

Propostas de resolução

Caderno de Atividades

Pág. 4

1. $\overline{AB} = \cos \alpha$; $\overline{AC} = \sin \alpha$

$$A = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{\cos \alpha \times \sin \alpha}{2}$$

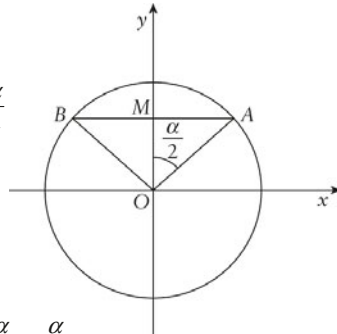
Resposta (D).

2. $\overline{OM} = \cos \frac{\alpha}{2}$; $\overline{MA} = \sin \frac{\alpha}{2}$

$$\overline{BA} = 2\overline{MA} = 2\sin \frac{\alpha}{2}$$

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OM} \times \overline{BA}}{2} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \times 2\sin \frac{\alpha}{2}}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$



Resposta (A).

3. $A_{[ABC]} = \frac{20 \times 10}{2} = 100$

$$\frac{\overline{PB}}{20} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \overline{PB} = 20 \operatorname{tg} \alpha$$

$$A_{[ABP]} = \frac{20 \times 20 \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{20^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$A_{[ABP]} = \frac{100}{2} \Leftrightarrow \frac{20^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} = 50$$

Resposta (A).

Pág. 5

4. $\frac{\overline{OB}}{r} = \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{OB} = r \cos \alpha$

$$\frac{\overline{BC}}{r} = \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{BC} = r \sin \alpha$$

$$P = 4\overline{OB} + 2\overline{BC} = 4r \cos \alpha + 2r \sin \alpha = 2r(2 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Resposta (A).

5. $\overline{OC} = 2$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{1} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \overline{OA} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Resposta (B).

6. $\overline{GC} = a$

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2a^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = a\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}(\hat{CAG}) = \frac{\overline{GC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\hat{CAG} \approx 35,3^\circ$

Resposta (D).

Pág. 6

7. $\frac{\overline{CB}}{15} = \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow \overline{CB} = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{CB} = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{CB} = 5\sqrt{3}$$

$$P = 2\overline{AB} + 2\overline{BC} = 30 + 10\sqrt{3}$$

$$P = 30 + 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A = \overline{AB} \times \overline{BC} = 15 \times 5\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$$

$$A = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

8. $360^\circ : 5 = 72^\circ$

$$72^\circ : 2 = 36^\circ$$

$$\frac{\overline{MA}}{10} = \sin 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} = 10 \sin 36^\circ$$

$$\frac{\overline{OM}}{10} = \cos 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OM} = 10 \cos 36^\circ$$

8.1 $P = 5\overline{AB} = 5 \times 2\overline{MA} = 5 \times 2 \times 10 \sin 36^\circ =$
 $= 100 \sin 36^\circ \approx 58,78$

$$P \approx 58,78 \text{ cm}$$

8.2 $A = 5 \times A_{[OAB]} = 5 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} =$

$$= \frac{5}{2} 20 \sin 36^\circ \times 10 \cos 36^\circ = 500 \sin 36^\circ \times \cos 36^\circ \approx 237,76$$

$$A \approx 237,76 \text{ cm}^2$$

9. $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$

9.1 $x = 45^\circ$.

$$\frac{\overline{VN}}{\overline{NM}} = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\overline{VN}}{2} = 1 \Leftrightarrow \overline{VN} = 2$$

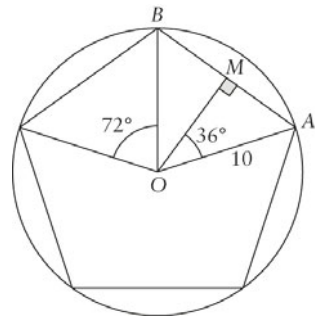
$$\frac{\overline{NM}}{\overline{VM}} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{VM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4 = \overline{VM} \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{VM} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{VM} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{VM} = 2\sqrt{2}$$

• $\overline{MC} = 2$ e $\overline{MV} = 2\sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}(\hat{MVC}) = \frac{\overline{MC}}{\overline{MV}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{BVC}}{2}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Logo, } \frac{\hat{BVC}}{2} \approx 35,264^\circ \Rightarrow \hat{BVC} \approx 70,5^\circ$$



$$\bullet \quad \overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 \stackrel{\overline{AC} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 4^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{AN} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AN} = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{VN} = 2$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{NAV}) = \frac{\overline{VN}}{\overline{AN}}. \text{ Como } \widehat{NAV} = \widehat{CAV}, \text{ temos}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{CAV}) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAV}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Logo } \widehat{CAV} \approx 35,3^\circ$$

9.2

a) Altura da pirâmide: $\overline{VN}$

$$\frac{\overline{VN}}{\overline{NM}} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{\overline{VN}}{2} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \overline{VN} = 2 \operatorname{tg} x$$

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2 \operatorname{tg} x$$

$$V = \frac{32}{3} \operatorname{tg} x$$

b) $A_{[BCV]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{MV}}{2} = \frac{4 \times \overline{MV}}{2} = 2\overline{MV} \quad (1)$

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{MV}} = \cos x \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{MV}} = \cos x \Leftrightarrow 2 = \overline{MV} \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MV} = \frac{2}{\cos x}$$

$$A_{[BCV]} \stackrel{(1)}{=} 2\overline{MV} = 2 \times \frac{2}{\cos x} = \frac{4}{\cos x}$$

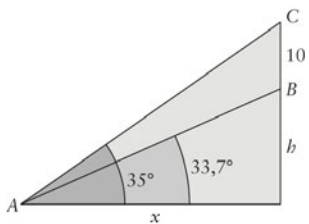
$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + 4 \times A_{[BCV]} = 4^2 + 4 \times \frac{4}{\cos x}$$

$$A = 16 + \frac{16}{\cos x} = \frac{16 \cos x + 16}{\cos x}$$

10.

Pág. 7

$$\begin{cases} \frac{h}{x} = \operatorname{tg} 33,7^\circ \\ \frac{10+h}{x} = \operatorname{tg} 35^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 33,7^\circ \\ 10+h = x \operatorname{tg} 35^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 33,7^\circ \\ 10 + x \operatorname{tg} 33,7^\circ = x \operatorname{tg} 35^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 33,7^\circ \\ x \operatorname{tg} 35^\circ - x \operatorname{tg} 33,7^\circ = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 33,7^\circ \\ x(\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 33,7^\circ) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{10 \operatorname{tg} 33,7^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 33,7^\circ} \\ x = \frac{10}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 33,7^\circ} \end{cases}$$

Altitude de B = altitude de A + h =

$$= 55 + \frac{10 \operatorname{tg} 33,7^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 33,7^\circ} \approx (55 + 200,3) \text{ m} \approx 255 \text{ m}.$$

11.1 É a área do setor circular

$$360^\circ \text{ — } \pi \times 10^2$$

$$90^\circ \text{ — } A$$

$$A = \frac{90 \times 100\pi}{360} = 25\pi$$

$$A = 25\pi \text{ cm}^2.$$

11.2 O perímetro da base do cone é igual ao comprimento do arco que define o setor circular dado.

$$360^\circ \text{ — } 2\pi \times 10$$

$$90^\circ \text{ — } C$$

$$C = \frac{90 \times 2\pi \times 10}{360} = 5\pi$$

Seja r o raio da base:

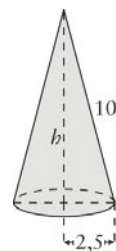
$$2\pi r = 5\pi \Leftrightarrow r = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow r = 2,5 \text{ cm}$$

11.3 A geratriz g do cone mede 10 cm.

$$h^2 + 2,5^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{100 - 6,25}$$

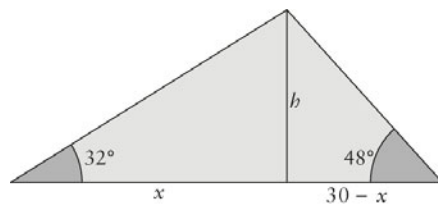
$$h \approx 9,68 \text{ cm}$$



11.4 $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \pi \times 2,5^2 \times \sqrt{93,75}$

$$V \approx 63,37 \text{ cm}^3$$

12.



$$\begin{cases} \frac{h}{x} = \operatorname{tg} 32^\circ \\ \frac{h}{30-x} = \operatorname{tg} 48^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 32^\circ \\ x \operatorname{tg} 32^\circ = 30 \operatorname{tg} 48^\circ - x \operatorname{tg} 48^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 32^\circ \\ x(\operatorname{tg} 32^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ) = 30 \operatorname{tg} 48^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{30 \operatorname{tg} 48^\circ \operatorname{tg} 32^\circ}{\operatorname{tg} 32^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ} \\ x = \frac{30 \operatorname{tg} 48^\circ}{\operatorname{tg} 32^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \approx 12,00 \text{ m}.$$

Pág. 8

1. $\frac{\pi}{2} \text{ rad} < 2 \text{ rad} < \pi \text{ rad}$ pois $\pi \approx 3,14$ e $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

Um ângulo de amplitude 2 radianos é do 2.º quadrante.

Resposta (A).

2. Tem-se que:

- Se $\alpha = 0$, $d(0) = 2r = 2 \times 0,5 = 1$.

Ficam excluídas as hipóteses (A) onde $d(0) = \frac{1}{2}$

e (B) onde $d(0) = 2$.

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $d(0) = r = 0,5$.

Fica excluída a hipótese (C) onde

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2.$$

Resposta (D).

3. A abscissa do ponto A é igual a $-\frac{2\pi}{5} + \frac{31\pi}{10} = \frac{27\pi}{10}$

Resposta (C).

Pág. 9

4. $p = \frac{41\pi}{15} - \frac{2\pi}{5} = \frac{7\pi}{3}$

Resposta (A).

5. $d(t) = 12 - 4\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -4\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 4 \leq 12 - 4\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \leq 12 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq d(t) \leq 16 \Leftrightarrow$$

O mínimo de d é 8.

Resposta (B).

6. $f(x) = 1 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad D_f = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \leq 1 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$$

$$D'_f = [-1, 3]$$

Resposta (D).

7. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin(9\pi - x) + \cos(x + 7\pi)\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$= -\sin x \sin x - \cos x \cos x$$

$$= -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$$

Resposta (C).

8. $\operatorname{tg}(x - \pi) - 2\cos^2(\pi + x) - \frac{1}{2}\sin(4\pi - x)\sin(\pi - x)$

$$= \operatorname{tg}(\pi + x) - 2[\cos(\pi + x)]^2 - \frac{1}{2}\sin(-x)\sin(x)$$

$$= \operatorname{tg} x - 2(-\cos x)^2 + \frac{1}{2}\sin x \sin x$$

$$= \operatorname{tg} x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$= \operatorname{tg} x - 2(1 - \sin^2 x) + \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$= \operatorname{tg} x - 2 + 2\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$= \operatorname{tg} x - 2 + \frac{5}{2}\sin^2 x = -2 + \frac{5}{2}\sin^2 x + \operatorname{tg} x$$

Resposta (D).

Pág. 10

9. $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \sin \alpha = \frac{3}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

9.1 $A = \sin(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha + \cos \alpha = 0$

9.2 $A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(3\pi + \alpha) = -\cos \alpha + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) =$

$$= -\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = -\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned}
 9.3 \quad A &= \cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(9\pi - \alpha) = \\
 &= \cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{2} + 8\pi\right) - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin(\pi - \alpha) = \\
 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) + \sin\alpha = \sin\alpha + \frac{4}{3} + \frac{3}{5} \\
 &= \frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{38}{15}
 \end{aligned}$$

10.1 Um triângulo $[ABC]$ inscrito numa circunferência de diâmetro $[AB]$ é retângulo em C .

$$\begin{aligned}
 10.2 \quad \overline{AB} &= 2 \times \frac{17}{2} = 17, \quad \overline{BC} = 15 \\
 \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 \Leftrightarrow 17^2 = \overline{AC}^2 + 15^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 &= 17^2 - 15^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 64 \Leftrightarrow \\
 \overline{AC} > 0 \quad \overline{AC} &= 8
 \end{aligned}$$

$$10.3 \quad \overline{AB} = 17, \quad \overline{AC} = 18, \quad \overline{BC} = 15$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{17} = \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{15}{17} = \cos\beta$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{15}{17}$$

a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta - \sin\theta =$

$$= \frac{8}{17} + \frac{15}{17} - \frac{8}{17} - \frac{15}{17} = 0$$

b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) + \cos(\pi - \theta) = -\cos\beta - \cos\theta =$

$$= -\frac{15}{17} + \frac{8}{17} = -\frac{7}{17}$$

11.1 $8\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8\sin x = -4 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.2 $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.3 $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.4 $\cos(2x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.5 $(1 - \operatorname{tg} x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.6 $\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.7 $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.8 $\cos^2 x + 3 \sin x = 3$ em $[0, 2\pi]$

$$\cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee x \in \emptyset$$

No intervalo $[0, 2\pi]$, $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

11.9 $\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0$, em $]-1, 1[$

$$\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = -\sin(\pi x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{3\pi}{2} - \pi x + 2k\pi \vee \pi x = -\frac{3\pi}{2} + \pi x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - x + 2k \vee x = -\frac{3}{2} + x + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{3}{2} + 2k \vee x \in \emptyset, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}; \frac{7}{4} \notin]-1, 1[$$

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}; -\frac{5}{4} \notin]-1, 1[$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$$

11.10 $3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$, em $]-\pi, \pi[$

$$3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \notin]-\pi, \pi[$$

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2} \notin]-\pi, \pi[$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

Pág. 11

12. $f(x) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3$, $D_f =]0, 60[$

12.1 $0 < x < 60$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{20} \leq \frac{\pi}{20} \times 60 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{20} \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow -1 \leq \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -3 - 5 \leq 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3 \leq 5 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq f(x) \leq 2$$

$$D'_f = [-8, 2]$$

12.2 $f(x) = -8 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3 = -8 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = -1 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{20} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{20} = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -10 + 40k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow x = 30$$

$$f(x) = 2 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3 = 2 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = 1 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{20} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{20} = \frac{1}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10 + 40k, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 50$$

Minimizantes: $\{30\}$

Maximizantes: $\{10, 50\}$

12.3 $f(x) = -\frac{1}{2} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3 = -\frac{1}{2} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = 3 - \frac{1}{2} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = \frac{5}{2} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = \frac{1}{2} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi x}{20} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi x}{20} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]0, 60[$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{20} = \frac{1}{6} + 2k \vee \frac{x}{20} = \frac{5}{6} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]0, 60[$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{20}{6} + 40k \vee x = \frac{100}{6} + 40k, \quad k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]0, 60[$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{10}{3} + 40k \vee x = \frac{50}{3} + 40k, \quad k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]0, 60[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \vee x = \frac{130}{3} \vee x = \frac{50}{3} \vee x = \frac{170}{3}$$

$$S = \left\{\frac{10}{3}, \frac{50}{3}, \frac{130}{3}, \frac{170}{3}\right\}$$

12.4 $f(x) = -3 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 3 = -3 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

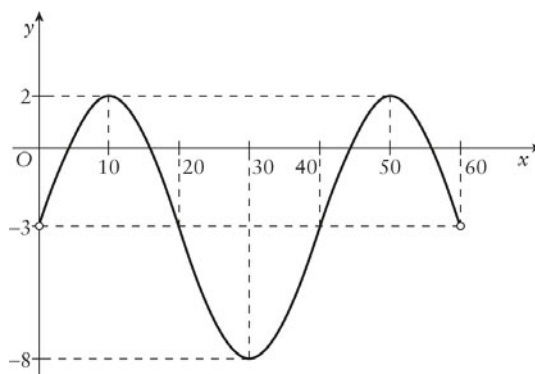
$$\Leftrightarrow 5 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) = 0 \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{20} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{20} = k, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 20k, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, 60[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = 40$$



12.5 $f(x) < -3 \Leftrightarrow x \in]20, 40[$

13.1 $\alpha(t) = \frac{\pi}{6} \cos(\pi t)$

$$\alpha(t + p) = \alpha(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cos[\pi(t + p)] = \frac{\pi}{6} \cos(\pi t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi p) = \cos(\pi t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Como a função cosseno é periódica de período 2π , terá de ser $\pi p = 2\pi \Leftrightarrow p = 2$

A função α é periódica de período 2.

13.2 No instante $t = 0$ a esfera está em A .

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{6} \cos(\pi \times 0) = \frac{\pi}{6}$$

$$A\hat{O}M = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{OA} = 2$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

13.3 $\alpha(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cos(\pi t) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, $t = \frac{1}{2}$

A esfera passa pela primeira vez na reta r no instante $t = 0,5$ s.

14. $f(x) = a + b \sin(kx)$

14.1 $f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a + b \sin[k(x+p)] = a + b \sin(kx), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin(kx + kp) = \sin(kx), \forall x \in \mathbb{R}$$

Como a função seno é periódica de período 2π , temos

$$kp = 2\pi \Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{k}$$

14.2 $f(t) = a + b \sin(kt), t \in [0, 24]$

$$-1 \leq \sin(kt) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -b \leq b \sin(kt) \leq b$$

$$\Leftrightarrow a - b \leq a + b \sin(kt) \leq a + b$$

$$D_f' = [a - b, a + b] = [8, 14]$$

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 22 \\ a + b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 14 - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$f(t) = 11 + 3 \sin(kt)$$

Como f é periódica de período igual a 12 temos

$$\frac{2\pi}{k} = 12 \Leftrightarrow 2\pi = 12k \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{6}$$

$$f(t) = 11 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Pág. 12

1.1 $\operatorname{tg}(\hat{BAC}) = \frac{5\sqrt{3}}{15} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\hat{BAC}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, $\hat{BAC} = 30^\circ$

Resposta (B).

1.2 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\widehat{AC, AD})$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = 5\sqrt{3}$$

$$\cos(\widehat{AC, AD}) = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 10\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 75$$

Resposta (A).

2. $\vec{u} = (3, 2); \vec{v} = (-1, 1)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 13; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 + 2 = -1$$

$$(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2 =$$

$$= -1 - 13 = -14$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= 13 - 2 + 1 - 2 \times 2 = 8$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 13 - 2 = 11$$

Resposta (D).

3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \times 2 \times \cos 60^\circ = -4 \times \frac{1}{2} = -2$

Resposta (C).

4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 0 = 9 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 3$$

Logo, $\overline{AB} = 3$

$$\overline{AB} = 2\overline{BC} \Leftrightarrow 3 = 2\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = 1,5$$

$$P = 2 \times 3 + 2 \times 1,5 = 9$$

Resposta (B).

Pág. 13

5. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AO} \cdot (-\overrightarrow{AB}) =$

$$= -\overrightarrow{AO} \cdot (2\overrightarrow{AO}) =$$

$$= -2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} =$$

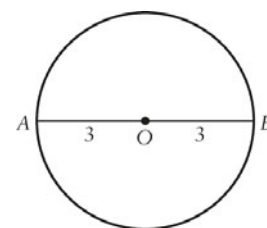
$$= -2\|\overrightarrow{AO}\|^2 = -2 \times 3^2 = -18$$

Resposta (C).

6. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}) =$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 + 0 = 0$$

Resposta (C).

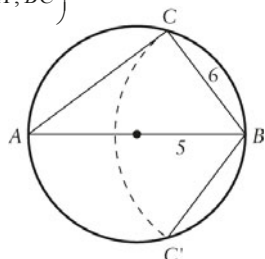


$$7. \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{BA, BC})$$

$$= 10 \times 6 \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA}} =$$

$$= 10 \times 6 \times \frac{6}{10} = 36$$

Resposta (A).



$$8. \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\widehat{OA, OB}) = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \times 3 \times \cos(\widehat{OA, OB}) = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{OA, OB}) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \left(\widehat{OA, OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Área da região sombreada} = \frac{1}{3} \times \text{área do círculo} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 = 3\pi$$

Resposta (A).

$$9. \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) =$$

$$= -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) = -\|\overrightarrow{CA}\|^2 - 0 =$$

$$= -12^2 = -144$$

Resposta (B).

