que os futuros conceitos sejam mais facilmente compreendidos. A consulta da síntese pode proporcionar ao aluno uma organização e estruturação de conceitos, que facilita a resolução de problemas. (págs. 16 a 19 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão, se necessário, da resolução dos problemas propostos para a aula.	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 75

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
A resolução do teste tem com finalidade a avaliação formativa. (págs. 22 e 23 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução do teste.	

Observações	Notas
Pode projetar-se a resolução do teste, constante do Livro do professor, para discutir com os alunos apenas os itens em que tenha havido dúvidas.	

Plano de aula 76 e 77

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Aplicar o princípio de indução matemática à resolução de problemas.

Conteúdos
Princípio de indução matemática.

Sumário
Princípio de indução matemática. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 3.1.	Princípio de indução matemática.

Estratégias
O tema é introduzido com o apoio de um exemplo muito simples para melhor compreensão do aluno. As demonstrações dos exercícios através do princípio de indução nem sempre são facilmente feitas pelos alunos, que demoram um pouco a habituar-se à sua escrita e requisitos de demonstração, que podem ser facilmente ultrapassados pela análise conjunta dos exemplos, exercícios resolvidos e resoluções dos exercícios propostos. Os exemplos da escola virtual podem ser motivantes e ilustrativos. (págs. 24 a 27 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (170 a 176 das págs. 42 e 43).	• <i>Princípio de indução matemática</i> (PowerPoint e vídeo) • <i>Indução matemática: conceito</i> (vídeo) • <i>Demonstração pelo método de indução: a soma de ímpares consecutivos como um quadrado perfeito</i> (vídeo) • <i>Demonstração pelo método de indução: a soma de potências de 3</i> (vídeo) • <i>Demonstração pelo método de indução: o divisor 11</i> (vídeo)

Observações	Notas
A resolução de alguns dos exercícios do caderno de atividades na aula pode permitir ao aluno uma compreensão da matéria de forma mais organizada e conduzida. O número de aulas para cada sumário é necessariamente flexível. Como os planos de aula são editáveis, poderá adequá-los à realidade das suas turmas.	

Plano de aula 78

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Definir sucessões por recorrência.

Conteúdos
Sucessões definidas por recorrência.

Sumário
Definição de uma sucessão por recorrência. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 3.2.	Sucessões definidas por recorrência.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 28 e 29 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no caderno de atividades (177 a 181 da pág. 43).	• <i>Sucessões definidas por recorrência</i> (vídeo) • <i>Sucessão definida por recorrência</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 79

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo sucessões definidas por recorrência e o método de indução matemática.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 3.3.+.	

Estratégias
A prática de exercícios permite a consolidação de aprendizagens e diagnóstico das mesmas. (págs. 30 a 33 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução dos exercícios propostos para a aula.	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 80 e 81

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Identificar progressões aritméticas. Determinar a soma de um número finito de termos. Escrever o termo geral de uma progressão aritmética.

Conteúdos
Termo geral de uma progressão aritmética. Soma de um número finito de termos de uma progressão aritmética.

Sumário
Termo geral de uma progressão aritmética. Soma de um número finito de termos de uma progressão aritmética. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 4.1. , 4.2. , 5.1. e 5.2.+.	Termo geral de uma progressão aritmética. Soma de um número finito de termos de uma progressão aritmética.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 34 a 37 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (182 a 193 das págs. 44 a 46).	• <i>Progressões aritméticas e termo geral</i> (tutorial) • <i>Progressões aritméticas e progressões geométricas</i> (PowerPoint) • <i>Progressão aritmética: definição</i> (vídeo) • <i>Aplicar conceitos de progressões aritméticas</i> (vídeo) • <i>Exemplo resolvido: determinar um termo de uma progressão aritmética</i> (vídeo) • <i>Determinar a soma dos termos da progressão aritmética: exemplo resolvido</i> (vídeo) • <i>Monotonia de progressões aritméticas</i> (vídeo)

Observações	Notas
A resolução de alguns dos exercícios do caderno de atividades na aula pode permitir ao aluno uma compreensão da matéria de forma mais organizada e conduzida, daí que se necessário se devem aumentar o número de aulas. Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 82 e 83

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Identificar progressões geométrica. Determinar a soma de um número finito de termos. Escrever o termo geral de uma progressão geométrica.

Conteúdos
Termo geral de uma progressão geométrica. Soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Sumário
Termo geral de uma progressão geométrica. Soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 4.3. , 4.4. , 5.1. e 5.3.+.	Termo geral de uma progressão geométrica.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 38 a 41 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (194 a 202 das págs. 46 e 47).	• <i>Progressões geométricas e termo geral</i> (tutorial) • <i>Progressão geométrica: definição</i> (vídeo) • <i>Aplicar conceitos de progressões geométricas</i> (vídeo) • <i>Exemplo resolvido: três termos de uma progressão</i> (vídeo) • <i>Determinar a soma dos 20 primeiros termos da progressão geométrica</i> (vídeo) • <i>Monotonia de uma progressão geométrica</i> (vídeo)

Observações	Notas
A resolução de alguns dos exercícios do caderno de atividades na aula pode permitir ao aluno uma compreensão da matéria de forma mais organizada e conduzida, daí que se necessário se devem aumentar o número de aulas. Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 84 a 87

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor SUC11 7.2.+.	

Estratégias
A prática de exercícios permite a consolidação de aprendizagens e diagnóstico das mesmas. (págs. 43 a 47 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão, se necessário, dos problemas propostos nas aulas.	• <i>Resolução de exercícios sobre progressões</i> (aula) • <i>Gauss: um pequeno génio</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 88

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação e diagnóstico de aprendizagens

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Avaliação formativa de conhecimentos. (págs. 50 e 51 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão do teste.	

Observações	Notas
Resolução disponível no Livro do Professor.	

Plano de aula 89 e 90

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Estudar a convergência de sucessões.

Conteúdos
Sucessão convergente. Convergência e limitação.

Sumário
Sucessões convergentes. Unicidade do limite. Convergência, limitação e monotonia. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.1., 6.2., 6.3.+ e 6.4.	Sucessão convergente. Sucessão limitada. Sucessão monótona.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. Segue-se uma análise conjunta com a turma das demonstrações apresentadas. (págs. 53 a 55 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (203 a 207 das págs. 48 e 49).	• <i>Representação gráfica de uma sucessão</i> (vídeo) • <i>Limite de sucessões: introdução</i> (vídeo) • <i>Limite de uma sucessão</i> (vídeo) • <i>Sucessões convergentes: inverso de n</i> (vídeo) • <i>Sucessões convergentes: simétrico do inverso de n</i> (vídeo) • <i>Teorema da unicidade do limite: introdução</i> (vídeo) • <i>Teorema da unicidade do limite: demonstração</i> (vídeo) • <i>Sucessões monótonas limitadas</i> (vídeo) • <i>Monotonia e convergência de uma sucessão</i> (exercício) • Limite de uma sucessão – demonstrações (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados. Naturalmente, pode não ser possível explorar na aula todos os recursos indicados. Pode, no entanto, fazer-se uma seleção de acordo com as especificidades e dificuldades dos alunos. As demonstrações que constam do <i>PowerPoint</i>, referentes a todo o domínio, são facultativas nas Metas Curriculares.	

Plano de aula 91

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Provar que o limite de uma sucessão é infinito.

Conteúdos
Limites infinitos.

Sumário
Limites infinitos. Sucessões que diferem num número finito de termos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.5. , 6.6. e 6.7.	Limites infinitos.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 56 e 59 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (208 a 212 das págs. 49 e 50).	• <i>Sucessões divergentes</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 92 e 93

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Determinar limites de sucessões. Determinar limites de sucessões envolvendo operações.

Conteúdos
Limite de sucessões de termos gerais $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ e $u_n = n^m$. Adição e multiplicação de sucessões convergentes. Multiplicação de uma sucessão limitada por uma sucessão com limite nulo.

Sumário
Limite de uma sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ e $u_n = n^m$. Adição e multiplicação de sucessões convergentes. Multiplicação de uma sucessão limitada por uma sucessão com limite nulo. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.8.+ , 6.9. , 6.10. , 6.11. e 6.12#.	Limite de uma sucessão.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação de aprendizagens. (págs. 60 a 63 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no caderno de atividades (213 e 214 da pág. 50).	• Operações com limites (PowerPoint) • Limite de uma sucessão definida por n^p (tutorial) • Teorema sobre sucessões convergentes: introdução (vídeo) • Limite da soma (tutorial) • Limite do produto (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 94 e 95

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Determinar limites de sucessões recorrendo a operações.

Conteúdos
Multiplicação de uma sucessão convergente por uma constante. Potência de uma sucessão convergente. Divisão de sucessões convergentes.

Sumário
Divisão de sucessões convergentes. Multiplicação de uma sucessão convergente por uma constante. Potência de uma sucessão convergente. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.13.#, 6.14.# e 6.15.#.	Potência de uma sucessão convergente.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação de aprendizagens. (págs. 64 a 67 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (215 a 218 das págs. 50 e 51).	• <i>Limite do quociente de duas sucessões convergentes</i> (tutorial) • <i>Limite de potência de uma sucessão convergente</i> (tutorial) • <i>Limite do produto de uma constante por uma sucessão convergente</i> (exercício interativo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 96 e 97

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Levantamento de indeterminações.

Conteúdos
Adição de sucessões com limites infinitos. Multiplicação com sucessões com limites infinitos. Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $\infty \times 0$. Potências de sucessões com limites infinitos.

Sumário
Adição e multiplicação de sucessões com limites infinitos. Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $\infty \times 0$. Potenciação de sucessões com limites infinitos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.16. , 6.17.# , 6.18. , 6.19.# , 6.20.# , 6.21.# , 6.22. e 6.23.#.	Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $\infty \times 0$. Potenciação.

Estratégias
O levantamento de indeterminações nem sempre é fácil para o aluno, pelo que se sugere que a resolução de exercícios seja acompanhada pelo professor. A análise de exemplos e exercícios resolvidos pode ser facilitadora para a compreensão da matéria por parte do aluno. (págs. 68 a 71 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (219 a 220 da pág. 51).	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. O número de aulas atribuído deverá ser flexível, tendo em consideração o ritmo de aprendizagem da turma.	

Planos de aula 98 e 99

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Levantamento de indeterminações.

Conteúdos
Divisão de sucessões com limites infinitos. Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Sumário
Divisão (de sucessões com limites infinitos). Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.24.#, 6.25.# e 6.26.	Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Estratégias
O levantamento de indeterminações nem sempre é fácil para o aluno, pelo que se sugere que a resolução de exercícios seja acompanhada pelo professor. (págs. 72 a 75 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (221).	

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 100

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Determinar o limite de polinómios e de frações racionais.

Conteúdos
Limites de polinómios e de frações racionais.

Sumário
Limites de polinómios e de frações racionais. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.27. e 6.28.	Limites de polinómios e de frações racionais.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e um desempenho eficaz dos exercícios propostos. (págs. 76 e 77 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (222 a 224 das págs. 51 e 52).	• <i>Limite de polinómios de variável natural</i> (tutorial) • <i>Limite do quociente de dois polinómios de variável natural</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 101

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Determinar o limite de sucessões do tipo $\lim a^n$ e $\lim \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

Conteúdos
$\lim a^n$ e $\lim \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

Sumário
$\lim a^n$ e $\lim \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$). Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 6.29.+ , 6.30.+ e 6.31.	Limites de sucessões do tipo $\lim a^n$ e $\lim \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno a consolidação da aprendizagem da propriedade e a um desempenho eficaz dos exercícios propostos. Sugere-se ainda a exploração do recurso Geogebra apresentado. (págs. 78 e 79 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (225 da pág. 52).	• Limite de sucessões do tipo $\sqrt[n]{a}$ (tutorial) • Limite de sucessões do tipo a^n (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 102 a 104

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 3×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolução de problemas usando as propriedades da determinação de limites das sucessões.

Sumário
Resolução de problemas

Descritores	Termos e conceitos
Descritores SUC11 7.3. e 7.4.	

Estratégias
A prática de exercícios permite a consolidação de aprendizagens e diagnóstico das mesmas. (págs. 80 a 87 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução dos problemas propostos para a aula.	• Paradoxos (vídeo) • Paradoxos de Zenão (vídeo) • Paradoxo do estádio (vídeo) • Paradoxo da seta (vídeo) • Paradoxo de Aquiles e da Tartaruga (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 105

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões	Consolidação e diagnóstico de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Avaliação formativa de conhecimentos. (págs. 93 e 94 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Concluir a resolução do teste, caso seja necessário.	

Observações	Notas
Resolução disponível no Livro do professor.	

Plano de aula 106

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Sucessões, Trigonometria e Funções Trigonométricas e Geometria Analítica.	Consolidação e diagnóstico de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Teste global.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Avaliação formativa de conhecimentos. (págs. 95 e 97 do volume 2 do manual)

TPC	Recursos
Concluir a resolução do teste, caso seja necessário.	

Observações	Notas
Resolução disponível no Livro do professor.	

Planos de aula 107 e 108

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Generalidades sobre funções.

Sumário
Realização de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Os alunos devem efetuar a tarefa proposta, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem.
Recomenda-se a projeção da resolução dos itens da tarefa de diagnóstico, para que os alunos possam efetuar uma auto correção. A utilização dos recursos virtuais permitem recordar matéria lecionada no 10.º ano.
(págs. 6 e 7 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Introdução: funções definidas por ramos</i> (vídeo) • <i>Representação gráfica de funções definidas por ramos</i> (vídeo) • <i>Raiz índice n de um número real</i> (vídeo) • <i>Representação da função módulo</i> (vídeo) • <i>Resolução de equações irracionais</i> (vídeo)

Observações	Notas

Plano de aula 109

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Identificar pontos aderentes a um conjunto de números reais.

Conteúdos
Pontos aderentes.

Sumário
Pontos aderentes a um conjunto de números reais. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 1.1.	Pontos aderentes.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 8 e 9 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (226 e 227 da pág. 53).	• <i>Pontos aderentes a um conjunto (Geogebra)</i>

Observações	Notas
Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Planos de aula 110 a 112

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 3×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Definir limite de uma função num ponto segundo Heine.

Conteúdos
Limite de uma função num ponto segundo Heine.

Sumário
Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio. Limites infinitos. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 1.2.	Limites segundo Heine.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 10 a 15 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (228 a 236 das págs. 53 a 56).	• <i>Limite de uma função segundo Heine</i> (vídeo) • <i>Limite de uma função num ponto segundo Heine. Continuidade</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 113

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Reconhecer a existência de limites à direita e à esquerda num ponto aderente.

Conteúdos
Limite à esquerda e limite à direita. Propriedades dos limites laterais.

Sumário
Limites laterais: definição e propriedades. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 1.3. , 1.4. , 1.5. e 1.6.	Limites laterais.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 16 a 19 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (237 e 238 das págs. 56 e 57).	• Limites laterais de uma função num ponto (vídeo) • Existência de limite de uma função num ponto (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 114

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Reconhecer os limites no infinito.

Conteúdos
Limites no infinito.

Sumário
Limites no infinito. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 1.7. e 1.8.	Limites no infinito.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 20 e 21 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (239 a 242 das págs. 57 e 58).	• <i>Limites e infinito</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 115 e 116

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Calcular limites.

Conteúdos
Limite da soma, produto e quociente. Limite do produto por um escalar. Limite da potência de expoente racional.

Sumário
Limite da soma, produto e quociente. Limite do produto por um escalar. Limite da potência de expoente racional Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 1.9.	Limite da soma, produto e quociente. Limite do produto por um escalar. Limite da potência de expoente racional.

Estratégias
Os exemplos que acompanham cada um dos limites estudados identificam os pontos mais importantes a realçar nesta matéria, no entanto os exercícios resolvidos ao serem analisados complementam esse estudo. (págs. 22 a 25 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (243 a 248 das págs. 59 a 61).	• <i>Cálculo de limites: soma</i> (vídeo) • <i>Cálculo de limites: produto</i> (vídeo) • <i>Cálculo de limites: quociente</i> (vídeo) • <i>Operações com limites</i> (exercício)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 117

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Determinar limites.

Conteúdos
Produto de uma função limitada por uma função de limite nulo. Limite de uma função composta.

Sumário
Produto de uma função limitada por uma função de limite nulo. Limite de uma função composta. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 1.10. e 1.11.	Limite de uma função composta.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 26 e 27 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (249 a 251 das págs. 61 e 62).	• <i>Limite da função composta</i> (tutorial) • <i>Limite nulo do produto de duas funções</i> (exercício)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 118 e 119

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Estudar os zeros e o sinal de funções racionais.

Conteúdos
Função racional: definição, domínio, zeros e sinal.

Sumário
Funções racionais (definição, domínio, zeros e sinal) Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 2.6. e 4.1.+.	Função racional. Zeros e sinal de uma função.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 28 a 31 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (252 a 256 das págs. 62 a 64).	• <i>Função racional</i> (vídeo) • <i>Exemplo resolvido: inequações fracionárias</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	Optou-se por introduzir as funções racionais antes do levantamento das indeterminações para que os alunos trabalhem alguns aspetos algébricos.

Planos de aula 120 a 122

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 3×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Levantar indeterminações.

Conteúdos
Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$.
Funções definidas por polinómios, frações algébricas e expressões irracionais.

Sumário
Levantamento algébrico de indeterminações. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 4.2.+.	Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Funções definidas por polinómios, frações algébricas e expressões irracionais.

Estratégias
Os exemplos que acompanham cada um dos limites estudados identificam os pontos mais importantes a realçar nesta matéria, no entanto os exercícios resolvidos ao serem analisados complementam esse estudo. (págs. 32 a 35 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (257 e 258 da pág. 65).	- Indeterminações: introdução (vídeo) - Indeterminação do tipo $\infty - \infty$: expressão polinomial (vídeo) - Indeterminação do tipo $\infty - \infty$: expressão irracional (vídeo) - Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ – funções racionais (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 123 e 124

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Levantar indeterminações.

Conteúdos
Indeterminações do tipo $0 \times \infty$ e $\frac{0}{0}$.
Funções definidas por frações algébricas e expressões irracionais.

Sumário
Levantamento algébrico de indeterminações. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 4.2.+.	Indeterminações do tipo $0 \times \infty$ e $\frac{0}{0}$. Funções definidas por frações algébricas e expressões irracionais.

Estratégias
Os exemplos que acompanham cada um dos limites estudados identificam os pontos mais importantes a realçar nesta matéria, no entanto os exercícios resolvidos ao serem analisados complementam esse estudo. (págs. 36 a 38 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (259 e 260 da pág. 64).	• <i>Limite de uma função racional num ponto</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 125 a 128

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 4.1.+ e 4.2.+	

Estratégias
Os alunos devem efetuar os problemas, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem. Recomenda-se a projeção da resolução dos problemas, para que os alunos possam efetuar uma auto correção das suas produtos, à medida que estas forem sendo feitas ao longo de cada dois blocos de aula. (págs. 40 a 49 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução dos problemas propostos nas aulas.	• <i>Resolução de problemas envolvendo funções racionais</i> (tutorial) • <i>Resolução de problemas envolvendo limites em situação de indeterminação</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 129 e 130

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Estudar a continuidade de uma função.

Conteúdos
Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio.

Sumário
Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 2.1. , 2.2. , 2.3. e 2.4.	Continuidade num ponto. Continuidade num conjunto.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 50 a 53 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (261 a 269 das págs. 67 a 69).	• <i>Função contínua</i> (vídeo) • <i>Limites de funções</i> (segundo Heine). • <i>Continuidade</i> (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 131 e 132

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Estudar a continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas.

Conteúdos
Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas.

Sumário
Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 2.5. e 2.10.	Continuidade da soma, diferença, produto, quociente. Composição de funções contínuas.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 54 e 55 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (270 a 273 das págs. 69 e 70).	• <i>Operações com funções contínuas</i> (exercício)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 133

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Estudar a continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas e potências de expoente racional.

Conteúdos
Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas e potências de expoente racional.

Sumário
Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas e potências de expoente racional. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 2.7. , 2.8. , 2.9. e 2.11.	Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas e potências de expoente racional. Funções de referência para a continuidade.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 56 e 57 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (274 da pág. 70).	• <i>Estudo da continuidade de funções</i> (tutorial) • <i>Continuidade das funções trigonométricas</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	A justificação da continuidade das funções seno e cosseno está fora do âmbito do Programa.

Planos de aula 134 a 138

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 5×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 4.3.+.	

Estratégias
Sugere-se que a resolução dos problemas propostos seja feito em grupo de pares e discutida em grande grupo a resolução dos problemas de resposta aberta. (págs. 58 a 63 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão dos problemas propostos nas aulas.	• <i>Resolução de problemas envolvendo continuidade</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração do recurso indicado.	

Planos de aula 139 e 140

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Identificar assíntotas verticais.

Conteúdos
Assíntotas verticais.

Sumário
Assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 3.1.	Assíntotas verticais.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 64 a 67 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (275 da pág. 71).	• Assíntota vertical (vídeo) • Como determinar assíntotas verticais de uma função racional? (vídeo) • Assíntota vertical à esquerda ou à direita (vídeo) • Assíntotas ao gráfico de uma função (PowerPoint)

Observações	Notas

Planos de aula 141 e 142

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Identificar assíntotas horizontais.

Conteúdos
Assíntotas horizontais.

Sumário
Assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
	Assíntotas horizontais.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 68 e 69 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (276 a 279 das págs. 71 a 73).	- Definição de assíntota horizontal (vídeo) - Como determinar assíntotas horizontais de uma função racional? (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 143 a 145

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 3×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Identificar assíntotas não verticais ao gráfico de uma função.

Conteúdos
Assíntotas não verticais.

Sumário
Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 3.2. e 3.3.	Assíntotas não verticais.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. As propriedades que nos permitem determinar o declive de assíntotas não verticais, permitem proporcionar novos exercícios propostos sobre este tema, para além dos iniciais que são de identificação da sua existência. (págs. 70 a 75 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (280 a 285 das págs. 73 e 74).	• <i>Assíntota não vertical</i> (tutorial) • <i>Assíntotas oblíquas</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 146 a 149

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 4.5.+.	

Estratégias
Sugere-se que a resolução dos problemas propostos seja feito em grupo de pares e discutida em grande grupo a resolução dos problemas de resposta aberta. (págs. 76 a 87 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução dos problemas propostos nas aulas.	• <i>Estudo de funções racionais</i> (tutorial) • <i>Resolução de problemas envolvendo assíntotas</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 150 e 151

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Avaliação formativa.

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Sugere-se que se efetue uma avaliação formativa antes de se entrar nas derivadas. (págs. 92 e 93 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas

Plano de aula 152

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Determinar a taxa média de variação.

Conteúdos
Taxa média de variação.

Sumário
Taxa média de variação; interpretação geométrica. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 5.1. e 5.2.	Taxa média de variação.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 94 e 95 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (286 a 288 da pág. 75).	• Taxa média de variação – interpretação geométrica (Geogebra) • Taxa média de variação (vídeo) • Derivadas (PowerPoint)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 153 e 154

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Determinar a derivada de uma função num ponto.

Conteúdos
Derivada de uma função num ponto.

Sumário
Derivada de uma função num ponto. Interpretação geométrica. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 5.3. , 5.4. e 5.5.	Derivadas.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 96 a 99 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (289 a 297 das págs. 76 e 77).	• <i>Derivada de uma função num ponto</i> (vídeo) • <i>Velocidade instantânea e taxa de variação ou derivada</i> (vídeo) • <i>Velocidade média e taxa média de variação</i> (vídeo) • <i>Existência de derivada da função</i> (vídeo) • <i>A função derivada e as suas aplicações</i> (vídeo) • <i>Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto</i> (Geogebra)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aulas 155 e 156

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Aplicar a noção de derivada à cinemática de um ponto.

Conteúdos
Aplicação da noção de derivada à cinemática de um ponto.

Sumário
Aplicação da noção de derivada à cinemática de um ponto. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 6.1. e 6.2.	Cinemática. Função posição. Intervalo de tempo. Instante de tempo. Unidade de tempo.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 100 a 103 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (298 a 300 das págs. 77 e 78).	- A função derivada e as suas aplicações (vídeo) - Aplicação de noção de derivada à cinemática do ponto (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Planos de aula 157 e 158

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Relacionar a diferenciabilidade e a continuidade.

Conteúdos
Função derivada; diferenciabilidade e continuidade.

Sumário
Função derivada; diferenciabilidade e continuidade. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 7.1. , 7.2. e 7.4.	Diferenciabilidade e continuidade.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 104 a 107 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (301 a 306 das págs. 78 e 79).	• <i>Função derivada</i> (vídeo) • <i>Conceito de derivada</i> (interatividade) • <i>Diferenciabilidade e continuidade</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC.	

Plano de aula 159

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Cálculo de derivadas pela definição.

Conteúdos
Funções de referência e regras de derivação.

Sumário
Funções de referência para o cálculo de derivadas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 7.9.	Funções de referência.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 108 e 109 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (307 e 308 da pág. 80).	• Regras de derivação: introdução (vídeo) • Regras de derivação (vídeo) • Derivada de funções: x, x^2 e x^3 (tutorial) • Derivada de funções: $\frac{1}{x}$ (tutorial) • Derivada de funções: $\sqrt{x}$ (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 160 a 163

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Calcular derivadas usando as regras de derivação.

Conteúdos
Regras de derivação.

Sumário
Regras de derivação. Derivação da função composta. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 7.5. , 7.6.# , 7.7. , 7.8.+ e 7.13.+.	Regras de derivação.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. A utilização das regras de derivação requer uma prática mais intensiva por parte dos alunos de forma a proporcionar a sua memorização. (págs. 110 a 115 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (309 a 314 das págs. 80 a 82).	• <i>Derivada de função soma</i> (tutorial) • <i>Derivada de função produto</i> (tutorial) • <i>Derivada do produto de uma função por uma constante</i> (tutorial) • <i>Derivada de função quociente</i> (tutorial) • <i>Derivada da função composta</i> (tutorial) • <i>Regras de derivação</i> (documento)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 164 e 165

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Calcular derivadas.

Conteúdos
Funções de referência para o cálculo de derivadas.

Sumário
Funções de referência para o cálculo de derivadas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 7.10. , 7.11.+ e 7.12.	

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 116 a 119 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Derivada de função potência</i> (tutorial) • <i>Cálculo de funções derivadas</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 166 e 167

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Aplicar o Teorema de Lagrange.

Conteúdos
Teorema de Lagrange.

Sumário
Teorema de Lagrange. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 8.2.	Teorema de Lagrange.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 120 a 123 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (315 a 317 da pág. 82).	• Teorema de Lagrange – interpretação geométrica (Geogebra) • Teorema de Lagrange (vídeo)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 168 e 169

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Indicar a monotonia de uma função, usando as derivadas.

Conteúdos
Monotonia e sinal de uma função.

Sumário
Sinal da derivada e monotonia de uma função. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 7.3.	Monotonia de uma função. Sinal da derivada.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 124 a 126 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (318 da pág. 82).	• <i>Interpretação da derivada de uma função num ponto: sinal da derivada</i> (vídeo) • <i>Monotonia e sinal da derivada</i> (interatividade) • <i>Estudo da monotonia de uma função recorrendo à derivada</i> (tutorial) • <i>Interpretação da derivada de uma função num ponto: sinal da derivada</i> (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 170 e 171

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2×45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Determinar extremos e intervalos de monotonia. Elaborar quadros de variação e sinal.

Conteúdos
Derivada nula num extremo relativo de uma função.

Sumário
Derivada nula num extremo relativo de uma função. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor FRVR11 8.1.	Derivada nula num extremo relativo de uma função.

Estratégias
Sugere-se a análise dos exemplos e exercícios resolvidos que possibilitam uma melhor compreensão da matéria. (págs. 127 a 131 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (319 a 326 das págs. 83 e 84).	• <i>Extremos relativos de uma função e o sinal da sua derivada</i> (vídeo) • <i>Extremos relativos de uma função: caso particular</i> (vídeo) • <i>Estudo da função derivada. Extremos e monotonia</i> (interatividade) • <i>Extremos relativos e primeira derivada da função</i> (vídeo) • <i>Gráfico da função f</i> (documento) • <i>Gráfico da função g</i> (documento)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 172 a 175

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 4 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de f.r.v.r.; envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidade de velocidade. Estudo de f.r.v.r. e determinação dos intervalos de monotonia, externos relativos e absolutos.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores FRVR11 9.1.+ , 9.2.+ e 9.3.+.	

Estratégias
Sugere-se que a resolução dos problemas propostos seja feito em grupo de pares e discutida em grande grupo a resolução dos problemas de resposta aberta. (págs. 132 a 145 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução dos problemas propostos nas aulas.	• <i>Resolução de problemas envolvendo a cinemática</i> (tutorial) • <i>Aplicação da derivada na resolução de problema</i> (vídeo) • <i>Resolução de problemas envolvendo retas tangentes</i> (tutorial) • <i>Problemas de otimização</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 176

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Funções reais de variável real	Avaliação formativa.

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Sugere-se que se efetue uma avaliação formativa antes de se entrar nas derivadas. (págs. 150 e 151 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução do teste.	

Observações	Notas
Resolução disponível no Livro do professor.	

Plano de aula 177

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Diagnosticar o desempenho dos alunos ao nível dos pré-requisitos.

Conteúdos
Características amostrais estudadas no 10.º ano.

Sumário
Execução de uma tarefa de diagnóstico.

Descritores	Termos e conceitos
	Somatórios. Média, soma dos quadrados dos desvios, variância e desvio padrão de uma amostra.

Estratégias
Os alunos devem efetuar a tarefa proposta, apoiados pelo professor, quando assim o solicitarem. Recomenda-se a projeção da resolução dos itens da tarefa de diagnóstico, para que os alunos possam efetuar uma auto correção. (pág. 155 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos

Observações	Notas

Plano de aula 178

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Analisar tipos de correlação.

Conteúdos
Amostra bivariada. Correlação.

Sumário
Amostras bivariadas. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores Est11 1.4. , 1.5. , 1.6. e 1.7.	Amostra bivariada. Variável explicativa. Variável resposta. Nuvem de pontos. Correlação.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno uma melhor compreensão da matéria. (págs. 156 a 159 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Dados bivariados</i> (vídeo) • <i>Amostras bivariadas</i> (PowerPoint) • <i>Nuvem de pontos</i> (tutorial)

Observações	Notas
Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 179 e 180

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Determinar uma equação da reta de mínimos quadrados.

Conteúdos
Reta de mínimos quadrados. Desvio vertical de um ponto em relação a uma reta.

Sumário
Reta de mínimos quadrados. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores Est11 1.1., 1.2. e 1.3.	Reta de mínimos quadrados. Desvio vertical de um ponto em relação a uma reta.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno uma melhor compreensão da matéria. (págs. 160 a 163 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (328 a 330 das págs. 86 e 87).	- Desvio vertical de um ponto em relação a uma reta (vídeo) - Reta de mínimos quadrados (vídeo) - Determinação da reta de mínimos quadrados (tutorial) - Guião de utilização de calculadora gráfica (documento)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	O guião de utilização da calculadora gráfica pode ser usado para auxiliar os alunos na utilização desta ferramenta tecnológica.

Plano de aula 181

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Coefficiente de correlação linear.

Conteúdos
Coefficiente de correlação linear.

Sumário
Coefficiente de correlação linear. Análise dos exemplos e dos exercícios resolvidos. Resolução dos exercícios propostos.

Descritores	Termos e conceitos
Descritor Est11 1.9.	Coefficiente de correlação linear.

Estratégias
A análise do exemplo e dos exercícios resolvidos permitirá ao aluno uma melhor compreensão da matéria. (págs. 164 a 167 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Resolução dos exercícios propostos no Caderno de atividades (331 a 335 das págs. 87 e 88).	- Utilização da folha de cálculo (Excel) - Coefficiente de correlação linear (vídeo)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Planos de aula 182 e 183

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 2 × 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos
Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados. Análise de dados bivariados, com identificação da variável resposta e da variável explicativa. Problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

Sumário
Resolução de problemas.

Descritores	Termos e conceitos
Descritores Est11 2.1.+ , 2.2.+ e 2.3.+.	

Estratégias
A resolução de problemas permitirá fazer a ligação entre os conceitos lecionados. (págs. 168 a 174 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
	• <i>Resolução de problemas envolvendo a reta de mínimos quadrados</i> (tutorial) • <i>Nuvem de pontos</i> (tutorial) • <i>Determinação da reta de mínimos quadrados</i> (tutorial) • <i>Resolução de problemas envolvendo o coeficiente de correlação</i> (tutorial)

Observações	Notas
Dedicar algum tempo da aula ao esclarecimento de dúvidas do TPC. Sugere-se a exploração dos recursos indicados.	

Plano de aula 184

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Teste.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Avaliação diagnóstica. (págs. 176 a 178 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução do teste, se necessário.	

Observações	Notas
Resolução do Teste disponível no Livro do professor.	

Plano de aula 185

Turma:	Sala:	Docente da turma:	Tempo: 45 min
			Data: ____ / ____ / ____

Domínio	Objetivo geral
Estatística, Funções reais de variável real, Sucessões, Geometria Analítica e Trigonometria e Funções Trigonométricas	Consolidação de aprendizagens.

Conteúdos

Sumário
Teste global.

Descritores	Termos e conceitos

Estratégias
Avaliação formativa, que se sugere que proceda uma avaliação sumativa. (págs. 179 a 181 do volume 3 do manual)

TPC	Recursos
Conclusão da resolução do teste.	

Observações	Notas
Resolução do teste disponível no Livro do professor. Pode partilhá-la com os alunos.	

T
ESTES

Teste de diagnóstico

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
 Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Grupo I

Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.

Para cada item, seleciona a opção correta.

