

Pág. 12

1. Perímetro de $[ABCD]$: $4 \times 1 = 4$.

$$\overline{EH}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow \overline{EH}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{EH}^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{EH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Perímetro de $[EFGH]$: $4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Soma dos perímetros: $4 + 2\sqrt{2}$

Resposta: (A)

2. $[ABGH]$ é um retângulo.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{BG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2 \Leftrightarrow \overline{BG}^2 = 10^2 + 20^2 \Leftrightarrow \overline{BG} = \sqrt{500}$$

Área de $[ABGH]$ = $10\sqrt{500} \text{ m}^2 \approx 223,6 \text{ m}^2$

Resposta: (A)

3. Os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{\overline{DE}}{10} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{40}{7}$$

Resposta: (C)

4. Os triângulos $[CED]$ e $[CBA]$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{5}{2} = \frac{\overline{AC}}{3} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{15}{2}$$

Então, $\overline{AC} = 7,5 \text{ cm}$.

Resposta: (B)

Pág. 13

5.1 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{100} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$$

Resposta: (D)

5.2 $\cos \beta = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Resposta: (D)

6. Se α é um ângulo agudo, $0 < \sin \alpha < 1$. Logo, $\sin \alpha \neq \frac{5}{3}$.

Resposta: (A)

7. Se α é um ângulo agudo, $0 < \cos \alpha < 1$. Logo, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pode ser

igual a $\cos \alpha$.

Resposta: (B)

8. Na figura 10, o comprimento da hipotenusa é igual a

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2. \text{ Portanto, nesta figura, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resposta: (C)

Pág. 14

1.1 $\sin(28^\circ) \approx 0,47$

1.2 $\cos(25^\circ) \approx 0,91$

1.3 $\text{tg}(25^\circ) \approx 0,47$

```
sin(28)
.4694715628
cos(25)
.906307787
tan(25)
.4663076582
```

2.1 $\alpha \approx 68,20^\circ$

2.2 $\alpha \approx 14,48^\circ$

2.3 $\alpha \approx 53,13^\circ$

```
tan^-1(5/2)
68.19859051
sin^-1(1/4)
14.47751219
cos^-1(3/5)
53.13010235
```

3.1 $\text{tg } \alpha \approx 0,58$

3.2 $\cos \alpha \approx 0,5$

3.3 $\sin \alpha \approx 0,92$

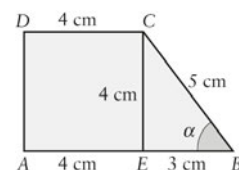
```
tan(sin^-1(1/2))
.5773502692
cos(tan^-1(1/3))
.5
sin(cos^-1(2/5))
.916515139
```

Pág. 15

1. $\overline{EB} = (7 - 4) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha \approx 53,13^\circ$$



Pág. 16

2. $\hat{C}BD = 60^\circ$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \sin(60^\circ) \Leftrightarrow \frac{1,5}{\overline{CB}} = \sin(60^\circ) \Leftrightarrow \overline{CB} = \frac{1,5}{\sin(60^\circ)}$$

$$\overline{AB} = \overline{CB} = \frac{1,5}{\sin(60^\circ)} \approx 1,7321$$

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{2} \approx \frac{1,7321 \times 1,5}{2} \approx 1,3 \text{ m}^2$$

Pág. 17

1.1 $\cos \alpha = \frac{6}{7}; \quad \alpha \approx 31,0^\circ$

1.2 $\sin \alpha = \frac{3}{10}; \quad \alpha \approx 17,5^\circ$

1.3 $\text{tg } \alpha = \frac{2,5}{3-2}; \quad \alpha \approx 68,2^\circ$

2.1 $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha \approx 56,310^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,8$

2.2 $\sin \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha \approx 11,537^\circ \Rightarrow \cos \alpha \approx 1,0$

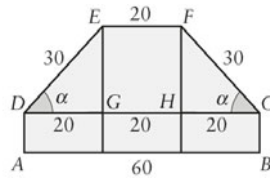
3.1

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$\overline{DG} = \frac{\overline{AB} - \overline{EF}}{2} = \frac{60 - 20}{2} = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Logo, $\alpha \approx 48,2^\circ$



3.2 Para $\alpha = 45^\circ$ temos

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{\overline{DG}}{30} \Leftrightarrow \overline{DG} = 30 \cos 45^\circ$$

Logo, $\overline{DG} \approx 21,2132$

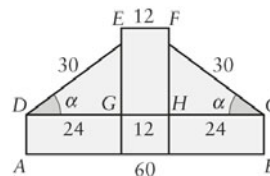
$$\overline{EF} = \overline{AB} - 2\overline{DG} \approx 60 - 2 \times 21,2132$$

$$\overline{EF} \approx 17,6 \text{ m.}$$

3.3
$$\overline{DG} = \frac{\overline{AB} - \overline{EF}}{2} = \frac{60 - 12}{2} = 24$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Logo, $\alpha \approx 37^\circ$.



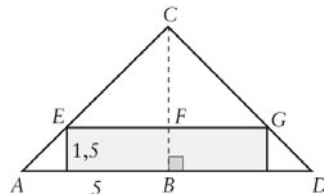
4.

$$\overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\overline{CB}^2 + 5^2 = 7^2$$

$$\overline{CB}^2 = \sqrt{24}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{24} - 1,5$$



Atendendo à semelhança dos triângulos $[ACB]$ e $[ECF]$, temos:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{5} = \frac{\sqrt{24} - 1,5}{\sqrt{24}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{5(\sqrt{24} - 1,5)}{\sqrt{24}}$$

$$\overline{EF} \approx 3,4691$$

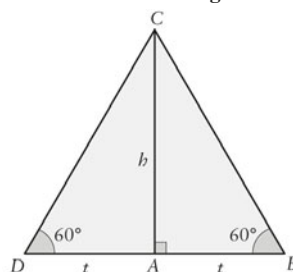
$$\overline{EG} = 2\overline{EF} \approx 6,94$$

Pág. 18

1. Seja $[ACD]$ o simétrico do triângulo $[ABC]$ relativamente à reta AC .

Tem-se então que $DB \perp AB$ e A é o ponto médio de $[DB]$

logo, se $\overline{AB} = t$, $\overline{DB} = 2t$.



Atendendo à simetria, $\hat{ADC} = \hat{CBA} = 60^\circ$ pelo que o triângulo $[ABC]$ é equilátero. Logo $\overline{BC} = \overline{DB} = 2t$.

Então, $\overline{CB} = 2\overline{AB}$.

2. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$

$$(2t)^2 = \overline{AC}^2 + t^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4t^2 - t^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3t^2$$

Como $\overline{AC} > 0$ e $t > 0$, temos $\overline{AC} = \sqrt{3}t$ pelo que

$$\overline{AC} = \sqrt{3} \overline{AB}.$$

Pág. 20

3.
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \sin(60^\circ) \Leftrightarrow \frac{1,8}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3,6 = \sqrt{3} \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3,6}{\sqrt{3}}$$

Seja d a distância, em metros, entre dois degraus

$$\text{consecutivos: } d = \frac{1}{5} \times \frac{3,6}{\sqrt{3}} \approx 0,42 \text{ m.}$$

Pág. 21

1.1 Como o hexágono é regular temos

$$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = 3 \text{ m.}$$

Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Como $OM \perp AB$ e $\hat{OAB} = 60^\circ$

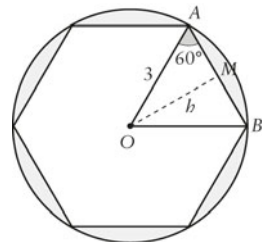
dados que o triângulo $[OBA]$ é equilátero, temos que:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área}_{[OBA]} = \frac{3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do hexágono} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2 \approx 23,4 \text{ m}^2.$$



1.2 $A = \text{Área do círculo} - \text{Área do hexágono} =$

$$= \pi \times 3^2 - \frac{54\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2 \approx 4,9 \text{ m}^2.$$

2. Altura do cone:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \text{tg}(60^\circ) \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{9} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{CD} = 9\sqrt{3}$$

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}}$$

$$= \pi \times 9^2 \times 20 + \frac{1}{3} \pi \times 9^2 \times 9\sqrt{3} \approx 6411,6 \text{ cm}^3.$$

3.1 $\overline{CD} = 1,2 \text{ m}$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg}(45^\circ) \Leftrightarrow \frac{1,2}{\overline{AD}} = 1 \Leftrightarrow \overline{AD} = 1,2$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \sin(45^\circ) \Leftrightarrow \frac{1,2}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2,4 = \sqrt{2} \overline{AC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2,4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2,4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1,2\sqrt{2}$$

$$P_{[ADC]} = \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{DC} = 1,2\sqrt{2} + 1,2 + 1,2 = 1,2\sqrt{2} + 2,4$$

$$P_{[ADC]} = \frac{1,2\sqrt{2}}{10} + \frac{24}{10} \text{ m} = \frac{12 + 6\sqrt{2}}{5} \text{ m}.$$

3.2 $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \operatorname{tg}(30^\circ) \Leftrightarrow \frac{1,2}{\overline{DB}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3,6 = \sqrt{3} \overline{DB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{3,6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{3,6\sqrt{3}}{10 \times 3} \Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \frac{1,2}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2,4 \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} P_{[DBC]} &= \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{5} + \frac{12}{5} + 1,2 = \frac{6\sqrt{3}}{5} + \frac{12}{5} + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$P_{[DBC]} = \frac{18 + 6\sqrt{3}}{5} \text{ m}.$$

4. $\sqrt{3} \sin 60^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ - (2\sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ)^2 =$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{2} + 1 - 2^2 = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$$

Pág. 22

1.1 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \cos 39^\circ \Leftrightarrow \frac{15}{x} = \cos 39^\circ \Rightarrow x = \frac{15}{\cos 39^\circ} \Leftrightarrow x \approx 19,3 \text{ m}.$

1.2 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \sin 62^\circ \Leftrightarrow \frac{x}{25} = \sin 62^\circ \Leftrightarrow x = 25 \sin 62^\circ \Rightarrow x \approx 22,1 \text{ m}.$

2.1 $\frac{h-1,7}{20} = \operatorname{tg} 53^\circ \Leftrightarrow h-1,7 = 20 \operatorname{tg} 53^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h = 1,7 + 20 \operatorname{tg} 53^\circ \Rightarrow h \approx 28,2 \text{ m}$$

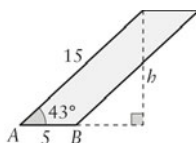
2.2 $\frac{h}{25} = \operatorname{tg}(42^\circ) \Leftrightarrow h = 25 \operatorname{tg}(42^\circ) \Rightarrow h \approx 22,5 \text{ m}.$

3.1 Seja h a altura do paralelogramo relativo a $[AB]$:

$$\frac{h}{15} = \sin 43^\circ \Leftrightarrow h = 15 \sin(43^\circ)$$

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times h = 5 \times 15 \sin(43^\circ)$$

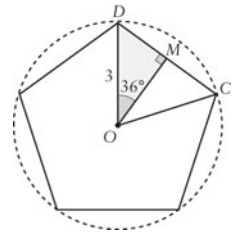
$$A_{[ABCD]} \approx 51,15 \text{ cm}^2.$$



3.2 $OM \perp DC$

$$\widehat{COD} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\widehat{MOD} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



$$\frac{\overline{OM}}{3} = \cos(36^\circ) \Leftrightarrow \overline{OM} = 3 \cos(36^\circ)$$

$$\frac{\overline{MD}}{3} = \sin(36^\circ) \Leftrightarrow \overline{MD} = 3 \sin(36^\circ)$$

$$\overline{DC} = 2\overline{MD} = 6 \sin(36^\circ)$$

$$A_{[OCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{OM}}{2} = \frac{6 \sin(36^\circ) \times 3 \cos(36^\circ)}{2} =$$

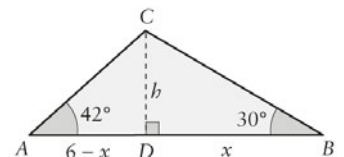
$$= 3 \sin(36^\circ) \times 3 \cos(36^\circ)$$

$$A_{\text{pentágono}} = 5 \times A_{[OCD]} = 5 \times 3 \sin(36^\circ) \times 3 \cos(36^\circ)$$

$$A_{\text{pentágono}} \approx 21,40 \text{ cm}^2.$$

Pág. 23

4.
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg}(42^\circ) = \frac{h}{6-x} \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg}(30^\circ) \\ h = (6-x) \operatorname{tg}(42^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}x}{3} = 6 \operatorname{tg}(42^\circ) - x \operatorname{tg}(42^\circ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x + x \operatorname{tg}(42^\circ) = 6 \operatorname{tg}(42^\circ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{tg}(42^\circ) \right) = 6 \operatorname{tg}(42^\circ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x = \frac{6 \operatorname{tg}(42^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{tg}(42^\circ)} \end{cases}$$

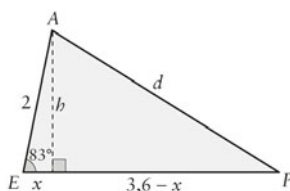
Usando a calculadora obtemos:

$$\begin{cases} h \approx 2,1107 \\ x \approx 3,6558 \end{cases} \text{ e } A_{[ABC]} \approx \frac{6 \times 2,1107}{2} \approx 6,3 \text{ m}^2$$

Pág. 24

5.

$$\begin{cases} \frac{h}{2} = \sin 83^\circ \\ \frac{x}{2} = \cos 83^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2 \sin 83^\circ \\ x = 2 \cos 83^\circ \end{cases}$$



$$\overline{AP} = d$$

$$d^2 = h^2 + (3,6 - x)^2$$

$$d = \sqrt{(2 \sin 83^\circ)^2 + (3,6 - 2 \cos 83^\circ)^2}$$

$$d \approx 3,9 \text{ km}$$

Pág. 25

1.

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(30^\circ) \\ \frac{y}{x+20} = \operatorname{tg}(27^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \operatorname{tg}(30^\circ) \\ x \operatorname{tg}(30^\circ) = x \operatorname{tg}(27^\circ) + 20 \operatorname{tg}(27^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \operatorname{tg}(30^\circ) \\ x(\operatorname{tg}(30^\circ) - \operatorname{tg}(27^\circ)) = 20 \operatorname{tg}(27^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \operatorname{tg}(30^\circ) \\ x = \frac{20 \operatorname{tg}(27^\circ)}{\operatorname{tg}(30^\circ) - \operatorname{tg}(27^\circ)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \approx 86,745 \\ x \approx 150,247 \end{cases}; \quad x \approx 150,2 \text{ m e } y \approx 86,7 \text{ m}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{h}{x} = \operatorname{tg}(53^\circ) \\ \frac{h}{120-x} = \operatorname{tg}(45^\circ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg}(53^\circ) \\ x \operatorname{tg}(53^\circ) = (120-x) \times 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg}(53^\circ) \\ x \operatorname{tg} 53^\circ + x = 120 \end{cases}$$

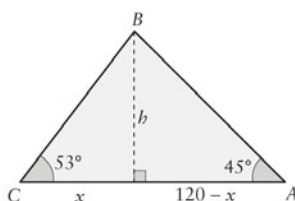
$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg}(53^\circ) \\ x(\operatorname{tg}(53^\circ) + 1) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{120 \operatorname{tg}(53^\circ)}{1 + \operatorname{tg}(53^\circ)} \\ x = \frac{120}{1 + \operatorname{tg}(53^\circ)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h \approx 68,4325 \\ x \approx 51,5675 \end{cases}$$

$$\overline{AB}^2 = h^2 + (120-x)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{h^2 + (120-x)^2}$$

$$\overline{AB} \approx 96,8 \text{ m}$$



$$3.1 \quad \widehat{BAE} + 210^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAE} = 60^\circ$$

$$\widehat{EBA} + 90^\circ + 215^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{EBA} = 55^\circ$$

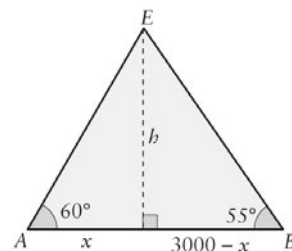
$$\widehat{AEB} + \widehat{BAE} + \widehat{EBA} = 180^\circ$$

$$\widehat{AEB} + 60^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{AEB} = 65^\circ$$

3.2

$$\begin{cases} \frac{h}{x} = \operatorname{tg}(60^\circ) \\ \frac{h}{3000-x} = \operatorname{tg}(55^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} h = x\sqrt{3} \\ x\sqrt{3} = 3000 \operatorname{tg}(55^\circ) - x \operatorname{tg}(55^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x\sqrt{3} \\ x(\sqrt{3} + \operatorname{tg}(55^\circ)) = 3000 \operatorname{tg}(55^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x\sqrt{3} \\ x = \frac{3000 \operatorname{tg}(55^\circ)}{\sqrt{3} + \operatorname{tg}(55^\circ)} \Rightarrow \begin{cases} h \approx 2348,2303 \\ x \approx 1355,7514 \end{cases} \end{cases}$$

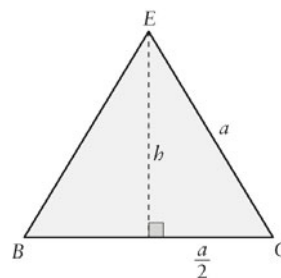
$$\overline{AE}^2 = x^2 + h^2$$

$$\overline{AE} = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\overline{AE} \approx 2711,5 \text{ km}$$

4. Se a pirâmide é regular as faces laterais são triângulos isósceles.

Como $\widehat{CBE} = 60^\circ$ as faces laterais são triângulos equiláteros de lado a .



$$4.1 \quad h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Como } h > 0 \text{ e } a > 0 \text{ vem } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$A_{\triangle[BCE]} = \frac{a \times h}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

$$A_{\text{lateral}} = 4A_{\triangle[BCE]} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2.$$

4.2 Seja y a altura da pirâmide:

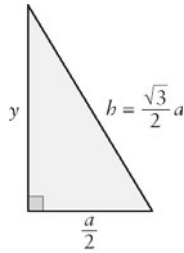
$$y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$$y^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}a^2$$

Como $y > 0$ e $a > 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$$A_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3}a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3.$$



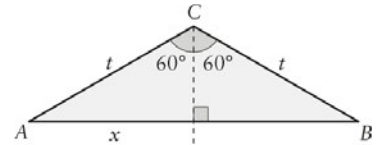
4. $\overline{AB} = 2x$

$$\frac{x}{t} = \sin(60^\circ)$$

$$x = t \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

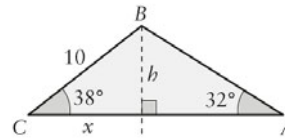
$$2x = 2 \times t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \overline{AB} = \sqrt{3}t$$

Resposta: (A).



MA11ENPR © Porto Editora

5. $\hat{BAC} = 180^\circ - 110^\circ - 38^\circ = 32^\circ$



$$\frac{x}{10} = \cos(38^\circ) \Leftrightarrow x = 10 \cos(38^\circ)$$

$$\frac{h}{10} = \sin(38^\circ) \Leftrightarrow h = 10 \sin(38^\circ)$$

$$\frac{h}{AB} = \sin(32^\circ) \Leftrightarrow \frac{10 \sin(38^\circ)}{AB} = \sin(32^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10 \sin(38^\circ)}{\sin(32^\circ)}.$$

6. Seja $\alpha = \hat{ACB}$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{0,3}{1,2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 14,48^\circ \Rightarrow \alpha \approx 29^\circ$$

Resposta: (D).

Pág. 26

1. $\frac{\overline{AC}}{180} = \operatorname{tg}(30^\circ) \Leftrightarrow \overline{AC} = 180 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, $\overline{AC} = 60\sqrt{3}$ m.

$$\frac{180}{\overline{BC}} = \cos(30^\circ) \Leftrightarrow \frac{180}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 180 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{180 \times 2 \times \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 120\sqrt{3}$$

Então, $\overline{BC} = 120\sqrt{3}$ m.

Resposta: (C).

2.1 $\frac{10}{\overline{BI}} = \sin(60^\circ) \Leftrightarrow \frac{10}{\overline{BI}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 20 = \overline{BI}\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{BI} = \frac{20}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BI} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{[ABLI]} = \overline{AB} \times \overline{BI} = 10 \times \frac{20\sqrt{3}}{3} = 200 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

Resposta: (C).

3. $\frac{\overline{OB}}{\overline{VB}} = \cos(45^\circ) \Leftrightarrow \frac{\overline{OB}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 4\sqrt{2}$

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{VB}} = \sin(45^\circ) \Leftrightarrow \frac{\overline{OV}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{OV} = 4\sqrt{2}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \pi \times 32 \times 4\sqrt{2} = \frac{128\pi}{3}\sqrt{2}$$

Resposta: (D).

Pág. 27

1.1 $\overline{AE} = \overline{DF} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{28}{2} = 14$

$$\overline{CD} = \overline{AB}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \cos(72^\circ) \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{14} = \cos(72^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 14 \cos(72^\circ) \quad ; \quad \overline{CD} = \overline{AB} \approx 4,3 \text{ m}$$

1.2 $\overline{EF} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{CD} = 28 - 2 \times \overline{AB} \approx 19,3$

$$\overline{EF} \approx 19,3 \text{ m}$$

2. Seja $\alpha = \hat{ECA}$; $\overline{EA} = 5$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{136}}$$

Logo, $\alpha = 23,2^\circ$.

3.1 Seja $\alpha = D\hat{C}V$.

a) $h = 18$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{EC} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{18}{10} \Leftrightarrow \alpha \approx 60,9^\circ$.

b) $h = 15$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{10} \Rightarrow \alpha \approx 56,3^\circ$

3.2 $h = 15$ cm; $\overline{EC} = 10$ cm

$$\overline{CV}^2 = 15^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{CV} = \sqrt{325}$$

$$A_{\text{face}} = \frac{20\sqrt{325}}{2} \approx 180,3$$

$$A_{\text{face}} \approx 180,3 \text{ cm}^2$$

3.3 $V = V_{\text{paralelepípedo}} - V_{\text{pirâmide}} =$

$$= 20^2 \times 30 - \frac{1}{3} \times 20^2 \times h$$

$$V = 1200 - \frac{400}{3} h.$$

Pág. 29

1.1 $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$;

1.2 $I\hat{O}C = 4 \times 36^\circ = 144^\circ$;

1.3 $H\hat{O}E = 7 \times 36^\circ = 252^\circ$;

2.1 $\dot{O}A$; 2.2 $\dot{O}A$;

2.3 $\dot{O}A$; 2.4 $\dot{O}A$;

2.5 $\dot{O}F$; 2.6 $\dot{O}F$;

2.7 $-324^\circ = 9 \times (-36^\circ)$; $\dot{O}B$;

2.8 $684^\circ = 360 + 9 \times 36^\circ$; $\dot{O}J$;

2.9 $-3276^\circ = -9 \times 360^\circ - 36^\circ$; $\dot{O}J$;

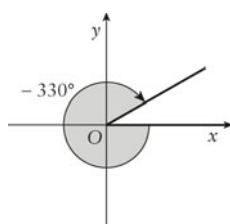
2.10 $2880^\circ = 8 \times 360^\circ$; $\dot{O}A$;

2.11 $-3600^\circ = -10 \times 360^\circ$; $\dot{O}A$;

2.12 $-36000^\circ = -100 \times 360^\circ$; $\dot{O}A$.

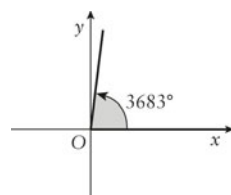
Pág. 31

6.1 -330°



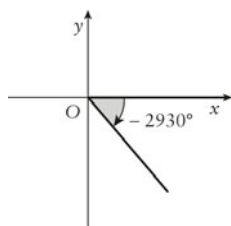
1.º quadrante

6.2 $3683 = 10 \times 360^\circ + 83^\circ$



1.º quadrante

6.3 $-2930^\circ = -8 \times 360^\circ - 50^\circ$



4.º quadrante

Pág. 33

7.1 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$60^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$$x = \frac{60\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad};$$

7.2 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$30^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$$x = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad};$$

7.3 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$45^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$$x = \frac{45\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad};$$

7.4 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$300^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$$x = \frac{300\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$$300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad};$$

7.5 $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$1180^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$$x = \frac{1180\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{59\pi}{9}$$

$$1180^\circ = \frac{59\pi}{9} \text{ rad}.$$

$$8.1 \quad \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5 \times 180^\circ}{6} = 150^\circ;$$

$$8.2 \quad \frac{7\pi}{2} \text{ rad} = \frac{7 \times 180^\circ}{2} = 630^\circ;$$

$$8.3 \quad \frac{212\pi}{15} \text{ rad} = \frac{212 \times 180^\circ}{15} = 2544^\circ.$$

Pág. 34

$$9.1 \quad 360^\circ \text{ — } 2\pi \times 5 \text{ cm}$$

$$140^\circ \text{ — } x \text{ cm}$$

$$x = \frac{140 \times 10\pi}{360} \text{ cm}; \quad x = \frac{35\pi}{9} \text{ cm};$$

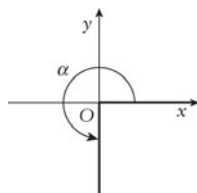
$$9.2 \quad 360^\circ \text{ — } \pi \times 70^2 \text{ cm}^2$$

$$30^\circ \text{ — } x \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{30 \times \pi \times 70^2}{360} \text{ cm}^2; \quad x = \frac{1225\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

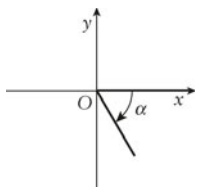
Pág. 35

1.1



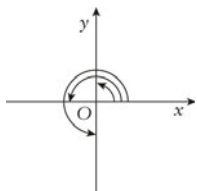
α não pertence a qualquer quadrante;

1.2



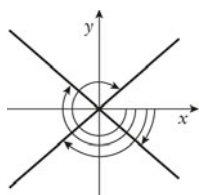
α é do 4.º quadrante;

1.3



α não pertence a qualquer dos quadrantes qualquer que seja o valor de k .

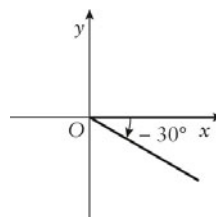
1.4



α pode pertencer a qualquer um dos quatro quadrantes.

2.1

a)



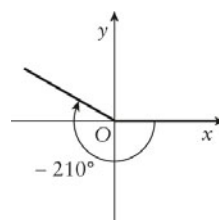
5 minutos correspondem a um ângulo de $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

$-6 \times 360^\circ - 30^\circ$ (4.º quadrante).

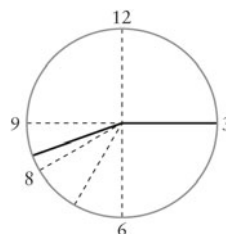
b)

$$35 = 7 \times 5; \quad 7 \times 30^\circ = 210^\circ$$

$-8 \times 360^\circ - 210^\circ$ (2.º quadrante).



2.2



$$-\frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{8}$$

$$\text{ou} \quad \pi + \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{8}$$

Resposta: $-\frac{7\pi}{8}$ rad ou $\frac{9\pi}{8}$ rad.

3.1

$$\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}; \quad \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

a)

$$A\hat{O}B = \frac{8\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

$$A\hat{O}B = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

b)

$$\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$A'\hat{O}'B' = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

$$A'\hat{O}'B' = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2 $r = 1 \text{ m}$; $r' = 0,5 \text{ m}$

a) $2\pi r = 2\pi \times 1$

$$100 \times 2\pi = 200\pi$$

Quando a roda maior dá 100 voltas percorre $200\pi \text{ m}$.

$$2\pi r' = 2\pi \times 0,5 = \pi$$

$$\frac{200\pi}{\pi} = 200$$

Quando a roda menor percorre $200\pi \text{ m}$ dá 200 voltas.

$$\frac{2}{10} \times 2\pi = \frac{2\pi}{5}$$

O comprimento do arco AB é igual a $\frac{2\pi}{5} \text{ m}$.

b) $\frac{1}{4}\pi \times (0,5)^2 = \frac{\pi}{16}$

A área pedida é igual a $\frac{\pi}{16} \text{ m}^2$.

$$B\left(\frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}\right).$$

Temos, portanto:

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{11}}{5}.$$

10.2 Coordenadas do ponto A : $A\left(-\frac{5}{6}, y\right)$

$$\overline{OA} = 1$$

$$\overline{OA}^2 = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{25}{36} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{11}{36}$$

Como $y < 0$, vem $y = -\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Então, $\cos \beta = -\frac{5}{6}$, $\sin \beta = -\frac{\sqrt{11}}{6}$ e $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{11}}{5}$.

Pág. 36

1.1 $A(1, 0)$; $B(0, 1)$; $C(-1, 0)$; $D(0, -1)$.

1.2

a) $\overline{OE} = 1$.

b) $\frac{\overline{EF}}{1} = \sin(30^\circ) \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}$.

c) $\frac{\overline{OF}}{1} = \cos(30^\circ) \Leftrightarrow \overline{OF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

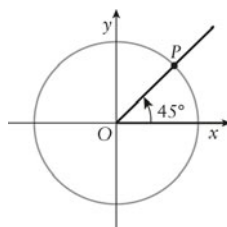
1.3 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.4 $E(\cos(30^\circ), \sin(30^\circ))$.

2.

$P(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$ ou

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



Pág. 39

10.1 Coordenadas do ponto B : $B\left(\frac{5}{6}, y\right)$

$$\overline{OB} = 1$$

$$\overline{OB}^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{25}{36} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{11}{36}$$

Como $y < 0$, temos $y = -\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Pág. 40

11. $-3\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - 2\cos\frac{7\pi}{2} + 3\operatorname{tg}0 =$
 $= -3 \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 - 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0.$

Pág. 41

1. $P\left(1, \frac{4}{3}\right); Q\left(1, -\frac{3}{4}\right)$

1.1

a) $\operatorname{tg} \alpha = \text{ordenada de } P = \frac{4}{3}$.

b) $\overline{OP}^2 + 1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{5}{3};$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5};$$

c) $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$

1.2

a) $\operatorname{tg} \beta = \text{ordenada de } Q = -\frac{3}{4}.$

b) $\overline{OQ}^2 + 1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OQ}^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \frac{5}{4};$

$$\sin \beta = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5};$$

c) $\cos \beta = -\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}.$

2.1 $\sin \alpha \cos \alpha < 0 \wedge \cos \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha < 0 \wedge \cos \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in 4.^\circ Q$.

2.2 $\sin \alpha \cos \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sin \alpha > 0 \wedge \cos \alpha > 0) \vee (\sin \alpha < 0 \wedge \cos \alpha < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in 1.^\circ Q \vee \alpha \in 3.^\circ Q$.

2.3 $-1 < \sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in 3.^\circ Q$ ou $\alpha \in 4.^\circ Q$.

2.4 $0 < \cos \alpha < 1 \Rightarrow \alpha \in 1.^\circ Q$ ou $\alpha \in 4.^\circ Q$.

2.5 $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in 1.^\circ Q$ ou $\alpha \in 4.^\circ Q$.

2.6 $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} < 0 \Rightarrow \sin^3 \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in 3.^\circ Q$ ou $\alpha \in 4.^\circ Q$

2.7 $\operatorname{tg}^2 \alpha \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in 1.^\circ Q$ ou $\alpha \in 2.^\circ Q$.

3. No 4.º quadrante $\sin \beta < 0$ e se $\alpha < \beta$ então $\sin \alpha < \sin \beta$.

Logo, $\sin \beta < 0$ e $\sin \beta > -\frac{3}{5}$.

Como, $-\frac{2}{5} < 0$ e $-\frac{2}{5} > -\frac{3}{5}$, a resposta é (B).