Pág. 14

$$10. \quad \|\vec{a}\| = 5, \quad \|\vec{b}\| = 3; \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{2}{3}$$

$$10.1 \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= 25 + 5 \times 3 \times \frac{2}{3} = 35$$

$$10.2 \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 25 - 9 = 16$$

$$10.3 \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = 25 - 2 \times \left(5 \times 3 \times \frac{2}{3}\right) + 9 = 14$$

$$10.4 \quad \vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = \|\vec{b}\|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= 9 - 5 \times 3 \times \frac{2}{3} = -1$$

$$11. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \quad \text{e} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3$$

$$11.1 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 5 + 3 = 8$$

$$11.2 \quad \vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (2\vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{c} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3 =$$

$$= 2 \times 5 + 3 = 10$$

$$12. \quad \vec{x} = (1, k), \quad k \in \mathbb{R}; \quad \vec{y} = (2, -3)$$

12.1

$$\text{a)} \quad \vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 2 - 3k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\text{b)} \quad \vec{x} = \lambda \vec{y}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1, k) = \lambda(2, -3), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, k) = (2\lambda, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda \\ k = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

12.2

$$\text{a)} \quad k = -2$$

$$\vec{x} = (1, -2), \quad \vec{y} = (2, -3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|} = \frac{(1, -2) \cdot (2, -3)}{\sqrt{1+4} \times \sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{2+6}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$\text{Logo, } \left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right) \approx 7,1^\circ$$

$$\text{b)} \quad k = 3$$

$$\vec{x} = (1, 3)$$

$$\vec{y} = (2, -3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|} = \frac{(1, 3) \cdot (2, -3)}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{2-9}{\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = \frac{-7}{\sqrt{130}}$$

$$\text{Logo, } \left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right) \approx 127,9^\circ$$

13. $\vec{u} = (1, 7)$, $\vec{v} = (a, -2)$

$$2\vec{u} + \vec{v} = (2, 14) + (a, -2) = (2+a, 12)$$

$$\vec{v} \perp (2\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{v} \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (a, -2) \cdot (2+a, 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2+a) - 24 = 0 \Leftrightarrow 2a + a^2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 24 = 0 \Leftrightarrow a = -6 \vee a = 4$$

14. $O(0, 0)$, $A(-2, 2)$, $B(1, 3)$

$$\vec{OA} = (-2, 2), \quad \vec{AO} = (2, -2), \quad \vec{OB} = (1, 3)$$

$$\vec{AB} = B - A = (3, 1)$$

14.1 $\cos(\widehat{OAB}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\|} = \frac{-2+6}{\sqrt{4+4} \times \sqrt{1+9}} = \frac{4}{\sqrt{80}}$

$$\widehat{BOA} \approx 63,4^\circ$$

$$\widehat{ABO} \approx 180^\circ - 2 \times 63,4^\circ \approx 53,2^\circ$$

14.2 Os ângulos de vértices em O e em A são iguais. Logo, o

triângulo é isósceles sendo $\vec{AB} = \vec{OB}$.

$$P = \|\vec{OA}\| + 2\|\vec{OB}\| = \sqrt{4+4} + 2\sqrt{1+9} =$$

$$= \sqrt{8} + 2\sqrt{10} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

14.3 Como $\vec{AB} = \vec{OB}$, a altura do triângulo relativa à base $[OA]$

é $\vec{MB}$ sendo M o ponto médio de $[OA]$

$$M(-1, 1), \quad B(1, 3)$$

$$\vec{MV} = \sqrt{(1+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$A = \frac{\vec{OA} \times \vec{MB}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} = 18$$

$$5 + 2\vec{AC} = 18 \Leftrightarrow \vec{AC} = 6,5; \quad \vec{BC} = \vec{AC} = 6,5$$

$$C(x, y)$$

$$\begin{cases} \vec{AC} = \vec{BC} \\ \vec{BC} = 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 6,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - 6y + 9 = -6x + 9 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 6,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 1 = 6y \\ x^2 - 6x + y^2 - 33,25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ x^2 - 6x + \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\right)^2 - 33,25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ x^2 - 6x + \frac{16}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{1}{36} - 33,25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ 36x^2 - 216x + 64x^2 + 16x + 1 - 1197 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ 100x^2 - 200x - 1196 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ x = -\frac{13}{5} \vee x = \frac{23}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ x = -\frac{13}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \\ x = \frac{23}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{33}{10} \\ x = -\frac{13}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{63}{10} \\ x = \frac{23}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3,3 \\ x = -2,6 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6,3 \\ x = 4,6 \end{cases}$$

$$C(-2,6; -3,3) \text{ ou } C(4,6; 6,3)$$

17. $\vec{AB} = 6$; $\vec{OE} = 5$

17.1 $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$ porque $\vec{AD} \perp \vec{AB}$

17.2 $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) =$

$$= \vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{DC} = \|\vec{AD}\|^2 + 0 = 6^2 = 36$$

Pág. 15

15. $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(m, 10)$

$$\vec{BA} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\vec{BA} = A - B = (-2, -2)$$

$$\vec{BC} = C - B = (m-3, 5)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow (-2, -2) \cdot (m-3, 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(m-3) - 10 = 0 \Leftrightarrow -2m + 6 - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2m = 4 \Leftrightarrow m = -2$$

16. $A(-1, 3)$, $B(3, 0)$, $\vec{AC} = \vec{BC}$

$$\vec{AB} = B - A = (4, -3)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{16+9} = 5$$

17.3 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$ porque $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OE}$

17.4 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$

17.5 $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AO}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) =$
 $= (2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{BC} =$
 $= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AD} =$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \frac{1}{2} \times 0 =$
 $= \frac{1}{2} \times 6^2 = 18$

18.1

a) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) =$
 $= r \times r \times \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}r^2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \cdot (-\overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} =$
 $= -\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) =$
 $= -r \times r \times \cos(120^\circ) = -r^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}r^2$

18.2

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) =$
 $= a \times a \times \cos(60^\circ) = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} =$
 $= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 = (\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CO})$
 $= -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) =$
 $= -a \times a \times \cos(60^\circ) = -a^2 \times \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

Pág. 16

1. $r: y = 3x$
 $d_s = 3 \Rightarrow d_r = -\frac{1}{3}; \quad (2, 0) \in s$
 $s: y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
 Resposta (D).

2. $r: y = 3x - 1$
 $d_s = d_r = 3; \quad (-1, 0) \in s$
 $s: y - 0 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 3$
 Resposta (A).

3. $r: y = 2x; \quad \vec{r} = (1, 2)$
 $C(5, 0):$ Centro da circunferência
 $P(x, 2x)$ Ponto de tangência (pertence à reta $y = 2x$)
 $\overrightarrow{PC}$ é perpendicular a $\vec{r}$.
 $\overrightarrow{PC} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (5 - x, -2x) \cdot (1, 2) = 0 \Leftrightarrow 5 - x - 4x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$
 $x = 1 \Rightarrow P(1, 2)$

Raio da circunferência:

$$\overrightarrow{PC} = \sqrt{(1-5)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Equação da circunferência:

$$(x-5)^2 + y^2 = 20$$

Resposta (B).

4. $r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
 $(x-2)^2 + y^2 = 1; \text{ Centro: } C(2, 0)$

É a reta s que passa em $C(2, 0)$ e é perpendicular a r .

O seu declive é $m = -\frac{1}{d_r} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

$$s: y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}(x - 2)$$

Resposta (B).

5. $A(-1, 2), \quad B(3, 5)$

A reta r passa nos pontos A' e B' simétricos de A e B relativamente ao eixo das abcissas. Logo A' e B' têm as mesmas abcissas de A e B , respetivamente, e ordenadas simétricas:

$$A'(-1, -2), \quad B'(3, -5); \quad m = \frac{-5+2}{3+1} = -\frac{3}{4}$$

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 2$$

$$r: y = -\frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$$

Resposta (D).

Pág. 17

6. $r: y = mx + b$

r é a reta de declive m que passa nos pontos de coordenadas

$$(0, b) \text{ e } \left(-\frac{b}{m}, 0\right)$$

A reta s , simétrica de r relativamente ao eixo Ox , passa nos

pontos de coordenadas $(0, -b)$ e $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ (têm a mesma

abscissa e ordenadas simétricas).

$$\text{O declive de } s \text{ é } m' = \frac{0+b}{-\frac{b}{m}-0} = -\frac{bm}{b} = -m$$

$$\text{Logo, } s: y = -mx - b$$

Resposta (D).

7. $A(2, -2)$

$$r: x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1; \quad d_r = 1$$

$$s: (x, y) = (1, 0) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Reta t que passa em $A(2, -2)$ e é paralela à reta r , isto é,

tem declive $m = -1$:

$$t: y + 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 2 - 2 \Leftrightarrow y = x - 4$$

Resposta (C).

8. Circunferência: $x^2 + y^2 = 1$

$A\left(-\frac{1}{2}, y\right)$, $y < 0$. A pertence à circunferência. Logo,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Como } y < 0, \text{ temos } A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

8.1 Seja $P(x, y)$ um ponto da reta r :

$$\overline{AP} \cdot \overline{OA} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Resposta (B).

8.2 $s: y = x + b$, $b > 0$

A interseção de s com a circunferência é um e um só ponto:

$$\begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + b \\ x^2 + (x + b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + b \\ 2x^2 + 2bx + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

A equação $2x^2 + 2bx + b^2 - 1 = 0$ terá de ter uma única solução pelo que:

$$(2b)^2 - 4 \times 2(b^2 - 1) = 0 \quad (\Delta = 0)$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 8b^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 4b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 2$$

$$\text{Como } b > 0, \text{ temos } b = \sqrt{2} \text{ e } s: y = x + \sqrt{2}$$

Resposta (A).

Pág. 18

9. $A(-4, 0)$, $B(5, -3)$, $C(6, 5)$

9.1 Reta r :

$$AC: y = mx + b$$

$$m = \frac{5-0}{6+4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } A(-4, 0) \in r, \text{ temos } y - 0 = \frac{1}{2}(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

9.2 $s: y = mx + b$

$$d_s = -\frac{1}{d_r} = -2$$

Como $B(5, -3) \in s$, temos

$$y + 3 = -2(x - 5) \Leftrightarrow y = -2x + 10 - 3 \Leftrightarrow y = -2x + 7$$

9.3

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 7 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = -5 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$I(2, 3)$$

9.4 $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{IB}}{2}$

$$A(-4, 0), C(6, 5): \overline{AC} = \sqrt{(6+4)^2 + 5^2} = \sqrt{125}$$

$$I(2, 3), B(5, -3): \overline{IB} = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{125} \times \sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{25 \times 5} \times \sqrt{9 \times 5}}{2} = \frac{5\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{15 \times 5}{2} = 37,5$$

9.5 $\overline{BA} = A - B = (-4, 0) - (5, -3) = (-9, 3)$

$$\overline{BC} = C - B = (6, 5) - (5, -3) = (1, 8)$$

Seja α o ângulo das duas retas:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}|}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{|-9 + 24|}{\sqrt{81 + 9} \times \sqrt{1 + 64}} = \frac{15}{\sqrt{90} \times \sqrt{65}}$$

$$\alpha \approx 78,7^\circ$$

$$\begin{aligned} 9.6 \quad \cos \alpha &= \frac{15}{\sqrt{90} \times \sqrt{65}} = \frac{15}{\sqrt{9 \times 10} \times \sqrt{65}} = \frac{15}{3\sqrt{10} \times \sqrt{65}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{650}} = \frac{5}{\sqrt{25 \times 26}} = \frac{5}{5\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

$$5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(5\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(\alpha - 3\pi) =$$

$$= 5 \cos \alpha + \sin(\pi + \alpha) + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= 5 \cos \alpha - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= 5 \times \frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{5}{\sqrt{26}} + 5 = 5$$

Cálculos auxiliares:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

Como $\alpha \in 1.^\circ \text{Q}$, temos

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = 5$$

$$9.7 \quad \overrightarrow{AB} = (9, -3); \quad d_{AB} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Seja α a inclinação da reta AB :

$$\text{Então } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \text{ e } \alpha = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 161,6^\circ.$$

$$10 \quad A\left(\frac{1}{2}, 0\right); \quad D\left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

10.1 Seja X o centro do hexágono

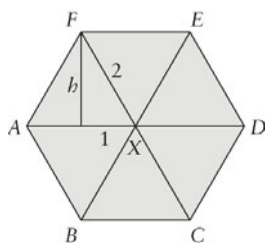
$X\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ é o ponto médio de $[AD]$.

$$\overrightarrow{AX} = \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2}, 0\right] = 2$$

$[AXF]$ é um triângulo equilátero. A sua altura h é a ordenada de F .

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}$$

$$F\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right), \quad B\left(\frac{3}{2}, -\sqrt{3}\right), \quad E\left(\frac{7}{2}, \sqrt{3}\right), \quad C\left(\frac{7}{2}, -\sqrt{3}\right).$$



$$10.2 \quad C\left(\frac{7}{2}, -\sqrt{3}\right), \quad D\left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

$$m = \frac{0 + \sqrt{3}}{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt{3}$$

$$CD: y - 0 = \sqrt{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$10.3 \quad D\left(\frac{9}{2}, 0\right); \quad m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Pág. 19

11. Centro da circunferência: $C(5, 5)$

$$P(9, 8), \quad Q(1, 8)$$

11.1 Se a circunferência tem centro em $C(5, 5)$ e é tangente aos eixos coordenados, o seu raio é igual a 5.

Logo, uma equação da circunferência é

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$11.2 \quad P(9, 8): (9 - 5)^2 + (8 - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + 9 = 25 \text{ (verdade)}$$

$$Q(1, 8): (1 - 5)^2 + (8 - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + 9 = 25 \text{ (verdade)}$$

$$11.3 \quad C(5, 5), \quad P(9, 8)$$

$$m = \frac{8 - 5}{9 - 5} = \frac{3}{4}$$

$$CP: y - 5 = \frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} + 5 \Leftrightarrow$$

$$r: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$C(5, 5), \quad Q(1, 8)$$

$$m = \frac{8 - 5}{1 - 5} = -\frac{3}{4}$$

$$CQ: y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} + 5 \Leftrightarrow$$

$$s: y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

$$11.4 \quad d_s = -\frac{3}{4}; \quad \alpha \text{ é a inclinação da reta } s.$$

$$a) \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 143,1^\circ$$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \wedge \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha) =$$

$$= -\cos \alpha - \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20}$$

Cálculos auxiliares:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in 2.^\circ \text{ Q, temos } \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in 2.^\circ \text{ Q, } \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

11.5 $C(5,5)$, $P(9,8)$, $Q(1,8)$

$$\overrightarrow{PC} = (-4, -3)$$

$$\overrightarrow{QC} = (4, -3)$$

$$R = C + \overrightarrow{CR} = C + \overrightarrow{CP} =$$

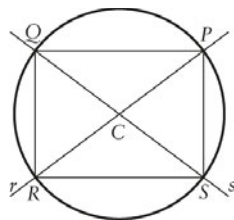
$$= (5, 5) + (-4, -3) = (1, 2)$$

$$R(1, 2)$$

$$S = C + \overrightarrow{CS} = C + \overrightarrow{CQ} = (5, 5) + (4, -3) = (9, 2)$$

$$S(9, 2)$$

As diagonais do quadrilátero $[PQRS]$ têm o mesmo comprimento e bisetam-se. Logo, $[PQRS]$ é um retângulo.



11.6

a) A reta t passa em $Q(1, 8)$ e é perpendicular a $\overrightarrow{CQ} = (-4, 3)$.

Logo, $\vec{t} = (3, 4)$ é um vetor diretor da reta t .

$$t: (x, y) = (1, 8) + k(3, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

b) $t: (x, y) = (1 + 3k, 8 + 4k), \quad k \in \mathbb{R}$

Para determinado valor de k o ponto X terá coordenadas

$$(1 + 3k, 8 + 4k).$$

Se o triângulo $[XQP]$ é retângulo em X terá de ser

$$\overrightarrow{XQ} \perp \overrightarrow{XP} \Leftrightarrow \overrightarrow{XQ} \cdot \overrightarrow{XP} = 0$$

Como $Q(1, 8)$ e $P(9, 8)$ temos

$$\overrightarrow{XQ} = Q - X = (1 - 1 - 3k, 8 - 8 - 4k) = (-3k, -4k)$$

$$\overrightarrow{XP} = P - X = (9 - 1 - 3k, 8 - 8 - 4k) = (8 - 3k, -4k)$$

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \overrightarrow{XP} = 0 \Leftrightarrow (-3k, -4k) \cdot (8 - 3k, -4k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3k(8 - 3k) - 4k(-4k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24k + 9k^2 + 16k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -24k + 25k^2 = 0 \Leftrightarrow k(25k - 24) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{24}{25}$$

Como $X \neq Q$, temos $k = \frac{24}{25}$.

Então, $X\left(1 + 3 \times \frac{24}{25}, 8 + 4 \times \frac{24}{25}\right)$, ou seja, $X\left(\frac{97}{25}, \frac{296}{25}\right)$

12.1 $r: y = mx + b$

$$b = 0 \text{ e } m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$s: y = mx + b$$

$$b = 0 \text{ e } m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$s: y = \sqrt{3}x$$

12.2 $d_r = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ o vetor $\vec{r} = (3, \sqrt{3})$ é um vetor diretor de r .

$$d_s = \sqrt{3} \Rightarrow \text{o vetor } \vec{s} = (1, \sqrt{3}) \text{ é um vetor diretor de } s.$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}|}{\sqrt{9 + 3} \times \sqrt{1 + 3}} = \frac{6}{\sqrt{12} \times 2} = \frac{3}{\sqrt{12}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4 \times 3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

12.3 $A(x, 2)$. Como $A \in s$ temos

$$2 = \sqrt{3}x \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

$$P(x, 1). \text{ Como } B \in r \text{ temos } 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

$$P(\sqrt{3}, 1)$$

12.4 A circunferência C tem centro no ponto $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$ e é

tangente a Oy . Logo, o seu raio r é igual a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 - 2\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$$

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = r$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right) \cdot (3, \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

Dado que $\|\overrightarrow{AP}\| = \text{raio}$ e a reta r é perpendicular a $\overrightarrow{AP}$, a circunferência C é tangente à reta r no ponto P .

12.5 $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$, $\vec{s} = (1, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{s}|}{\|\overrightarrow{AP}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right) \cdot (1, \sqrt{3})\right|}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1} \times \sqrt{1 + 3}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}} \times 2} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = 60^\circ$

12.6 Se o ângulo de AP com s tem amplitude igual a 60° então

$$\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}\right) = 120^\circ.$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = \|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AR}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \cos(120^\circ) =$$

$$= \frac{4 \times 3}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$$

Pág. 20

1. $ABV: x + y + z = 6$

$$A(x, 0, 0): x + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow x = 6$$

$$A(6, 0, 0)$$

$$B(0, y, 0): 0 + y + 0 = 6 \Leftrightarrow y = 6$$

$$B(0, 6, 0)$$

$$V(0, 0, z): 0 + 0 + z = 6 \Leftrightarrow z = 6$$

$$V(0, 0, 6) \text{ e } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OV} = 6$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{altura} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{2} \times \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6 = 36$$

Resposta (B).

2. $r: x = y = z - \lambda^2$

$$\alpha: \lambda^2 x + \lambda y + z = 2$$

$$\begin{cases} (1, 1, 2) \in r \\ (1, 1, 2) \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - \lambda^2 \\ \lambda^2 + \lambda + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 1 \\ \lambda(\lambda + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \vee \lambda = -1 \\ \lambda = 0 \vee \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$$

Resposta (B).

3. $r: x = 2 \wedge y = 3$

$\vec{r} = (0, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

Logo, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ define uma reta paralela à reta r .

Resposta (C).

4. $\alpha: x - y = 0$; $\beta: z = 1$

$$r: x - y = 0 \wedge z = 1 \Leftrightarrow x = y \wedge z = 1$$

$\vec{r} = (1, 1, 0)$ é um vetor diretor da reta r . O ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$ é um ponto da reta r .

Resposta (B).

Pág. 21

5. $r: \frac{x-1}{k} = 2ky = z \Leftrightarrow \frac{x-1}{k} = \frac{y}{\frac{1}{2k}} = z$

é um vetor diretor da reta r .

$\alpha: 2x + y + 2z = 1$; $\vec{n} = (2, 1, 2)$ é perpendicular a α .

$\vec{r}$ terá de ser colinear com $\vec{n}$.

$$\vec{r} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \left(k, \frac{1}{2k}, 1\right) = \lambda(2, 1, 2) \Leftrightarrow$$

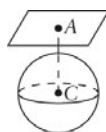
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\lambda \\ \frac{1}{2k} = \lambda \\ 1 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

Resposta (A).

6. A condição $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 3 \wedge x+y+z=3$ define a interseção da esfera de centro em $(1,1,1)$ e raio $\sqrt{3}$ com o plano definido por $x+y+z=3$.
Como $1+1+1=3$, o plano passa no centro da esfera. Logo, a interseção é um círculo de raio igual a $\sqrt{3}$.
Resposta (C).

7. A condição $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ define a superfície esférica de centro em $C(1,2,3)$.
 $A(5,0,0): (0-1)^2 + (5-2)^2 + (0-3)^2 = 19 > 9$
 A é exterior à superfície esférica.
A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ define o plano que passa no ponto A e é perpendicular a $\overrightarrow{AC}$.

Dado que A é exterior à superfície esférica e a reta AC passa no seu centro, o plano não intersesta a superfície esférica.



Resposta (C).

8. $\alpha: x-y+z=1$
 $r: x=-z \wedge y=1$
 $\vec{u} = (1, -1, 1) \perp \alpha$
 $\vec{r} = (1, 0, -1)$ é um vetor diretor da reta r .
 $\vec{u} \cdot \vec{r} = 1 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{r} \Rightarrow$ a reta r é paralela ao plano α .
O ponto de coordenadas $(0,1,0)$ pertence à reta r .
 $0 - 1 + 0 = 1$ é falso. Logo, o ponto de coordenadas $(0,1,0)$ não pertence ao plano α .
Portanto, a reta r é estritamente paralela ao plano α .
Resposta (D).

Pág. 22

9. $A(1,1,3)$
Altura da pirâmide: $h=5$.
9.1 $B(-1,1,3), C(-1,-1,3), D(1,-1,3)$
 $3+h=3+5=8: V(0,0,8)$
9.2 Seja α o plano que passa em D e é perpendicular a VA .
 $\overrightarrow{VA} = A - V = (1,1,3) - (0,0,8) = (1,1,-5)$
 $\alpha: 1x+1y-5z+d=0$

$D(1,-1,3)$ pertence ao plano α

$$1-1-5 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 15$$

$$\alpha: x+y-5z+15=0$$

$$9.3 \overrightarrow{VD} = D - V = (1,-1,3) - (0,0,8) = (1,-1,-5)$$

$$\overrightarrow{VA} = (1,1,-5)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\widehat{VD, VA}) = \frac{|\overrightarrow{VD} \cdot \overrightarrow{VA}|}{\|\overrightarrow{VD}\| \times \|\overrightarrow{VA}\|} = \\ &= \frac{|(1,-1,-5) \cdot (1,1,-5)|}{\sqrt{1+1+25} \times \sqrt{1+1+25}} = \frac{|1-1+25|}{\sqrt{27} \times \sqrt{27}} = \frac{25}{27} \\ \cos \alpha &= \frac{25}{27} \Rightarrow \alpha \approx 22,19^\circ \end{aligned}$$

$$9.4 D(1,-1,3)$$

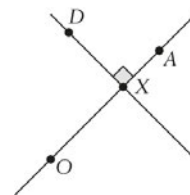
Reta AO :

$$A(1,1,3); \overrightarrow{OA} = (1,1,3)$$

$$AO: (x,y,z) = (0,0,0) + k(1,1,3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico da reta AO :

$$X(k, k, 3k), \quad k \in \mathbb{R}$$



A reta pedida é a reta DX em que

$$\overrightarrow{DX} \perp \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{DX} = X - D = (k-1, k+1, 3k-3), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow (k-1, k+1, 3k-3) \cdot (1,1,3) = 0$$

$$k-1+k+1+9k-9=0 \Leftrightarrow 11k=9 \Leftrightarrow k=\frac{9}{11}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DX} &= \left(\frac{9}{11}-1, \frac{9}{11}+1, 3 \times \frac{9}{11}-3\right) = \left(-\frac{2}{11}, \frac{20}{11}, -\frac{6}{11}\right) = \\ &= -\frac{2}{11}(1, -10, 3) \end{aligned}$$

Logo, a reta pedida passa em $D(1,-1,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (1, -10, 3)$.

Pode ser definida por:

$$x-1 = \frac{y+1}{-10} = \frac{z-3}{3}$$

10.1 $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$

$$\overline{OB} = 2\sqrt{2}$$

Seja a a aresta do cubo.