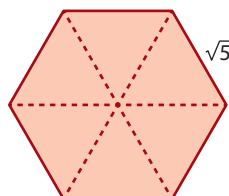
1. Na figura está representado um hexágono regular com $\sqrt{5}$ unidades de lado.
 A medida da área do hexágono é, em unidades quadradas:

(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{3\sqrt{20}}{2}$

(B) $15\sqrt{3}$

(D) $6\sqrt{5}$



2. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição que define o segmento de reta cujos extremos são os pontos $A(2, -1, -1)$ e $B(2, -1, 2)$ é:

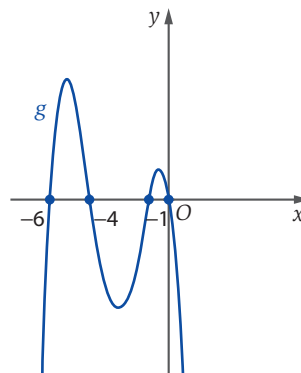
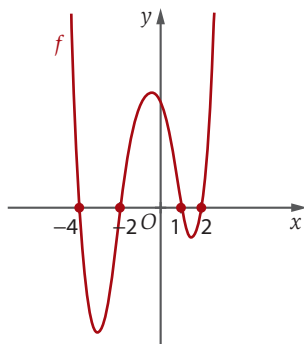
(A) $y = z \wedge x = z \wedge -1 \leq z \leq 2$

(B) $y = z \wedge x = z \wedge (z = -1 \vee z = 2)$

(C) $x = 2 \vee y = -1 \vee -1 \leq z \leq 2$

(D) $x = 2 \wedge y = -1 \wedge (z = -1 \vee z = 2)$

3. Sejam f e g funções reais de variável real, cujos gráficos se representam nas figuras seguintes:



O gráfico da função g pode obter-se a partir do gráfico da função f a partir de translações e simetrias. Qual das expressões seguintes pode definir a função g ?

(A) $f(x-2)$

(C) $f(-x+2)$

(B) $-f(x+2)$

(D) $-f(x-2)$

4. O polinómio $2x^3 + 7x^2 - 5x + k$, com $k \in \mathbb{R}$, é divisível por $x - 1$.

Qual é o valor de k ?

- (A) -4 (B) 2 (C) 1 (D) -2

5. Na tabela seguinte, estão representados os valores da variável estatística x e as respetivas frequências absolutas (n_i).

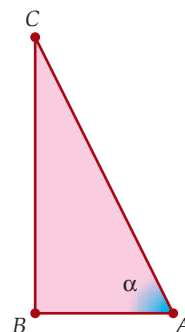
$\tilde{x}_i$	1	2	5	7
n_i	4	10	3	3

A soma dos quadrados dos desvios em relação à média, $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, deste conjunto de dados é:

- (A) 0 (B) 3 (C) 25 (D) 86

6. O triângulo $[ABC]$ da figura é retângulo em B . O ângulo interno de vértice em A tem amplitude α . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$
 (B) $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ e $\cos \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
 (C) $\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
 (D) $\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$



Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todas as justificações necessárias.

7. Seja $\vec{v}(1, -3)$ um vetor diretor de uma reta r .

7.1 Calcula $\|\vec{v}\|$ (norma do vetor $\vec{v}$).

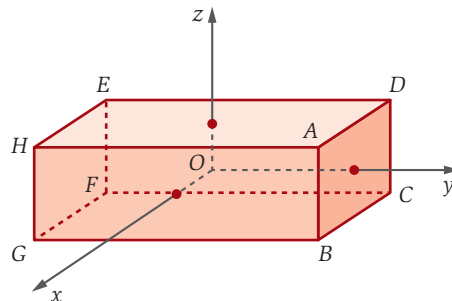
7.2 Determina o declive da reta r .

7.3 A reta r intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{1}{3}$.

Determina a ordenada do ponto de interseção de r com o eixo Oy .

8. Na figura ao lado está representado um paralelepípedo em referencial ortonormado. A origem do referencial, O , é o centro de gravidade do paralelepípedo, cujas faces são paralelas aos planos coordenados.

Sabe-se que o vértice A tem coordenadas $(2, 3, 1)$.



- 8.1 Indica as coordenadas dos restantes vértices do paralelepípedo.
- 8.2 Indica as coordenadas do ponto do espaço simétrico do vértice A relativamente ao plano de equação $y = 0$.
- 8.3 Apresenta uma equação vetorial da reta que contém a diagonal facial $[BD]$.
- 8.4 Define por meio de uma condição analítica a esfera de centro no vértice A e cuja superfície esférica contém o vértice F .
- 8.5 Determina uma equação cartesiana, da forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, que caracterize o plano mediador do segmento de reta $[AE]$.

9. Considera as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = x^2 + 2x - 8$ e $g(x) = x - 6$.

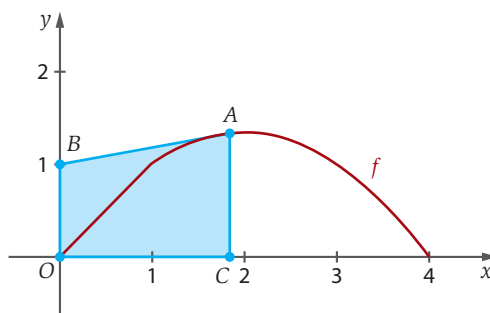
- 9.1 Determina o contradomínio da função f .
- 9.2 Resolve a condição $|g(x)| > 3$.
Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo ou uniões de intervalos.
- 9.3 Resolve a condição $f(x) \leq g(x)$.
Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo ou uniões de intervalos.

10. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n., o gráfico da função f , função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x & \text{se } 1 \leq x < 4 \end{cases}$$

Relativamente à figura sabe-se ainda que:

- a origem do referencial é o ponto O ;
- o ponto A é um ponto do gráfico de f ;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$;
- $[ABOC]$ é um trapézio.



Mostra que a área, s , do trapézio $[ABOC]$ é dada, em função da abscissa do ponto A , x , pela expressão:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{se } 1 \leq x < 4 \end{cases}$$

FIM

Teste 1 – Trigonometria e Funções Trigonométricas

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
Para cada item, selecciona a opção correta.

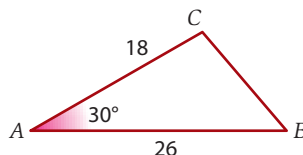
- [10] 1. Numa circunferência com 4 cm de diâmetro, um arco com 4 cm de comprimento tem amplitude igual a:
- (A) 2 radianos. (C) 2π radianos.
(B) 4 radianos. (D) 4π radianos.
- [10] 2. A medida de amplitude, em graus, do ângulo generalizado $(-30^\circ, -3)$ é:
- (A) 30° (C) 1110°
(B) -30° (D) -1110°
- [10] 3. Seja $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Qual das expressões seguintes representa um número real positivo?
- (A) $\cos \alpha - \sin \alpha$ (C) $\sin \alpha - \tan \alpha$
(B) $\cos \alpha \times \sin \alpha$ (D) $\sin \alpha \times \tan \alpha$
- [10] 4. O domínio da função definida por $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ é:
- (A) $\mathbb{R}$ (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- [10] 5. Em $\mathbb{R}$, a equação $\sin x = 2\pi$
- (A) admite a solução $x = 0$. (C) admite a solução $x = 360$.
(B) admite a solução $x = 1$. (D) é impossível.

Cotações

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

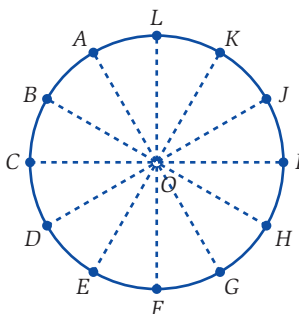
- [15] **6.** Na figura seguinte, representa-se o triângulo $[ABC]$, no qual $\overline{AB} = 26$, $\overline{AC} = 18$ e $\hat{BAC} = 30^\circ$.



Determina o perímetro do triângulo.

Apresenta o resultado arredondado às unidades. Em cálculos intermédios utiliza arredondamentos às décimas.

- 7.** A circunferência representada na figura está dividida em 12 setores iguais.



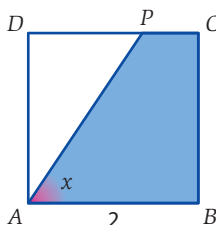
- [5] **7.1** Indica a amplitude, em graus, do ângulo orientado com lado origem $\vec{OG}$, lado extremidade $\vec{OH}$ e sentido negativo.
- [10] **7.2** Considera o ângulo generalizado $\left(-\frac{7\pi}{6}, -4\right)$, com a amplitude em radianos e o lado origem $\vec{OA}$.
Indica a amplitude deste ângulo generalizado e identifica o lado extremidade do ângulo.

- [15] **8.** Mostra que

$$(1 - \sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2 \tan x \cos x = 2$$

$$\left(\text{para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right).$$

Cotações 9. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado 2.



Considera que um ponto P se desloca ao longo do lado $[CD]$, nunca coincidindo com o ponto C nem com o ponto D .

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PAB e seja a a função que dá a área do quadrilátero $[ABCP]$, para cada valor de x .

[5] 9.1 Indica o domínio da função a .

[15] 9.2 Mostra que $a(x) = 4 - \frac{2}{\tan x}$.

[20] 9.3 Para um certo valor de $\theta \in D_a$ sabe-se que $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$.

Determina, para esse valor de θ , a área do quadrilátero $[ABCP]$.

10. Considera, para um certo número real x , a seguinte expressão:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin(7\pi + x) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(-x)}$$

[15] 10.1 Mostra que a expressão é igual a $\sin(x) + \tan(x)$.

[5] 10.2 Calcula o valor exato da expressão para $x = -\frac{5\pi}{3}$.

11. Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{2} \cos(2x) - 1$.

[15] 11.1 Determina os zeros da função f pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

[10] 11.2 Mostra que o período positivo mínimo da função f é π .

11.3 Seja g a restrição da função f ao conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

[5] a. Mostra que o contradomínio da função g é $[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1]$.

[15] b. Caracteriza a função inversa da função g .

FIM

Teste 2 – Geometria Analítica

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
 Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

**Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
 Para cada item, seleciona a opção correta.**

- [10] 1. Considera, num referencial ortonormado de um plano, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não colineares, com $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$.
 Qual dos valores seguintes não pode ser igual ao produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
- [10] 2. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Então, tem-se, necessariamente:
- (A) $\vec{u} \perp \vec{v}$ (B) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pi$ (C) $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (D) $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- [10] 3. Num referencial ortonormado do plano, uma reta admite a equação $y = \sqrt{3}x - 4$. Então, sendo α a inclinação, em radianos, dessa reta, tem-se:
- (A) $\alpha = \sqrt{3}$ (B) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (C) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (D) $\alpha = 60$
- [10] 4. Considera, num referencial ortonormado do espaço, dois pontos, A e B , cujo ponto médio é o ponto C . Assim, o conjunto dos pontos P do espaço tais que $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$
- (A) é o plano mediador de $[AB]$.
 (B) é a superfície esférica de centro C e diâmetro $[AB]$.
 (C) é um plano tangente à superfície esférica de centro C e diâmetro $[AB]$.
 (D) é o conjunto vazio.
- [10] 5. Seja α o plano definido pela seguinte equação cartesiana:

$$2(x-1) - 3(y-5) + z - 1 = 0$$

 Qual dos seguintes vetores é um vetor normal a α ?
- (A) $\vec{u}(2, 3, 1)$ (C) $\vec{w}(1, 5, 1)$
 (B) $\vec{v}(-1, -5, -1)$ (D) $\vec{x}(4, -6, 2)$

Cotações

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

- [20] **6.** Considera, num referencial ortonormado Oxy , o triângulo $[ABC]$, com $A(2, 1)$, $B(4, -2)$ e $C(1, 5)$.

Determina $\hat{BAC}$, em graus, arredondado às décimas.

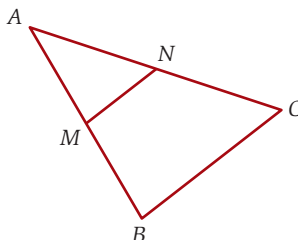
- [20] **7.** Sejam as retas r e s as definidas como se segue:

$$r: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$$

$$s: (x, y) = (0, 2) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

Mostra que $\hat{r, s} = 30^\circ$.

- [20] **8.** Na figura seguinte, está representado um triângulo $[ABC]$ e o segmento de reta $[MN]$, em que M e N são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[AC]$, respetivamente.



Prova, usando vetores, que $[MN]$ e $[BC]$ são paralelos.

- 9.** Fixado um referencial o.n. $Oxyz$, considera as retas r e s definidas pelos seguintes sistemas de equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad s: \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 \\ z = 2 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- [10] **9.1** Justifica que as retas r e s são estritamente paralelas.

- [20] **9.2** Determina a equação geral do plano que contém as retas r e s .

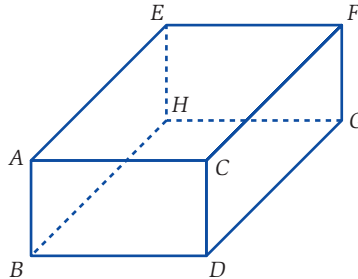
Cotações 10. Na figura ao lado, está representado o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$. Considera que se fixa um referencial o.n. $Oxyz$ relativamente ao qual se tem:

• $B(0, 2, 0)$

• $D(0, 4, 0)$

• $G(-6, 4, 0)$

• $F(-6, 4, 1)$



[15] 10.1 Obtém uma equação vetorial do plano BGF .

[15] 10.2 Obtém uma equação vetorial da reta paralela à diagonal espacial $[BF]$ que passa na origem do referencial.

[10] 10.3 Determina o volume do paralelepípedo.

[20] 11. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano δ definido por

$$x + \frac{3}{4}y + 2z = 3$$

Sejam A , B e C os pontos de interseção do plano δ com os eixos coordenados.

Determina o volume da pirâmide triangular $[OABC]$, tomando para unidade de medida no referencial o centímetro.

FIM

Teste 3 – Sucessões

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

**Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
Para cada item, seleciona a opção correta.**

- [10] 1. A sucessão (u_n) , de termo geral $u_n = (-1)^n + 3n$, é uma sucessão
- (A) crescente. (C) não monótona.
(B) decrescente (D) constante.
- [10] 2. Relativamente à sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{4n-1}{n}$ qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) A sucessão não é limitada.
(B) A sucessão é limitada, 3 é um minorante e 4 é um majorante.
(C) A sucessão é limitada, 3 é um majorante e 4 é um minorante.
(D) A sucessão é limitada, 4 é um minorante e 5 é um majorante.
- [10] 3. A sucessão (a_n) está assim definida:
$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
(B) (a_n) é uma progressão geométrica de razão -3 .
(C) (a_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.
(D) (a_n) é uma progressão aritmética de razão -3 .
- [10] 4. Uma progressão aritmética de termo geral $b_n = -2(3-n)$ tem razão
- (A) -6 (C) 2
(B) -2 (D) 3

Cotações

[10] 5. Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-5}$?

(A) $-\frac{2}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $-\infty$

(D) $+\infty$

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

6. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2}$$

[10] 6.1 Verifica se $\frac{25}{13}$ é termo da sucessão (u_n) e, em caso afirmativo, indica a respetiva ordem.

[10] 6.2 Estuda a monotonia de (u_n) .

[10] 6.3 Verifica se (u_n) é limitada.

[10] 6.4 Prova, por definição, que $u_n \rightarrow 2$.

[10] 6.5 Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 5}{n + 1} \times u_n \right)$.

7. De uma progressão geométrica (u_n) sabe-se que

$$u_1 = \frac{1}{3^{28}} \quad \text{e} \quad u_{10} = \frac{1}{3^{10}}.$$

[10] 7.1 Determina a razão da progressão geométrica.

[5] 7.2 Calcula u_{20} .

[10] 7.3 Define (u_n) por recorrência.

[10] 7.4 Escreve uma expressão do termo geral desta progressão.

[15] 7.5 Mostra que a soma dos vinte termos consecutivos de (u_n) , a partir do 10.º, é

$$\frac{3^{30} - 3^{-10}}{8}.$$

Cotações 8. Numa feira de agricultura, o Sr. Pedro, negociante de cavalos, pedia por um cavalo puro-sangue a quantia de 4 000 000 euros. O Sr. João estava muito interessado em comprar o cavalo, mas considerava o preço muito elevado.

O Sr. Pedro propôs-lhe, então, o seguinte negócio:

«O cavalo tem 4 ferraduras, e cada uma delas tem 8 cravos. O Sr. João dá-me um **cêntimo** pelo primeiro cravo da ferradura da pata **dianteira esquerda**; dois cêntimos pelo segundo cravo da mesma ferradura, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até ao oitavo cravo dessa ferradura, pelo qual me dá 1,28 euros.»

«Repare: pelos oito cravos da ferradura desta pata, o Sr. João paga-me 2,55 euros. Barata a feira! Continuemos para os outros cravos. Pelo primeiro cravo da pata **dianteira direita**, o Sr. João dá-me 2,56 euros, isto é, o dobro do valor do oitavo cravo da pata dianteira esquerda, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até se terem esgotado os 32 cravos das ferraduras do cavalo.»

«O Sr. João aceita pagar-me, por este cavalo, a quantia total do valor dos cravos das ferraduras?»

- [10] 8.1 Verifica que o valor total dos cravos da ferradura da pata **dianteira esquerda** é de 2,55 euros, tal como o Sr. Pedro refere.
- [20] 8.2 Mostra que, de acordo com a proposta do Sr. Pedro, o valor a pagar pelo cavalo é superior a 4 000 000 euros.

(Exames nacionais de Matemática B)

- [20] 9. Demonstra a seguinte propriedade utilizando o princípio de indução matemática:

«Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^3 - n$ é múltiplo de 3.»

FIM

Teste 4 – Funções Reais de Variável Real

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
 Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

**Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
 Para cada item, seleciona a opção correta.**

[10] 1. Considera a função f definida por $f(x) = 1 + \frac{3}{x+5}$.

1.1 As assíntotas ao gráfico de f têm equações:

(A) $x = 1$ e $y = -5$

(C) $y = 1$ e $x = 5$

(B) $y = 1$ e $x = -5$

(D) $y = 3$ e $x = -5$

[10] 1.2 Relativamente à função f qual das afirmações seguintes é correta?

(A) O único zero da função f é -8 .

(B) O único zero da função f é -5 .

(C) Os zeros da função f são -8 e -5 .

(D) A função f não tem zeros.

[10] 2. Sejam f e g duas funções tais que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros: -1 , 2 e 3 ;
- a função g tem domínio $\mathbb{R}^+$ e 2 é o seu único zero.

Quantos zeros tem a função $f \times g$?

(A) Quatro

(C) Dois

(B) Três

(D) Um

[10] 3. Na figura está representado o gráfico de uma função h .

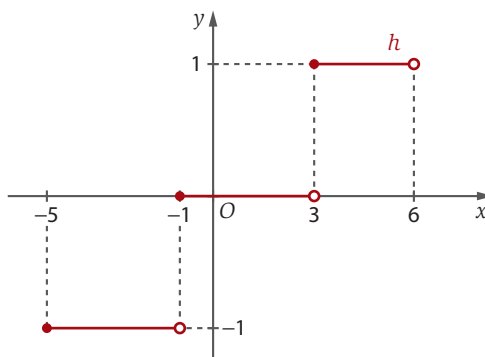
Relativamente a h pode afirmar-se que:

(A) $\lim_{x \rightarrow 6^+} h(x) = 1$

(B) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 1$

(C) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow -5} h(x) = -1$



Cotações

[10] 4. Relativamente às funções f e h , ambas de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

- a reta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota ao gráfico de f ;
- a função h é definida por $h(x) = \frac{1 - 4f(x)}{x}$.

Em qual das seguintes opções consta uma equação da assíntota horizontal ao gráfico de h ?

- (A) $y = -12$ (B) $y = -8$ (C) $y = -7$ (D) $y = -6$

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

5. A função real de variável real f tem a seguinte expressão analítica:

$$f(x) = \frac{-5x + 3}{x + 1}$$

[15] 5.1 Escreve a expressão analítica da função f na forma $a + \frac{b}{x - c}$ e indica o seu domínio e contradomínio.

[10] 5.2 Determina os zeros de f , caso existam.

[15] 5.3 Resolve a inequação $f(x) < 1$.

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

[15] 5.4 Mostra que $x = 0$ é o único número real para o qual se tem $f(x) = f(-x)$.

6. Calcula o valor dos seguintes limites, começando por identificar o tipo de indeterminação.

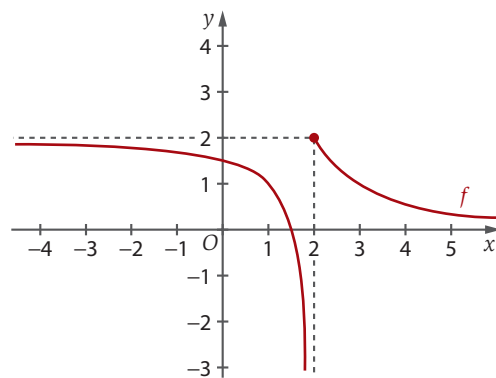
[2 × 15] 6.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

6.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

[15] 7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente na figura seguinte, e seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim f(u_n) = 2$.

Nas opções seguintes apresentam-se termos gerais de sucessões.

- (A) $2 + \frac{1}{n}$ (C) $n - 2$
 (B) $2 - \frac{1}{n}$ (D) $2 - n$



Justifica que apenas o termo geral apresentado na opção (A) pode definir a sucessão (u_n) .

Cotações

- [15] 8. Seja g a função real de variável real definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$$

Define a função h , de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- g seja a restrição de h ao conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- h seja uma função contínua.

- [20] 9. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por

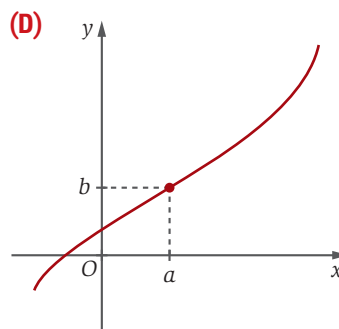
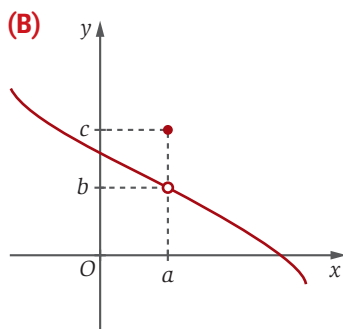
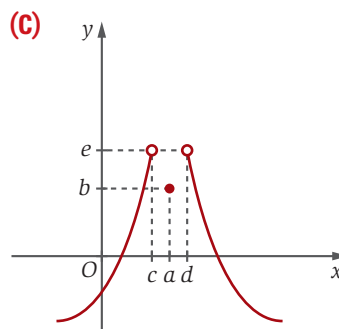
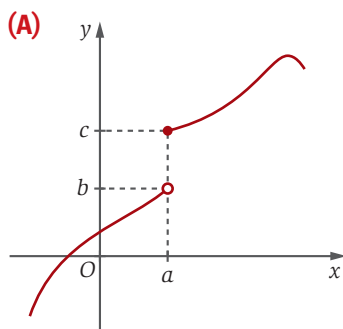
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

Determina equações das assíntotas ao gráfico de f .

- [10] 10. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Calcula o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3f(x) + x^2}{5x}$.

- [15] 11. Para cada um dos gráficos representados a seguir, identifica aqueles que correspondem a funções contínuas no ponto a e aqueles que não correspondem a funções contínuas no ponto a . Justifica a tua resposta.



FIM

Teste 5 – Funções Reais de Variável Real

Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
 Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

**Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
 Para cada item, seleciona a opção correta.**

- [10] 1. O gráfico de uma função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima cujo vértice é o ponto de coordenadas $(3, 2)$. Seja f' a função derivada da função f .

Qual dos valores seguintes é positivo?

- (A) $f'(1)$ (B) $f'(2)$ (C) $f'(3)$ (D) $f'(4)$

(Adaptado de testes intermédios)

- [10] 2. Relativamente a uma função f , real de variável real, sabe-se que a sua derivada está definida em $\mathbb{R}$ por $f'(x) = -x + 10$. É correto afirmar que:

- (A) A função f não tem extremos relativos.
 (B) A função f tem exatamente um máximo relativo.
 (C) A função f é monótona.
 (D) A função f tem exatamente um mínimo relativo.

- [10] 3. A reta de equação $y = x + 2$ é tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abcissa 2.

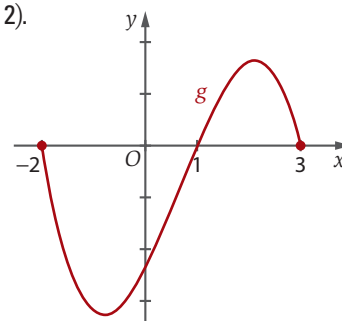
Qual é o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

- [10] 4. Na figura seguinte, está representada graficamente a função g , de domínio $[-2, 3]$, com três zeros (-2 , 1 e 3) e dois extremos absolutos (em $x = -1$ e em $x = 2$).

Qual é o conjunto solução da condição $g(x) \times g'(x) < 0$?

- (A) $] -2, 1[$
 (B) $] -2, -1[$
 (C) $] -2, -1[\cup] 1, 3[$
 (D) $] -1, 1[\cup] 2, 3[$

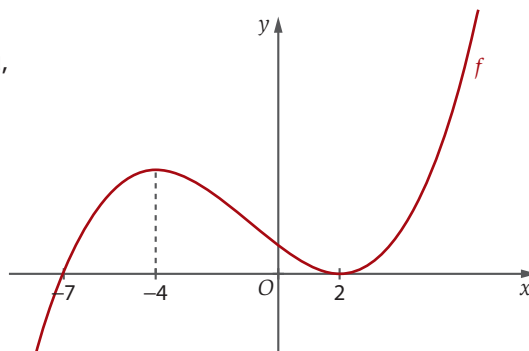


Cotações

- [10] 5. Na figura ao lado está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau, de domínio $\mathbb{R}$.

Como se representa na figura, a função f :

- tem dois zeros: -7 e 2 ;
- tem um máximo relativo em $x = -4$ e um mínimo relativo em $x = 2$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função $f \times f'$ tem quatro zeros e a função $\frac{f'}{f}$ tem dois zeros.
- (B) A função $f \times f'$ tem quatro zeros e a função $\frac{f'}{f}$ tem um zero.
- (C) A função $f \times f'$ tem três zeros e a função $\frac{f'}{f}$ tem dois zeros.
- (D) A função $f \times f'$ tem três zeros e a função $\frac{f'}{f}$ tem um zero.

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

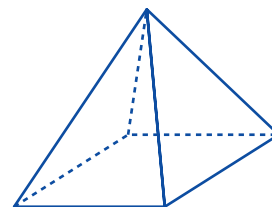
- [15] 6. Seja g uma função real de variável real. Sabe-se que:

- $g'(4) = 7$;
- a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 4 interseja o eixo Oy no ponto de ordenada -26 .

Determina $g(4)$.

- [20] 7. Relativamente à pirâmide quadrangular representada na figura, sabe-se que as dimensões têm as seguintes relações, para $x \in]0, 9[$:

- a base é um quadrado de perímetro $8x$;
- a altura da pirâmide mede $9 - x$.



Determina o volume máximo de uma pirâmide que obedece a estas relações.

Cotações

- [20] 8. Na figura, está representada parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

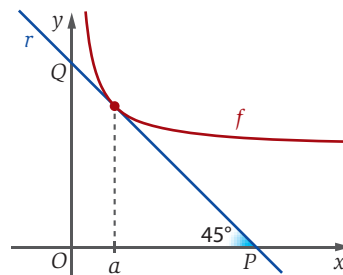
$$f(x) = \frac{3+2x}{x}.$$

Nesta figura:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a ($a > 0$);
- os pontos P e Q são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados.

Sabe-se que $\widehat{OPQ} = 45^\circ$.

Determina o valor de a .



- [25] 9. Mostra, utilizando as regras de derivação, que:

$$\left(\frac{2x+4}{\sqrt{3x+2}} \right)' = \frac{3x-2}{(3x+2)\sqrt{3x+2}}$$

10. Num jogo de futebol, um guarda-redes pontapeou uma bola em direção ao meio campo da equipa adversária.

A altura da bola, h , em metros, em relação ao solo, em cada instante t , em segundos, contados a partir do instante em que o guarda-redes pontapeou a bola até ao instante em que a bola tocou no solo, é dada por:

$$h(t) = 1 + 15t - 5t^2$$

- [10] 10.1 Calcula a altura da bola no momento em que foi pontapeada pelo guarda-redes.
- [15] 10.2 Calcula a velocidade média da bola, na direção vertical, desde o instante $t = 1$ até ao instante $t = 2$. Interpreta o resultado obtido.
- [20] 10.3 Calcula a taxa de variação instantânea de h em $t = 3$. Interpreta o resultado obtido no contexto da situação descrita.

- [25] 11. Considera a função racional g definida como se segue:

$$g(x) = \frac{x}{x-4}$$

Demonstra que g' , função derivada de g , pode ser definida por

$$g'(x) = -\frac{4}{(x-4)^2}$$

Na tua demonstração, não recorras a qualquer regra de derivação.

FIM

Teste 6 – Estatística

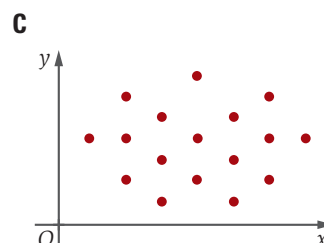
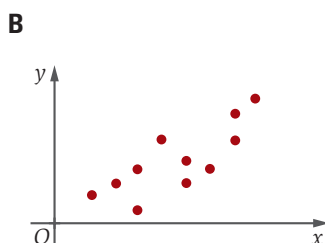
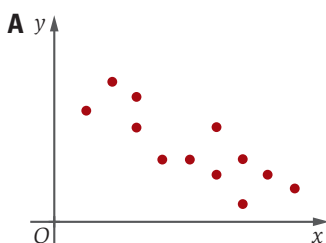
Nome da escola _____ Ano letivo ____ / ____
 Nome _____ N.º ____ Turma ____ Data ____ / ____ / ____

Cotações

Grupo I

Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
Para cada item, seleciona a opção correta.

- [10] 1. Considera a reta r definida por $y = 2x - 3$ e o ponto $A(0, -3)$.
 Qual é o valor do desvio vertical do ponto A em relação à reta r ?
 (A) -7 (B) -2 (C) 0 (D) 7
- [10] 2. Relativamente a uma amostra bivariada (x, y) , sabe-se que $\bar{x} = 10$ e que a respetiva reta de mínimos quadrados tem equação $y = -1,25x + 2,32$.
 Qual é o valor de $\bar{y}$?
 (A) -29 (B) $-14,82$ (C) $-10,18$ (D) $14,82$
- [10] 3. Considera a seguinte nuvem de pontos:
 $\{(1, -2), (2, -4), (3, -6), (4, -8)\}$
 Qual dos valores seguintes é o coeficiente de correlação linear relativo a esta nuvem de pontos?
 (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 0
- [10] 4. Relativamente a uma amostra bivariada (x, y) , sabe-se que existe uma correlação linear forte entre as variáveis e que o declive da reta de mínimos quadrados é $0,2$.
 Qual dos seguintes valores pode corresponder ao valor do coeficiente de correlação linear referente à amostra (x, y) ?
 (A) $-0,4$ (B) $0,4$ (C) $-0,9$ (D) $0,9$
- [10] 5. Considera as nuvens de pontos representadas nos referenciais seguintes:



Designando os coeficientes de correlação linear correspondentes às nuvens A, B e C, respetivamente por r_A , r_B e r_C , qual das opções seguintes não pode ser verdadeira?

- (A) $r_A = -0,9$ (B) $r_B = 0,9$ (C) $r_A > r_B > r_C$ (D) $r_B > r_C > r_A$

Cotações

Grupo II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

- 6.** Dada uma amostra de dados bivariados (x_i, y_i) , sabe-se que, sendo a o respetivo declive da reta de mínimos quadrados e r o respetivo coeficiente de correlação linear:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{SS_x}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$$

Prova que:

[20] **6.1** $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x}$

[20] **6.2** $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$

- 7.** Na tabela seguinte representam-se os dados referentes a uma amostra bivariada, que relaciona as variáveis x e y .

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	8	10

- [10] **7.1** Calcula a média de cada uma das variáveis.
Apresenta os resultados arredondados às décimas.
- [5] **7.2** Indica a dimensão da amostra (x, y) .
- [40] **7.3** Calcula os seguintes valores (apresenta valores arredondados às unidades):
- a)** $SS_x = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2$

b) $SS_y = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2$

c) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$

d) $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
- [10] **7.4** Utilizando alguns dos resultados anteriores, determina a equação da reta de mínimos quadrados referente à amostra (x, y) .
- [20] **7.5** Esboça a nuvem de pontos referente a (x, y) e calcula o respetivo coeficiente de correlação linear.

Cotações

- [25] 8. Na tabela seguinte apresentam-se os valores, em milhões de euros, que o estado português investiu em educação, por ano, de 2000 a 2014.

2000	6202,6
2001	6729,8
2002	7276,7
2003	7005,0
2004	7132,1
2005	7316,1
2006	7263,4
2007	7232,1
2008	7348,6
2009	8507,4
2010	8559,2
2011	7878,5
2012	6622,4
2013	7108,4
2014	6959,1

É correto afirmar que, no período considerado, o investimento em educação foi tendencialmente aumentando ao longo dos anos, de forma consistente?

Justifica a tua resposta, apresentando um esboço da nuvem de pontos referente a esta amostra bivariada e o valor do respetivo coeficiente de correlação linear.

Podes recorrer à máquina de calcular para resolver o problema.