4. Seja P o ponto do círculo trigonométrico associado ao ângulo γ

$P(\cos \gamma, \sin \gamma)$ ou $P\left(-\frac{5}{7}, y\right)$ sendo $y > 0$.

$\overline{OP}^2 = \left(-\frac{5}{7}\right)^2 + y^2$

$1^2 = \frac{25}{49} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{24}{49} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{24}}{7}$

Logo, $\sin \gamma = \frac{\sqrt{24}}{7}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{24}}{7} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha < \sin \gamma < \sin \beta$.

Como α, γ e β pertencem ao 2.º quadrante temos que

$\alpha > \gamma > \beta$ ou seja, $\beta < \gamma < \alpha$.

5. Sabe-se que a e b pertencem ao 3.º quadrante e $a < b$.

Então: $\sin a > \sin b$, $\cos a < \cos b$ e $\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} b$.

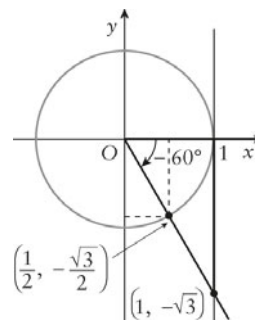
Resposta: (B).

1.1

a) $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$.

c) $\operatorname{tg}(-60^\circ) = -\sqrt{3}$.

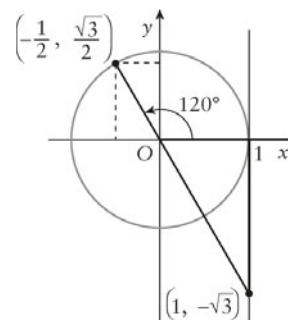


1.2

a) $\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$.

c) $\operatorname{tg}(120^\circ) = -\sqrt{3}$

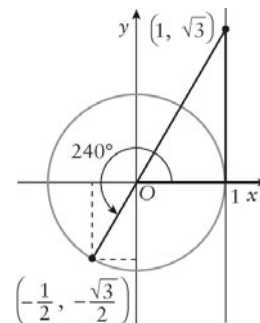


1.3

a) $\sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$.

c) $\operatorname{tg}(240^\circ) = \sqrt{3}$.



2.

α	45°	135°	225°	-45°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	1	-1	1	-1

Pág. 43

12. $A\left(x, \frac{\sqrt{15}}{8}\right); B\left(-x, \frac{\sqrt{15}}{8}\right), x > 0;$

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$$

$$1^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{15}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{49}{64}} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$A\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{15}}{8}\right); B\left(-\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{15}}{8}\right).$$

Pág. 45

13.1 $\cos(x+5\pi) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(x-2\pi) =$

$$= \cos(x+5\pi-4\pi) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3\cos(x-2\pi+2\pi) =$$

$$= \cos(\pi+x) - 2\cos x + 3\cos x =$$

$$= -\cos x + \cos x = 0.$$

13.2 $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^2(x-8\pi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]^2 = [\cos(x-8\pi+8\pi)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\cos x)^2 = (\cos x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \cos^2 x.$$

13.3 $\operatorname{tg}(x-3\pi) \times \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) \times \cos(x+\pi) =$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x-3\pi+4\pi) \times \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) =$$

$$= \sin(\pi+x) \times \cos(\pi+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi+x) \times \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin x \times (-\cos x).$$

14.1 $\operatorname{tg}(\alpha-\pi) \times \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(\pi+\alpha) \times \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) =$

$$= -\operatorname{tg} \alpha \times \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -1.$$

14.2 $\sin(-\alpha+8\pi) - \sin(3\pi-\alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) =$

$$= \sin(-\alpha) - \sin(2\pi+\pi-\alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2} + 4\pi\right) =$$

$$= -\sin \alpha - \sin(\pi-\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$= -\sin \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha = -3\sin \alpha.$$

14.3 $\operatorname{tg}(\alpha-\pi) \times \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(3\pi-\alpha) =$

$$= \operatorname{tg}(\pi+\alpha) \times \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} + \pi\right) - \sin(2\pi+\pi-\alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \times \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi-\alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \times (-\cos \alpha) - \sin \alpha =$$

$$= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha - \sin \alpha = -\sin \alpha - \sin \alpha = -2\sin \alpha.$$

Pág. 47

15.1 $\frac{\cos^2 a}{1+\sin a} = \frac{1-\sin^2 a}{1+\sin a} = \frac{(1-\sin a)(1+\sin a)}{1+\sin a} = 1-\sin a.$

15.2 $(\cos a - \sin a)^2 = 2 - (\cos a + \sin a)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 a - 2\sin a \cos a + \sin^2 a =$$

$$= 2 - \cos^2 a - 2\sin a \cos a - \sin^2 a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 a + \sin^2 a = 2 - (\sin^2 a + \cos^2 a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

$$15.3 \quad \frac{1}{1-\cos a} + \frac{1}{1+\cos a} = \frac{(1+\cos a)(1-\cos a)}{(1-\cos a)(1+\cos a)} =$$

$$= \frac{2}{1-\cos^2 a} = \frac{2}{\sin^2 a}.$$

$$15.4 \quad 1-2\sin^2 a = 1-\sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$15.5 \quad \frac{1-\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{1-\cos a} = \frac{(1-\cos a)^2 + \sin^2 a}{\sin a(1-\cos a)} =$$

$$= \frac{1-2\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a}{\sin a(1-\cos a)} = \frac{1-2\cos a + 1}{\sin a(1-\cos a)} =$$

$$= \frac{2-2\cos a}{\sin a(1-\cos a)} = \frac{2(1-\cos a)}{\sin a(1-\cos a)} = \frac{2}{\sin a}.$$

Pág. 48

$$16. \quad \cos(\theta - \pi) + \operatorname{tg}(8\pi - \theta) = \cos(\pi + \theta) + \operatorname{tg}(-\theta) =$$

$$= -\cos \theta - \operatorname{tg} \theta$$

É dado que:

$$\sin(7\pi + \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi + \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{2}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{7}{9}$$

Como $\theta \in 1.^\circ$ quadrante temos:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ e}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{Então, } -\cos \theta - \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

$$1.1 \quad \sin(a - \pi) - \sin(-a) + \cos(2\pi + a) =$$

$$= -\sin(\pi - a) + \sin a + \cos a =$$

$$= -\sin a + \sin a + \cos a = \cos a.$$

$$1.2 \quad \cos(8\pi - a) + \cos(3\pi - a) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$$

$$= \cos(-a) + \cos(\pi - a) - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \cos a - \cos a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = -\frac{1}{\operatorname{tg} a}.$$

$$2. \quad \sin a = -\frac{1}{3} \wedge a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Rightarrow \sin a = -\frac{1}{3} \wedge a \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$$

Pretende-se o valor de:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + a\right) =$$

$$= -\operatorname{tg} a + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{tg} a + \sin a$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\cos^2 a = \frac{8}{9}$$

Como $a \in 4.^\circ$ quadrante temos:

$$\cos a = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ e}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Então,

$$-\operatorname{tg} a + \sin a = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{12}.$$

$$3. \quad A(\theta) = \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta.$$

$$3.1 \quad A(\theta) = -\sin \theta (-\cos^2 \theta + 1) = -\sin \theta (1 - \cos^2 \theta) =$$

$$= -\sin \theta \times \sin^2 \theta = -\sin^3 \theta.$$

$$3.2 \quad \operatorname{tg}(\theta + \pi) = 2 \wedge \theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 2 \wedge \theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$$

Usando a fórmula $1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$, temos:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{5}{4}.$$

Como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \theta < 0$ pelo que:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Então, } A(\theta) = -\sin^3 \theta = -\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3 = \frac{8 \times 5\sqrt{5}}{5^3} = \frac{8\sqrt{5}}{25}.$$

4. $A(\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

4.1 $A(\alpha) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.$

4.2 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in]-\pi, 0[\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 0\right[$

Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$A(\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

5. $A(\alpha) = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$

5.1 $A(\alpha) = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} =$
 $= \frac{1 + 2\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} =$
 $= \frac{1 + 2\sin \alpha + 1}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{2 + 2\sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} =$
 $= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{\cos \alpha}.$

5.2 $\cos\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

Como $\alpha \in 1.^\circ \text{Q}$, $\cos \alpha > 0$ pelo que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$$A(\alpha) = \frac{2}{\cos \alpha} = 2 \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

6.1 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = 0,7$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - (0,7)^2 = 0,51$$

Como β é um ângulo agudo,

$$\cos \beta = \sqrt{0,51} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{51}}{10}} = \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{7\sqrt{51}}{51}$$

$$\sin \beta = \frac{7}{10}; \cos \beta = \frac{\sqrt{51}}{10}; \operatorname{tg} \beta = \frac{7\sqrt{51}}{51}.$$

6.2 $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$

7. $\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - \beta \Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha$

$$\cos \alpha = 0,9$$

$$\sin(\beta + \pi) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sin \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} =$$

$$= -\sin(\pi - \alpha) + \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = -\sin \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\cos \alpha = 0,9 \wedge \alpha \in]0, \pi[\Rightarrow \cos \alpha = 0,9 \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (0,9)^2 \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 0,19 \wedge \alpha \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{0,19}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{19}{100}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{\sqrt{19}}{9}$$

Então,

$$-\sin \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\sqrt{19}}{10} - \frac{9}{\sqrt{19}} = -\frac{19 + 90}{10\sqrt{19}} =$$

$$= -\frac{109 \times \sqrt{19}}{10 \times 19} = -\frac{109\sqrt{19}}{190}.$$

1. $\frac{11\pi}{2} \text{ rad} = \frac{11 \times 180^\circ}{2} = 990^\circ$

Resposta: (D).

2. $180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad}$

$105^\circ \text{ — } x \text{ rad}$

$x = \frac{105 \times \pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

Resposta: (C).

3. Se o perímetro do setor circular é igual a $5r$ então o comprimento do arco correspondente é igual a

$5r - 2r = 3r.$

$2\pi r \text{ — } 2\pi \text{ rad}$

$3r \text{ — } \alpha$

$\alpha = \frac{3r \times 2\pi}{2\pi r} \text{ rad} \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ rad}$

Resposta: (A).

4. $2\pi r \text{ — } 360^\circ$

$7r \text{ — } \alpha$

$\alpha = \frac{7r \times 360^\circ}{2\pi r} \Leftrightarrow \alpha \approx 401,1^\circ$

Resposta: (A).

5. $\cos \alpha = \frac{3}{6} \wedge 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

$\cos \alpha = \frac{1}{2} \wedge 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

$\alpha = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Resposta: (C).

6. Se $\text{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{2}$ pelo que $\sin \alpha \cos \alpha < 0$.

Resposta: (C).

7.1 $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

$360^\circ \text{ — } \pi \times 10^2 \text{ cm}^2$

$240^\circ \text{ — } s$

$s = \frac{240 \times \pi \times 100}{360} \text{ cm}^2 \approx 209,4 \text{ cm}^2.$

- 7.2 O perímetro da base do cone (P) é igual ao comprimento do setor circular da figura 3.

$360^\circ \text{ — } 2\pi \times 10 \text{ cm}$

$240^\circ \text{ — } P$

$P = \frac{240 \times 2\pi \times 10}{360} \text{ cm} = \frac{40\pi}{3} \text{ cm}.$

Seja r o raio da base do cone.

$2\pi r = \frac{40\pi}{3} \Leftrightarrow r = \frac{20}{3} \text{ cm}$

A geratriz do cone é $g = 10 \text{ cm}.$

Seja h a altura do cone

$h^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 10^2 \Leftrightarrow$

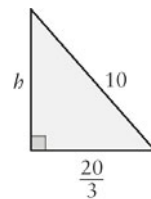
$\Leftrightarrow h^2 = 100 - \frac{400}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{500}{9} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{500}}{3}$

$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} =$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{20}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{500}}{3} \approx 346,9 \text{ cm}^3.$

Resposta: (C).



8. Calculemos a área do triângulo $[OBC]$.

A altura deste triângulo, relativa à base $[CO]$ é igual a $\sin \alpha$.

Logo, $A_{[OBC]} = \frac{\overline{CO} \times \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$ pois $\overline{CO} = 1$.

Então, $A_{[AOBC]} = 2 \times \frac{\sin \alpha}{2} = \sin \alpha$.

Resposta: (A).

1.1 $\widehat{BOA} = \frac{2\pi}{12} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$

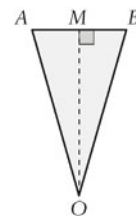
1.2 $\overline{OA} = 18 \text{ cm}.$

Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$\widehat{MOA} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$

$\frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \sin \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \overline{AM} = 18 \sin \frac{\pi}{12}$

$\overline{AB} = 2 \times 18 \sin \frac{\pi}{12} \text{ cm} \approx 9,32 \text{ cm}.$



1.3

a) $5 \text{ min} = 5 \times 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$

$$300 \times 15 = 4500$$

Em 5 minutos o ponto A descreveu um arco de amplitude 4500° e raio igual a 18 cm.

$$360^\circ \text{ ————— } 2\pi \times 18 \text{ cm}$$

$$4500^\circ \text{ ————— } x$$

$$x = \frac{4500 \times 2\pi \times 18}{360} \text{ cm} = 450\pi \text{ cm}.$$

Em cinco minutos o ponto A percorreu uma distância de $450\pi \text{ cm}$.

b) $2 \times 360^\circ + 180^\circ = 900^\circ$; $\frac{900}{15} = 60$

A observação durou 60 s.

c) $4 \times 15^\circ = 60^\circ$

$$\frac{360^\circ}{60^\circ} \text{ ————— } \pi \times 20^2 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{60 \times \pi \times 20^2}{360} \text{ cm}^2 = \frac{200\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

2. Se $\cos \alpha \times \sin \alpha < 0$ então $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ têm sinais contrários pelo que α é do 2.º ou do 4.º quadrantes.

3.1 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{x}{2,5} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2,5 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1,25$$

$$\frac{h}{2,5} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow h = 2,5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 1,25\sqrt{3}$$

$$\overline{DC} = \overline{AB} + 2x = 2,5 + 2 \times 1,25 = 5$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times h = \frac{2,5 + 5}{2} \times 1,25\sqrt{3} = \frac{75}{16}\sqrt{3}$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{75}{16}\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

3.2 $x = 2,5 \cos \alpha$; $h = 2,5 \sin \alpha$

$$\overline{DC} = 2,5 + 2 \times 2,5 \cos \alpha = 2,5 + 5 \cos \alpha$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{2,5 + 2,5 + 5 \cos \alpha}{2} \times 2,5 \sin \alpha =$$

$$= \frac{5}{2}(1 + \cos \alpha) \times 2,5 \sin \alpha = 6,25(1 + \cos \alpha) \sin \alpha.$$

4.1 $\sin 1170^\circ + \cos 420^\circ =$

$$= \sin(3 \times 360^\circ + 90^\circ) + \cos(360^\circ + 60^\circ) =$$

$$= \sin 90^\circ + \cos 60^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4.2 $\sin \frac{7\pi}{2} + \operatorname{tg}(9\pi) - \cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) =$

$$= \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(8\pi + \pi) - \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin \frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg} \pi - \cos \frac{\pi}{4} = -1 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

5. $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$

$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

O triângulo é retângulo em B e escaleno (se tem três ângulos diferentes, os lados também são diferentes).

6.1 $\frac{5}{8} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\frac{\theta}{2} \approx 0,6751 \Rightarrow \theta \approx 1,35 \text{ rad}.$$

6.2 $x + h = 8$

$$\frac{x}{8} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow x = 8 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$h = 8 - x$$

$$h = 8 - 8 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$h = 8 - 8 \times \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$h \approx 1,76.$$

Pág. 52

1. $2\pi \text{ rad} \text{ ————— } 2\pi r$

$$x \text{ rad} \text{ ————— } t$$

$$t = \frac{x \times 2\pi r}{2\pi}$$

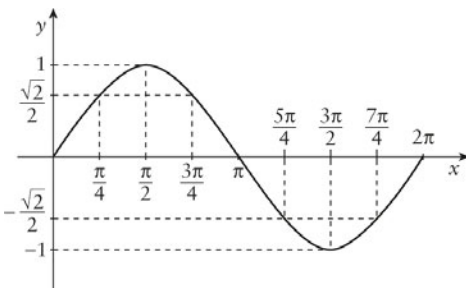
Como $r = 1$ vem $t = x$.

2.1

- a) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;
 c) $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin \pi = 0$;
 e) $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$;
 g) $\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\sin(2\pi) = 0$.

Pág. 53

2.2



- 2.3 $D_f' = [-1, 1]$.
 2.4 $D_f = \mathbb{R}$.
 2.5 Repete-se de 2π em 2π .
 2.6 $f(t + 2\pi) = f(t)$, sendo 2π o menor valor positivo de p tal que $f(t + p) = f(t)$, $\forall t \in D_f$.

Pág. 54

- 17.1 $f(x) = 1 - \sin x$
 $D_f = \mathbb{R}$.
 $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - \sin x \leq 1 + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$
 $D_f' = [0, 2]$.

- 17.2 $f(x) = 3 + \sin(2x)$
 $D_f = \mathbb{R}$.
 $-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Leftrightarrow 3 - 1 \leq 3 + \sin(2x) \leq 3 + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 4$
 $D_f' = [2, 4]$.

- 17.3 $f(x) = |\sin x|$
 $D_f = \mathbb{R}$.
 $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |\sin(x)| \leq 1$
 $D_f' = [0, 1]$.

- 17.4 $f(x) = 1 - 2|\sin x|$
 $D_f = \mathbb{R}$.
 $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0 \leq 2|\sin x| \leq 2$
 $\Leftrightarrow -2 \leq -2|\sin x| \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \leq 1 - 2|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$
 $D_f' = [-1, 1]$.

Pág. 57

18. $h(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
 18.1 $h(x + p) = h(x) \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x + p}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{p}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
 Como o período da função cosseno é 2π temos que
 $\frac{p}{3} = 2\pi \Leftrightarrow p = 6\pi$.
 18.2 $h(-x) = 2\cos\left(\frac{-x}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
 $h(-x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h$ é uma função par.

- 18.3 $h(-a) - h(-b) = 2\cos\left(\frac{-a}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{-b}{3}\right) =$
 $= 2\cos\left(\frac{a}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{b}{3}\right) = -1 + 2 = 1$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} h(a + 3\pi) &= 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{a + 3\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{a}{3} + \pi\right) = 1 \Leftrightarrow -2\cos\left(\frac{a}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{a}{3}\right) = -1 \\ h(b - 3\pi) &= 2 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{b - 3\pi}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{b}{3} - \pi\right) = 2 \Leftrightarrow 2\cos\left(\pi + \frac{b}{3}\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow -2\cos\frac{b}{3} = 2. \end{aligned}$$

Pág. 58

19. $g(x) = 3\operatorname{tg}(2x)$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

19.1

a) $g(-x) = 3\operatorname{tg}(-2x) = -3\operatorname{tg}(2x) = -g(x)$

$$g(-x) = -g(x), \forall x \in D_g \Leftrightarrow g \text{ é uma função ímpar.}$$

b) $g(x+p) = g(x) \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}[2(x+p)] = 3\operatorname{tg}(2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x+2p) = \operatorname{tg}(2x).$

Como a função $x \mapsto \operatorname{tg} x$ é periódica de período π temos

$$\text{que } 2p = \pi, \text{ pelo que } p = \frac{\pi}{2}.$$

19.2 $g(a) = -2$ e $g(b) = -\frac{1}{2}$

$$g(a-2\pi) - g(b+\pi) = 3\operatorname{tg}[2(a-2\pi)] - 3\operatorname{tg}[2(b+\pi)] = \\ = 3\operatorname{tg}(2a-4\pi) - 3\operatorname{tg}(2b+2\pi) = 3\operatorname{tg}(2a) - 3\operatorname{tg}(2b) = \\ = g(a) - g(b) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Pág. 59

1.1 $D'_g = [-1, 2].$

1.2 Os zeros de g no intervalo $[0, \pi]$ são $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{6}.$

1.3 Os zeros de g no intervalo $[\pi, 2\pi]$ são $\frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi$ e $\frac{5\pi}{6} + \pi$, ou seja, $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{11\pi}{6}.$

1.4 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) + g\left(-\frac{\pi}{3}\right) - g\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \\ = g\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) + g\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) - g\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \\ = g\left(\frac{5\pi}{6}\right) + g\left(\frac{2\pi}{3}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + (-1) + 0 = -1.$

1.5 $g(x) > 0 \wedge x \in [3\pi, 4\pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0 + 3\pi, \frac{\pi}{6} + 3\pi \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 3\pi, \pi + 3\pi \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[3\pi, \frac{19\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{23\pi}{6}, 4\pi \right].$$

2. Por exemplo:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 \times 1 = 3 \neq -1$$

3. $f(x) = m + \sin x, m \in \mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

3.1 $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow m-1 \leq m + \sin x \leq m+1$

$$D'_f = [m-1, m+1].$$

Terá de ser:

$$m-1 > 0 \vee m+1 < 0 \Leftrightarrow m > 1 \vee m < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

3.2 $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

3.3 $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, terá de ser $m = 1.$

4.1 $\frac{1}{\overline{FB}} = \sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{FB} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{a} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow a = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\overline{EF} = 2 - 2a = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$

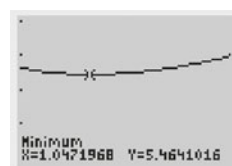
$$C = \overline{EF} + \overline{FB} + \overline{FA} + \overline{EC} + \overline{ED}$$

$$C = \overline{EF} + 4\overline{FB}$$

$$C(x) = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{4}{\sin x} = \frac{4}{\sin x} - \frac{2 \cos x}{\sin x} + 2$$

$$C(x) = \frac{4 - 2 \cos x}{\sin x} + 2$$

4.2 Fazendo $y_1 = C(x)$ com $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ verificou-se que C é mínima para $x \approx 1,05$ rad.



Pág. 60

1. $d(0) = 1$: fica excluída a hipótese B.

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 : \text{ficam excluídas a hipótese (A), onde}$$

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ e a hipótese (C) onde } d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Resposta: (D).

- 2.1 $h(0) = 81 - 72 \cos 0 = 9$.

Resposta: (A).

- 2.2 $0 \leq t \leq 30$

$$0 \leq \frac{\pi t}{15} \leq 2\pi$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \leq 1$$

$$-72 \leq -72 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \leq 72$$

$$81 - 72 \leq 81 - 72 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \leq 81 + 72$$

$$9 \leq h(t) \leq 153$$

Resposta: (B).

- 2.3 $h(20) = 81 - 72 \cos\left(\frac{\pi}{15} \times 20\right) = 81 - 72 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$

$$= 81 - 72 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 117$$

Resposta: (B).

3. $f(0) = 12$. Fica excluída a hipótese (D) onde $f(0) = 9$.

$f(6) = 6$. Ficam excluídas as hipóteses (B) onde $f(6) = 3$ e (C) onde $f(6) = 9$.

Resposta: (A).

4. $0 \leq t \leq 24$

$$-\frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6} \leq \frac{17\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 + 9 \leq 5 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 9 \leq 5 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq v(t) \leq 14$$

$$v(t) = 14 \wedge 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 9 = 14 \wedge 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) = 1 \wedge 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} - \frac{7\pi}{6} = 2k\pi \wedge 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t - 7 = 12k \wedge 0 \leq t \leq 24 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

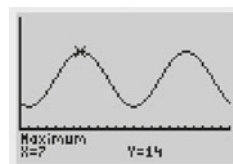
$$\Leftrightarrow t = 7 + 12k \wedge 0 \leq t \leq 24 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 7 \vee t = 19$$

$t = 7$ e $t = 19$ correspondem às vendas do mês de julho.

Em alternativa poderia ser usada a calculadora:

Resposta: (C).



Pág. 61

1. $d(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{9,8}$

1.1 $\frac{100^2 \times \sin(2\theta)}{9,8} = 1000 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 1000 \times \frac{9,8}{100^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{49}{50}.$$

Então $2\theta \approx 78,522^\circ \Rightarrow \theta \approx 39,3^\circ$.

1.2 $\frac{150^2 \times \sin(2 \times 30^\circ)}{9,8} = \frac{22500 \times \sin(60^\circ)}{9,8} \approx 1998,3 \text{ m.}$

2. $h(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$

2.1 $h(t+p) = h(p) \Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{10}(t+p)\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{10}p\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right).$$

Como a função cosseno é periódica de período 2π temos:

$$\frac{\pi}{10}p = 2\pi \Leftrightarrow p = 20.$$

2.2 $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 4 \Leftrightarrow$$

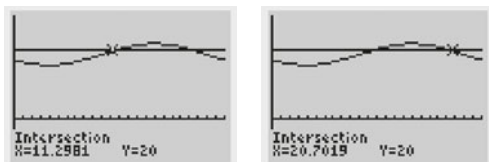
$$d = 8 \text{ m}$$

3. $T(h) = 19 - 3 \sin \frac{\pi(h+2)}{12}$

3.1 2 h 30 min da tarde corresponde às 14,5 horas do dia.

$$T(14,5) = 19 - 3 \sin \frac{\pi \times (14,5 + 2)}{12} \approx 21,8^\circ \text{C}$$

3.2 Resolvendo graficamente a inequação $T(h) > 20$ foram obtidos os seguintes resultados:



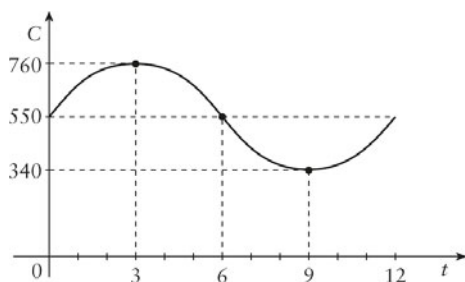
11,298 h $\approx$ 11 h 18 min ; 20,702 h $\approx$ 20 h 42 min

A temperatura da água não foi inferior a 20 °C entre as 11 h e 18 min e as 20 h e 42 min.

4. $C(t) = 550 + 210 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

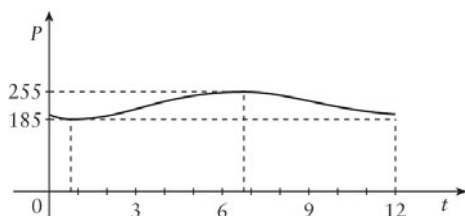
$$p(t) = 220 + 35 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - 2\right)$$

4.1



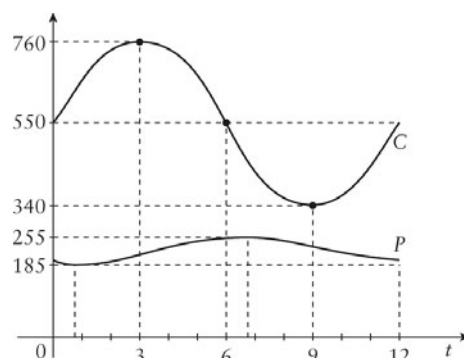
Inicialmente (em 1 de março) existiam 550 coelhos. O número foi aumentando nos três meses seguintes, tendo atingido os 760 (em 1 de junho). A partir daí e até dezembro, o número de coelhos diminuiu até 340 tendo de seguida voltado a aumentar até ao valor inicial.

4.2



Os predadores eram, no início, cerca de 188. Até abril diminuíram ligeiramente e, de seguida, aumentaram até setembro atingindo o máximo de 255 após o que o seu número decresceu até ao valor inicial.

4.3



A um número mínimo de predadores segue-se um número máximo de coelhos e vice-versa. Esta relação deve-se ao facto de os coelhos entrarem na cadeia alimentar dos predadores.

Pág. 62

1. As abscissas dos pontos são:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi \dots$$

A expressão pedida é $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: (B).

2. As soluções da equação são:

$$\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, 5\pi, -5\pi \dots$$

A expressão pedida é $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: (D).

Pág. 63

3. As soluções da equação são:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \pi, \frac{\pi}{3} + \pi, \frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \dots$$

A expressão pedida é $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: (A).

Pág. 64

20.1 $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

20.2 $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

20.3 $\sin x = \frac{\pi}{4}$

Recorrendo à calculadora gráfica verifica-se que uma solução da equação, com aproximação às décimas do radiano é:

$$x \approx 0,9 \quad \left(\sin^{-1} \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx 0,903 \right).$$

Então

$$\sin x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x \approx \sin(0,9) \text{ pelo que temos}$$

$$x \approx 0,9 + 2k\pi \vee x \approx \pi - 0,9 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \approx 0,9 + 2k\pi \vee x \approx 2,2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

20.4 $2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

20.5 $\sin(2x) = \pi$ é uma equação impossível porque $\pi > 1$.

20.6 $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

20.7 $2 \sin(3x) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Pág. 66

21.1 $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

21.2 $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

21.3 $3 \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

21.4 $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

21.5 $2 \cos(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

21.6 $5 \cos x = \pi \Leftrightarrow \cos x = \frac{\pi}{5}$

$$\cos x \approx \cos(0,89) \quad \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{5} \right) \approx 0,89$$

$$x \approx 0,89 + 2k\pi \vee x \approx -0,89 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

21.7 $3 \cos x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\pi}{9}$

$$\cos x \approx \cos(1,21) \quad \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{9} \right) \approx 1,21$$

$$x \approx 1,21 + 2k\pi \vee x \approx -1,21 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Pág. 67

22.1 $\operatorname{tg}(3x) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

22.2 $\operatorname{tg}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

22.3 $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

22.4 $\operatorname{tg}(3x) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}(3x) \approx \operatorname{tg}(1,11) \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 1,11$

$$\Rightarrow 3x \approx 1,11 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \approx 0,37 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Pág. 68

1. $p(t) = 110 + 25 \sin(160\pi t).$

1.1 $p(t+a) = p(t) \quad \forall t \in D_p \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 110 + 25 \sin[160\pi(t+a)] =$$

$$= 110 + 25 \sin(160\pi t), \quad \forall t \in D_p$$

$$\Leftrightarrow \sin(160\pi t + 160\pi a) = \sin(160\pi t), \forall t \in D_p$$

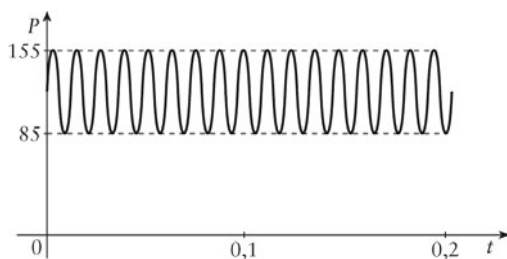
Como o período da função seno é 2π , temos:

$$160\pi a = 2\pi \Leftrightarrow a = \frac{2\pi}{160\pi} \Leftrightarrow a = \frac{1}{80}$$

$$a = \frac{1}{80} \text{ minutos.}$$

- 1.2** Se o período de p é $\frac{1}{80}$ minutos, em cada minuto verificam-se 80 batidas do coração.

1.3



- 1.4** A pressão da pessoa observada varia entre o mínimo de 85 mmHg e o máximo de 155 mmHg. Estes valores são, portanto, superiores aos valores normais.

2. $f(x) = 1 + 2 \cos x$.

2.1 $D_f = \mathbb{R}$.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \leq 1 + 2 \cos x \leq 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$$

$$D'_f = [-1, 3].$$

2.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2.3 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = -x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \emptyset \vee 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \pi \vee x = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{12}.$$

3. $v(t) = 0,8 \sin(800\pi t)$.

3.1 $v(t+p) = v(t), \forall t \in D_v \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,8 \sin(800(t+p)) = 0,8 \sin(800\pi t), \forall t \in D_v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(800\pi t + 800\pi p) = \sin(800\pi t), \forall t \in D_v$$

Como a função seno é periódica de período 2π , temos:

$$800\pi p = 2\pi \Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{800\pi} \Leftrightarrow p = \frac{1}{400}$$

$$p = \frac{1}{400} \text{ s}$$

3.2 $1 : \frac{1}{400} = 400$

400 vibrações por segundo.