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$$

$$a^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

O cubo tem aresta igual a 2.

$$D(0, 0, 2)$$

O centro X do cubo é o ponto médio de $[BD]$.

$$X(0, \sqrt{2}, 1)$$

10.2 $\overline{BD} = D - B = (0, 0, 2) - (0, 2\sqrt{2}, 0) = (0, -2\sqrt{2}, 2)$

$$E(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$$

$$\alpha: 0x - 2\sqrt{2}y + 2z + d = 0$$

Como $E \in \alpha$ temos

$$0 \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$\alpha: -2\sqrt{2}y + 2z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}y - z = 0$$

10.3 Centro: $X(0, \sqrt{2}, 1)$

$$\text{Raio: } \overline{OX} = \sqrt{0^2 + 2 + 1} = \sqrt{3} \quad (\overline{OX} = \overline{DX})$$

$$x^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z - 1)^2 = 3$$

Pág. 23

11. $F(3, 5, 2)$

$$\text{Ponto médio de } [OF]: M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

Plano α que passa em M e é perpendicular a $\overline{OF} = (3, 5, 2)$

$$\alpha: 3x + 5y + 2z + d = 0$$

Dado que $M \in \alpha$ temos:

$$3 \times \frac{3}{2} + 5 \times \frac{5}{2} + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{9}{2} - \frac{25}{2} - 2 \Leftrightarrow d = -19$$

$$\alpha: 3x + 5y + 2z - 19 = 0$$

11.2 $\overline{OF} = (3, 5, 2)$; $\overline{OA} = (3, 0, 0)$

$$\cos(\overline{OF} \wedge \overline{OA}) = \frac{\overline{OF} \cdot \overline{OA}}{\|\overline{OF}\| \times \|\overline{OA}\|} = \frac{9 + 0 + 0}{\sqrt{9 + 25 + 4} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

$$\cos(\overline{OF} \wedge \overline{OA}) = \frac{3}{\sqrt{38}} \Rightarrow (\overline{OF} \wedge \overline{OA}) \approx 60,9^\circ$$

11.3 Seja r a reta que passa em F e é paralela a $\overline{AG}$:

$$F(3, 5, 2)$$

$$\overline{AG} = G - A = (0, 5, 2) - (3, 0, 0) = (-3, 5, 2)$$

$$r: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{2}$$

Plano yOz : $x = 0$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{0-3}{-3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-5}{5} = 1 \\ \frac{z-2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \\ z = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$W(0, 10, 4)$$

11.4

$$P(x, y, z), F(3, 5, 2), B(3, 5, 0)$$

$$\overline{FP} = P - F = (x - 3, y - 5, z - 2)$$

$$\overline{BP} = P - B = (x - 3, y - 5, z)$$

$$\overline{FP} \perp \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{FP} \cdot \overline{BP} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3, y - 5, z - 2) \cdot (x - 3, y - 5, z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 3) + (y - 5)(y - 5) + (z - 2)z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

Superfície esférica de centro no ponto de coordenadas

$(3, 5, 1)$ e raio 1, ou seja, a superfície esférica de diâmetro

$[BF]$.

12 $B(0, 3, 0)$, $\overline{BV} = 6$; $\overline{OB} = 3$

12.1 $\overline{OV}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BV}^2 \Leftrightarrow$

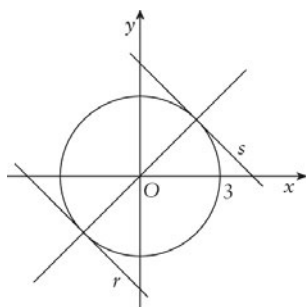
$$\Leftrightarrow \overline{OV}^2 + 3^2 = 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OV}^2 = 27 \Leftrightarrow \overline{OV} = 3\sqrt{3}$$

$$V(0, 0, 3\sqrt{3})$$

Plano paralelo a xOy que passa em V : $z = 3\sqrt{3}$

- 12.2** Da família de rectas definidas por $y = -x + b$ consideremos as que intersejam a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ num e num só ponto:



$$\begin{cases} y = -x + b \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + b \\ x^2 + (-x + b)^2 = 9 \end{cases}$$

Determinemos os valores de b para os quais a equação

$$x^2 + (-x + b)^2 = 9 \text{ tem uma e uma só solução:}$$

$$x^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2bx + b^2 - 9 = 0$$

$$\text{Terá de ser } (-2b)^2 - 4 \times 2(b^2 - 9) = 0 \quad (\Delta = 0)$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 8b^2 + 72 = 0 \Leftrightarrow 4b^2 = 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 18 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{9 \times 2} \Leftrightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

Retas pedidas:

$$y = -x + 3\sqrt{2} \text{ e } y = -x - 3\sqrt{2}$$

12.3 $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$

13. $r: \frac{x-1}{2} = y-2 = 1+z$

$$\alpha: 2x + my + z = 0; \quad \beta: x + 2y + z = 4$$

13.1 $\vec{u} = (2, m, 1) \perp \alpha$

$\vec{r} = (2, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

$$\alpha \parallel r \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow 4 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -5$$

13.2 Equação vetorial da reta r :

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico da reta r :

$$R(1 + 2k, 2 + k, -1 + k)$$

$$\beta: x + 2y + z = 4$$

$$r \in \beta \Leftrightarrow (1 + 2k) + 2(2 + k) + (-1 + k) = 4$$

$$\Leftrightarrow 5k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Substituindo, em R , k por 0 obtém-se $I(1, 2, -1)$ que é o ponto pedido.

14. $A(2, -2, 4); C(-2, 2, 4)$

14.1 $O(0, 0, 0), B(2, 2, 4)$

$$\vec{OB} = (2, 2, 4), \quad \vec{BC} = (-4, 0, 0)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp OBC$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{OB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-4, 0, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 4c = 0 \\ -4a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 4c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} = (0, -2c, c); \text{ Para } c = -1 \text{ temos } \vec{n} = (0, 2, -1) \perp OBC$$

$$OBC: 0x + 2y - z + d = 0$$

Como $O \in OBC$, temos

$$0 + 0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Logo, $OBC: 2y - z = 0$

14.2 $\vec{OC} = C - O = (-2, 2, 4); \vec{OD} = D - O = (-2, -2, 4)$

$$\cos(\vec{OC}, \vec{OD}) = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OD}}{\|\vec{OC}\| \times \|\vec{OD}\|} =$$

$$= \frac{4 - 4 + 16}{\sqrt{4 + 4 + 16} \times \sqrt{4 + 4 + 16}} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{24} \times \sqrt{24}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\cos(\vec{OC}, \vec{OD}) = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{C\hat{O}D} \approx 48,2^\circ$$

14.3 $\alpha: 2x + z + 1 = 0$

$$\vec{u} = (2, 0, 1) \perp \alpha$$

$$\vec{AB} = B - A = (2, 2, 4) - (2, -2, 4) = (0, 4, 0)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = (0, 4, 0) \cdot (2, 0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{u} \Rightarrow \text{o plano } \alpha \text{ é paralelo à reta } AB.$$

15.1 $K(3, 6, -3), J(0, 6, 0),$

$$A(6, 0, -3), B(6, 6, -3)$$

$$\vec{KJ} = (-3, 0, 3), \quad \vec{AB} = (0, 6, 0)$$

$$\vec{KJ} \cdot \vec{AB} = (0, 6, 0) \cdot (-3, 0, 3) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow KJ \perp AB$$

15.2 $L(6,0,0)$; $J(0,6,0)$

Ponto médio de $[LJ]$: $M(3,3,0)$

$$\overrightarrow{LM} = (-6, 6, 0)$$

Plano α , mediador de $[LJ]$:

$$-6(x-3) + 6(y-3) + 0(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 18 + 6y - 18 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\alpha: x - y = 0$$

$$H(0,0,3): 0 - 0 = 0; H \in \alpha$$

$$F(6,6,3): 6 - 6 = 0; F \in \alpha.$$

Logo a reta HF está contida em α .

15.3 $I(3,0,3)$; $J(0,6,0)$; $L(6,0,0)$

$$\overrightarrow{JI} = (3, -6, 3); \quad \overrightarrow{JL} = (6, -6, 0)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp ILJ$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{JI} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, -6, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (6, -6, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 6b + 3c = 0 \\ 6a - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 6a + 3c = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a \end{cases}$$

$$\vec{n} = (a, a, a);$$

Para $a = 1$ temos $\vec{n} = (1, 1, 1) \perp ILJ$

$$ILJ: x + y + z + d = 0$$

Como $L(6,0,0) \in ILJ$, temos $6 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Logo, $ILJ: x + 2y + z - 6 = 0$

$$K(3,6,-3) \in ILJ \text{ porque } 3 + 6 - 3 - 6 = 0$$

15.4 $\overrightarrow{JL} = (6, -6, 0)$;

$$\overrightarrow{IK} = K - I = (3, 6, -3) - (3, 0, -3) = (0, 6, -6)$$

$$\cos(\widehat{JL, IK}) = \frac{|\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{IK}|}{\|\overrightarrow{JL}\| \times \|\overrightarrow{IK}\|} = \frac{|(6, -6, 0) \cdot (0, 6, -6)|}{\sqrt{36 + 36 + 0} \times \sqrt{0 + 36 + 36}} =$$

$$= \frac{|-36|}{\sqrt{72} \times \sqrt{72}} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\widehat{JL, IK}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{JL, IK}) = 60^\circ$$

16.1 O vetor $\vec{r} = (2, 2, 1)$ tem a direção da reta r .

O vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$ tem a direção do eixo Ox .

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{i}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{i}\|} = \frac{|(2, 2, 1) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \times \sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 35,3^\circ$$

16.2 $M(2, 1, 1)$ é o ponto médio de $[AB]$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 0, 2)$$

$$\alpha: -4x + 0y + 2z + d = 0$$

Substituindo as coordenadas de M , temos

$$-8 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

Logo, $\alpha: -4x + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 3 = 0$

16.3 $\vec{n} = (2, 0, -1) \perp \alpha$; $\vec{n}$ é um vetor diretor da reta r pedida.

$$A(4, 1, 0) \in r$$

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{z}{-1} \wedge y = 1$$

16.4 $\overrightarrow{AB} = (-4, 0, 2)$

$$\vec{u} = (-4k, k^2 - 1, k + 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (-4k, k^2 - 1, k + 1) = (-4\lambda, 0, 2\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4k = -4\lambda \\ k^2 - 1 = 0 \\ k + 1 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \lambda \\ k = 1 \vee k = -1 \\ k + 1 = 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = k \\ k = 1 \vee k = -1 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

16.5 r e s são coplanares se e só se $r \parallel s$ ou r e s são concorrentes

$$\vec{r} = (2, 1, 1)$$

$$\vec{s} = (2, -2, 1)$$

Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares $\left(\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-2}\right)$, as retas r e s

não são paralelas.

$$r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + k(2, 1, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$R(1 + 2k, 1 + k, k), \quad k \in \mathbb{R} \text{ é um ponto genérico de } r.$$

$$s: (x, y, z) = (5, 2, 0) + \lambda(2, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$S(5 + 2\lambda, -2\lambda, 2 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ é um ponto genérico de } s.$$

16. $A(4, 1, 0)$; $B(0, 1, 2)$; $r: \frac{x-1}{2} = y - 1 = z$

$$s: (x, y, z) = (5, 0, 2) + \lambda(2, 2, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Interseção de r com s .

$$\begin{aligned} R = S &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1+2k, 1+k, k) &= (5+2\lambda, -2\lambda, 2+\lambda), k, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2k = 5+2\lambda \\ 1+k = -2\lambda \\ k = 2+\lambda \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 4+2\lambda \\ 1+2+\lambda = -2\lambda \\ k = 2+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 4+2\lambda \\ 3\lambda = -3 \\ k = 2+\lambda \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 4+2\lambda \\ \lambda = -1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4-2 \quad (V) \\ \lambda = -1 \\ k = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo k em R (ou λ em S) obtém-se o ponto I de interseção das duas retas: $I(3, 2, 1)$

As retas r e s são concorrentes em I , logo, são coplanares.

16.6 $\vec{r} = (2, 1, 1)$; $\vec{s} = (2, -2, 1)$

Seja β o plano pedido e $\vec{n} = (a, b, c) \perp \beta$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - b \\ 2a - 2b - 2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\vec{n} = (a, 0, -2a)$; Para $a = 1$, temos $\vec{n} = (1, 0, -2)$

β : $x + 0y - 2z + d = 0$

Como o ponto de coordenadas $(1, 1, 0)$ pertence a β , temos

$1 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Logo, β : $x - 2z - 1 = 0$

16.7 $A(4, 1, 0)$, $\vec{OA} = (4, 1, 0)$

Raio: $r = \|\vec{OA}\| = \sqrt{16 + 1 + 0} = \sqrt{17}$

$(x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 17$

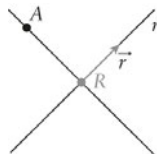
16.8 Ponto genérico da reta r :

$R(1+2k, 1+k, k)$

Vetor diretor da reta r :

$\vec{r} = (2, 1, 1)$

$A(4, 1, 0)$



A reta pedida é a reta AR tal que $R \in r$ e $\vec{AR} \cdot \vec{r} = 0$.

$\vec{AR} = R - A = (1-2k-4, 1+k-1, k-0) = (2k-3, k, k)$

$\vec{AR} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (2k-3, k, k) \cdot (2, 1, 1) = 0$

$\Leftrightarrow 4k - 6 + k + k = 0 \Leftrightarrow 6k = 6 \Leftrightarrow k = 1$

$\vec{AR} = (2-3, 1, 1) = (-1, 1, 1)$

$AR: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow -x+4 = y-1 = z$

17.1 $[AOB]$ é um triângulo retângulo em O .

$\frac{\vec{OB}}{\vec{OA}} = \operatorname{tg} \theta \Leftrightarrow \frac{b}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \Rightarrow b \approx 0,8$

17.2 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$; $D(3, 0, 8)$

a) $\alpha: 2x + 3y - 6 = 0$

$6 + 0 - 6 = 0; \quad A \in \alpha$

$0 + 6 - 6 = 0; \quad B \in \alpha$

$6 + 0 - 6 = 0; \quad D \in \alpha$

Logo, α é o plano ABD , ou seja, é o plano que contém a face $[ABCD]$.

b) O plano β que contém a face oposta é paralelo a α . Logo,

$\beta: 2x + 3y + d = 0$

Como $E(-3, 0, 8) \in \beta$ temos que:

$2 \times (-3) + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$

$\beta: 2x + 3y + 6 = 0$

c) $A(3, 0, 0)$; $C(0, 2, 8)$

O centro da esfera é M , ponto médio de $[AC]$: $M\left(\frac{3}{2}, 1, 4\right)$.

O raio é igual a $\frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 + 64} = \frac{1}{2} \sqrt{77}$

Condição: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq \frac{77}{4}$

Seja $P(-1, 1, 1)$; $\left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1-1)^2 + (4-4)^2 \leq \frac{77}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{77}{4} \Leftrightarrow \frac{25}{4} \leq \frac{77}{4}$ (verdadeiro)

Como P é um ponto da esfera e pertence ao 2.º octante, a esfera tem uma parte no 2.º octante.

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq \frac{77}{4} \wedge x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$

d) $\pi: 0,5k^2x - ky = -x \Leftrightarrow (0,5k^2 + 1)x - ky = 0$

$\vec{u} = (0,5k^2 + 1, -k, 0)$ define a família de vetores

perpendiculares aos planos π .

$\vec{n} = (2, 3, 0)$ é perpendicular a α .

Terá de ser $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (0,5k^2 + 1, -k, 0) \cdot (2, 3, 0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + 2 - 3k = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 2$

Pág. 26

18. $A(1, 0, 1), B(1, -1, 0), C(0, 2, 1), D(0, 3, 0)$

$\pi: 2x + 3y - 6 = 0$

18.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp ABC$.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b - c = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 2b \end{cases}$$

$\vec{n} = (2b, b, -b)$. Para $b = 1$, vem $\vec{n} = (2, 1, -1)$

Se $\vec{n} \perp ABC$ então $\vec{n} \perp \alpha$

$\alpha: 2x + y - z + d = 0$

Como α passa na origem, vem $d = 0$

$\alpha: 2x + y - z = 0$

18.2 $\vec{n}_1 = (2, 3, 0) \perp \pi$

$\vec{n}_2 = (2, 1, -1) \perp \alpha$

Seja θ o ângulo dos dois planos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \times \|\vec{n}_2\|} = \frac{|4 + 3 + 0|}{\sqrt{4 + 9} \times \sqrt{4 + 1 + 1}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{78}}$$

$$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{78}} \Rightarrow \theta \approx 37,6^\circ$$

18.3 Seja γ o plano medidor de $[BC]$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 3, 1)$

O ponto médio de $[BC]$ é $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Se $ax - by - az = 3$ é o plano medidor de $[BC]$ então:

$(a, -b, -a)$ é colinear com $(-1, 3, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, 6, -a) = k(-1, 3, 1), k \in \mathbb{R} \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -k \\ 6 = 3k \\ -a = k \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ k = 2 \\ a = -2 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \wedge b = -6$$

18.4 Ponto de interseção de π com Oy :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad P(0, 2, 0) = \alpha \cap Oy$$

$A(1, 0, 1)$: centro da superfície esférica

Raio $= \|\overrightarrow{AP}\| = \|(-1, 2, -1)\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$

18.5 $\lambda^2 x - 2\lambda y + 2x = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2)x - 2\lambda y = 0$

$(\lambda^2 + 2, -2\lambda, 0) \cdot (2, 3, 0) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 4 - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2$

18.6 $C(0, 2, 1); D(0, 3, 0)$

$\overrightarrow{CD} = (0, 1, -1)$

$r: x = 0 \wedge \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow x = 0 \wedge y - 3 = -z$

18.7
$$\begin{cases} x = 0 \wedge y - 3 = -z \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 3 = -z \\ 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$r \cap \pi = (0, 2, 1)$

18.8 $K(1, 1, 1)$

$r: x = 0 \wedge y - 3 = -z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge z = 3 - y$

Ponto genérico da reta r

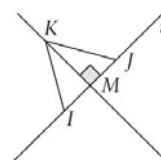
$R(0, y, 3 - y), \quad \vec{r} = (0, 1, -1)$

$\overrightarrow{KR} = (-1, y - 1, 3 - y - 1) = (-1, y - 1, 2 - y)$

$\overrightarrow{KR} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (-1, y - 1, 2 - y) \cdot (0, 1, -1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - 1 - 2 + y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$



Substituindo y por $\frac{3}{2}$ em R obtemos o ponto M da reta r tal

que M é o ponto médio de $[IJ]$, ou seja, a altura do

triângulo $[IJK]$ é igual a $\overline{KM}$.

$$M\left(0, \frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

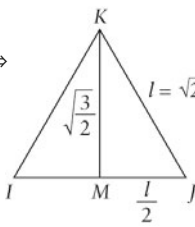
$$\overline{KM} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Seja l a medida do lado do triângulo $[IJK]$

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3l^2}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \Leftrightarrow l = \sqrt{2}$$


Terá de ser

$$\|\overline{KR}\| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + (y-1)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 + (y-1)^2 + (2-y)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + y^2 - 2y + 1 + 4 - 4y + y^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$$

Substituindo y em R obtemos I e J .

$$y = 1: (0, 1, 3-1) = (0, 1, 2)$$

$$y = 2: (0, 2, 3-2) = (0, 2, 1)$$

$$I(0, 1, 2) \text{ e } J(0, 2, 1)$$

18.9 $P(2, 5, 0); \vec{r} = (0, 1, -1)$

Ponto genérico de r : $R(0, y, 3-y)$

$$\text{Tem de ser } \overline{PR} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (-2, y-5, 3-y) \cdot (0, 1, -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 5 - 3 + y = 0 \Leftrightarrow 2y = 8 \Leftrightarrow y = 4$$

Para $y = 4$ obtemos o ponto $X(0, 4, -1)$

A reta pedida é a reta PX

$$\overline{PX} = X - P = (-2, -1, -1)$$

$$PX: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = y-5 = z$$

19.1 $\overline{OC} = (-1, 1, 0)$

$$B = A + \overline{AB} = A + \overline{OC} = (1, 1, 0) + (-1, 1, 0) = (0, 2, 0)$$

$$B(0, 2, 0)$$

$$\overline{OD} = (0, 0, 1)$$

$$E = A + \overline{OD} = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$F = B + \overline{OD} = (0, 2, 0) + (0, 0, 1) = (0, 2, 1)$$

$$G = C + \overline{OD} = (-1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (-1, 1, 1)$$

19.2 $\overline{AC} = C - A = (-2, 0, 0); \overline{AD} = D - A = (-1, -1, 1)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp \alpha$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

$\vec{n} = (0, b, b)$. Para $b = 1$ temos $\vec{n} = (0, 1, 1)$

$$\alpha: 0x + 1y + 1z + d = 0$$

$$\text{Como } D \in \alpha \text{ vem que } 0 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

$$\alpha: y + z - 1 = 0$$

19.3 $O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), D(0, 0, 1)$

$$\overline{OA} = (1, 1, 0) \text{ e } \overline{OD} = (0, 0, 1)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp OAD$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{OA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{OD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \end{cases}$$

$\vec{n} = (a, -a, 0)$. Para $a = 1$ temos $\vec{n} = (1, -1, 0)$

$$OAD: x - y + d = 0$$

Como $O(0, 0, 0)$ é um ponto do plano temos $d = 0$

$$OAD: x - y = 0$$

$$\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z = y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 - z$$

Equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$$

19.4 $\overline{OA} = (1, 1, 0); \|\overline{OA}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\overline{OC} = (-1, 1, 0); \|\overline{OC}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{OD} = (0, 0, 1); \|\overline{OD}\| = 1$$

$$V = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = 2;$$

$$V = 2 \text{ cm}^3$$

20.1 $O(0,0,0)$, $F(-2,4,2)$

$M(-1,2,1)$ é o ponto médio de $[OF]$

$\overline{OF} = (-2,4,2)$ é perpendicular ao plano

$$-2x + 4y + 2z + d = 0$$

Como o plano passa em M , temos

$$-2 \times (-1) + 4 \times 2 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

$$-2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 6 = 0$$

20.2 $\overline{CE} = E - C = (-2,4,0) - (0,0,2) = (-2,4,-2)$

$$\overline{BD} = D - B = (0,4,0) - (-2,0,2) = (2,4,-2)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\widehat{CE, BD}) = \frac{|\overline{CE} \cdot \overline{BD}|}{\|\overline{CE}\| \times \|\overline{BD}\|} = \\ &= \frac{|-4 + 16 + 4|}{\sqrt{4 + 16 + 4} \times \sqrt{4 + 16 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{24} \times \sqrt{24}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \\ \cos \alpha &= \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48,2^\circ \end{aligned}$$

20.3 $C(0,0,2)$, $E(-2,4,0)$, $B(-2,0,2)$

$$\overline{CE} = (-2,4,-2) \text{ e } \overline{CB} = (-2,0,0)$$

Seja $\vec{n} = (a,b,c) \perp CEB$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{CE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b - 2c = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} = (0,b,2b). \text{ Para } b = 1 \text{ temos } \vec{n} = (0,1,2)$$

$$y + 2z + d = 0$$

Como C pertence ao plano, temos

$$0 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

$$CEB: y + 2z - 4 = 0$$

20.4 $OF: (x,y,z) = (0,0,0) + k(-2,4,2)$, $k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico de OF : $R(-2k,4k,2k)$

Para que R pertença a CEB , terá de ser

$$4k + 2(2k) - 4 = 0 \Leftrightarrow 8k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Substituindo em R obtemos o ponto I pedido

$$I\left(-2 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$I(-1,2,1)$$

20.5 $\pi: kx - ky + (k^2 - 4)z = x \Leftrightarrow kx - ky + (k^2 - 4)z - x = 0$

$$\pi: (k-1)x - ky + (k^2 - 4)z = 0$$

$$\vec{n} = (k-1, -k, k^2 - 4) \perp \pi$$

$$\overline{CF} = F - C = (-2,4,2) - (0,0,2) = (-2,4,0)$$

Para que π seja perpendicular a CF terá de $\vec{n}$ ser colinear

$$\text{com } \overline{CF}: \vec{n} = \lambda \overline{CF}$$

$$(k-1, -k, k^2 - 4) = \lambda(-2,4,0) \Leftrightarrow \begin{cases} k-1 = -2\lambda \\ -k = 4\lambda \\ k^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda - 1 = -2\lambda \\ k = -4\lambda \\ k = -2 \vee k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ k = 2 \\ k = -2 \vee k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

20.6 $\overline{PD} \cdot \overline{PF} = 0$ define a superfície esférica de diâmetro $[DF]$

$$D(0,4,0), F(-2,4,2)$$

Centro da superfície esférica: $X\left(\frac{0-2}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ isto é

$$X(-1,4,1)$$

$$\text{Raio: } \overline{DX} = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Equação: } (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 2$$

21.1 $V(2,2,h)$ sendo h a altura da pirâmide.