FIM

TESTE DE DIAGNÓSTICO

1. A

2. C

3. B

4. A

5. D

6. D

7.1 $\sqrt{10}$

7.2 -3

7.3 1

8.1 $B(2, 3, -1); C(-2, 3, -1); D(-2, 3, 1); E(-2, -3, 1);$
 $F(-2, -3, -1); G(2, -3, -1)$ e $H(2, -3, 1)$

8.2 $(2, -3, 1)$

8.3 $(x, y, z) = (2, 3, -1) + k(-4, 0, 2), k \in \mathbb{Z}$

8.4 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \leq 56$

8.5 $2x + 3y = 0$

9.1 $[-9, +\infty[$

9.2 $] -\infty, 3[\cup]9, +\infty[$

9.3 $[-2, 1]$

TESTE 1

1. A

2. D

3. C

4. D

5. D

6. $P \approx 58$

7.1 -330°

7.2 $-\frac{55\pi}{6}; \dot{O}_F$

9.1 $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$

9.3 $\frac{44}{15}$

10.2 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

11.1 $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\}$

11.3

b. $g^{-1}: [-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

TESTE 2

1. D

2. C

3. B

4. B

5. D

6. $160,3^\circ$

9.1 $(x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda(-6, 2, 0) + \mu(0, 0, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

9.2 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-6, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

9.3 12

10.1 As retas admitem vetores diretores colineares (de coordenadas $(1, 0, -1)$ e $(3, 0, -3)$ por exemplo); como se verifica, por exemplo, que o ponto da reta r , de coordenadas $(-1, 2, 3)$, não pertence à reta s , conclui-se que as retas são estritamente paralelas.

10.2 $x + z - 2 = 0$

11. 9 cm^3

TESTE 3

1. A

2. B

3. A

4. C

5. C

6.1 Sim, é o $11.^\circ$ termo da sucessão.6.2 $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$, pelo que a sucessão é estritamente crescente.6.3 É limitada porque, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 3$.6.4 $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

$$\left(p \text{ é a parte inteira de } \frac{1-2\delta}{\delta} \right)$$

6.5 $+\infty$

7.1 $r = 9$

7.2 $u_{20} = 3^{10}$

7.3
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3^{28}} \\ u_{n+1} = 9u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

7.4 $u_n = \frac{1}{3^{28}} \times 9^{n-1}$

TESTE 4

1.1 B

1.2 A

2. C

3. D

4. B

5.1 $f(x) = -5 + \frac{8}{x+1}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D' = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

5.2 $x = \frac{3}{5}$

5.3 $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

6.1 $\frac{0}{0}$; 2

6.2 $\infty - \infty$; $\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2 \Leftrightarrow a = 2^+ ; 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2^+$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{5}$; $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-7x-8} & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{1}{5} & \text{se } x = 1 \end{cases}$

9. $x = 1$ (assíntota vertical) e $y = x + 2$ (assíntota oblíqua bilateral).

10. $-\frac{3}{5}$

11. As funções representadas em (A) e (B) não são contínuas em a (porque não têm limite nesse ponto); pelo contrário, as funções representadas em (C) e (D) são contínuas em a (porque têm limite nesse ponto, igual a b).

TESTE 5

1. D

2. B

3. C

4. D

5. D

6. 2

7. $V(x) = 12x^2 - \frac{4}{3}x^3$

$V_{\max} = V(6) = 144$

8. $\sqrt{3}$

10.1 1 m

10.2 0 m/s

A altura da bola era a mesma nos dois instantes.

10.3 -15 m/s

(Velocidade instantânea da bola, na vertical, passados 3 s ; a bola estava já no movimento descendente.)

TESTE 6

1. C

2. C

3. A

4. D

5. C

6.1 $a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y})}{SS_x} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} n \bar{x} - \bar{x} n \bar{y} + n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} \Leftrightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x}$

6.2 $r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x} \sqrt{SS_y}} = \frac{\sqrt{SS_x} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x} \sqrt{SS_x} \sqrt{SS_y}} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \sqrt{SS_x}}{SS_x \sqrt{SS_y}} \Leftrightarrow r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$

7.1 $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 6,6$

7.2 5

7.3

a) $SS_x = 10$

b) $SS_y = 29,2$

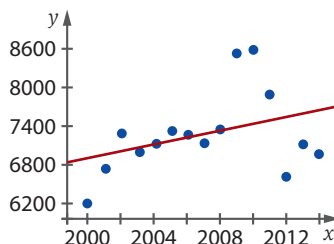
c) 116

d) 17

7.4 $y = 1,7x + 1,5$

7.5 $r \approx 0,99$

8. Por observação da nuvem de pontos e tendo em conta o valor do coeficiente de correção linear ($\approx 0,365$) pode concluir-se que não é correto afirmar que o investimento foi aumentando ao longo dos anos, uma vez que a correção linear é irrelevante.



R

ESOLUÇÕES*

Trigonometria e Funções Trigonômétricas

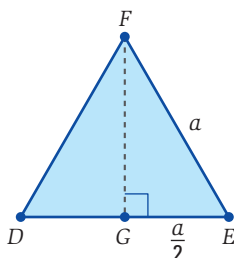
DIAGNÓSTICO

1.1 Aplicando o teorema de Pitágoras, considerando o triângulo

[EFG]:

$$\overline{FG}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{EG}^2 \Leftrightarrow \overline{FG}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{FG}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{FG}^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



1.2 $\widehat{EDF} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$; $\widehat{DFG} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$

1.3 $\sin 30^\circ = \sin(\widehat{DFG}) = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ = \cos(\widehat{DFG}) = \frac{\overline{FG}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan(\widehat{DFG}) = \frac{\overline{DG}}{\overline{FG}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \sin(\widehat{EDF}) = \frac{\overline{FG}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos(\widehat{EDF}) = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

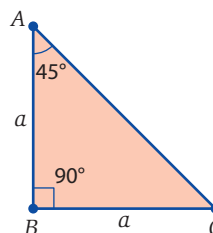
$$\tan 60^\circ = \tan(\widehat{EDF}) = \frac{\overline{FG}}{\overline{DG}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$$

	30°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

2.1 Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}a$$



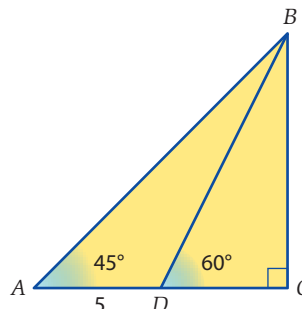
2.2 $\sin 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.3 $\cos 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.4 $\tan 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{a} = 1$

3. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AC}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{3} \times \overline{DC}$$



De $\overline{AC} = 5$ e $\overline{BC} = \overline{AC}$ vem $\overline{BC} = 5 + \overline{DC}$.

Tendo em conta que $\overline{BC} = \sqrt{3} \times \overline{DC}$, tem-se:

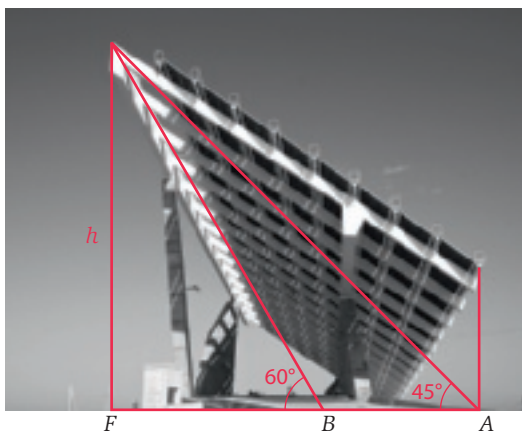
$$\sqrt{3} \times \overline{DC} = 5 + \overline{DC} \Leftrightarrow \sqrt{3} \times \overline{DC} - \overline{DC} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\overline{DC} = 5 \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{5}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{5\sqrt{3} + 5}{2}$$

$$\text{e } \overline{BC} = \sqrt{3} \times \overline{DC} = \sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3} + 5}{2} = \frac{5 \times 3 + 5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 15}{2}$$

- 4.1 Seja F o pé da perpendicular à reta AB que contém o segmento que representa a altura h .



Tem-se $\frac{h}{FA} = \tan 45^\circ = 1 \Leftrightarrow h = FA$ e $FA = FB + 10$.

Logo, $h = FB + 10$

Por outro lado, $\frac{h}{FB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Leftrightarrow h = \sqrt{3} \times FB$.

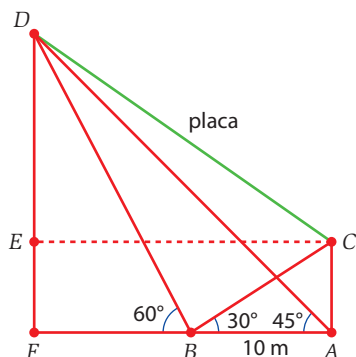
$$\text{Assim, } FB + 10 = \sqrt{3} \times FB \Leftrightarrow \sqrt{3} \times FB - FB = 10 \Leftrightarrow FB(\sqrt{3} - 1) = 10 \Leftrightarrow FB = \frac{10}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\Leftrightarrow FB = \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \Leftrightarrow FB = \frac{10\sqrt{3} + 10}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow FB = 5\sqrt{3} + 5$$

$$\text{e } h = \sqrt{3}(5\sqrt{3} + 5) = 5 \times 3 + 5\sqrt{3} = 15 + 5\sqrt{3} \approx 24 \text{ m}$$

4.2



a. $\frac{AC}{10} = \tan 30^\circ \Leftrightarrow AC = 10 \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 6 \text{ m}$

b. $\overline{CE} = \overline{AB} + \overline{BF} = 10 + 5\sqrt{3} + 5 = 15 + 5\sqrt{3} \text{ m}$

$$\overline{DE} = \overline{DF} - \overline{EF} = h - \overline{AC} = 15 + 5\sqrt{3} - 10 \frac{\sqrt{3}}{3} = 15 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

$$\tan \hat{ECD} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \tan \hat{ECD} = \frac{15 + \frac{5\sqrt{3}}{3}}{15 + 5\sqrt{3}}$$

$$\hat{ECD} = \tan^{-1} \left(\frac{15 + \frac{5\sqrt{3}}{3}}{15 + 5\sqrt{3}} \right) \approx 37^\circ$$

c. $\overline{DC}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{CE}^2 \Leftrightarrow \overline{DC}^2 = \left(15 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (15 + 5\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{DC}^2 = 225 + \frac{150\sqrt{3}}{3} + \frac{25}{3} + 225 + 150\sqrt{3} + 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC}^2 = \frac{600\sqrt{3} + 1600}{3} \Leftrightarrow \overline{DC} = \sqrt{\frac{600\sqrt{3} + 1600}{3}} \approx 30 \text{ m}$$

d. $A_{[ACDF]} = \frac{\overline{DF} + \overline{AC}}{2} \times \overline{AF} = \frac{24 + 6}{2} \times 24 = 360 \text{ m}^2$

1. TRIGONOMETRIA: ÂNGULOS RETOS, ÂNGULOS OBTUSOS E RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

- 1.1 Seja x o comprimento do cabo. Tem-se:

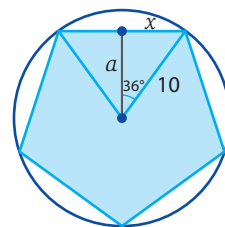
$$\cos 20^\circ = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100}{\cos 20^\circ} \approx 106,4 \text{ m}$$

O cabo disponível não tem comprimento suficiente, pois $106,4 > 105$.

- 1.2 Sendo h a altura do edifício, tem-se

$$\tan 20^\circ = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = 100 \times \tan 20^\circ \approx 36,4 \text{ m}$$

2. Um pentágono regular inscrito numa circunferência pode ser decomposto em cinco triângulos isósceles, em que os dois lados iguais têm a medida do raio da circunferência circunscrita. A altura de cada um desses triângulos é o apótema do pentágono. Seja x metade do lado do pentágono e a o apótema do pentágono.



$$\text{Tem-se } \cos 36^\circ = \frac{a}{10} \Leftrightarrow a = 10 \cos 36^\circ$$

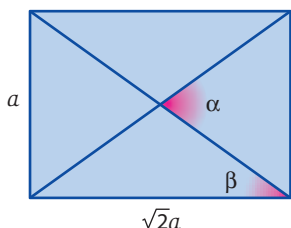
$$\text{e } \sin 36^\circ = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \sin 36^\circ.$$

Seja l a medida do lado do pentágono.
Tem-se $l = 2x = 20 \sin 36^\circ$.

$$A_{\text{pentágono}} = \frac{5 \times 20 \sin 36^\circ}{2} \times 10 \cos 36^\circ =$$

$$= 500 \times \cos 36^\circ \times \cos 36^\circ \approx 237,8 \text{ cm}^2$$

3. Os extremos das duas diagonais formam um retângulo cujos lados são duas arestas do cubo e duas diagonais faciais do cubo. Sendo a a medida da aresta do cubo, as respectivas diagonais faciais medem $\sqrt{2}a$ (diagonal de um quadrado). Na figura seguinte, α é a amplitude pedida e β é metade dessa amplitude.



Assim, tem-se:

$$\tan \beta = \frac{a}{\sqrt{2}a} \Leftrightarrow \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35,264^\circ$$

$$\alpha = 2\beta \approx 2 \times 35,264^\circ \approx 70,53^\circ$$

- 4.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 60^\circ}{4,5} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4,5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

- 4.2 Aplicando a Lei dos senos, temos

$$\frac{\sin(\hat{ABC})}{5} = \frac{\sin 60^\circ}{4,5} \Leftrightarrow \sin(\hat{ABC}) = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{4,5} \Leftrightarrow \sin(\hat{ABC}) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

5. Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 45^\circ}{3} = \frac{\sin 50^\circ}{OL} \Leftrightarrow \overline{OL} = \frac{3 \sin 50^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \overline{OL} = 3\sqrt{2} \sin 50^\circ \approx 3,25$$

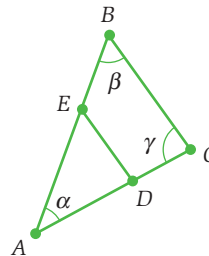
$$\hat{SOL} = 180^\circ - 45^\circ - 50^\circ = 85^\circ$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{3} = \frac{\sin 85^\circ}{LS} \Leftrightarrow \overline{LS} = \frac{3 \sin 85^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \overline{LS} = 3\sqrt{2} \sin 80^\circ \approx 4,23$$

O perímetro do triângulo $[SOL]$ é $P \approx 3 + 3,25 + 4,23 \approx 10,5$.

- 6.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \beta}{8} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8 \sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{5\sqrt{7}}{16}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{32}{5}$$



Considerando a semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$, temos:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{5} = \frac{\frac{32}{5}}{8} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{5 \times \frac{32}{5}}{8} \Leftrightarrow \overline{DE} = 4$$

- 6.2 Sabendo que o perímetro do triângulo $[ADE]$ é igual a 15, temos:

$$\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 15 \Leftrightarrow \overline{EA} = 15 - \overline{AD} - \overline{DE} \Leftrightarrow \overline{EA} = 15 - 5 - 4 \Leftrightarrow \overline{EA} = 6$$

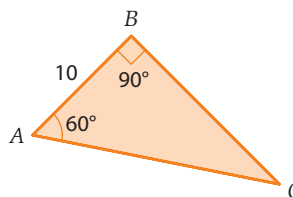
Considerando a semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$, temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{6}{\overline{AB}} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6 \times 8}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{48}{5}$$

Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin \gamma}{\overline{AB}} = \frac{\sin \beta}{8} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{\frac{48}{5} \times \frac{5\sqrt{7}}{16}}{8} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

7. $\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

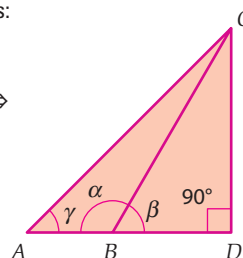


Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{10} \Leftrightarrow \overline{AC} = 20$$

- 8.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin D}{BC} = \frac{\sin \beta}{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



8.2 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin D}{AC} = \frac{\sin \gamma}{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Leftrightarrow AC = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

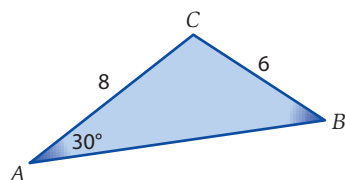
8.3 Aplicando o teorema de Pitágoras, considerando o triângulo $[ACD]$, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = (2\sqrt{2})^2 - 2^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{AD} = 2$$

$\overline{AD} > 0$

9.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin B}{8} = \frac{\sin A}{6} \Leftrightarrow \sin B = 8 \times \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sin B = \frac{2}{3}$$



9.2 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin 30^\circ}{6} \Leftrightarrow \frac{\sin C}{AB} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sin C}{AB} = \frac{1}{12}$$

10. $\hat{O} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$

Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin L}{3} = \frac{\sin S}{LO} = \frac{\sin O}{LS}$$

Da primeira igualdade, obtemos $\overline{LO} = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Por outro lado, $\overline{LS} = \frac{3 \times \sin O}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6 \times \sin O}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \sin O$.

Assim, o perímetro do triângulo $[SOL]$ é

$$P = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} \sin 105^\circ \approx 9,2.$$

A determinação de um valor aproximado de $\sin O$ pode ser feita numa calculadora fazendo: $\sin 105^\circ$

11.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{10} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10 \times \sin A}{\sin B} = \frac{10 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$$

11.2 $\hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

O ângulo α e o ângulo interno C do triângulo $[ABC]$ são suplementares ($105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$), logo $\sin \alpha = \sin C$.

Aplicando a Lei dos senos, temos

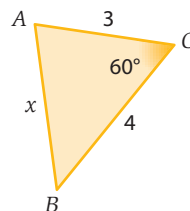
$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin C}{5\sqrt{3}+5} = \frac{\sin B}{10} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin C = \frac{(5\sqrt{3}+5) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Assim, $\sin \alpha = \sin C = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

12.1 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos C \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = 9 + 16 - 24 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$$

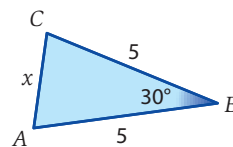
$x > 0$



12.2 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \cos B \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = 50 - 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{50 - 25\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

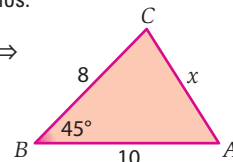
$x > 0$



12.3 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

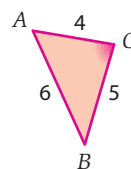
$$x^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos B \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = 164 - 160 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}}$$

$x > 0$



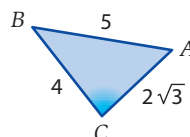
13.1 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos C \Leftrightarrow \Leftrightarrow 36 = 41 - 40 \cos C \Leftrightarrow \cos C = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \cos C = \frac{1}{8}$$

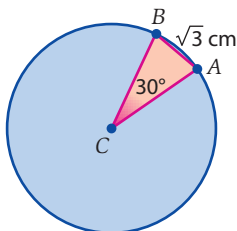


13.2 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$5^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \cos C \Leftrightarrow \Leftrightarrow 25 = 28 - 16\sqrt{3} \cos C \Leftrightarrow \cos C = \frac{3}{16\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos C = \frac{\sqrt{3}}{16}$$



14. Designemos por r o raio da circunferência.



Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$(\sqrt{3})^2 = r^2 + r^2 - 2 \times r \times r \times \cos(\hat{ACB}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2r^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \Leftrightarrow 3 = (2 - \sqrt{3}) r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 6 + 3\sqrt{3}$$

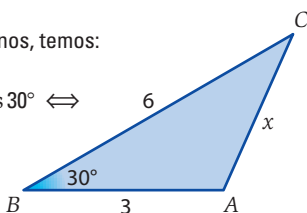
Logo, a área do círculo é $A = \pi r^2 = (6 + 3\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$.

- 15.1 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 45 - 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 45 - 18\sqrt{3} \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{45 - 18\sqrt{3}}$$

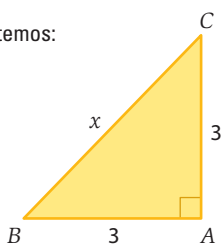


- 15.2 Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

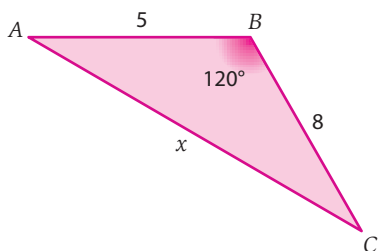
$$x^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{18}$$

$$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$$



- 15.3 Temos $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

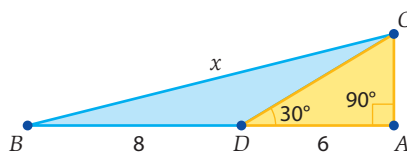


Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow x^2 = 89 - 80 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 129 \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{129}$$

- 15.4 Aplicando a Lei dos senos, temos:



$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{CD}} = \frac{\sin 60^\circ}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{6 \times \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{6 \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4\sqrt{3}$$

Temos $\hat{BDC} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ e

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos 150^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 8 \times 4\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 8 \times 4\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

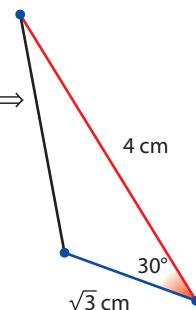
$$\Leftrightarrow x^2 = 208 \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

16. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 + 3 - 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{7} \text{ cm}$$

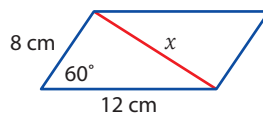


17. Começamos por determinar o comprimento da diagonal menor.

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

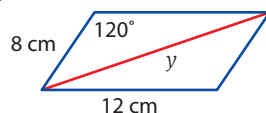
$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow x^2 = 208 - 192 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 112 \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{112} = 4\sqrt{7} \text{ cm}$$



Para determinar o comprimento da diagonal maior, usamos o ângulo suplementar do ângulo

dado, cuja amplitude é $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

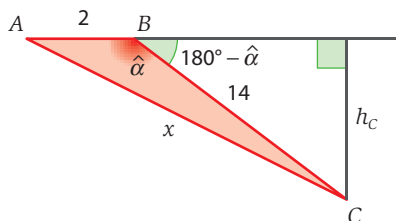


Temos $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} y^2 &= 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 &= 208 - 192 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y^2 = 304 \Leftrightarrow y = \sqrt{304} \\ \Leftrightarrow y &= 4\sqrt{19} \text{ cm} \end{aligned}$$

18.1 Temos $\cos \hat{\alpha} = -\cos(180^\circ - \hat{\alpha}) = -\frac{3}{7}$.



Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + 14^2 - 2 \times 2 \times 14 \times \cos \alpha \Leftrightarrow x^2 = 200 - 56 \times \left(-\frac{3}{7}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 224 \Leftrightarrow x = \sqrt{224} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{14} \end{aligned}$$

18.2 $\sin^2(180^\circ - \hat{\alpha}) + \cos^2(180^\circ - \hat{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow$

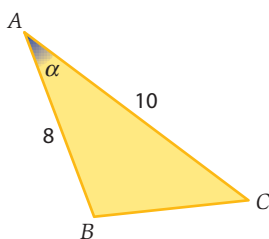
$$\Leftrightarrow \sin^2(180^\circ - \hat{\alpha}) + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(180^\circ - \hat{\alpha}) + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(180^\circ - \hat{\alpha}) = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\sin(180^\circ - \hat{\alpha}) = \frac{h_c}{14} \Leftrightarrow h_c = 14 \sin(180^\circ - \hat{\alpha})$$

$$h_c = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$$

19.1 Se $\hat{\alpha} = 30^\circ$, aplicando a Lei dos cossenos, temos:



$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 164 - 160 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 164 - 80\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{164 - 80\sqrt{3}}$$

19.2 Se $\hat{\alpha} = 45^\circ$, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos 45^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 164 - 160 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

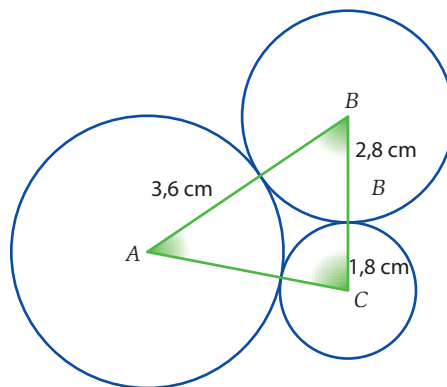
$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 164 - 80\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}}$$

20. Os lados do triângulo $[ABC]$ têm as seguintes medidas de comprimento:

$$\overline{AB} = 3,6 + 2,8 = 6,4 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 2,8 + 1,8 = 4,6 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 3,6 + 1,8 = 5,4 \text{ cm}$$



Aplicando a Lei dos cossenos ao ângulo A , temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4,6^2 = 6,4^2 + 5,4^2 - 2 \times 6,4 \times 5,4 \times \cos A$$

$$\Leftrightarrow 21,16 = 70,12 - 69,12 \cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{48,96}{69,12} \Leftrightarrow \cos A = \frac{17}{24}$$

$$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{17}{24}\right) \approx 45^\circ$$

Aplicando, agora, a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin A}{\overline{BC}} = \frac{\sin B}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 45^\circ}{4,6} = \frac{\sin B}{5,4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \frac{5,4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{4,6} \Leftrightarrow \sin B \approx 0,83$$

$$\hat{B} \approx \sin^{-1}(0,83) \approx 56^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 45^\circ - 56^\circ = 79^\circ$$

21.1 Aplicando a Lei dos senos, temos:

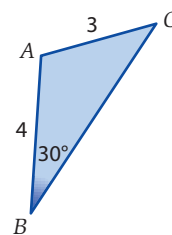
$$\frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{C}}{4} \Leftrightarrow \sin \hat{C} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$$

$$\hat{C} = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41,8^\circ$$

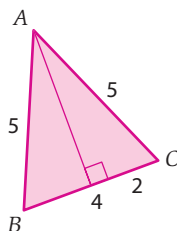
$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} \approx 180^\circ - 30^\circ - 41,8^\circ = 108,2^\circ$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{A}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3 \times \sin 108,2^\circ}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 5,7$$



21.2 $\cos C = \frac{2}{5}$; $\hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66,4^\circ$; $\hat{B} = \hat{C} \approx 66,4^\circ$

$\hat{A} = 180^\circ - 2 \times \hat{B} \approx 180^\circ - 2 \times 66,4^\circ = 47,2^\circ$

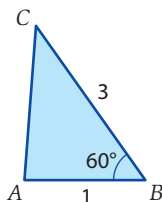


22. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 10 - 6 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{7}$$

Opção correta: B

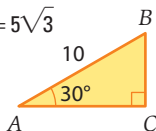


23. $\sin 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{10} \Leftrightarrow \overline{BC} = 10 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 5$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{10} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 5\sqrt{3}$$

Logo, $\overline{AC} + \overline{BC} = 5\sqrt{3} + 5$.

Opção correta: C



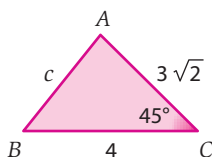
24. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$c^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos 45^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 34 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 10 \Leftrightarrow c = \sqrt{10}$$

Opção correta: D



25. O maior ângulo interno do triângulo é aquele que se opõe ao maior lado.

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 36 = 25 - 24 \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{11}{24}$$

Opção correta: C

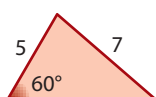
26. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \times 5 \times x \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 = 25 + x^2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 11}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 8$$



Sendo $x > 0$, tem de ser $x = 8$.

Assim, o perímetro do triângulo é $P = 5 + 7 + 8 = 20$.

Opção correta: A

27. $\hat{BOC} = 2 \times \hat{BAC} = 60^\circ$

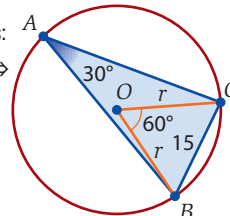
Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$15^2 = r^2 + r^2 - 2 \times r \times r \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 225 = 2r^2 - 2 \times r^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 225 \Leftrightarrow r = 15$$

Opção correta: B

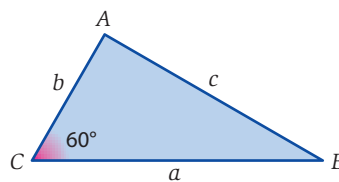


28. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$c^2 = (2b)^2 + b^2 - 2 \times 2b \times b \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 4b^2 + b^2 - 4b^2 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow c^2 = 3b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}b$$



Aplicando a Lei dos senos, temos $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$.

Da segunda igualdade obtemos:

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}b} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$$

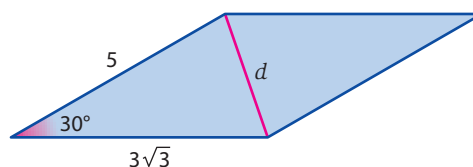
Opção correta: A

29. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{3} \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 52 - 30\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

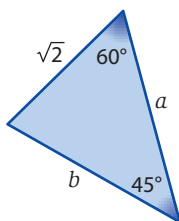
$$\Leftrightarrow d^2 = 52 - 45 \Leftrightarrow d = \sqrt{7}$$



Opção correta: A

30. Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{b} = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2} \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$$



e

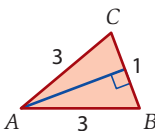
$$\frac{\sin 75^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2} \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

Opção correta: D

31.1 $\cos B = \frac{1}{3}$; $\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ$

$$\hat{C} \approx 70,53^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 2 \times 70,5^\circ = 38,94^\circ$$



31.2 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$5^2 = 3^2 + 2,4^2 - 2 \times 3 \times 2,4 \times \cos \hat{A} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{A} = -\frac{10,24}{14,4}$$

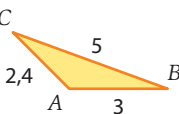
$$\hat{A} = \cos^{-1}\left(-\frac{10,24}{14,4}\right) \approx 135,33^\circ$$

e

$$2,4^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos \hat{B} \Leftrightarrow \cos \hat{B} = \frac{28,24}{30}$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{28,24}{30}\right) \approx 19,72^\circ$$

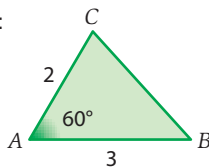
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 135,23^\circ - 19,72^\circ = 24,95^\circ$$



31.3 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\overline{BC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 13 - 12 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{7}$$



Aplicando, agora, a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{\sin \hat{B}}{2} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{2 \times \sin 60^\circ}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \hat{B} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) \approx 40,89^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40,89^\circ = 79,11^\circ$$

31.4 $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 75^\circ}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 2,7$$

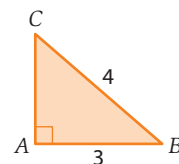
e

$$\frac{\sin 45^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 75^\circ}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{3 \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 2,2$$

31.5 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4^2 - 3^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{7}$

$$\cos B = \frac{3}{4}; \hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41,41^\circ$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 41,41^\circ = 48,59^\circ$$



31.6 $\sin 60^\circ = \frac{2}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

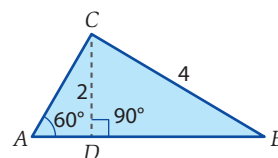
$$\sin \hat{B} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

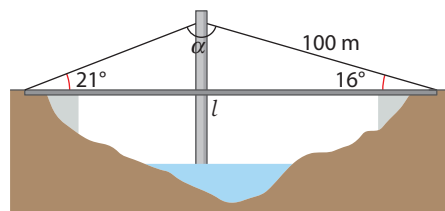
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 + \frac{16}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\frac{64}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



32. Designemos por l o comprimento do tabuleiro da ponte e por α o ângulo interno do triângulo que se lhe opõe.

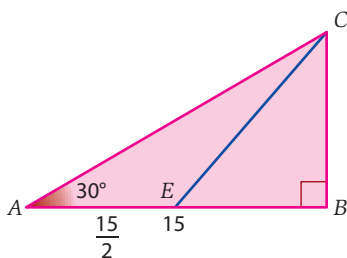


$$\text{Temos } \hat{\alpha} = 180^\circ - 16^\circ - 21^\circ = 143^\circ.$$

Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 143^\circ}{l} = \frac{\sin 21^\circ}{100} \Leftrightarrow l = \frac{100 \times \sin 143^\circ}{\sin 21^\circ} \Leftrightarrow l \approx 168 \text{ m}$$

33.1 Começemos por representar o triângulo $[ABC]$ com o segmento $[CE]$.



Considerando o triângulo $[ABC]$, temos:

$$\cos A = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \cos 30^\circ = \frac{15}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow AC = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

33.2 Aplicando a Lei dos cossenos ao ângulo A , temos:

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AE} \times \overline{AC} \times \cos A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{CE}^2 &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{15}{2} \times 10\sqrt{3} \times \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow \overline{CE}^2 &= \frac{225}{4} + 300 - 150\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \overline{CE}^2 &= \frac{525}{4} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{\sqrt{525}}{2} = \frac{5\sqrt{21}}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

33.3 Aplicando a Lei dos senos, temos:

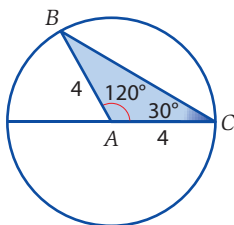
$$\begin{aligned} \frac{\sin \hat{AEC}}{AC} &= \frac{\sin \hat{EAC}}{CE} \Leftrightarrow \sin \hat{AEC} = \frac{10\sqrt{3} \times \sin 30^\circ}{\frac{5\sqrt{21}}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \hat{AEC} &= \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sin \hat{AEC} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) &\approx 49,1^\circ \end{aligned}$$

Como o ângulo AEC é obtuso, temos

$$\hat{AEC} \approx 180^\circ - 49,1^\circ = 130,9^\circ$$

34.1 $\hat{BAC} = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$

$$\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

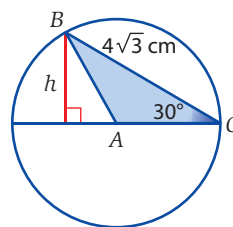


Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\hat{BAC}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{BC}^2 &= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow \overline{BC}^2 &= 32 - 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 48 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{48} \\ \Leftrightarrow \overline{BC} &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

34.2

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

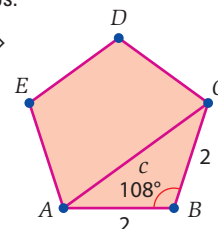


35.1 A amplitude de cada ângulo interno do pentágono regular é

$$\text{igual a } \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ.$$

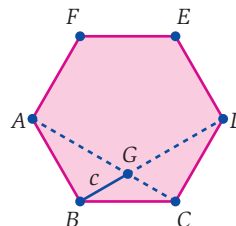
Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 108^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 &= 8 - 8 \times \cos 108^\circ \\ \Leftrightarrow c &= \sqrt{8 - 8 \times \cos 108^\circ} \approx 3,2 \end{aligned}$$



35.2 A amplitude de cada ângulo interno do hexágono regular é

$$\text{igual a } \frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ.$$



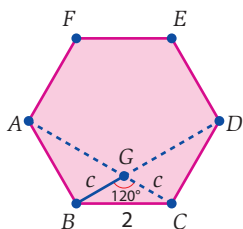
Considerando o triângulo $[BCD]$, temos:

$$\hat{GBC} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Considerando o triângulo $[BCG]$, temos:

$$\hat{BGC} = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$$

Temos $\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

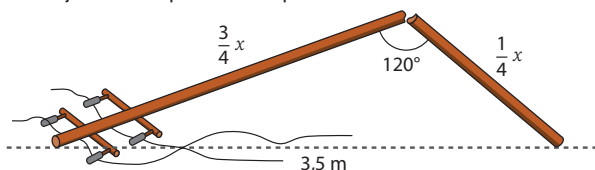


Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$2^2 = c^2 + c^2 - 2 \times c \times c \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow 4 = 2c^2 - 2c^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow_{c>0} c = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

36. Seja x o comprimento do poste.



Temos $\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

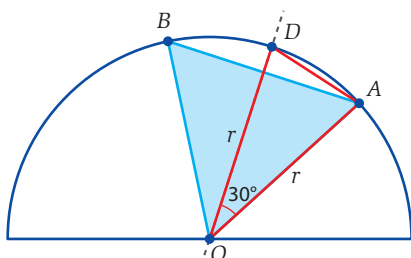
$$3,5^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - 2 \times \frac{1}{4}x \times \frac{3}{4}x \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{8}x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{49}{4} = \frac{13}{16}x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4 \times 49}{13} \Leftrightarrow_{x>0} x = \sqrt{\frac{4 \times 49}{13}} \Leftrightarrow x = \frac{2 \times 7}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14\sqrt{13}}{13} \approx 3,9 \text{ m}$$

37. Como o triângulo $[ABO]$ é equilátero, tem-se $\hat{AOB} = 60^\circ$. Logo, $\hat{AOD} = 30^\circ$. Tem-se ainda $\overline{OA} = \overline{OD} = r$.



Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\overline{AD}^2 = r^2 + r^2 - 2 \times r \times r \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2r^2 - 2r^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

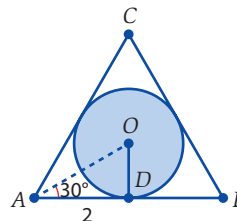
$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = r^2(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow_{\overline{AD}>0} \overline{AD} = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

38.1 O ponto O é o incentro do triângulo $[ABC]$, logo $\hat{AO}$ é a bissetriz do ângulo BAC .

Como o triângulo é equilátero, tem-se $\hat{BAC} = 60^\circ$.

Assim, $\hat{DAO} = 30^\circ$.

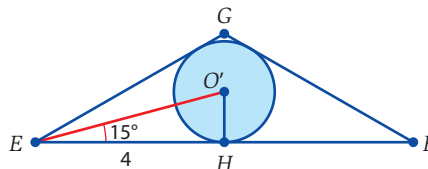


Considerando o triângulo $[ADO]$, temos:

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{OD}}{2} \Leftrightarrow \overline{OD} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

38.2 O ponto O' é o incentro do triângulo $[EFG]$, logo $\hat{EO}'$ é a bissetriz do ângulo FEG . Como o triângulo é isósceles e $\hat{EGF} = 120^\circ$, tem-se $\hat{FEG} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Assim, $\hat{HEO}' = 15^\circ$.



Considerando o triângulo $[EHO']$, temos:

$$\tan 15^\circ = \frac{\overline{O'H}}{4} \Leftrightarrow \overline{O'H} = 4 \tan 15^\circ \approx 1,07$$

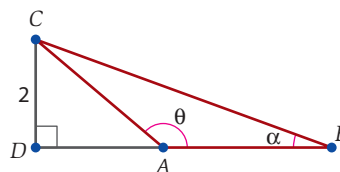
39.1 Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow_{\overline{AB}=\overline{AC}} \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow_{\overline{BC} \neq 0} \overline{BC} = 2 \overline{AC} \times \cos \alpha \Leftrightarrow_{\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}} \overline{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \overline{AC}$$



Por outro lado, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

Substituindo $\overline{BC}$ por $\frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{AC}$ e considerando que $\overline{AB} = \overline{AC}$, obtemos:

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{AC}\right)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{AC} \times \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 2}{9} \times \overline{AC}^2 = 2\overline{AC}^2 - 2\overline{AC}^2 \times \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{9} = 2 - 2 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{14}{18} = -\frac{7}{9}$$

Aplicando a Fórmula Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \left(-\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{49}{81} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{32}{81}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{32}{81}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{Conclui-se que } \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

39.2 Para determinar $\overline{BC}$, usaremos razões trigonométricas de α no triângulo retângulo $[BCD]$:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

Do $\cos \alpha$ podemos obter $\sin \alpha$, através da fórmula fundamental da trigonometria:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3} \quad (0 < \alpha < 90)$$

$$\text{Assim, } \overline{BC} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6.$$

Para determinar $\overline{CA}$, igual a $\overline{AB}$, usaremos razões trigonométricas do ângulo suplementar de θ no triângulo retângulo $[ACD]$:

$$\sin(180^\circ - \hat{\theta}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{2}{\sin(180^\circ - \hat{\theta})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{2}{\sin \theta} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

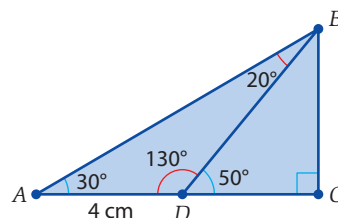
Concluindo, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2 \times \frac{9\sqrt{2}}{4} + 6 = \frac{9\sqrt{2}}{2} + 6$$

40. Começamos por determinar $\hat{ABD}$:

$$\hat{ADB} = 180^\circ - \hat{BDC} = 130^\circ$$

$$\hat{ABD} = 180^\circ - 30^\circ - 130^\circ = 20^\circ$$



Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 20^\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \approx 5,85 \text{ cm}$$

Obteremos, agora, os valores de $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, a partir do valor de $\overline{BD}$:

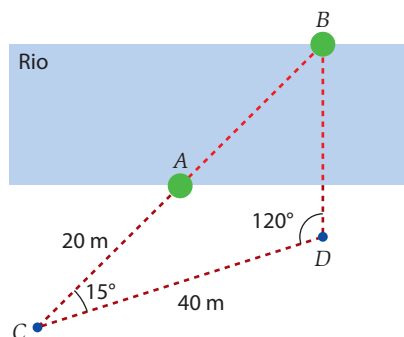
$$\sin 50^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sin 50^\circ \times \frac{2}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2 \times \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 4,5 \text{ cm}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos 50^\circ \times \frac{2}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{2 \times \cos 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 3,8 \text{ cm}$$

41. $\hat{CBD} = 180^\circ - 120^\circ - 15^\circ = 45^\circ$



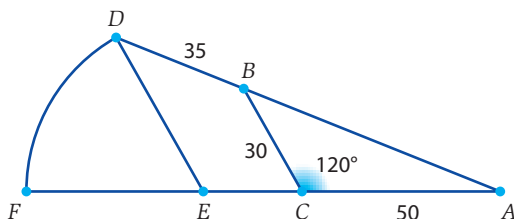
Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin \hat{CBD}}{\overline{CD}} = \frac{\sin \hat{BDC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 45^\circ}{40} = \frac{\sin 120^\circ}{\overline{AB} + 20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} + 20 = \frac{40 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 20$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 20\sqrt{6} - 20 \approx 29 \text{ m}$$

- 42.1 Para determinar $\overline{AB}$, aplicaremos a Lei dos cossenos, considerando o triângulo $[ABC]$:



$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos \hat{ACB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 50^2 + 30^2 - 2 \times 50 \times 30 \times \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 2500 + 900 - 3000 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 2500 + 900 - 3000 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4900 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 4900 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{4900} = 70\end{aligned}$$

Para determinar $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$, aplicaremos o teorema de Tales:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \frac{70}{50} = \frac{35}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{35 \times 50}{70} = 25 \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \frac{70}{30} = \frac{105}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{105 \times 30}{70} = 45\end{aligned}$$

- 42.2 $\hat{DEF} = \hat{BCF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

O arco de circunferência FD tem raio $\overline{DE}$ e amplitude 60° . O seu comprimento é dado por:

$$2\pi \times 45 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = 15\pi$$

2. ÂNGULOS ORIENTADOS, ÂNGULOS GENERALIZADOS E ROTAÇÕES

43. Ângulo α : lado origem $\vec{OB}$; lado extremidade $\vec{OA}$; sentido negativo.

Ângulo β : lado origem $\vec{OC}$; lado extremidade $\vec{OD}$; sentido positivo.

- 44.1 Figuras 1 e 3.

- 44.2 Figura 2.

- 44.3 Figura 3.

- 44.4 Figura 1.

45. $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

45.1 $\hat{AOE} = 4 \times 36^\circ = 144^\circ$
 $\hat{\alpha} = 144^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

45.2 $\hat{AOI} = 8 \times 36^\circ = 288^\circ$
 $\hat{\alpha} = 288^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

45.3 $\hat{AOC} = 8 \times (-36^\circ) = -288^\circ$
 $\hat{\alpha} = -288^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

46.1 Sendo $\left[\frac{-520}{360}\right] = [-1, (4)] = -1$, temos $n = -1$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $-520^\circ - (-1) \times 360^\circ = -160^\circ$.

Temos $-520^\circ = -160^\circ + (-1) \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude -520° se representa pelo par ordenado $(-160^\circ, -1)$.

46.2 Sendo $\left[\frac{1320}{360}\right] = [3, (6)] = 3$, temos $n = 3$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $1320^\circ - 3 \times 360^\circ = 240^\circ$.

Temos $1320^\circ = 240^\circ + 3 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 1320° se representa pelo par ordenado $(240^\circ, 3)$.

46.3 Sendo $\left[\frac{-1270}{360}\right] = [-3, 52(7)] = -3$, temos $n = -3$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $-1270^\circ - (-3) \times 360^\circ = -190^\circ$.

Temos $-1270^\circ = -190^\circ - 3 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude -1270° se representa pelo par ordenado $(-190^\circ, -3)$.

46.4 Sendo $\left[\frac{1000}{360}\right] = [2, (7)] = 2$, temos $n = 2$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $1000^\circ - 2 \times 360^\circ = 280^\circ$.

Temos $1000^\circ = 280^\circ + 2 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 1000° se representa pelo par ordenado $(280^\circ, 2)$.

46.5 Sendo $\left[\frac{1665}{360}\right] = [4,625] = 4$, temos $n = 4$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $1665^\circ - 4 \times 360^\circ = 225^\circ$.

Temos $1665^\circ = 225^\circ + 4 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 1665° se representa pelo par ordenado $(225^\circ, 4)$.

47.1 Sendo $\left[\frac{840}{360}\right] = [2,3] = 2$, temos $n = 2$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $840^\circ - 2 \times 360^\circ = 120^\circ$.

Temos $840^\circ = 120^\circ + 2 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 840° se representa pelo par ordenado $(120^\circ, 2)$.

47.2

a. 120°

b. 240° ($360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$)

47.3 $120^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

48. Figura 3, porque representa um ângulo da forma $(0^\circ, n)$, com n inteiro.

49. Não, pois não têm a mesma amplitude nem a soma dos valores absolutos das suas amplitudes é 360° .

50.1 $x = -85^\circ + (-1) \times 360^\circ = -445^\circ$

50.2 Por exemplo, com $n = 1$, obtém-se $x = -85^\circ + 1 \times 360^\circ = 275^\circ$.

Por exemplo, com $n = 2$, obtém-se $x = -85^\circ + 2 \times 360^\circ = 635^\circ$.

50.3 Temos $275^\circ = 275^\circ + 0 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 275° se representa pelo par ordenado $(275^\circ, 0)$.

Sendo $\frac{635}{360} = 1,763(8)$, temos $n = 1$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $635^\circ - 1 \times 360^\circ = 275^\circ$.

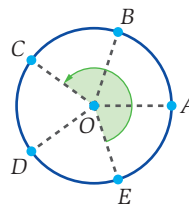
Temos $335^\circ = 275^\circ + 1 \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude 635° se representa pelo par ordenado $(275^\circ, 1)$.

50.4 $-1525^\circ = -85^\circ + n \times 360^\circ \Leftrightarrow n = \frac{-1525^\circ + 85^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow n = -4$

Como $-4 \in \mathbb{Z}$, -1525° é a amplitude de um ângulo desta família.

51. $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

51.1 $\hat{EOC} = 3 \times 72^\circ = 216^\circ$

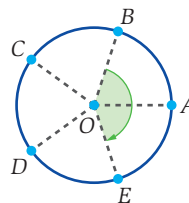


A expressão das amplitudes do ângulo generalizado é: $216^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{N}_0$.

51.2 $\hat{AOA} = 0^\circ$

A expressão das amplitudes do ângulo generalizado é: $n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}^+$.

51.3 Considerando o sentido negativo, $\hat{BOE} = 2 \times (-72^\circ) = -144^\circ$



A expressão das amplitudes do ângulo generalizado é: $-144^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}_0^-$.

52.1 Não, pois as amplitudes dos ângulos orientados correspondentes são diferentes e $65^\circ + |-40^\circ| = 105^\circ \neq 360^\circ$.

52.2 $-40^\circ + 360^\circ = 320^\circ$

52.3 $65^\circ - 360^\circ = -295^\circ$

53. Opção correta: C

54. Sendo $\frac{-1100}{360} = -3,0(5)$, temos $n = -3$.

A amplitude do ângulo orientado correspondente é $-1100^\circ - (-3) \times 360^\circ = -20^\circ$.

Temos $-1100^\circ = -20^\circ + (-3) \times 360^\circ$, pelo que o ângulo generalizado de amplitude -1100° se representa pelo par ordenado $(-20^\circ, -3)$.

Opção correta: C

55. Das opções dadas, -720° é o único valor de amplitude que é múltiplo inteiro de 360° .

Opção correta: D

56. $45^\circ \neq 135^\circ$; $135^\circ + |-225^\circ| = 360^\circ$; $135^\circ \neq 225^\circ$;

$|-45^\circ| + 225^\circ = 270^\circ \neq 360^\circ$

Opção correta: B

57. $\frac{-780}{360} = -2,1(6)$

$-780^\circ + 2 \times 360^\circ = -60^\circ$

$-780^\circ + 3 \times 360^\circ = 300^\circ$

A medida de amplitude de um ângulo generalizado com o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade que o ângulo de amplitude -780° pode ser representada pela expressão:

$$300^\circ - n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Opção correta: D

58. $210^\circ + |-150^\circ| = 360^\circ$; $210^\circ + |-140^\circ| = 340^\circ \neq 360^\circ$;

$|-210^\circ| + 160^\circ = 370^\circ \neq 360^\circ$; $|-210^\circ| + 210^\circ = 420^\circ \neq 360^\circ$.

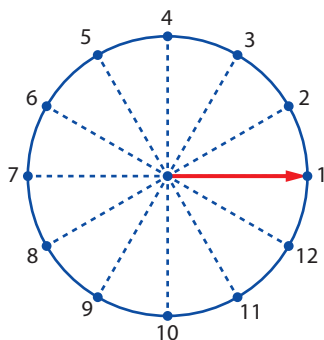
Opção correta: A

59.1

a. Como $\left[\frac{960}{360}\right] = [2,6] = 2$, concluímos que o ponteiro deu

duas voltas completas. Retiremos à amplitude do ângulo a amplitude correspondente a 2 voltas completas:

$$960^\circ - 2 \times 360^\circ = 240^\circ.$$



Cada setor circular tem $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ de amplitude.

Assim, para além das duas voltas, o ponteiro percorreu mais $\frac{240}{30} = 8$ setores.

Concluindo, o número premiado foi $1 + 8 = 9$.

b. Duas voltas completas, conforme verificado na alínea anterior.

c. Por exemplo, 240° e $240^\circ + 360^\circ = 600^\circ$.

59.2

a. Como $\left[\frac{-1860}{360}\right] = [-5,1(6)] = -5$, concluímos que o ponteiro

deu cinco voltas completas (no sentido negativo). Adicionemos à amplitude do ângulo a amplitude correspondente a 5 voltas completas:

$$-1860^\circ + 5 \times 360^\circ = -60^\circ.$$

Assim, para além das cinco voltas, o ponteiro percorreu mais $\frac{60}{30} = 2$ setores no sentido negativo, pelo que começando em 1, o número premiado foi o 11.

b. Cinco voltas completas, conforme verificado na alínea anterior.

c. $-60^\circ + 360^\circ = 300^\circ$

59.3

a. Para que o número premiado seja o 8, o ponteiro, rodando no sentido positivo, terá de percorrer 7 setores. Assim, o ângulo orientado correspondente tem amplitude $7 \times 30^\circ = 210^\circ$.

No sentido negativo, a amplitude do ângulo orientado correspondente é $210^\circ - 360^\circ = -150^\circ$.

b. Sim, para 3090° , pois $210^\circ + 8 \times 360^\circ = 3090^\circ$.

Cálculos auxiliares: $\left[\frac{3090}{360}\right] = [8,58(3)] = 8$;

$$3090^\circ - 8 \times 360^\circ = 210^\circ.$$

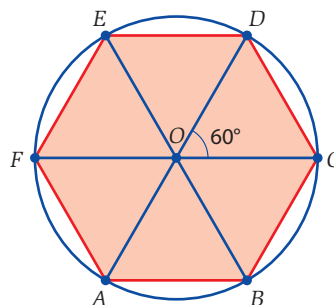
Não, para 2550° , pois $210^\circ + n \times 360^\circ = 2550^\circ$ não tem solução inteira.

Cálculos auxiliares:

$$210^\circ + n \times 360^\circ = 2550^\circ \Leftrightarrow n = \frac{2550^\circ - 210^\circ}{360^\circ} = 6,5$$

c. $210^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

60.1



a. Cada ângulo ao centro da figura tem $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ de amplitude.

O lado extremidade do ângulo considerado é o lado extremidade do correspondente ângulo orientado cuja amplitude é -120° . Tendo esse ângulo orientado sentido negativo e lado origem $\vec{OA}$ e considerando que $120^\circ = 2 \times 60^\circ$, conclui-se que o lado extremidade é $\vec{OE}$.

b. O lado extremidade do ângulo considerado é o lado extremidade do correspondente ângulo orientado cuja amplitude é 60° . Tendo esse ângulo orientado sentido positivo e lado origem $\vec{OA}$ e considerando que $60^\circ = 1 \times 60^\circ$, conclui-se que o lado extremidade é $\vec{OB}$.

60.2

a. $300^\circ + n \times 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$

b. $-780^\circ = 300^\circ + n \times 360^\circ \Leftrightarrow n = \frac{-780^\circ - 300^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow n = -3 \in \mathbb{Z}$

O ângulo de amplitude -780° faz parte desta família de ângulos, porque $-780^\circ = 300^\circ - 3 \times 360^\circ$.

60.3 Começemos por determinar a amplitude dos ângulos orientados que correspondem aos ângulos dados:
 $600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$; $960^\circ - 2 \times 360^\circ = 240^\circ$.

Os ângulos de amplitudes 600° e 960° e lado origem $\vec{OB}$ correspondem a rotações de centro em O coincidentes, pois esses ângulos têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade $\vec{OF}$.

61.1

a. $\left[\frac{1580}{360} \right] = [4,3(8)] = 4$; quatro voltas completas.

b. $1580^\circ - 4 \times 360^\circ = 140^\circ$

c. $140^\circ - 360^\circ = -220^\circ$

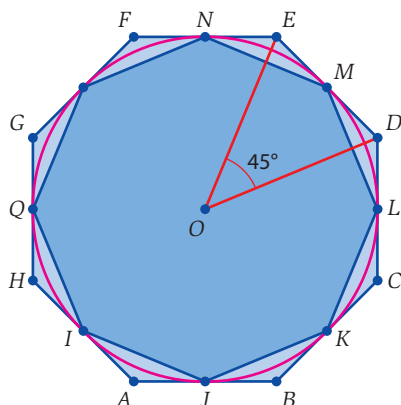
61.2

a. Tendo em conta que o automóvel descreveu o ângulo no sentido negativo, faltou-lhe $-360^\circ - (-330^\circ) = -30^\circ$ para dar uma volta completa.

b. $-330^\circ - 2 \times 360^\circ = -1050^\circ$

c. $-330^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

62.1 Os ângulos ao centro definidos por vértices consecutivos de cada octógono regular têm $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ de amplitude.



Assim, o ponto C é a imagem do ponto D pela rotação de centro em O e ângulo de amplitude -45° .

62.2 $\frac{225}{45} = 5$; $\vec{OI}$.

62.3 A amplitude do ângulo KOF é $3 \times 45^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 157,5^\circ$.

As amplitudes dos ângulos com lado origem $\vec{OK}$ e lado extremidade $\vec{OF}$ são dadas pela expressão:
 $157,5^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

62.4

a. $3 \times 45^\circ = 135^\circ$; $135^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

b. $5 \times 45^\circ = 225^\circ$; $225^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

c. $2 \times (-45^\circ) = -90^\circ$; $-90^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS GENERALIZADOS

63.1 $390^\circ - 360^\circ = 30^\circ$; $0^\circ < 30^\circ < 90^\circ$.

Pertence ao 1.º quadrante.

63.2 $820^\circ - 2 \times 360^\circ = 100^\circ$; $90^\circ < 100^\circ < 180^\circ$.

Pertence ao 2.º quadrante.

63.3 $550^\circ - 360^\circ = 190^\circ$; $180^\circ < 190^\circ < 270^\circ$.

Pertence ao 3.º quadrante.

63.4 $640^\circ - 360^\circ = 280^\circ$; $270^\circ < 280^\circ < 360^\circ$.

Pertence ao 4.º quadrante.

63.5 $-1020^\circ + 3 \times 360^\circ = 60^\circ$; $0^\circ < 60^\circ < 90^\circ$.

Pertence ao 1.º quadrante.

63.6 $-910^\circ + 3 \times 360^\circ = 170^\circ$; $90^\circ < 170^\circ < 180^\circ$.

Pertence ao 2.º quadrante.

63.7 $-820^\circ + 3 \times 360^\circ = 260^\circ$; $180^\circ < 260^\circ < 270^\circ$.

Pertence ao 3.º quadrante.

64. O quadrante ou semieixo a que pertence um ângulo generalizado é o quadrante ou semieixo a que pertence o respetivo ângulo orientado. Assim, temos para cada alínea:

64.1 Pertence ao 3.º quadrante ($-180^\circ < -120^\circ < -90^\circ$).

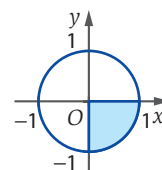
64.2 Pertence ao 1.º quadrante ($0^\circ < 40^\circ < 90^\circ$).

64.3 Semieixo positivo das ordenadas ($-270^\circ + 360^\circ = 90^\circ$).

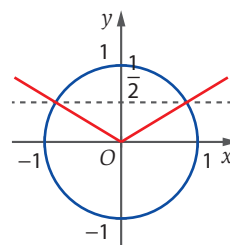
64.4 Semieixo negativo das abcissas.

64.5 Pertence ao 4.º quadrante ($270^\circ < 359^\circ < 360^\circ$).

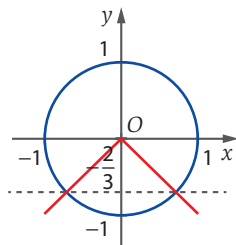
65. No quarto quadrante, as ordenadas dos pontos da circunferência trigonométrica variam entre -1 e 0 , pelo que, sendo α um ângulo do 4.º quadrante, tem-se $-1 < \sin \alpha < 0$. Por outro lado, as abcissas desses pontos variam entre 0 e 1 , logo $0 < \cos \alpha < 1$.



66.1 Os pontos de interseção dos lados extremidade dos ângulos cujo seno é $\frac{1}{2}$ com a circunferência trigonométrica têm ordenada $\frac{1}{2}$.



- 66.2 Os pontos de interseção dos lados extremidade dos ângulos cujo seno é $-\frac{2}{3}$ com a circunferência trigonométrica têm ordenada $-\frac{2}{3}$.



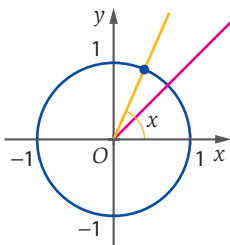
67. Temos: $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$ e $\sin 90^\circ = 1$.

O lado extremidade do ângulo de amplitude x ($45^\circ < x < 90^\circ$) intersesta a circunferência trigonométrica num ponto cuja abscissa varia entre 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e cuja ordenada varia entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1.

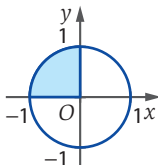
Assim, temos:

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

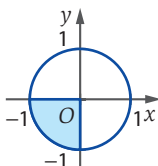
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 1.$$



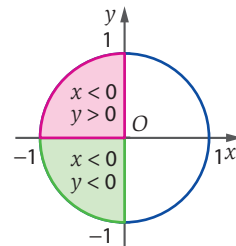
- 68.1 No segundo quadrante, as ordenadas dos pontos da circunferência trigonométrica variam entre 0 e 1, pelo que, sendo α um ângulo do 2.º quadrante, tem-se $0 < \sin \alpha < 1$. Por outro lado, as abscissas desses pontos variam entre -1 e 0, logo $-1 < \cos \alpha < 0$.



- 68.2 No terceiro quadrante, as ordenadas dos pontos da circunferência trigonométrica variam entre -1 e 0, pelo que, sendo α um ângulo do 3.º quadrante, tem-se $-1 < \sin \alpha < 0$. Por outro lado, as abscissas desses pontos variam entre -1 e 0, logo $-1 < \cos \alpha < 0$.



69. O seno de um ângulo é positivo quando o ângulo pertence ao 1.º quadrante ou ao 2.º quadrante. Por outro lado, o cosseno é negativo no 2.º quadrante e no 3.º quadrante. Assim, um ângulo cujo seno é positivo e cujo cosseno é negativo pertence ao 2.º quadrante. Um ângulo cujos seno e cosseno são negativos pertence ao 3.º quadrante.

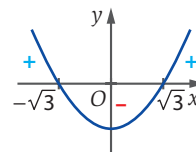
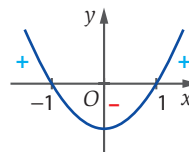


- 70.1 Sendo $\alpha \in]0, 90[$, tem-se $\cos \alpha > 0$ e $\sin \alpha > 0$, logo $\cos \alpha + \sin \alpha > 0$.
- 70.2 Sendo $\alpha \in]180, 270[$, tem-se $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha < 0$, logo $\cos \alpha + \sin \alpha < 0$.
- 70.3 Sendo $\alpha \in]270, 360[$, tem-se $\cos \alpha > 0$ e $\sin \alpha < 0$, logo $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$.
- 70.4 Sendo $\alpha \in]90, 180[$, tem-se $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$, logo $\cos \alpha \times \sin \alpha < 0$.
- 70.5 Sendo $\alpha \in]180, 270[$, tem-se $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha < 0$, logo $\cos \alpha \times \sin \alpha > 0$.
- 70.6 Sendo $\alpha \in]270, 360[$, tem-se $\cos \alpha > 0$ e $\sin \alpha < 0$, logo $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < 0$.
- 71.1 Se $x \in]0, 90[$, então $0 < \sin x < 1$. Assim, tem-se:
 $0 < \frac{k-1}{5} < 1 \Leftrightarrow 0 < k-1 < 5 \Leftrightarrow 1 < k < 6 \Leftrightarrow k \in]1, 6[$
- 71.2 Se $x \in]0, 180[$, então $-1 < \cos x < 0$. Assim, tem-se:
 $-1 < \frac{1-k}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < 1-k < 2 \Leftrightarrow -1 < k < 3 \Leftrightarrow k \in]-1, 3[$
- 71.3 Se $x \in]90, 180[$, então $-1 < \cos x < 0$. Assim, tem-se:

$$-1 < \frac{k^2-3}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 < k^2-3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2-3 > -2 \wedge k^2-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow k^2-1 > 0 \wedge k^2-3 < 0$$



$$k^2-1 > 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

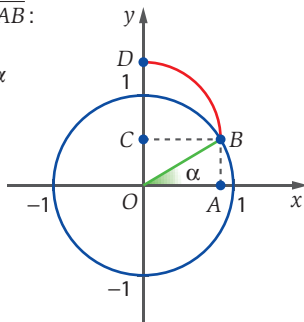
$$k^2-3 < 0 \Leftrightarrow k \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$$

Em conclusão:

$$-1 < \frac{k^2-3}{2} < 0 \Leftrightarrow k \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$$

72. A ordenada do ponto C é $\overline{AB}$:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sin \alpha$$



A ordenada do ponto D é igual a $\overline{OC} + \overline{CD}$.

$$\text{Temos } \overline{OC} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{OA}.$$

$$\text{Como } \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \cos \alpha,$$

$$\overline{AB} + \overline{OA} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

Concluindo, a ordenada de D é dada por $\sin \alpha + \cos \alpha$.

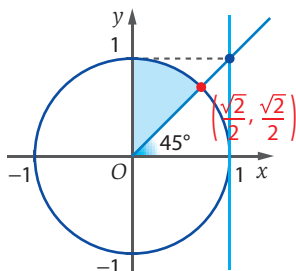
73.1 No 1.º quadrante e no 2.º quadrante, o seno toma valores no intervalo $]0, 1[$. Destes dois quadrantes, é no 1.º quadrante que a tangente é positiva.

73.2 No 1.º quadrante e no 4.º quadrante, o cosseno toma valores no intervalo $]0, 1[$. Destes dois quadrantes, é no 4.º quadrante que a tangente é negativa.

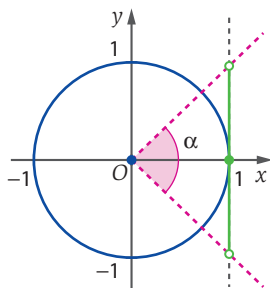
74. $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1$

$$0 < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

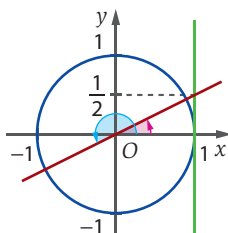
$$\tan \alpha > 1$$



75. $-1 < \tan \alpha < 1$



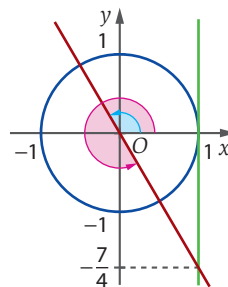
76.1 A partir do ponto do eixo das tangentes de ordenada $\frac{1}{2}$, traçam-se os lados extremidade de dois exemplos de ângulos cuja tangente é $\frac{1}{2}$ (na figura marcados a azul e a rosa).



76.2 A partir do ponto do eixo das

tangentes de ordenada $-\frac{7}{4}$,

traçam-se os lados extremidade de dois exemplos de ângulos cuja tangente é $-\frac{7}{4}$ (na figura marcados a azul e a rosa).



77.1 Sendo $\alpha \in]180, 270[$, tem-se $\sin \alpha < 0$ e $\tan \alpha > 0$, logo $\sin \alpha \times \tan \alpha < 0$.

77.2 Sendo $\alpha \in]270, 360[$, tem-se $\tan \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$, logo $\tan \alpha - \cos \alpha < 0$.

78.1 $\tan \alpha \times \sin \alpha < 0 \wedge \tan \alpha \times \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \sin \alpha < 0 \wedge \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} < 0 \wedge \sin \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha < 0 \wedge \sin \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in 2.^\circ Q.$$

78.2 $\tan \alpha \times \cos \alpha < 0 \wedge \sin \alpha \times \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha < 0 \wedge \sin \alpha \times \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha < 0 \wedge \cos \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in 4.^\circ Q.$$

79.1 Se $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$, então $\tan x \geq 0$. Assim, tem-se:

$$2k - 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

79.2 Se $135^\circ \leq x \leq 180^\circ$, então $-1 \leq \tan x \leq 0$.

Assim, tem-se:

$$-1 \leq -5 + 3k \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq k \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow k \in \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

80. Sendo $-45^\circ < x < 45^\circ$, tem-se $-1 < \tan x < 1$.

Assim, tem-se:

$$\tan x = k^2 - 2k \wedge -45^\circ < x < 45^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k < 1 \wedge k^2 - 2k > -1$$

Resolvamos cada uma das inequações separadamente.

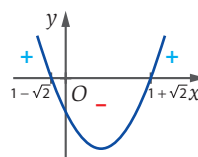
$$\bullet k^2 - 2k < 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 < 0$$

$$k^2 - 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2} \vee k = 1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2} \vee k = 1 + \sqrt{2}$$

$$k^2 - 2k - 1 < 0 \Leftrightarrow k \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$$



$$\bullet \quad k^2 - 2k > -1 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$$

Considerando a conjunção das duas inequações, temos:

$$k^2 - 2k < 1 \wedge k^2 - 2k > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[\setminus \{1\}.$$

Os valores inteiros de k que satisfazem a condição dada são: 0 e 2.

81.1 Temos $400^\circ = 40^\circ + 360^\circ$. Assim, o ângulo generalizado com 400° de amplitude é $(40^\circ, 1)$, logo $\cos(400^\circ) = \cos(40^\circ)$.

81.2 $300^\circ + |-60^\circ| = 360^\circ$, pelo que têm lados extremidade coincidentes na circunferência trigonométrica.