4. $v(t) = 7,9 - 2,1 \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right)$.

4.1 $v(t+p) = v(t), \forall t \in D_v \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7,9 - 2,1 \cos\left[\frac{\pi}{156}(t+p)\right] =$$

$$= 7,9 - 2,1 \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right), \forall t \in D_v$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{156}t + \frac{\pi}{156}p\right) = \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right), \forall t \in D_v$$

Como a função cosseno é periódica de período 2π , temos

$$\frac{\pi}{156}p = 2\pi \Leftrightarrow p = 2\pi \times \frac{156}{\pi} \Leftrightarrow p = 312$$

$p = 312$ dias.

4.2 $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2,1 \leq -2,1 \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right) \leq 2,1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7,9 - 2,1 \leq 7,9 - 2,1 \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right) \leq 7,9 + 2,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5,8 \leq v(t) \leq 10.$$

$D'_v = [5,8;10]$ pelo que o máximo de v é igual a 10.

$$4.3 \quad v(264) = 7,9 - 2,1 \cos\left(\frac{\pi}{256} \times 264\right) =$$

$$= 7,9 + 2,1 \cos\left(\frac{22\pi}{13}\right) \approx 6,7$$

A magnitude da luz emitida pela estrela R Leonis, 264 dias após o início de um ciclo é igual a 6,7 unidades.

$$4.4 \quad v(t) = 7 \wedge t \in]0, 312[$$

$$7,9 - 2,1 \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right) = 7 \wedge t \in]0, 312[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right) = \frac{-0,9}{-2,1} \wedge t \in]0, 312[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right) = \frac{3}{7} \wedge t \in]0, 312[$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{156} t\right) \approx \cos(1,13) \wedge t \in]0, 312[\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 1,13$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{156} t \approx 1,13 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{156} t \approx -1,13 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 1,13 \times \frac{156}{\pi} + 312k \vee t \approx -1,13 \times \frac{156}{\pi} + 312k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 56 + 312k \vee t \approx -56 + 312k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 56 \vee t \approx 256$$

No 56° e no 256° dias após o início de cada ciclo a magnitude da luz emitida pela R Leonis é igual a 7 unidades.

Pág. 69

5.1 h é uma função periódica, de período igual a 60 s, de contradomínio $D'_h = [2, 2 + 2 \times 10] = [2, 22]$ e com $h(0) = 2$.

Seja $h(t) = A + B \sin(k(t-c))$.

$D'_h = [A-B, A+B]$ dado que $-1 \leq \sin(k(t-c)) \leq 1$.

Então,

$$\begin{cases} A-B=2 \\ A+B=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A=24 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=12 \\ B=10 \end{cases}$$

Então $h(t) = 12 + 10 \sin(k(t-c))$.

Como o período de h é igual a 60 s, temos

$$h(t+60) = h(t), \forall t \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 + 10 \sin[k(t+60-c)] = 12 + 10 \sin[k(t-c)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(kt - kc + 60k) = \sin(kt - kc)$$

Como a função seno é periódica de período 2π , temos que

$$60k = 2\pi, \text{ ou seja, } k = \frac{\pi}{30}.$$

$$\text{Logo, } h(t) = 7 + 5 \sin\left[\frac{\pi}{30}(t-c)\right].$$

Dado que $h(0) = 2$ vem:

$$12 + 10 \sin\left[\frac{\pi}{30}(0-c)\right] = 2 \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{30}c\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{30}c = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Para } k=0, \text{ temos } C = -\frac{\pi}{2} \times \left(-\frac{30}{\pi}\right) \Leftrightarrow C = 15.$$

Portanto temos, por exemplo:

$$h(t) = 12 + 10 \sin\left[\frac{\pi}{30}(t-15)\right].$$

$$6.1 \quad \frac{x}{10} = \cos \theta \Leftrightarrow x = 10 \cos \theta$$

$$\frac{y}{10} = \sin \theta \Leftrightarrow y = 10 \sin \theta$$

$$A = 2x \times y$$

$$A(\theta) = 2 \times 10 \cos \theta \times 10 \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(\theta) = 200 \sin \theta \cos \theta.$$

$$6.2 \quad A(\theta) = 200 \sin \theta \cos \theta =$$

$$= 100 \times 2 \sin \theta \cos \theta = 100 \sin(2\theta).$$

$$6.3 \quad A(\theta) = 50 \Leftrightarrow 100 \sin(2\theta) = 50 \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

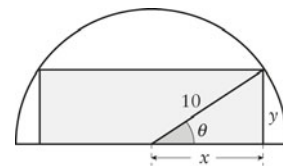
$$\Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \vee \theta = \frac{5\pi}{12}.$$



Pág. 70

$$1. \quad \overline{AC} = \overline{DB} = 20 \text{ cm.}$$

$$1.1 \quad \frac{\overline{DA}}{20} = \sin \theta \Leftrightarrow \overline{DA} = 20 \sin \theta$$

$$\frac{\overline{AB}}{20} = \cos \theta \Leftrightarrow \overline{AB} = 20 \cos \theta$$

$$A(\theta) = \overline{AD} \times \overline{AB} = 20 \sin \theta \times 20 \cos \theta = 400 \sin \theta \cos \theta$$

Resposta: (D).

1.2 $A(\theta) = 200 \sin \theta \Leftrightarrow 400 \sin \theta \cos \theta = 200 \sin \theta$

$$\Leftrightarrow 400 \sin \theta \cos \theta - 200 \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 200 \sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 200 \sin \theta = 0 \vee 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = 0 \vee \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Como $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ temos que $\sin \theta \neq 0$ e $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$

Resposta: (A).

2. $h(t) = 16 + 15 \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right)$

2.1 $h(t+p) = h(t), \forall p \in D_h \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16 + 15 \sin \left[\frac{\pi}{10} (t+p) - \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= 16 + 15 \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right), \forall t \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} p \right) = \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right), \forall t \in D_h.$$

Então, $\frac{\pi}{10} p = 2\pi \Leftrightarrow p = 20$.

Resposta: (B).

2.2 $-1 \leq \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16 - 15 \leq 16 + 15 \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right) \leq 16 + 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq h(t) \leq 31$$

O máximo de h é 31 m.

Resposta: (C).

2.3 $h(t) = 16$

$$\Leftrightarrow 16 + 15 \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right) = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t - 5 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

Donde $t = 5 \vee t = 15 \vee t = 25 \vee \dots$

Resposta: (A).

3. $C(t) = 30 + 21 \sin \left(\frac{2\pi t}{365} + 12 \right)$

3.1 $c(t+p) = c(t), \forall t \in D_c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 30 + 21 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t+p) + 12 \right) =$$

$$= 30 + 21 \sin \left(\frac{2\pi}{365} t + 12 \right), \forall t \in D_c$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{2\pi}{365} t + 12 + \frac{2\pi}{365} p \right) = \sin \left(\frac{2\pi}{365} t + 12 \right), \forall t \in D_c$$

Temos, então, que $\frac{2\pi}{365} p = 2\pi \Leftrightarrow p = 365$.

Resposta: (B).

3.2 2 de fevereiro corresponde a $t = 33$

$$c(33) = 30 + 21 \sin \left(\frac{2\pi \times 33}{365} + 12 \right) \approx 30$$

Resposta: (A)

Pág. 71

1. $F(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \wedge \theta \in [0, 2\pi[$

1.1 $F(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos \theta = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0.$$

1.2 $F(\theta) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{5\pi}{3}.$$

1.3 $F(\theta) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos \theta = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \vee \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

1.4 $F(\theta) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos \theta = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi.$$

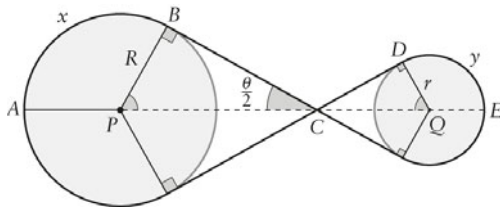
2. $l = 2r \sin \frac{\pi}{n}$

$$l = r \Leftrightarrow 2r \sin \frac{\pi}{n} = r \stackrel{r>0}{\Leftrightarrow} 2 \sin \frac{\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$$

Como $n \geq 3$ temos que $0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3}$, donde, se $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$

vem $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, pelo que $n = 6$.

3.



Seja x = comprimento do arco BA

y = comprimento do arco ED

$$\widehat{BCP} = \widehat{QCD} = \frac{\theta}{2}$$

$$\widehat{CPB} = \widehat{DQC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\widehat{BPA} = \widehat{EQD} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\theta + \pi)$$

Logo, $x = \frac{1}{2}(\theta + \pi)R$ e $y = \frac{1}{2}(\theta + \pi)r$.

$$\frac{R}{BC} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{R}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\frac{r}{DC} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{r}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

$$L = 2(x + \overline{BC} + \overline{CD} + y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = 2 \left(\frac{1}{2}(\theta + \pi)R + \frac{R}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{r}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{1}{2}(\theta + \pi)r \right)$$

$$\Leftrightarrow L = (\theta + \pi)R + \frac{2R}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{2r}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + (\theta + \pi)r$$

$$\Leftrightarrow L = (\theta + \pi)(R + r) + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}(R + r)$$

$$\Leftrightarrow L = (R + r) \left(\theta + \pi + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R + r} = \theta + \pi + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \theta + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{L}{R + r} - \pi.$$

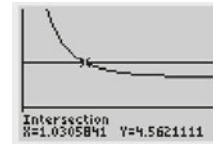
3.2 $R = 72 \text{ cm}$, $r = 36 \text{ cm}$, $L = 832 \text{ cm}$.

$$\theta + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{832}{72 + 36} - \pi$$

$$\theta + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{208}{27} - \pi$$

Fazendo $y_1 = x + \frac{2}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)}$, $0 < x < \pi$ e $y_2 = \frac{208}{27} - \pi$

e calculando a interseção dos gráficos obtém-se $x \approx 1,03$.



Logo, $\theta \approx 1,03 \text{ rad}$.

4. $L(t) = 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right]$, $1 \leq t \leq 365$.

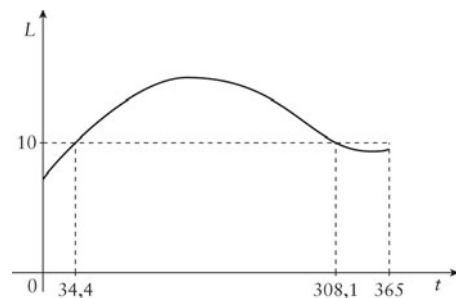
4.1 JAN – FEV – MAR – ABR

$$31 + 28 + 31 + 1 = 91$$

$$L(91) = 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(91 - 80) \right] \approx 12,533 \text{ horas.}$$

$$12,533 \text{ h} \approx 12 \text{ h } 32 \text{ min.}$$

4.2



$$308 - 35 + 1 = 274$$

Há 274 dias com mais de 10 horas de sol.

Pág. 74

1. $\pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}$

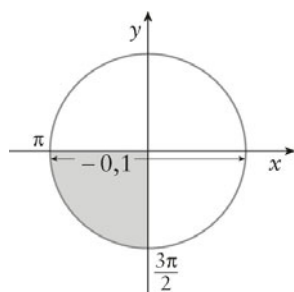
$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} \approx 4,71 \text{ rad}$$

$$\pi \text{ rad} \leq 4 \text{ rad} \leq \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

O ângulo representado é do quarto quadrante.

Resposta: (C).

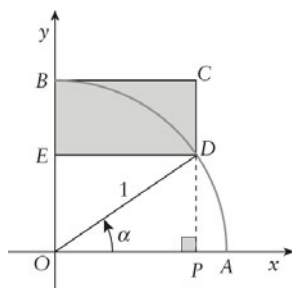
2. A equação $\sin x = -0,1$ tem uma, e uma só solução no intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.



Resposta: (C)

Pág. 75

3. $\overline{ED} = \overline{OP} = \cos \alpha$
 $\overline{CD} = \overline{BE} = \overline{BO} - \overline{EO} =$
 $= 1 - \overline{DP} = 1 - \sin \alpha$
 $A_{[BEDC]} = \overline{ED} \times \overline{DC} =$
 $= \cos \alpha (1 - \sin \alpha) =$
 $= \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$



Resposta: (A).

4. Se α é uma solução da equação $\cos x = \frac{1}{3}$ então $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.
 $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$
 Logo, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ é solução da equação $\sin x = -\frac{1}{3}$.
 Resposta: (B).

5. $\overline{OC} = 1$; $\overline{OA} = \overline{OE} + \overline{EA}$

Como $\overline{OE} = \sin \alpha$ e $\overline{EA} = \overline{ED} = \cos \alpha$, vem
 $\overline{OA} = \sin \alpha + \cos \alpha$.

Logo o perímetro do retângulo $[OCBA]$ é dado por

$$2(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) = 2 + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

Resposta: (C).

Pág. 76

- 1.1 $A_{[APD]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AB}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$.

- 1.2 $\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \text{tg} x \Leftrightarrow \frac{\overline{BP}}{2} = \text{tg} x \Leftrightarrow \overline{BP} = 2 \text{tg} x$

$$\overline{PC} = 4 - \overline{BP} = 4 - 2 \text{tg} x$$

$$A_{[PCD]} = \frac{\overline{PC} \times \overline{CD}}{2} = \frac{(4 - 2 \text{tg} x) \times 2}{2}$$

$$A(x) = 4 - 2 \text{tg} x.$$

- 1.3 $A(x) = 2 \Leftrightarrow 4 - 2 \text{tg} x = 2 \wedge 0 < \text{tg} x < 2 \wedge 0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{tg} x = 1 \wedge 0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

- 1.4 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{8}{17} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{8}{17} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \left(\frac{17}{8}\right)^2$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{289}{64} - 1$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{225}{64}$$

Como α é do 1.º quadrante temos:

$$\text{tg} \alpha = \sqrt{\frac{225}{64}} = \frac{15}{8}$$

$$\text{Logo, } A(\alpha) = 4 - 2 \text{tg} \alpha = 4 - 2 \times \frac{15}{8} = \frac{1}{4} \text{ u.a.}$$

Pág. 77

- 2.1 A abscissa do ponto P é igual a $\cos \alpha$. Então $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

- a) A ordenada do ponto B é igual a $\text{tg} \alpha$.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \text{ Como } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \text{ temos:}$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{25}{16} - 1 \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

Sendo α um ângulo do 1.º quadrante, $\text{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

A ordenada do ponto B é igual a $\frac{3}{4}$.

- b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{tg}(\pi - \alpha) = \cos \alpha - \text{tg} \alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$.

- 2.2 $A_{[OBA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\text{tg} \alpha}{2}$

$$5 \sin\left(3\pi - \alpha\right) + 10 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin(\pi - \alpha) - 10 \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin \alpha - 10 \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 25 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{24}$$

Como α é do 1.º quadrante, vem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

Finalmente,

$$A_{[OBA]} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{24}}{24} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{4 \times 6}}{24} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{24} \text{ u.a.}$$

2.3 $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$

$$\overline{OB} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\overline{PB} = \overline{OB} - \overline{OP} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1$$

Para $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

$$\overline{PB} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)} - 1 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Pág. 78

1. Se $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ então $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha \leq 0$ e $\operatorname{tg} \alpha \leq 0$.

Logo,

$$\cos \alpha > 0 \text{ e } -\sin \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha < 0 \text{ e } \operatorname{tg} \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha < 0 \text{ e } -\cos \alpha < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha < 0$$

$$\sin \alpha < 0 \text{ e } \cos(\pi + 2) = -\cos \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha \times \cos(\pi + 2) > 0$$

Resposta: (C).

2. $5 + \cos x = 3 \wedge x \in [-\pi, \pi]$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \wedge x \in [-\pi, \pi]$$

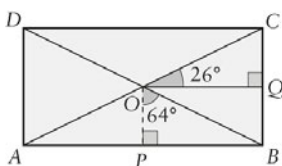
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$$

Resposta: (B).

3. $\widehat{AOB} = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$

$$\widehat{POB} = \frac{128^\circ}{2} = 64^\circ$$

$$\widehat{QOC} = \frac{52^\circ}{2} = 26^\circ$$



$$\overline{OC} = \overline{OB} = 1$$

$$\frac{\overline{QC}}{1} = \sin(26^\circ) \Leftrightarrow \overline{QC} = \sin 26^\circ$$

$$\frac{\overline{PB}}{1} = \sin 64^\circ \Leftrightarrow \overline{PB} = \sin 64^\circ$$

$$P_{[ABCD]} = 4\overline{QC} + 4\overline{PB} = 4\sin 26^\circ + 4\sin 64^\circ \approx 5,3$$

$$P_{[ABCD]} \approx 5,3 \text{ cm}.$$

Resposta: (B).

Pág. 79

4. $\overline{PQ} = \overline{OQ} = 1$

$$\overline{OA} = \cos \alpha; \overline{AQ} = \sin \alpha; \overline{AP} = 1 + \sin \alpha$$

$$A_{[OPQ]} = A_{[OAP]} - A_{[OAQ]} = \frac{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)}{2} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{2}.$$

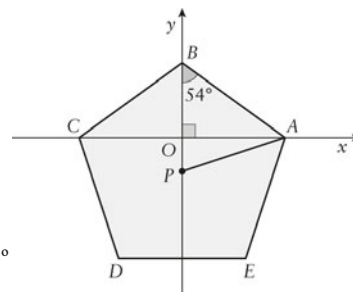
Resposta: (C).

5. Seja P o centro do pentágono.

$$\widehat{APB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Como $\overline{PA} = \overline{PB}$

$$\widehat{PBA} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \sin 54^\circ \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{1} = \sin 54^\circ \Leftrightarrow \overline{OA} = \cos(90^\circ - 54^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = \cos 36^\circ.$$

Resposta: (B).

Pág. 80

1.1 $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OD} = 2$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \cos x \Leftrightarrow \frac{\overline{OC}}{2} = \cos x \Leftrightarrow \overline{OC} = 2 \cos x$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \sin x \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{2} = \sin x \Leftrightarrow \overline{CB} = 2 \sin x$$

$$A_{[ACB]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{2} = \frac{(2 + 2 \cos x) \times 2 \sin x}{2} = 2(1 + \cos x) \sin x$$

$$A(x) = 2(\sin x + \sin x \cos x).$$

$$1.2 \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}\right) = 2(1+0) = 2$$

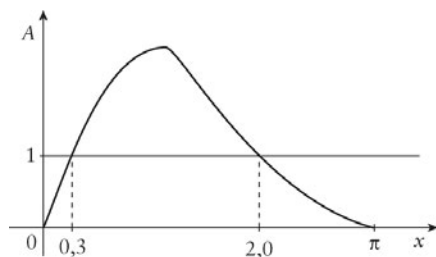
Quando $x = \frac{\pi}{2}$ o ponto C coincide com o ponto O pelo que o triângulo $[ACB]$, além de retângulo em C é isósceles sendo $\overline{AC} = \overline{CB} = 2$.

1.3 Pretende-se resolver graficamente a equação $A(x) = 1$.

Consideraram-se, na calculadora gráfica, as funções

$$y_1 = A(x) \text{ e } y_2 = 1 \text{ com } x \in]0, \pi[.$$

Calculou-se a interseção dos gráficos tendo sido obtido:



Logo, com aproximação às décimas do radiano,

$$A(x) = 1 \Leftrightarrow x \approx 0,3 \text{ rad ou } x \approx 2,0 \text{ rad},$$

ou seja, a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 1 se $x \approx 0,3$ rad ou $x \approx 2,0$ rad.

$$\overline{BC} = 2\overline{MB} = 4 \sin \alpha$$

$$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2\overline{AB} + \overline{BC}$$

$$P = 2 \times 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha} + 4 \sin \alpha$$

$$P = 4\sqrt{2 + 2 \cos \alpha} + 4 \sin \alpha.$$

$$2.2 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7} \wedge 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{625}{49} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625}$$

$$\text{Como } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ temos que } \cos \alpha = \sqrt{\frac{49}{625}} = \frac{7}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{576}{625} \stackrel{\alpha \in 1.^\circ Q}{\Leftrightarrow} \sin \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\text{Logo, se } \operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$$

$$P = 4\sqrt{2 + 2 \times \frac{7}{25}} + 4 \times \frac{24}{25} = 4\sqrt{\frac{64}{25}} + \frac{96}{25} =$$

$$= 4 \times \frac{8}{5} + \frac{96}{25} = \frac{256}{25} \text{ u.c.}$$

$$3. \quad f(x) = 2 - 3 \sin(2x)$$

$$3.1 \quad f(x) = f(\pi) \wedge x \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow 2 - 3 \sin(2x) = 2 - 3 \sin(2\pi) \wedge x \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \wedge x \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi.$$

$$3.2 \quad a + b = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} - b$$

$$f(a) = 2 - 3 \sin(2a) = 2 - 3 \sin\left[2\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right] =$$

$$= 2 - 3 \sin(\pi - 2b) = 2 - 3 \sin(2b) = f(b)$$

Pág. 81

2. Seja M o ponto médio de $[BC]$. M pertence ao eixo Ox .

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{OB}} = \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{2} = \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{MB} = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{OM}}{2} = \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{OM} = 2 \cos \alpha$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2$$

$$\overline{AB}^2 = (\overline{AO} + \overline{OM})^2 + (2 \sin \alpha)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2 + 2 \cos \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{4 + 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{4 + 8 \cos \alpha + 4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} =$$

$$= \sqrt{4 + 8 \cos \alpha + 4 \times 1} = \sqrt{8 + 8 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{4(2 + 2 \cos \alpha)} = 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$$

Pág. 84

1. $\vec{u} = (3, 2)$; $\vec{v} = (-2, 4)$; $\vec{u} + \vec{v} = (3 - 2, 2 + 4) = (1, 6)$

Resposta: (C).

2. $\vec{u} = (-2, 4)$; $\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, -7\right)$

$$\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 4) - 2\left(\frac{3}{2}, -7\right) \\ = (-1, 2) + (-3, 14) = (-4, 16)$$

Resposta: (C).

3. $\overrightarrow{OF} = (0, 3, 4)$. Resposta: (B).

Pág. 85

4. $M = (-1, -2)$; $N = (0, -3)$;

$$\vec{M} - \vec{MN} = \vec{M} + \vec{NM} = (-1, -2) + [(-1, -2) - (0, -3)] = \\ = (-1, -2) + (-1, 1) = (-2, -1)$$

Resposta: (D).

5. $A(1, 2)$; $B(3, 5)$; $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Resposta: (A).

6. Sendo $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}} = 1$ e

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(1, 0, \sqrt{3}) = \frac{1}{2}\vec{u}, \text{ ou seja, } \vec{v} \text{ é colinear a } \vec{u} \text{ e } \|\vec{v}\| = 1.$$

Resposta: (A).

7. $P(-1, 6)$; $Q(4, -2)$.

$$\vec{M} = \left(\frac{-1+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right), \text{ ou seja, } \vec{M} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

Resposta: (C).

8. $P(-1, 0, 2)$, $Q(-3, 4, 7)$

$$\vec{M} = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{2+7}{2}\right); \quad \vec{M} = \left(-2, 2, \frac{9}{2}\right)$$

Resposta: (C).

9. O ponto médio de $[EF]$ é M , ponto médio de $[AC]$.

$$A(0, 3, 3); C(3, 0, 3)$$

$$\vec{M} = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{3+3}{2}\right); \vec{M} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$$

Resposta: (B).

Pág. 86

1. $W = Fd \cos \alpha$

Como $Fd > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$, temos que:

a) $W = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ$.

b) $W > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < 90^\circ$.

c) $W < 0 \Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

2. $W = Fd$; $W = (10 \times 3) \text{ J} = 30 \text{ J}$.

Pág. 87

3. $W = Fd \cos \alpha$

$$W = (10 \times 3 \cos 30^\circ) \text{ J} = \left(30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ J} = 15\sqrt{3} \text{ J}.$$

4. $W = Fd \cos \alpha$

$$10 = 10 \times 3 \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Logo, $\alpha \approx 70,5^\circ$.

Pág. 89

1.1

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos 60^\circ = 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2} = 12,5.$$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos 120^\circ = 25 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{2} = -12,5.$$

c) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{AO}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO}}) = 25 \times \cos 0^\circ = 25.$$

d) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OE} = \|\overrightarrow{AO}\| \times \|\overrightarrow{OE}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OE}}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}) = 25 \times \cos 60^\circ = \\ = 25 \times \frac{1}{2} = 12,5.$$

e) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OF} = \|\overrightarrow{OC}\| \times \|\overrightarrow{OF}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OF}}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos 180^\circ = 25 \times (-1) = -25.$$

1.2

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) =$

$$= 2 \times 3 \times \cos(90^\circ) = 6 \times 0 = 0.$$

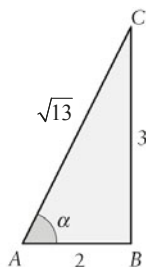
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$$= \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\widehat{AC, AB})$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{13}$$

$$\cos(\widehat{AC, AB}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{2}{\sqrt{13}} =$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{13} \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} = 4.$$



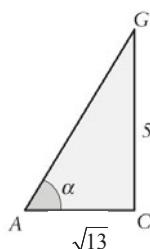
c) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AG}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{AG, AC}) =$

$$\|\overrightarrow{AG}\|^2 = (\sqrt{13})^2 + 5^2$$

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{13 + 25} = \sqrt{38}$$

$$= \cos(\widehat{AG, AC}) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AG}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}}$$

$$= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{38} \times \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} = 13.$$



Pág. 91

2. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OC}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\widehat{OC, OB}) = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{2} \times \sqrt{13} \times \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{5\sqrt{13}} \Leftrightarrow \alpha \approx 93,2^\circ.$$

Pág. 92

3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) =$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} +$$

$$+ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} =$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{AC}) +$$

$$+ \|\overrightarrow{CD}\|^2 + \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} +$$

$$+ \|\overrightarrow{CD}\|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} =$$

$$= -\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}.$$

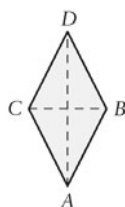
$$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$$



1.1 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\widehat{AC, AB}) =$

$$= 5 \times 5 \times \cos 60^\circ = 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2} =$$

$$12,5$$

1.2 $\|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 + (2,5)^2 = 5^2$$

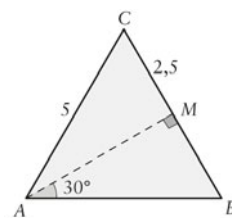
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = 18,75$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{18,75}$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{25 \times 3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\widehat{AM, AB}) =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 5 \times \cos 30^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25 \times 3}{4} = \frac{75}{4} = 18,75.$$



2.1 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{AB} =$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 0 = 3^2 = 9.$$

2.2 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}) =$

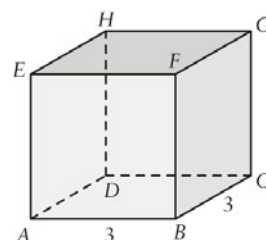
$$= -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AE} =$$

$$= -\|\overrightarrow{CA}\|^2 - 0 =$$

$$= -(\sqrt{3^2 + 3^2})^2 = -18$$

2.3 $\overrightarrow{AC} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \text{tg}(\widehat{CAG}) = \frac{\overrightarrow{CG}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{\sqrt{18}}$

$$\text{Logo, } \widehat{CAG} \approx 35,3^\circ.$$



Pág. 93

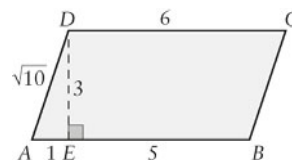
3.1 $\text{tg}(\widehat{BAD}) = \frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{AE}} = \frac{3}{1} = 3.$

3.2 $\text{tg}(\widehat{BAD}) = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} \approx 71,57^\circ$$

3.3 $\cos(\widehat{ADC}) = \cos(\widehat{ADE} + 90^\circ) =$

$$= -\cos(\widehat{ADE}) = -\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AD}} = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$



$$3.4 \quad \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AD}\| \cos(\widehat{AB, AD}) = \\ = 6 \times \sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = 6.$$

$$3.5 \quad \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot (-\overline{AB}) = -\overline{AB} \cdot \overline{AD} = -6$$

$$3.6 \quad \overline{AC} \cdot \overline{AB} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AB} = \\ = \|\overline{AB}\|^2 + \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 6^2 + 6 = 42. \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

$$4.1 \quad \overline{VO}^2 + \overline{MO}^2 = \overline{MV}^2 \\ \overline{VO}^2 + 1^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ \Leftrightarrow \overline{VO}^2 = 20 - 1 \Leftrightarrow \overline{VO} = \sqrt{19} \text{ cm.}$$

$$4.2 \quad \overline{AV}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{VM}^2 \\ \overline{AV}^2 = 1^2 + (2\sqrt{5})^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = 21 \Leftrightarrow \overline{AV} = \sqrt{21} \text{ cm.}$$

$$4.3 \quad \text{tg}(\widehat{VMO}) = \frac{\overline{OV}}{\overline{OM}} = \frac{\sqrt{19}}{1} \Rightarrow \widehat{VMO} \approx 77,1^\circ.$$

$$4.4 \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \\ = \|\overline{AB}\|^2 + 0 = 2^2 = 4.$$

$$4.5 \quad \overline{AV} \cdot \overline{AM} = \|\overline{AV}\| \times \|\overline{AM}\| \cos(\widehat{AV, AM}) = \\ = \sqrt{21} \times 1 \times \frac{\overline{AM}}{\overline{AV}} = \sqrt{21} \times \frac{1}{\sqrt{21}} = 1.$$

$$5.1 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \\ = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$5.2 \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \\ = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$5.3 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = \\ = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

$$6.1 \quad (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u} + (-\vec{v})] \cdot \vec{w} = \\ = \vec{u} \cdot \vec{w} + (-\vec{v}) \cdot \vec{w} = \\ = \vec{u} \cdot \vec{w} + (-\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

$$6.2 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow (\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = 0 \vee \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = 0 \text{ pois } \|\vec{u}\| \neq 0 \text{ e } \|\vec{v}\| \neq 0 \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|.$$

Pág. 94

$$1. \quad \vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \text{ e } \vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$2.1 \quad \|\vec{i}\| = \sqrt{1+0} = 1. \quad 2.2 \quad \|\vec{j}\| = \sqrt{0+1} = 1.$$

$$2.3 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ porque } \vec{i} \perp \vec{j}.$$

$$4.1 \quad \vec{u} = (-3, 2); \quad \vec{v} = (2, -3); \quad \vec{w} = (3, 0).$$

$$a) \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = (-3, 2) \cdot (3, 0) = -3 \times 2 + 2 \times 0 = -9.$$

$$b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 2) \cdot (2, -3) = -3 \times 2 + 2 \times (-3) = -12.$$

$$c) \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = (2, -3) \cdot (3, 0) = 2 \times 3 + (-3) \times 0 = 6.$$

$$4.2 \quad \vec{u} = (-1, 0, 3); \quad \vec{v} = (-5, 2, 0); \quad \vec{w} = (0, 1, 0).$$

$$a) \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = (-1, 0, 3) \cdot (0, 1, 0) = -1 \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times 0 = 0.$$

$$b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 0, 3) \cdot (-5, 2, 0) = -1 \times (-5) + 0 \times 2 + 3 \times 0 = 5.$$

$$c) \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = (-5, 2, 0) \cdot (0, 1, 0) = -5 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times 0 = 2.$$

Pág. 96

$$5. \quad \vec{u} = (1, 0, 2); \quad \vec{v} = (-3, 0, 4)$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(1, 0, 2) \cdot (-3, 0, 4)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{1 \times (-3) + 0 + 2 \times 4}{\sqrt{5} \times \sqrt{25}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{5}{5\sqrt{25}}$$

$$\text{Logo, } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 63,4^\circ.$$

$$1. \quad \vec{u} = (2, 3); \quad A(3, -2); \quad B(-2, 1)$$

$$1.1 \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = (2, 3) \cdot (1, 0) = 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2.$$

- 1.2 $\overline{AB} = B - A = (-5, 3)$
 $\overline{AB} \cdot \vec{u} = (-5, 3) \cdot (2, 3) = -5 \times 2 + 3 \times 3 = -10 + 9 = -1.$
- 1.3 $-2\vec{u} \cdot (2\overline{BA}) = -2 \times 2(\vec{u} \cdot \overline{BA}) = -4[(2, 3) \cdot (5, -3)] =$
 $= -4(2 \times 5 + 3 \times (-3)) = -4(10 - 9) = -4.$
- 1.4 $(-2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-2\vec{u}) = [-2(1, 0) - (0, 1)] \cdot [-2(2, 3)] =$
 $= (-2, -1) \cdot (-4, -6) = -2 \times (-4) + (-1) \times (-6) = 8 + 6 = 14.$
- 1.5 $P(x, -x) \quad ; \quad \overline{OP} = (x, -x)$
 $\overline{OP} \cdot \vec{u} = 2 \Leftrightarrow (x, -x) \cdot (2, 3) = 2 \Leftrightarrow 2x - 3x = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$
 P $(-2, 2)$ é o ponto pedido.
- 1.6 $(2, m) \cdot \overline{AB} = 1 \Leftrightarrow (2, m) \cdot (-5, 3) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \times (-5) + 3m = 1 \Leftrightarrow -10 + 3m = 1 \Leftrightarrow 3m = 11 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}.$

Pág. 97

2. A $(1, 0)$; B $(2, 3)$.
- 2.1 $\overline{AB} = B - A = (2 - 1, 3 - 0) = (1, 3)$
 $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (3, -1), \vec{w} = (-6, 2)$, por exemplo.
- 2.2 Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor perpendicular a $\overline{AB}$:
 $\vec{u} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (1, 3) = 0 \Leftrightarrow a + 3b = 0 \Leftrightarrow a = -3b$
 $\vec{u} = (-3b, b), b \in \mathbb{R}$
- 3.1 A $(2, 0, 0)$; B $(2, 3, 0)$; C $(0, 3, 0)$; O $(0, 0, 0)$;
 F $(0, 2, 4)$; G $(2, 3, 4)$; D $(0, 3, 4)$; E $(0, 0, 4)$.
- 3.2 $\overline{OG} = (2, 3, 4)$; $\overline{OC} = (0, 3, 0)$
 $\cos(\overline{OG}, \overline{OC}) = \frac{\overline{OG} \cdot \overline{OC}}{\|\overline{OG}\| \times \|\overline{OC}\|} =$
 $= \frac{(2, 3, 4) \cdot (0, 3, 0)}{\sqrt{4 + 9 + 16} \times 3} = \frac{9}{3\sqrt{29}}$
 Logo, $\overline{OG}, \overline{OC} \approx 56,1^\circ$.