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$\frac{128}{3} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times h \Leftrightarrow \frac{128}{3} = \frac{16h}{3} \Leftrightarrow 16h = 128 \Leftrightarrow h = 8$$

$$V(2,2,8)$$

21.2 $\alpha: 2x + 2y + 3z - 20 = 0$

$$O(0,0,0), A(4,0,0), B(4,4,0), C(0,4,0), V(2,2,8)$$

Ponto S :

$$\overline{OV} = (4,2,8)$$

$$OV: (x,y,z) = (0,0,0) + k(4,2,8), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ponto genérico de } OV: X = (2k, 2k, 8k)$$

$$S = OV \cap \alpha$$

$$2(2k) + 2(2k) + 3(8k) - 20 = 0 \Leftrightarrow 32k = 20 \Leftrightarrow k = \frac{5}{8}$$

$$S\left(2 \times \frac{5}{8}, 2 \times \frac{5}{8}, 8 \times \frac{5}{8}\right); S\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 5\right)$$

Ponto P:

$$\overrightarrow{AV} = (-2, 2, 8)$$

$$AV: (x, y, z) = (4, 0, 0) + k(-2, 2, 8), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de AV: $Y = (4 - 2k, 2k, 8k)$

$$P = AV \cap \alpha$$

$$2(4 - 2k) + 2(2k) + 3(8k) - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4k + 4k + 24k = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$P\left(4 - 2 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{2}, 8 \times \frac{1}{2}\right); P(3, 1, 4)$$

Ponto Q:

$$\overrightarrow{BV} = (-2, -2, 8)$$

$$BV: (x, y, z) = (4, 4, 0) + k(-2, -2, 8), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de BV: $Z = (4 - 2k, 4 - 2k, 8k)$

$$Q = BV \cap \alpha$$

$$2(4 - 2k) + 2(4 - 2k) + 3(8k) - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4k + 8 - 4k + 24k = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$Q\left(4 - 2 \times \frac{1}{4}, 4 - 2 \times \frac{1}{4}, 8 \times \frac{1}{4}\right); Q\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$$

Ponto R:

$$\overrightarrow{CV} = (2, -2, 8)$$

$$CV: (x, y, z) = (0, 4, 0) + k(2, -2, 8), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de CV: $W = (2k, 4 - 2k, 8k)$

$$R = CV \cap \alpha$$

$$2(2k) + 2(4 - 2k) + 3(8k) - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + 8 - 4k + 24k = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$R\left(2 \times \frac{1}{2}, 4 - 2 \times \frac{1}{2}, 8 \times \frac{1}{2}\right); R(1, 3, 4)$$

$$P(3, 1, 4); Q\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 2\right); R(1, 3, 4) \text{ e } S\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 5\right)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-2, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{QS} = S - Q = \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{2}, \frac{5}{4} - \frac{7}{2}, 3\right) = \left(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4}, 3\right)$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = -2 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 2 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 0 \times 3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QS}$$

21.4 Vamos decompor $[PQRS]$ nos triângulos $[PRS]$ e $[PQR]$.

Seja M o ponto de interseção de PR com SQ.

$$PR: (x, y, z) = (3, 1, 4) + k(-2, 2, 0), k \in \mathbb{R}$$

$$QS: (x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 2\right) + \lambda\left(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4}, 3\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de PR: $T = (3 - 2k, 1 + 2k, 4)$

Ponto genérico de QS: $U = \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{4}\lambda, \frac{7}{2} - \frac{9}{4}\lambda, 2 + 3\lambda\right)$

$$M = PR \cap QS$$

$$T = U \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2k = \frac{7}{2} - \frac{9}{4}\lambda \\ 1 + 2k = \frac{7}{2} - \frac{9}{4}\lambda \\ 4 = 2 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2k = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} \\ 1 + 2k = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2k = 2 \\ 1 + 2k = 2 \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

O ponto M, interseção de PR com SQ é obtido substituindo k

por $\frac{1}{2}$ em T.

$$M\left(3 - 2 \times \frac{1}{2}, 1 + 2 \times \frac{1}{2}, 4\right)$$

$$M(2, 2, 4)$$

Como era de esperar M é o ponto médio de $[PR]$

$$M(2, 2, 4), S\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 5\right), Q\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$$

$$\overline{MS} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 2\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{17}{8}}$$

$$\overline{MQ} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + (2 - 4)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

$$\overline{PR} = \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8}$$

$$A_{[PQRS]} = A_{[PRS]} + A_{[PQR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{MS}}{2} + \frac{\overline{PR} \times \overline{MQ}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{17}{8}}}{2} + \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{8 \times 17}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{4 \times 17}}{2} = \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{17}}{2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

21.5 Qualquer plano que passe em V e seja perpendicular a xOy satisfaz o pedido. Por exemplo, o plano de equação $x = 2$.

Pág. 28

1. $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, 6)$
- $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 12)$
- $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (9, 3)$
- $\begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (9, 12)$

$L(x, y) = x + 3y$

$L(3, 6) = 3 + 3 \times 6 = 21$

$L(0, 12) = 0 + 3 \times 12 = 36$

$L(9, 3) = 9 + 3 \times 3 = 18$

$L(9, 12) = 9 + 3 \times 12 = 45$

O valor mínimo de L é 18
Resposta: (B)

2.

x	y	$L = x + y$	$L = 2x + y$	$L = x + 2y$	$L = 3x + y$
0	0	0	0	0	0
4	0	4	8	4	12
4	2	6	10	8	14
1	4	5	6	9	7
0	4	4	4	8	4

Resposta: (B)

Pág. 29

3. x : número de cestos do tipo A
 y : número de cestos do tipo B
Função objetivo: $P(x, y) = 10x + 12y$

	Maças	Peras	Bananas
x	$3x$	$2x$	$3x$
y	$2y$	$3y$	$4y$

Restrições:

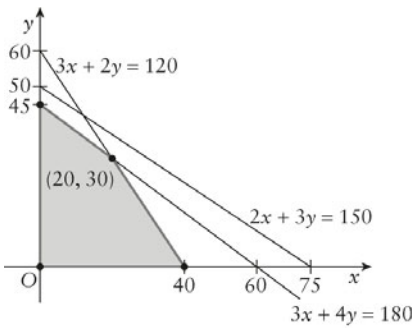
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$3x + 2y = 120$		$2x + 3y = 150$		$3x + 4y = 180$	
x	y	x	y	x	y
0	60	0	50	0	45
40	0	75	0	60	0

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (20, 30)$$

Região admissível



x	y	$P(x, y) = 10x + 12y$	
0	0	0	
40	0	400	
20	30	560	< Máximo
0	45	540	

Devem ser encheidos 20 cestos do tipo A e 30 do tipo B para obter um rendimento de 560 euros.

4. x : número de embalagens do tipo A
 y : número de embalagens do tipo B

Função objetivo: $R(x, y) = 30x + 50y$

	Calças	Camisas
x	x	x
y	$3y$	y

Restrições:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

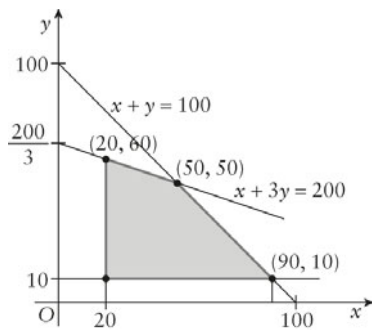
$x + 3y = 200$		$x + y = 100$	
x	y	x	y
20	60	0	100
50	50	100	0

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 3y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (50, 50)$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (90, 10)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 200 \\ x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (20, 60)$$

Região admissível



x	y	$R(x, y) = 30x + 50y$
20	10	1100
90	10	3200
50	50	4000
20	60	3600

<Máximo

Devem ser feitas 50 embalagens de cada tipo para obter um rendimento de 4000 euros.

5. Quantidade, em gramas, a ministrar por dia:

x : substância S ; y : substância P

Função objetivo: $C(x, y) = 4x + y$

	Substância	
	A	B
x	$10x$	$8x$
y	$3y$	$4y$

Restrições:

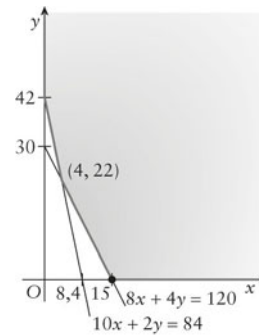
$$\begin{cases} 10x + 2y \geq 84 \\ 8x + 4y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$10x + 2y = 84$		$8x + 4y = 120$	
x	y	x	y
0	42	0	30
8,4	0	15	0

$$\begin{cases} 10x + 2y = 84 \\ 8x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (4, 22)$$

Região admissível



x	y	$C(x, y) = 4x + y$
15	0	60
4	22	38
0	42	42

<Mínimo

Devem ser dados 4 gramas da substância S e 22 gramas da substância P .

6. x : n.º de barcos do tipo A a construir

y : n.º de barcos do tipo B a construir

Função objetivo: $L(x, y) = 1000x + 1500y$

	Fabrico	Acabamento
x	$9x$	$11x$
y	$18y$	$8y$

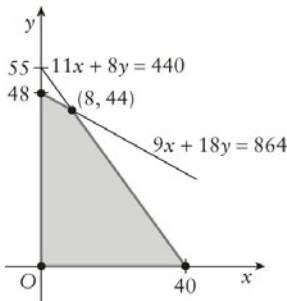
Restrições:

$$\begin{cases} 9x + 18y \leq 864 \\ 11x + 8y \leq 440 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$9x + 18y = 864$		$11x + 8y = 440$	
x	y	x	y
0	48	0	55
96	0	40	0

$\begin{cases} 9x + 18y = 864 \\ 11x + 8y = 440 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (8, 44)$



x	y	$L(x, y) = 1000x + 1500y$	
0	0	0	
40	0	40 000	
8	44	74 000	<Máximo
0	48	72 000	

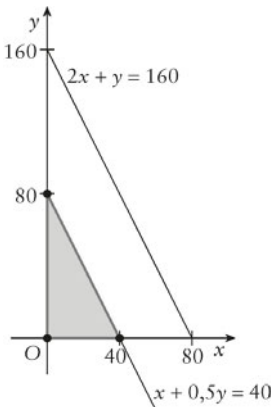
Devem ser fabricados 8 barcos do tipo A e 44 do tipo B para obter o lucro máximo de 74 000 euros.

Pág. 31

- 7.1 x : n.º de pares de sapatos a fabricar
 y : n.º de pares de sandálias a fabricar
Função objetivo: $L(x, y) = 5x + 2,5y$
Restrições:

$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ x + 0,5y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Região admissível



$2x + y = 160$		$x + 0,5y = 40$	
x	y	x	y
0	160	0	80
80	0	40	0

x	y	$L(x, y) = 5x + 2,5y$	
0	80	200	<Máximo
40	0	200	<Máximo
0	0	0	

O lucro máximo é de 200 euros para a produção de x pares de sapatos e de y pares de sandálias, tais que $x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge 2x + y = 80$ (por exemplo, 25 pares de sapatos e 30 pares de sandálias).

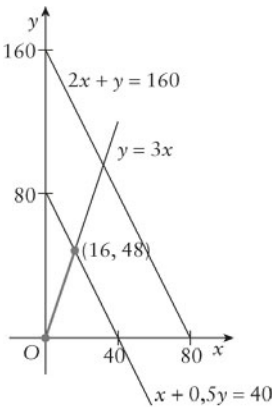
7.2 As restrições passam a ser

$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ x + 0,5y \leq 40 \\ y = 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Cálculos auxiliares

$\begin{cases} x + 0,5y = 40 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (16, 48)$

Região admissível



Devem ser fabricados 16 pares de sapatos e 48 pares de sandálias. O lucro obtido continua a ser de 200 euros.

8. x : n.º de veículos do tipo A
 y : n.º de veículos do tipo B
Função objetivo: $C(x, y) = 1200x + 100y$
Restrições:

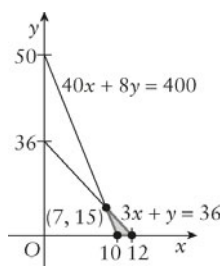
$\begin{cases} 40x + 8y \geq 400 \\ 3x + y \leq 36 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Cálculos auxiliares

$40x + 8y = 400$		$3x + y = 36$	
x	y	x	y
0	50	0	36
10	0	12	0

$$\begin{cases} 40x + 8y = 400 \\ 3x + y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (7, 15)$$

Região admissível



x	y	$C(x, y) = 1200x + 100y$
12	0	14 400
7	15	9900
10	0	12 000

<Mínimo

Devem ser alugados 7 veículos do tipo A e 15 do tipo B.

Pág. 33

1. $f(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Resposta: (B).

2. $f(x) = \frac{1-2x}{x+2} = -2 + \frac{5}{x+2}$

$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & x+2 \\ \hline 2x+4 & -2 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$a = -2, \quad b = 5, \quad c = 2$$

Resposta: (B).

3. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x+3 & 2x-1 \\ \hline -x+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{7}{2} & \end{array}$$

$$\text{Assíntotas: } y = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{2}$$

Resposta: (D).

4. Assíntotas

$$x = a > 0 \quad \text{e} \quad y = b > 0$$

$$\text{Se } f(x) = \frac{1+2x}{x-1}, \text{ as assíntotas do gráfico de } f \text{ são}$$

$$\text{as retas de equações } x = 1 > 0 \quad \text{e} \quad y = 2 > 0.$$

Resposta: (D).

Pág. 34

5. As assíntotas do gráfico de f são as retas de equações

$$x = 1 \text{ e } y = x + 1$$

Além disso, $f(0) = -1$. Entre as funções que se

apresentam apenas na função f tal que

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+1} \text{ se verificam estas três condições.}$$

Resposta: (A).

6. Em f tal que $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ temos

- assíntota vertical: reta de equação $x = -c$
- assíntota horizontal: reta de equação $y = a$
- $f(0) = \frac{b}{c}$.

Por observação do gráfico temos:

$$\begin{cases} -c = -1 \\ a = -3 \\ \frac{b}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -3 \\ \frac{b}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Resposta: (A).

7. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0$$

h tem três zeros (dos quatro zeros de f exclui-se o zero comum a g)

Resposta: (B).

8. Assíntotas do gráfico de f : $y = -1$ e $x = 2$

$$h_1: f(x+3)$$

$$y = -1 \text{ e } x = 2 - 3 \Leftrightarrow y = -1 \text{ e } x = -1$$

$$h_2: 4f(x+3)$$

$$y = 4 \times (-1) \text{ e } x = -1 \Leftrightarrow y = -4 \text{ e } x = -1$$

$$h: 2 + 4f(x+3)$$

$$y = -4 + 2 \text{ e } x = -1 \Leftrightarrow y = -2 \text{ e } x = -1$$

Resposta: (C).

9.1 $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

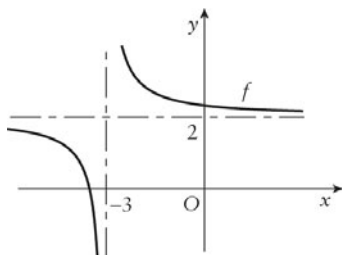
$$\frac{2x+7}{-2x-6} \left| \frac{x+3}{2} \right|$$

Assíntotas: $y = 2$ e $x = -3$.

$f(0) = \frac{7}{3}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{x+3} = 0 \Leftrightarrow 2x+7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

$\left(0, \frac{7}{3}\right), \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$



f é estritamente decrescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$		-3	$+\infty$
$2x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x+7}{x+3}$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right[\cup]-3, +\infty[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{7}{2}, -3\right[$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

9.2 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$

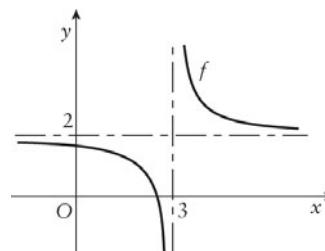
Assíntotas: $y = 2$ e $x = 3$

$f(0) = \frac{5}{3}$

$$\frac{2x-5}{-2x+6} \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x-5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$\left(0, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$



f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$2x-5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x-5}{x-3}$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

9.3 $f(x) = \frac{2x+1}{2x+4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{2x+1}{2x+4} = 1 - \frac{3}{2x+4}$

$$\frac{2x+1}{-2x-4} \left| \frac{2x+4}{1} \right|$$

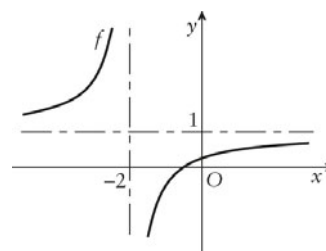
$= 1 - \frac{3}{x+2}$

Assíntotas: $y = 1$ e $x = -2$

$f(0) = \frac{1}{4}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x+4} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, +\infty[$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x+1}{2x+4}$	$+$	s.s.	$-$	0	$+$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -\frac{1}{2}[$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

9.4 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

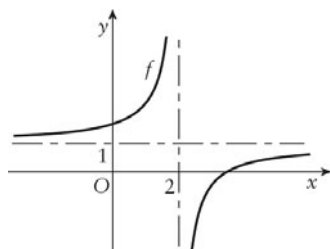
$$f(x) = \frac{2x-7}{2x-4} = 1 - \frac{3}{2x-4} = 1 - \frac{3}{2(x-2)}$$

Assíntotas: $y = 1$ e $x = 2$

$$f(0) = \frac{7}{4}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x-7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\left(0, \frac{7}{4}\right), \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$



f é estritamente crescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

x	$-\infty$	2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-7}{2x-4}$	$+$	s.s.	$-$	0	$+$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]\frac{7}{2}, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, \frac{7}{2}[$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

9.5 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

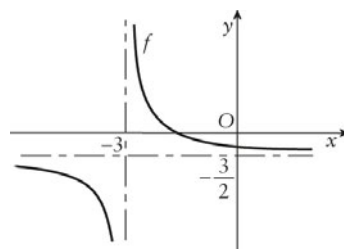
$$f(x) = \frac{-3x-5}{2x+6} = -\frac{3}{2} + \frac{4}{2x+6} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{x+3}$$

Assíntotas: $y = -\frac{3}{2}$ e $x = -3$

$$f(0) = -\frac{5}{6}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-5}{2x+6} = 0 \Leftrightarrow -3x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$\left(0, -\frac{5}{6}\right), \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$$



f é estritamente decrescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x-5$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-3x-5}{2x+6}$	$-$	s.s.	$+$	0	$-$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, -\frac{5}{3}[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

9.6 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

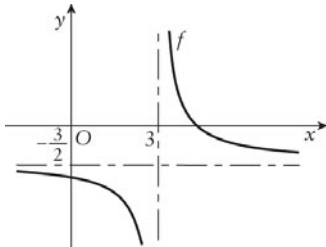
$$f(x) = \frac{-3x+13}{2x-6} = -\frac{3}{2} + \frac{4}{2x-6} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{x-3}$$

Assíntotas: $y = -\frac{3}{2}$ e $x = 3$

$$f(0) = -\frac{13}{6}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+13}{2x-6} = 0 \Leftrightarrow -3x+13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$$

$$\left(0, -\frac{13}{6}\right), \left(\frac{13}{3}, 0\right)$$



f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$

x	$-\infty$	3		$\frac{13}{3}$	$+\infty$
$-3x+13$	+	+	+	0	-
$2x-6$	-	0	+	+	+
$\frac{-3x+13}{2x-6}$	-	s.s.	+	0	-

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]3, \frac{13}{3}\right[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup \left]\frac{13}{3}, +\infty\right[$$

$$D_f' = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

9.7 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

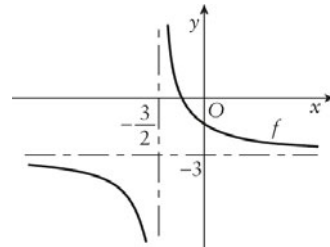
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-6x-1}{2x+3} = \left| \begin{array}{l} -6x-1 \quad | \quad 2x+3 \\ \hline 6x+9 \quad -3 \\ \hline 8 \end{array} \right. \\ &= -3 + \frac{8}{2x+3} = \\ &= -3 + \frac{4}{x+\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Assíntotas: $y = -3$ e $x = -\frac{3}{2}$

$$f(0) = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-1}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow -6x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$$

$$\left(0, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$



f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\frac{3}{2}[$ e em

$$\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
$-6x-1$	+	+	+	0	-
$2x+3$	-	0	+	+	+
$\frac{-6x-1}{2x+3}$	-	s.s.	+	0	-

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup \left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$$

$$D_f' = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

9.8 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

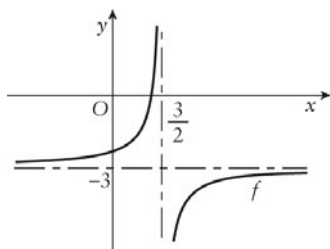
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-6x+7}{2x-3} = \left| \begin{array}{l} -6x+7 \quad | \quad 2x-3 \\ \hline 6x-9 \quad -3 \\ \hline -2 \end{array} \right. \\ &= -3 - \frac{2}{2x-3} = \\ &= -3 + \frac{1}{x-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Assíntotas: $y = -3$ e $x = \frac{3}{2}$

$$f(0) = -\frac{7}{3}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+7}{2x-3} = 0 \Leftrightarrow -6x+7=0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$$

$$\left(0, -\frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{6}, 0\right)$$



f é estritamente crescente em $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ e em $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-6x+7$	+	0	-	-	-
$2x-3$	-	-	-	0	+
$\frac{-6x+7}{2x-3}$	-	0	+	s.s.	-