81.3 Como $780^\circ = 60^\circ + 2 \times 360^\circ$, tem-se

$$\sin(780^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

81.4 Como $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$, tem-se $\tan(405^\circ) = \tan(45^\circ) = 1$.

81.5 Como $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$, tem-se $\tan(210^\circ) = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\mathbf{82.1} \quad \cos(720^\circ) + \sin(540^\circ) =$$

$$= \cos(720^\circ - 2 \times 360^\circ) + \sin(540^\circ - 360^\circ)$$

$$= \cos 0^\circ + \sin 180^\circ = 1 + 0 = 1$$

$$\mathbf{82.2} \quad \sin(630^\circ) - \tan(420^\circ) = \sin(630^\circ - 360^\circ) - \tan(420^\circ - 360^\circ) =$$

$$= \sin 270^\circ - \tan 60^\circ = -1 - \sqrt{3}$$

$$\mathbf{82.3} \quad \sin(0^\circ) + \cos(-180^\circ) - \sin(270^\circ) = 0 + \cos(180^\circ) - (-1) =$$

$$= 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\mathbf{82.4} \quad \sin(1470^\circ) - \cos(1080^\circ) - 2 \times \tan(765^\circ) =$$

$$= \sin(1470^\circ - 3 \times 360^\circ) - \cos(1080^\circ - 3 \times 360^\circ) - 2 \tan(765^\circ - 2 \times 360^\circ)$$

$$= \sin(30^\circ) - \cos(0^\circ) - 2 \times \tan(45^\circ) = \frac{1}{2} - 1 - 2 \times 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\mathbf{82.5} \quad \cos(750^\circ) - 2 \sin(1140^\circ) + \tan(-405^\circ) =$$

$$= \cos(750^\circ - 2 \times 360^\circ) - 2 \sin(1140^\circ - 3 \times 360^\circ) + \tan(-405^\circ + 360^\circ)$$

$$= \cos(30^\circ) - 2 \sin(60^\circ) + \tan(-45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)$$

$$= -\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

$$\mathbf{83.} \quad P(0,6; -0,8); \quad \sin \alpha = -0,8; \quad \cos \alpha = 0,6;$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}; \quad \alpha \in 4.^\circ Q.$$

$$\mathbf{84.1} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 2,4 \text{ cm} \text{ — } x \end{array} \quad x = 1,2 \text{ rad}$$

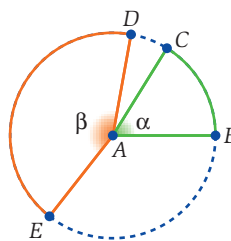
$$\mathbf{84.2} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 1,4 \text{ cm} \text{ — } x \end{array} \quad x = 7 \text{ rad}$$

$$\mathbf{85.} \quad \begin{array}{l} r \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 9 \text{ cm} \text{ — } 3,6 \text{ rad} \end{array} \quad r = 2,5 \text{ cm}$$

$$\mathbf{86.} \quad \begin{array}{l} r \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 5 \text{ cm} \text{ — } 3 \text{ rad} \end{array} \quad r = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

87. $\hat{\alpha} = 1 \text{ rad}$, por definição de radiano.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 8 \text{ — } \hat{\beta} \end{array} \quad \hat{\beta} = \frac{8}{3} \text{ rad}$$



$$\mathbf{88.} \quad \begin{array}{l} 3,5 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 14 \text{ cm} \text{ — } x \end{array} \quad x = 4 \text{ rad}$$

$$\mathbf{89.} \quad P = 10\pi \text{ cm} \Leftrightarrow 2\pi r = 10\pi \text{ cm} \Leftrightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{l} 5 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ rad} \\ 7,5 \text{ cm} \text{ — } x \end{array} \quad x = 1,5 \text{ rad}$$

$$\mathbf{90.1} \quad \begin{array}{l} \pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ \\ 10 \text{ rad} \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{1800}{\pi} \approx 572,9578^\circ$$

$$\begin{array}{l} 1^\circ \text{ — } 60' \\ 0,9578^\circ \text{ — } x \end{array} \quad x = 0,9578 \times 60 = 57,468'$$

$$\begin{array}{l} 1' \text{ — } 60'' \\ 0,468' \text{ — } x \end{array} \quad x = 0,468 \times 60 = 28,08''$$

10 rad corresponde aproximadamente a $572^\circ 57' 28''$.

$$\mathbf{90.2} \quad \begin{array}{l} \pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ \\ \frac{\pi}{7} \text{ rad} \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{180}{7} \approx 25,7143^\circ$$

$$0,7143 \times 60 = 42,858'$$

$$0,858 \times 60 = 51,48''$$

$\frac{\pi}{7} \text{ rad}$ corresponde aproximadamente a $25^\circ 42' 51''$.

RESOLUÇÕES

90.3 $\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$

$\frac{7\pi}{5} \text{ rad} \text{ — } x \quad x = 252^\circ$

$\frac{7\pi}{5} \text{ rad}$ corresponde a $252^\circ 0' 0''$.

90.4 $\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$

$7,6 \text{ rad} \text{ — } x \quad x = 435,44792^\circ$

$0,44792 \times 60 = 26,8752'$

$0,8752 \times 60 = 52,512''$

$7,6 \text{ rad}$ corresponde aproximadamente a $435^\circ 26' 53''$.

90.5 $\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$

$\frac{11\pi}{6} \text{ rad} \text{ — } x \quad x = 330^\circ$

$\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$ corresponde a $330^\circ 0' 0''$.

90.6 $\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$

$0,1 \text{ rad} \text{ — } x \quad x = 5,72958^\circ$

$0,72958 \times 60 = 43,7748'$

$0,7748 \times 60 = 46,488''$

$7,6 \text{ rad}$ corresponde aproximadamente a $5^\circ 43' 46''$.

91.1 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$18^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{\pi}{10}$

91.2 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$84^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{7\pi}{15}$

91.3 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$135^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{3\pi}{4}$

91.4 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$120^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{2\pi}{3}$

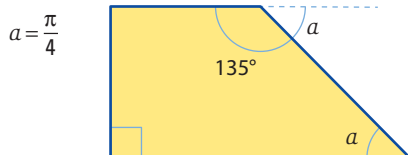
91.5 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$150^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{5\pi}{6}$

91.6 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

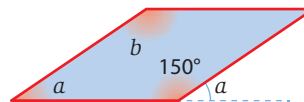
$300^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{5\pi}{3}$

92.1 $a = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$



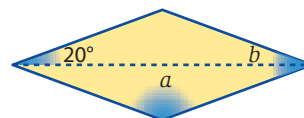
92.2 $a = 180^\circ - 150^\circ \Leftrightarrow a = 30^\circ$; $a = \frac{30^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$

$b = 150^\circ$; $b = \frac{150^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$



92.3 $b = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$; $b = \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$

$a = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$; $a = \frac{140^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{9}$



93. 1 rad corresponde aproximadamente a $57,3^\circ$.

Opção correta: D

94. $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$135^\circ \text{ — } x \quad x = \frac{3\pi}{4}$

Opção correta: B

95. $\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$

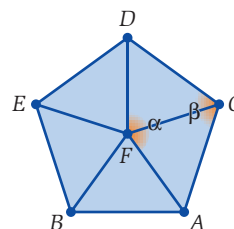
$\frac{9\pi}{5} \text{ rad} \text{ — } x \quad x = 324^\circ$

Opção correta: C

96. $\alpha = 2 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

$\beta = \frac{(5-2)\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$

Opção correta: D



97. Numa hora, o ponteiro das horas roda $-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Assim, se o ponteiro das horas rodar $-\frac{\pi}{3} \text{ rad}$, significa que passaram 2 horas. Nesse intervalo de tempo, o ponteiro dos minutos deu duas voltas completas, logo rodou $2 \times (-2\pi) = -4\pi \text{ rad}$.

Opção correta: C

98. A área do círculo é: $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

$2\pi \text{ rad} \text{ — } 9\pi \text{ cm}^2$

$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} \text{ — } x \quad x = \frac{\frac{2\pi}{3} \times 9\pi}{2\pi} = 3\pi \text{ cm}^2$

OU

$A = \frac{\frac{2\pi}{3} \times 3^2}{2} \Leftrightarrow A = 3\pi \text{ cm}^2$

Opção correta: C

Área de um setor circular de raio r e amplitude α radianos:

$A = \frac{\alpha \times r^2}{2}$

99. $P = 2\pi \times 33 \Leftrightarrow P = 66\pi \text{ cm}; 1000 : 66\pi \approx 4,8$

A roda deu 4 voltas completas.

Opção correta: C

100. A opção correta é a (B) pois: $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

As restantes opções não têm amplitudes, em radianos, de ângulos que possam corresponder a rotações coincidentes, pois:

(A) $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$

(C) $-\frac{8\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3}; \left| -\frac{2\pi}{3} \right| + \frac{\pi}{3} = \pi \neq 2\pi$

(D) $-\frac{7\pi}{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3}; \left| -\frac{\pi}{3} \right| + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \neq 2\pi$

Opção correta: B

101. $2011^\circ = 211^\circ + 5 \times 360^\circ; 180^\circ < 211^\circ < 270^\circ$; pertence ao 3.º quadrante.

Opção correta: C

102. $-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4}$; pertence ao 4.º quadrante.

Opção correta: D

103. $\frac{45}{2\pi} \approx 7,2$

$45 - 7 \times 2\pi \approx 1,02$

$0 < 1,02 < \frac{\pi}{2}$

O ângulo pertence ao 1.º quadrante.

Opção correta: A

104. Por definição de seno e cosseno de um ângulo na circunferência trigonométrica as coordenadas de P são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Opção correta: C

105. $\widehat{BOD} = \frac{2\pi}{10} \times 2 = \frac{2\pi}{5}$

A amplitude do ângulo generalizado cujo lado origem é $\vec{OD}$ e o lado extremidade é $\vec{OB}$ pode ser definida pela expressão $-\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Opção correta: C

106. Na circunferência trigonométrica, a um ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{4}$ radianos corresponde o ponto de coordenadas:

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Opção correta: D

107. $1^\circ \text{ — } 60'$

$x \text{ — } 12' \quad x = 0,2^\circ \quad 7^\circ 12' = 7^\circ + 0,2^\circ = 7,2^\circ$

$\pi \text{ rad — } 180^\circ$

$x \text{ — } 7,2^\circ \quad x = \frac{\pi}{25} \text{ rad}$

108. $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$330^\circ \text{ — } \hat{\alpha} \quad \hat{\alpha} = \frac{330^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$

$180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

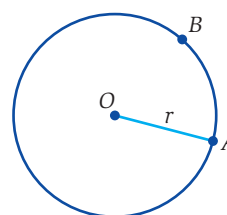
$\hat{\beta} \text{ — } \frac{\pi}{12} \text{ rad} \quad \hat{\beta} = \frac{\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ$

$180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$\hat{\gamma} \text{ — } \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \quad \hat{\gamma} = \frac{7\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$

α é o ângulo de maior amplitude e β é o de menor amplitude.

109.1 1 radiano (por definição de radiano).



109.2 3 cm — 1 rad

3π cm — x $x = \pi \text{ rad}$

109.3

a. $\pi \text{ rad — } 180^\circ$

$x \text{ — } 210^\circ \quad x = \frac{7\pi}{6}$

b. $A = \frac{7\pi}{6} \times r^2 \Leftrightarrow A = \frac{7\pi r^2}{12}$

110. O ponto A percorrerá $P_A = 2\pi \times 8 = 16\pi$ metros.

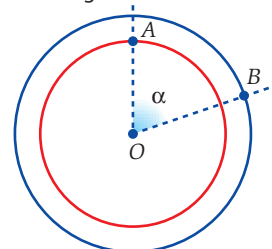
O ponto B deverá percorrer 16π metros na respetiva circunferência. Assim, descreverá um ângulo de

$\frac{16\pi}{2\pi \times 10} \times 2\pi = \frac{8\pi}{5}$ radianos, ou seja, $\frac{8 \times 180^\circ}{5} = 288^\circ$.

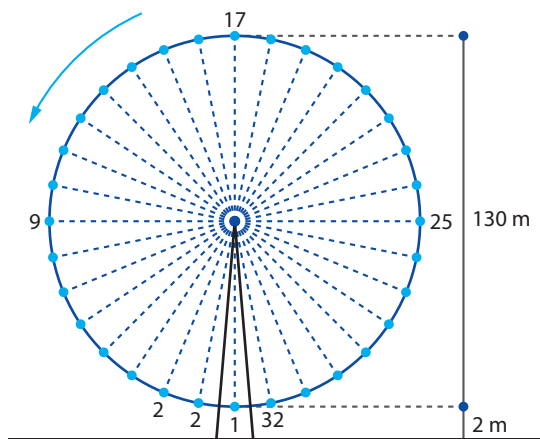
Assim,

$\alpha = 360^\circ - 288^\circ = 72^\circ$.

Linha de origem



- 111.** Na figura seguinte está representada a roda gigante no momento em que o casal entrou na cabina n.º 1. Nas respostas às alíneas do problema, esta será considerada a situação/posição inicial.



111.1 $r = \frac{130}{2} \Leftrightarrow r = 65 \text{ m}$

- 111.2** Depois de dar um quarto de volta, a cabina do casal (n.º 1) encontra-se naquela que foi a posição inicial da cabina n.º 25.

A sua distância ao solo é $65 + 2 = 67 \text{ m}$.

A cabina n.º 9 está na parte mais baixa da roda (base da roda), tendo passado pela base 7 cadeiras (da n.º 2 à n.º 8).

- 111.3** Quando a cabina n.º 20 está na posição mais baixa da roda, a cabina do casal avançou 19 posições (a menos de voltas completas), ou seja, $19 \times \frac{360^\circ}{32} = 213,75^\circ$. Temos de considerar mais uma e mais duas voltas, pois a roda deu três voltas.

Assim, obtemos: $213,75^\circ$, $213,75^\circ + 360^\circ = 573,75^\circ$ e $213,75^\circ + 2 \times 360^\circ = 933,75^\circ$.

Em radianos, obtemos: $19 \times \frac{2\pi}{32} = \frac{19\pi}{16}$, $\frac{19\pi}{16} + 2\pi = \frac{51\pi}{16}$ e $\frac{51\pi}{16} + 2\pi = \frac{83\pi}{16}$.

- 111.4** Começemos por subtrair a amplitude de uma volta: $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$.

A cabina do casal parou ao fim de uma volta e um quarto. Logo, descontando uma volta, a cabina do casal avançou

$8 \left(\frac{32}{4} = 8 \right)$ posições. Assim, a cabina que estava na parte mais baixa da roda era a número 9.

- 111.5** Começemos por subtrair a amplitude de uma volta:

$$\frac{27\pi}{8} - 2\pi = \frac{11\pi}{8}.$$

Agora, determinemos o número de posições que, descontando uma volta, a cabina do casal avançou:

$$\frac{11\pi}{8} : \frac{2\pi}{32} = 22.$$

Assim, a cabina que estava no ponto mais da roda era a número 23.

- 111.6** Tendo ficado a cabina número 7 no ponto mais baixo da roda, a cabina do casal avançou 6 posições, não considerando voltas completas.

O ângulo orientado correspondente ao ângulo descrito pela cabina do casal tem amplitude $6 \times \frac{360^\circ}{32} = 67,5^\circ$ (em graus) ou $6 \times \frac{2\pi}{32} = \frac{3\pi}{8}$ (em radianos).

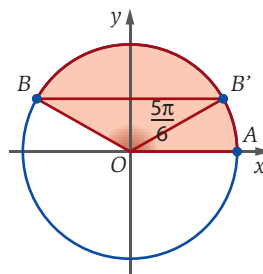
Portanto, uma expressão geral do conjunto das amplitudes do ângulo que a cabine do casal poderá ter descrito desde o início da viagem é (em graus) $67,5^\circ + n \times 360^\circ$, $n \in \mathbb{N}$

ou (em radianos) $\frac{3\pi}{8} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

112.1 $A = \frac{\frac{5\pi}{6} \times 3^2}{2} \Leftrightarrow A = \frac{15\pi}{4} \text{ cm}^2$

- 112.2** O ponto B tem coordenadas $\left(3 \cos \frac{5\pi}{6}, 3 \sin \frac{5\pi}{6} \right)$, ou seja, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

112.3 Temos $B \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$ e $B' \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$.



Tomando o lado $[BB']$ do triângulo $[OBB']$ como base, temos:

altura $= \frac{3}{2} \text{ cm}$ e base $= 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

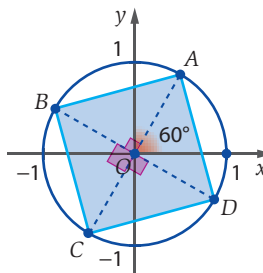
$$A = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow A = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

- 113.1** Em graus:

$$60^\circ, 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ, 150^\circ + 90^\circ = 240^\circ, 240^\circ + 90^\circ = 330^\circ$$

Em radianos:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$$



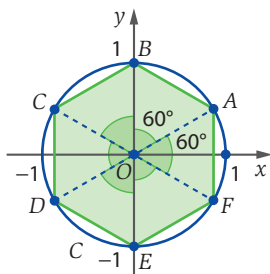
- 113.2** Decompondo o hexágono em triângulos equiláteros, obtemos seis ângulos ao centro de 60° . Considerando o arco com extremidade em B , obtemos:

$$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \quad 90^\circ, \quad 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ, \quad 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ, \\ 210^\circ + 60^\circ = 270^\circ \text{ e } 270^\circ + 60^\circ = 330^\circ.$$

Em radianos:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}.$$



- 114.1** O ponto C é interseção da circunferência trigonométrica com a reta de equação $y = \sqrt{5}x$, no 1.º quadrante. Determinemos as suas coordenadas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \sqrt{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (\sqrt{5}x)^2 = 1 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x^2 = 1 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ y = \frac{\sqrt{30}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{30}}{6} \end{cases}$$

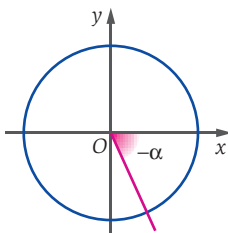
Como C pertence ao 1.º quadrante, tem-se $C\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right)$.

$$\text{Assim, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ e } \tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{5}.$$

114.2 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha = -\sqrt{5}$$



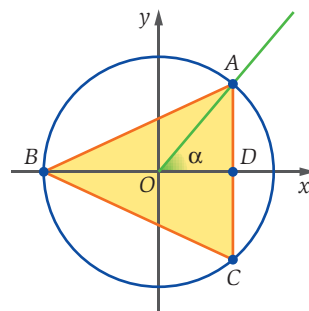
115.1 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$; $C(\cos \alpha, -\sin \alpha)$

115.2 $\overline{AC} = 2 \sin \alpha$

$$\overline{BD} = 1 + \cos \alpha$$

$$A(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{2 \sin \alpha \times (1 + \cos \alpha)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$$

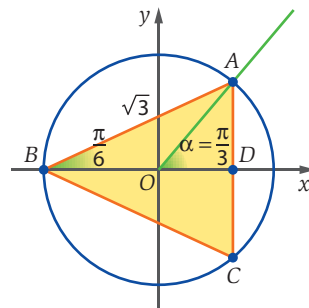


- 115.3** Para que o triângulo seja equilátero, o arco AC deve medir $\frac{2\pi}{3}$, logo $\widehat{AOC} = \frac{2\pi}{3}$ e, portanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$\overline{AC} = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

- 115.4** Recorrendo à fórmula, tem-se:

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



Alternativamente, tem-se:

$$\overline{AC} = \sqrt{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{3}{2}$$

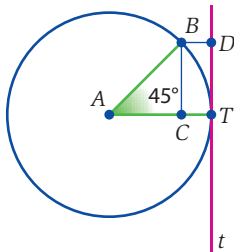
$$\text{Área} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

TESTE – PÁG 66

1. Sendo D o pé da perpendicular à reta t que passa pelo ponto B , a distância de B à reta t é igual a $\overline{BD}$.

$$\overline{BD} = \overline{AT} - \overline{AC} = 5 - 5 \cos 45^\circ = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 1,46 \text{ cm}$$

Opção correta: C



2. $\sin 60^\circ - 2 \tan 45^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2$

Opção correta: D

3. Não há ângulos nas circunstâncias enunciadas.

Opção correta: D

4. 4 cm — 1 rad

2 cm — x $x = \frac{1}{2}$ rad

Opção correta: C

5. π — 180°

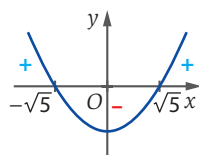
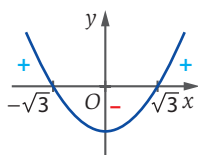
x — -140° $x = -\frac{7}{9}\pi$ rad

Opção correta: B

6. Sendo $\alpha \in 4^\circ Q$, então $0 < \cos x < 1$. Assim, tem-se:

$$0 < \frac{t^2 - 3}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < t^2 - 3 < 2 \Leftrightarrow 3 < t^2 < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3 > 0 \wedge t^2 - 5 < 0$$



$$t^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$$

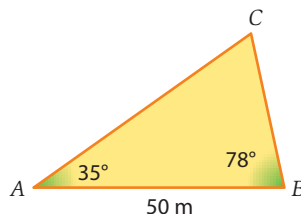
$$t^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow t \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$$

Em conclusão:

$$0 < \frac{t^2 - 3}{2} < 1 \Leftrightarrow t \in]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \sqrt{5}[$$

Opção correta: B

7. $\hat{ACB} = 180^\circ - 78^\circ - 35^\circ = 67^\circ$



Aplicando a Lei dos senos, temos:

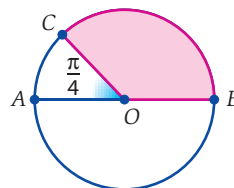
$$\frac{\sin 78^\circ}{AC} = \frac{\sin 67^\circ}{50} \Leftrightarrow AC = \frac{50 \times \sin 78^\circ}{\sin 67^\circ} \Leftrightarrow AC \approx 53 \text{ m}$$

e

$$\frac{\sin 35^\circ}{BC} = \frac{\sin 67^\circ}{50} \Leftrightarrow BC = \frac{50 \times \sin 35^\circ}{\sin 67^\circ} \Leftrightarrow BC \approx 31 \text{ m}$$

8. $P = 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 2\pi \times 5 \Leftrightarrow P = 10 + \frac{15\pi}{4} \text{ cm}$

$$A = \frac{\frac{3\pi}{4} \times 5^2}{2} \Leftrightarrow A = \frac{75\pi}{8} \text{ cm}^2$$



9.1 180° — π rad

36° — x

$$x = \frac{36^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5}$$

9.2 180° — π rad

120° — x

$$x = \frac{120^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

9.3 180° — π rad

-390° — x

$$x = \frac{-390^\circ \times \pi}{180^\circ} = -\frac{13\pi}{6}$$

10. $\left[\frac{25\pi}{6} \right] = \left[\frac{25}{12} \right] = [\approx 2,08] = 2$

$$\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi$$

O ângulo generalizado cuja amplitude é $\frac{25\pi}{6}$ radianos

é $\left(\frac{\pi}{6}, 2 \right)$.

11. Numa hora, o ponteiro dos minutos roda -2π rad. Assim, se o ponteiro dos minutos rodar -7π rad, significa que passaram 3,5 horas.

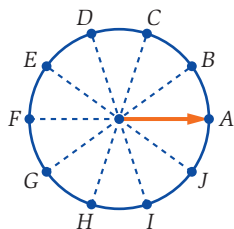
Numa hora, o ponteiro das horas roda $-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$ rad.

Em 3,5 horas, o ponteiro das horas rodou

$$3,5 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{7\pi}{12} \text{ rad.}$$

- 12.1 $360^\circ : 10 = 36^\circ$

$$\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$



- 12.2

a. $828^\circ : 36^\circ = 23 = 10 \times 2 + 3$; letra sorteada: D

b. $\frac{11\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi$; letra sorteada: B

c. $-\frac{11\pi}{5} + 2\pi = -\frac{\pi}{5}$; letra sorteada: J

- 12.3 Partindo da letra A, o ponteiro tem de rodar 4 setores da roda até chegar à letra E (a menos de voltas completas), ou seja, o ponteiro varre um ângulo cuja amplitude, em radianos, é dada por $\frac{4\pi}{5} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

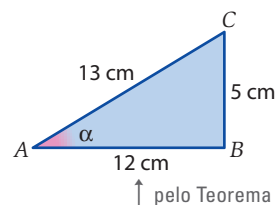
4. Funções Trigonométricas

DIAGNÓSTICO

1.1 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

1.2 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

1.3 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$



2.1 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - 0,8^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 0,36 \Leftrightarrow_{0 < \alpha < 90^\circ} \sin \alpha = 0,6$$

2.2 $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{79} \Leftrightarrow_{0 < \alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{79}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{79}}{79}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{79}}{79} = \frac{5\sqrt{237}}{79}$$

3. Começamos por determinar o valor de $\tan \alpha$.

$$-1 - 5 \tan \alpha + 6 \tan^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{6} \vee \tan \alpha = 1$$

Como α é um ângulo agudo, tem-se $\tan \alpha = 1$.

Determinemos, agora, o valor de $\cos \alpha$.

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow_{0 < \alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E, agora, o valor de $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O valor pedido é:

$$\cos^2 \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

4.1 $\sin \alpha \times \frac{1}{\tan \alpha} = \sin \alpha \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha$

4.2 $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \times \cos^2 \alpha =$
 $= \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \times 1 = \sin \alpha$

4.3 $\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{\tan \alpha}$

116.1 Falso. Em $\left] -\frac{3\pi}{2}, -\pi \right[$, a função seno é positiva e decrescente (o intervalo corresponde ao 2.º quadrante).

116.2 Verdadeiro (o intervalo corresponde ao 4.º quadrante).

116.3 Falso. Em $\left] 3\pi, \frac{7\pi}{2} \right[$, a função seno é negativa e decrescente (o intervalo corresponde ao 3.º quadrante).

117. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$.

Assim, tem-se:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \iff -2 \leq -2 \sin x \leq 2 \iff$$

$$\iff 1 \leq -2 \sin x + 3 \leq 5; D_f = [1, 5]$$

118. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-x \in \mathbb{R}$ e

$$g(-x) = -\frac{1}{2} \sin(-2x) = -\frac{1}{2} \times (-\sin(2x)) = \frac{1}{2} \sin(2x) = -g(x)$$

a função seno é ímpar

g é ímpar pois $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge g(-x) = -g(x)$.

119. Tem-se que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+3) = f(x)$, logo o período da função f é 3.

120.1 Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $x+4\pi \in \mathbb{R}$ e

$$f(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

120.2 $f(x+6\pi) = \sin\left(\frac{x+6\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 3\pi\right) =$

$$= \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq f(x)$$

121.1 O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$.

Assim, tem-se:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \iff -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

121.2 $f(\alpha) = 0 \iff \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0 \iff \cos \alpha = \frac{1}{2}$

Como $\cos \alpha > 0$ e $\sin \alpha < 0$, então $\alpha \in 4.^\circ Q$.

122. $g(-x) = 2 \cos(-x) - 3 = 2 \cos(x) - 3 = g(x)$

a função cosseno é par

g é par pois $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge g(-x) = g(x)$.

123.1 $D_h = \mathbb{R}$

O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$.

Assim, tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \iff -2 \leq -1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$$

$$D_h = [-2, 0]$$

123.2 O gráfico de h obtém-se do gráfico da função cosseno por uma translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$.

123.3 Tendo em conta que $D_h = [-2, 0]$, o mínimo (absoluto) da função é -2 e o máximo (absoluto) é 0 .

No intervalo $[0, 2\pi]$, a função seno atinge o mínimo em

$$x = \frac{3\pi}{2} \text{ e o máximo em } x = \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo a que o gráfico de h se obtém do gráfico da função cosseno por uma

translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$, tem-se, em $[0, 2\pi]$:

$$\text{minimizante de } h: x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$

$$\text{maximizante de } h: x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

123.4 No intervalo $[0, 2\pi]$, a função cosseno é decrescente em $[0, \pi]$ e crescente em $[\pi, 2\pi]$. Atendendo a que o gráfico de h se obtém do gráfico da função cosseno por

uma translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ e que a função é 2π -periódica, tem-se, em $[0, 2\pi]$:

$$h \text{ é decrescente em } \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] \text{ e } h \text{ é crescente em}$$

$$\left[0, \frac{5\pi}{6}\right] \text{ e em } \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right].$$

124.1 O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$. Assim, tem-se:

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \iff 0 \leq 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$D_g = [0, 2]$$

124.2 O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função cosseno pela translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

124.3 Tendo em conta que $D_g = [0, 2]$, o mínimo (absoluto) da função é 0 e o máximo (absoluto) é 2 .

A expressão geral dos minimizantes da função cosseno é $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, a expressão geral dos minimizantes de g é $\frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

A expressão geral dos maximizantes da função cosseno é $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, a expressão geral dos maximizantes de g é $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

124.4 Tendo em conta a monotonia da função cosseno e as alíneas anteriores, podemos afirmar que:

- a função é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$;

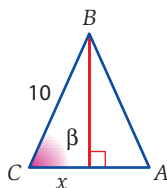
- a função é decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{13\pi}{6}, 2\pi\right]$.

125.1 Seja x metade da medida da base do triângulo $[ABC]$.

Tem-se $\cos \beta = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \cos \beta$

e $\overline{AC} = 2x = 20 \cos \beta$.

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é, então, $20 + 20 \cos \beta$, ou seja, $f(\beta) = 20 + 20 \cos \beta$.



125.2 $D_f =]0, \frac{\pi}{2}[$

O contradomínio da restrição da função cosseno ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ é $]0, 1[$. Assim, tem-se:

$$0 < \cos \beta < 1 \Leftrightarrow 0 < 20 \cos \beta < 20 \Leftrightarrow 20 < 20 + 20 \cos \beta < 40$$

$D'_f =]20, 40[$

125.3 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20 + 20 \cos \frac{\pi}{4} = 20 + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 + 10\sqrt{2}$

126.1 Falso. $\tan \alpha < \tan \beta$. (A função tangente é crescente para intervalos correspondentes ao 3.º quadrante. Assim, se $\alpha < \beta$, então $\tan \alpha < \tan \beta$.)

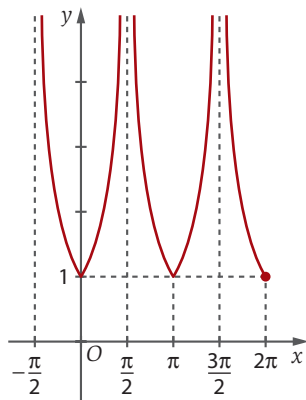
126.2 Verdadeiro. (A função cosseno é crescente para intervalos correspondentes ao 3.º quadrante. Assim, se $\alpha < \beta$, então $\cos \alpha < \cos \beta$.)

126.3 Verdadeiro. (A função seno é decrescente para intervalos correspondentes ao 3.º quadrante. Assim, se $\alpha < \beta$, então $\sin \alpha > \sin \beta$.)

127.1 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

O contradomínio de função tangente é $\mathbb{R}$. O contradomínio da função definida por $y = |\tan x|$ é $[0, +\infty[$, portanto, $D'_f = [1, +\infty[$.

127.2 Representemos graficamente a função f , em $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.



f é estritamente crescente nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

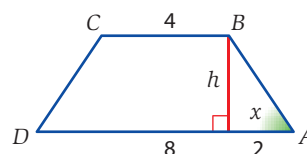
f é estritamente decrescente nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

127.3 $f(-x) = |\tan(-x)| + 1 = |-\tan x| + 1 = |\tan x| + 1 = f(x)$
a função tangente é ímpar

f é par pois $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.

127.4 f tem mínimo absoluto 1 para $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

128.1 Seja h a altura do trapézio $[ABCD]$.



Tem-se $\tan x = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \tan x$.

Assim, a área do trapézio é dada em função de x por:

$A(x) = \frac{8+4}{2} \times 2 \tan x \Leftrightarrow A(x) = 12 \tan x$

128.2 Tendo em conta que as medidas das bases do trapézio estão fixadas, ao variar a altura do trapézio, a amplitude do ângulo DAB pode variar entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ (exclusive).

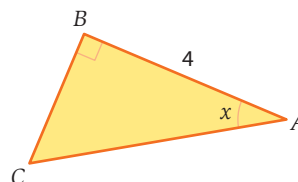
Assim, tem-se $D_A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

No intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o conjunto das imagens da função tangente é $]0, +\infty[$, logo $D'_A =]0, +\infty[$.

128.3 $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \tan \frac{\pi}{3} = 12\sqrt{3}$

129.1 Tem-se $\tan x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \tan x$.

Logo, $A_T(x) = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{4 \times 4 \tan x}{2} = 8 \tan x$.