4. $\vec{u} = (1, 3 + k); \vec{v} = (-1, 2)$
- 4.1 $\vec{u} - \vec{v} = (1 + 1, 3 + k - 2) = (2, 1 + k)$
 $\vec{u} + \vec{v} = (1 - 1, 3 + k + 2) = (0, 5 + k)$
 $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (2, 1 + k) \cdot (0, 5 + k) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0 + (1 + k)(5 + k) = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \vee 5 + k = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = -1 \vee k = -5.$

- 4.2 $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (2, 1 + k) \cdot (-1, 2) < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2 + 2 + 2k < 0 \Leftrightarrow k < 0.$
- 5.1 $A + \overline{BF} = 1 + \overline{AG} = G.$
- 5.2
- a) $\overline{AF} = F - A = (0, 3, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 3).$
- b) $\overline{GB} = B - G = (3, 3, 0) - (0, 0, 3) = (3, 3, -3).$

Pág. 98

1. A $(3, 2)$, B $(-1, -2)$.
- 1.1 $M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right); M(1, 0).$
- 1.2 $r = \overline{AM} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
 Circunferência de centro em M e raio $\sqrt{8}$:
 $(x-1)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 8.$

2. A $(-1, 2, 0)$; B $(-2, 0, 3)$
 $M\left(\frac{-1-2}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right); M\left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right).$

Pág. 99

6. A $(1, 0)$; B $(2, 3)$; P (x, y)
 Ponto médio $[AB]$: $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 $\overline{AB} = B - A = (1, 3)$
 $\overline{MP} = P - M = \left(x - \frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}\right)$
 $\overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}\right) \cdot (1, 3) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} + 3y - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3y + x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2.$

Pág. 100

7. A $(2, 2, 3)$; B $(0, -2, 1)$
 $\overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0$ define o plano medidor de $[AB]$.
 M $(1, 0, 2)$, sendo o ponto médio de $[AB]$ é um ponto desse plano.
 Equação cartesiana do plano:
 Sendo P (x, y, z) um ponto do plano, vem:
 $\overline{MP} = P - M = (x - 1, y, z - 2)$

$$\overline{AB} = B - A = (-2, -4, -2)$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z-2) \cdot (-2, -4, -2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) - 4y - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2y + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + z - 3 = 0.$$

Pág. 101

8. $A(1, 3)$, $B(4, 1)$ e $C(4, 3)$

8.1 Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência:

$$\overline{AP} = (x-1, y-3)$$

$$\overline{BP} = (x-4, y-1)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-3) \cdot (x-4, y-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) + (y-3)(y-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - x + y^2 - y - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 4y + 7 = 0.$$

8.2 $C(4, 3)$

$$4^2 + 3^2 - 5 \times 4 - 4 \times 3 + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + 9 - 20 - 12 + 7 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

C pertence à circunferência.

Pág. 102

9. $A(1, 2, 0)$; $B(-3, 0, 1)$

Seja $P(x, y, z)$ um ponto da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$$\overline{AP} = P - A = (x-1, y-2, z)$$

$$\overline{BP} = P - B = (x+3, y, z-1)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) + (y-2)y + z(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 + y^2 - 2y + z^2 - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - z - 3 = 0.$$

Pág. 103

10. $A(3, 2)$; $B(-2, -2)$

$$10.1 \quad \overline{AB} = B - A = (-2, -2) - (3, 2) = (-5, -4).$$

10.2

a) Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

$$M\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ é o ponto médio de } [AB].$$

$$\overline{MP} = P - M = \left(x - \frac{1}{2}, y\right)$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}, y\right) \cdot (-5, -4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\left(x - \frac{1}{2}\right) - 4y = 0 \Leftrightarrow -5x + \frac{5}{2} - 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{8}.$$

b) Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência de diâmetro $[AB]$:

$$\overline{AP} = P - A = (x-3, y-2)$$

$$\overline{BP} = P - B = (x+2, y+2)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y-2) \cdot (x+2, y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) + (y-2)(y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 10 = 0.$$

c) Seja $P(x, y)$ um ponto da reta.

$$\overline{BP} = P - B = (x+2, y+2)$$

$$\overline{BP} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+2, y+2) \cdot (-5, -4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(x+2) - 4(y+2) = 0 \Leftrightarrow -5x - 10 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -5x - 18 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x - \frac{9}{2}.$$

Pág. 104

$$11.1 \quad \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$$

Superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$$11.2 \quad \overline{PA} \cdot \overline{AB} = 0$$

Plano que passa no ponto B e é perpendicular ao vetor $\overline{AB}$.

$$11.3 \quad \overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0$$

Plano que passa em M e é perpendicular a $[AB]$, ou seja, é o plano medidor de $[AB]$.

$$11.4 \quad \overline{AP} \cdot \overline{CA} = 0$$

Plano que passa em A e é perpendicular a $\overline{CA}$, ou seja, é o plano tangente à superfície esférica no ponto A .

Pág. 105

$$12.1 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] =$$

$$= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$12.2 \quad \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

1. $A(-1, 1), B(4, -2), C(4, 4)$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (5, 3)$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{BAC}) &= \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(5, -3) \cdot (5, 3)}{\sqrt{25+9} \times \sqrt{25+9}} = \frac{25-9}{34} = \frac{8}{17}. \end{aligned}$$

Logo, $\widehat{BAC} \approx 61,9^\circ$.

1.2

- a) Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

$$\text{Ponto médio de } [AB]: M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MP} = P - M = \left(x - \frac{3}{2}, y + \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}, y + \frac{1}{2}\right) \cdot (5, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x - \frac{3}{2}\right) - 3\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{15}{2} - 3y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 5x - 9 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - 3.$$

- b) Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência de diâmetro $[AB]$.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x+1, y-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x-4, y+2)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1) \cdot (x-4, y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) + (y-1)(y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + x - 4 + y^2 + 2y - y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x + y - 6 = 0.$$

- c) Seja $P(x, y)$ um ponto da reta.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1) \cdot (5, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1) - 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 5 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 5x + 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}.$$

2.1 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha =$

$$= 0 \times \cos\alpha + 1 \times \sin\alpha = \sin\alpha.$$

2.2 $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{5\pi}{4}\cos x + \sin\frac{5\pi}{4}\sin x =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x).$$

- 3.1 $O(0, 0, 0); A(0, 3, 0); B(-3, 3, 0); C(-3, 0, 0);$
 $D(0, 0, 3); E(0, 3, 3); F(-3, 3, 3); G(-3, 0, 3).$

- 3.2 $\overrightarrow{OF} = (-3, 3, 3); \overrightarrow{OA} = (0, 3, 0)$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{(-3, 3, 3) \cdot (0, 3, 0)}{\sqrt{9+9+9} \times \sqrt{0+9+0}} = \frac{9}{3\sqrt{27}} = \frac{3}{\sqrt{27}}$$

Logo, $\widehat{AOF} \approx 54,7^\circ$.

- 3.3 O ponto médio de $[DE]$ tem coordenadas: $M\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Seja $P(x, y)$ um ponto do plano medidor de $[DE]$.

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \Leftrightarrow \left(x, y - \frac{3}{2}, z - \frac{3}{2}\right) \cdot (0, 3, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}.$$

- 3.4 Seja $P(x, y, z)$ um ponto da superfície esférica de diâmetro $[OF]$.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (x+3, y-3, z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) + y(y-3) + z(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - 3y + z^2 - 3z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y - 3z = 0$$

Pág. 106

1. $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{16+16} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\sqrt{2}.$$

1.1 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} =$

$$= -\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AM}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}}) =$$

$$= -4 \times \frac{4\sqrt{2}}{2} \times \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AC}} = -8\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{4} = -8. \text{ Resposta: (B).}$$

1.2 $2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CM} = 2(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CM} =$

$$= 2(\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CM}) = 2(0 - \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM}) =$$

$$= -2\|\overrightarrow{CM}\|^2 = -2(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{MB}^2) = -2(4^2 - (2\sqrt{2})^2) =$$

$$= -2(16-8) = -16. \text{ Resposta: (B).}$$

2. $A(2, 0); B(1, 2)$. Terá de ser $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2) - (2, 0) = (-1, 2)$$

Se $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = \left(0, \frac{3}{2}\right) - (2, 0) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 2) \cdot \left(-2, \frac{3}{2}\right) = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

Se $C(1,0)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,0) - (2,0) = (-1,0)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1,2) \cdot (-1,0) = 1 \neq 0$$

Se $C(0,1)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,1) - (2,0) = (-2,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1,2) \cdot (-2,-1) = 2 - 2 = 0$$

Resposta: (C).

3. $r: (x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(1, 0, 3), \lambda \in \mathbb{R}; \vec{r} = (1, 0, 3)$

Em (A), $\vec{s} = (-1, 0, -3)$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = -1 + 0 - 9 = -10 \neq 0$$

Em (B), $\vec{s} = (1, 0, -3)$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 1 + 0 - 9 = -8 \neq 0$$

Em (C), $\vec{s} = \left(1, 2, -\frac{1}{3}\right)$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\vec{r} \perp \vec{s}.$$

Logo a reta apresentada em (C) é perpendicular à reta r .

Resposta: (C).

4.1 $V(0, 0, h)$ sendo h a altura da pirâmide.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \text{Área da base} \times \text{altura}$$

$$= \frac{1}{3} \times \overline{PQ}^2 \times h = \frac{1}{3} \times 4^2 \times h = \frac{16}{3}h$$

$$\frac{16}{3}h = 32 \Leftrightarrow 16h = 32 \times 3 \Leftrightarrow h = 6$$

Resposta: (C).

4.2 $\cos(\widehat{OQV}) = \cos(\widehat{QO}, \widehat{QV})$

$$\overrightarrow{QO} = (-2, -2, 0)$$

$$\overrightarrow{QV} = V - Q = (0, 0, 6) - (2, 2, 0) = (-2, -2, 6)$$

$$\cos(\widehat{QO}, \widehat{QV}) = \frac{\overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{QV}}{\|\overrightarrow{QO}\| \times \|\overrightarrow{QV}\|} = \frac{(-2, -2, 0) \cdot (-2, -2, 6)}{\sqrt{4+4+0} \times \sqrt{4+4+36}} = \frac{4+4+0}{\sqrt{8} \times \sqrt{42}} = \frac{8}{\sqrt{336}}$$

Logo, $\widehat{OQV} \approx 1,1$ rad.

Resposta: (B).

4.3 $r = \overline{OR} = \overline{OQ} = \sqrt{4+4+0} = 8$

Centro: $O(0, 0, 0)$

$$\text{Equação: } x^2 + y^2 + z^2 = 8$$

Resposta: (D).

4.4 $P(2, -2, 0); R(-2, 2, 0); \overline{PR} = (-4, 4, 0)$

Ponto médio de $[PR]$: $O(0, 0, 0)$

Seja $X(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[PR]$:

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overline{PR} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (-4, 4, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y + 0 = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow y - x = 0$$

Resposta: (A).

Pág. 107

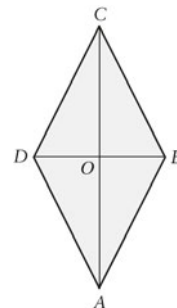
1. $\overline{DB} = 6; \overline{AC} = 6\sqrt{3}$

As diagonais de um losango bisetam-se e são perpendiculares. Então, sendo O o ponto de interseção das diagonais, temos:

$$\overline{AO} = \overline{OC} = 3\sqrt{3} \text{ e } \overline{DO} = \overline{OB} = 3.$$

1.1 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ porque $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

1.2 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{AO} + \overline{OB}) \cdot (2\overline{AO}) =$
 $= 2 \times (\overline{AO} \cdot \overline{AO} + \overline{OB} \cdot \overline{AO}) =$
 $= 2(\|\overline{AO}\|^2 + 0) = 2 \times (3\sqrt{3})^2 =$
 $= 2 \times 9 \times 3 = 54.$



1.3 $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = (\overline{AO} + \overline{OB}) \cdot (2\overline{BO}) = -2(\overline{AO} + \overline{OB}) \cdot \overline{OB} =$
 $= -2(\overline{AO} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OB}) =$
 $= -2(0 + \|\overline{OB}\|^2) = -2 \times 3^2 = -18.$

1.4 $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \|\overline{AB}\|^2 = \|\overline{AO}\|^2 + \|\overline{OB}\|^2 =$
 $= (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 9 \times 3 + 9 = 36.$

2. $A(-3, 1), B(2, -3).$

2.1 $C(x, 0)$

$$\overline{AB} = B - A = (5, -4)$$

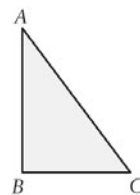
$$\overline{CB} = B - C = (2 - x, -3)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (5, -4) \cdot (2 - x, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(2 - x) - 4 \times (-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 5x + 12 = 0 \Leftrightarrow 5x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{5}$$

$$C\left(\frac{22}{5}, 0\right).$$



2.2 D pertence à reta de equação $y = x$.

$$D(x, x)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (x, x) - (-3, 1) = (x+3, x-1)$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (x, x) - (2, -3) = (x-2, x+3)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow (x+3, x-1) \cdot (x-2, x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) + (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3x - 6 + x^2 + 3x - x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{3}{2}$$

$$D(-3, -3) \text{ ou } D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

3. $P(2, 2)$, $Q(4, -2)$

$$R(x, y)$$

R pertence à mediatriz de $[PQ]$

$$\overrightarrow{RM} = \sqrt{5} \text{ sendo } M \text{ o ponto médio de } [PQ]$$

$$M(3, 0)$$

Temos, então:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3, y) \cdot (2, -4) = 0 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 - 4y = 0 \\ x^2 - 6x + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ (2y+3)^2 - 6(2y+3) + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ 4y^2 + 12y + 9 - 12y - 18 + y^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ 5y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$R(5, 1) \text{ ou } R(1, -1).$$

4. $r: (x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda(-1, 2, 5), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{r} = (-1, 2, 5)$$

$$\vec{n} = (a, b, c), a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \times b \times c \neq 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (-1, 2, 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 2b + 5c$$

Por exemplo, $b = 1$ e $c = \frac{1}{5}$ vem $a = 2 + 5 = 3$.

Então, a reta $(x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda\left(3, 1, \frac{1}{5}\right), \lambda \in \mathbb{R}$ é um

exemplo de uma reta perpendicular à reta r .

5.1 $U(1, 1, 1)$; $\overrightarrow{OU} = (1, 1, 1)$

$$T(1, 0, 1); V(0, 1, 1); \overrightarrow{TV} = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{OU} \cdot \overrightarrow{TV} = (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) = -1 + 1 + 0 = 0$$

Logo, $\overrightarrow{OU} \perp \overrightarrow{TV}$ pelo que $[OU] \perp [TV]$.

5.2 $V(0, 1, 1)$; $R(0, 1, 0)$; $\overrightarrow{VR} = (0, 0, -1)$

$$[VR]: (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(0, 0, -1), \lambda \in [0, 1] \text{ ou}$$

$$[VR]: x = 0 \wedge y = 1 \wedge 0 \leq z \leq 1.$$

5.3 $T(1, 0, 1)$; $Q(1, 1, 0)$

$$\overrightarrow{OT} = \sqrt{1^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{QT} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{QT} \Rightarrow T \text{ pertence ao plano medidor de } [OQ].$$

5.4 $P(1, 0, 0)$; $R(0, 1, 0)$. Seja $S(x, y, z)$ um ponto da superfície esférica de diâmetro $[PR]$.

$$\text{Então, } \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{RS} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z) \cdot (x, y-1, z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0$$

5.5

a) $W\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $T(1, 0, 1)$, $V(0, 1, 1)$,

$$\overrightarrow{WT} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{WV} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{WT}, \overrightarrow{WV}) &= \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\overrightarrow{WT}, \overrightarrow{WV}) \approx 1,2 \text{ rad.}$$

b) $\overrightarrow{VW} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $\overrightarrow{VT} = (1, -1, 0)$

$$\cos(\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{VT}) = \frac{\overrightarrow{VW} \cdot \overrightarrow{VT}}{\|\overrightarrow{VW}\| \times \|\overrightarrow{VT}\|} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \cdot (1, -1, 0)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{1+1+0}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Logo, } (\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{VT}) \approx 1,0 \text{ rad.}$$

c) $S(0,0,1), U(1,1,1)$

$$\overrightarrow{VS} = (0, -1, 0) ; \overrightarrow{UW} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\cos(\overrightarrow{VS}, \overrightarrow{UW}) = \frac{\overrightarrow{VS} \cdot \overrightarrow{UW}}{\|\overrightarrow{VS}\| \times \|\overrightarrow{UW}\|} =$$

$$= \frac{(0, -1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}{\sqrt{0+1+0} \times \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $(\overrightarrow{VS}, \overrightarrow{UW}) \approx 1,2 \text{ rad.}$

Pág. 108

1. $A(3, -1); \vec{v} = (3, 2)$

1.1 $r: (x, y) = (3, -1) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}.$

1.2 Se $k = -1$, $(x, y) = (3, -1) + (-3, -2) = (0, -3).$

Se $k = 2$, $(x, y) = (3, -1) + (6, 4) = (9, 3).$

Por exemplo, $C(0, -3)$ e $D(9, 3)$ pertencem a r .

1.3 $B(2, -2)$

$$(2, -2) = (3, -1) + k(3, 2) \Leftrightarrow (2, -2) = (3 + 3k, -1 + 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + 3k \\ -2 = -1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -1 \\ 2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dado que o sistema é impossível, $B \notin r$.

1.4 $P(6, y) \in r$

$$(6, y) = (3, -1) + k(3, 2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6, y) = (3 + 3k, -1 + 2k), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3 + 3k \\ y = -1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 3 \\ y = -1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$P(6, 1).$

1.5 $s: (x, y) = (-2, -1) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}.$

1.6 $\vec{r} = (3, 2)$. O declive de r é $m = \frac{2}{3}$ e o ponto $(3, -1) \in r$.

$$r: y = \frac{2}{3}x - 3.$$

2.1 $O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 3, 0), C(0, 3, 0),$
 $D(3, 0, 5), E(3, 3, 5), F(0, 3, 5), G(0, 0, 5).$

2.2 $\overrightarrow{AG} = G - A = (-3, 0, 5)$

$$r: (x, y, z) = (3, 3, 0) + k(-3, 0, 5), k \in \mathbb{R}.$$

2.3 $\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 0)$

$$\dot{AC}: (x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 3, 0), k \in \mathbb{R}_0^+.$$

2.4 $\overrightarrow{DF} = F - D = (-3, 3, 0)$

$$[DF]: (x, y, z) = (3, 0, 5) + k(-3, 3, 0), k \in [0, 1].$$

Pág. 109

3. $A(3, 2), B(-4, 3), C(-2, -2), D(1, -1).$

3.1

a) $d_{AB} = \frac{3-2}{-4-3} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}.$

b) $d_{AD} = \frac{-1-2}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$

c) $d_{CA} = \frac{-2-2}{-2-3} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$

d) $d_{BC} = \frac{-2-3}{-2+4} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}.$

3.2

a) $A(3, 2), m = -\frac{1}{7}$

$$y = mx + b.$$

$$2 = -\frac{1}{7} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{7}$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{17}{7}.$$

b) $A(3, 2), m = \frac{3}{2}$

$$y = mx + b.$$

$$2 = \frac{3}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

c) $A(3, 2), m = \frac{4}{5}$

$$y = mx + b.$$

$$2 = \frac{4}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}.$$

d) $B(-4, 3), m = -\frac{5}{2}$

$$y = mx + b.$$

$$3 = -\frac{5}{2} \times (-4) + b \Leftrightarrow b = -7$$

$$y = -\frac{5}{2}x - 7.$$

3.3 $\overline{AD} = D - A = (-2, -3); C(-2, -2)$

$$(x, y) = (-2, -2) + k(-2, -3), k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 111

13.1

a) $r: (x, y) = (0, 3) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$

$$s: (x, y) = (-1, 5) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r} = (1, 3) \text{ e } \vec{s} = (-1, 2)$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{r}, \hat{s}) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(1, 3) \cdot (-1, 2)|}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{1+4}} = \frac{|-1+6|}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{25 \times 2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Então, } (\hat{r}, \hat{s}) = 45^\circ.$$

b) $r: x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1$

Como o declive de r é $m = -1$, um vetor diretor é

$$\vec{r} = (-1, 1).$$

$$s: y = x + 2$$

O declive de s é $m = 1$; um vetor diretor é $\vec{s} = (1, 1)$.

$$\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(-1, 1) \cdot (1, 1)|}{\sqrt{1+1} \times \sqrt{1+1}} = \frac{|-1+1|}{2} = 0$$

$$\text{Logo, } (\hat{r}, \hat{s}) = 90^\circ.$$

13.2 $r: y = x; \vec{r} = (1, 1)$

$$s: (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\vec{s} = (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{r}, \hat{s}) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(1, 1) \cdot (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})|}{\sqrt{1+1} \times \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2}} = \\ &= \frac{|1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2} \times \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Se } \cos(\hat{r}, \hat{s}) = \frac{1}{2}, (\hat{r}, \hat{s}) = 60^\circ.$$

Pág. 112

14.1 $G(0, 0, a), B(a, a, 0), E(a, a, a).$

$$\overline{GB} = (a, a, -a); \overline{OE} = (a, a, a).$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{GB}, \hat{OE}) &= \frac{|\overline{GB} \cdot \overline{OE}|}{\|\overline{GB}\| \times \|\overline{OE}\|} = \\ &= \frac{|(a, a, -a) \cdot (a, a, a)|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2} \sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \\ &= \frac{|a^2+a^2-a^2|}{\sqrt{3a^2} \times \sqrt{3a^2}} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\hat{GB}, \hat{OE}) \approx 70,5^\circ.$$

14.2 $M\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), E(a, a, a), F(0, a, a).$

$$\overline{OM} = \left(a, \frac{a}{2}, 0\right); \overline{EF} = (-a, 0, 0).$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{OM}, \hat{EF}) &= \frac{|\overline{OM} \cdot \overline{EF}|}{\|\overline{OM}\| \times \|\overline{EF}\|} = \\ &= \frac{\left|\left(a, \frac{a}{2}, 0\right) \cdot (-a, 0, 0)\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + 0} \times \sqrt{a^2 + 0 + 0}} = \\ &= \frac{|a^2|}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \times \sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\hat{OM}, \hat{EF}) \approx 26,6^\circ.$$

1. $A(4, 1), B(0, 2), C(-2, -2).$

1.1 Seja M o ponto médio de $[BC]$.

$$M(-1, 0).$$

O comprimento da mediana relativa ao lado $[BC]$ é igual a

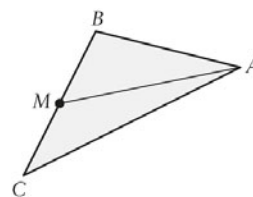
$$\|\overline{MA}\|.$$

$$\overline{MA} = (5, 1); \|\overline{MA}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

1.2 $\overline{MA} = (5, 1); \overline{BC} = (-2, -4).$

$$\overline{MA} \cdot \overline{BC} = (5, 1) \cdot (-2, -4) = -10 - 4 = -14 \neq 0$$

Como $\overline{MA}$ não é perpendicular a $\overline{BC}$, a mediana relativa ao lado $[BC]$ não coincide com a altura relativa ao mesmo lado.



2. $P(-1, 2); Q(-3, 5); \overrightarrow{PQ} = (-2, 3).$

$$s: 2x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y = -2x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

$$\vec{s} = (3, -2)$$

$$\cos(\widehat{PQ}, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{s}|}{\|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(-2, 3) \cdot (3, -2)|}{\sqrt{4+9} \times \sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{|-6-6|}{13} = \frac{12}{13}$$

Logo, $(\widehat{PQ}, s) \approx 22,6^\circ.$

3.1 $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x+3 = -2y+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2y = -3x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$\vec{r} = (2, -3), A(2, 1), B(1, -2), \overrightarrow{AB} = (-1, -3)$$

$$\cos(\widehat{AB}, r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{r}\|} = \frac{|(-1, -3) \cdot (2, -3)|}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{|-2+9|}{\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

Logo, $(\widehat{AB}, s) \approx 52,1^\circ.$

3.2 $B(1, -2)$

$$\frac{1+1}{-2} = \frac{-2-1}{3} \Leftrightarrow -1 = -1$$

(verdadeiro); $B \in r$

$$r: P = B + k\vec{r}, k \in \mathbb{R}$$

$$r: (x, y) = (1, -2) + k(2, -3), k \in \mathbb{Z}$$

Seja C um ponto de r .