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{7}{6}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$10.1 \quad f(x) = \frac{6x-1}{3x-1} = 2 + \frac{1}{3x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = 2 \text{ e } x = \frac{1}{3}$$

$$10.2 \quad g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$= x+1 + \frac{2}{x-1}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = x+1 \text{ e } x = 1$$

$$10.3 \quad h(x) = -\frac{x^2}{2x+4}$$

$$= -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{4}{2x+4}$$

$$= -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x+2}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ e } x = -2$$

$$10.4 \quad i(x) = \frac{2x^2-7x-1}{2x-6} =$$

$$= x - \frac{1}{2} - \frac{2}{2x-6}$$

$$= x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x-3}$$

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = x - \frac{1}{2} \text{ e } x = 3$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-7x-1 & 2x-6 \\ \hline -2x^2+6x & x-\frac{1}{2} \\ \hline -x+1 & \\ \hline x-3 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$10.5 \quad j(x) = \frac{x^3-x^2+x}{x^2-x} =$$

$$= x + \frac{x}{x^2-x} =$$

$$= x + \frac{x}{x(x-1)} = x + \frac{1}{x-1}$$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = x \text{ e } x = 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2+x & x^2-x \\ \hline -x^3+x^2 & x \\ \hline x & \end{array}$$

$$10.6 \quad k(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2} =$$

$$= 1 + \frac{x+1}{x^2+3x+2} =$$

$$= 1 + \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x^2+3x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$\text{Assíntotas: } y = 1 \text{ e } x = -2$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+3 & x^2+3x+2 \\ \hline -x^2-3x-2 & 1 \\ \hline x+1 & \end{array}$$

Pág. 36

$$11.1 \quad \frac{2x^3+5x^2+2x}{4-x^2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$2x^3+5x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+5x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x^3+5x^2+2x}{4-x^2} = \frac{2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)}{-(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+x}{2-x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & 2x+4 \\ \hline x^2+2x & -\frac{1}{2}x+1 \\ \hline 2x & \\ \hline -2x-4 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

11.2 $\frac{x^3 - x^2 + x}{x^4 + x}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

dado que

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad \begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x}{x^4 + x} = \frac{x(x^2 - x + 1)}{x(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

11.3 $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x - 3}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 8x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - x - 3 &= \\ &= (x+3)(x^2 - 1) \end{aligned} \quad \begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ & -3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{(x+3)(x^2 - 1)}{3(x+3)\left(x - \frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{x^2 - 1}{3x - 1} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$$

11.4 $\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 16}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & -8 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2 + 4)$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^2 + 1)$$

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 16} = \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 1)}{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

12.1 $\frac{5x+1}{x+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x+3} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+1-3x-9}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \wedge x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$S = \{4\}$$

12.2 $\frac{1-2x}{x-2} = x \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x-2} - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x-x^2+2x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$S = \{-1, 1\}$$

12.3 $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} - \frac{x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-2) - x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4 - x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + x = 0 \wedge (x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$S = \{4\}$$

12.4 $\frac{x^2 + 3x - 1}{x+1} = x \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 1}{x+1} - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2 - x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
 12.5 \quad \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x^2-4} &= 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)+1-(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-x^2+4}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{-2x+5}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2x+5=0 \wedge (x-2)(x+2) \neq 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \\
 S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.6 \quad \frac{x^2-3}{x^2-x} + \frac{1}{x-1} &= \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x(x-1)} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2-3+x-x+1}{x(x-1)} &= 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2-2=0 \wedge x(x-1) \neq 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} & \\
 S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.1 \quad \frac{x+1}{x-2} < 2 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 2 < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} < 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{-x+5}{x-2} < 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$-x+5$	+	+	+	0	-
$x-2$	-	0	+	+	+
$\frac{-x+5}{x-2}$	-	s.s.	+	0	-

$$\begin{aligned}
 13.2 \quad \frac{2x-1}{1-x} > 1 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-1+x}{1-x} > 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{1-x} > 0 &\Leftrightarrow x \in \left] \frac{2}{3}, 1 \right[
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
$3x-2$	-	0	+	+	+
$1-x$	+	+	+	0	-
$\frac{3x-2}{1-x}$	-	0	+	s.s.	-

$$\begin{aligned}
 13.3 \quad \frac{x-2}{x+1} < \frac{x+4}{2x+2} &\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+4}{2(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2x-4-x-4}{2(x+1)} < 0 &\Leftrightarrow \frac{x-8}{2x+2} < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 8[
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

x	$-\infty$	-1		8	$+\infty$
$x-8$	-	-	-	0	+
$2x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{x-8}{2x+2}$	+	s.s.	-	0	-

$$\begin{aligned}
 13.4 \quad 1 + \frac{x+3}{x-2} &\geq \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+5}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1) + (x+3)(x-1) - (2x+5)(x-2)}{(x-2)(x-1)} &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2+x^2+2x-3-2x^2-x+10}{(x-2)(x-1)} &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{-2x+9}{(x-2)(x-1)} \geq 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup \left] 2, \frac{9}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

x	$-\infty$	1		2		$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$-2x+9$	+	+	+	+	+	0	-
$(x-2)(x-1)$	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{-2x+9}{(x-2)(x-1)}$	+		-		+	0	-

$$14. \quad f(x) = \frac{ax+3}{x+b}$$

$$14.1 \quad \frac{a}{x} = a; \quad x+b=0 \Leftrightarrow x=-b$$

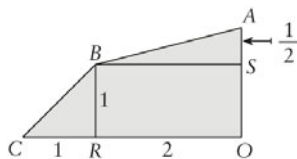
As retas de equações $y=a$ e $x=-b$ são as assíntotas do gráfico de f .

Logo, $a=1$ e $-b=-2 \Leftrightarrow b=2$

14.2 $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$; $f(0) = \frac{3}{2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

$A\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $B(-2, 1)$ e $C(-3, 0)$



$A = \frac{1 \times 1}{2} + 2 \times 1 + \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$

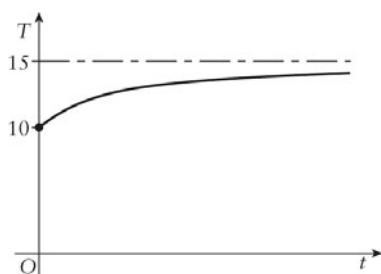
Pág. 37

15. $T(t) = \frac{30t+50}{2t+5}$, $t \geq 0$

15.1 $T(0) = \frac{50}{5} = 10$

A temperatura inicial é de 10 °C.

15.2 O gráfico de T tem uma assíntota horizontal que é a reta de equação $y = \frac{30}{2} \Leftrightarrow y = 15$. Significa que com o decorrer do tempo a temperatura da substância tende a aproximar-se de 15 °C.



15.4 $T(t) > 14 \Leftrightarrow \frac{30t+50}{2t+5} > 14 \Leftrightarrow \frac{30t+50}{2t+5} - 14 > 0 \Leftrightarrow \frac{30t+50-28t-70}{2t+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{2t-20}{2t+5} > 0$

Como $2t+5 > 0$, temos

$T(t) > 14 \Leftrightarrow 2t-20 > 0 \Leftrightarrow 2t > 20 \Leftrightarrow t > 10$

A temperatura da substância é superior a 14 °C a partir dos 10 minutos.

16.1 $V = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

$V = 1000 \Leftrightarrow A_{\text{base}} \times h = 1000 \Leftrightarrow \pi r^2 \times h = 1000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

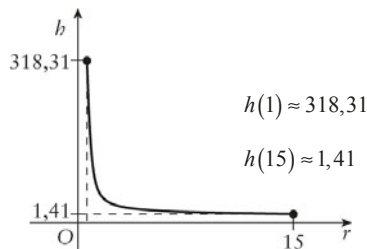
16.2

a) $r = 5$: $h = \frac{1000}{\pi \times 25} \Leftrightarrow h = \frac{40}{\pi} \Rightarrow h \approx 12,73 \text{ cm}$.

b) $h = 20$: $20 = \frac{1000}{\pi \times r^2} \Leftrightarrow 20\pi \times r^2 = 1000 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1000}{20\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{50}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \Rightarrow r \approx 3,99 \text{ cm}$

16.3



16.4

a) $(A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}) \times 0,025 + A_{\text{base}} \times 0,03 =$
 $= (\pi \times 10^2 + 2\pi \times 10 \times h) \times 0,025 + \pi \times 10^2 \times 0,03$
 $= \left(100\pi + 20\pi \times \frac{1000}{\pi \times 10^2}\right) \times 0,025 + 3\pi \approx 22,28$

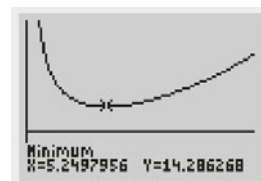
O resto é de 22,28 euros.

b) $C(r) = \left(\pi r^2 + 2\pi \times r \times \frac{1000}{\pi r^2}\right) \times 0,025 + \pi r^2 \times 0,03$

$C(r) = \left(\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) \times 0,025 + \pi r^2 \times 0,03$

$C(r) = 0,055\pi r^2 + \frac{50}{r}$ $y_1 = C(r)$

O custo mínimo para a construção de uma caixa é de aproximadamente 14,29 €, sendo $r \approx 5,25 \text{ cm}$.



O custo mínimo da construção de 100 caixas é de $100 \times 14,29 \text{ €} = 1429 \text{ €}$, aproximadamente.

A caixa cujo custo de produção é mínimo tem dimensões

$r \approx 5,25$ e $h \approx \frac{1000}{\pi \times 5,25^2} \approx 11,55$, ou seja, raio da base

5,25 cm e altura 11,55 cm.

17. $C(x) = x^2 + 2x + 2000, x \geq 10$

$$\bar{C}(x) = \frac{x^2 + 2x + 2000}{x}, x \geq 10$$

17.1 $C(100) = 100^2 + 2 \times 100 + 2000 \Leftrightarrow C(100) = 12200 \text{ €}$

17.2 $\bar{C}(x) < 100 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2000}{x} < 100 \wedge x \geq 10 \Leftrightarrow$

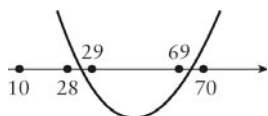
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2000 < 100x \wedge x \geq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 98x + 2000 < 0 \wedge x \geq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29 \leq x \leq 69 \wedge x \in \mathbb{N}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 98x + 2000 = 0 \Rightarrow x \approx 28,9 \vee x \approx 69,02$$



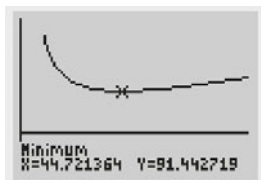
Devem ser produzidas entre 29 e 69 peças.

17.3 $\bar{C}(x) = \frac{x^2 + 2x + 2000}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{2000}{x}$

$$\bar{C}(x) = x + 2 + \frac{2000}{x}$$

17.4 Como $x \geq 10$ o gráfico de $\bar{C}$ não tem assíntotas verticais. A reta de equação $y = x + 2$ é uma assíntota do gráfico de $\bar{C}$. Significa que quando o número de peças produzidas aumenta significativamente o custo médio por peça, em euros, aproxima-se, numericamente, do número de peças mais duas unidades.

17.5 $y_1 = \bar{C}(x), x \geq 10$



Devem ser construídas 45 peças para que o custo médio por peça seja mínimo.

18. $r_A(t) = \frac{4t}{t+5}, t \geq 0; \quad r_B(t) = \frac{5t}{t+12}, t \geq 0$

18.1

a) $r_A(2) = \frac{4 \times 2}{2+5} = \frac{8}{7} \approx 1,143$

$$1,143 \text{ km} = 1143 \text{ m}$$

b) $A = \pi(r_B(3))^2 = \pi\left(\frac{5 \times 3}{3+12}\right)^2 = \pi \approx 3,14 \text{ km}$

c) As áreas serão iguais se tiverem o mesmo raio.

$$r_A(t) = r_B(t) \Leftrightarrow \frac{4t}{t+5} = \frac{5t}{t+12} \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} 4t(t+12) = 5t(t+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 48t - 5t^2 - 25t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 23t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(t-23) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 23$$

As áreas das manchas eram iguais 23 horas após o acidente.

d) $r_B(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{5t}{t+12} = 2 \stackrel{t > 0}{\Leftrightarrow} 5t = 2t + 24 \Leftrightarrow 3t = 24 \Leftrightarrow t = 8$

$$r_A(8) = \frac{4 \times 8}{8+5} = \frac{32}{13} \approx 2,462 \text{ km.}$$

18.2 As retas $y = 4$ e $y = 5$ são assíntotas horizontais dos

gráficos de r_A e r_B , respetivamente. Logo, com o decorrer do tempo, o raio da mancha A tende a aproximar-se de 4 km e o raio da mancha B tende a aproximar-se de 5 km. Se as duas manchas nunca se intersejam é porque a distância entre os pontos A e B é superior a 9 km.

1. $h(x) = \sqrt{f(x)}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} =]-\infty, 2]$$

D_h pode ser qualquer conjunto contido em D.

Resposta: (B)

2. Perímetro: $P = 2(\overline{PB} + \overline{BQ})$

$$\overline{BQ} = x$$

$$\overline{PB} = \overline{PA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{PB}^2 = (2-x)^2 + 4^2 \stackrel{\overline{PB} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{PB} = \sqrt{16 + (2-x)^2}$$

$$P = 2\left(x + \sqrt{16 + (2-x)^2}\right) = 2x + 2\sqrt{16 + (2-x)^2}$$

$$= 2x + 2\sqrt{16 + 4 - 4x + x^2} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 20}$$

Resposta: (C)

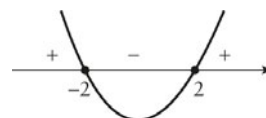
3. Terá de ser $x^2 - kx + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ou seja

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-k)^2 - 4 \times 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k \in [-2, 2]$$

Resposta: (B)



$$4.1 \quad \sqrt{x^2-5} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x^2-5})^2 = 4 \Leftrightarrow x^2-5=4 \Leftrightarrow x^2=9$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

Verificação:

$$x = -3: \sqrt{(-3)^2-5} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (V)$$

$$x = 3: \sqrt{3^2-5} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (V)$$

$$S = \{-3, 3\}$$

$$4.2 \quad \sqrt{x^2-5} = x-1 \Rightarrow (\sqrt{x^2-5})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-5 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$$

Verificação:

$$x = 3: \sqrt{3^2-5} = 3-1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (V)$$

$$S = \{3\}$$

$$4.3 \quad \sqrt{x+1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

Verificação:

$$x = 0: \sqrt{0+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \quad (F)$$

$$x = 3: \sqrt{3+1} + 1 = 3 \Leftrightarrow 2+1=3 \Leftrightarrow 3=3 \quad (V)$$

$$S = \{3\}$$

$$4.4 \quad 1+x+\sqrt{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} = -x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+x})^2 = (-x-1)^2 \Leftrightarrow x^2+x = x^2+2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Verificação:

$$x = -1: 1-1+\sqrt{(-1)^2+(-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0+\sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0=0 \quad (V)$$

$$S = \{-1\}$$

$$4.5 \quad \sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 5-\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-5})^2 = (5-\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x-5 = 25-10\sqrt{x}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x} = 30 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

Verificação:

$$x = 9: \sqrt{9-5} + \sqrt{9} = 5 \Leftrightarrow 2+3=5 \quad (V)$$

$$S = \{9\}$$

$$4.6 \quad \sqrt{2x} - \sqrt{\frac{x}{2}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x} - 3 = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow (\sqrt{2x} - 3)^2 = \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{2x} + 9 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} + 9 = 6\sqrt{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 18 = 12\sqrt{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 6 = 4\sqrt{2x} \Rightarrow (x+6)^2 = (4\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 16 \times 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 18$$

Verificação:

$$x = 2: \sqrt{2 \times 2} - \sqrt{\frac{2}{2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2 - 1 = 3 \quad (F)$$

$$x = 18: \sqrt{2 \times 18} - \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{36} - \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 6 - 3 = 3 \quad (V)$$

$$S = \{18\}$$

$$5. \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2 + 3\sqrt{x-1}$$

$$5.1 \quad D_f = \mathbb{R}_0^+$$

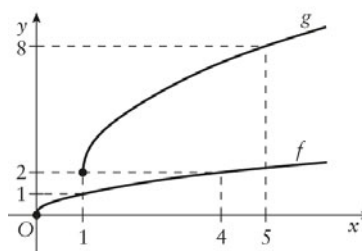
$$x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0$$

$$D'_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$5.2 \quad \text{Translação associada ao vector } (1, 0)$$

Expansão vertical segundo o fator 3.

Translação associada ao vector $(0, 2)$.

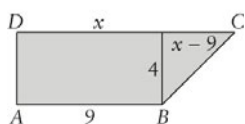
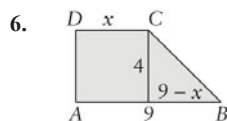


$$5.4 \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[$$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + 3\sqrt{x-1} \geq 2$$

$$D'_g = [2, +\infty[$$



6.1 $\overline{BC}^2 = 4^2 + |x-9|^2$

Como $|x|^2 = x^2$ temos

$$\overline{BC}^2 = 16 + (x-9)^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{16 + x^2 - 18x + 81} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{x^2 - 18x + 97}$$

$$f(x) = x + 9 + 4 + \sqrt{x^2 - 18x + 97}$$

$$f(x) = x + 13 + \sqrt{x^2 - 18x + 97}$$

6.2 $x = 12$

$$\begin{aligned} f(12) &= 12 + 13 + \sqrt{12^2 - 18 \times 12 + 97} = \\ &= 25 + \sqrt{25} = 30 \end{aligned}$$

6.3 $f(x) = 24 \Leftrightarrow 13 + x + \sqrt{x^2 - 18x + 97} = 24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 18x + 97} = 11 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 18x + 97})^2 = (11 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 97 = 121 - 22x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 24 \Leftrightarrow x = 6$$

Verificação:

$$x = 6: 13 + 6 + \sqrt{6^2 - 18 \times 6 + 97} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 19 + \sqrt{25} = 24 \quad (\text{V})$$

$$x = 6 \Leftrightarrow \overline{DC} = 6$$

$$A = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times 4 = \frac{9 + 6}{2} \times 4 = 30$$

$$A = 30 \text{ u.a.}$$

7.1 Seja $\overline{AD} = x$ e $\overline{DC} = y$ (ou vice-versa).

Como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, o triângulo

$[ACD]$ é retângulo em D , pelo que

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \quad y > 0$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

7.2

a) O retângulo é um quadrado se e só se $y = x$

$$y = x \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad x > 0$$

Verificação:

$$x = \sqrt{2}: \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (\text{V})$$

O retângulo é um quadrado se $x = \sqrt{2}$.

b) $A(x) = 1,92 \Leftrightarrow x\sqrt{4 - x^2} = 1,92 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x\sqrt{4 - x^2})^2 = 1,92^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(4 - x^2) = 1,92^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 1,92^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1,92^2 = 0$$

Fazendo $t = x^2$, temos

$$t^2 + 4t - 1,92^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1,44 \vee t = 2,56$$

$$x^2 = 1,44 \vee x^2 = 2,56 \Leftrightarrow x = 1,2 \vee x = 1,6 \quad x > 0$$

Verificação:

$$x = 1,2: 1,2 \times \sqrt{4 - 1,2^2} = 1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,2 \times \sqrt{2,56} = 1,92 \Leftrightarrow 1,2 \times 1,6 = 1,92 \quad (\text{V})$$

$$x = 1,6: 1,6 \times \sqrt{4 - 1,6^2} = 1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,6 \times \sqrt{1,44} = 1,92 \Leftrightarrow 1,6 \times 1,2 = 1,92 \quad (\text{V})$$

Logo, $x = 1,2 \vee x = 1,6$

8.1 Pelo Teorema de Pitágoras

$$h^2 + x^2 = 10^2 \Leftrightarrow h^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{100 - x^2} \quad h > 0$$

$$h(x) = \sqrt{100 - x^2}$$

8.2 $D_h =]0, 10[$

8.3 $h(6) = \sqrt{100 - 6^2} = 8; \quad h(6) = 8 \text{ m}$

8.4 $h(x) = 9,6 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} = 9,6 \Rightarrow 100 - x^2 = 9,6^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100 - 9,6^2 \Leftrightarrow x^2 = 7,84 \Leftrightarrow x = 2,8 \quad x > 0$$

Verificação:

$$x = 2,8: \sqrt{100 - 2,8^2} = 9,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{92,16} = 9,6 \Leftrightarrow 9,6 = 9,6 \quad (\text{V})$$

$x = 2,8 \text{ m}$

8.5 $\alpha = 60^\circ$

$$\frac{x}{10} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow x = 10 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

$$\frac{h}{10} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow h = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 5\sqrt{3}$$

$$x = 5 \text{ m e } h = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

9.1 $h = 2\overline{AB} + 2\overline{BD}$

$$\overline{AB} = 16 - x$$

$$\overline{BD}^2 = x^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{x^2 + 144}$$

$$h(x) = 2(16 - x) + 2\sqrt{144 + x^2}$$

$$h(x) = 32 - 2x + 2\sqrt{144 + x^2}, \quad 0 < x < 16$$

9.2 $\overline{BC} = 5 \Leftrightarrow x = 5$

$$h(5) = 32 - 10 + 2\sqrt{144 + 25} = 22 + 2 \times 13 = 48$$

9.3

a) $h(x) = 42 \Leftrightarrow 32 - 2x + 2\sqrt{144 + x^2} = 42 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{144 + x^2} = 2x + 10 \Leftrightarrow \sqrt{144 + x^2} = x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144 + x^2 = (x + 5)^2 \Leftrightarrow 144 + x^2 = x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x = 119 \Leftrightarrow x = 11,9$$

Verificação:

$$x = 11,9: \quad 32 - 2 \times 11,9 + 2\sqrt{144 + 11,9^2} = 42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32 - 23,8 + 2 \times 16,9 = 42 \quad (\text{V})$$

$$x = 11,9 \text{ m}$$

b) $x = 11,9$

$$A_{[ABDE]} = 16 \times 12 - 2A_{[BCD]} = 192 - 2 \times \frac{11,9 \times 12}{2} = 49,2$$

$$A_{[ABDE]} = 49,2 \text{ m}^2$$

9.4 $A_{[BCD]} = \frac{1}{3}A_{[ACDF]}$

$$\frac{12x}{2} = \frac{1}{3} \times 16 \times 12 \Leftrightarrow 6x = 64 \Leftrightarrow x = \frac{32}{3}$$

$$h\left(\frac{32}{3}\right) = 32 + 2 \times \frac{32}{3} + 2\sqrt{144 + \left(\frac{32}{3}\right)^2} \approx 42,78$$

Foram gastos 42,78 m de rede.

Pág. 42

10. $C(x) = -\sqrt{30 + 6x} + 20, x \geq 2$

$$V(x) = \sqrt{45 + x}, x \geq 2$$

10.1

a) $10 \times C(10) = 10 \times (-\sqrt{30 + 60} + 20) \approx 105,1317$ centenas de euros, ou seja, 10 513,17 euros.

b) $10 \times V(10) = 10\sqrt{45 + 10} \approx 74,1620$ centenas de euros, aproximadamente, 7416,20 euros.

10.2 $L(x) = V(x) - C(x)$

$$L(x) = \sqrt{45 + x} + \sqrt{30 + 6x} - 20$$

$L(x)$ representa o lucro médio por peça, em centenas de euros, quando são produzidas e vendidas x peças.