129.2 $A_T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \tan \frac{\pi}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

129.3 $D'_{A_T} =]0, +\infty[$

129.4 O perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$.

$$\text{Tem-se } \cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4}{\cos x}.$$

$$\text{Concluindo, } P_T(x) = 4 + 4 \tan x + \frac{4}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{129.5} \quad P_T\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4 + 4 \tan \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\cos \frac{\pi}{4}} = 4 + 4 \times 1 + \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= 8 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 8 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

129.6 Sendo $\overline{AC}$ o diâmetro do círculo, o seu raio é

$$r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\frac{4}{\cos x}}{2} = \frac{2}{\cos x}.$$

Assim, a área do círculo é dada, em função de x , por

$$\pi \times \left(\frac{2}{\cos x}\right)^2, \text{ ou seja, } \frac{4\pi}{\cos^2 x}.$$

O diâmetro do círculo é superior a $4(\overline{AB})$, aumentando indefinidamente com o aumento de x . Assim, o contradomínio desta função é $]4\pi, +\infty[$.

$$\mathbf{130.1} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\text{Como } \alpha \in 3.^\circ \text{ Q., tem-se: } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathbf{130.2} \quad \tan \alpha = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathbf{131.} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\text{Como } \alpha \in 2.^\circ \text{ Q., tem-se: } \sin \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

$$\tan \alpha - \sin \alpha = -\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{5\sqrt{15}}{4}$$

$$\mathbf{132.} \quad \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \sqrt{5^2 + 1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\text{Como } \alpha \in 3.^\circ \text{ Q., tem-se: } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \sqrt{5} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\mathbf{133.} \quad \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 2^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{Como } \alpha \in 1.^\circ \text{ Q., tem-se: } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Concluindo:

$$\sqrt{5} \sin \alpha + \cos^2 \alpha = \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times (\sqrt{5})^2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{134.1} \quad (\cos \beta - \sin \beta)^2 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2 \cos \beta \sin \beta = 1 - 2 \cos \beta \sin \beta \\ &= 2 - (1 + 2 \cos \beta \sin \beta) = 2 - (\cos^2 \beta + 2 \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \beta) \\ &= 2 - (\cos \beta + \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{134.2} \quad \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha} = 1 - \sin \alpha$$

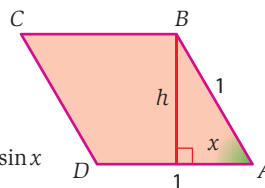
$$\begin{aligned} \mathbf{134.3} \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \times \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{\sin \theta \times \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{134.4} \quad \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} &= \frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{(1 + \cos \beta)(1 - \cos \beta)} = \frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{1 - \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \end{aligned}$$

$$\mathbf{135.1} \quad A(x) = \overline{AD} \times h$$

$$\sin x = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \sin x$$

$$A(x) = 1 \times \sin x \Leftrightarrow A(x) = \sin x$$



135.2

a. Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

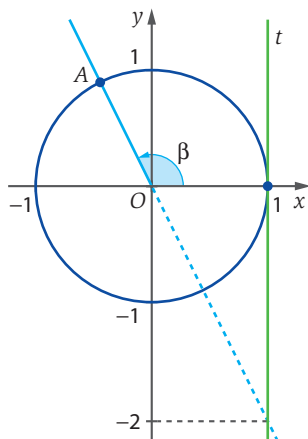
$$(2 - \sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 2 - 2 \cos x \Leftrightarrow \cos x = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{b.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - (-2 + 2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = -11 + 8\sqrt{2} \quad x \in]0, \pi[\quad \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{-11 + 8\sqrt{2}}$$

- 136.** A reta OA intersesta o eixo das tangentes no ponto deste eixo de ordenada -2 , pelo que $\tan \beta = -2$.



$$\tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow (-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{4}{5}$$

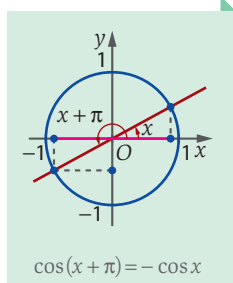
$$\text{Como } \beta \in 2.^\circ Q, \text{ tem-se: } \sin \beta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Concluindo:

$$\cos^2 \beta - \tan \beta - \sin \beta = \frac{1}{5} - (-2) - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{11 - 2\sqrt{5}}{5}$$

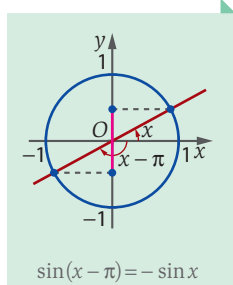
- 137.1** $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

$\cos(\pi + \alpha) > 0$, porque $\cos \alpha < 0$ ($\alpha \in 2.^\circ Q$).



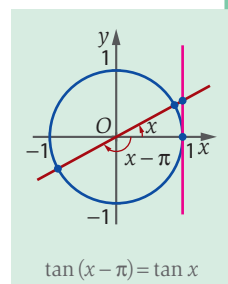
- 137.2** $-\sin(\alpha - \pi) = -(-\sin \alpha) = \sin \alpha$

$-\sin(\alpha - \pi) > 0$, porque $\sin \alpha > 0$ ($\alpha \in 2.^\circ Q$).

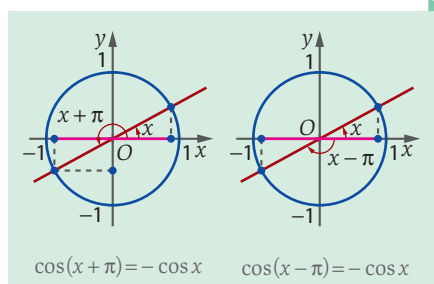


- 137.3** $\tan(\alpha - \pi) = -\tan \alpha$

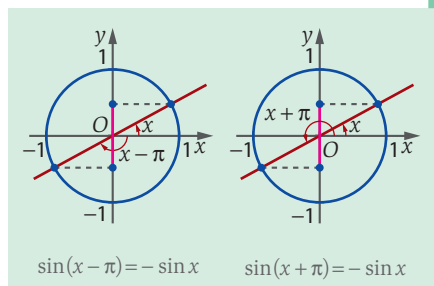
$\tan(\alpha - \pi) > 0$, porque $\tan \alpha < 0$ ($\alpha \in 2.^\circ Q$).



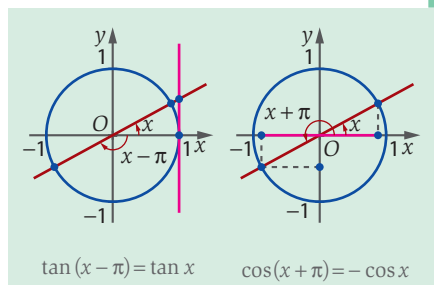
- 138.1** $\cos(\alpha + \pi) - \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha - (-\cos \alpha) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0$



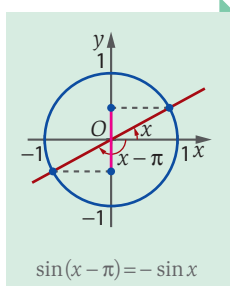
- 138.2** $-\sin(\alpha - \pi) - \sin(\pi + \alpha) = -(-\sin \alpha) - (-\sin \alpha) = \sin \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$



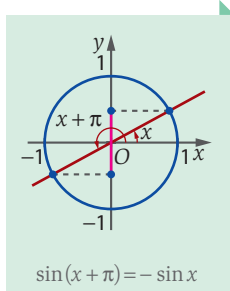
- 138.3** $\tan(\alpha - \pi) \times \cos(\pi + \alpha) = -\tan \alpha \times (-\cos \alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha = \sin \alpha$



139.1 $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$



139.2 $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha = \frac{1}{3}$



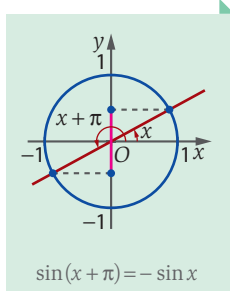
140. $\sin(\pi + \alpha) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Como $\alpha \in 3.^\circ Q.$, tem-se: $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Concluindo: $\cos \alpha + \tan \alpha = -\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{20}$

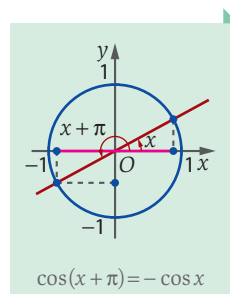


141.1 $\cos(\pi + \alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16}$

Como $\alpha \in 2.^\circ Q.$, tem-se: $\tan \alpha = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$.

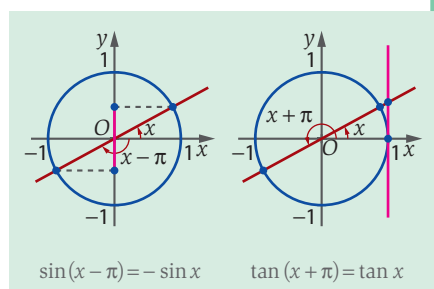


141.2 $\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

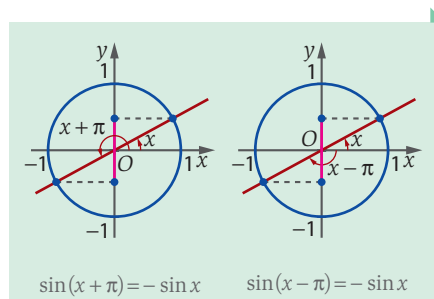
$\cos \alpha - \sin(\alpha - \pi) - 2 \tan(5\pi + \alpha) =$

$= \cos \alpha - (-\sin \alpha) - 2 \tan(\pi + \alpha) =$

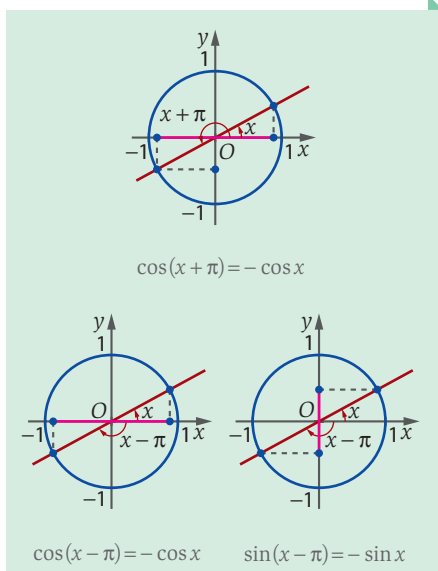
$= \cos \alpha + \sin \alpha - 2 \tan \alpha = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{3}{2} = \frac{13}{10}$



142.1 $\sin(\pi + \beta) + 2 \sin(\beta - \pi) = -\sin \beta + 2(-\sin \beta) = -3 \sin \beta$



142.2 $\cos(\beta + \pi) \times \cos(\beta - \pi) + \sin^2(\beta - \pi) =$
 $= -\cos\beta \times (-\cos\beta) + (-\sin\beta)^2 = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$



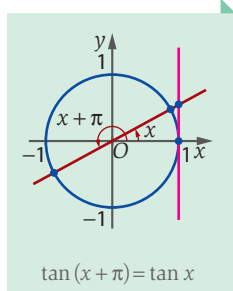
143.1 $P(\alpha) = \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha (\sin^2 \alpha - 1) =$
 $= \cos \alpha (-\cos^2 \alpha) = -\cos^3 \alpha$

143.2 $\tan(\alpha + \pi) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 2^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

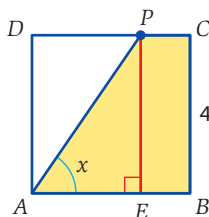
Como $\alpha \in 3.^\circ \text{Q.}$, tem-se: $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Assim, $P(\alpha) = -\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}}{125} = \frac{\sqrt{5}}{25}$



144.1 A região sombreada é um trapézio cuja área é dada por:

$$A_{[ABCP]} = \frac{\overline{AB} + \overline{PC}}{2} \times \overline{BC}$$



Sendo E a projeção ortogonal do ponto P na reta AB , tem-se:

$$\bullet \tan x = \frac{\overline{PE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{4}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{4}{\tan x}$$

$$\bullet \overline{PC} = \overline{AB} - \overline{AE} = 4 - \frac{4}{\tan x}$$

Concluindo, a área sombreada é dada, em função de x por:

$$A_{[ABCP]} = \frac{4 + 4 - \frac{4}{\tan x}}{2} \times 4 = 16 - \frac{8}{\tan x}$$

144.2 $\sin(x - \pi) = -\frac{12}{13} \Leftrightarrow -\sin x = -\frac{12}{13} \Leftrightarrow \sin x = \frac{12}{13}$

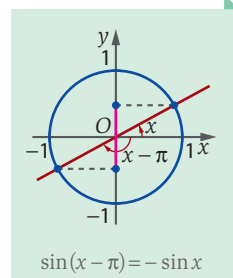
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{144}{169} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{25}{169}$$

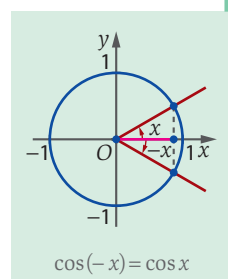
Como $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se $\cos x = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$A_{[ABCP]} = 16 - \frac{8}{\frac{12}{5}} = \frac{38}{3}$$



145. $\cos(-\alpha) = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{5}$



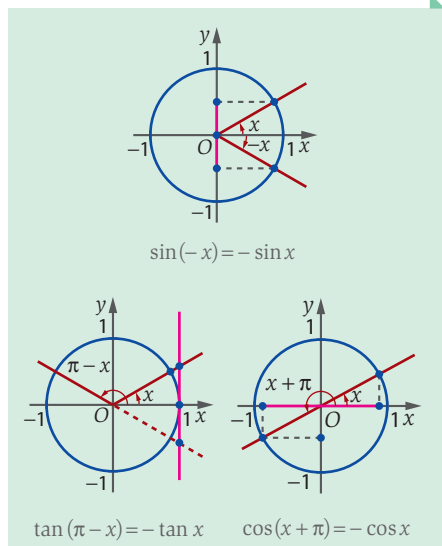
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{21}{25}$$

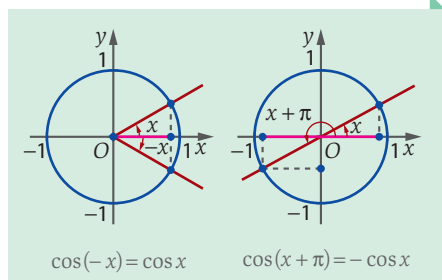
Como $\alpha \in]-\pi, 0[$ e $\cos \alpha < 0$, tem-se que $\alpha \in 3.^\circ \text{Q.}$ e, portanto, $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) - 2\tan(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) &= \\ = -\sin \alpha - 2(-\tan \alpha) - (-\cos \alpha) &= \\ = -\sin \alpha + 2\tan \alpha + \cos \alpha &= \\ = -\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{21}}{2} + \left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{6\sqrt{21} - 2}{5} \end{aligned}$$

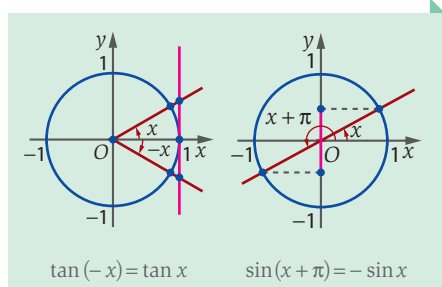


146.1 $\cos(-x) - \cos(\pi + x) = \cos x - (-\cos x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$



$\cos(-x) - \cos(\pi + x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ é uma proposição com valor lógico falso.

146.2 $\tan(-x) - \sin(\pi + x) = -\tan x - (-\sin x) = -\tan x + \sin x$



No 4.º Q., tem-se $\tan x < 0$ e $\sin x > 0$, logo

$$\tan(-x) - \sin(\pi + x) > 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

é uma proposição com valor lógico verdadeiro.

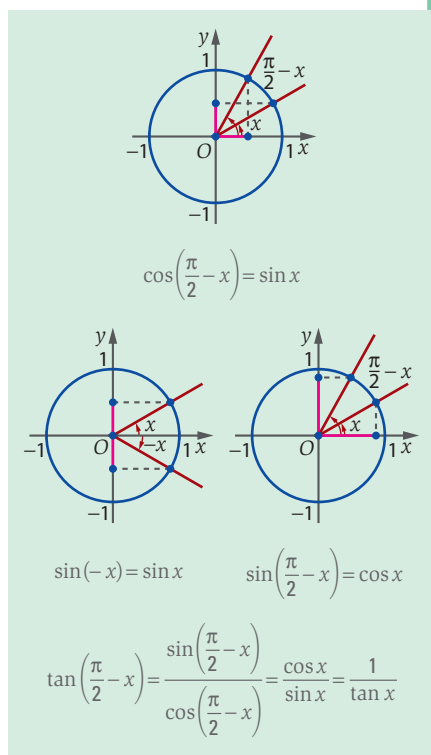
147. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{5}{13} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{5}{13}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{144}{169}$$

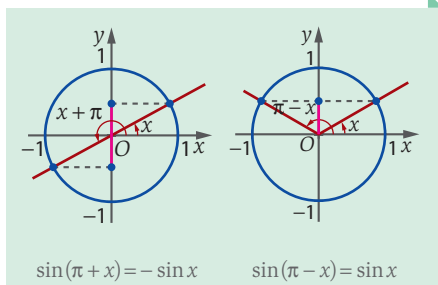
Como $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\sin \alpha < 0$, tem-se que $\alpha \in 3.º \text{ Q.}$

e, portanto, $\cos x = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

$$\begin{aligned} \sin(-x) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x) &= -\sin x \times \frac{1}{\tan x} - (-\sin x) = \\ = -\sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x &= -\cos x + \sin x = \\ = -\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) &= \frac{7}{13} \end{aligned}$$



148. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \tan x + \sin(\pi + x) \times \sin(\pi - x) =$
 $= \frac{1}{\tan x} \times \tan x + (-\sin x) \times \sin x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$



149. $\tan(-\alpha) = -0,6 \Leftrightarrow -\tan \alpha = -0,6 \Leftrightarrow \tan \alpha = 0,6$

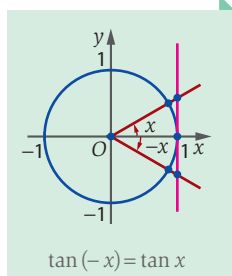
$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{10}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{136}{100} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{100}{136}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{100}{136} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{36}{136}$$

Como $\alpha \in 1.^\circ \text{Q.}$, tem-se $\sin x = \sqrt{\frac{36}{136}} = \frac{6}{\sqrt{136}} =$
 $= \frac{6}{2\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

Concluindo: $\tan \alpha - \sin \alpha = \frac{6}{10} - \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{3}{5} - \frac{3\sqrt{34}}{34}$



150.1 $\sin 210^\circ + \cos 300^\circ = \sin 180^\circ + 30^\circ + \cos(360^\circ - 60^\circ) =$
 $= -\sin 30^\circ + \cos(-60^\circ) = -\frac{1}{2} + \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

150.2 $\tan(-405^\circ) - 3 \cos 510^\circ =$
 $= \tan(-360^\circ - 45^\circ) - 3 \cos(360^\circ + 150^\circ) =$
 $= \tan(-45^\circ) - 3 \cos 150^\circ$
 $= -\tan 45^\circ - 3 \times \cos(180^\circ - 30^\circ)$
 $= -\tan 45^\circ - 3(-\cos 30^\circ) = -1 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$

150.3 $\sin 150^\circ + \cos 315^\circ - \tan 1320^\circ =$
 $= \sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos(360^\circ - 45^\circ) - \tan(3 \times 360^\circ + 240^\circ) =$
 $= \sin 30^\circ + \cos(-45^\circ) - \tan 240^\circ$
 $= \sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \tan(180^\circ + 60^\circ)$
 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \tan 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}$

150.4 $2 \cos\left(\frac{23\pi}{6}\right) - \tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(-6\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} - \left(-\tan \frac{\pi}{3}\right)$
 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

150.5 $\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$
 $= \sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \sqrt{3}$
 $= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

150.6 $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) - \sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin^2\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$

151. Sendo α e β as amplitudes dos ângulos interno do losango, tem-se:

$$\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha$$

Podemos obter $\cos \alpha$ a partir de $\cos \beta$, da seguinte forma:

$$\cos \beta = -0,8 \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = -0,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos \alpha = -0,8 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,8$$

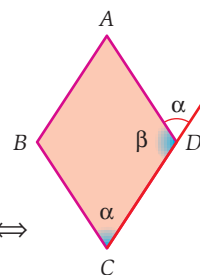
$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{0,8^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{8}{10}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{100}{64} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{36}{64}$$

Como $\alpha \in 1.^\circ \text{Q.}$, tem-se: $\tan \alpha = \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

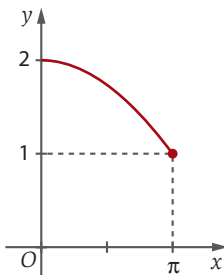
$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{3}{4} \times \frac{8}{10} = \frac{6}{10}$$

$$\sin(\pi - \alpha) + \tan(\pi + \alpha) = \sin \alpha + \tan \alpha = \frac{6}{10} + \frac{3}{4} = \frac{27}{20}$$



- 152.1** A restrição da função cosseno ao conjunto $[0, \pi]$ é uma função injetiva pois todos os pontos do gráfico têm ordenadas distintas.

Por outro lado, $f|_A$ é sobrejetiva, pois o contradomínio de $f|_A$ ($[-2, 2]$) coincide com o conjunto de chegada.



152.2 $y = 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{y}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \arccos\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow x = 3 \arccos\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$f|_A^{-1}(x) = 3 \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

153. $y = \arctan(3x) \Leftrightarrow \tan y = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \tan y$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{3} \tan x$$

154.1 $-1 \leq 5x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}$

$$D_f = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$$

$$\arcsin\left(5 \times \frac{1}{5}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

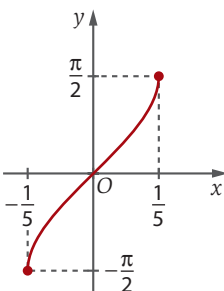
$$D_f' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- 154.2** A função f é injetiva pois todos os pontos do gráfico têm ordenadas distintas.

Por outro lado, f é sobrejetiva, pois o contradomínio de f é

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ que coincide com o}$$

conjunto de chegada.



154.3 $y = \arcsin(5x) \Leftrightarrow \sin y = 5x \Leftrightarrow x = \frac{\sin y}{5}$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5} \sin x$$

155.1 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

155.3 $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

155.2 $\arccos(-1) = \pi$

155.4 $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

155.5 $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

155.6 $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{4}\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

- 155.7** As amplitudes $x \in [\pi, 2\pi]$ não pertencem ao domínio da restrição principal da função cosseno, que é a inversa da função $\arccos$. Assim, devemos considerar as amplitudes da forma $2\pi - x \in [0, \pi]$, cujo cosseno é igual a $\cos x$.
 $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x$

- 155.8** As amplitudes $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ não pertencem ao domínio

da restrição principal da função tangente, que é a inversa da função $\arctan$. Assim, devemos considerar as amplitudes da forma $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cuja tangente é igual a $\tan x$.

$$\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - \pi)) = x - \pi$$

156.1 $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

156.2 $\sin x = \sqrt{3}$ é impossível ($-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$).

156.3 $2 \sin x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

156.4 $\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

156.5 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

156.6 $\cos x = -\sqrt{3}$ é impossível ($-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$)

156.7 $2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

156.8 $\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = -1$ é impossível.

157.1 $f(x+2\pi) = 1 + 2 \sin\left(x + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R} \wedge f(x+2\pi) = f(x)$, pelo que 2π é período de f .

157.2

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

157.3 $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, as soluções são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{29\pi}{12}$.

Cálculos auxiliares:

Para $k=0$, temos: $x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12}$

Para $k=1$, temos: $x = \frac{29\pi}{12} \vee x = \frac{37\pi}{12}$

Para $k=-1$, temos: $x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = -\frac{19\pi}{12}$

Para $k=2$, temos: $x = \frac{53\pi}{12} \vee x = \frac{61\pi}{12}$

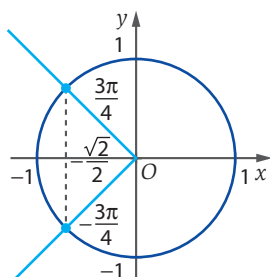
158.1 Na figura seguinte, estão marcados os lados extremidade

dos ângulos generalizados cujo cosseno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

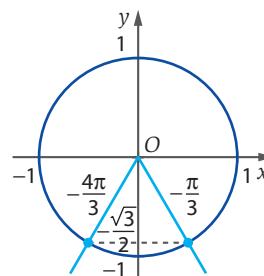
No intervalo $[-\pi, 3\pi]$, as soluções da equação são:

$$-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \text{ e } \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}.$$

São, portanto, 4 soluções.



158.2 Na figura seguinte, estão marcados os lados extremidade dos ângulos generalizados cujo seno é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, a equação tem uma solução: $-\frac{\pi}{3}$.

158.3 $2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

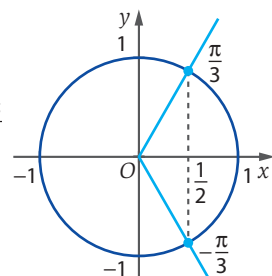
Na figura seguinte, estão marcados os lados extremidade dos ângulos generalizados cujo cosseno é $\frac{1}{2}$.

No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, 4\pi\right]$, as soluções da equação são:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\text{e } -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}.$$

São, portanto, 3 soluções.



158.4 $\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, 4\pi\right]$, as soluções da equação são: $\pi, 2\pi, 3\pi$ e 4π . São, portanto, 4 soluções.

159.1 $\cos x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[-2\pi, \pi]$, o conjunto solução é

$$\left\{-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Cálculos auxiliares:

Para $k=-1$: $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

Para $k=0$: $x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$

Para $k=1$: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

159.2 $\sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

159.3 $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

159.4 $\sin^2 x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, o conjunto solução é

$\left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}.$

Cálculos auxiliares:

Para $k = -2$: $x = \frac{\pi}{2} - 2 \times \pi = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -2 \times 2\pi = -4\pi$

Para $k = -1$: $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \vee x = -2\pi$

Para $k = 0$: $x = \frac{\pi}{2} \vee x = 0$

Para $k = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$

Para $k = 2$: $x = \frac{\pi}{2} + 2 \times \pi = \frac{5\pi}{2} \vee x = 2 \times 2\pi = 4\pi$

160. $\sqrt{2} \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sqrt{2} \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sqrt{2} \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$, o conjunto solução é

$\left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$

Cálculos auxiliares:

Para $k = 0$, temos: $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4}$

Para $k = -1$, temos:

$x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4}$

Para $k = -2$, temos:

$x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{7\pi}{2} \vee \text{---} \vee \text{---}$

Para $k = 1$, temos:

$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

161.1 Como o contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$, temos:

$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$

Assim, $D_f = [-1, 3]$.

161.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

162.1 $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

162.2 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

162.3 $|\tan x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \vee \tan x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

163.1 $\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{3}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$, o conjunto solução é $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.

163.2 $3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6}$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6}$

$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \vee \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $[-\pi, \pi]$, o conjunto solução

é $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Cálculos auxiliares:

Para $k=0$: $x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{6}$

Para $k=-1$: $x = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$

Para $k=1$: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

164.1 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

164.2 $f(x) = 4 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$, o conjunto solução é $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

Cálculos auxiliares:

Para $k=0$, temos: $x = \frac{\pi}{6}$

Para $k=-1$, temos: $x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$

Para $k=1$, temos: $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

164.3 A função tangente é crescente nos intervalos da forma

$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$. A função definida por

$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é crescente nos intervalos da forma

$\left]-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi\right[=]k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$,

pois o seu gráfico obtém-se a partir do gráfico da função

tangente pela translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

A função definida por $y = -\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é decrescente

nos intervalos da forma $]k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$, pois a

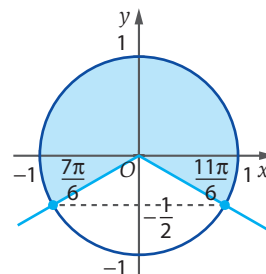
multiplicação pelo fator $-\sqrt{3}$ provoca uma simetria do gráfico em relação ao eixo Ox . Concluindo, a função f é decrescente nos intervalos da forma

$]k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$, pois o gráfico de f obtém-se a partir do gráfico da função definida por

$y = -\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ pela translação de vetor de coordenadas $(0, 1)$.

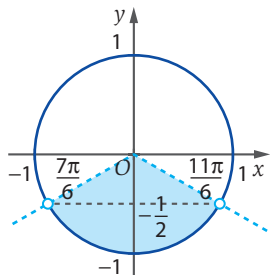
165.1 $2 \sin x \geq -1 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$

Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$.



165.2 $2 \sin x < -1 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2}$

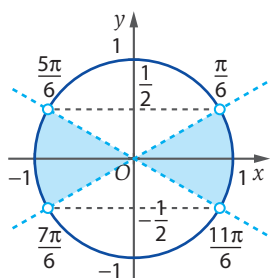
Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.



165.3 $|\sin x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2} \wedge \sin x > -\frac{1}{2}$

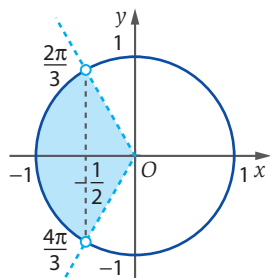
Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é

$\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$.



165.4 $2 \cos x < -1 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2}$

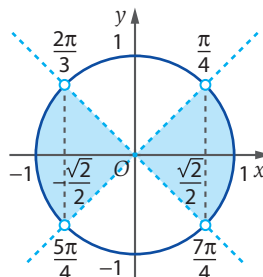
Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.



165.5 $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é

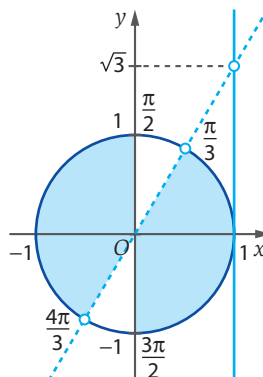
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.



165.6 $\tan x < \sqrt{3}$

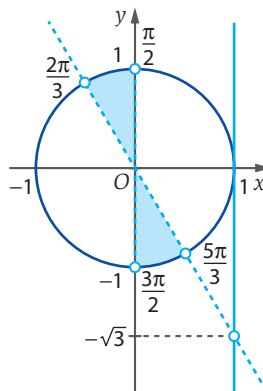
Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.



165.7 $\tan x < -\sqrt{3}$

Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

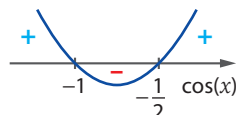


166. $2 \cos^2 x > -3 \cos x - 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

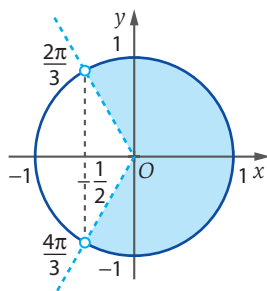
$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$



$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x < -1 \vee \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$

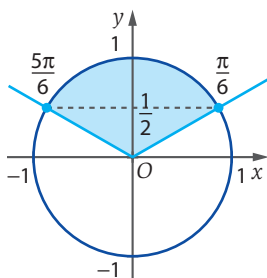
Em $[0, 2\pi[$, o conjunto solução é $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$.



167. $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$

(pois $\sin x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução é $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.



168. $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\Rightarrow \alpha \in 4^\circ Q. \Rightarrow \cos \alpha > 0 \wedge \sin \alpha < 0$

Logo: $\cos \alpha \times \tan \alpha < 0$; $\cos \alpha \times \sin \alpha < 0$; $\cos \alpha + \sin \alpha$ pode ser positivo ou negativo; $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$.

Opção correta: D

169. $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Opção correta: C

170. $\sin^2 x - \tan^2 x = \sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \times \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\sin^2 x (\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = -\sin^2 x \times \tan^2 x$$

Opção correta: B

171. $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$

Como $\alpha \in 2^\circ Q.$, tem-se $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha \times \cos \alpha = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{12}{25}$$

Opção correta: C

172. $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{9}{25}$

Como $\alpha \in 3^\circ Q.$, tem-se $\sin \beta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \tan \beta + \sin \beta = \frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{20}$$

Opção correta: A

173. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0$ e

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) > 0 \Leftrightarrow -\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$$

Logo, $\alpha \in 4^\circ Q.$

Opção correta: D

174. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{12}{13} \Leftrightarrow -\cos \beta = -\frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{25}{169}$$

Como $\alpha \in 2^\circ Q.$, tem-se $\sin \beta = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

Opção correta: D

175. Dado que $\alpha \in 2^\circ Q.$, tem-se $\sin \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$. Assim, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha > 0; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha < 0;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha > 0; \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha > 0$$

Opção correta: B

176. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(\pi - \alpha) + \tan(-\alpha) =$

$$= -\cos\alpha - 2(-\cos\alpha) + (-\tan\alpha) =$$

$$= \cos\alpha - \tan\alpha = \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Opção correta: C

177. $\sin x \times \cos x > 0 \Rightarrow x \in 1.^\circ \text{ Q.} \vee x \in 3.^\circ \text{ Q.}$; a função cosseno é crescente no 3.º quadrante e no 4.º quadrante. Assim, o quadrante em questão é o terceiro. Neste quadrante, a função seno também é crescente (D). As outras opções são falsas.

Opção correta: D

178. A opção (A) é falsa, pois o seno de um ângulo não é proporcional à sua amplitude;
a opção (B) é falsa, pois $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$;
a opção (C) é verdadeira, pois nos 1.º e 2.º quadrantes o seno é positivo;
a opção (D) é falsa, pois há ângulos cujo seno é igual a 1, por exemplo, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Opção correta: C

179. A opção (A) é verdadeira, pois, por exemplo, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} > 0$;

(B) é verdadeira, pois $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge \cos(-x) = \cos x$;
a opção (C) é verdadeira, pois nos 2.º e 3.º quadrantes o cosseno é negativo; a opção (D) é falsa, pois $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.

Opção correta: D

180. $\sin\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: A

181. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 5 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 7$$

Opção correta: D

182. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Logo, o máximo, nesse intervalo, é 1.

Opção correta: B

183. A diferença entre os dois zeros dados é π , pelo que o período positivo mínimo desta função é π .

Opção correta: B

184. Apenas a afirmação III é verdadeira. A afirmação I é falsa devido à quantificação $\forall k \in \mathbb{R}$, que deveria ser $\forall k \in \mathbb{Z}$. A afirmação II é falsa, pois π não é período da função cosseno (deveria ser $\cos\beta = \cos(\beta + 2k\pi)$ em vez de $\cos\beta = \cos(\beta + k\pi)$).

Opção correta: C

185. O período positivo mínimo da função cosseno é 2π . Tendo em conta que o gráfico da função dada se pode obter a partir do gráfico da função cosseno através de uma contração

horizontal de fator $\frac{1}{\frac{\pi}{4}}$, seguida de uma dilatação vertical

de coeficiente $-\sqrt{2}$, de uma simetria de eixo Ox e uma translação. Assim, o período positivo mínimo da função considerada é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ (das transformações identificadas, ape-

nas a contração horizontal é relevante para a determinação do período).

Opção correta: A

186. Apenas a opção (C) é verdadeira.

Opção correta: C

187. Por observação do gráfico, verifica-se que a diferença entre dois zeros consecutivos é $\frac{\pi}{2}$, valor que corresponde ao período positivo mínimo.

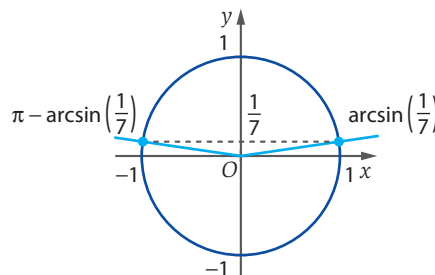
Opção correta: A

188. Na figura abaixo estão representados os lados extremidade das soluções dos ângulos cujas amplitudes são soluções da equação $\sin x = \frac{1}{7}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, 8\pi\right]$, a equação tem

7 soluções: uma em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ e duas em cada um dos

seguintes intervalos $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ e $[6\pi, 8\pi]$.