Então $C(1+2k, -2-3k), k \in \mathbb{Z}$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1+2k, -2-3k) - (2, 1) = (-1+2k, -3-3k)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$$

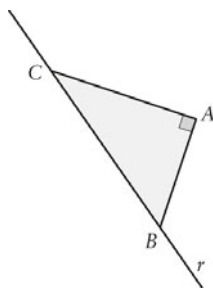
Terá de ser:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-1+2k, -3-3k) \cdot (-1, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2k+9+9k = 0 \Leftrightarrow 7k = -10 \Leftrightarrow k = -\frac{10}{7}$$

Como $C(1+2k, -2-3k)$ e $k = -\frac{10}{7}$, vem:

$$C = \left(1 - \frac{20}{7}, -2 + \frac{30}{7}\right), \text{ ou seja, } C = \left(-\frac{13}{7}, \frac{16}{7}\right).$$



4. $r: y = 2x - 3; \vec{r} = (1, 2)$

$$s: y = x + 1; \vec{s} = (1, 1).$$

4.1 $\cos(\widehat{r}, s) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(1, 2) \cdot (1, 1)|}{\sqrt{1+4} \times \sqrt{1+1}} = \frac{1+2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$$(\widehat{r}, s) \approx 18,4^\circ.$$

4.2 $A(0, -3), C(0, 1)$

a) Tomando o lado $[AC]$ para base do triângulo $[ABC]$, a sua altura é a abscissa de B .

$$\overline{AC} = |1+3| = 4$$

Ponto B :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}; B(4, 5).$$

$$A_{[ABC]} = \frac{4 \times 4}{2} = 8.$$

b) $A(0, -3), B(4, 5), C(0, 1)$

$$\overline{AB} = (4, 8); \overline{AC} = (0, 4); \overline{CB} = (4, 4); \overline{CA} = (0, -4)$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) = \frac{(4, 8) \cdot (0, 4)}{\sqrt{16+64} \times 4} = \frac{0+32}{4\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{80}}$$

$$\widehat{BAC} \approx 26,6^\circ.$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \cos(\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}}) = \frac{(0, -4) \cdot (4, 4)}{4 \times \sqrt{16+16}} = \frac{-16}{4\sqrt{16 \times 2}} =$$

$$= \frac{-16}{4 \times 4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\widehat{ACB} = 135^\circ.$$

$$\widehat{CBA} \approx 180^\circ - 26,6^\circ - 135^\circ \approx 18,4^\circ.$$

5.1 $O(0, 0), A(5, 0), B(5, 5), C(0, 5)$

$$M\left(\frac{5}{2}, 5\right); N\left(5, \frac{5}{2}\right)$$

Reta MN : $y = mx + b$

$$m = \frac{\frac{5}{2} - 5}{5 - \frac{5}{2}} = -1$$

$$5 = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{2}$$

$$MN: y = -x + \frac{15}{2}$$

Reta OB : $y = mx + b$

$$m = \frac{5-0}{5-0} = 1$$

$$0 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

$$OB: y = x$$

Reta CN : $y = mx + b$

$$m = \frac{\frac{5}{2}-5}{5-0} = \frac{-\frac{5}{2}}{5} = -\frac{1}{2}$$

$$b = 5$$

$$CN: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Reta AM : $y = mx + b$

$$m = \frac{5-0}{\frac{5}{2}-5} = \frac{5}{-\frac{5}{2}} = -2$$

$$0 = -2 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 10$$

$$AM: y = -2x + 10$$

Ponto R ($MN \cap OB$)

$$\begin{cases} y = -x + \frac{15}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + \frac{15}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{15}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{15}{4} \end{cases} ; R \left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4} \right)$$

Ponto S ($CN \cap AM$)

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10 = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x = -5 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases} ; S \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

$$\text{a) } \overrightarrow{MN} = \left(5 - \frac{5}{2}, \frac{5}{2} - 5 \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{OB} = (5, 5)$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right) \cdot (5, 5) = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 0$$

Logo $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{OB}$.

$$\text{b) } \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (C - A) = \frac{1}{2} (-5, 5) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right) = -\overrightarrow{MN}$$

$$\text{Então } \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right\| = \left\| -\overrightarrow{MN} \right\| \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{c) Ponto médio de } [MN]: \left(\frac{\frac{5}{2} + 5}{2}, \frac{5 + \frac{5}{2}}{2} \right) = \left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4} \right)$$

Logo, R é o ponto médio de $[MN]$.

$$\text{d) } S = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right); \quad OB: y = x$$

$$\text{Como } \frac{10}{3} = \frac{10}{3}, \quad S \in OB.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \overrightarrow{BR} &= R - B = \left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4} \right) - (5, 5) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} (5, 5) = -\frac{1}{4} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \overrightarrow{BR} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{OB} \text{ temos que } \overrightarrow{BR} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OB}.$$

$$\text{f) } \overrightarrow{CN} = N - C = \left(5, \frac{5}{2} \right) - (0, 5) = \left(5, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (5, 5) - (0, 5) = (5, 0)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CN} &= \|\overrightarrow{CN}\| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{5}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{\sqrt{125}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{25 \times 5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 5 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CB}\| = 5$$

$$\text{Então } \overrightarrow{CN} = \frac{\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{5.2 } \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 5)$$

$$\overrightarrow{AM} = M - A = \left(-\frac{5}{2}, 5 \right)$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{BAM}) &= \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{(0, 5) \cdot \left(-\frac{5}{2}, 5 \right)}{\sqrt{0^2 + 25} \times \sqrt{\frac{25}{4} + 25}} = \\ &= \frac{25}{5 \times \sqrt{25 \times \frac{5}{4}}} = \frac{25}{5 \times 5 \times \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{Então } \widehat{BAM} \approx 26,6^\circ.$$

6.1 $A(3, 3, -1); \quad C(0, 0, -1)$

$V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1+h\right)$ sendo h a altura da pirâmide

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$30 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times h \Leftrightarrow 30 = 3h \Leftrightarrow h = 10$$

Logo, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1+10\right)$, ou seja $V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 9\right)$

6.2 $\overrightarrow{VA} = A - V = (3, 3, -1) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 9\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -10\right)$

$$\overrightarrow{VB} = B - V = (0, 3, -1) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 9\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -10\right)$$

$$\cos(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}) = \frac{|\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VB}|}{\|\overrightarrow{VA}\| \times \|\overrightarrow{VB}\|} =$$

$$= \frac{\left| -\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 100 \right|}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 100} \times \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 100}} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{\frac{209}{2}} \times \sqrt{\frac{209}{2}}} = \frac{100}{\frac{209}{2}} = \frac{200}{209}$$

$$(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}) \approx 16,9^\circ.$$

6.3 Seja M o ponto médio de $[DA]$.

Como $D(3, 0, -1)$ e $A(3, 3, -1)$,

$$M\left(3, \frac{3}{2}, -1\right)$$

$\overline{VM}$ é a altura do triângulo $[AVD]$.

$$V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 9\right)$$

$$\overline{VM} = \sqrt{\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (-1 - 9)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 0 + 100} = \sqrt{\frac{409}{4}} = \frac{\sqrt{409}}{2}$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times \frac{\overline{DA} \times \overline{VM}}{2} = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{409}}{2} = 3\sqrt{409}.$$

Pág. 114

1. $A(7, 0), B(7, 4); d_{OB} = \frac{4}{7}.$

2. $\operatorname{tg}(\widehat{AOB}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{4}{7}.$

3. $\widehat{AOB} \approx 29,7^\circ.$

Pág. 116

15.1

a) $y = -3x + 1$

$$m = -3$$

Dado que $\operatorname{tg} \alpha = -3$,

$$\alpha \approx 180^\circ + (-71,6) \approx 108^\circ. \quad [\operatorname{tg}^{-1}(-3) = 71,6^\circ]$$

b) $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$

A reta é vertical: $\alpha = 90^\circ$

c) $y = 2x$

$$m = 2$$

Dado que $\operatorname{tg} \alpha = 2, \alpha \approx 63^\circ.$

15.2 Seja α a inclinação da reta representada:

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ: \quad m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Como $(0, -2)$ é um ponto da reta, a sua equação reduzida é

$$y = \sqrt{3}x - 2.$$

15.3 $A(1, 3)$ é um ponto da reta $r: y = mx + b$

$$m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pág. 117

16.1 $s: \frac{y-7}{2} = \frac{5-3x}{4} \Leftrightarrow 2y-14 = 5-3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2y = -3x + 19 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$$

$$\vec{s} = (2, -3)$$

Se $\vec{r} = (3, 2), \quad \vec{r} \perp \vec{s}$

$$s: (x, y) = (6, 7) + k(3, 2), k \in \mathbb{R} \text{ (por exemplo).}$$

16.2 $s: y = mx + b$

$$m = \frac{2}{3}, \quad A(6, 7) \in s$$

$$7 = \frac{2}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow b = 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 3 \\ \frac{2}{3}x + 3 = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 3 \\ 4x + 18 = -9x + 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 3 \\ 13x = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

$P(3, 5)$.

16.3 $A(6, 7); P(3, 5)$

$$\overline{AP} = \sqrt{(3-6)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Pág. 118

17. $A(6, 2), \quad B(-3, -1), \quad C(0, 7)$

17.1

a) $\overline{AB} = B - A = (-3-6, -1-2) = (-9, -3).$

b) $\overline{BC} = C - B = (0+3, 7+1) = (3, 8).$

c) $\overline{AC} = C - A = (6-0, 2-7) = (6, -5).$

17.2

a) A reta r , mediatriz de $[AB]$, é a reta que passa em M , ponto médio de $[AB]$ e é perpendicular a $[AB]$.

$$M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right); \text{ se } \overline{AB} = (-9, -3), \text{ } \vec{r} \text{ pode ser } (3, -9) \text{ e } m = -3;$$

$$y = mx + b$$

$$\frac{1}{2} = -3 \times \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$y = -3x + 5.$$

b) Mediatriz de $[BC]$

$$M\left(-\frac{3}{2}, 3\right); \text{ se } \overline{BC} = (3, 8), \vec{r} \text{ pode ser } (8, -3) \text{ e } m = -\frac{3}{8}$$

$$y = mx + b$$

$$3 = -\frac{3}{8} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{39}{16}$$

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{39}{16}.$$

c) Mediatriz de $[AC]$

$$M\left(3, \frac{9}{2}\right); \text{ se } \overline{AC} = (6, -5), \vec{r} \text{ pode ser } (5, 6) \text{ e } m = \frac{6}{5}$$

$$y = mx + b$$

$$\frac{9}{2} = \frac{6}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{10}$$

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{9}{10}.$$

17.3

a) Reta r que passa em $C(0, 7)$ e é perpendicular a

$$\overline{AB} = (-9, -3).$$

$$d_r = -\frac{1}{d_{AB}} = -\frac{9}{-3} = 3$$

$$y = mx + b$$

$$7 = -3 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 7$$

$$y = -3x + 7.$$

b) Reta r que passa em $A(6, 2)$ e é perpendicular a

$$\overline{BC} = (3, 8).$$

$$d_r = -\frac{1}{d_{BC}} = -\frac{8}{3}$$

$$y = mx + b$$

$$2 = -\frac{8}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$$

$$y = -\frac{8}{3}x + \frac{17}{4}.$$

c) Reta r que passa em $B(-3, -1)$ e é perpendicular a

$$\overline{AC} = (6, -5).$$

$$d_r = -\frac{1}{d_{AC}} = \frac{5}{6}$$

$$y = mx + b$$

$$-1 = \frac{5}{6} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{13}{2}$$

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{13}{2}.$$

17.4 $A(6, 2)$

$$m = d_{BC} = \frac{8}{3}$$

$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{8}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow b = -14$$

$$y = \frac{8}{3}x - 14.$$

Pág. 119

1. $r: y = -2x + 1; \quad d_r = -2$

$$s: kx + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{k}{3}x; \quad d_s = -\frac{k}{3}.$$

1.1 $r \parallel s \Leftrightarrow d_r = d_s \Leftrightarrow -2 = -\frac{k}{3} \Leftrightarrow k = 6$

1.2 $r \perp s \Leftrightarrow d_s = -\frac{1}{d_r} \Leftrightarrow -\frac{k}{3} = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}.$

2. Seja $P(x, y)$ um ponto da reta tangente à circunferência no ponto $A(4, 0)$ e centro $C(-1, 3)$.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - 4, y)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-5, 3)$$

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow (x - 4, y) \cdot (-5, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x + 20 + 3y = 0 \Leftrightarrow 3y = 5x - 20 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}.$$

3. $A(1, 3), \quad \vec{v} = (-1, 2)$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + b$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

4. $r: y = -2x + 6$

- 4.1 $A(0, 0), \quad B(x, y)$

Se r é a mediatriz de $[AB]$, M , ponto médio de $[AB]$ pertence a r e $\overrightarrow{AB} \perp \vec{r}$.

$$M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right); \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (x, y);$$

Como $d_r = -2$, $\vec{r} = (1, -2)$ é um vetor diretor de r .

$$\begin{cases} m \in r \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = -2 \frac{x}{2} + 6 \\ (x, y) \cdot (1, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4y + 12 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$B\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

- 4.2 $A(4, 6), \quad B(x, y)$

$$M = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y+6}{2} \right); \quad \overrightarrow{AB} = (x-4, y-6);$$

$$\begin{cases} M \in r \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+6}{2} = -2 \frac{x+4}{2} + 6 \\ (x-4, y-6) \cdot (1, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+6 = -2x-8+12 \\ x-4-2y+12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2(2y-8)+4-6 \\ x = 2y-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4y + 16 - 2 \\ x = 2y - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 14 \\ x = 2y - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{14}{5} \\ x = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

$$B\left(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right).$$

5. $V(-1, 2)$

$$r: y = -2x; \quad \vec{s} = (1, -2)$$

Seja $s: y = mx + b$ uma das retas pedidas:

$$\vec{s} = (1, m) \text{ e } (\hat{r}, \hat{s}) = 45^\circ$$

$$\frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{|(1, -2) \cdot (1, m)|}{\sqrt{1+4} \times \sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-2m|}{\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-2m| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{5}\sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-2m| = \frac{\sqrt{10}}{2} \sqrt{1+m^2}$$

Como $|1-2m| \geq 0$ e $1+m^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, temos

$$|1-2m|^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \sqrt{1+m^2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-2m)^2 = \frac{10}{4}(1+m^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-4m+4m^2 = \frac{5}{2}(1+m^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-8m+8m^2 = 5+5m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3m^2-8m-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \vee m = 3$$

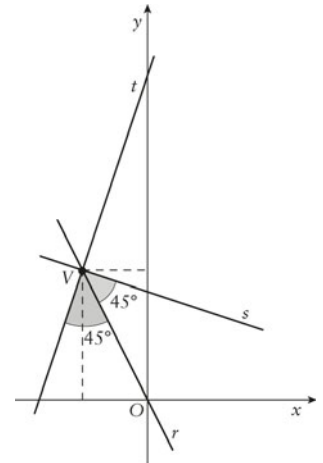
Uma das retas tem declive $-\frac{1}{3}$ e a outra tem declive 3.

Como as duas retas passam no ponto $V(-1, 2)$, temos:

$$s: y = -\frac{1}{3}x + b$$

$$2 = -\frac{1}{3}(-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$



$$t: y = 3x + b$$

$$2 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$y = 3x + 5$$

$$s: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \text{ e } t: y = 3x + 5.$$

$$6. \quad d_r = -\frac{2}{5}.$$

$$6.1 \quad \vec{r} = (5, -2), \text{ por exemplo.}$$

$$6.2 \quad m = -\frac{1}{d_r} = \frac{2}{5}.$$

$$6.3 \quad \vec{u} = (2, 5), \text{ por exemplo.}$$

$$7. \quad r: y = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2} \quad A(2, 2)$$

$$7.1 \quad -\frac{2}{2} + \frac{11}{2} \neq 2; A \notin r$$

Como $A \in s$, a reta s pedida é a reta que passa em A e é perpendicular a r .

$$d_r = -\frac{1}{2} \Rightarrow d_s = 2$$

$$s: y = 2x + b$$

$$2 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow (A(2, 2) \in s)$$

$$\Leftrightarrow b = -2$$

$$s: y = 2x - 2.$$

7.2 A interseção das retas r e s é o ponto X , centro do quadrado:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2} \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2} \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = -x + 11 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad X(3, 4).$$

$$\overrightarrow{XA} = A - X = (2, 2) - (3, 4) = (-1, -2)$$

$$\overrightarrow{XC} = -\overrightarrow{XA} = (1, 2)$$

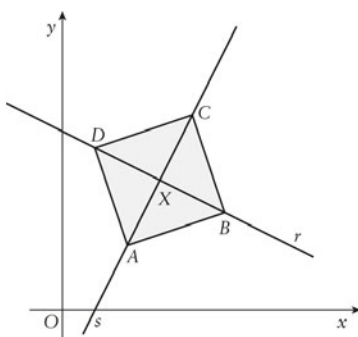
$\overrightarrow{XD}$ e $\overrightarrow{XB}$ são vetores perpendiculares a $\overrightarrow{XA}$ com a mesma norma.

$$\text{Então, } \overrightarrow{XD} = (-2, 1) \text{ e } \overrightarrow{XB} = (2, -1).$$

$$C = X + \overrightarrow{XC} = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$$

$$B = X + \overrightarrow{XB} = (3, 4) + (2, -1) = (5, 3)$$

$$D = X + \overrightarrow{XD} = (3, 4) + (-2, 1) = (1, 5).$$



$$1. \quad P(2, 0, 0), \quad Q(2, 2, 0), \quad R(0, 2, 0), \\ V(0, 2, 4), \quad S(0, 0, 4), \quad T(2, 0, 4).$$

$$2. \quad W(1, 1, 4).$$

$$3. \quad \overrightarrow{VQ} = Q - V = (2, 0, -4)$$

$$VQ: (x, y, z) = (0, 2, 4) + k(2, 0, -4), k \in \mathbb{R}.$$

$$4. \quad \cos(\widehat{VQR}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{QR}})$$

$$\overrightarrow{QV} = (-2, 0, 4)$$

$$\overrightarrow{QR} = (-2, 0, 0)$$

$$\cos(\widehat{VQR}) = \frac{(-2, 0, 4) \cdot (-2, 0, 0)}{\sqrt{4 + 0 + 16} \times 2} = \\ = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{20}}$$

Logo, $\widehat{VQR} \approx 63^\circ$.

$$5. \quad \overrightarrow{TP} = (0, 0, -4)$$

$$\overrightarrow{PV} = (-2, 2, 4)$$

$$\cos(\widehat{TP, PV}) = \frac{|(0, 0, -4) \cdot (-2, 2, 4)|}{\sqrt{0 + 0 + 16} \times \sqrt{4 + 4 + 16}} = \\ = \frac{16}{4\sqrt{24}} = \frac{4}{\sqrt{24}}$$

Logo, $(\widehat{TP, PV}) \approx 35^\circ$.

$$6. \quad \text{Plano } OPQ: z = 0$$

$$\text{Plano } STU: z = 4$$

$$\text{Plano } OPS: y = 0$$

$$\text{Plano } RQU: y = 2$$

$$\text{Plano } ORV: x = 0$$

$$\text{Plano } PQU: x = 2.$$

$$7. \quad \text{Reta } OS: x = 0 \wedge y = 0$$

$$\text{Reta } PT: x = 2 \wedge y = 0$$

$$\text{Reta } QU: x = 2 \wedge y = 2$$

$$\text{Reta } RV: x = 0 \wedge y = 2.$$

$$8. \quad x = 1 \wedge y = 1.$$

$$9. \quad \text{Ponto médio de } [SU]: \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (1, 1, 4).$$

Como W é o ponto médio de $[SU]$, W pertence ao plano mediador de $[SU]$.

Pág. 122

18.1 $A(-3, 1, 0); \vec{u} = (-1, 1, 2)$

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow -x-3 = y-1 = \frac{z}{2}.$$

18.2 $A(0, 1, 5)$ e $\vec{u} = (0, 1, 6)$

$$x=0 \wedge \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{6} \Leftrightarrow x=0 \wedge y-1 = \frac{z-5}{6}.$$

Pág. 123

19. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z.$

19.1

a) $(1, 1, 0)$, por exemplo.

b) $(2, 3, 1)$, por exemplo.

19.2 $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = z-2.$

Pág. 124

20. $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}; s: \frac{x-a}{-9} = \frac{y-b}{-6} = \frac{z-c}{9}.$

$$\vec{r} = (3, 2, -3)$$

$$\vec{s} = (-9, -6, 9) = -3(3, 2, -3) = -3\vec{r}$$

$$\vec{s} = -3\vec{r} \Rightarrow \vec{s} \text{ e } \vec{r} \text{ são colineares } s \parallel r.$$

Sendo s e r paralelas, para serem coincidentes basta terem um ponto comum. Assim (a, b, c) podem ser as coordenadas de qualquer ponto da reta r , em particular do ponto $(1, 1, 0)$, ou seja, $a=1 \wedge b=1 \wedge c=0$ (por exemplo).

21. $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z; s: \begin{cases} \frac{x-1}{3} = z+1 \\ y=3 \end{cases}.$

21.1 $\vec{r} = (3, 2, 1); \vec{s} = (3, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{r}, \hat{s}) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(3, 2, 1) \cdot (3, 0, 1)|}{\sqrt{9+4+1} \times \sqrt{9+0+1}} \\ &= \frac{9+1}{\sqrt{14} \times \sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{140}} \end{aligned}$$

Logo, $(\hat{r}, \hat{s}) \approx 32,3^\circ.$

21.2 Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ a família de vetores perpendiculares a

$$\vec{s} = (3, 0, 1).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow 3a + 0b + c = 0 \Leftrightarrow c = -3a.$$

Logo, qualquer vetor da família $\vec{n} = (a, b, -3a)$ é

perpendicular a $\vec{s}$.

Por exemplo, para $a = -1$ e $b = 1$ vem $-3a = 3$, e

$\vec{n} = (-1, 1, 3)$ é um vetor diretor de uma reta perpendicular

a s . Como a reta passa em $A(0, 1, 2)$, temos:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3} \Leftrightarrow -x = y-1 = \frac{z-2}{3} \text{ (por exemplo).}$$

Pág. 125

1.1 Aresta do quadrado da base: $\overline{DA} = 2 \times 3 = 6.$

$V(0, 0, h)$ sendo h a altura da pirâmide.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$96 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times h \Leftrightarrow 96 = 12h \Leftrightarrow h = 8$$

Logo, $V(0, 0, 8)$.

1.2 $A(3, 3, 0), B(-3, 3, 0), C(-3, -3, 0), D(3, -3, 0)$

$$AD: x=3 \wedge z=0;$$

$$AB: y=3 \wedge z=0;$$

$$BC: x=-3 \wedge z=0;$$

$$CD: y=-3 \wedge z=0.$$

1.3 $V(0, 0, 8)$

$$\overrightarrow{AV} = (-3, -3, 8); \overrightarrow{BV} = (3, -3, 8);$$

$$\overrightarrow{CV} = (3, 3, 8); \overrightarrow{DV} = (-3, 3, 8)$$

$$AV: \frac{x}{-3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-8}{8}$$

$$BV: \frac{x}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-8}{8}$$

$$CV: \frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-8}{8}$$

$$DV: \frac{x}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z-8}{8}.$$

$$\begin{aligned} 1.4 \cos(\hat{DV}, \hat{VA}) &= \cos(\hat{\overrightarrow{VD}}, \hat{\overrightarrow{VA}}) = \frac{\overrightarrow{VD} \cdot \overrightarrow{VA}}{\|\overrightarrow{VD}\| \times \|\overrightarrow{VA}\|} = \\ &= \frac{(3, -3, -8) \cdot (-2, 2, 4)}{\sqrt{9-9+64} \times \sqrt{9+9+64}} = \frac{9-9+64}{82} = \frac{32}{41} \end{aligned}$$

Logo, $(\hat{DV}, \hat{VA}) \approx 38,7^\circ.$

2.1 $r: (x, y, z) = (0, -5, 3) + \lambda(2, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$

$$s: \frac{3-x}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{-z-2}{-2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$\vec{r} = (2, 2, 2) = \vec{s}$$

r e s são paralelas. Vejamos se são coincidentes.

$$(0, -5, 3) \in r.$$

$$\frac{0-3}{2} \neq \frac{-5}{2}, \text{ logo, } (0, -5, 3) \notin s$$

r e s são estritamente paralelas.

2.2 $r: x-2 = y-2 = z-2$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-5}$$

$$\vec{r} = (1, 1, 1), \quad \vec{s} = (2, 3, -5)$$

Como $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares pelo que as retas r

e s não são paralelas.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 1, 1) \cdot (2, 3, -5) = 2 + 3 - 5 = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow r \perp s$$

r e s são perpendiculares.

3. $F(3, 2, 2); C(-3, 2, -2); M(0, 2, 0).$

3.1 $A(3, 0, -2), B(3, 2, -2), C(-3, 2, -2),$
 $D(-3, 0, -2), F(3, 2, 2), G(-3, 2, 2), H(-3, 0, 2).$

3.2

a) $\overrightarrow{BC} = C - B = (-6, 0, 0)$

$$BC: y = 2 \wedge z = -2.$$

b) $\overrightarrow{HD} = (0, 0, 4)$

$$HD: x = -3 \wedge y = 0.$$

c) $\overrightarrow{HC} = (0, 2, -4)$

$$A + \overrightarrow{HC} = (3, 0, -2) + (0, 2, -4) = (3, 2, -6).$$

3.4 $\overrightarrow{BG} = (-6, 0, 4)$

$$\overrightarrow{BC} = (-6, 0, 0)$$

$$\cos(\widehat{BG, BC}) = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC}|}{\|\overrightarrow{BG}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{|-36 + 0 + 0|}{\sqrt{36 + 16} \times 6} =$$

$$= \frac{36}{6\sqrt{52}} = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\text{Logo, } (\widehat{BG, BC}) \approx 33,7^\circ.$$

3.5

a) Há uma infinidade de soluções.

$$\overrightarrow{AH} = (-6, 0, 4)$$

Seja $\vec{r} = (a, b, c)$ um vetor diretor da reta pedida

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow (-6, 0, 4) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6a + 0 + 4c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a + 2c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}c$$

$$\vec{r} = \left(\frac{2}{3}c, b, c\right), b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0, \text{ define a família de vetores}$$

diretores das retas perpendiculares a AH . Por exemplo, para $c = 3$ e $b = 1$ obtemos $\vec{r} = (2, 1, 3)$.

Como $M(0, 2, 0)$, $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z}{3}$ define uma das retas que passa em M e é perpendicular a AH .

b) $M(0, 2, 0); \overrightarrow{AH} = (-6, 0, 4)$ é um vetor diretor:

$$\frac{x}{-6} = \frac{z}{4} \wedge y = 2 \Leftrightarrow 2x = -3z \wedge y = 2.$$

Pág. 126

1. $\vec{u} = (1, 2, 0), \vec{v} = (0, 0, 7), \lambda \neq 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^\circ$$

Resposta: (B).

2.1 $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 6 = 72$

Resposta: (C).

2.2 $V(3, 6, 3)$

Resposta: (D).

2.3 $A(0, 0, 6), C(6, 0, 0), V(3, 6, 3)$

$$\overrightarrow{VC} = (3, -6, -3)$$

$$\overrightarrow{VA} = (-3, -6, 3)$$

$$\cos(\widehat{VC, VA}) = \frac{|\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{VA}|}{\|\overrightarrow{VC}\| \times \|\overrightarrow{VA}\|} =$$

$$= \frac{|-9 + 36 - 9|}{\sqrt{9 + 36 + 9} \times \sqrt{9 + 36 + 9}} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } (\widehat{VC, VA}) \approx 70,5^\circ.$$

Resposta: (A).

2.4 $\overrightarrow{AV} = (3, 6, -3) = 3(1, 2, -1)$

$$B(6, 0, 6)$$

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \Leftrightarrow x-6 = \frac{y}{2} = 6-z$$

Resposta: (A).

2.5 O ponto V é equidistante de B e C . Logo, V pertence ao plano mediador de $[BC]$.

Resposta: (D).

2.6 $\overrightarrow{CV} = (-3, 6, 3)$; $\vec{r} = (k, 2k, -1)$

$$\overrightarrow{CV} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow -3k + 12k - 3 = 0 \Leftrightarrow 9k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Resposta: (D).

3.1 $A(6, 0)$; $B(4, 3)$

Seja $P(x, y)$ um ponto da reta pedida.

$$\overrightarrow{BP} = (x - 4, y - 3) ; \quad \overrightarrow{OB} = (4, 3)$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (x - 4, y - 3) \cdot (4, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 16 + 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow 3y = -4x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

Resposta: (B).

3.2 $A(6, 0)$; $B(4, 3)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3)$; $m = -\frac{3}{2}$

$$\alpha = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 123,7^\circ.$$

Resposta: (A).

b) $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Vetor diretor da reta s de equação $x = 0$: $\vec{j} = (0, 1)$

$$\cos(\hat{r}, s) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(-2, 3) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{4 + 9} \times 1} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$(\hat{r}, s) \approx 33,7^\circ.$$

Resposta: (B).

1.4 $B(4, 4, 0)$

O centro é o ponto N , de coordenadas $(2, 2, 0)$, ponto médio de $[OB]$. O raio é igual a $\overline{ON} = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8}$.

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8.$$

1.5 $A(4, 0, 0)$ é um ponto da superfície esférica. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano tangente à superfície esférica no ponto A .

$$\overrightarrow{AP} = (x - 4, y, z)$$

$$\overrightarrow{AN} = (-2, 2, 0) \quad ([AN] \text{ é um raio})$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow (x - 4, y, z) \cdot (-2, 2, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8 + 2y = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y = 4.$$

2. $C(x, 5, 3)$

$D(x, 5, 0)$, $x < 0$; D é um ponto da superfície esférica que limita a esfera.

$$\overline{OC} = \sqrt{83}.$$

2.1 $\sqrt{x^2 + 25 + 9} = \sqrt{83} \Leftrightarrow x^2 + 34 = 83 \Leftrightarrow x^2 = 49$

Como $x < 0$ temos $x = -7$.

Assim, $C(-7, 5, 3)$, $D(-7, 5, 0)$

$$\text{Raio: } r = \overline{CD} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$$

$$(x + 7)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 \leq 9$$

2.2 $A(-6, 7, 5)$

$$(-6 + 7)^2 + (7 - 5)^2 + (5 - 3)^2 = 1 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

A pertence à superfície esférica que limita a esfera definida anteriormente.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano tangente em A .

$$\overrightarrow{AP} = (x + 6, y - 7, z - 5)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-7, 5, 3) - (-6, 7, 5) = (-1, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x + 6, y - 7, z - 5) \cdot (-1, -2, -2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x - 6 - 2y + 14 - 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z - 18 = 0.$$

3. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$

$$\overline{AE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OE}^2$$

$$8^2 = 2\overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 32 \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{16 \times 2} \Leftrightarrow \overline{OA} = 4\sqrt{2}.$$

Pág. 127

1. $A(4, 0, 0)$.

1.1 $V(2, 2, h)$ sendo h a altura da pirâmide

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$48 = \frac{1}{3} \times 16 \times h \Leftrightarrow 3 \times 48 = 16h \Leftrightarrow h = 9$$

$$V(2, 2, 9).$$

1.2 $D(4, 0, 9)$; $F(0, 4, 9)$; $\overrightarrow{DF} = (-4, 4, 0)$

$$DF: (x, y, z) = (4, 0, 9) + k(-4, 4, 0), k \in \mathbb{R} \text{ (por exemplo)}$$

1.3 Seja M o ponto médio de $[AB]$: $M(4, 2, 0)$.

$$\text{Altura da face } [ABV]: \overrightarrow{MV} = \left\| \overrightarrow{MV} \right\|.$$

$$\overrightarrow{MV} = (-2, 0, 9); \quad \left\| \overrightarrow{MV} \right\| = \sqrt{4 + 0 + 81} = \sqrt{85}$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{MV}}{2} = 2 \times 4 \times \sqrt{85} = 8\sqrt{85}.$$

3.1 $A(4\sqrt{2}, 0, 0), C(-4\sqrt{2}, 0, 0), E(0, 0, 4\sqrt{2}),$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-8\sqrt{2}, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (-4\sqrt{2}, 0, 4\sqrt{2})$$

$$\cos(\widehat{CAE}) = \cos(\widehat{AC, AE}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}}{\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AE}\|} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{8\sqrt{2} \times \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \frac{64}{8\sqrt{2} \times \sqrt{64}} = \frac{64}{8 \times 8 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, $\widehat{CAE} = 45^\circ$.

Ou $\operatorname{tg}(\widehat{CAE}) = \frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{OA}} = 1$, pelo que $\widehat{CAE} = 45^\circ$.

3.2 $E(0, 0, 4\sqrt{2}), B(0, 4\sqrt{2}, 0), C(-4\sqrt{2}, 0, 0), F(0, 0, -4\sqrt{2})$

$$\overrightarrow{EB} = B - E = (0, 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$$

Ponto médio de $[CF]$: $M(-2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$

$$x = -2\sqrt{2} \wedge \frac{y}{4\sqrt{2}} = \frac{z + 2\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2} \wedge y = -z - 2\sqrt{2}$$

3.3 Como o triângulo $[ABE]$ é equilátero, o ângulo das retas AB e BE tem 60° de amplitude.

3.4

a) $V = 2 \times \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times OE = 2 \times \frac{1}{3} \times 8^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{512\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

b) $[ABE]$ é um triângulo equilátero de lado 8 cm e altura h cm.
 $h^2 + 4^2 = 8^2$

$$h = \sqrt{64 - 16}$$

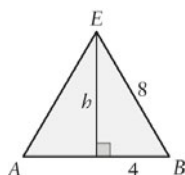
$$h = \sqrt{48}$$

$$h = \sqrt{16 \times 3}$$

$$h = 4\sqrt{3}$$

$$A_{\text{lateral}} = 8 A_{[ABE]} = 8 \times \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 128\sqrt{3}$$

$$A_{\text{lateral}} = 128\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



4. $A(9, 2), B(5, 10)$

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$; centro da circunferência: $C(5, 5)$.

4.1 $(9-5)^2 + (2-5)^2 = 25 \Leftrightarrow 4^2 + 3^2 = 25$ (verdadeiro)

$$(5-5)^2 + (10-5)^2 = 25 \Leftrightarrow 0 + 5^2 = 25$$
 (verdadeiro)

4.2 Seja $P(x, y)$ um ponto de r :

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-9, y-2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 3)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-9, y-2) \cdot (-4, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 36 + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 3y + 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 4x - 30 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - 10$$

$$r: y = \frac{4}{3}x - 10$$

Seja $Q(x, y)$ um ponto de s :

$$\overrightarrow{BQ} = Q - B = (x-5, y-10)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, -5)$$

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x-5, y-10) \cdot (0, -5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \times (x-5) - 5(y-10) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(y-10) = 0 \Leftrightarrow y-10 = 0 \Leftrightarrow y = 10$$

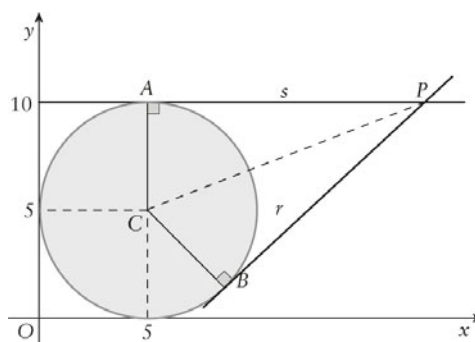
$$s: y = 10$$

4.3 $\vec{r} = (3, 4); \vec{s} = (1, 0)$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(3, 4) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{9+16} \times 1} = \frac{3}{5}$$

Logo, $(\widehat{r, s}) \approx 53,1^\circ$.