10.3 $L(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{45 + x} + \sqrt{30 + 6x} - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{30 + 6x} = 20 - \sqrt{45 + x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{30 + 6x})^2 = (20 - \sqrt{45 + x})^2$$

$$\Leftrightarrow 30 + 6x = 400 - 40\sqrt{45 + x} + 45 + x$$

$$\Leftrightarrow 40\sqrt{45 + x} = 415 - 5x \Leftrightarrow 8\sqrt{45 + x} = 83 - x$$

$$\Rightarrow (8\sqrt{45 + x})^2 = (83 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 64(45 + x) = 83^2 - 166x + x^2$$

$$\Leftrightarrow 2880 + 64x = 6889 - 166x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 230x + 4009 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 19 \vee x = 211$$

Verificação:

$$x = 19: \quad \sqrt{45 + 19} + \sqrt{30 + 6 \times 19} - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 + 12 - 20 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{V})$$

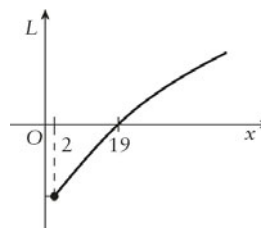
$$x = 211: \quad \sqrt{45 + 211} + \sqrt{30 + 6 \times 211} - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + 35 - 20 = 0 \quad (\text{F})$$

Logo, $x = 19$

Se a empresa produz e vende 19 peças não tem lucro nem prejuízo.

10.4



A empresa passa a ter lucro a partir da produção e venda de 19 peças.

$$11. \quad v = \frac{e}{t} \Leftrightarrow t = \frac{e}{v}$$

$$11.1 \quad t_{AC} = t_{AB} + t_{BC}$$

$$\overline{AB} = 15 - x$$

$$\overline{BC}^2 = x^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{x^2 + 25}$$

$$t_{AC} = \frac{\overline{AB}}{40} + \frac{\overline{BC}}{30}$$

$$t(x) = \frac{15-x}{40} + \frac{\sqrt{x^2+25}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(x) = \frac{45-3x+4\sqrt{x^2+25}}{120}$$

$$11.2 \quad t(8) = \frac{45-3 \times 8 + 4\sqrt{8^2+25}}{120} \approx 0,4895$$

$$0,4895 \text{ h} \approx 29,4 \text{ min}$$

$$11.3 \quad t(x) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{45-3x+4\sqrt{x^2+25}}{120} = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 45-3x+4\sqrt{x^2+25} = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+25} = 15+3x$$

$$\Rightarrow (4\sqrt{x^2+25})^2 = (15+3x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+25) = 225+90x+9x^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2-90x+175=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx 2,3880 \vee x \approx 10,4692$$

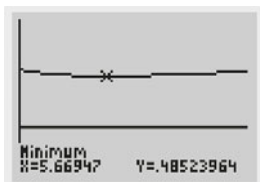
Verificação:

$$t(2,3880) \approx 0,5 \text{ e}$$

$$t(10,4692) \approx 0,5$$

Logo, $x \approx 2,39 \text{ km}$ ou $x \approx 10,47 \text{ km}$

$$11.4 \quad y_1 = t(x), \quad 0 \leq x \leq 15$$



O tempo gasto é mínimo para $x \approx 5,669 \text{ km}$

$$15 - 5,669 = 9,331$$

Para que o tempo gasto seja mínimo, B deverá estar a $9,33 \text{ km}$ de A .

1. f e g são funções polinomiais do primeiro grau dado que os seus gráficos são retas de declive não nulo. Como o gráfico de f tem declive negativo e o gráfico de g tem declive positivo o gráfico de $f \times g$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Resposta: (A)

$$2. \quad D_{\frac{r}{s}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_r \wedge x \in D_s \wedge s(x) \neq 0\}$$

Como $s(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$, o domínio de $\frac{r}{s}$ pode ser $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Resposta: (D)

3. Os gráficos de f e g são retas paralelas

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{mx+b_1}{mx+b_2}$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de $\frac{f}{g}$.

A reta de equação $x = x_0$ é uma assíntota vertical do gráfico de $\frac{f}{g}$ sendo x_0 o zero de g .

O zero de $\frac{f}{g}$ é x_1 , zero de f .

Resposta: (C)

- 4.

x	$-\infty$	$-a$		0		a	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$g(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+	0	-	s.s.	+	0	-

Para $a = 1$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1]$

Resposta: (B)

$$5. \quad (g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3))$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f(2) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$(g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(2) = 4$$

Resposta: (D)

Pág. 45

6. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$. Apenas o gráfico apresentado em (C) poderá satisfazer esta condição.

Resposta: (C)

$$7. \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -2$$

Como -2 é o zero de h a resposta é $x = -2$.

Resposta: (A)

Pág. 46

$$8. \quad f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$8.1 \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \\ = \frac{2x+5}{x^2+5x+4} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} - \frac{x+2}{x+1} = \\ = \frac{2x+5 - (x+2)(x+4)}{(x+1)(x+4)} = \frac{2x+5 - x^2 - 6x - 8}{(x+1)(x+4)} = \\ = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+1)(x+4)}$$

Como $-x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$ temos

$$-x^2 - 4x - 3 = -(x+1)(x+3)$$

pelo que

$$(f-g)(x) = \frac{-(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+4)} = -\frac{x+3}{x+4}$$

$$f-g: \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{x+3}{x+4}$$

$$8.2 \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x+3}{x+4} = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\} \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$P(-3, g(-3)); \quad g(-3) = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(-3, \frac{1}{2}\right)$$

$$9. \quad f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$$

$$g(x) = \frac{x^3+3x^2}{2x^2+3x-2}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$$

$$9.1 \quad h(x) = f(x) \times g(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x} \times \frac{x^3+3x^2}{2x^2+3x-2} = \\ = \frac{2x-1}{x(x+3)} \times \frac{x^2(x+3)}{(x+2)(2x-1)} = \\ = \frac{x}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Cálculos auxiliares:

$$2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

9.2

$$f \times g: \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, 0, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x+2}$$

$$9.3 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2+3x} = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2}{2x^2+3x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$10. \quad f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$g(x) = 2 + \sqrt{x-1}, \quad D_g = [1, +\infty[$$

$$10.1 \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-2}\right) = 2 + \sqrt{\frac{1}{x-2} - 1} \\ = 2 + \sqrt{\frac{1-x+2}{x-2}} = 2 + \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge \frac{1}{x-2} \geq 1\right\} =]2, 3]$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{1}{x-2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]2, 3]$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3-x}{x-2}$	$-$	s.s.	$+$	0	$-$

$$g \circ f :]2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 + \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge 2 + \sqrt{x-1} \neq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge x \neq 1\} =]1, +\infty[$$

Cálculos auxiliares:

$$2 + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 + \sqrt{x-1}) =$$

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{x-1} - 2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f \circ g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

10.2 g e f não são permutáveis porque $f \circ g \neq g \circ f$

11. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{y}{y-1} = x \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} y = xy - x \Leftrightarrow xy - y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) = 2 + \sqrt{x-1}, D_g = [1, +\infty[$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{x-1}$$

$$x = 2 + \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = y-1 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$$

$$g^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

Como $D_g = [1, +\infty[$, temos

$$x \in [1, +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-1} \geq 2$$

$$D'_g = [2, +\infty[= D_{g^{-1}}$$

$$g^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

Pág. 47

1. O ponto da reta de equação $y = 2x + 1$ com abscissa 0 tem ordenada 1. O declive da reta é 2. Portanto, terá de ser

$$f(0) = 1 \text{ e } f'(0) = 2.$$

$$f(x) = x^2 + 1;$$

$$f(0) = 1; f'(x) = 2x; f'(0) = 0$$

$$f(x) = x^2 + x;$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = x^2 + x + 1;$$

$$f(0) = 1; f'(x) = 2x + 1; f'(0) = 1$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1;$$

$$f(0) = 1; f'(x) = 2x + 2; f'(0) = 2$$

Resposta: (D)

2. $g(x) = ax^2 + 2x + 1$; $g'(x) = 2ax + 2$

$$g'(2) = 3 \Leftrightarrow 2a \times 2 + 2 = 3 \Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Resposta: (D)

3. A bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Resposta: (C)

4. $h(t) = 80t - 5t^2$
 $h'(t) = 80 - 10t$
 $h'(3) = 80 - 10 \times 3 = 50 \text{ m/s}$

Resposta: (A)

Pág. 48

5. $f'(x) = -x + 3$; $D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$		$f(3)$	

Máx.

Resposta: (C)

6. $f(x) = -x^2 + \sqrt{18}$; $f'(x) = -2x$
 $f'(a) = -4 \Leftrightarrow -2a = -4 \Leftrightarrow a = 2$

Resposta: (B)

7. $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \sqrt{8}$; $g'(x) = -\sqrt{3}x^2$
 $r: y = mx + b$;
 $m = \tan(120^\circ) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$
 $g'(a) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}a^2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1$

Como $a > 0$, temos $a = 1$

Resposta: (A)

Pág. 49

8. $f(x) = ax^3 + a$; $f'(x) = 3ax^2$
 $f'(1) = 6 \Leftrightarrow 3a \times 1^2 = 6 \Leftrightarrow a = 2$

Resposta: (B)

9. $f(x) = 2x^2 + ax + 4$; $f'(x) = 4x + a$
 r passa nos pontos $(-2, 0)$ e $(0, f(0))$ ou seja $(0, 4)$

$$d_r = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2$$

$$f'(0) = d_r \Leftrightarrow 4 \times 0 + a = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: (B)

10.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$		Máx.	
$f'(x)$	+	0	-

$$a > 0$$

Apenas (D) satisfaz o sinal de $f'(x)$

Resposta: (D)

Pág. 50

11.1 $f(3) - f(0) = 0 - 4 = -4$

$$t.m.v_{[0,3]} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 4}{3} = -\frac{4}{3}$$

11.2

a) $t.m.v_{[0,5]} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{2 - 4}{5} = -\frac{2}{5}$

b) $t.m.v_{[1,7]} = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $t.m.v_{[1,5]} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{2 - 2}{4} = 0$

11.3

a) Por exemplo: $[1, 7]$

$$f(7) > f(1) \text{ e } f \text{ não é crescente em } [1, 7]$$

b) Por exemplo: $[0, 5]$

$$f(5) < f(0) \text{ e } f \text{ não é decrescente em } [0, 5]$$

11.4 $r: y = mx + b$;

$$m = t.m.v_{[a,9]} = -\frac{8}{13}$$

$(9, 2)$ é um ponto de r .

$$r: y - 2 = -\frac{8}{13}(x - 9) \Leftrightarrow y = -\frac{8}{13}x + \frac{72}{13} + 2$$

$$r: y = -\frac{8}{13}x + \frac{98}{13}$$

12. $f(x) = x + 1$; $f'(x) = 1$

$$g(x) = -3x + 1$$
; $g'(x) = -3$

$$h(x) = -5$$
; $h'(x) = 0$

12.1 $f'(5) = 1$; $g'(5) = -3$; $h'(5) = 0$

12.2 $f'(-3) = 1$; $g'(-3) = -3$; $h'(-3) = 0$

12.3 $f'(0) = 1$; $g'(0) = -3$; $h'(0) = 0$

13.1 $g(x) = x^2 - 1$; $g'(x) = 2x$

a) Ponto de tangência: $P(-1, 0)$ pois $g(-1) = 0$

Declive: $m = g'(-1) = -2$

$y - 0 = -2(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 2$

b) Ponto de tangência: $P(0, -1)$ pois $g(0) = -1$

Declive: $m = g'(0) = 0$

$y + 1 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = -1$

c) Ponto de tangência: $P(5, 24)$ pois $g(5) = 24$

Declive: $m = g'(5) = 10$

$y - 24 = 10(x - 5) \Leftrightarrow y = 10x - 50 + 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 10x - 26$

13.2 $t.m.v_{[0, h]} = \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \frac{h^2 - 1 - (-1)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$

Se $h \rightarrow 0$, $t.m.v_{[0, h]} \rightarrow 0$

Pág. 51

14.1 $A(x) = (5 + x)(3 + x) = 15 + 5x + 3x + x^2 = x^2 + 8x + 15, \quad x \geq 0$

14.2

a) $A(0)$ é a área do retângulo para $x = 0$, ou seja, $A(0) = 15 \text{ cm}^2$.

b) $A(2) = 2^2 + 8 \times 2 + 15 = 35 \text{ cm}^2$
 $A(2)$ é a área do retângulo com $x = 2$, ou seja, de dimensões 7 cm por 5 cm.

14.3 $t.m.v_{[0, 2]} = \frac{A(2) - A(0)}{2 - 0} = \frac{35 - 15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

14.4 $t.m.v_{[x, x+1]} = \frac{A(x+1) - A(x)}{x+1 - x} = \frac{(x+1)^2 + 8(x+1) + 15 - (x^2 + 8x + 15)}{1} = x^2 + 2x + 1 + 8x + 8 + 15 - x^2 - 8x - 15 = 2x + 9$

14.5 $d_s = t.m.v_{[1, 2]} = t.m.v_{[1, 1+1]} = 2 \times 1 + 9 = 11$

14.6 $A'(x) = 2x + 8$

$P(2, 35)$; $m = A'(2) = 2 \times 2 + 8 = 12$

$y - 35 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 24 + 35 \Leftrightarrow y = 12x + 11$

15. $A(t) = -2,4t^2 + 52t, \quad t \geq 0$

15.1 $A(0) = 0$

Às 21 horas do dia 15 de julho, hora do início do incêndio, não havia área ardida no local indicado.

15.2

a) 22 horas de 15 de julho: $t = 1$

1 hora de 16 de julho: $t = 4$

$A(4) - A(1) = 169,6 - 49,6 = 120$

Entre as 22 horas do dia 15 e a 1 hora do dia 16 foram consumidos pelo fogo 120 ha.

b) $\frac{A(3) - A(0)}{3} = \frac{134,4 - 0}{3} = 44,8$

Nas primeiras três horas de incêndio a área consumida pelo fogo aumentou a uma velocidade média de 44,8 ha/h.

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(3+h) - A(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2,4(3+h)^2 + 52(3+h) - 134,4}{h}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2,4h^2 + 37,6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2,4h + 37,6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2,4h + 37,6) = 37,6$

Três horas após o início do incêndio a área consumida pelo fogo aumentava a uma velocidade de 37,6 ha/h.

d) O fogo foi extinto quando a área ardida deixou de aumentar.

$A'(t) = (-2,4t^2 + 52t)' = -4,8t + 52$

$A'(t) = 0 \Leftrightarrow -4,8t + 52 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{65}{6} \Leftrightarrow t = 10 + \frac{5}{6}$;

$t = 10 \text{ h } 50 \text{ min}$

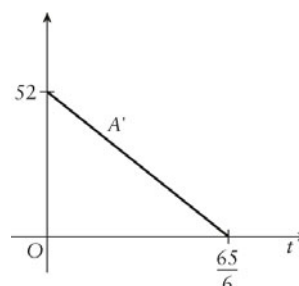
21 h de 15 de junho + 10 h 50 min = 7 h 50 min de 16 de junho.

e) $\frac{A\left(\frac{65}{6}\right) - A(0)}{\frac{65}{6} - 0} = \frac{-2,4\left(\frac{65}{6}\right)^2 + 52 \times \frac{65}{6}}{\frac{65}{6}} = 26$

Em média arderam 26 ha por hora.

15.3 $A'(t) = -4,8t + 52$

a)



- b) A área, consumida pelo fogo aumentou desde o início até à hora em que o fogo foi considerado extinto ($A'(t) > 0$). No entanto o crescimento foi cada vez mais lento (A' é decrescente).

Pág. 52

$$16.1 \quad d(t) = 300 \Leftrightarrow \frac{3t^2}{5} + \frac{t}{2} - 300 = 0 \Leftrightarrow 6t^2 + 5t - 3000 = 0$$

$$\stackrel{t>0}{\Rightarrow} t \approx 21,9479 \text{ min} \Rightarrow t \approx 21 \text{ min } 57 \text{ s}$$

$$16.2 \quad d(10) = \frac{3 \times 100}{5} + \frac{10}{2} = 65$$

Altura do líquido para $t = 10$:

$$300 - 65 = 235 \text{ cm} = 23,5 \text{ dm}$$

Raio da base: $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$

$$V = \pi \times 10^2 \times 23,5 = 2350\pi \approx 7382,7 \text{ dm}^3$$

Dez minutos depois de a torneira ser aberta o depósito tem 7382,7 litros de água.

16.3

$$a) \quad d(10) - d(0) = 65 - 0 = 65$$

Durante os primeiros 10 minutos após a abertura da torneira a altura da água no depósito decresceu 65 cm.

$$b) \quad \frac{d(10) - d(0)}{10} = 6,5$$

Nos primeiros 10 minutos a altura da água no depósito decresceu a uma velocidade média de 6,5 cm/min.

$$c) \quad \frac{d(10) - d(8)}{10 - 8} = \frac{65 - 42,4}{2} = 11,3$$

Durante o 9.º e o 10.º minutos a altura da água no depósito decresceu a uma velocidade média de 11,3 cm/min.

$$16.4 \quad \frac{d(19+h) - d(10)}{h} = \frac{\frac{3}{5}(10+h)^2 + \frac{1}{2}(10+h) - 65}{h} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}(100 + 20h + h^2) + 5 + \frac{1}{2}h - 65}{h} = \frac{0,6h^2 + 12,5h}{h} =$$

$$= \frac{h(0,6h + 12,5)}{h} = 0,6h + 12,5$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (0,6h + 12,5) = 12,5$$

$d'(10) = 12,5$. A taxa de variação da altura da água no depósito no instante $t = 10$ é de 12,5 cm/min.

$$16.5 \quad d'(t) = \frac{6}{5}t + \frac{1}{2}; \quad d'(5) = \frac{6}{5} \times 5 + \frac{1}{2} = 6,5$$

A afirmação é verdadeira dado que $d'(10) = 12,5$ e

$$d'(5) = 6,5.$$

$$17. \quad h(t) = 45 - 4,9t^2$$

17.1

a) $h(1,43) = 45 - 4,9 \times 1,43^2 \approx 35 \text{ m}$. Logo, a proposição é verdadeira.

b) $h(2,26) = 45 - 4,9 \times 2,26^2 \approx 20 \text{ m}$ pelo que a proposição é verdadeira.

c) $h(3,03) = 45 - 4,9 \times 3,03^2 \approx 0$. Esta proposição também é verdadeira.

$$17.2 \quad h'(t) = -9,8t$$

$$h'(2) = -9,8 \times 2 = -19,6 \text{ m/s}$$

Pág. 53

$$17.3 \quad \text{t.m.v.}_{[0,2]} = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{25,4 - 45}{2} = -9,8 \text{ m/s.}$$

$$17.4 \quad h(t) = 0 \Leftrightarrow 45 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{45}{4,9} \stackrel{t>0}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{\frac{45}{4,9}}$$

$$h'\left(\sqrt{\frac{45}{4,9}}\right) = -9,8 \times \sqrt{\frac{45}{4,9}} \approx 29,7 \text{ m/s}$$

$$17.5 \quad \text{t.m.v.}_{[1,43;2,26]} = \frac{h(2,26) - h(1,43)}{2,26 - 1,43} = \frac{20 - 35}{0,83} \approx -18,1 \text{ m/s.}$$

$$17.6 \quad \text{t.m.v.}_{[1,43;t]} = \frac{h(t) - h(1,43)}{t - 1,43}, \quad 1,43 < t < 3,03$$

$$18. \quad c(t) = \frac{200t + 10}{2t + 12}, \quad 0 \leq t \leq 12$$

18.1

$$a) \quad C(0) = 5 \text{ mm.}$$

$$b) \quad C(3) = \frac{200 \times 3 + 10}{2 \times 3 + 2} = \frac{610}{8} = 76,25 \text{ mm}$$

$$18.2 \quad 0,6 \text{ dm} = 60 \text{ mm}$$

$$C(t) = 60 \Leftrightarrow \frac{200t + 10}{2t + 2} = 60 \stackrel{t>0}{\Leftrightarrow} 200t + 10 = 120t + 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80t = 110 \Leftrightarrow t = \frac{11}{8} \Leftrightarrow t \approx 1,375 \text{ meses.}$$

$$18.3 \quad \text{A reta } y = \frac{200}{2} \Leftrightarrow y = 100 \text{ é uma assíntota do gráfico de } C.$$

Assim, se o modelo se mantiver válido, é de prever que o comprimento do inseto na idade adulta tenda para 100 mm, ou seja, 10 cm.

18.4

a) $C(2) - C(0) = \frac{205}{3} - 5 = \frac{190}{3} \approx 63,3$

Nos primeiros dois meses de vida o comprimento do inseto aumenta cerca de 63,3 mm.

b) $\frac{C(2) - C(0)}{2 - 0} \approx 31,7$

Nos dois primeiros meses de vida o comprimento do inseto aumenta, em média, 31,7 mm por mês.

18.5. $t.m.v._{[4,4+h]} = \frac{C(4+h) - C(4)}{4+h-4} = \frac{\frac{200(4+h)+10}{2(4+h)+2} - 81}{h} =$
 $= \frac{\frac{200h+810}{2h+10} - 81}{h} = \frac{200h+810-162h-810}{h(2h+10)} =$
 $= \frac{38h}{h(2h+10)} = \frac{38}{2h+10} = \frac{19}{h+5}$

18.6 $\frac{C(3+h) - C(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{200(3+h)+10}{2(3+h)+2} - \frac{305}{4}}{h} =$
 $= \frac{\frac{100h+305}{h+4} - \frac{305}{4}}{h} = \frac{95h}{h(4h+16)} = \frac{95}{4h+16}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(3+h) - C(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{95}{4h+16} = \frac{95}{16} \approx 5,94$

A taxa de variação de C no instante $t = 3$ é aproximadamente igual a 5,94 mm/mês.

Pág. 54

19. $\begin{cases} -2,4t^2 + 29t + 15 & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{35t+325}{2t-5} & \text{se } 5 < t \leq 15 \end{cases}$

19.1 $T(0) = 15$; $A(0, 15)$

$T(5) = -2,4 \times 5^2 + 29 \times 5 + 15 = 100$; $B(5, 100)$

$T(15) = \frac{3 \times 15 - 325}{2 \times 15 - 5} = 34$; $C(15, 34)$

Inicialmente a água estava a uma temperatura de 15 °C.

Passados 5 minutos, quando a Ana desligou a chaleira, a água estava a uma temperatura de 100 °C. Passados 15 minutos a temperatura da água desceu para 32 °C.

19.2 $T(t) > 72,5$

Do conhecimento que temos da variação de T é suficiente resolver a equação $T(t) = 72,5$.

$T(t) = 72,5 \Leftrightarrow (-2,4t^2 + 29t + 15 = 72,5 \wedge 0 \leq t \leq 5) \vee$

$\vee \left(\frac{35t+325}{2t-5} = 72,5 \wedge 5 < t \leq 15 \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2,4t^2 + 29t - 57,5 = 0 \wedge 0 \leq t \leq 5) \vee$

$\vee \left(\frac{35t+325-145t+362,5}{2t-5} = 0 \wedge 5 < t \leq 15 \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 2,5 \vee (-110t + 689,5 = 0 \wedge 5 < t \leq 15) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 2,5 \vee t = 6,25$

A temperatura da água foi superior a 72,5 °C entre os instantes $t = 2,5$ min e $t = 6,25$ min, ou seja, durante 3,75 minutos.