Opção correta: B



189. Temos: $\sin(\pi + \alpha) = a \Leftrightarrow -\sin\alpha = a \Leftrightarrow \sin\alpha = -a$;

$$\sin(-\alpha) = a \Leftrightarrow -\sin\alpha = a \Leftrightarrow \sin\alpha = -a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = a \Leftrightarrow \cos\alpha = a$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = a \Leftrightarrow -\cos\alpha = a \Leftrightarrow \cos\alpha = -a$$

Opção correta: D

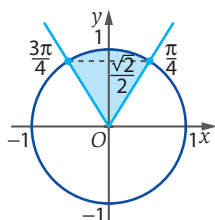
190. $\sqrt{2} \sin x \geq 1 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Opção correta: C

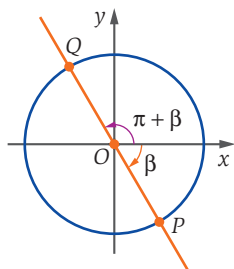


191.1 O ponto Q pertence à circunferência trigonométrica pois

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 1.$

Com efeito, tem-se $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1.$

191.2 O ponto P é o simétrico do ponto Q em relação à origem do referencial, pelo que tem coordenadas simétricas às do ponto Q , ou seja, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$



191.3 $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

($\cos \beta$ é a ordenada do ponto P)

$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta = -\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

($\sin \beta$ é a abscissa do ponto P)

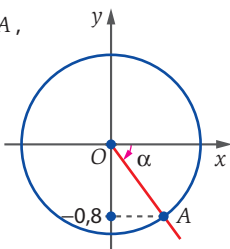
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

192. Sendo $-0,8$ a ordenada do ponto A , temos que $\sin \alpha = -0,8$.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (-0,8)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 0,36$



Como $\alpha \in 4.^\circ Q.$, $\cos \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6$

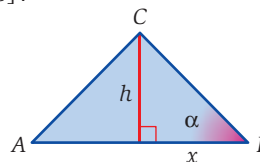
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$

$\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \tan(-\alpha) =$

$= -\cos \alpha + (-\sin \alpha) + (-\tan \alpha)$

$= -0,6 + 0,8 - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{23}{15}$

193.1 Seja x metade do comprimento da base $[AB]$ do triângulo $[ABC]$.



Tem-se $\cos \alpha = \frac{x}{BC} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = \cos \alpha.$

Logo, $\overline{AB} = 2 \cos \alpha$, ou seja, $f(\alpha) = 2 \cos \alpha$.

193.2 Seja h a medida do comprimento da altura do triângulo $[ABC]$ referente ao lado $[AB]$.

Tem-se $\sin \alpha = \frac{h}{BC} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \sin \alpha.$

Logo, $g(\alpha) = \frac{2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \cos \alpha \sin \alpha.$

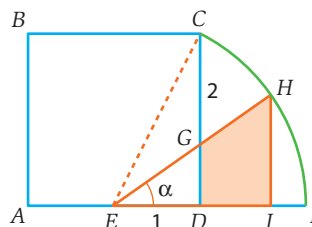
193.3 $D_f = D_g = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
(para garantir a existência do triângulo $[ABC]$)

193.4 A função g é não injetiva pois, por exemplo, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right).$

193.5 $2 \cos \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
 $\alpha \in D_f$

193.6 Não, pois a equação $\cos \alpha \sin \alpha = 1$ é impossível;
em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos \alpha < 1$ e $0 < \sin \alpha < 1$,
pelo que $0 < \cos \alpha \sin \alpha < 1$.

194.1 A área do trapézio $[HIDG]$ é dada por $\frac{\overline{GD} + \overline{HI}}{2} \times \overline{DI}.$



Tem-se $\tan \alpha = \frac{\overline{GD}}{1} \Leftrightarrow \overline{GD} = \tan \alpha$.

Para obter $\overline{EH}$, observemos que $\overline{EH} = \overline{EC}$. Para obter $\overline{EC}$, podemos considerar o triângulo $[EDC]$ e aplicar o teorema de Pitágoras.

$$\overline{EC}^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{EC} = \sqrt{5}$$

$\overline{EC} > 0$

Tem-se também:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \overline{HI} = \overline{EH} \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{HI} = \sqrt{5} \sin \alpha$$

$$\text{e } \cos \alpha = \frac{\overline{EI}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \overline{EI} = \overline{EH} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \overline{DI} = \sqrt{5} \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{DI} = \sqrt{5} \cos \alpha - 1$$

Concluindo, $A(\alpha) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{5} \sin \alpha}{2} \times (\sqrt{5} \cos \alpha - 1)$

- 194.2** Como o ponto H pertence ao arco de circunferência CF , a amplitude α pode variar entre 0 (H coincidente com F) e $\arctan(2)$ (H coincidente com C). Para que, em qualquer posição do ponto H , exista trapézio $[HIDG]$, α não pode tomar os valores extremos considerados. Assim, o domínio é $]0, \arctan(2)[$.

194.3
$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{5} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} \times \left(\sqrt{5} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1\right) =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{5} \times \frac{1}{2}}{2} \times \left(\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3} \times 5}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{11\sqrt{3}}{24}$$

- 195.1** Para $x \geq 0$, x pode tomar qualquer valor real. Para $x < 0$, x apenas pode tomar os valores do domínio da função tangente. Portanto, temos:

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 195.2** $h(x) = 0 \Leftrightarrow (\tan x = 0 \wedge x < 0) \vee (\sin x = 0 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow (x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x < 0) \vee (x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0)$$
- $$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

195.3 $h(x) = 1 \Leftrightarrow (\tan x = 1 \wedge x < 0) \vee (\sin x = 1 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x < 0 \right) \vee \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^- \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$$

O conjunto solução da equação é:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^- \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

195.4 $h(x) = 2 \wedge x \in]-3\pi, 2\pi[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\tan x = 2 \wedge x \in]-3\pi, 0[) \vee (\sin x = 2 \wedge x \in [0, 2\pi])$$

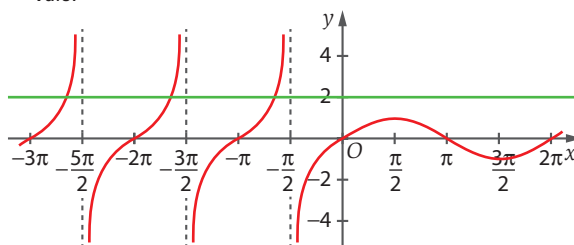
impossível

$$\Leftrightarrow \tan x = 2 \wedge x \in]-3\pi, 0[$$

Atendendo à periodicidade da função tangente, a equação $\tan x = 2$ tem 3 soluções no intervalo $]-3\pi, 0[$.

Assim, a equação $h(x) = 2$ tem 3 soluções no intervalo $]-3\pi, 2\pi[$.

Em termos gráficos, as soluções da equação $h(x) = 2$ no intervalo $]-3\pi, 2\pi[$ são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico com a reta de equação $y = 2$, nesse intervalo.



- 196.1** Sejam h a altura do trapézio $[ABCD]$ e E o ponto médio do segmento $[BC]$. A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por

$$A(\alpha) = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times h.$$

Tem-se:

- $\overline{AD} = \overline{OB} + \frac{1}{2} \overline{OB} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

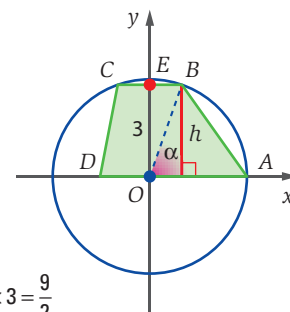
- $\sin \alpha = \frac{h}{\overline{OB}} \Leftrightarrow h = 3 \sin \alpha$

- $\cos \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{BE} = 3 \cos \alpha$

- $\overline{BC} = 2\overline{BE} = 6 \cos \alpha$

Tem-se, portanto,

$$A(\alpha) = \frac{\frac{9}{2} + 6 \cos \alpha}{2} \times 3 \sin \alpha = 9 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{27}{4} \sin \alpha.$$



$$\begin{aligned} 196.2 \quad A\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 9 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{27}{4} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{8} \end{aligned}$$

$$196.3 \quad \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{17}$$

$$\text{Com } \alpha \in 1.^\circ \text{Q., } \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 9 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{27}{4} \sin \alpha = \\ &= 9 \times \frac{\sqrt{17}}{17} \times \frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{27}{4} \times \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{36}{17} + \frac{27\sqrt{17}}{68} \end{aligned}$$

196.4 O trapézio $[ABCD]$ é retângulo se $\overline{CE} = \overline{DO} = \frac{1}{2} \overline{OB}$.

Nesta situação, tem-se $\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{OB}$ e, portanto, como $\cos \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}}$, tem-se $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Obtenhamos agora o valor de $\sin \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{Como } \alpha \in 1.^\circ \text{Q., tem-se } \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

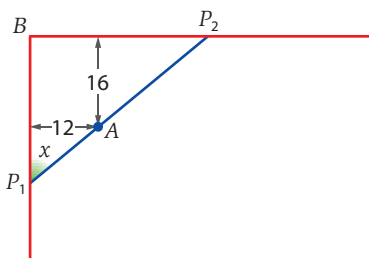
$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 9 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{27}{4} \sin \alpha = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{27}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{8} = \frac{45\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Alternativamente, poder-se-ia ter seguido a resolução a partir do resultado $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, concluindo que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e calculando em consequência $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

197.1 De acordo com os dados representados na figura, tem-se

$$\sin x = \frac{12}{AP_1} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\sin x} \text{ e}$$

$$\cos x = \frac{16}{AP_2} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\cos x}.$$



Assim, tem-se:

$$c(x) = \overline{P_1P_2} = \overline{AP_1} + \overline{AP_2} = \frac{12}{\sin x} + \frac{16}{\cos x} = \frac{12 \cos x + 16 \sin x}{\sin x \cos x}$$

197.2 Sendo $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$, tem-se $x = \frac{\pi}{4}$ ($\tan x = 1$).

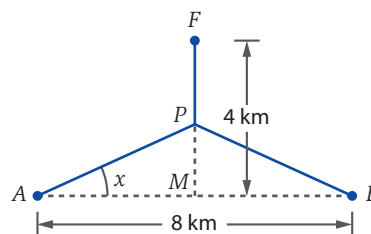
O comprimento da ponte é, portanto,

$$\begin{aligned} c\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{12 \cos \frac{\pi}{4} + 16 \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{14\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 28\sqrt{2} \approx 39,6 \text{ metros.} \end{aligned}$$

198.1 Tem-se:

$$\tan x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4 \tan x, \quad \overline{FP} = 4 - \overline{PM} = 4 - 4 \tan x$$

$$\text{e } \cos x = \frac{4}{PA} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$$



O comprimento total da canalização é dado por

$$\overline{FP} + \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{FP} + 2\overline{AP} = 4 - 4 \tan x + 2 \times \frac{4}{\cos x}$$

ou seja,

$$g(x) = 4 - 4 \times \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{8}{\cos x} = 4 + \frac{8 - 4 \sin x}{\cos x}$$

$$198.2 \quad g(0) = 4 + \frac{8 - 4 \sin 0}{\cos 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 12$$

Quando $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto M , sendo, portanto, o comprimento da canalização igual a 12 km.

199. Antes da escrita da composição propriamente dita é necessário proceder à determinação de alguns pontos notáveis do gráfico da função f .

Começemos por determinar a temperatura no início do dia:

$$f(0) = 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(0+7)}{12}\right) = 17 + 4 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \approx 16^\circ \text{C}$$

Determinemos os extremos da função. O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$. Assim, temos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) \leq 21 \Leftrightarrow 13 \leq f(t) \leq 21$$

O mínimo absoluto é 13 e o máximo absoluto é 21.

Determinemos os valores de t para os quais a função atinge o máximo:

$$f(t) = 21 \Leftrightarrow 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 21$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t+7)}{12} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t+7 = 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -7 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 24]$, f toma o valor máximo em $t = -7 + 24 = 17$.

Determinemos, agora, os valores de t para os quais a função atinge o mínimo:

$$f(t) = 13 \Leftrightarrow 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t+7)}{12} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t+7 = 12 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 5 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 24]$, f toma o valor mínimo em $t = 5$.

Determinemos os intervalos de tempo para os quais $f(t) \geq 19$. Começemos por resolver $f(t) = 19$.

$$f(t) = 19 \Leftrightarrow 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = \frac{1}{2}$$

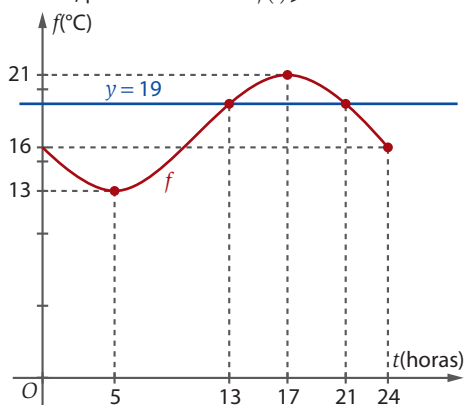
$$\Leftrightarrow \frac{\pi(t+7)}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi(t+7)}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t+7 = 4 + 24k \vee t+7 = -4 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -3 + 24k \vee t = -11 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 24]$, f toma o valor 19 em $t = -3 + 24 = 21$ e em $t = -11 + 24 = 13$.

Esboçando o gráfico, atendendo aos resultados até aqui obtidos, podemos resolver $f(t) \geq 19$.



$$f(t) \geq 19 \Leftrightarrow t \in [13, 21]$$

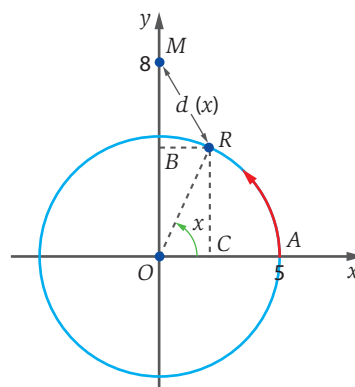
Exemplo de composição:

De acordo com o modelo dado, nesse dia, a temperatura do lago às 0 horas é de cerca de 16°C . A temperatura diminui entre as 0 e as 5 horas, atingindo neste instante seu valor mínimo, 13°C . Entre as 5 e as 17 horas a temperatura aumenta, até atingir o seu valor máximo, 21°C . Entre as 17 e as 24 horas, a temperatura volta a diminuir, sendo o seu valor às 24 horas de cerca de 16°C .

Admitindo que tomar banho nesse lago só é agradável se a temperatura da água não for inferior a 19°C , as melhores horas para se tomar banho são as que ficam compreendidas entre as 13 e as 21 horas.

- 200.1** Considerando um referencial ortonormado Oxy com origem no ponto O , de forma que A pertença ao eixo Ox e M ao eixo Oy , as coordenadas do ponto R são:

$$R(5 \cos x, 5 \sin x)$$



Nesse mesmo referencial, o ponto M tem coordenadas:

$$M(0, 8)$$

Assim, para cada posição da Rita, a distância da mãe à Rita é dada por

$$d(x) = \sqrt{(-5 \cos x)^2 + (8 - 5 \sin x)^2}$$

Simplificando a expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{25 \cos^2 x + 64 - 80 \sin x + 25 \sin^2 x} \\ &= \sqrt{25 (\cos^2 x + \sin^2 x) + 64 - 80 \sin x} \\ &= \sqrt{89 - 80 \sin x} \text{ como queríamos mostrar.} \end{aligned}$$

200.2 $d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$

O ponto R fica sobre $[OM]$, pelo que $\overline{RM}$ é a diferença, em metros, entre 8 e 5 (sendo 5 o raio da circunferência).

200.3

Ao elevar ambos os membros da equação ao quadrado obtemos uma equação equivalente, pois $-80 \leq 80 \sin x \leq 80$ e, portanto, $89 - 80 \sin x > 0$.

$$d(x) = 7 \Leftrightarrow \sqrt{89 - 80 \sin x} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{89 - 80 \sin x})^2 = 7^2 \Leftrightarrow 89 - 80 \sin x = 49$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que o valor de x é não negativo, temos

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{N}_0$$

201.1 g tem período 6π , pois

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 6\pi \in \mathbb{R} \wedge g(x + 6\pi) = g(x).$$

Com efeito, tem-se

$$g(x + 6\pi) = \cos\left(\frac{x + 6\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

201.2 $D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2\pi x + \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} =$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

h tem período $\frac{1}{2}$, pois

$$\forall x \in D_h, x + \frac{1}{2} \in D_h \wedge h\left(x + \frac{1}{2}\right) = h(x).$$

Com efeito, tem-se:

- Sendo $x \in D_h$, tem-se $x \neq -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

tendo-se também considerando $k = k' - 1$,

$$x \neq -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{k' - 1}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{k'}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \neq -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{k'}{2}, \text{ ou seja, } x + \frac{1}{2} \in D_h.$$

- $h\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right) + \alpha\right) = \tan(2\pi x + \pi + \alpha) =$
 $= \tan(2\pi x + \alpha) = h(x)$

201.3 $h\left(-\frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(2\pi \times \left(-\frac{1}{6}\right) + \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

201.4 A função seno é periódica e o seu período positivo mínimo é 2π . O gráfico da função f obtém-se do gráfico da função seno através de uma contração horizontal de fator $\frac{1}{2}$.

Assim, a função f é periódica e o seu período positivo mínimo é $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Com efeito, verifica-se:

$$f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x).$$

202.1 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + 1 - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

As soluções da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ são: $0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ e 2π .

Os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g têm coordenadas:

$$(0, f(0)) = (0, 1) \quad (\pi, f(\pi)) = (\pi, 1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{6}, f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{11\pi}{6}, f\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 1)$$

202.2 $f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + 1 = 0 \vee \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

As soluções da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ são:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \text{ e } \frac{7\pi}{4}.$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

202.3 $|f(x) - g(x)| = 1 \Leftrightarrow |\sin x + 1 - \cos^2 x + \sin^2 x| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\sin x + 2 \sin^2 x| = 1$

A equação $\sin x + 2 \sin^2 x = -1$ é impossível.

$\Leftrightarrow \sin x + 2 \sin^2 x = 1 \vee \sin x + 2 \sin^2 x = -1$

$\Leftrightarrow \sin x + 2 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

As soluções da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ são: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Os pontos nas condições enunciadas são os pontos dos

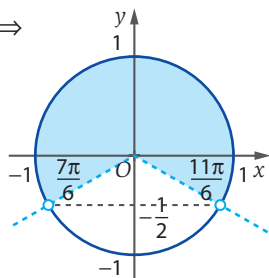
gráficos de abscissas $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

202.4 $f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x + 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$

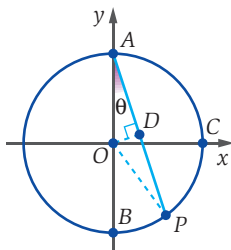
Em $[0, 2\pi]$, o conjunto solução da inequação é:

$\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$



203.1 Sendo o ponto D a projeção ortogonal da origem do referencial no segmento de reta $[AP]$, conforme se pode observar na figura abaixo, temos:

$\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{AD}}{r} \Leftrightarrow \overline{AD} = r \cos \theta$



Sendo o triângulo $[AOP]$ isósceles ($\overline{AO} = \overline{OP} = r$), temos $\overline{AD} = \overline{DP}$, pois $[OD]$ é a altura desse triângulo referente ao lado $[AP]$. Portanto:

$d = \overline{AP} = 2 \times \overline{AD} = 2r \cos \theta$, como queríamos provar.

Alternativamente

Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{AP} \times \cos \theta \Leftrightarrow$

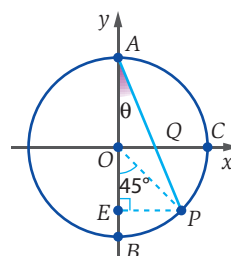
$\Leftrightarrow r^2 = r^2 + d^2 - 2 \times r \times d \cos \theta$

$\Leftrightarrow d^2 = 2rd \cos \theta \Leftrightarrow d = 2r \cos \theta$

203.2 Seja o ponto E a projeção ortogonal do ponto P no eixo Oy . Sendo $\overline{BP} = \overline{PC}$, a amplitude do ângulo BOP é 45° . Assim, temos:

$\cos 45^\circ = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OE} = 2 \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\overline{EP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$



Aplicando o teorema de Pitágoras, para determinar d :

$\overline{AP}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{AE}^2 \Leftrightarrow d^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d^2 = 2 + 4 + 4\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow d^2 = 8 + 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow d = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$

Concluindo, $d = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$, cujo arredondamento às centésimas é 3,70.

203.3 Se $d = r$, então $d = 2d \cos \theta$, ou seja, $\cos \theta = \frac{1}{2}$. Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tem-se $\theta = \frac{\pi}{3}$.

O triângulo $[AOP]$ é equilátero, pelo que a sua altura é dada, em função de r , que é a medida do seu lado, por

$\frac{\sqrt{3}}{2}r$ e, portanto, a sua área é dada por $\frac{\sqrt{3}}{2}r \times r$.

Simplificando, a área do triângulo $[AOP]$ é dada em função de r , por $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

203.4 No triângulo $[ABP]$, retângulo em P , pois está inscrito numa semicircunferência, podemos estabelecer que:

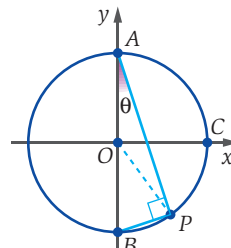
$\cos \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{d}{2r}$.

Com $r = 1$, $d = \sqrt{3}$

e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

O comprimento do arco BP é $\theta \times r = \frac{\pi}{6} \times 1 = \frac{\pi}{6}$.



203.5

a. Relativamente ao triângulo $[AQO]$, podemos escrever:

$$\tan \theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OQ}}{r},$$

o que nos permite obter a base do triângulo $[OQP]$:

$$\overline{OQ} = r \tan \theta.$$

Sendo o ponto E a projeção ortogonal do ponto P no eixo Oy , conforme se pode observar na figura seguinte, temos:

- $\widehat{EOP} = 2\theta$ (ângulo ao centro correspondente ao ângulo inscrito OAP)

$$\cos(2\theta) = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OE}}{r},$$

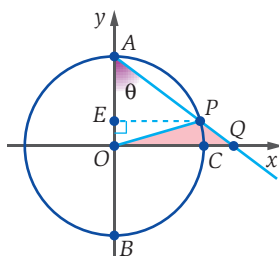
$$\text{válida para } 0 < \theta < \frac{\pi}{4},$$

o que nos permite obter a altura do triângulo $[OQP]$:

$$\overline{OE} = r \cos(2\theta).$$

Nos casos em que $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos: $\overline{OE} = -d \cos(2\theta)$,

pois $\widehat{EOP} = \pi - 2\theta$ e $\cos(\pi - 2\theta) = -\cos(2\theta)$.



Assim, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, a altura do triângulo $[OQP]$ é dada

$$\text{por: } \overline{OE} = r |\cos(2\theta)|.$$

(O caso $\theta = \frac{\pi}{4}$, em que a área do triângulo é nula, dado que

não existe triângulo, também está contemplado nesta expressão, pois a altura dada pela expressão é nula.)

Portanto, a área do triângulo $[OQP]$ é dada por:

$$A(\theta) = \frac{\overline{OQ} \times \overline{OE}}{2} = \frac{r \tan \theta \times r |\cos(2\theta)|}{2} = \frac{1}{2} r^2 \tan \theta |\cos(2\theta)|$$

$$\text{b. } A(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} r^2 \tan \theta |\cos(2\theta)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = 0 \vee \cos(2\theta) = 0$$

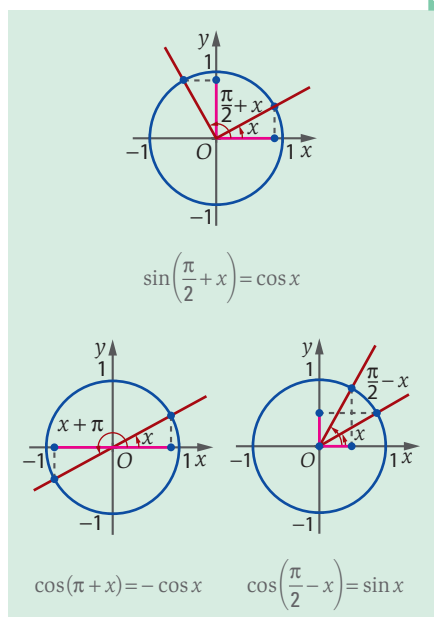
Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \theta = 0$ não tem soluções e $\cos(2\theta) = 0$

tem como solução $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Trata-se da situação em que os pontos P e Q coincidem com o ponto C , pelo que deixa de existir o triângulo $[OQP]$.

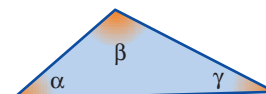
TESTE – PÁG. 118

$$\begin{aligned} 1. A(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= \cos x - \cos x + \sin x = \sin x \end{aligned}$$



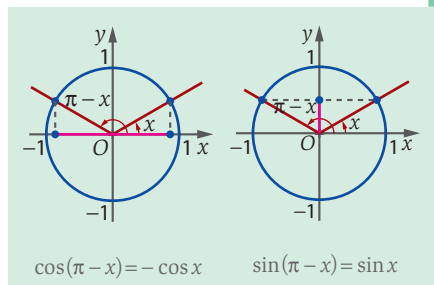
Opção correta: A

$$2. \alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - (\beta + \gamma)$$



$$\cos \alpha = \cos(\pi - (\beta + \gamma)) = -\cos(\beta + \gamma)$$

$$\sin \alpha = \sin(\pi - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma)$$



Opção correta: B

RESOLUÇÕES

3. $\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{17\pi}{6} - 2\pi\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

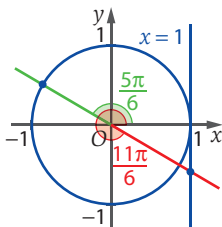
Em $[0, 2\pi]$, os ângulos cuja

tangente é igual a $\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

têm amplitudes: $\frac{5\pi}{6}$ e

$$\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

Opção correta: C



4. Seja $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$, então $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

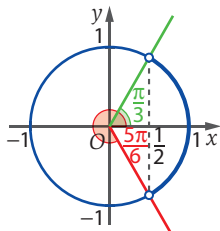
$$\text{Assim, } \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{3}{5}$$

Opção correta: D

5. $1 - 2 \cos x < 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$

Observemos na circunferência trigonométrica o conjunto solução desta inequação (no intervalo $[0, 2\pi]$).

Trata-se do conjunto das amplitudes dos ângulos cujo lado extremidade intersesta a circunferência trigonométrica no arco marcado a azul na figura.



$$\text{Temos, portanto, } S = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi\right\}.$$

Opção correta: A

6. $g(x) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

O período positivo mínimo da função definida por $f(x) = \sin x$

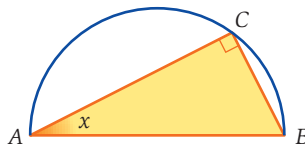
é 2π . Logo, o período positivo mínimo de g é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ (tendo

em conta que o fator $\frac{\pi}{3}$ provoca uma contração horizontal de

coeficiente $\frac{1}{\frac{\pi}{3}}$ no gráfico de g face ao gráfico de f .)

Opção correta: C

7.1 $\overline{AB} = 2$; $\hat{ACB} = \frac{\pi}{2}$



$$\sin x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \cos x$$

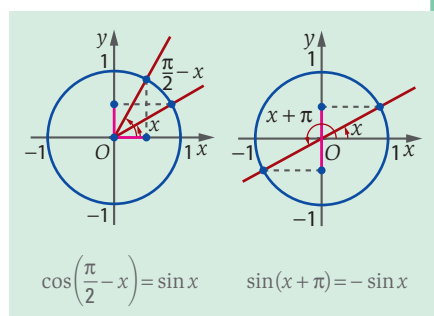
$$A(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2 \cos x \times 2 \sin x}{2} = 2 \cos x \sin x$$

7.2 Como o ponto C pertence à semicircunferência e nunca coincide com A nem com B , $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assim,

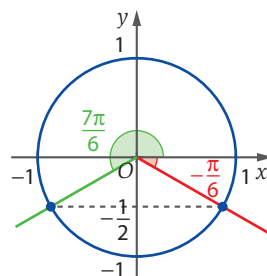
$$D_A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

8. $\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Leftrightarrow -\sin x - \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$



$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Em $\left]-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right[$, a equação $\sin x = -\frac{1}{2}$ tem o seguinte con-

$$\text{junto solução: } S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

$$9.1 \quad D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$9.2 \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ = \sqrt{6} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6} \\ g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ = \sqrt{6} + \sqrt{2} \times (-\sqrt{3}) = \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$$

Como $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) \neq g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) \neq -g\left(\frac{\pi}{6}\right)$, a função g não é par nem ímpar.

$$9.3 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan(2x) = 0 \Leftrightarrow \tan(2x) = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan(2x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$9.4 \quad g(x) = \sqrt{24} \Leftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{2}\tan(2x) = \sqrt{24} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{\sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \tan(2x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$10.1 \quad T(1) = 18 + 3 \sin\left(\frac{14\pi}{12}\right) = 18 + 3 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 18 + 3 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \\ = 18 - 3 \sin\frac{\pi}{6} = 18 - 3 \times \frac{1}{2} = 16,5^\circ\text{C}$$

10.2 Sabemos que o contradomínio da função seno é $[-1, 1]$.

Determinemos o contradomínio de T :

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi(t+13)}{12}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin\left(\frac{\pi(t+13)}{12}\right) \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 15 \leq 18 + 3 \sin\left(\frac{\pi(t+13)}{12}\right) \leq 21$$

A temperatura máxima da água do lago foi 21°C e a temperatura mínima foi 15°C .

$$10.3 \quad T(t) = 15 \Leftrightarrow 18 + 3 \sin\left(\frac{\pi(t+13)}{12}\right) = 15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi(t+13)}{12}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t+13)}{12} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \pi(t+13) = 18\pi + 24k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow t+13 = 18 + 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 5 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 24]$, a solução de $T(t) = 15$ é 5.

A água do lago esteve à temperatura mínima às 5 horas.

Sucessões

MAJORANTES E MINORANTES DE UM CONJUNTO DE NÚMEROS REAIS

- 156.1** Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -2]$; conjunto dos majorantes: $[6, +\infty[$; mínimo: -2 ; não tem máximo.
- 156.2** Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -5]$; conjunto dos majorantes: $[4, +\infty[$; não tem mínimo; máximo: 4 .
- 156.3** Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -3]$; não tem majorantes; mínimo: -3 ; não tem máximo.
- 156.4** Não tem minorantes; conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; não tem mínimo nem máximo.
- 156.5** Não tem minorantes; conjunto dos majorantes: $[-3, +\infty[$; não tem mínimo; máximo: -3 .
- 156.6** Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 1]$; conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; mínimo: 1 ; máximo: 1 .
- 157.1** Limitado; por exemplo, 2 é minorante e 4 é majorante.
- 157.2** Limitado; $\forall x \in A, -1 \leq x \leq 1$ ($|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$).
- 157.3** Não limitado; A não é majorado.
- 157.4** Não limitado; $A = \mathbb{R}$, pelo que não tem majorantes nem minorantes.
- 158.1** $\frac{11}{2}$, por exemplo. **158.3** $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$
- 158.2** -3 , por exemplo. **158.4** $]-\infty, -3]$
- 159.1** $1 \leq |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \wedge |x-1| \geq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-1 \leq 2 \wedge x-1 \geq -2) \wedge (x-1 \geq 1 \vee x-1 \leq -1)$
 $\Leftrightarrow (x \leq 3 \wedge x \geq -1) \wedge (x \geq 2 \vee x \leq 0)$
 $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq 3$
 Na forma de reunião de intervalos, temos
 $B = [-1, 0] \cup [2, 3]$
 Conjunto dos majorantes: $[3, +\infty[$; conjunto dos minorantes: $]-\infty, -1]$.