4.4 Ponto P



$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x - 10 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = \frac{4}{3}x - 10 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}; \quad P(15, 10)$$

PC é a bissetriz do ângulo APB .

$$A_{[APBC]} = 2A_{[APC]} = 2 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{AC}}{2} = \overline{AP} \times \overline{AC} = \\ = |15-5| \times |10-5| = 10 \times 5 = 50.$$

Pág. 128

1. $A(3, 2, -4)$ e $B(-1, 0, 2)$

1.1 $\overline{BA} = A - B = (4, 2, -6).$

1.2 $M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-4+2}{2}\right); M(1, 1, -1).$

1.3 $P(x, y, z)$

$$\overline{MP} = P - M = (x-1, y-1, z+1)$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{BA} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-1, z+1) \cdot (4, 2, -6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) + 2(y-1) - 6(z+1) = 0.$$

1.4 α é plano mediador de $[AB]$.

Pág. 129

22.1

a) $C(-1, 2, 0), \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$

$$\frac{1}{2}(x+1) + 0(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 4z + 1 = 0.$$

b) $C(5, 3, -2), \quad \vec{u} = (1, 2, -3)$

$$1(x-5) + 2(y-3) - 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 5 + 2y - 6 - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 3z - 17 = 0.$$

22.2

a) $x - y + z = 0$

$$\vec{n} = (1, -1, 1)$$

$A(0, 0, 0)$, por exemplo.

b) $x + y + 3 = 0$

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \text{ e } A(1, -4, 3), \text{ por exemplo.}$$

c) $\frac{x}{3} - y - 2z = 0$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{3}, -1, -2\right) \text{ e } A(0, 0, 0), \text{ por exemplo.}$$

d) $x = 7$

$$\vec{n} = (1, 0, 0) \text{ e } A(7, 0, 0), \text{ por exemplo.}$$

e) $z = -1$

$$\vec{n} = (0, 0, 1) \text{ e } A(1, 1, -1), \text{ por exemplo.}$$

22.3 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (2, -2, 2), \quad \vec{n}_3 = (3, -3, 3)$, por exemplo.

Pág. 130

23. $V_{\text{prisma}} = \overline{OB}^2 \times \overline{OF} \Leftrightarrow 45 = 3^2 \times \overline{OF} \Leftrightarrow \overline{OF} = 5.$

23.1 $A(3, -3, 0)$

$$\overline{GE} = E - G = (3, 0, 5) - (0, -3, 5) = (3, 3, 0)$$

$$3(x-3) + 3(y+3) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 9 + 9 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

23.2 $O(0, 0, 0)$

$$\overline{FA} = A - F = (3, -3, 0) - (0, 0, 5) = (3, -3, -5)$$

$$3(x-0) - 3(y-0) + 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y - 5z = 0.$$

23.3 $M\left(3, -\frac{3}{2}, 0\right)$

$$\overline{AC} = C - A = (0, -3, 0) - (3, -3, 0) = (-3, 0, 0)$$

$$-3(x-3) + 0\left(y + \frac{3}{2}\right) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow -3(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Pág. 131

24.1 $B(4, 0, 4), C(4, 4, 4), V(2, 2, -2)$

$$\overline{BC} = (0, 4, 0); \overline{BV} = (-2, 2, -6)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano BCV

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{BV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 4, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 2, -6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 0 \\ -2a + 2b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -2a - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3c \end{cases}$$

$$\vec{n} = (-3c, 0, c), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Para $c = -1$, por exemplo temos $\vec{n} = (3, 0, -1)$ que é um vetor perpendicular a BCV .

$$BCV: 3(x-4) + 0(y-0) - 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 - z + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - z - 8 = 0.$$

24.2 $A(0, 0, 4), V(2, 2, -2)$

$$\overline{AV} = (2, 2, -6)$$

$$AV: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

24.3 A secção produzida na pirâmide pelo plano xOy é o quadrado $[EFGH]$.

Atendendo a que as pirâmides $[ABCDV]$ e $[EFGHV]$ são semelhantes sendo r a razão de semelhança e

$$r = \frac{\text{altura da pirâmide } [ABCDV]}{\text{altura da pirâmide } [EFGHV]} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$\text{temos que: } \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{FG}} = 3 \Leftrightarrow \overline{FG} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Logo a área do quadrado } [EFGH] \text{ é } \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \text{ u. a.}$$

Pág. 132

25. $A(1, 1, 1)$

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \quad B(1, 2, 0) \in r$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1); \quad \vec{r} = (1, 2, 3) \text{ têm a direção do plano.}$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a + 2b + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = -5b \end{cases}$$

$$\vec{n} = (-5b, b, b). \text{ Para } b = -1, \text{ temos } \vec{n} = (5, -1, -1).$$

$$5(x-1) - 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5 - y + 1 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x - y - z - 3 = 0.$$

26. $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

$$s: \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{6}$$

$$A(1, 2, 3) \in r, B(0, 0, 1) \in s$$

$$\vec{r} = (1, 2, 3) \text{ e } \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2) \text{ têm a direção do plano.}$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, -2, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -a - 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b - 2c + 2b + 3c = 0 \\ a = -2b - 2c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}; \quad \vec{n} = (-2b, b, 0)$$

$$\text{Para } b = -1, \text{ temos } \vec{n} = (2, -1, 0).$$

Como $B(0, 0, 1)$ é um ponto do plano, vem:

$$2(x-0) - 1(y-0) + 0(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

Pág. 133

1.1 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$

$$\overline{AE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OE}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2\overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{OA} = 1$$

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0),$$

$$D(0, -1, 0), E(0, 0, 1), F(0, 0, -1).$$

1.2 $\overline{AB} = B - A = (-1, 1, 0)$

$$\overline{AE} = E - A = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = (-1, 1, 0) \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \vec{u}$$

$$\overline{AE} \cdot \vec{u} = (-1, 0, 1) \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$\overline{AE} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overline{AE} \perp \vec{u}.$$

1.3 O vetor é $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ é normal ao plano ABE .

$$A(1, 0, 0)$$

$$ABE: \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}(y-0) + \sqrt{2}(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

1.4 $F(0, 0, -1)$, $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 1, 0)$ são pontos do plano.

$$\overrightarrow{FA} = (1, 0, 1)$$

$$\overline{AB} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = a \end{cases}; \quad \vec{n} = (a, a, -a)$$

$$\text{Para } a = 1, \text{ temos } \vec{n} = (1, 1, -1).$$

$$1(x-0) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0.$$

1.5 $D(0, -1, 0)$, $E(0, 0, 1)$ e $C(-1, 0, 0)$

$$\overline{DE} = (0, 1, 1); \quad \overline{DC} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{DE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{DC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = b \end{cases}; \quad \vec{n} = (b, b, -b)$$

Para $b = 1$, temos $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

$$1(x-0) + 1(y+1) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0.$$

- 1.6** É a superfície esférica de centro na origem do referencial e raio igual a 1:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

2. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5$

2.1 $P(2, 0, -3)$.

$$(2-1)^2 + (0-2)^2 + (-3+3)^2 = 5 \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 0^2 = 5$$

(verdadeiro).

- 2.2** $C(1, 2, -3)$ é o centro da superfície esférica

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (1, -2, 0)$$

1.º processo

É o plano α normal ao vetor $\overrightarrow{CP}$ e que passa em

$P(2, 0, -3)$.

$$\alpha: x - 2y + 0z + d = 0$$

Como $P \in \alpha$, temos:

$$2 - 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

$$\alpha: x - 2y - 2 = 0$$

2.º processo

Seja $R(x, y, z)$ um ponto do plano α pedido.

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow (x-2, y, z+3) \cdot (1, -2, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0.$$

3. $r: -x+1 = -1+z = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

$$s: \frac{x+1}{5} = \frac{2-y}{3} = 1 - \frac{z}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-3}$$

3.1 $\vec{r} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{s} = (5, -3, -3)$

Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares, as retas r e s não são paralelas.

$$I(-1, 2, 3)$$

$$1+1 = -1+3 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 = 2. \text{ Verdadeiro, pelo que } I \in r.$$

$$\frac{-1+1}{5} = \frac{2-2}{3} = 1 - \frac{3}{3} \Leftrightarrow 0 = 0 = 0. \text{ Verdadeiro, pelo que}$$

$$I \in s.$$

Como $I \in r \wedge I \in s$, as retas r e s interseitam-se no ponto

$$I(-1, 2, 3).$$

- 3.3** As retas são coplanares dado que são concorrentes.

- 4.** Seja α o plano que contém $A(1, 1, 1)$ e é perpendicular a $\vec{v} = (10, -2, 14)$

$$\alpha: 10(x-1) - 2(y-1) + 14(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - 2y + 14z - 10 + 2 - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - 2y + 14z - 22 = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 7z - 11 = 0$$

$$B(-2, 0, 3): 5 \times (-2) - 0 + 7 \times 3 - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 + 21 - 11 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Logo, $B \in \alpha$.

5. $\alpha: 2x + y - z = 1$

5.1

a) $\vec{v} = (2, 1, -1)$, por exemplo.

b) $\vec{u} = (-1, 2, 0)$, por exemplo.

5.2 $A(1, 1, 1) \in \beta$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp \beta$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + b - c = 0 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\vec{n} = (2b, b, 5b)$$

Para $b = -1$, temos $\vec{n} = (2, 1, 5)$.

$$\beta: 2(x-1) + 1(y-1) + 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 5z - 2 - 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 5z - 8 = 0.$$

6.1 $O(0, 0, 0)$, $F(3, 3, 0)$, $D(0, 0, -3)$

$$\overrightarrow{OF} = (3, 3, 0); \quad \overrightarrow{OD} = (0, 0, -3)$$

$$\vec{n} = (a, b, c) \perp OFD$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, 3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ -3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}; \quad \vec{n} = (-b, b, 0)$$

Para $b = -1$, temos $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

$$OFD: 1(x-0) - 1(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

- 6.2** A reta EG é a interseção do plano de equação $z = 0$ com o plano AEG .

Plano AEG :

$$A(3, 0, -3), E(3, 0, 0), G(0, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AE} = (0, 0, -3); \quad \overrightarrow{EG} = (-3, 3, 0)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp AEG$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 0, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 3, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3c = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases}; \quad \vec{n} = (a, a, 0)$$

Para $a = 1$, temos $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

$$AEG: 1(x-3) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 3.$$

$$EG: z = 0 \wedge x + y = 3.$$

6.3 Trata-se da reta AB :

$$AB: x = 3 \wedge z = -3 \text{ (por exemplo).}$$

Pág. 134

1. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.
2. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.
3. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.
4. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

Pág. 135

27. $\alpha: x - y + z = 1.$

27.1 $\beta: x - y + z = 0.$

27.2 Há uma infinidade de planos que passam em O e são perpendiculares a α . Seja π um desses planos

$$\vec{n} = (a, b, c) \perp \pi.$$

Então como o vetor $\vec{a} = (1, -1, 1) \perp \alpha$ vem:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow a = b - c.$$

Por exemplo para $b = 1$ e $c = -1$ temos $a = 2$ pelo que o vetor $\vec{n} = (2, 1, -1)$ é perpendicular a π .

$$\pi: 2(x-0) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \text{ é uma das soluções.}$$

Pág. 136

28.1 $\vec{v} = (0, \sqrt{2}, -1); \quad T(-1, -2, -3)$

a) $0(x+1) + \sqrt{2}(y+2) - 1(z+3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}y - z + 2\sqrt{2} - 3 = 0.$$

b) $\alpha: -x + 2y - az = 7$

$$\vec{u} = (-1, 2, -a) \perp \alpha.$$

$$\text{Terá de ser } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (0, \sqrt{2}, -1) \cdot (-1, 2, -a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2\sqrt{2}.$$

28.2 $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 2, -4), \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{r} = (2, 2, -4)$ é um vetor diretor de r .

$$\alpha: x + y - 2z = 1$$

$$\vec{n} = (1, 1, -2) \perp \alpha$$

$$\vec{r} = (2, 2, -4) = 2(1, 1, -2) = 2\vec{n}$$

$\vec{r} = 2\vec{n} \Rightarrow \vec{r}$ e $\vec{n}$ são colineares.

Logo, a reta r é perpendicular ao plano α .

Pág. 137

29. $\alpha: x + y + z = 0; \quad \vec{u} = (1, 1, 1) \perp \alpha$

$$\beta: 2x + y = 0; \quad \vec{v} = (2, 1, 0) \perp \beta$$

Seja θ o ângulo dos dois planos:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (2, 1, 0)|}{\sqrt{1+1+1} \times \sqrt{4+1+0}} = \frac{2+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$$

Logo, $\theta \approx 39,2^\circ$.

Pág. 139

30. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

30.1 $\vec{r} = (2, 3, 1)$ e $\vec{s} = (2, 1, -1)$

$$\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \frac{|(2, 3, 1) \cdot (2, 1, -1)|}{\sqrt{4+9+1} \times \sqrt{4+1+1}} = \frac{|4+3-1|}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{84}}$$

Logo, $(\hat{r}, \hat{s}) \approx 49^\circ$.

30.2 As retas r e s são distintas e concorrentes no ponto de coordenadas $(1, -1, 0)$. Logo, definem um plano.

30.3 Seja $\vec{u}$ um vetor perpendicular a α .

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 2a + b = 0 \\ c = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ c = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2a - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases}$$

$$\vec{u} = (a, -a, a)$$

Para $a = 1$ temos $\vec{u} = (1, -1, 1) \perp \alpha$.

Dado que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ também é perpendicular ao plano $\pi: x - y + z = 10$ podemos concluir que $\alpha \cap \pi$ são planos paralelos.

30.4 $\vec{u} = (1, -1, 1)$ é um vetor perpendicular a α

$\vec{v} = (2, 4, 1)$ é um vetor perpendicular a

$$\beta: 2x + 4y + z - 1 = 0$$

Seja θ o ângulo dos dois planos:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (2, 4, 1)|}{\sqrt{1+1+1} \times \sqrt{4+16+1}} = \frac{|2-4+1|}{\sqrt{3} \times \sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

Logo, $\theta \approx 82,8^\circ$.

Pág. 140

31.1 $r: (x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda(1, 0, 2), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\alpha: x + y - 2z - 1 = 0$$

Ponto genérico de r :

$$(x, y, z) = (1, 3, 0) + (\lambda, 0, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$R(1 + \lambda, 3, 2\lambda)$$

Interseção da reta r com o plano $\alpha: x + y - 2z - 1 = 0$

$$R \in \alpha \Leftrightarrow (1 + \lambda) + 3 - 2(2\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow -3\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Para $\lambda = 1$ obtém-se o ponto $I(2, 3, 2)$, interseção da reta r com α .

Como r intersesta α no ponto I , r é concorrente com α .

31.2 $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = 1-z$

$$\alpha: x - y - z = 0$$

Ponto genérico de r :

$$(x, y, z) = (2, 1, 1) + k(2, 3, -1), k \in \mathbb{R}$$

$$R(2 + 2k, 1 + 3k, 1 - k), k \in \mathbb{R}$$

Interseção da reta r com o plano α :

$$R \in \alpha \Leftrightarrow (2 + 2k) - (1 + 3k) - (1 - k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2k - 1 - 3k - 1 + k = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

A equação é indeterminada. A reta r intersesta o plano α numa infinidade de pontos, ou seja, r é aposta ao plano.

31.3 $r: x - 1 = y = z - 1$

$$\alpha: 2x - 3y + z - 2 = 0$$

Ponto genérico de r :

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

$$R(1 + k, k, 1 + k), k \in \mathbb{R}$$

Interseção da reta r com o plano α :

$$R \in \alpha \Leftrightarrow 2(1 + k) - 3k + (1 + k) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2k - 3k + 1 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$$

A equação é impossível.

r não intersesta α , ou seja, r é estritamente paralela a α .

Pág. 141

32. $A(3, 0, 0), B(0, 0, 4)$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4)$$

$$\alpha: x = y \Leftrightarrow x - y = 0$$

$\vec{u} = (1, -1, 0)$ é um vetor perpendicular a α .

Seja θ o ângulo de AB com α :

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{u}\|} = \frac{|(-3, 0, 4) \cdot (1, -1, 0)|}{\sqrt{9+16} \times \sqrt{1+1}} = \frac{|-3|}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

Logo, $\theta \approx 25^\circ$.

1. $\alpha: x - y + z = 3$; $\vec{u} = (1, -1, 1)$ é perpendicular a α

$\beta: kx + y - z = 6$; $\vec{v} = (k, 1, -1)$ é perpendicular a β .

1.1 $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{u}$ é colinear com $\vec{v}$.

$$\text{Logo, } \frac{k}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow k = -1$$

1.2 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1, -1, 1) \cdot (k, 1, -1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

1.3 $r: (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = (1, 1, 1)$$

Seja θ o ângulo de r com α :

$$\sin \theta = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{u}\|} = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{1+1+1} \times \sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Então, $\theta \approx 19,5^\circ$.

2. $\alpha: 10x + 15y + 6z = 125$

2.1 $U(5, 5, 5)$; $\vec{n} = (10, 15, 6)$ é um vetor diretor da reta r .

$$r: \frac{x-5}{10} = \frac{y-5}{15} = \frac{z-5}{16}$$

2.2 Existe uma infinidade de soluções.

O vetor diretor da reta terá de ser perpendicular ao vetor

$$\vec{n} = (10, 15, 6).$$

Seja $\vec{s} = (a, b, c)$ um vetor perpendicular a $\vec{n}$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (10, 15, 6) = 0 \Leftrightarrow 10a + 15b + 6c = 0$$

Por exemplo, para $a = 3$ e $b = 2$ obtemos:

$$10 \times 3 + 15 \times 2 + 6c = 0 \Leftrightarrow 6c = -60 \Leftrightarrow c = -10$$

Então $\vec{s} = (3, 2, -10)$ é um dos vetores perpendiculares a $\vec{n}$.

Uma solução é, portanto $\frac{x-5}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-5}{-10}$.

2.3 Ponto M

Interseção de $[TU]$ com α

$$\begin{cases} x = 5 \wedge z = 5 \\ 10x + 15y + 6z = 125 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \wedge z = 5 \\ 50 + 15y + 30 = 125 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \wedge z = 5 \\ 15y = 45 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \wedge z = 5 \\ y = 3 \end{cases}; M(5, 3, 5).$$

Ponto N

Interseção de $[UV]$ com α

$$\begin{cases} y = 5 \wedge z = 5 \\ 10x + 15y + 6z = 125 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \wedge z = 5 \\ 10x + 75 + 30 = 125 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \wedge z = 5 \\ 10x = 20 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \wedge z = 5 \\ x = 2 \end{cases}; N(2, 5, 5).$$

$$\overrightarrow{MN} = N - M = (-3, 2, 0)$$

Reta que passa por $R(0, 5, 0)$ e é paralela a $\overrightarrow{MN}$:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-5}{-2} \wedge z = 0.$$

2.4 $\overrightarrow{QM} = M - Q = (5, 3, 5) - (5, 5, 0) = (0, -2, 5)$

$$\overrightarrow{QN} = N - Q = (2, 5, 5) - (5, 5, 0) = (-3, 0, 5)$$

$$\cos \beta = \cos(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}) = \frac{(0, -2, 5) \cdot (-3, 0, 5)}{\sqrt{4+25} \times \sqrt{9+25}} =$$

$$= \frac{0+0+25}{\sqrt{29} \times \sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{986}}$$

Logo, $\beta \approx 37^\circ$.

Pág. 143

2.5 $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 5x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ (Não há planos paralelos.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ 2(2y - z + 3) + 3y - z = 0 \\ 5(2y - z + 3) - y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ 4y - 2z + 6 + 3y - z = 0 \\ 10y - 5z + 15 - y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ 7y - 3z = -6 \\ 9y - 8z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ z = \frac{7y+6}{3} \\ 9y - 8\frac{7y+6}{3} = -16 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ z = \frac{7y+6}{3} \\ 27y - 56y - 48 = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Os três planos interseitam-se no ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$.

Pág. 146

34.1 $\pi_1: 3x + 2y - z - 1 = 0$

$$\pi_2: 2x + 3y + z - 2 = 0$$

$$\pi_3: 2x + y - z - 4 = 0$$

Nos três planos não há dois paralelos.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2y - 1 \\ 2x + 3y + 3x + 2y - 1 = 2 \\ 2x + y - 3x - 2y + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2y - 1 \\ 5x + 5y = 3 \\ -x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2y - 1 \\ x = -y - 3 \\ 5(-y - 3) + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2y - 1 \\ x = -y - 3 \\ -15 = 3 \end{cases}$$

O sistema é impossível. Como não há planos paralelos, os três planos interseitam-se dois a dois segundo retas paralelas.

34.2

a) $\pi_1: x - 2y - 3z + 1 = 0$

$$\pi_2: 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\pi_3: 2x - 4y - 6z + 2 = 0$$

π_1 e π_3 são coincidentes e são interseçados por π_2

segundo uma reta. Esta reta é a interseção dos três planos.

b) $\pi_1: 5x - y = 4$

$$\pi_2: x + y + z = 0$$

$$\pi_3: x = 0$$

Nos três planos não há dois paralelos.

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 4 \\ y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ z = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Os três planos interseitam-se no ponto $(0, -4, 4)$.

Pág. 147

$$1.1 \quad \begin{cases} 4x + 12y + 8z = 4 \\ 2x + 6y + 4z = 2 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

As três equações são equivalentes. O sistema é indeterminado.

As três equações definem o mesmo plano. A interseção é esse plano.

$$1.2 \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 15 \\ 2x - 2y + 3z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x - z \\ 3x - (1 - x - z) + 4z = 15 \\ 2x - 2(1 - x - z) + 3z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x - z \\ 3x - 1 + x + z + 4z = 15 \\ 2x - 2 + 2x + 2z + 3z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x - z \\ 4x + 5z = 16 \\ 4x + 5z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x - z \\ 4x = 16 - 5z \\ 16 - 5z + 5z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x - z \\ 4x = 16 - 5z \\ 16 = 15 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Entre os planos definidos não há dois paralelos.

Os três planos interseitam-se dois a dois segundo retas paralelas.

$$1.3 \quad \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ x - 2y - 2z = -2 \\ 2x - 2y - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z + 1 \\ x - 2(2x - 2z + 1) - 2z = -2 \\ 2x - 2(2x - 2z + 1) - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z + 1 \\ x - 4x + 4z - 2 - 2z = -2 \\ 2x - 4x + 4z - 2 - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z + 1 \\ -3x + 2z = 0 \\ -2x + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z + 1 \\ z = 2x - 1 \\ -3x + 2(2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z + 1 \\ z = 2x - 1 \\ -3x + 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Os três planos interseitam-se no ponto de coordenadas $(2, -1, 3)$.

$$1.4 \quad \begin{cases} -x + y + 3z = 4 \\ -3x + 3y + 9z = 0 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases}$$

As duas primeiras equações definem planos estritamente paralelos. O sistema é impossível.

O terceiro plano interseita os restantes segundo retas paralelas.

$$2.1 \quad \overline{AB} = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0); \quad \overline{BC} = (\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0);$$

$$\overline{DC} = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0); \quad \overline{AD} = (\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0) \cdot (\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0) = -5 + 5 = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$$\|\overline{AB}\| = \|\overline{BC}\| = \|\overline{DC}\| = \|\overline{AD}\| = \sqrt{5+5+0} = \sqrt{10}$$

O quadrilátero $[ABCD]$ tem os quatro lados com o mesmo comprimento e um ângulo reto. Logo é um quadrado.

2.2

a) ABC é o plano xOy , ou seja, o plano de equação $z = 0$.

b) $A(0, \sqrt{5}, 0)$, $B(-\sqrt{5}, 0, 0)$, $V(0, 0, 5)$

$$\overline{AB} = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0); \quad \overline{AV} = (0, -\sqrt{5}, 5)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp ABV$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, -\sqrt{5}, 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}a - \sqrt{5}b = 0 \\ -\sqrt{5}b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = \frac{\sqrt{5}}{5}b \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(-b, b, \frac{\sqrt{5}}{5}b\right).$$

Para $b = -5$, temos $\vec{n} = (5, -5, -\sqrt{5})$

$$ABV : 5(x-0) - 5(y-0) - 5\sqrt{5}(z-5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5y - 5\sqrt{5}z + 5\sqrt{5} = 0.$$

$$2.3 \quad C(0, -\sqrt{5}, 0), \quad D(\sqrt{5}, 0, 0), \quad V(0, 0, 5)$$

$$\overline{CD} = (\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0); \quad \overline{CV} = (0, \sqrt{5}, 5)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp CDV$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{CV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, \sqrt{5}, 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5}a + \sqrt{5}b = 0 \\ \sqrt{5}b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -\frac{\sqrt{5}}{5}b \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(-b, b, -\frac{\sqrt{5}}{5}b\right).$$

Para $b = -5$, temos $\vec{n} = (5, -5, \sqrt{5})$.

$$CDV: 5(x-0) - 5(y-0) + \sqrt{5}(z-5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5y + \sqrt{5}z - 5\sqrt{5} = 0.$$

Substituindo as coordenadas de $P(1, 1, 5)$ na equação de CDV , temos:

$$5 \times 1 - 5 \times 1 + \sqrt{5} \times 5 - 5\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

P pertence ao plano CDV .

$$2.4 \quad 5x - 5y + \sqrt{5}z + d = 0$$

Como $A(0, \sqrt{5}, 0)$ pertence ao plano, vem:

$$5 \times 0 - 5\sqrt{5} + \sqrt{5} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5\sqrt{5}$$

$5x - 5y + \sqrt{5}z + 5\sqrt{5} = 0$ é uma equação do plano paralelo a CDV e que passa no ponto A .

$$2.5 \quad \overrightarrow{VA} = (0, \sqrt{5}, -5)$$

$$\overrightarrow{VD} = (\sqrt{5}, 0, -5)$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{A}VD) &= \frac{\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VD}}{\|\overrightarrow{VA}\| \times \|\overrightarrow{VD}\|} = \frac{\sqrt{5} \times 0 + 0 \times \sqrt{5} + 25}{\sqrt{0+5+25} \times \sqrt{5+0+25}} = \\ &= \frac{25}{\sqrt{30} \sqrt{30}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{6}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{11}{36}$$

Como β é um ângulo agudo, $\sin \beta > 0$.

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

$$3. \quad r: \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \alpha: 5x - 3y + 4z = 4$$

$$r \cap \alpha: \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \\ 5x - 3y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2z = 2 \\ 5x - 6x + 9 + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2z = 2 \\ -x + 4z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ -x = 2z - 2 \\ 2z - 2 + 4z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = -2z + 2 \\ 6z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

r intersecta α no ponto de coordenadas $\left(3, 3, -\frac{1}{2}\right)$.

$$1. \quad \alpha: 2x + 4y - 3z = 1$$

$$\beta: -6x - 12y + 9z = 9$$

$$\frac{-6}{2} = \frac{-12}{4} = \frac{9}{-3} \neq \frac{9}{1}$$

α e β são estritamente paralelos.

$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

Resposta: (A).

$$2. \quad P(0, 4, 3)$$

$$s: (x, y, z) = (0, 1, -3) + k(1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$2.1 \quad \vec{r} = (1, 0, 2) \perp \alpha$$

$$\alpha: 1(x-0) + 0(y-4) + 2(z-3) = 0$$

$$\alpha: x + 2z = 6$$

A esfera definida por $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq 3$ tem centro $C(-2, 1, 4)$ e raio $\sqrt{3}$.

Como $-2 + 2 \times 4 = 6$, o plano α passa no centro da esfera.

A interseção é um círculo de raio $\sqrt{3}$. A sua área é

$$\pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi.$$

Resposta: (B).

$$2.2 \quad \text{Reta } r \text{ que passa em } O \text{ e é paralela a } s:$$

$$s: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$(1, y, z) = (k, 0, 2k), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \\ z = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$(1, 0, 2)$ são as coordenadas pedidas.

Resposta: (D).

$$2.3 \quad \vec{s} = (1, 0, 2) \text{ tem a direção de } Ox; \vec{i} = (1, 0, 0)$$

Seja θ o ângulo que a reta s faz com Ox :

$$\cos \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{i}|}{\|\vec{s}\| \times \|\vec{i}\|} = \frac{|(1, 0, 2) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{1+4} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Logo, $\theta \approx 63^\circ$.

Resposta: (C).

$$2.4 \quad \vec{s} = (1, 0, 2)$$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$ é um vetor normal ao plano xOz .

Seja θ o ângulo de s faz com o plano xOz .

$$\vec{s} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{a reta } r \text{ é paralela ao plano } xOz, \text{ ou seja, } \theta = 0^\circ.$$

3.1 $C\left(-\frac{4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{3}{2}\right); G(-2; 4; 1, 5)$

Resposta: (B).

3.2 $\overrightarrow{OH} = (-2; -4; 1, 5)$

$\overrightarrow{OA} = (2; -4; -1, 5)$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OH}\| \times \|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{-4 + 16 - 2,25}{\sqrt{4 + 16 + 2,25} \times \sqrt{4 + 16 + 2,25}} = \frac{9,75}{22,25}$$

Logo, $\theta \approx 64^\circ$.

Resposta: (B).

3.3 Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp AOH$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2; -4; 1, 5) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2; -4; -1, 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + 1,5c = 0 \\ 2a - 4b - 1,5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -4b + 1,5c \\ -4b + 1,5c - 4b - 1,5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -4b + 1,5c \\ -8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}c \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\vec{n} = \left(\frac{3}{4}c, 0, c\right)$. Para $c = 4$, temos $\vec{n} = (3, 0, 4)$.

Resposta: (A).

3.4 $H(-2; -4; 1, 5)$

$\overrightarrow{AG} = G - A = (-2; 4; 1, 5) - (2; -4; -1, 5) = (-4, 8, 3)$

A reta $r: \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{1} \wedge z = 1,5$ passa no ponto de coordenadas $(-2; -4; 1,5)$, ou seja em H , e tem a direção do vetor $(2, 1, 0)$, perpendicular a $\overrightarrow{AG}$, dado que $(-4, 8, 3) \cdot (2, 1, 0) = -8 + 8 + 0 = 0$.

Resposta: (C).

3.5 $\overrightarrow{AO} = (-2; 4; 1, 5)$

$-2x + 4y + 1,5z = 0 \Leftrightarrow 4x - 8y - 3z = 0$

Resposta: (C).

d) $M \in [EH]$ e $\overline{EM} = \frac{3}{4}\overline{EH} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$

$M(0, 6, 6)$.

1.2 $S(6, 4, 6), N(0, 4, 0), R(6, 2, 0)$.

$\overrightarrow{SN} = (-6, 0, -6)$

$\overrightarrow{NR} = (6, -2, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp SNR$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{NR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-6, 0, -6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (6, -2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6c = 0 \\ 6a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 3a \end{cases}$$

$\vec{n} = (a, 3a, -a)$. Para $a = 1$, temos $\vec{n} = (1, 3, -1)$.

$SNR: 1(x-0) + 3(y-4) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3y - z - 12 = 0$

$M(0, 6, 6): 0 + 3 \times 6 - 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

M pertence ao plano SNR .

1.3

a) $\overrightarrow{MS} = S - M = (6, 4, 6) - (0, 6, 6) = (6, -2, 0)$.

b) $\overrightarrow{NR} = R - N = (6, 2, 0) - (0, 4, 0) = (6, -2, 0)$.

1.4 $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{NR} \Rightarrow [RNMS]$ é um paralelogramo.

1.5 $\overrightarrow{RS} = S - R = (6, 4, 6) - (6, 2, 0) = (0, 2, 6)$

$\overrightarrow{NM} = M - N = (0, 6, 6) - (0, 4, 0) = (0, 2, 6)$

$\|\overrightarrow{RS}\| = \|\overrightarrow{MS}\| = \|\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{NR}\| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \Rightarrow$

o paralelogramo $[RNMS]$ é um losango.