19.3

a) $t.m.v._{[0,5]} = \frac{T(5) - T(0)}{5} = \frac{100 - 15}{5} = 17$

A água aqueceu durante os primeiros 5 minutos com um aumento médio de temperatura de 17 °C/min.

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(2+h) - T(2)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2,4(2+h)^2 + 29(2+h) + 15 - 63,4}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2,4h^2 + 19,4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2,4h + 19,4)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (-2,4h + 19,4) = 19,4$

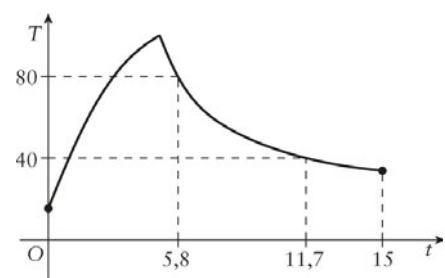
A taxa de variação da temperatura no instante $t = 2$ min é de 19,4 °C/min.

19.4 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(10+h) - T(10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{35(10+h)+325}{2(10+h)-5} - 45}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-55h}{h(2h+15)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-55}{2h+15} = -\frac{55}{15} \approx -3,7$

$T'(2) = 19,4$, $T'(10) \approx -3,7$. No instante $t = 2$ a

temperatura da água aumentava a uma velocidade de 19,4 °C/min. No instante $t = 10$ a temperatura da água decrescia a uma velocidade de 3,7 °C/min.

19.5



Calculando a interseção das retas $y = 80$ e $y = 40$ com o gráfico de T , no intervalo $[5, 15]$, verifica-se que após desligar a chaleira a temperatura está entre 80°C e 40°C no intervalo de tempo $5,8 < t < 11,7$, sendo t em minutos contados desde o instante em que a chaleira foi ligada.

Pág. 55

20. $f(x) = \frac{4}{x}$

20.1 $\text{t.m.v.}_{[a, a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{\frac{4}{a+h} - \frac{4}{a}}{h} = \frac{\frac{4a - 4a - 4h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-4h}{ah(a+h)} = \frac{-4}{a(a+h)}$

20.2 $\lim_{h \rightarrow 0} (\text{t.m.v.}_{[a, a+h]}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{a(a+h)} = \frac{-4}{a(a+0)} = -\frac{4}{a^2}$

20.3 $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$; $f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$

20.4 Ponto de tangência: $P(2, 2)$ dado que $f(2) = \frac{4}{2} = 2$

Declive: $m = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$

$y - 2 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 4$

21.1 $f'(x) = (5x^2 - 1)' = 10x$

21.2 $f'(x) = (-3x^2 + 2x - 3)' = -6x + 2$

21.3 $f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 3\right)' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

21.4 $f'(x) = \left(\frac{6x^2 - 8x + 1}{3}\right)' = \left(2x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3}\right)' = 4x - \frac{8}{3}$

21.5 $f'(x) = (x^3 + 2x^2)' = 3x^2 + 2 \times 2x = 3x^2 + 4x$

21.6 $f'(x) = \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)' = 3 \times \frac{4}{3}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x - 1 = 4x^2 + x - 1$

21.7 $f'(x) = \left(\frac{2x^3 + x + 2}{3}\right)' = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)' = 3 \times \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3} = 2x^2 + \frac{1}{3}$

21.8. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

21.9 $f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)' = \left(2 + \frac{1}{x}\right)' = 0 + \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

21.10 $f'(x) = \left(\frac{1-2x+x^2}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)' = -\frac{1}{x^2} + 1$

22.1 $f(x) = x^2 - 4x$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		-4	

Mín.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$. f admite um mínimo (absoluto) igual a -4 para $x = 2$.

22.2 $f(x) = x^3 - 3x^2$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		-4	

Máx.

Mín.

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[0, 2]$. f admite um máximo relativo igual a 0 para $x = 0$ e um mínimo relativo igual a -4 para $x = 2$.

22.3 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		7		-20	

Máx.

Mín.

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 2]$. f admite um máximo relativo igual a 7 para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -20 para $x = 2$.

22.4 $f(x) = 3x^2 - 4x^3$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 6x - 12x^2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		0		$\frac{1}{4}$	
		Min.		Máx.	

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[\frac{1}{2}, +\infty[$ e

estritamente crescente em $[0, \frac{1}{2}]$.

f admite um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$ e um

máximo relativo igual a $\frac{1}{4}$ para $x = \frac{1}{2}$.

22.5 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$				-1	
				Min.	

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente

crescente em $[1, +\infty[$.

f admite um mínimo (absoluto) igual a -1 para $x = 1$.

22.6 $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 + (x^{-1})' = 1 + (-x^{-2}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$		-2				2	
		Máx.				Min.	

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e

estritamente decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, 1]$.

f admite um máximo relativo igual a -2 para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a 2 para $x = 1$.

22.7 $f(x) = 2x^2 - \frac{4}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = (2x^2 - 4x^{-1})' = 4x + 4x^{-2} = 4x + \frac{4}{x^2} = \frac{4x^3 + 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+		+
$f(x)$		6			
		Min.			

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente

decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

f admite um mínimo relativo igual a 6 para $x = -1$.

22.8 $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{2}{2x}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 + x^{-1}\right)' = x - x^{-2}$$

$$= x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$				$\frac{3}{2}$	
				Min.	

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $]0, 1]$ e

estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

f admite um mínimo relativo igual a $\frac{3}{2}$ para $x = 1$.

23. $f(x) = 2x^2 + 1$; $g(x) = -x^2 + 6x - 2$;

$$D_f = D_g = \mathbb{R}.$$

23.1 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = -x^2 + 6x - 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = 3; P(1, 3).$$

23.2 $f'(x) = 4x$; $f'(1) = 4$;

$$g'(x) = -2x + 6$$
; $g'(1) = 4$;

Dado que $f(1) = g(1)$ e $f'(1) = g'(1)$ no ponto P os gráficos de f e g têm a mesma tangente.

23.3 $y = mx + b$

$$m = f'(1) = g'(1) = 4$$

Ponto de tangência: $P(1, 3)$

$$y - 3 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = 4x - 1$$

Pág. 56

24. $f(x) = -x^3 + 3x + 4$

24.1 $f'(x) = -3x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		2		6	
		Mín.		Máx.	

$A(-1, 2), B(1, 6)$.

24.2 As retas r e s são paralelas ao eixo Ox dado serem tangentes ao gráfico de f em pontos onde a derivada é nula.

Assim, C tem a mesma ordenada de A e P tem a mesma ordenada de B .

$C(0, 2)$ e $P(x, 6)$.

Triângulo $[ACP]$:

$$\text{Base: } \overline{AC} = |-1 - 0| = 1$$

$$\text{Altura} = \text{cota de } B - \text{cota de } C = 6 - 2 = 4.$$

$$A = \frac{1 \times 4}{2} = 2 \text{ u. a.}$$

24.3

a) $m = f'(2) = -3 \times 4 + 3 = -9$

Ponto de tangência: $(2, 2)$ dado que $f(2) = 2$.

$$y - 2 = -9(x - 2) \Leftrightarrow y = -9x + 18 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -9x + 20.$$

b) $f'(x) = -9 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = -9 \Leftrightarrow -3x^2 = -12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

O outro ponto tem abscissa -2 . Como $f(-2) = 6$ as suas coordenadas são $(-2, 6)$.

25. $A(2, 0), B(0, 4)$

$$\text{Reta } r: m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

$$r: y = -2x + 4$$

$P(x, -2x + 4)$, dado que $P \in r$

$$A_{[ORPS]} = \overline{OR} \times \overline{RP} = x(-2x + 4)$$

$$A(x) = -2x^2 + 4x, \quad 0 < x < 2$$

$$A'(x) = -4x + 4$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		2
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$					

Máx.

A área é máxima para $x = 1$. Neste caso $P(1, 2)$.

26. $P = 80$

$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x(40 - x) \Leftrightarrow A(x) = 40x - x^2, \quad 0 < x < 40$$

$$A'(x) = 40 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

x	0		20		40
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$					

Máx.

$$x = 20 \Leftrightarrow y = 40 - 20 = 20$$

O retângulo de área máxima é o quadrado de lado igual a 20.

27. $A = 100$

$$xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$P = 2x + 2y; \quad P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

$$P'(x) = (2x + 200x^{-1})' = 2 - 200x^{-2} = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 10$$

x	0		10		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$					

Mín.

$$x = 10 \Leftrightarrow y = \frac{100}{10} = 10. \text{ O retângulo de perímetro mínimo é}$$

o quadrado de lado igual a 10 cm.

Pág. 57

28.1 x terá de ser menor que metade do menor lado:

$$0 < x < 6.$$

28.2 Altura da caixa: x ; Largura da caixa: $12 - 2x$;

Comprimento da caixa: c

$$2c + 3x = 24 \Leftrightarrow 2c = 24 - 3x \Leftrightarrow c = \frac{24 - 3x}{2}$$

$$V(x) = x \times (12 - 2x) \times \frac{(24 - 3x)}{2} = x(6 - x)(24 - 3x)$$

$$= (6x - x^2)(24 - 3x) = 144x - 18x^2 - 24x^2 + 3x^3$$

$$V(x) = 3x^3 - 42x^2 + 144x.$$

28.3 $V(1,5) = 3 \times 1,5^3 - 42 \times 1,5^2 + 144 \times 1,5 = 131,625 \text{ cm}^3$.

28.4 $V'(x) = 9x^2 - 84x + 144$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 84x + 144 = 0 \wedge 0 < x < 6$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 28x + 48 = 0 \wedge 0 < x < 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 576}}{6} \wedge 0 < x < 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14 \pm 2\sqrt{13}}{6} \wedge 0 < x < 6 \Rightarrow x \approx 2,26$$

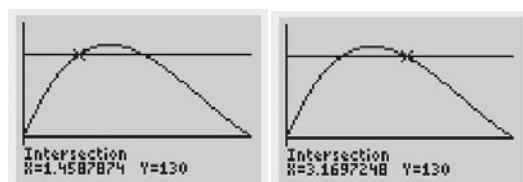
x	0		2,26		6
$V'(x)$		+	≈ 0	-	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

O volume da caixa é máximo para $x \approx 2,26 \text{ cm}$.

28.5 $y_1 = V(x)$; $y_2 = 130$

a)



b) $a \approx 1,45$ e $b \approx 3,17$. Logo, $]a, b[\approx]1,45; 3,17[$.

29. $\overline{AC} = \overline{BC}$; $\overline{AB} = \overline{CM} = 10$.

29.1 Atendendo à semelhança dos triângulos $[SRC]$ e $[ABC]$, temos:

$$\frac{\overline{SR}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{SR}}{10} = \frac{\overline{CN}}{10} \Leftrightarrow$$

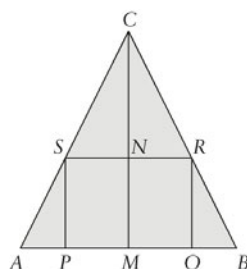
$$\Leftrightarrow \overline{SR} = \overline{CN}$$

Se $\overline{SP} = 4$ então $\overline{MN} = 4$ e

$$\overline{CN} = 10 - 4 = 6.$$

$$\text{Logo, } \overline{SR} = \overline{CN} \Leftrightarrow \overline{SR} = 6.$$

$$A_{[PQRS]} = \overline{PS} \times \overline{SR} = 4 \times 6 = 24; A = 24 \text{ cm}^2.$$



29.2 Se $\overline{PS} = x$, então $\overline{NM} = x$ e $\overline{CN} = 10 - x$.

Como $\overline{SR} = \overline{CN}$, temos $\overline{SR} = 10 - x$.

$$A = \overline{PS} \times \overline{SR} \text{ ou seja, } A(x) = x(10 - x)$$

$$A(x) = 10x - x^2, \quad 0 < x < 10.$$

29.3 $A'(x) = 10 - 2x$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0		5		10
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

$$x = 5 \Rightarrow \overline{SR} = 10 - 5 = 5$$

O retângulo de área máxima é um quadrado de lado 5.

Pág. 58

30. $C(x) = 20 + 2,2x, 0 \leq x \leq 9$

$$R(x) = x(28 - 3x), 0 \leq x \leq 9.$$

30.1 $P(x) = R(x) - C(x) = x(28 - 3x) - (20 + 2,2x) =$

$$= 28x - 3x^2 - 20 - 2,2x$$

$$P(x) = -3x^2 + 25,8x - 20, \quad 0 \leq x \leq 9$$

$$P'(x) = -6x + 25,8$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 25,8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25,8}{6} \Leftrightarrow x = 4,3$$

x	0		4,3		9
$P'(x)$		+	0	-	
$P(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

O lucro é máximo se forem produzidas e vendidas 430 peças.

30.2 $P(x) > 34 \Leftrightarrow -3x^2 + 25,8x - 20 > 34 \Leftrightarrow$

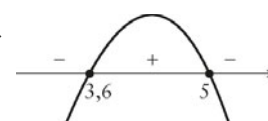
$$\Leftrightarrow -3x^2 + 25,8x - 54 > 0 \Leftrightarrow 3,6 < x < 5$$

Devem ser produzidas e vendidas entre 360 e 500 peças.

Cálculo auxiliar:

$$-3x^2 + 25,8x - 54 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3,6 \vee x = 5$$



31. $\alpha: 6x + 4y + 3z - 24 = 0$

31.1 $P(a, a, z)$

$$P \in \alpha \Leftrightarrow 6a + 4a + 3z = 24 \Leftrightarrow 3z = 24 - 6a - 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 8 - \frac{10}{3}a$$

$P\left(a, a, 8 - \frac{10}{3}a\right)$. A altura da pirâmide é igual à cota de P .

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times a \times a \times \left(8 - \frac{10}{3}a\right)$$

$$V(a) = \frac{1}{3}a^2 \left(8 - \frac{10}{3}a\right) = \frac{8}{3}a^2 - \frac{10}{9}a^3.$$

31.2 $V'(a) = \frac{16}{3}a - \frac{10}{9}a^2$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3}a - \frac{10}{9}a^2 = 0 \wedge 0 < a < 2,4$$

$$\Leftrightarrow 16a - 10a^2 = 0 \wedge 0 < a < 2,4$$

$$\Leftrightarrow a(16 - 10a) = 0 \wedge 0 < a < 2,4$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \vee a = 1,6) \wedge 0 < a < 2,4 \Leftrightarrow a = 1,6$$

x	0		1,6		2,4
$V'(a)$		+	0	-	
$V(a)$					

Máx.

O volume do paralelepípedo é máximo para $a = 1,6$.

Pág. 59

32. $f(x) = -x^2 + 2x$.

32.1 Ponto de tangência: $O(0, 0)$.

Declive: $f'(x) = -2x + 2$ $m = f'(0) = 2$

$r: y = 2x$.

32.2 $d_r = 2$; $d_s = -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x + 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x + 4 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{25}{16} + \frac{10}{4} = \frac{15}{16}; \quad A\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right).$$

$$s: y - \frac{15}{16} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{16}.$$

33. $f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 45$

$$g(x) = -2x^3 + 12x - 13; \quad h(x) = f(x) + k, k \neq 0.$$

33.1 $f'(x) = -6x^2 + 36x - 48$

a) Ponto de tangência $(3, 9)$; $f(3) = 9$

$$m = f'(3) = -6 \times 9 + 36 \times 3 - 48 = 6$$

$$y - 9 = 6(x - 3) \Leftrightarrow y = 6x - 18 + 9 \Leftrightarrow y = 6x - 9.$$

b) $g'(x) = -6x + 12$

$$g'(x) = 6 \Leftrightarrow -6x + 12 = 6 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$$

Ponto de tangência: $(1, -3)$; $g(1) = -3$.

$$y + 3 = 6(x - 1) \Leftrightarrow y = 6x - 6 - 3 \Leftrightarrow y = 6x - 9$$

r é tangente ao gráfico de g no ponto $T(1, -3)$.

Pág. 60

33.2

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 36x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Mín.

Máx.

$A(2, 5)$ e $B(4, 13)$.

b) $k = \text{ordenada de } B - \text{ordenada de } A = 13 - 5 = 8$.

33.3 $|k|$ terá de ser igual ao mínimo de $f - g$.

$$(f - g)(x) = (-2x^3 + 18x^2 - 48x + 45) - (-2x^2 + 12x - 13)$$

$$(f - g)(x) = 18x^2 - 60x + 58$$

$$(f - g)'(x) = 36x - 60$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$(f - g)'(x)$	-	0	+
$(f - g)(x)$			

Mín.

$$(f - g)\left(\frac{5}{3}\right) = 18 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 60 \times \frac{5}{3} + 58 = 8$$

O gráfico de f tem de “descer” 8 unidades para interseção com o gráfico de g num único ponto.

Logo, $k = -8$.

Pág. 62

1. $u_n = \frac{n-1}{n+2}$

$$u_n = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4n - 4 = 3n + 6 \Leftrightarrow n = 10; u_{10} = \frac{3}{4}$$

Resposta: (D).

2. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$2, 1, 0, -1, \dots, -n + 3$$

$$-n + 3 \leq -10^3 \Leftrightarrow -n \leq -1000 + 3 \Leftrightarrow n \geq 997$$

Resposta: (B).

3. $a_n = \begin{cases} \frac{8n}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n+10}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

(a_n) é limitada pois:

Se n é par, $a_n = \frac{8n}{n+1} = 8 - \frac{8}{n+1}$

$$0 < \frac{8}{n+1} \leq \frac{8}{3} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq -\frac{8}{n+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} \leq 8 - \frac{8}{n+1} < 8$$

Se n é ímpar $a_n = 2 + \frac{10}{n}$

$$0 < \frac{10}{n} \leq 10 \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{10}{n} \leq 12 \Leftrightarrow$$

Logo, $2 < a_n \leq 12, \forall n \in \mathbb{N}$.

Resposta: (D).

4. $a_{10} = 0$ e (a_n) é estritamente decrescente.

Então: $a_5 > a_{10} > a_{11} \Rightarrow a_5 > 0$ e $a_{11} < 0 \Rightarrow a_5 \times a_{11} < 0$

Logo $a_5 \times a_{11}$ pode ser -16 .

Resposta: (B).

Pág. 63

5. Por exemplo, se $a_n = 2n$ e $b_n = n$

(a_n) e (b_n) são estritamente crescentes.

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(c_n) não é monótona. Por exemplo:

$$c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = 3: \quad c_2 > c_1 \text{ e } c_3 < c_2$$

Resposta: (B).

6. $a_n = (-1)^n n - 4n$

$$a_{4n} = (-1)^{4n} \times 4n - 4 \times 4n = 4n - 16n = -12n$$

Resposta: (D).

7. $v_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

7.1 $v_1 = 1; v_2 = \frac{5}{4}; v_3 = \frac{7}{5}; v_4 = \frac{3}{2}; v_5 = \frac{11}{7}$.

7.2 $v_n = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 8n+4 = 7n+14 \Leftrightarrow n=10$

$$v_n = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 4n+2 = 7n+14 \Leftrightarrow n = -4 \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{7}{4} = v_{10}; \quad \frac{7}{2} \text{ não é termo de } (v_n).$$

7.3 $v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} =$

$$= \frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2 - 6n - n - 3}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+3)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (v_n) \text{ é monótona crescente.}$$

7.4 $v_n < 2 \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} < 2 \Leftrightarrow 2n+1 < 2n+4 \Leftrightarrow 0 < 3$ (verdade)

Logo, $v_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(v_n) \text{ é crescente} \Rightarrow v_n > v_1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$1 \leq v_n < 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n) \text{ é limitada.}$$

8.1 $a_n = \frac{n+3}{n+1}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+3}{n+1+1} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1}$$

$$= \frac{n^2 + n + 4n + 4 - n^2 - 2n - 3n - 6}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) \text{ é estritamente decrescente.}$$

$$b_n = \frac{-n-8}{n+1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-(n+1)-8}{(n+1)+1} - \frac{-n-8}{n+1} = \frac{-n-9}{n+2} + \frac{n+8}{n+1}$$

$$= \frac{-n^2 - n - 9n - 9 + n^2 + 2n + 8n + 16}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{7}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_{n+1} - b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (b_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

$$c_n = \frac{4n-5}{2n-1}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{4(n+1)-5}{2(n+1)-1} - \frac{4n-5}{2n-1} = \frac{4n-1}{2n+1} - \frac{4n-5}{2n-1}$$

$$= \frac{8n^2 - 4n - 2n + 1 - 8n^2 - 4n + 10n + 5}{(2n+1)(2n-1)} =$$

$$= \frac{6}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$c_{n+1} - c_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (c_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

$$d_n = \frac{-9n-1}{3n+1}$$

$$d_{n+1} - d_n = \frac{-9(n+1)-1}{3(n+1)+1} - \frac{-9n-1}{3n+1} = \frac{-9n-10}{3n+4} + \frac{9n+1}{3n+1}$$

$$= \frac{27n^2 - 9n - 30n + 10 + 27n^2 + 36 + 3n + 4}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$= \frac{-6}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$d_{n+1} - d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (d_n) \text{ é estritamente decrescente.}$$

$$8.2 \quad a_n = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} \quad \frac{n+3}{-n-1} \quad \frac{n+1}{1}$$

$$b_n = \frac{-n-8}{n+1} = -1 + \frac{-7}{n+1} \quad \frac{-n-8}{n+1} \quad \frac{n+1}{-1}$$

$$c_n = \frac{4n-5}{2n-1} = 2 + \frac{-3}{2n-1} \quad \frac{4n-5}{-4n+2} \quad \frac{2n-1}{2}$$

$$d_n = \frac{-9n-1}{3n+1} = -3 + \frac{2}{3n+1} \quad \frac{-9n-1}{9n+3} \quad \frac{3n+1}{-3}$$

$$8.3 \quad a_n = 1 + \frac{2}{n+1}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$$

$$1 < a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

$$b_n = -1 + \frac{-7}{n+1}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{-7}{n+1} < 0 \Leftrightarrow -1 - \frac{7}{2} \leq -1 + \frac{-7}{n+1} < -1$$

$$-\frac{9}{2} \leq b_n < -1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (b_n) \text{ é limitada.}$$

$$c_n = 2 + \frac{-3}{2n-1}$$

$$0 < \frac{1}{2n-1} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{-3}{2n-1} < 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2 + \frac{-3}{2n-1} < 2$$

$$-1 \leq c_n < 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n) \text{ é limitada.}$$

$$d_n = -3 + \frac{2}{3n+1}$$

$$0 < \frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{3n+1} \leq \frac{2}{4} \Leftrightarrow -3 < -3 + \frac{2}{3n+1} \leq -3 + \frac{1}{2}$$

$$-3 \leq d_n \leq -\frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (d_n) \text{ é limitada.}$$

$$9. \quad \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n^2 + n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}; \quad v_n = \frac{n-2}{n}$$

$$9.1 \quad u_1 = -1 = v_1; \quad u_2 = -1 + \frac{2}{1+1} = 0 = v_2$$

$$u_3 = 0 + \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3} = v_3; \quad u_4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9+3} = \frac{1}{2} = v_4.$$

$$9.2 \quad v_{n+1} - v_n = \frac{n+1-2}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} \\ = \frac{n^2 - n - n^2 - n + 2n + 2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (v_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

$$9.3 \quad v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2 + n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $v_1 = -1$, temos,

$$\begin{cases} v_1 = -1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2 + n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ou seja, $u_n = v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$10. \quad u_n = \begin{cases} 2n+5 & \text{se } n \leq 10 \\ 3n-5 & \text{se } n > 10 \end{cases}; \quad v_n = \begin{cases} 2n-1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

10.1 Se $n < 10$:

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 5 - (2n+5) = 2 > 0$$

Se $n > 10$:

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n-5) = 3 > 0$$

Se $n = 10$:

$$u_{n+1} - u_n = u_{11} - u_{10} = 28 - 25 = 3 > 0$$

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (u_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

10.2

a) Se n é par, $n+1$ é ímpar

$$v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 1 - (2n-1) = n+5$$

b) Se n é ímpar, $n+1$ é par

$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) - 1 - (3n+1) = -n$$

10.3 (v_n) não é monótona pois:

Se n é par,

$$u_{n+1} - u_n = n+5 > 0, \text{ para todo } n \text{ par.}$$

Se n é ímpar,

$$u_{n+1} - u_n = -n < 0, \text{ para todo } n \text{ ímpar.}$$

11.1 $u_n = n^2 + 10n$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 10(n+1) - (n^2 + 10n) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 10n + 10 - n^2 - 10n = 2n + 11$$

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (u_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

Pág. 64

11.2 $u_n = n^2 - 10n$

O vértice da parábola que contém o gráfico de (u_n) tem abcissa 5.

$$u_4 = 4^2 - 40 = -24, \quad u_5 = 5^2 - 50 = -25, \quad u_6 = 6^2 - 60 = -24$$

$u_5 < u_4$ e $u_6 > u_5 \Rightarrow (u_n)$ não é monótona.