159.2 O máximo é 3 e o mínimo é -1 .

160. Resolvamos a inequação $|x| - x^2 + 2 > 1$, considerando dois casos distintos: $x \geq 0$ e $x < 0$.

Para $x \geq 0$: $|x| - x^2 + 2 > 1 \Leftrightarrow x - x^2 + 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$

Temos:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Então, como $a = 1 > 0$:

$$x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Para $x < 0$, temos:

$$|x| - x^2 + 2 > 1 \Leftrightarrow -x - x^2 + 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 < 0$$

Temos:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Logo: } x^2 + x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Concluindo a resolução, temos:

$$|x| - x^2 + 2 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \wedge x \geq 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \wedge x < 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Na forma de reunião de intervalos, temos

$$C = \left] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right[.$$

$$\text{Conjunto dos minorantes: }]-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}];$$

$$\text{Conjunto dos majorantes: } \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[.$$

O conjunto C não tem máximo nem mínimo

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin C \text{ e } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \notin C \right).$$

$$\mathbf{162.1} \quad a_1 = \frac{1+1}{2 \times 1} = 1; \quad a_2 = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{162.2} \quad b_1 = \frac{3 \times 1}{1+1} = \frac{3}{2}; \quad b_2 = \frac{3 \times 2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2; \quad b_3 = \frac{3 \times 3}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$\mathbf{162.3} \quad c_1 = \frac{(-1)^1 \times 1}{5 \times 1} = -\frac{1}{5}; \quad c_2 = \frac{(-1)^2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{1}{5}; \quad c_3 = \frac{(-1)^3 \times 3}{5 \times 3} = -\frac{1}{5}$$

$$\mathbf{162.4} \quad d_1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1; \quad d_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}; \quad d_3 = 1$$

$$\mathbf{163.1} \quad a_1 = \frac{1+1}{3 \times 1} = \frac{2}{3}; \quad a_2 = \frac{2+1}{3 \times 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3 \times 3} = \frac{4}{9}; \quad a_4 = \frac{4+1}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbf{163.2} \quad a_{n+1} = \frac{n+1+1}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3}$$

$$\begin{aligned}
 163.3 \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} = \\
 &= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)} \\
 &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$164. \quad a_1 = (1-2)^2 = 1; \quad a_2 = (2-2)^2 = 0; \quad a_3 = (3-2)^2 = 1$$

A sucessão (a_n) é não monótona, pois, $a_1 > a_2$ mas $a_2 < a_3$.

$$b_1 = 1^2 - 8 \times 1 = -7; \quad b_2 = 2^2 - 8 \times 2 = -12;$$

$$b_3 = 3^2 - 8 \times 3 = -13; \quad b_4 = 4^2 - 8 \times 4 = -16;$$

$$b_5 = 5^2 - 8 \times 5 = -15$$

A sucessão (b_n) é não monótona, pois, $b_3 > b_4$ mas $b_4 < b_5$.

$$\begin{aligned}
 165.1 \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} = \\
 &= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)} \\
 &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, logo (u_n) é decrescente.

$$165.2 \quad w_{n+1} - w_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n < 0$, logo (w_n) é decrescente.

$$\begin{aligned}
 165.3 \quad v_{n+1} &= \frac{3(n+1) - 4}{n+1} = \frac{3n - 1}{n+1} \\
 v_{n+1} - v_n &= \frac{3n - 1}{n+1} - \frac{3n - 4}{n} = \frac{n(3n - 1) - (n+1)(3n - 4)}{n(n+1)} = \\
 &= \frac{3n^2 - n - (3n^2 - 4n + 3n - 4)}{n(n+1)} = \frac{3n^2 - n - 3n^2 + n + 4}{n(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$, logo (v_n) é crescente.

$$\begin{aligned}
 165.4 \quad t_{n+1} &= \frac{2(n+1) + 1}{2(n+1) - 1} = \frac{2n + 3}{2n + 1} \\
 t_{n+1} - t_n &= \frac{2n + 3}{2n + 1} - \frac{2n + 1}{2n - 1} = \\
 &= \frac{(2n - 1)(2n + 3) - (2n + 1)(2n + 1)}{(2n + 3)(2n - 1)} = \\
 &= \frac{4n^2 - 6n - 2n - 3 - (4n^2 + 4n + 1)}{(2n + 3)(2n - 1)} = \\
 &= \frac{4n^2 + 6n - 2n - 3 - 4n^2 - 4n - 1}{(2n + 3)(2n - 1)} = \frac{-4}{(2n + 3)(2n - 1)}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} - t_n > 0$, logo (t_n) é decrescente.

$$166.1 \quad Q_n: 1, 4, 9, 16, 25$$

$$L_n: 16, 8, \frac{16}{3}, 4, \frac{16}{5}$$

$$A_n: 256, 64, \frac{256}{9}, 16, \frac{256}{25}$$

$$P_n: 64, 32, \frac{64}{3}, 16, \frac{64}{5}$$

$$166.2 \quad Q_n = n^2; \quad L_n = \frac{16}{n}; \quad A_n = \left(\frac{16}{n}\right)^2; \quad P_n = \frac{64}{n}$$

$$166.3 \quad Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} - Q_n > 0$, logo (Q_n) é crescente.

$$\begin{aligned}
 L_{n+1} - L_n &= \frac{16}{n+1} - \frac{16}{n} = \frac{16n - 16(n+1)}{n(n+1)} = \\
 &= \frac{16n - 16n - 16}{n(n+1)} = \frac{-16}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} - L_n < 0$, logo (L_n) é decrescente.

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} - A_n &= \left(\frac{16}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{16}{n}\right)^2 = \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n+1)^2}{(n+1)^2} = \\
 &= \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^2} = \frac{16^2 n^2 - 16^2 n^2 - 16^2 (2n + 1)}{(n+1)^2} \\
 &= \frac{-16^2 (2n + 1)}{(n+1)^2} = \frac{-256 (2n + 1)}{(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} - A_n < 0$, logo (A_n) é decrescente.

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} - P_n &= \frac{64}{n+1} - \frac{64}{n} = \frac{64n - 64(n+1)}{n(n+1)} = \\
 &= \frac{64n - 64n - 64}{n(n+1)} = \frac{-64}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} - P_n < 0$, logo (P_n) é decrescente.

166.4 (Q_n) é não limitada, pois não tem majorantes.

(L_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < L_n \leq 16$.

(A_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < A_n \leq 256$.

(P_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < P_n \leq 64$.

$$\begin{aligned}
 167.1 \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{5}{\sqrt{n+1} + 2} - \frac{5}{\sqrt{n} + 2} = \\
 &= \frac{5(\sqrt{n} + 2) - 5(\sqrt{n+1} + 2)}{(\sqrt{n+1} + 2)(\sqrt{n} + 2)} = \frac{5(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+1} + 2)(\sqrt{n} + 2)} \\
 &\quad \begin{matrix} < 0 & \text{porque } \sqrt{n} < \sqrt{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \\ & & > 0 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$, logo (a_n) é monótona decrescente.

167.2 Por um lado, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$. Por outro lado, como a sucessão é decrescente, tem como majorante o 1.º termo. Assim, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq \frac{5}{3}$. Logo (a_n) é limitada.

$$\mathbf{168.1} \quad u_1 = \frac{3 \times 1 - 2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{168.2} \quad u_3 = \frac{3 \times 3 - 2}{3 + 1} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{168.3} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1) - 2}{n+1+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \\ &= \frac{(3n+1)(n+1) - (n+2)(3n-2)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{3n^2 + 3n + n + 1 - (3n^2 + 2n - 6n - 4)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

168.4 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$; logo, a sucessão é crescente.

168.5 Como (u_n) é crescente, o primeiro termo é um minorante. Para determinar um majorante, comecemos por escrever u_n na forma $a + \frac{b}{n+1}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

$$\begin{array}{r|l} 3n-2 & n+1 \\ -3n-3 & 3 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+1}$$

Da análise desta expressão concluímos que $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (u_n) é limitada pois $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n < 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{169.1} \quad v_1 &= 2 + \frac{(-1)^1}{1} = 2 - 1 = 1; \quad v_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \\ v_3 &= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}; \quad v_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}; \quad v_5 = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}; \quad v_6 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

169.2 A sucessão não é monótona pois $v_1 < v_2$ mas $v_2 > v_3$.

169.3 Os termos de ordem par são dados pela expressão $2 + \frac{1}{n}$.

Para n par, temos $2 < v_n \leq \frac{5}{2}$
 $\left(v_n \leq \frac{5}{2}, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ par, é decrescente} \right)$.

Os termos de ordem ímpar são dados pela expressão $2 - \frac{1}{n}$.

Para n ímpar, temos $1 \leq v_n < 2$

$(v_n \geq 1, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ ímpar, é crescente})$.

Conclui-se, portanto, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.

171. Mostrar que $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 é equivalente a mostrar que $2^{2n} + 2$ é divisível por 3.

Para $n = 1$, temos $2^2 + 2 = 6$, que é divisível por 3. A proposição é verdadeira para $n = 1$.

Para averiguar a hereditariedade da proposição, considera-se por hipótese de indução que a propriedade é válida para n : $2^{2n} + 2$ é divisível por 3, ou seja, $\exists p \in \mathbb{N}: 3p = 2^{2n} + 2$.

Pretende-se agora provar que é válida para $n+1$, ou seja, que $2^{2n+2} + 2$ é divisível por 3: $\exists q \in \mathbb{N}: 3q = 2^{2n+2} + 2$.

$$\begin{aligned} 2^{2n+2} + 2 &= 2^{2n} \times 4 + 2 = 4 \times (2^{2n} + 2 - 2) + 2 = 4 \times (3p - 2) + 2 = \\ &= 3 \times 4p - 8 + 2 = 3 \times (4p - 2) \end{aligned}$$

Com $q = (2^2 p - 2)$, demonstramos a igualdade

$3q = 2^{2n+2} + 2$ o que é verdade qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

172.1 Vamos ver que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ou seja, que se $n^2 + 3n + 1$ é par, também $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é par. Temos:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + 3(n+1) + 1 &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = \\ &= (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4 \end{aligned}$$

Assumindo que $n^2 + 3n + 1$ é par, como $2n + 4 = 2 \times (n + 2)$ também é par, conclui-se que $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é par, porque é uma soma de números pares.

172.2 Não, pois para $n = 1$ a proposição obtida é falsa.

172.3 Para $n = 1$ obtém-se $1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$, que é um número ímpar. Proposição verdadeira.

Se $n^2 + 3n + 1$ é ímpar, também $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é ímpar. Temos:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + 3(n+1) + 1 &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = \\ &= (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4 \end{aligned}$$

Assumindo que $n^2 + 3n + 1$ é ímpar, como $2n + 4 = 2 \times (n + 2)$ é par, conclui-se que

$(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é ímpar porque é a soma de um número ímpar com um número par.

173. Para $n = 1$, temos $2 \times 1 - 1 = 1^2$, que é uma proposição verdadeira.

Por hipótese de indução, temos que

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ e temos que provar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$.

Usando a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) &= n^2 + (2n+2-1) = \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \text{ como queríamos mostrar.} \end{aligned}$$

174. Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$, que é uma proposição verdadeira. Por hipótese de indução, temos que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ e temos de provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3)$.
Usando a hipótese de indução:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1) \left[\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1) \right] = (n+1) \left[\frac{1}{6} \times (2n^2 + n + 6n + 6) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \times (n+1) \times (2n^2 + n + 6n + 6)$$

$$= \frac{1}{6} \times (n+1) \times [n \times (2n+3) + 2 \times (2n+3)]$$

$$= \frac{1}{6} \times (n+1) \times (n+2) \times (2n+3) \text{ como queríamos mostrar.}$$

175. Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, proposição verdadeira. Por hipótese de indução, temos que $2n - 3 < 2^{n-2}$ para todo o natural $n \geq 5$. Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade e usando a hipótese de indução, temos que

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n - 3) + 2 < 2^{n-2} + 2$$

Como para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.
Logo $2(n+1) - 3 < 2^{n-1}$.

176. Para $n = 0$, temos que $a - 1 = a - 1$, proposição verdadeira. Por hipótese de indução temos que $(a-1)(1+a+\dots+a^n) = a^{n+1} - 1$.
Pretende-se demonstrar que $(a-1)(1+a+\dots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2} - 1$.
 $(a-1)(1+a+\dots+a^n+a^{n+1}) =$
 $= (a-1)(1+a+\dots+a^n) + (a-1)a^{n+1}$
Usando a hipótese de indução temos que $(a-1)(1+a+\dots+a^n) = a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1} =$
 $= a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1} = a^{n+2} - 1$ como queríamos mostrar.

177.1 $a_1 = 4$; $a_2 = a_1 + 3 = 7$; $a_3 = a_2 + 3 = 10$; $a_4 = a_3 + 3 = 13$

177.2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = 3 > 0$, logo a sucessão (a_n) é crescente.

178. Cada um dos termos apresentados, excluindo o primeiro, obtém-se do anterior adicionando 5 unidades ao anterior, assim, temos, por exemplo:

$$\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_{n+1} = b_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

179.2 Como $n \geq 1$ e tendo em conta a alínea **179.1.**, tem-se $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$, pelo que a sucessão (u_n) é crescente em sentido lato.

180.1 Para $n = 1$, temos que $1 < u_n \leq 2$, pois $1 < \frac{3}{2} \leq 2$ é uma proposição verdadeira.
Por hipótese de indução temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq 2$. Pretende-se demonstrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_{n+1} \leq 2$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \leq \frac{2^2 + 2}{3} = 2$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} > \frac{1^2 + 2}{3} = 1$$

Assim, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_{n+1} \leq 2$, como queríamos demonstrar.

180.2 $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{3} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3}$

Estudemos o sinal de $u_n^2 - 3u_n + 2$:

$$u_n^2 - 3u_n + 2 = 0 \Leftrightarrow u_n = 1 \vee u_n = 2$$

$$u_n^2 - 3u_n + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq u_n \leq 2$$

Como temos $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq 2$ (ver alínea **180.1**), temos consequentemente $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

181. Para $n = 1$, temos que $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.

Por hipótese de indução temos que $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $u_n^2 = 2^n - 1$.

Pretende-se demonstrar que $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} =$$

$$= \sqrt{2^{n+1} - 1}, \text{ como se pretendia mostrar.}$$

182.1 Os termos desta sucessão são os múltiplos de 5 cujo termo geral é $5n$.

182.2 A razão desta progressão é -3 e o seu primeiro termo é -4 . O seu termo geral é: $-4 - 3(n-1) = -3n - 1$.

182.3 A razão desta progressão é 1 e o seu primeiro termo é $\frac{1}{3}$.
O seu termo geral é: $\frac{1}{3} + 1 \times (n-1) = n - \frac{2}{3}$.

184. $a_7 = a_1 + r \times (7-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 6 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

$$a_{20} = a_1 + r \times (20-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 19 = \frac{3}{2} - \frac{19}{2} = -16 = -8$$

$$a_{50} = a_1 + r \times (50-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 49 = \frac{3}{2} - \frac{49}{2} = -\frac{46}{2} = -23$$

- 185.1** Mostremos para cada uma das sucessões que a diferença entre dois termos consecutivos é constante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{2-4(n+1)}{3} - \frac{2-4n}{3} = \frac{2-4n-4-2+4n}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = b_n - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = -\frac{3}{2}$$

- 185.2** $a_1 = \frac{2-4 \times 1}{3} = -\frac{2}{3}$ e $r = -\frac{4}{3}$ (atendendo à alínea **185.1**)

$$b_1 = 2 \text{ e } r = -\frac{3}{2} \text{ (atendendo à alínea 185.1)}$$

- 185.3** (a_n) e (b_n) são decrescentes, pois $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n < 0$, respetivamente.

- 186.1** Começemos por determinar a razão da progressão aritmética:

$$u_{12} = u_1 + r \times (12 - 1) \Leftrightarrow r = \frac{169 - 15}{11} = 14$$

O termo geral é dado por:

$$u_n = u_1 + r \times (n - 1) = 15 + 14(n - 1) = 14n + 1$$

- 186.2** Começemos por determinar a razão da progressão aritmética:

$$u_{10} + u_{15} = 102 \Leftrightarrow u_1 + r \times (10 - 1) + u_1 + r \times (15 - 1) = 102$$

$$\Leftrightarrow 23r = 102 - 2u_1 \Leftrightarrow r = \frac{102 - 2 \times 5}{23} \Leftrightarrow r = 4$$

O termo geral é dado por:

$$u_n = u_1 + r \times (n - 1) = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$$

- 186.3** Começemos por determinar a razão da progressão aritmética:

$$u_{10} - u_{11} = -2 \Leftrightarrow u_{11} - u_{10} = 2, \text{ logo } r = 2.$$

Determinemos agora o primeiro termo:

$$\begin{cases} S_{20} = 420 \\ u_{20} = u_1 + 19r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 420 \\ u_{20} = u_1 + 38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_{20} = 42 \\ u_{20} = u_1 + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 38 = 42 \\ u_{20} = u_1 + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{20} = 40 \end{cases}$$

O termo geral é dado por:

$$u_n = u_1 + r \times (n - 1) = 2 + 2(n - 1) = 2n$$

- 187.1** Trata-se da soma dos 50 primeiros números pares. Assim, tem-se:

$$S = \frac{2 + 100}{2} \times 50 = 2550$$

- 187.2** Trata-se da soma dos 10 números inteiros consecutivos de 100 a 109. Assim, tem-se: $S = \frac{100 + 109}{2} \times 10 = 1045$

$$\mathbf{188.} \quad u_{10} = u_5 + 5r \Leftrightarrow r = \frac{u_{10} - u_5}{5} = \frac{26 - 2}{5} = 4,8$$

$$u_1 = u_5 - 4r = 2 - 4 \times 4,8 = -17,2$$

$$u_{18} = u_{10} + 8r = 26 + 8 \times 4,8 = 64,4$$

$$S_{18} = \frac{-17,2 + 64,4}{2} \times 18 = 424,8$$

- 189.1** Designando por (a_n) a progressão aritmética, de razão 4, temos $a_n = a_1 + 4(n - 1)$.

Por outro lado, temos também $S_{60} = 240$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_{60}}{2} \times 60 = 240 \Leftrightarrow a_1 + a_{60} = 8$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a_{60} = a_1 + 4 \times 59 \\ a_1 + a_{60} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{60} = a_1 + 236 \\ a_1 = 8 - a_{60} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{60} = 8 - a_{60} + 236 \\ a_1 = 8 - a_{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_{60} = 244 \\ a_1 = 8 - a_{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{60} = 122 \\ a_1 = -114 \end{cases}$$

$$a_1 = -114$$

- 189.2** $a_n = a_1 + r \times (n - 1) = -114 + 4(n - 1) = 4n - 118$

$$\mathbf{190.1} \quad \begin{cases} u_5 + u_9 = 32 \\ u_{17} - u_{13} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r + u_1 + 8r = 32 \\ u_1 + 16r - (u_1 + 12r) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 12r = 32 \\ 4r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 12 \times 3 = 32 \\ r = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ r = 3 \end{cases}$$

- 190.2** $a_n = a_1 + r \times (n - 1) = -2 + 3(n - 1) = 3n - 5$

$$\mathbf{190.3} \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{-2 + a_n}{2} \times n = 174 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (-2 + 3n - 5) \times n = 348 \Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 348 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 3 \times (-348)}}{6} \Leftrightarrow n = \frac{7 \pm 65}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -\frac{29}{3}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem que ser $n = 12$.

- 191.** O número de árvores a plantar anualmente aumenta em progressão aritmética, cujo primeiro termo é $a_1 = 80$ e a razão é $r = 40$.

O termo geral desta progressão aritmética é:

$$a_n = a_1 + r \times (n - 1) = 80 + 40(n - 1) = 40n + 40$$

Atendendo a que se pretende plantar um total de 10 080 árvores, tem-se:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{80 + 40n + 40}{2} \times n = 10080 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (20n + 60) \times n = 10080 \Leftrightarrow 20n^2 + 60n - 10080 = 0 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 3n - 504 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 504}}{2} \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 45}{2} \Leftrightarrow n = 21 \vee n = -24 \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem de ser $n = 21$.

O projeto ficará completo ao fim de 21 anos.

- 192.** O número de cubos na fila de ordem n ($n = 1$ corresponde à fila de cima) é dado por n .

O número de cubos da construção é a soma dos 60 primeiros termos desta progressão aritmética, isto é,

$$S_{60} = \frac{1 + 60}{2} \times 60 = 1830.$$

- 193.** Sendo (a_n) e (b_n) progressões aritméticas, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = r_1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = r_2$, com r_1 e r_2 constantes. Adicionando os termos das igualdades anteriores, obtém-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = r_1 + r_2$, concluindo-se que $(a_n + b_n)$ também é uma progressão aritmética (de razão $r_1 + r_2$).

195.1 $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{3}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

Como nem $a_{n+1} - a_n$ nem $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ são constantes, (a_n) não é uma progressão (nem aritmética nem geométrica, respetivamente).

195.2 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1} \times 5^{n+1}}{2^n \times 5^n} = 2 \times 5 = 10$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 10$, (b_n) é uma progressão geométrica.

195.3 $c_{n+1} - c_n = 3(n+1) - 7 - (3n - 7) = 3n + 3 - 7 - 3n + 7 = 3$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n = 3$, (c_n) é progressão aritmética.

195.4 $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2 \times \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{2 \times \frac{(-1)^n}{3^n}} = -\frac{1}{3}$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{d_{n+1}}{d_n} = -\frac{1}{3}$, (d_n) é uma progressão geométrica.

196.1 $u_n = \frac{1}{10} \times 2^{n-1}$

196.2 $u_7 = \frac{1}{10} \times 2^{7-1} = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$; $u_{10} = \frac{1}{10} \times 2^{10-1} = \frac{512}{10} = \frac{256}{5}$

196.3 $\frac{1}{10} \times 2^{n-1} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow 2^{n-1} = 16 \Leftrightarrow n - 1 = 4 \Leftrightarrow n = 5$

197.1 $a_1 = 4$; $a_2 = 2 \times a_1 = 8$; $a_3 = 2 \times a_2 = 16$; $a_4 = 2 \times a_3 = 32$; $a_5 = 2 \times a_4 = 64$

197.2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2 \times a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$; $r = 2$

197.3 Como $a_1 > 0$ e $r > 1$, (a_n) é monótona crescente.

197.4 $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$

- 198.** Sendo $m - 6$, $12 - m$ e $4m - 3$ termos consecutivos de uma progressão geométrica, o quociente do terceiro pelo segundo tem de ser igual ao quociente do segundo pelo primeiro. Assim, tem-se:

$$\frac{4m - 3}{12 - m} = \frac{12 - m}{m - 6} \Leftrightarrow (4m - 3)(m - 6) = (12 - m)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 24m - 3m + 18 = 144 - 24m + m^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 3m - 126 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 42 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-42)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm 13}{2} \Leftrightarrow m = 7 \vee m = -6$$

199. $S_8 = 3280 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}} = 3280 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{6560}{6561} = 3280 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1 = 3280 \times \frac{6561}{6560} \times \frac{2}{3} = 2187$$

$$a_8 = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 2187 \times \frac{1}{2187} = 1$$

- 200.2** A soma indicada é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão 3:

$$r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$$

Para determinar o valor de n , consideremos

$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 3^{n-1}$ e igualamos a expressão a 729.

$$3^{n-1} = 729 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

$$S = S_7 = 1 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = \frac{1 - 2187}{-2} = 1093$$

- 200.3** A soma indicada é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão -2 :

$$r = \frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = -2$$

Para determinar o valor de n , consideremos

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = (-2)^{n-1} \text{ e igualamos a expressão a } 4096.$$

$$(-2)^{n-1} = 4096 \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^{12} \Rightarrow n-1 = 12 \Leftrightarrow n = 13$$

$$S = S_{13} = \frac{1 - (-2)^{13}}{1 - (-2)} = \frac{1 + 8192}{3} = 2731$$

- 201.** Sendo a_n o número de alunos que ao fim de $10n$ minutos passa a saber da informação, tem-se:

$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ (termo geral da progressão geométrica de razão igual a 2 e primeiro termo igual a 1).

Ao fim de 2 horas, 120 minutos (10×12), o número de alunos que sabem da informação é igual à soma dos 12 primeiros termos da progressão geométrica (a_n), ou seja,

$$S_{12} = \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = 4095.$$

Em conclusão, ao fim de 2 horas, todos os alunos da escola têm conhecimento de que a escola irá encerrar no período da tarde.

- 202.** Sendo (a_n) e (b_n) progressões geométricas, tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_2, \text{ com } r_1 \text{ e } r_2$$

constantes. Multiplicando os termos das igualdades anteriores, obtém-se $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1} \times b_{n+1}}{a_n \times b_n} = r_1 \times r_2$, con-

cluindo-se que ($a_n \times b_n$) também é uma progressão aritmética (de razão $r_1 \times r_2$).

$$\begin{aligned} \text{204.1 } b_{n+1} - b_n &= \frac{4}{n+3} - \frac{4}{n+2} = \frac{4(n+2) - 4(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{-4}{(n+3)(n+2)} < 0 \end{aligned}$$

A sucessão (b_n) é decrescente pois

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n < 0.$$

$$\text{204.2 } \frac{4}{n+2} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n+2 > 4000 \Leftrightarrow n > 3998.$$

A ordem pedida é 3999.

- 204.3** Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$|b_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{4}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{4}{n+2} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{\delta}{4} \Leftrightarrow n+2 > \frac{4}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{4}{\delta} - 2$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{4}{\delta} - 2 \right] + 1$ para

que todos os termos de (b_n), com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(0)$. Ou seja, a sucessão (b_n) é convergente para 0, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |b_n - 0| < \delta.$$

- 204.4** Sim, pois se a sucessão (b_n) é convergente então é limitada.

- 204.5** Recorrendo ao resultado da alínea **204.3**, temos, para

$$\delta = 0,05, p = \left[\frac{4}{0,05} - 2 \right] + 1 = [78] + 1 = 79.$$

Alternativamente, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} |b_n - 0| < \frac{5}{100} &\Leftrightarrow \left| \frac{4}{n+2} \right| < \frac{5}{100} \Leftrightarrow 5n + 10 > 400 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5n > 390 \Leftrightarrow n > 78 \end{aligned}$$

A ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,05}(0)$ é $p = 79$.

$$\begin{aligned} \text{205.1 } u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1)+1}{3(n+1)} - \frac{4n+1}{3n} = \frac{4n+5}{3(n+1)} - \frac{4n+1}{3n} = \\ &= \frac{n(4n+5) - (n+1)(4n+1)}{3n(n+1)} = \\ &= \frac{4n^2 + 5n - 4n^2 - 5n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Sim, a sucessão (u_n) é monótona, porque é decrescente, pois $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n < 0$.

- 205.2** Sendo (u_n) decrescente, tem-se $u_n \leq u_1$, ou seja,

$$u_n \leq \frac{5}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado como, $u_n = \frac{4n+1}{3n} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3n}$, tem-se $u_n > \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, (u_n) é limitada pois $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4}{3} < u_n \leq \frac{5}{3}$.

- 205.3** Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| u_n - \frac{4}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{4n+1}{3n} - \frac{4}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{4n+1-4n}{3n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\delta}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{1}{3\delta} \right] + 1$ para

que todos os termos de (u_n), com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta\left(\frac{4}{3}\right)$. Ou seja, a sucessão (u_n) é convergente para $\frac{4}{3}$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \frac{4}{3} \right| < \delta.$$

$$\begin{aligned} \text{206.1 } a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-3}{5(n+1)+1} - \frac{2n-3}{5n+1} = \frac{2n-1}{5n+6} - \frac{2n-3}{5n+1} = \\ &= \frac{(2n-1)(5n+1) - (2n-3)(5n+6)}{(5n+6)(5n+1)} = \\ &= \frac{10n^2 - 3n - 1 - 10n^2 + 3n + 17}{(5n+6)(5n+1)} = \frac{16}{(5n+6)(5n+1)} > 0 \end{aligned}$$

(a_n) é crescente pois $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$.

206.2 Sendo (a_n) crescente, tem-se $a_n \geq a_1$, ou seja, $a_n \geq -\frac{1}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & 5n+1 \\ -2n-\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline & -\frac{17}{5} \end{array}$$

Por outro lado, como,

$$a_n = \frac{2}{5} - \frac{17}{5(5n+1)}, \text{ tem-se } u_n < \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, (a_n) é limitada pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{6} \leq a_n < \frac{2}{5}$.

Um majorante é $\frac{2}{5}$ e um minorante é $-\frac{1}{6}$.

206.3 Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n-3}{5n+1} - \frac{2}{5} \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{10n-15-10n-2}{5n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-17}{5n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{17}{5n+1} < \delta \\ &\Leftrightarrow 5n+1 > \frac{17}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{17}{5\delta} - 1 \end{aligned}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{17}{5\delta} - 1 \right\rceil + 1$

para que todos os termos de (a_n) , com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta\left(\frac{2}{5}\right)$. Ou seja, a sucessão (a_n) é convergente

para $\frac{2}{5}$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| a_n - \frac{2}{5} \right| < \delta.$$

207.1 $v_1 = 3 + \frac{(-1)^1}{1} = 2$; $v_2 = 3 + \frac{(-1)^2}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$;

$$v_3 = 3 + \frac{(-1)^3}{3} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}; \quad v_4 = 3 + \frac{(-1)^4}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4};$$

$$v_5 = 3 + \frac{(-1)^5}{5} = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$$

207.2 Os termos de ordem par são dados pela expressão $3 + \frac{1}{n}$.

Para n par, temos $3 < v_n \leq \frac{7}{2}$

$\left(v_n \leq \frac{7}{2}, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ par, é decrescente} \right).$

Os termos de ordem ímpar são dados pela expressão $3 - \frac{1}{n}$.

Para n ímpar, temos $2 \leq v_n < 3$

$\left(v_n \leq \frac{7}{2}, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ ímpar, é crescente} \right).$

Conclui-se, portanto, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq v_n \leq \frac{7}{2}$.

207.3 Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| 3 + \frac{(-1)^n}{n} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1$ para

que todos os termos de (v_n) , com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(3)$. Ou seja, a sucessão (v_n) é convergente para 3, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n - 3| < \delta.$$

209.1 $a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+1)-2}{3} - \frac{5n-2}{3} = \frac{5n+5-2-5n+2}{3} = \frac{5}{3}$

(a_n) é crescente pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{5}{3} > 0$.

(Em alternativa, também se podia afirmar que (a_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{5}{3} > 0$, pelo que é monótona crescente.)

209.2 $a_n > 5000 \Leftrightarrow \frac{5n-2}{3} > 5000 \Leftrightarrow 5n-2 > 15000 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n > \frac{14998}{5} = 3000,4$

A ordem a partir da qual todos os termos da sucessão satisfazem $a_n > 5000$ é $[3000,4] + 1 = 3001$.

209.3 Vamos mostrar que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n > L:$$

$$a_n > L \Leftrightarrow \frac{5n-2}{3} > L \Leftrightarrow 5n-2 > 3L \Leftrightarrow n > \frac{3L+2}{5}$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > \frac{3L+2}{5}$, todos os termos da sucessão são superiores a L . Portanto, o limite de (a_n) é $+\infty$.

210.1 Determinemos a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão satisfazem $v_n < -10^3$:

$$u_n < -1000 \Leftrightarrow -3n^2 + 1 < -1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3n^2 < -1001 \Leftrightarrow n^2 > \frac{1001}{3} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1001}{3}}$$

A ordem pedida é $\left\lceil \sqrt{\frac{1001}{3}} \right\rceil + 1 = 19$.

210.2 Vamos mostrar que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n < -L:$$

$$-3n^2 + 1 < -L \Leftrightarrow -(3n^2 - 1) < -L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 1 > L \Leftrightarrow n^2 > \frac{L+1}{3} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{L+1}{3}}$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > \sqrt{\frac{L+1}{3}}$, todos os termos da sucessão são inferiores a $-L$. Portanto, o limite de (v_n) é $-\infty$.

210.3 Como (v_n) tende para $-\infty$, (v_n) não é minorada, logo não é limitada.

211. (v_n) não tem limite, pois (u_n) não tem limite, porque a sucessão dos termos de ordem par tende para 0 e a sucessão dos termos de ordem ímpar tende para $-\infty$. A alteração de apenas um número finito de termos de (u_n) não altera este resultado.

212. Começemos por mostrar que a sucessão não é monótona.

$$u_1 = (-1)^1 \times (1+1) = -2; \quad u_2 = (-1)^2 \times (2+1) = 3;$$

$$u_3 = (-1)^3 \times (3+1) = -4$$

Como $u_1 < u_2$ mas $u_2 > u_3$, a sucessão não é monótona. Mostremos agora que é divergente:

Os termos de ordem par são dados pela expressão $n+1$. Têm, portanto, limite $+\infty$.

Os termos de ordem ímpar são dados pela expressão $-n-1$. Têm, portanto, limite $-\infty$.

Conclui-se, assim, que (u_n) não tem limite, pelo que é divergente.

213.1 Vamos mostrar que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow 2n+4 > L:$$

$$2n+4 > L \Leftrightarrow n > \frac{L-4}{2} \Leftrightarrow n > \frac{L}{2} - 2$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > \frac{L}{2} - 2$, todos os termos da sucessão são superiores a L . Portanto, $\lim(2n+4) = +\infty$.

213.2 Vamos mostrar que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow 1-2n < -L:$$

$$1-2n < -L \Leftrightarrow n > \frac{L+1}{2}$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > \frac{L+1}{2}$, todos os termos da sucessão são inferiores a $-L$. Portanto, $\lim(1-2n) = -\infty$.

213.3 Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{1}{5n-1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{5n-1} < \delta \Leftrightarrow 5n-1 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{5\delta} + \frac{1}{5}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{1}{5\delta} + \frac{1}{5} \right\rceil + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por $\frac{1}{5n-1}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(0)$. Ou seja, $\lim\left(\frac{1}{5n-1}\right) = 0$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{5n-1} \right| < \delta.$$

213.4 Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{4n}{3n+2} - \frac{4}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{12n-12n-8}{9n+6} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-8}{9n+6} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{8}{9n+6} < \delta \Leftrightarrow 9n+6 > \frac{8}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{8}{9\delta} - \frac{2}{3}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{8}{9\delta} - \frac{2}{3} \right\rceil + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por $\frac{4n}{3n+2}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta\left(\frac{4}{3}\right)$. Ou seja, $\lim\left(\frac{4n}{3n+2}\right) = \frac{4}{3}$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n}{3n+2} \right| < \delta.$$

$$\mathbf{214.1} \quad \lim(-3+n) = \lim(-3) + \lim n = -3 + (+\infty) = +\infty$$

$$\mathbf{214.2} \quad \lim \frac{1}{n+3} = \frac{\lim 1}{\lim(n+3)} = \frac{1}{\lim n + \lim 3} = \frac{1}{+\infty + 3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\mathbf{214.3} \quad \lim(-3n^2+1) = \lim(-3n^2) + \lim 1 = -3 \lim(n^2) + 1 = -3 \times (+\infty) + 1 = -\infty + 1 = -\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{214.4} \quad \lim(\sqrt{n+1}-1) &= \lim \sqrt{n+1} - \lim 1 = \\ &= \sqrt{\lim(n+1)} - \lim 1 = \sqrt{\lim n + \lim 1} - 1 = \\ &= \sqrt{+\infty + 1} - 1 = +\infty \end{aligned}$$

$$\mathbf{214.5} \quad \lim\left(-\frac{4}{\sqrt{n}}\right) = -\lim\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{\lim 4}{\lim \sqrt{n}} = -\frac{4}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{214.6} \quad \lim \frac{6n-1}{2n+1} &= \\ &= \lim\left(3 - \frac{4}{2n+1}\right) = \\ &= \lim 3 - \lim\left(\frac{4}{2n+1}\right) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 6n-1 & 2n+1 \\ \hline -6n-3 & 3 \\ \hline -4 & \end{array}$$