1.6 As diagonais de um losango são perpendiculares.

Logo, $\overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{MR}$, pelo que as retas SN e MR são perpendiculares.

1.7 Plano $HDC: y = 8$.

$M(0, 6, 6)$.

Plano paralelo a HDC que passa em $M: y = 6$.

1.8 $\overrightarrow{RS} = (0, 2, 6)$

$\overrightarrow{RN} = (-6, 2, 0)$

$$\cos(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RN}) = \frac{\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RN}}{\|\overrightarrow{RS}\| \times \|\overrightarrow{RN}\|} =$$

$$= \frac{(0, 2, 6) \cdot (-6, 2, 0)}{\sqrt{0 + 4 + 36} \times \sqrt{36 + 4 + 0}} = \frac{0 + 4 + 0}{\sqrt{40} \times \sqrt{40}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Logo, $\hat{SRN} \approx 84,3^\circ$.

1.1

a) $S(6, 4, 6)$.

b) $N(0, 4, 0)$.

c) $R \in [BC]$ e $\overline{BR} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4} \times 8 = 2$

$R(6, 2, 0)$.

$$2. \quad r: \begin{cases} 4-2x \\ 2y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y+z=4 \end{cases}$$

2.1 Ponto A

$$\begin{cases} x=2 \\ 2y+z=4 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}; \quad A(2, 2, 0)$$

Ponto B

$$\begin{cases} x=2 \\ 2y+z=4 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ y=0 \end{cases}; \quad B(2, 0, 4)$$

$$2.2 \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (0, -2, 4)$$

$\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta r .

O vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$ é perpendicular ao plano yOz .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = (0, -2, 4) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{i}.$$

Como $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\vec{i}$ a reta AB é paralela ao plano yOz .

$$3.1 \quad r: x=0 \wedge y=2z \Leftrightarrow x=0 \wedge \frac{y}{2}=z$$

$\vec{r} = (0, 2, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

A base da pirâmide é um quadrado de lado 2.

$$S(1, 1, 0); \quad T(-1, 1, 0), \quad V(0, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{ST} = (-2, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{SV} = (-1, -1, 2)$$

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{ST} = (0, 2, 1) \cdot (-2, 0, 0) = 0$$

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{SV} = (0, 2, 1) \cdot (-1, -1, 2) = 0 - 2 + 2 = 0$$

Dado que $\vec{r} \perp \overrightarrow{ST}$ e $\vec{r} \perp \overrightarrow{SV}$, a reta $r: x=0 \wedge y=2z$ é perpendicular ao plano STV .

$$STV: 0(x-1) + 2(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2y + z - 2 = 0.$$

3.2 É o plano que passa em $T(-1, 1, 0)$ e é perpendicular a

$$\overrightarrow{RT} = (-2, 2, 0):$$

$$-2(x+1) + 2(y-1) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

$$3.3 \quad \overrightarrow{VS} = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{VT} = (-1, 1, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{VS} \cdot \overrightarrow{VT}}{\|\overrightarrow{VS}\| \|\overrightarrow{VT}\|} = \frac{-1+1+4}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

Como α é um ângulo agudo ($0 < \alpha < \pi$ e $\cos \alpha > 0$)

$$\text{temos } \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3.4 Trata-se da reta que passa em T e tem a direção de Oz :

$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}.$$

Pág. 154

$$1. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} =$$

$$= 0 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = -\|\overrightarrow{BA}\|^2 = -1$$

Resposta: (B).

$$2. \quad r: 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow 3y = 2x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$d_r = \frac{2}{3} \Rightarrow d_s = -\frac{3}{2}; \quad (-1, 3) \in s$$

$$s: y = mx + b$$

$$3 = -\frac{3}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$s: y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Resposta: (B).

Pág. 155

$$3. \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha =$$

$$= 2 \cos \alpha = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Resposta: (A).

$$4. \quad r: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, -2, 3), k \in \mathbb{R}$$

$$\alpha: -4x + y + 2z = 0$$

Ponto genérico de r :

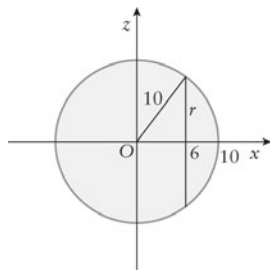
$$R(k, -2k, 3k)$$

$$\text{Se } R \in \alpha, \text{ temos } -4k + (-2k) + 2 \times (3k) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

A equação é indeterminada. Logo $r \cap \alpha = r$, ou seja, a reta r é aposta ao plano α .

Resposta: (B).

5. A interseção da esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 10^2$ como plano de equação $x = 6$ é um círculo de raio r , sendo



$$r^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 64 \Leftrightarrow r = 8$$

A área do círculo é igual a $\pi \times 8^2 = 64\pi$

Resposta: (C).

$$\begin{cases} 2 = 38 + 18k \\ 0 = -10 - 5k \\ 1 = 19 + 9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \Leftrightarrow k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

O ponto A pertence à reta r .

Pág. 157

2.1 $\overline{OC} = 10$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \cos x \Leftrightarrow \frac{\overline{OB}}{10} = \cos x \Leftrightarrow \overline{OB} = 10 \cos x$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \sin x \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{10} = \sin x \Leftrightarrow \overline{BC} = 10 \sin x$$

$$A = \overline{AB} \times \overline{BC} = 2\overline{OB} \times \overline{BC}$$

$$g(x) = 2 \times 10 \cos x \times 10 \sin x$$

$$g(x) = 200 \sin x \times \cos x.$$

2.2 $\overline{AB} = 15 \Rightarrow \overline{OB} = 7,5$

$$\cos x = \frac{7,5}{10}$$

Logo, $x \approx 0,72$ rad.

3. $P(u, v), \overline{OP} = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$

$$S(0, b), R(a, 0)$$

Como $[OP]$ é a altura do triângulo $[ORS]$ relativa à base

$[RS]$, os vetores $\overline{OP}$ e $\overline{PR}$ são perpendiculares, pelo que

$$\overline{OP} \cdot \overline{PR} = 0$$

$$\overline{OP} = (u, v)$$

$$\overline{PR} = R - P = (a, 0) - (u, v) = (a - u, -v)$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{PR} = 0 \Leftrightarrow (u, v) \cdot (a - u, -v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(a - u) - v^2 = 0 \Leftrightarrow ua - u^2 - v^2 \Leftrightarrow ua = u^2 + v^2.$$

Como $u^2 + v^2 = 1$, temos:

$$ua = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{u}$$

De igual modo, $\overline{OP}$ e $\overline{PS}$ são perpendiculares:

$$\overline{PS} = S - P = (0, b) - (u, v) = (-u, b - v)$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{PS} = 0 \Leftrightarrow (u, v) \cdot (-u, b - v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -u^2 + vb - v^2 = 0 \Leftrightarrow vb = u^2 + v^2 \Leftrightarrow vb = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{v}.$$

Logo $R\left(\frac{1}{u}, 0\right)$ e $S\left(0, \frac{1}{v}\right)$.

Pág. 156

1. $A(2, 0, 1)$

$$AVB: 18x - 5y + 9z = 45$$

$$BCV: 9x - 5y - 18z = -90$$

1.1 Ponto B

$$\begin{cases} 18x - 5y - 9z = 45 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 9z = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$B(0, 0, 5)$$

Medida do lado da base:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + 0^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Altura da pirâmide = ordenada de $V = 9$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \text{Área da base} \times \text{altura} =$$

$$= \frac{1}{3} \times (\sqrt{20})^2 \times 9 = 60.$$

1.2 Ponto V

$$\begin{cases} 18x - 5y + 9z = 45 \\ 9x - 5y - 18z = -90 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x - 45 + 9z = 45 \\ 9x - 45 - 18z = -90 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x + 9z = 90 \\ 9x - 18z = -45 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 10 \\ x - 2z = -5 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 - 2x \\ x - 20 + 4x = -5 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 - 2x \\ 5x = 15 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$V(3, 9, 4).$$

1.3 $S(38, -10, 19)$

$\vec{u} = (18, -5, 9)$ é perpendicular a AVB

$$r: (x, y, z) = (38, -10, 19) + k(18, -5, 9), k \in \mathbb{R}$$

$$A(2, 0, 1) \in r?$$

$$(2, 0, 1) = (38, -10, 19) + k(18, -5, 9)$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BG} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}) = \\
 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{FG}) = \\
 &= \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AM} \cdot (2\overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{FG} = \\
 &= 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}) + 0 + 2(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}) + 0 = \\
 &= 2 \times 0 + 2\|\overrightarrow{AM}\|^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Pág. 158

- Trata-se do conjunto de pontos P tais que CP é perpendicular a AB , ou seja, é a reta que passa por C e é perpendicular a AB .
Resposta: (C).
- $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$
 $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$
 Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp ABC$

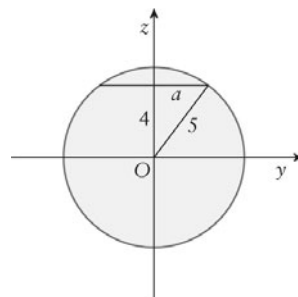
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = 0 \end{cases} \\
 \vec{n} = (0, b, b). \text{ Para } b = 1, \text{ temos } \vec{n} = (0, 1, 1).$$
 Uma reta perpendicular a ABC terá um vetor colinear com $\vec{n} = (0, 1, 1)$.
 Um vetor diretor da reta definida por $x = 2 \wedge y = z$ é $(0, 1, 1)$.
 Resposta: (B).

Pág. 159

- $A(0, -1)$
 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$
 $\overrightarrow{AP}(\cos \alpha, \sin \alpha + 1)$

$$\overrightarrow{AP}^2 = \|\overrightarrow{AP}\|^2 = \cos^2 \alpha + (\sin \alpha + 1)^2 = \\
 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 = 1 + 2 \sin \alpha + 1 = 2 + 2 \sin \alpha$$
 Resposta: (A).
- $(0, a, 0)$, com $a \neq 0$, é a família de vetores diretores da reta r .
 Para $a = 1$ temos $(0, 1, 0)$ que são as coordenadas do vetor diretor da reta:
 $r: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$
 Resposta: (D).

- r é a reta que passa no ponto $(0, 0, 4)$ e tem a direção do eixo Oy . A interseção com a esfera de centro na origem e raio 5 é o segmento de reta de comprimento $2a$ sendo
 $a^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow a = 3 \Leftrightarrow 2a = 6$



Resposta: (D).

Pág. 160

- $A(3, 2)$ e $B(x, 0)$
 - Inclinação de AB é $\alpha = 135^\circ$.
 $d_{AB} = \text{tg}(135^\circ) = -1 = m$
 $AB: y = mx + b$
 $2 = -1 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 5$
 $AB: y = -x + 5$.
 - $B(x, 0)$ é um ponto da reta $AB: y = -x + 5$.
 $0 = -x + 5 \Leftrightarrow x = 5$, donde $B(5, 0)$.
 - $C(0, y)$, $B(5, 0)$
 $\vec{u} = (1, -1)$ é um vetor diretor da reta AB
 $\overrightarrow{BC} = (-5, y)$ é um vetor diretor da reta BC
 $AB \perp BC \Leftrightarrow (1, -1) \cdot (-5, y) = 0 \Leftrightarrow -5 - y = 0 \Leftrightarrow y = -5$
 $C(0, -5)$.
- $C(6, 4)$, $A(9, 0)$.
 - Seja $P(x, y)$ um ponto da reta t . Então $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.
 $(x - 9, y) \cdot (3, -4) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3(x - 9) - 4y = 0$
 $\Leftrightarrow 3x - 27 - 4y = 0$
 $\Leftrightarrow 4y = 3x - 27$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{27}{4}$

2.2 $\overline{CA} = (3, -4)$

O raio da circunferência é $r = \|\overline{CA}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ e o

centro é o ponto $C(6, 4)$. Logo, uma equação da circunferência é:

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Precisamos de calcular a amplitude α do ângulo ACB que é igual à amplitude do arco AB .

$$2\pi \text{ rad} \text{ — } \pi \times 5^2$$

$$\alpha \text{ rad} \text{ — } \frac{25\pi}{12}$$

$$\alpha = \frac{\frac{25\pi}{12} \times 2\pi}{25\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Então, } \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \times \|\overline{CB}\| \cos(\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}}) =$$

$$= 5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{6} = 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Pág. 161

3. $\alpha: 3x - 4y + 2z = 18$

3.1 $A(6, 0, 0)$

Ponto P — é a interseção da aresta $[ED]$ com o plano α .

$$\begin{cases} y = 0 \wedge z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = 18 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \wedge z = 6 \\ 3x + 12 = 18 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \wedge z = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$P(2, 0, 6)$

Ponto Q — é a interseção da aresta $[EF]$ com o plano α .

$$\begin{cases} x = 6 \wedge z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = 18 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \wedge z = 6 \\ 18 - 4y + 12 = 18 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \wedge z = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$Q(6, 3, 6)$

$$\overline{AQ} = (0, 3, 6);$$

$$\overline{AP} = (-4, 0, 6)$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\overline{AQ}, \overline{AP}}) &= \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AP}}{\|\overline{AQ}\| \times \|\overline{AP}\|} = \\ &= \frac{0 + 0 + 36}{\sqrt{0 + 9 + 36} \times \sqrt{16 + 0 + 36}} = \frac{36}{\sqrt{45} \sqrt{52}} \end{aligned}$$

Logo, $\widehat{QAP} \approx 42^\circ$.

3.2 $\vec{u} = (3, -4, 2)$ é um vetor perpendicular a α .

$E(6, 0, 6)$

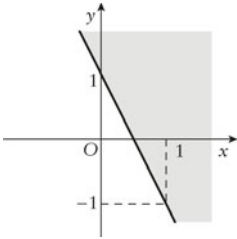
$$s: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{2}.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \overline{AB} \cdot \overline{EC} &= \overline{AB} \cdot (\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GC}) = \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{EF} + \overline{AB} \cdot \overline{FG} + \overline{AB} \cdot \overline{GC} = \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AB} + 0 + 0 = \|\overline{AB}\|^2 = \overline{AB}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{AB} \\ \overline{AB} &\perp \overline{FG} \\ \overline{AB} &\perp \overline{GC} \end{aligned}$$

Pág. 164

1. $2x + y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -2x + 1$



x	y = -2x + 1
0	1
1	-1

Resposta: (D).

2. A reta que define a fronteira passa nos pontos:

$A(2, 0)$ e $B(4, 2)$; $m = \frac{2-0}{4-2} = 1$

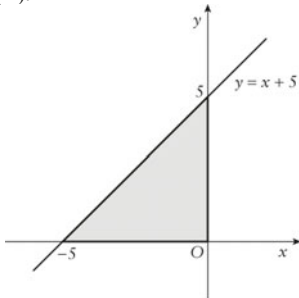
$y = mx + b$; $0 = 1 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -2$

O domínio é definido pela condição $y \geq x - 2$.

Resposta: (A).

3.

$$\begin{cases} y \leq x + 5 \\ y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

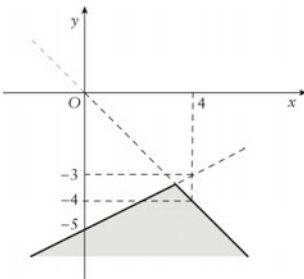


x	y = x + 5
0	5
-5	0

Resposta: (B).

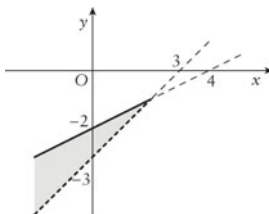
Pág. 165

4.1 $\begin{cases} x \leq -y \\ x - 2y \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x \\ 2y \leq x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x \\ y \leq \frac{1}{2}x - 5 \end{cases}$



x	y = 1/2 x - 5
0	-5
4	-3

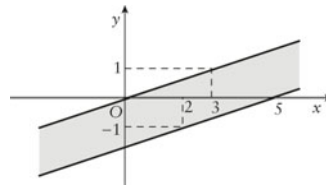
4.2 $\begin{cases} x - y < 3 \\ -x + 2y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x - 3 \\ y \leq \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$



x	y = x - 3
0	-3
3	0

x	y = 1/2 x - 2
0	-2
4	0

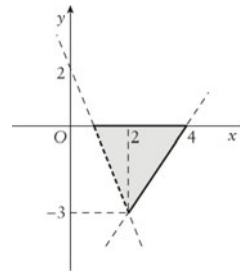
4.3 $\begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ 2x - 6y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y \leq 0 \\ -x + 3y \geq -5 \end{cases}$



x	y
0	0
3	1

x	y
2	-1
5	0

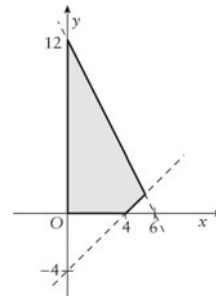
4.4 $\begin{cases} y \leq 0 \\ 5x + 2y - 4 > 0 \\ 2y - 3x \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ 5x + 2y > 4 \\ -3x + 2y \geq -12 \end{cases}$



x	y
0	-6
4	0

x	y
0	2
2	-3

4.5 $\begin{cases} x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y \geq -4 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

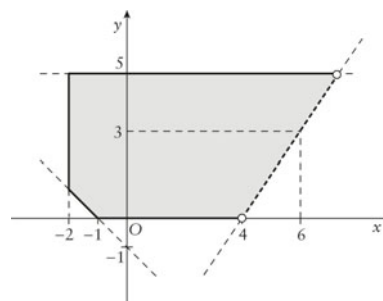


x	y
0	-4
4	0

x	y
0	12
6	0

4.6 $\begin{cases} x \geq -2 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ x + y \geq -1 \\ 3x - 2y < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ x + y \geq -1 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases}$

Cálculos auxiliares



x	y
0	-1

x	y
6	3
4	0

5.1 $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(2, 3)$

Reta AO : $y = 0$

Reta OB : $m = \frac{3}{2}$; $b = 0$

$$OB: y = \frac{3}{2}x$$

Reta AB : $m = \frac{3-0}{2-5} = -1$

$$y = mx + b; 0 = -1 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$AB: y = -x + 5$$

Condição: $y \geq 0 \wedge y \leq \frac{3}{2}x \wedge y \leq -x + 5$.

5.2 Reta OD : $x = 0$; Reta OA : $y = 0$

Reta AB : $x = 5$

Reta BC : $y = mx + b$; $B(5, 2)$, $C(2, 3)$

$$m = \frac{3-2}{2-5} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}; 2 = -\frac{1}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

Reta DC : $y = mx + b$

$D(0, 2)$, $C(2, 3)$

$$m = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}; b = 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Condição: $y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 5 \wedge y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2$.

5.3 $A(3, 0)$; $B(4, 0)$; $C(0, 4)$; $D(0, 2)$.

AB : $y = 0$

AD : $m = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$; $b = 2$; $y = -\frac{2}{3}x + 2$

BC : $m = \frac{4-0}{0-4} = -1$; $b = 4$; $y = -x + 4$

DC : $x = 0$

Condição: $x \geq 0 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + 2 \wedge y \leq -x + 4 \wedge y \geq 0$.

5.4 $A(0, 3)$, $B(2, 2)$, $C(6, 3)$

AB : $m = \frac{2-3}{2-0} = -\frac{1}{2}$; $b = 3$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$

BC : $m = \frac{3-2}{6-2} = \frac{1}{4}$; $2 = \frac{1}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Condição: $x \geq 0 \wedge y \geq -\frac{1}{2}x + 3 \wedge y > \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

5.5 $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(4, 3)$, $D(0, 3)$

AB : $m = \frac{-1-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$

BC : $m = \frac{3-0}{4-2} = \frac{3}{2}$; $0 = \frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

Condição: $x \geq 0 \wedge y \geq -\frac{1}{2}x + 1 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - 3 \wedge y \leq 3$.

5.6 $A(0, 4)$, $B(3, 2)$, $C(0, 5)$

AB : $m = \frac{2-4}{3-0} = -\frac{2}{3}$; $b = 4$; $y = -\frac{2}{3}x + 4$

BC : $m = \frac{5-2}{0-3} = -1$; $b = 5$; $y = -x + 5$

Condição: $x \geq 0 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + 4 \wedge y \leq -x + 5$.

6. Por exemplo:

6.1 $x \geq -1 \wedge x \leq -1 \wedge y \geq 2 \wedge y \leq 2$.

6.2 $0 \leq x \leq 2 \wedge y \geq 2x \wedge y \leq 2x$.

6.3 $y \geq 3x + 1 \wedge y \leq 3x + 1 \wedge x \geq 3$.

Pág. 172

$$3. \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 17 \\ 4x + 5y \leq 40 \end{cases}$$

Vértices

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (10, 0)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 17 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (5, 4)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(0, \frac{17}{3}\right)$$

x	y	$f(x, y) = x + 2y$
0	0	0
10	0	10
5	4	13
0	$\frac{17}{3}$	$\frac{34}{3}$

←

O máximo da função f é 13.

Pág. 173

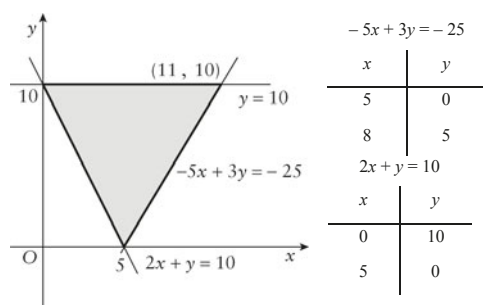
$$1. \begin{cases} 5x - 3y \leq 25 \\ 2x + y \geq 10 \\ y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3y \geq -25 \\ 2x + y \geq 10 \\ y \leq 10 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{cases} -5x + 3y = -25 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (11, 10)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 10)$$

Região admissível:



x	y	f(x, y) = x + y	
5	0	5	← Mínimo
11	10	21	← Máximo
0	10	10	

Mínimo: 5 ; Máximo: 21 .

2.

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 8 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y \geq -8 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

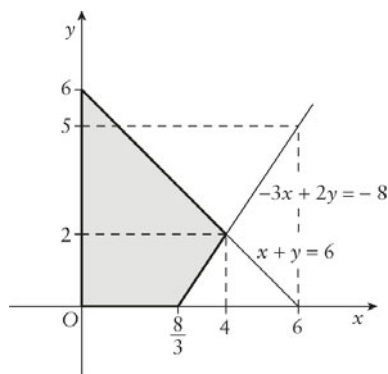
Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (4, 2)$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

$-3x + 2y = -8$		$x + y = 6$	
x	y	x	y
4	2	0	6
6	5	6	0

Região admissível



x	y	f(x, y) = x + y	
0	0	0	← Mínimo
$\frac{8}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	
4	2	6	} Máximo
0	6	6	

Mínimo: 0 ; Máximo: 6 .

3.

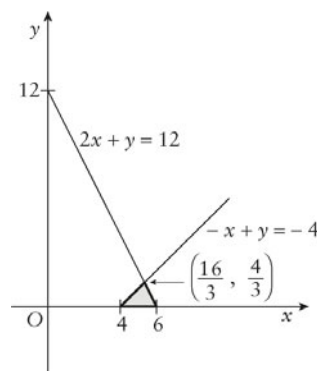
$$\begin{cases} 2x + y \leq 12 \\ x - y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 12 \\ -x + y \leq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ -x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$2x + y = 12$		$-x + y = -4$	
x	y	x	y
0	12	6	2
6	0	4	0

Região admissível:



x	y	$f(x, y) = 2x + y$	
4	0	8	← Mínimo
$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$	12	← Máximo
6	0	12	

Mínimo: 8; Máximo: 12

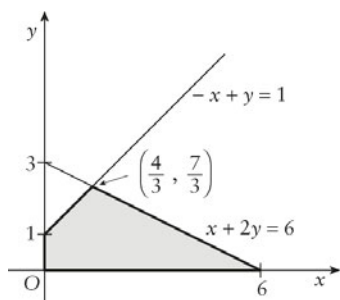
4.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \geq -1 \\ x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -x + y \leq 1 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Região admissível:



$-x + y = 1$	
x	y
0	1
3	4

$x + 2y = 6$	
x	y
0	3
6	0

4.1

x	y	$f(x, y) = 3x + 9y$	
0	0	0	← Mínimo
6	0	18	
$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	25	← Máximo
0	1	9	

Mínimo: 0; Máximo: 25.

4.2

x	y	$f(x, y) = 3x - y$	
0	0	0	
6	0	18	← Máximo
$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	
0	1	-1	← Mínimo

Mínimo: -1; Máximo: 18.

5.

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x + 2y \leq 12 \\ x - 2y \leq 6 \\ y \leq x \\ x \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x + 2y \leq 12 \\ -x + 2y \geq -6 \\ -x + y \leq 0 \\ x \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} x = 6 \\ -x + 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (6, 0)$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (6, 3)$$

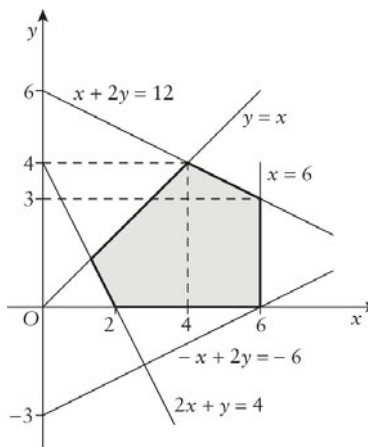
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (4, 4)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$2x + y = 4$		$x + 2y = 12$	
x	y	x	y
0	4	0	6
2	0	12	0

$-x + 2y = -6$		$-x + y = 0$	
x	y	x	y
0	-3	0	0
6	0	6	6

Região admissível:



x	y	$f(x, y) = x - y$	
2	0	2	
6	0	6	← Máximo
6	3	3	
4	4	0	← Mínimo
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	

Mínimo: 0; Máximo: 6.

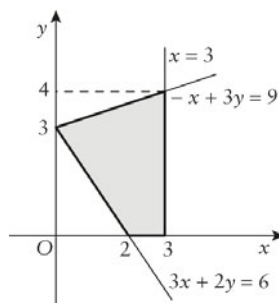
6.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{3}{2}x + 3 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \\ x - 3y + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y \geq -3x + 6 \\ x - 3y \geq -9 \\ y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ -x + 3y \leq 9 \\ y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$3x + 2y = 6$		$-x + 3y = 9$	
x	y	x	y
0	3	0	3
2	0	3	4

Região admissível:



x	y	$f(x, y) = x + y$	
2	0	2	← Mínimo
3	0	3	
3	4	7	← Máximo
0	4	4	

Mínimo: 2; Máximo: 7.

1.1

a) $A(10, 0)$, $B(6, 8)$

$$m = \frac{8-0}{6-10} = -2;$$

$$y = mx + b$$

$$0 = -2 \times 10 + b \Leftrightarrow b = 20$$

$$AB: y = -2x + 20.$$

b) $B(6, 8)$, $C(3, 11)$

$$m = \frac{11-8}{3-6} = -1;$$

$$y = mx + b$$

$$8 = -6 + b \Leftrightarrow b = 14$$

$$BC: y = -x + 14.$$

c) $C(3, 11)$, $D(0, 13)$

$$m = \frac{13-11}{0-3} = -\frac{2}{3}; b = 13;$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 13.$$

1.2

$$\begin{cases} y \leq -\frac{2}{3}x + 13 \\ y \leq -x + 14 \\ y \leq -2x + 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

x	y	$f(x, y) = 1500x + 100y$	
0	0	0	
10	0	15 000	
6	8	17 000	← Máximo
3	11	15 500	
0	13	13 000	

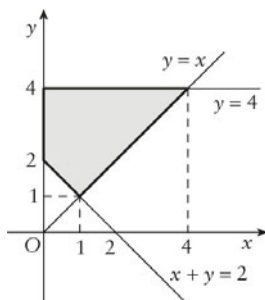
2.1

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 0 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 2 \\ -x + y \geq 0 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$x + y = 2$		$-x + y = 0$	
x	y	x	y
0	2	0	0
2	0	4	4

Região admissível:



2.2

x	y	$f(x, y) = x + y$	
1	1	2	← Mínimo
4	4	8	← Máximo
0	4	4	
0	2	2	← Mínimo

Mínimo: 2; Máximo 8.

2.3

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \geq 2 & (\text{Falso}) \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \leq 0 & (\text{Verdadeiro}) \\ \frac{4}{3} \leq 4 & (\text{Verdadeiro}) \\ \frac{1}{3} \geq 0 & (\text{Verdadeiro}) \end{cases}$$

O ponto não pertence à região admissível porque não satisfaz a condição $x + y \geq 2$.

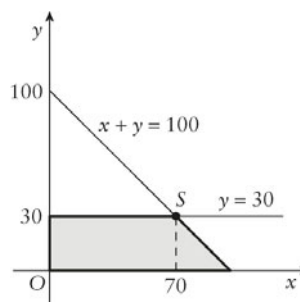
3. x : número de hectares de centeio
 y : número de hectares de tomate

Restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Função objetivo: $L(x, y) = 800x + 1000y$

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 800x + 1000y$	
0	0	0	
100	0	80 000	
70	30	86 000	← Máximo
0	30	30 000	

Resposta: (A).

Pág. 176

4. x = n.º de quilogramas do fertilizante A
 y = n.º de quilogramas do fertilizante B

	Fósforo	Potássio	Custo (€)
x	$0,5x$	$0,2x$	$3,5x$
y	$0,3y$	$0,3y$	$3,0y$
	$0,5x + 0,3y$	$0,2x + 0,3y$	$3,5x + 3,0y$

Função objetivo: $C(x, y) = 3,5x + 3,0y$

Restrições:

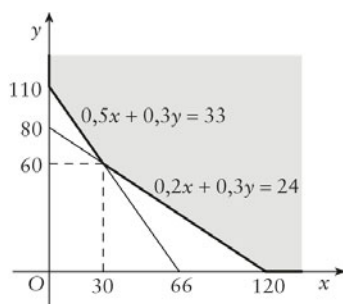
$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y \geq 33 \\ 0,2x + 0,3y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 33 \\ 0,2x + 0,3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (30, 60)$$

$0,5x + 0,3y = 33$		$0,2x + 0,3y = 24$	
x	y	x	y
0	110	0	80
66	0	120	0

Região admissível:



x	y	$C(x, y) = 3,5x + 3,0y$
120	0	420
30	60	285
0	60	330

← Mínimo

Deve comprar 30 kg de fertilizante A e 60 kg de fertilizante B .

Pág. 177

5. $x = \text{n.º de presentes do tipo } A$
 $y = \text{n.º de presentes do tipo } B$

	Frutos secos	Bombons	Lucro
x	$3x$	$6x$	$10x$
y	$5y$	$5y$	$12y$
	$3x + 5y$	$6x + 5y$	$10x + 12y$

Função objetivo: $L(x, y) = 10x + 12y$

Restrições:

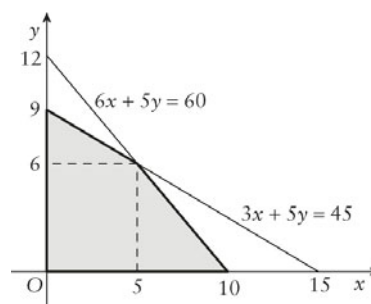
$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 45 \\ 6x + 5y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ 6x + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (5, 6)$$

$3x + 5y = 45$		$6x + 5y = 60$	
x	y	x	y
0	9	0	12
15	0	10	0

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 10x + 12y$
0	0	0
12	0	120
5	6	122
0	9	108

← Máximo

Devem ser preparados cinco presentes do tipo A e seis do tipo B .