11.3 $u_n = (-1)^n n + 2n$

$$u_1 = (-1)^1 \times 1 + 2 = 1; \quad u_2 = (-1)^2 \times 2 + 4 = 6$$

$$u_3 = (-1)^3 \times 3 + 6 = 3$$

$u_2 > u_1 \wedge u_3 < u_2 \Rightarrow (u_n)$ não é monótona.

11.4 $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + n$

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} + n & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} + n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par ($n+1$ é ímpar):

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(-\frac{1}{n+1} + n+1 \right) - \left(\frac{1}{n} + n \right) = \\ &= -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + 1 = \frac{-n - n - 1 + n(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 - n - 1}{n(n+1)} > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ par.} \end{aligned}$$

Se n é ímpar ($n+1$ é par):

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+1} + n+1 \right) - \left(-\frac{1}{n} + n \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + 1 = \frac{n + n + 1 + n(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (u_n)$ é estritamente crescente.

11.5 $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$$u_n = -\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(u_n) é constante (monótona)

11.6 $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$$u_n = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(u_n) não é monótona.

11.7 $u_n = \frac{1+2n}{3n-1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+2(n+1)}{3(n+1)-1} - \frac{1+2n}{3n-1} = \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{1+2n}{3n-1} = \\ &= \frac{6n^2 - 2n + 9n - 3 - 3n - 2 - 6n^2 - 4n}{(3n+2)(3n-1)} = \\ &= \frac{-5}{(3n+2)(3n-1)} \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (u_n)$ é estritamente decrescente.

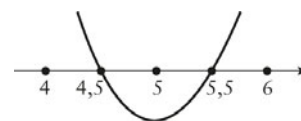
11.8 $u_n = \frac{2-4n}{2n-11}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2-4(n+1)}{2(n+1)-11} - \frac{2-4n}{2n-11} = \frac{-4n-2}{2n-9} - \frac{2-4n}{2n-11} = \\ &= \frac{-8n^2 + 44n - 4n + 22 - 4n + 18 + 8n^2 - 36n}{(2n-9)(2n-11)} = \\ &= \frac{40}{(2n-9)(2n-11)} \end{aligned}$$

(u_n) não é monótona.

$$u_4 = \frac{14}{3} \approx 4,7; \quad u_5 = 18, \quad u_6 = -22$$

$u_5 > u_4$ e $u_6 < u_5$.



12.1 $v_n = \frac{n+2}{2} = 1 + \frac{2}{n}$

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2 \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{2}{n} \leq 3$$

$1 < v_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

12.2 $v_n = \frac{2n-2}{n+2} = 2 + \frac{-6}{n+2}$

$$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{6}{3} \leq \frac{-6}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2 + \frac{-6}{n+2} < 2$$

$0 \leq v_n < 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

12.3 $v_n = \frac{(-1)^n + 2}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{3}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Se n é ímpar

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Se n é par

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n+1} \leq 1$$

Logo, $0 < v_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

$$12.4 \quad \frac{n}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3} \quad \left| \begin{array}{c} n \quad \frac{n+3}{-n-3} \quad 1 \\ -3 \end{array} \right.$$

$$v_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+3} = \begin{cases} -1 + \frac{3}{n+3} & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 - \frac{3}{n+3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par

$$0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n+3} \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{3}{n+3} \leq -\frac{2}{5}$$

Se n é ímpar

$$0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n+3} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{n+3} < 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{n+3} < 1$$

Logo, $-1 < v_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

12.5 Se $n \leq 5$

$$1^2 + 1 \leq n^2 + 1 \leq 5^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq v_n \leq 26$$

Se $n > 5$

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 0 < v_n \leq \frac{2}{5}$$

$0 < v_n \leq 26, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

$$12.6 \quad v_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \cos(n\pi) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 2n+1 \quad \frac{n+1}{-2n-2} \quad 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$= \begin{cases} 2 + \frac{-1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{-1}{n+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq 2 + \frac{-1}{n+1} < 2$$

Se n é ímpar, $v_n = -1$

Então,

$-1 \leq v_n < 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é limitada.

Em (C), $\sqrt{kn^2 + n^3 + 1}$ não define um polinómio na variável n , de grau não superior a 1, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Resposta: (C).

2. (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

$$a_n = a_k + (n-k)r$$

$$a_{10} = a_5 + (10-5) \times 3 \Leftrightarrow a_{10} = a_5 + 15 \Leftrightarrow a_{10} - a_5 = 15$$

Resposta: (A).

3. $a_{20} = 3a_{10}$

$$a_{20} = a_{10} + (20-10) \times r$$

$$3a_{10} = a_{10} + 10r; \quad 2a_{10} = 10r$$

$$a_{10} = 5r$$

Resposta: (B).

4. (a_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

$$a_2 = a_1 \times r \Leftrightarrow a_2 = a_1 \times 2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{2} = a_1$$

Resposta: (C).

5. Trata-se de uma progressão geométrica (a_n) de razão

$$r = 1 + 0,03 = 1,03 \text{ sendo } a_1 = 1000 \times 1,03.$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 1000 \times 1,03 \times (1,03)^{n-1} = 1000 \times (1,03)^n$$

Resposta: (D).

6. Trata-se de uma progressão geométrica a_n de razão

$$r = 1 + 0,08 = 1,08 \text{ sendo } a_1 = 500 \times 1,08.$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 500 \times 1,08 \times (1,08)^{n-1} = 500 \times (1,08)^n$$

Resposta: (D).

Pág. 65

1. Em (A), se $k = 1$, $kn^2 - n^2 + n = n, \forall n \in \mathbb{N}$ (progressão aritmética de razão 1).

Em (B), se $k = 0$, $\frac{n}{kn+2} + 2 = \frac{1}{2}n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$ (progressão

aritmética de razão $\frac{1}{2}$).

Em (D), $kn + 2n = (k+2)n$. É uma progressão aritmética de razão $k+2, \forall k \in \mathbb{R}$.

Pág. 66

7. Em (C) pode estar representada uma progressão geométrica

(u_n) de razão $r = -\frac{1}{2}$ sendo $u_1 = -4$.

Assim, $u_2 = 2, u_3 = -1, u_4 = \frac{1}{2}, \dots$

Resposta: (C).

8. $u_n = \frac{n+1}{2}, v_n = \frac{1}{2^{1-n}}$.

$$8.1 \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n+2-n-1}{2} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{2}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^{1-(n+1)}}}{\frac{1}{2^{1-n}}} = \frac{2^{1-n}}{2^{1-n-1}} = \frac{2^{1-n}}{2^{-n}} = 2^{1-n+n} = 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

8.2

$$a) \quad \sum_{k=10}^{50} u_k = \frac{u_{10} + u_{50}}{2} \times (50 - 10 + 1) = \frac{\frac{11}{2} + \frac{51}{2}}{2} \times 41 = \frac{31}{2} \times 41 = 635,5.$$

$$b) \quad S_{10} = v_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

$$9. \quad a_6 = 20, \quad S_6 = 75.$$

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \times 6 \Leftrightarrow 75 = \frac{a_1 + 20}{2} \times 6 \Leftrightarrow 75 = (a_1 + 20) \times 3$$

$$a_1 + 20 = \frac{75}{3} \Leftrightarrow a_1 = 5$$

$$a_n = a_k + (n-k) \times r$$

$$a_6 = a_1 + (6-1) \times r \Leftrightarrow 20 = 5 + 5r \Leftrightarrow 5r = 15 \Leftrightarrow r = 3$$

Medidas dos lados:

5 cm, 8 cm, 11 cm, 14 cm, 17 cm e 20 cm.

10. (a_n) é uma progressão aritmética

$$a_1 = 80; \quad S_{40} = 1640$$

$$\frac{a_1 + a_{40}}{2} \times 40 = 1640 \Leftrightarrow (80 + a_{40}) \times 20 = 1640 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80 + a_{40} = 82 \Leftrightarrow a_{40} = 2$$

$$a_n = a_k + (n-k) \times r$$

$$a_{40} = a_1 + (40-1) \times r \Leftrightarrow 2 = 80 + 39r \Leftrightarrow r = -2$$

$$a_{10} = a_1 + 9r = 80 + 9 \times (-2) = 62$$

No décimo andar foram colocadas 62 caixas.

11. (a_n) é uma progressão aritmética

$$a_1 = 10; \quad S_{14} = 322$$

$$\frac{a_1 + a_{14}}{2} \times 14 = S_{14} \Leftrightarrow (10 + a_{14}) \times 7 = 322 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + a_{14} = 46 \Leftrightarrow a_{14} = 36$$

$$a_{14} = a_1 + (14-1) \times r \Leftrightarrow 36 = 10 + 13r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13r = 26 \Leftrightarrow r = 2$$

$$a_7 = a_1 + 6 \times r = 10 + 6 \times 2 = 22$$

A sétima fila tem 22 lugares.

Pág. 67

12.1 P_n é uma progressão geométrica de razão

$$1 + 0,02 = 1,02 \text{ sendo } P_1 = 50 \times 1,02.$$

$$P_n = P_1 \times r^{n-1}$$

$$P_n = 50 \times 1,02 \times 1,02^{n-1} \Leftrightarrow P_n = 50 \times 1,02^n.$$

12.2 Trata-se de determinar n de

moda que: $P_n = 100$

A população duplica no 36.º

ano após a contagem inicial,

ou seja, após terem

decorrido 35 anos.

n	$u(n)$
30	90.568
31	92.379
32	94.227
33	96.112
34	98.034
35	99.994
36	101.99

13. A quantidade de sal varia em progressão geométrica (a_n) de

razão $\frac{1}{2}$, sendo n o tempo decorrido em meses e

$$a_1 = 4096 \times \frac{1}{2} = 2048.$$

$$13.1 \quad a_6 = a_1 \times r^5 = 4096 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4096 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 64$$

Decorridos seis meses existiam no lago 64 kg de sal.

13.2 $a_n = 1$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2048 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$2048 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2048} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2^{11}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 11 \Leftrightarrow n = 12$$

Terão passado 12 meses.

14. (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 20$ sendo

$$a_1 = 250.$$

$$14.1 \quad a_{30} = a_1 + (30-1) \times r = 250 + 29 \times 20 = 830$$

No 30.º dia colocou 830 azulejos.

14.2 $a_n = 450$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 250 + (n-1) \times 20 = 20n + 230$$

$$a_n = 450 \Leftrightarrow 20n + 230 = 450 \Leftrightarrow 20n = 220 \Leftrightarrow n = 11$$

Terão passado 11 dias.

$$14.3 \quad S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{250 + (20 \times 20 + 230)}{2} \times 20 =$$

$$= (250 + 400 + 230) \times 10 = 8800$$

Colocou 8800 azulejos.

15. (s_n) é uma progressão aritmética de razão 1 sendo $s_1 = 1$.

$$15.1 \quad S_n = 100$$

$$\frac{s_1 + s_n}{2} \times n = 100$$

$$s_n = s_1 + (n-1) \times r = 1 + (n-1) \times 1 = n$$

$$\frac{1+n}{2} \times n = 100 \Leftrightarrow n + n^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 200 = 0$$

Como $x^2 + x - 200 = 0 \wedge x > 0 \Rightarrow x \approx 13,65$, podemos concluir que o Rui vendeu a última enciclopédia na 14.^a semana, ou seja, entre 91 e 98 dias.

$$15.2 \quad S_n = 200$$

$$\frac{1+n}{2} \times n = 200 \Leftrightarrow n^2 + n - 400 = 0$$

Como $x^2 + x - 400 = 0 \wedge x > 0 \Rightarrow x \approx 19,5$, o Rui completou a venda de 200 enciclopédias na 20.^a semana (entre 134 e 140 dias).

$$s_n = 300 \Leftrightarrow n^2 + n - 600 = 0$$

$$x^2 + x - 600 = 0 \wedge x > 0 \Rightarrow x = 24$$

Na 24.^a semana (entre 162 e 168 dias).

16. Se (u_n) é uma progressão aritmética de razão r então:

$$u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $v_n = k^{u_n}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Então:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{k^{u_{n+1}}}{k^{u_n}} = k^{u_{n+1} - u_n} = k^r, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = k^r, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é uma progressão geométrica de razão k^r .

Pág. 68

1. Se os termos de (a_n) são alternadamente positivos e negativos e se (a_n) é convergente então, $\lim a_n = 0$.

Resposta: (C).

$$2. \quad f(x) = \frac{x+1}{2+3x^2} : u_n = f(n) = \frac{n+1}{2+3n^2}$$

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n}{3n^2} \right) = \lim \left(\frac{1}{3n} \right) = 0$$

Resposta: (C).

$$3. \quad a_n = -\frac{1}{2^n} \rightarrow 0 : \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$c_n = (\pi - \sqrt{5})^n \rightarrow 0 \text{ porque } 0 < \pi - \sqrt{5} < 1.$$

Resposta: (D).

4. (i) é falsa. Por exemplo $u_n = n$ e $v_n = 2 - n$ são infinitamente grandes e $(u_n + v_n) = 2 \rightarrow 2$.

(ii) é verdadeira. Se (u_n) é decrescente e de termos positivos então é limitada dado que $0 < u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então sendo (u_n) monótona e limitada é convergente.

Resposta: (B).

5. (i) é verdadeira. Se (u_n) é convergente e tem os termos alternadamente positivos e negativos então $\lim u_n = 0$.

$$(ii) \text{ é falsa. Por exemplo, se } u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(u_n) é não limitada e não é um infinitamente grande.

Resposta: (C).

Pág. 69

$$6. \quad u_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2^n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{2^n} + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$6.1 \quad \lim(n+1) = +\infty \text{ e } \lim(2^n + 1) = +\infty \Rightarrow \lim(u_n) = +\infty.$$

$$6.2 \quad \lim(n^2 + 1) = +\infty \wedge \lim\left(\frac{1}{2^n} + 1\right) = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$\Rightarrow (v_n)$ não tem limite $\Rightarrow (v_n)$ é divergente oscilante.

$$7. \quad v_n = \frac{-3n+1}{2n+3}.$$

$$\begin{aligned} 7.1 \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{-3(n+1)}{2(n+1)+3} - \frac{-3n+1}{2n+3} = \frac{-3n-2}{2n+5} - \frac{-3n+1}{2n+3} \\ &= \frac{-6n^2 - 9n - 4n - 6 + 6n^2 + 15n - 2n - 5}{(2n+5)(2n+3)} = \\ &= \frac{-11}{(2n+5)(2n+3)} \end{aligned}$$

$v_{n+1} - v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (v_n)$ é estritamente decrescente.

$$\begin{aligned} 7.2 \quad v_n + \frac{3}{2} &\leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{-3n+1}{2n+3} + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-6n+2+6n+9}{4n+6} \leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{11}{4n+6} \leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow 11\,000 \leq 4n+6 \Leftrightarrow 4n \geq 10\,994 \Leftrightarrow n \geq 2748. \end{aligned}$$

$$7.3 \quad \lim v_n = \lim \frac{-3n+1}{2n+3} = \lim \frac{-3n}{2n} = \frac{-3}{2}.$$

$$8. \quad \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$8.1 \quad v_n = u_n - 3$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-3}{u_n-3} = \frac{\frac{1}{3}u_n+2-3}{u_n-3} = \frac{\frac{1}{3}u_n-1}{u_n-3} = \frac{\frac{1}{3}(u_n-3)}{u_n-3} = \frac{1}{3}$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

$$8.2 \quad v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$v_1 = u_1 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \lim v_n = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0.$$

$$8.3 \quad v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3$$

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3; \lim u_n = \lim \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3\right] = 0 + 3 = 3.$$

$$9.1 \quad \lim \frac{2n+3}{3n-1} = \lim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}.$$

$$9.2 \quad \lim \frac{6n^2+3n}{3n^2+2} = \lim \frac{6n^2}{3n^2} = 2.$$

$$9.3 \quad \lim \frac{-2n^3+n}{n^2+1} = \lim \frac{-2n^3}{n^2} = \lim (-2n) = -\infty.$$

$$9.4 \quad \lim \frac{3n^2+5n}{4n^4+2n^2} = \lim \frac{3n^2}{4n^4} = \lim \frac{3}{4n^2} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

$$9.5 \quad \lim \frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+2^{n+1}} = \lim \frac{2^n+3^n \times 3}{3^n+2^n \times 2} = \lim \frac{\frac{2^n}{3^n}+3}{1+\frac{2^n}{3^n} \times 2} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2} = \frac{0+3}{1+0 \times 2} = 3.$$

$$9.6 \quad \lim \frac{3^n+(-4)^{n+1}}{2^n+(-4)^n} = \lim \frac{3^n+(-4)^n \times (-4)}{2^n+(-4)^n} =$$

$$= \lim \frac{\frac{3^n}{(-4)^n}+(-4)}{\frac{2^n}{(-4)^n}+1} = \lim \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n-4}{\left(-\frac{2}{4}\right)^n+1} = \frac{0-4}{0+1} = -4.$$

$$10.1 \quad \lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim \left(1-\frac{2}{2n}\right)^{2n} = e^{-2}.$$

$$10.2 \quad \lim \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n = e^{\frac{2}{3}}.$$

$$10.3 \quad \lim \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^1 =$$

$$= \lim \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \times \lim \left(1-\frac{2}{n}\right)^1 = e^{-2} \times 1 = e^{-2}.$$

$$10.4 \quad \lim \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right]^3 =$$

$$= \left[\lim \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right]^3 = \left[\lim \left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right]^3 =$$

$$= \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^3 = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e}.$$

$$10.5 \quad \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$10.6 \quad \lim \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n+1} = \lim \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n} \times \lim \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^1 =$$

$$= \lim \left[\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}\right]^3 = \lim \left[\frac{\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n}\right]^3 =$$

$$= \frac{\left[\lim \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\right]^3}{\left[\lim \left(1+\frac{3}{2n}\right)^n\right]^3} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)^3 = \left(e^{-\frac{4}{2}}\right)^3 = (e^{-2})^3 = e^{-6}.$$

Pág. 70

$$11. \quad u_n = \frac{4n+1}{8n+7}; v_n = n - \sqrt{n^2+n}.$$

$$11.1 \quad u_n = \frac{9}{19} \Leftrightarrow \frac{4n+1}{8n+7} = \frac{9}{19} \Leftrightarrow \frac{4n+1}{8n+7} - \frac{9}{19} = 0 \Leftrightarrow$$

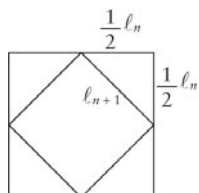
$$\Leftrightarrow 76n+19-72n-63=0 \Leftrightarrow 4n=44 \Leftrightarrow n=11$$

$$u_{11} = \frac{9}{19}.$$

$$\begin{aligned}
 11.2 \quad \lim v_n &= \lim (n - \sqrt{n^2 + n}) = \\
 &= \lim \frac{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}} \\
 &= \lim \frac{n^2 - (n^2 + n)}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \\
 &= \lim \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \lim \frac{-n}{n(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}})} \\
 &= \lim \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.3 \quad \lim u_n &= \lim \frac{4n+1}{8n+7} = \lim \frac{4n}{8n} = \frac{1}{2} \\
 \lim (u_n + v_n) &= \lim u_n + \lim v_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.1 \quad (l_{n+1})^2 &= \left(\frac{1}{2}l_n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l_n\right)^2 \\
 \Leftrightarrow (l_{n+1})^2 &= 2 \times \frac{1}{4}(l_n)^2 \\
 \Leftrightarrow (l_{n+1})^2 &= \frac{1}{2}(l_n)^2 \\
 \Leftrightarrow \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



Como $l_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(l_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sendo $l_1 = u$.

Então:

$$\begin{aligned}
 l_n &= l_1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \text{ ou seja, } l_n = u \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \\
 a_n &= (l_n)^2 = \left[u \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right]^2 = u^2 \times \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{n-1} \\
 a_n &= u^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2 \quad l_{11} &= u \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{11-1} = u \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = u \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{10} = \\
 &= u \left(\frac{1}{2}\right)^5 = u \times \frac{1}{32} = \frac{u}{32} = \frac{u}{8}.
 \end{aligned}$$

$$12.3 \quad a_n = u^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{2}$$

sendo $a_1 = u^2$.

$$\lim s_n = 32$$

$$\frac{a_1}{1-r} = 32 \Leftrightarrow \frac{u^2}{1-\frac{1}{2}} = 32 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\frac{1}{2}} = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{1}{2} \times 32 \Leftrightarrow u^2 = 16$$

Como $u > 0$, temos $u = 4$.

$$13. \quad (a_n) \text{ é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{2} \text{ sendo}$$

$$a_1 = 12.$$

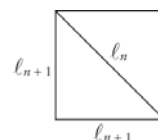
$$\lim s_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

Como $24 < 25$, o objeto não atinge o alvo.

$$14. \quad a_n = (l_n)^2$$

$$a_{n+1} = (l_{n+1})^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} = \frac{1}{2}, \text{ dado que:}$$



$$(l_{n+1})^2 + (l_{n+1})^2 \Leftrightarrow 2(l_{n+1})^2 = (l_n)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} = \frac{1}{2}.$$

Então, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

sendo $a_1 = 2^2 = 4$.

Logo,

$$14.2 \quad \lim s_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \text{ u. a.}$$