Pág. 178

1. $x = \text{n.º de embalagens do tipo } A$
 $y = \text{n.º de embalagens do tipo } B$

	Mangas	Ananases	Preço
x	$3x$	x	$4,80x$
y	y	$5y$	$12y$
	$3x + y$	$x + 2y$	$4,8x + 6y$

Função objetivo: $R(x, y) = 4,8x + 6y$

Restrições:

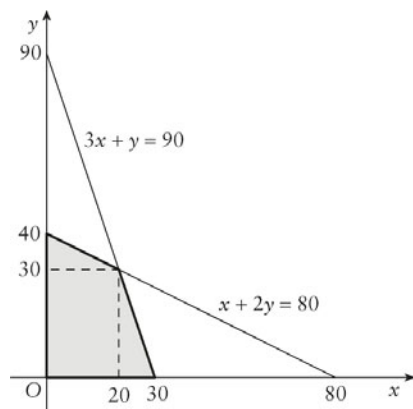
$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ x + 2y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 3x + y = 90 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (20, 30)$$

$3x + y = 90$		$x + 2y = 80$	
x	y	x	y
0	90	0	40
30	0	80	0

Região admissível:



x	y	$R(x, y) = 4,8x + 6y$
0	0	0
30	0	144
20	30	276
0	40	240

← Máximo

Devem ser feitas 20 embalagens do tipo A e 30 do tipo B.

2. $x = \text{n.º de toneladas de } PP_{\text{Premium}}$
 $y = \text{n.º de toneladas de } PR_{\text{Regular}}$

Função objetivo: $L(x, y) = 1600x + 1200y$

	Gás (m^3)	Tempo (h)
x	$3x$	$5x$
y	$2y$	$5y$
	$3x + 2y$	$5x + 5y$

Restrições:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ 5x + 5y \leq 45 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

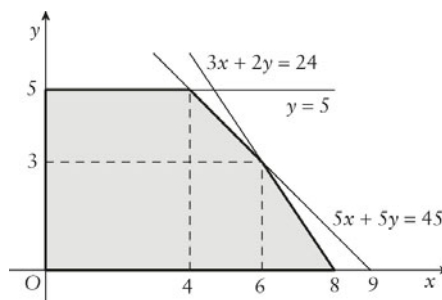
Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ 5x + 5y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (6, 3)$$

$$\begin{cases} 5x + 5y = 45 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (4, 5)$$

$5x + 5y = 45$		$3x + 2y = 24$	
x	y	x	y
0	9	0	12
9	0	8	0

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 1600x + 1200y$
0	0	0
8	0	12 800
6	3	13 200
4	5	12 400
0	5	6000

← Máximo

A uma produção semanal de 6 toneladas de PP_{Premium} e 3 toneladas de PR_{Regular} corresponde o lucro máximo de 13 200 euros.

Pág. 179

3. $x = \text{n.º de fatos do modelo A}$
 $y = \text{n.º de fatos do modelo B}$

Função objetivo: $L(x, y) = 30x + 50y$

	Fabrico	Acabamento
x	$3x$	x
y	$2y$	$2y$

Restrições:

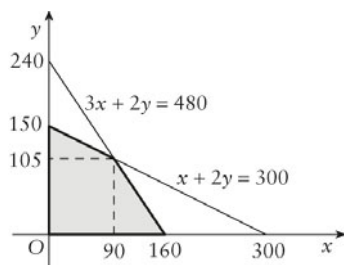
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 480 \\ x + 2y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 480 \\ x + 2y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (90, 105)$$

$3x + 2y = 480$		$x + 2y = 300$	
x	y	x	y
0	240	0	150
160	0	300	0

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 30x + 50y$
0	0	0
160	0	4800
90	105	7950
0	150	7500

← Máximo

Deve produzir 90 fatos do tipo A e 105 fatos do tipo B.

4. x = número de carruagens com blocos de granito
 y = número de carruagens com madeira

Função objetivo: $L(x, y) = 2500x + 1500y$

Restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \geq 9 \\ y \geq \frac{x}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \geq 9 \\ -x + 3y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

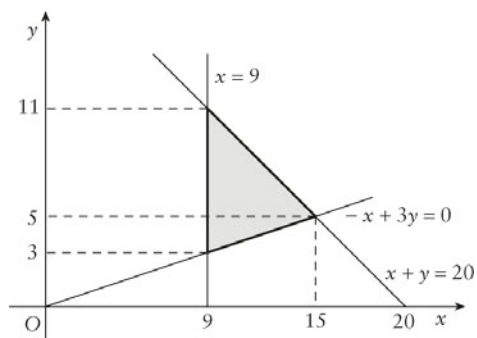
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (15, 5)$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (9, 11)$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (9, 3)$$

$x + y = 20$		$-x + 3y = 0$	
x	y	x	y
0	20	0	0
20	0	15	5

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 2500x + 1500y$
9	3	27 000
15	5	45 000
9	11	39 000

← Máximo

15 carruagens devem transportar granito e cinco devem transportar madeira.

Pág. 180

5. x = n.º de unidades de P_1
 y = n.º de unidades de P_2

	Vitaminas	Minerais	Calorias
x	$2x$	x	$5x$
y	y	$2y$	$6y$
	$2x + y$	$x + 2y$	$5x + 6y$

Função objetivo: $C(x, y) = 0,4x + 0,6y$

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 420 \\ x + 2y \geq 500 \\ 5x + 6y \geq 2100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

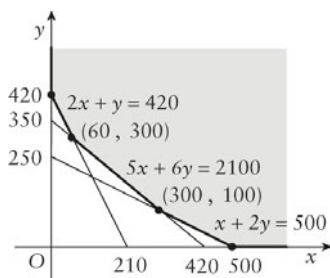
Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 2x + y = 420 \\ 5x + 6y = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (60, 300)$$

$$\begin{cases} 5x + 6y = 2100 \\ x + 2y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (300, 100)$$

$2x + y = 420$		$x + 2y = 500$		$5x + 6y = 2100$	
x	y	x	y	x	y
0	420	0	250	0	350
210	0	500	0	420	0

Região admissível:



x	y	$C(x, y) = 0,4x + 0,6y$
0	420	252
60	300	204
300	100	180
500	0	200

← Mínimo

Deve comprar 300 unidades de P_1 e 100 unidades de P_2 .

6. Seja:

x = número de quilos de farinha do tipo A

y = número de quilos de farinha do tipo B
produzidos diariamente

	Milho	Trigo	Centeio
x	$0,3x$	$0,65x$	$0,05x$
y	$0,2y$	$0,7y$	$0,1y$

Função objetivo: $L(x, y) = 0,5x + 0,7y$

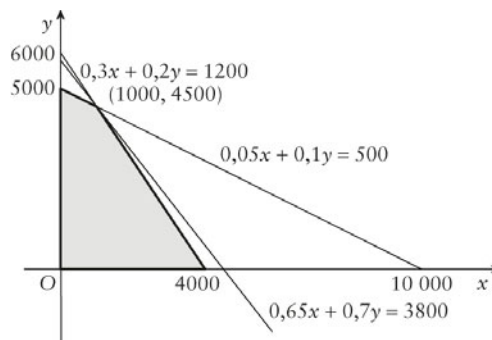
Restrições:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2y \leq 1200 \\ 0,65x + 0,7y \leq 3800 \\ 0,05x + 0,1y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$0,3x + 0,2y = 1200$		$0,65x + 0,7y = 3800$		$0,05x + 0,1y = 500$	
x	y	x	y	x	y
0	6000	1000	4500	0	5000
4000	0	5200	600	10 000	0

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 0,5x + 0,7y$
0	0	0
4000	0	2000
1000	4500	3650
0	5000	3500

← Máximo

Devem ser produzidos 1000 kg do tipo A e 4500 kg do tipo B.

7. Seja:

x = número de embalagens de “Doce da avó”

y = número de embalagens de “Geleia real”

	Pêssego	Maçã
x	$0,5x$	$0,5x$
y	$0,3y$	$0,5y$

Função objetivo: $L(x, y) = 4x + 5y$

Restrições:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y \leq 8 \\ 0,5x + 0,5y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8 \\ 0,5x + 0,5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (10, 10)$$

$$\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 10 \\ y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (8, 12)$$

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(12, \frac{20}{3}\right)$$

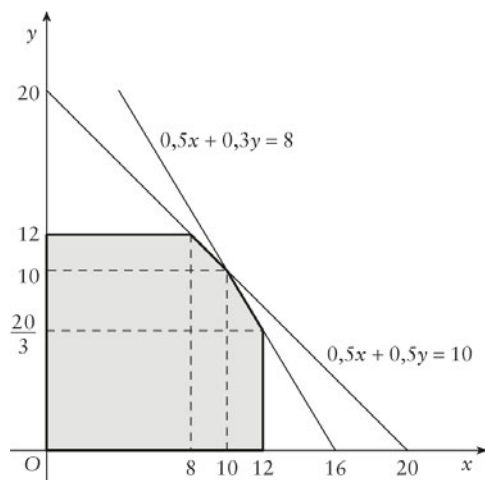
$$0,5x + 0,3y = 8$$

x	y
4	20
16	0

$$0,5x + 0,5y = 10$$

x	y
0	20
20	0

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 4x + 5y$
0	0	0
12	0	48
12	$\frac{20}{3}$	≈ 81
10	10	90
8	12	92
0	12	60

← Máximo

Devem ser produzidos oito embalagens de doce da avó e doze de geleia real.

8. Seja:

x = capital a investir em A

y = capital a investir em B

Função objetivo: $L(x, y) = 0,06x + 0,1y$

Restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 45\,000 \\ x \leq \frac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 45\,000 \\ -x + 3y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} x + y = 45\,000 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (33\,750, 11\,250)$$

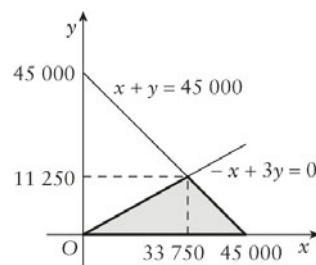
$$x + y = 45\,000$$

x	y
0	45 000
45 000	0

$$-x + 3y = 0$$

x	y
0	0
45 000	15 000

Região admissível:



x	y	$L(x, y) = 0,06x + 0,1y$
0	0	0
33 750	11 250	3150
45 000	0	2700

← Máximo

Deve investir 33 750 euros na modalidade A e 11 250 euros na modalidade B para obter um lucro anual de 3150 euros.

Pág. 181

9. Seja:

x : n.º, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA

y : n.º, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR

Função objetivo: $L(x, y) = x + y$

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 120 \\ 4x + 3y \leq 210 \\ 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$2x + y = 100$$

x	y
0	100
50	0

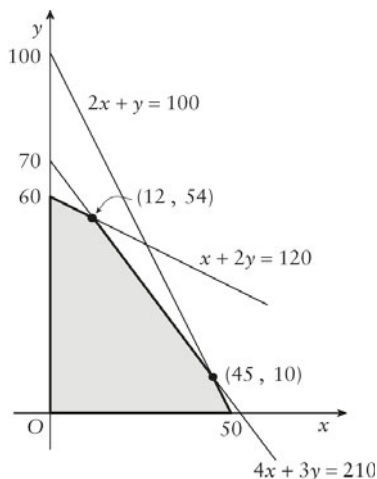
$$x + 2y = 120$$

x	y
0	60
120	0

$$4x + 3y = 210$$

x	y
0	70
30	30

Região admissível



x	y	$L(x, y) = x + y$
0	0	0
50	0	50
45	10	55
12	54	66
0	60	60

← Máximo

A solução do problema corresponde a ocupar, por noite, 120 quartos no hotel *VISTASERRA* e 540 quartos no hotel *VISTAMAR*.

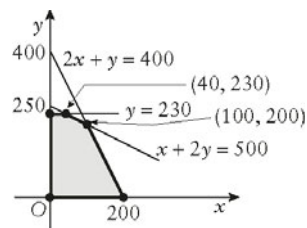
	Laranjas	Maçãs	Peras
x	x	$2x$	x
y	$2y$	y	y

Restrições:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ 0 \leq y \leq 230 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Resposta: (B).

3.2



x	y	$L(x, y) = 2,5x + 3y$
0	0	0
200	0	500
100	200	850
40	230	790
0	230	690

← Máximo

Resposta: (C).

Pág. 183

Pág. 182

- $f(2, 0) = 3 \times 2 + 0 = 6$
 $f(3, 0) = 3 \times 3 + 0 = 9$
 $f(2, 2) = 3 \times 2 + 2 = 8$
 $f(0, 1) = 3 \times 0 + 1 = 1$

O máximo de f é 9.

Resposta: (D).

- São três soluções correspondentes aos pontos (0, 2), (1, 1) e (2, 0).

Resposta: (C).

- Designando por x o número de cesto do tipo A e por y o número de cestos do tipo B temos:

- Seja:

x : número de unidades de 6 kg de M_1

y : número de unidades de 6 kg de M_2

	A	B	C
x	$3x$	$2x$	x
y	$4y$	y	y

Função objetivo: $R(x, y) = 120x + 100y$

Restrições:

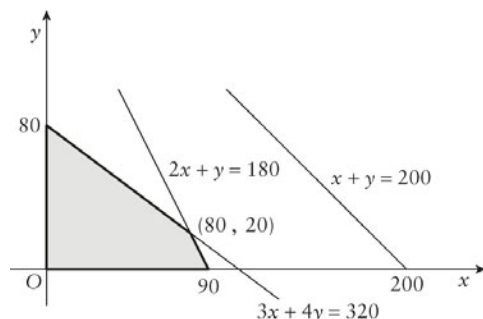
$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 320 \\ 2x + y \leq 180 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 320 \\ 2x + y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (80, 20)$$

$3x + 4y = 320$		$2x + y = 180$	
x	y	x	y
0	80	0	180
80	20	90	0

Região admissível:



x	y	$R(x, y) = 120x + 100y$	
0	0	0	
90	0	10 800	
80	20	11 600	← Máximo
0	80	8000	

Deve fazer 480 kg de mistura 1 e 120 kg de mistura 2.

2. Sejam:

x : n.º de questões de 5 pontos a que a Joana responde

y : n.º de questões de 10 pontos a que a Joana responde

Função objetivo: $C(x, y) = 5x + 10y$

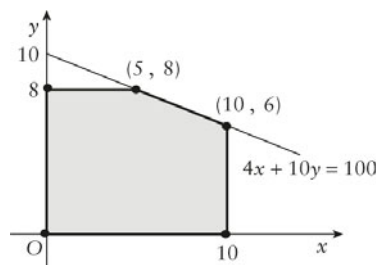
Restrições:

$$\begin{cases} 4x + 10y \leq 100 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$4x + 10y = 100$	
x	y
0	10
25	0

Região admissível:



x	y	$C(x, y) = 5x + 10y$	
0	0	0	
10	0	50	
10	6	110	← Máximo
5	8	105	
0	8	80	

A Joana deve responder a 10 questões de 5 pontos e a 6 questões de 10 pontos.

3. Seja:

x : quantidade de ração *Far X*, produzida diariamente, em toneladas

y : quantidade de ração *Far Y*, produzida diariamente, em toneladas

Função objetivo: $L = x + y$

	Vitaminas	Sabores	Conservantes
x	$2x$	x	x
y	y	$2y$	$3y$

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 11 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3.1 $x = 4 \wedge y = 3$

$2 \times 4 + 3 < 16$ (verdade)

$4 + 2 \times 3 < 11$ (verdade)

$4 + 3 \times 3 < 15$ (verdade)

É possível num só dia, fabricar 4 toneladas de *Far X* e 3 toneladas de *Far Y*.

3.2 Já se apresentaram as restrições do problema e a função objetivo.

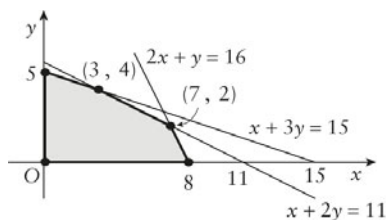
Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (7, 2)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, 4)$$

$x + 3y = 15$		$2x + y = 16$		$x + 2y = 11$	
x	y	x	y	x	y
0	5	0	16	1	5
15	0	8	0	11	0

Região admissível:



x	y	$L = x + y$
0	0	0
8	0	8
7	2	9
3	4	7
0	5	5

← Máximo

A quantidade total de ração produzida diariamente será máxima se forem produzidas diariamente 7 toneladas de Far X e 2 toneladas de Far Y.

Pág. 186

1.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha + \theta = 2(\alpha + \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \alpha + \theta = 2 \times \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \theta = \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta + \cos \theta =$$

$$= \cos \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \cos (\pi - \alpha) =$$

$$= \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha = -\sin \alpha$$

Resposta: (D).

2. Ponto A (x, 0, 0)

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; A(2, 0, 0)$$

Ponto C (0, y, 0)

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; C(0, 2, 0)$$

Ponto D (0, 0, z)

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; D(0, 0, 4)$$

$$\text{Volume} = \overline{OA} \times \overline{OC} \times \overline{OD} = 2 \times 2 \times 4 = 16$$

Resposta: (A).

Pág. 187

3. $\alpha: x - 2y + z = 1$

$$r: (x, y, z) = (n, -1, m) + k(1, 1, n), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de r: $R(m+k, -1+k, m+kn)$

O ponto de interseção de r com α satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} m + k = 2 \\ -1 + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + k = 2 \\ (m + k) - 2(-1 + k) + (m + kn) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ 2 - 2 \times 0 + 1 + n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ n = -2 \end{cases}$$

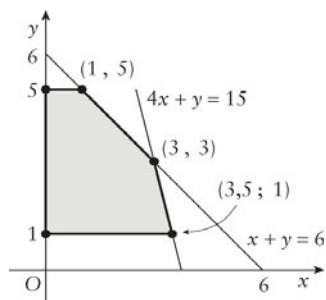
Resposta: (C).

4. Cálculos auxiliares:

$$\begin{cases} 4x + y = 15 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, 5; 1)$$

$$\begin{cases} 4x + y = 15 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, 3)$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 5)$$



$$L(x, y) = 6x + y$$

$$L(0, 1) = 6 \times 0 + 1 = 1$$

$$L(3,5; 1) = 6 \times 3,5 + 1 = 22 \leftarrow \text{Valor máximo}$$

$$L(3, 3) = 6 \times 3 + 3 = 21$$

$$L(1, 5) = 6 \times 1 + 5 = 11$$

$$L(0, 5) = 6 \times 0 + 5 = 5$$

Resposta: (D).

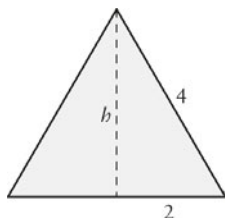
$$5. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{AB, AC}) = 8$$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, temos

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \cos 60^\circ = 8.$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \frac{1}{2} = 8 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 16.$$

Logo, $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$.



Seja h a altura do triângulo:

$$h^2 + 2^2 = 4^2$$

$$h^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{12} \Leftrightarrow h = \sqrt{4 \times 3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Resposta: (B).

Pág. 188

$$1. \quad f(x) = 200 \sin x \cos x.$$

1.1 Seja M o ponto de interseção das diagonais do losango.

Então:

$$\frac{\overline{EA}}{10} = \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{EA} = 10 \cos \alpha$$

$$\overline{EC} = 2\overline{EA} = 20 \cos \alpha$$

$$\frac{\overline{OA}}{10} = \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{OE} = 10 \sin \alpha$$

$$\overline{OB} = 2\overline{OE} = 20 \sin \alpha$$

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{CA}}{2} = \frac{20 \sin \alpha \times 20 \cos \alpha}{2} = 200 \sin \alpha \cos \alpha = f(\alpha).$$

$$1.2 \quad [OABC] \text{ é um quadrado } \Rightarrow \overline{OB} = \overline{CA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \sin \alpha = 20 \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ temos que } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$1.3 \quad f(\theta) = 100 \Leftrightarrow 200 \sin \theta \cos \theta = 100$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2.$$

$$1.4 \quad \text{Coordenadas do ponto } A: (10 \cos \alpha, 10 \sin \alpha).$$

$$\text{Se } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ temos } A(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}).$$

A reta pedida passa em A e é perpendicular a AO .

$$\text{Declive de } OA = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{Declive da reta pedida: } -\frac{1}{1} = -1$$

$$y = mx + b$$

$$5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 10\sqrt{2}$$

$$y = -x + 10\sqrt{2} \text{ é uma equação da reta.}$$

Pág. 189

$$2. \quad A(-1, -1, -2), B(1, 1, -2), C(-2, 4, -2)$$

$$\overline{BF} = 6.$$

$$2.1 \quad \text{Se o ponto } B \text{ tem coordenadas } (1, 1, -2) \text{ e } \overline{BF} = 6 \text{ o ponto}$$

$$F \text{ tem coordenadas } (1, 1, -2 + 6) = (1, 1, 4).$$

$$\text{Portanto } F(1, 1, 4) \text{ e de igual modo } G(-2, 4, 4) \text{ e}$$

$$E(-1, -1, 4).$$

Reta CF :

$$\overline{CF} = F - C = (1, 1, 4) - (-2, 4, -2) = (3, -3, 6).$$

$$CF: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{6}$$

$$L(-8, 10, -14) \in CF?$$

$$\frac{-8-1}{3} = \frac{10-1}{-3} = \frac{-14-4}{6} \Leftrightarrow -3 = -3 = -3 \text{ (verdade)}$$

O ponto L pertence à reta CF .

$$2.2 \quad \overline{AF} = F - A = (1, 1, 4) - (-1, -1, -2) = (2, 2, 6)$$

$$\overline{AC} = C - A = (-2, 4, -2) - (-1, -1, -2) = (-1, 5, 0)$$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano AFC

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 5, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 6c = 0 \\ -a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b + 2b + 6c = 0 \\ a = 5b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6c = -12b \\ a = 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = 5b \end{cases} \\ \vec{n} &= (5b, b, -2b) \end{aligned}$$

Para $b = 1$, temos $\vec{n} = (5, 1, -2)$.

$$\begin{aligned} AFC: 5(x-1) + 1(y-1) - 2(z-4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x - 5 + y - 1 - 2z + 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x + y - 2z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

2.3 $AFC: 5x + y - 2z + 2 = 0; \quad yOz: x = 0.$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z - 2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-1}{\frac{1}{2}} \\ x = 0 \end{cases} \\ (x, y, z) &= (0, 0, 1) + k(0, 2, 1), k \in \mathbb{R}, \text{ por exemplo.} \end{aligned}$$

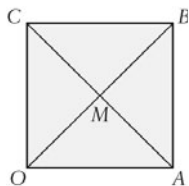
2.4 $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 0 \Leftrightarrow \vec{SA} \perp \vec{SB}$

Trata-se da superfície de diâmetro $[AB]$.

3.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

$\vec{r} = (0, 1, 1)$ é um vetor diretor de r



Como C e A são pontos de r , o ponto M , ponto médio de $[CA]$, também pertence a r sendo $M(1, m, m)$ (pertence à reta $x = 1 \wedge y = z$) e $\vec{OM} \cdot \vec{r} = 0$ ($\vec{OM}$ é perpendicular a CA).

$$\vec{OM} = (1, m, m); \quad \vec{r} = (0, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{r} &= 0 \Leftrightarrow (1, m, m) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 + m + m &= 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{OM} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{OB} = 2\vec{OM} = (2, 0, 0). \text{ Logo } B(2, 0, 0).$$

$\vec{MA}$ e $\vec{MC}$ são os vetores colineares com $\vec{r}$ tais que:

$$\|\vec{MA}\| = \|\vec{MC}\| = \|\vec{OM}\| = 1$$

Dado que

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2}, \quad \vec{MA} = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \vec{MC} = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou vice-versa, temos:

$$A = M + \vec{MA} = (1, 0, 0) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$C = M + \vec{MC} = (1, 0, 0) + \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

As coordenadas dos pontos A , B e C são

$$\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (2, 0, 0) \text{ e } \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Seja:

x : n.º de quilogramas do produto A

y : n.º de quilogramas do produto B

	Proteínas	Gordura	Hidratos de carbono
x	80x	100x	20x
y	20y	100y	70y

Função objetivo: $C(x, y) = 2,10x + 3y$

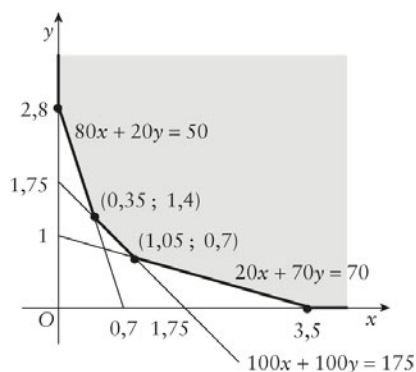
Restrições:

$$\begin{cases} 80x + 20y \geq 56 & 7 \times 8 = 56 \\ 100x + 100y \geq 175 & 7 \times 25 = 175 \\ 20x + 70y \geq 70 & 7 \times 10 = 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$80x + 20y = 56$		$100x + 100y = 175$	
x	y	x	y
0	2,8	0	2,8
0,7	0	0,7	0
$20x + 70y = 70$			
x	y		
0	1		
3,5	0		

Região admissível:



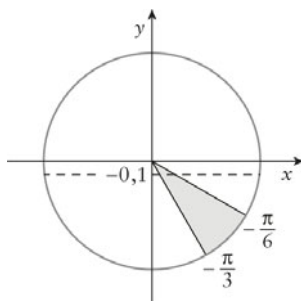
x	y	$C(x, y) = 2,10x + 3y$
0	2,8	8,4
0,35	1,4	4,94
1,05	0,7	4,31
3,5	0	7,35

← Mínimo

Deve comprar 1,05 kg do produto A e 0,7 kg do produto B.

Pág. 190

1.



$$\sin x + 0,1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -0,1$$

A equação $\sin x + 0,1 = 0$ é impossível no intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} \right].$$

Resposta: (B).

2.

$$r: \frac{x-1}{2} = y = -z-1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

$$s: (x, y, z) = (1, 0, -5) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r} = (2, 1, -1); \quad \vec{s} = (2, 1, 1)$$

As retas r e s não são paralelas nem perpendiculares.

$(1, 0, -1)$ é um ponto de r .

$$(1, 0, -1) = (1, 0, -5) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + k \\ 0 = k \\ -1 = -5 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \\ k = 4 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, o ponto de coordenadas

$(1, 0, -1)$ não pertence à reta s .

$$\frac{5-1}{2} = \frac{2}{1} = \frac{-3+1}{-1} \Leftrightarrow 2 = 2 = 2 \text{ (verdade)}$$

$$(5, 2, -3) = (1, 0, -5) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 1 + 2k \\ 2 = k \\ -3 = -5 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

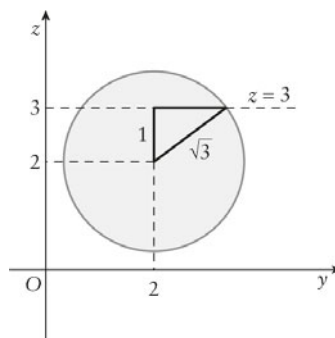
O ponto de coordenadas $(5, 2, -3)$ é o ponto de interseção das retas r e s .

Resposta: (C).

3. $S: (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3$

$$\alpha: z = 3$$

Projeção da superfície esférica S sobre o plano yOz .



$$r^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$$

A interseção da superfície esférica S com o plano α é uma

circunferência de raio igual a $\sqrt{2}$.

Resposta: (C).

Pág. 191

4.

		A	B	C	D
x	y	$3x + 5y$	$x + 3y$	$3x + 2y$	$5x + y$
0	0	0	0	0	0
7	0	21	7	21	35
5	4	35	17	23	29
3	6	39	21	21	21

Resposta: (B)

$$\begin{aligned} 5. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AG} &= \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG}) = \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CG} = \\ &= \|\overline{AB}\|^2 + 0 + 0 = a^2 \end{aligned}$$

Resposta: (A).

Pág. 192

1. $B(4, 4, 0)$

1.1 $V(2, 2, h)$ sendo h a altura da pirâmide

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \text{Área da base} \times \text{altura}$$

$$32 = \frac{1}{3} \times 4^2 \times h \Leftrightarrow 96 = 16h \Leftrightarrow h = 6$$

$$V(2, 2, 6).$$

1.2 $A(4, 0, 0); B(4, 4, 0); V(2, 2, 6)$

a) $\overline{AB} = (0, 4, 0); \overline{AV} = (-2, 2, 6)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c) \perp ABV$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 4, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 2, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 0 \\ -2a + 2b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 3c \end{cases}$$

$$\vec{n} = (3c, 0, c)$$

Para $c = 1$, temos $\vec{n} = (3, 0, 1)$.

$$ABV: 3(x-4) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 + z = 0 \Leftrightarrow 3x + z = 12$$

Logo, ABV é o plano α .

b) $r: \frac{x-6}{3} = -\frac{y}{3} = z-4 \Leftrightarrow \frac{x-6}{3} = -\frac{y}{3} = \frac{z-4}{1}$

$$r: (x, y, z) = (6, 0, 4) + k(3, -3, 1), k \in \mathbb{R}$$

$R = (6 + 3k, -3k, 4 + k), k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta r .

Interseção da reta r com o plano $\alpha: 3x + z = 12$.

$$3(6 + 3k) + (4 + k) = 12 \Leftrightarrow 18 + 9k + 4 + k = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10k = -10 \Leftrightarrow k = -1$$

Substituindo k por -1 em R , vem:

$$(6 - 3, 3, 4 - 1) = (3, 3, 3).$$

O ponto I de interseção da reta r com o plano α tem coordenadas $(3, 3, 3)$.

Como $B(4, 4, 0)$ e $V(2, 2, 6)$, $I(3, 3, 3)$ é o ponto médio de $[BV]$.

c) $\alpha: 3x + z = 13$

$$C(0, 4, 0)$$

$\vec{s} = (3, 0, 1)$ é um vetor perpendicular a α pelo que é um vetor diretor de s .

$$s: \frac{x}{3} = \frac{z}{1} \wedge y = 4 \Leftrightarrow x = 3z \wedge y = 4.$$

d) $\vec{r} = (3, -3, 1); \vec{s} = (3, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{r, s}) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(3, -3, 1) \cdot (3, 0, 1)|}{\sqrt{9+9+1} \times \sqrt{9+0+1}} = \\ &= \frac{|9+0+1|}{\sqrt{19} \times \sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{190}} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } (\hat{r, s}) \approx 43,5^\circ.$$

e) $Q(0, 0, z), B(4, 4, 0), V(2, 2, 6)$

$$\overline{VQ} = Q - V = (0, 0, z) - (2, 2, 6) = (-2, -2, z-6)$$

$$\overline{VB} = B - V = (4, 4, 0) - (2, 2, 6) = (2, 2, -6)$$

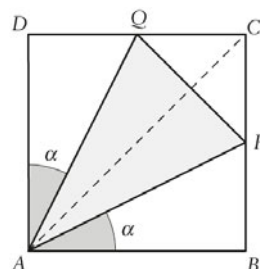
$$\overline{VQ} \cdot \overline{VB} = 0 \Leftrightarrow (-2, -2, z-6) \cdot (2, 2, -6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 - 4 - 6z + 36 = 0 \Leftrightarrow 6z = 28 \Leftrightarrow z = \frac{14}{3}$$

$$Q\left(0, 0, \frac{14}{3}\right).$$

Pág. 193

2.1 Se $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$ vem:



$$\frac{PB}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{1}{2} \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

Logo, P é o ponto médio de $[BC]$ pelo que Q é o ponto médio de $[DC]$ e, portanto:

$$\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{AD} \text{ e } \overline{DQ} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

Então:

$$\begin{aligned}\overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= (\overline{AB} + \overline{BP}) \cdot (\overline{AD} + \overline{DQ}) = \\ &= \left(\overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AD} \right) \cdot \left(\overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{AB} \right) = \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \overline{AD} \right) \cdot \overline{AD} + \left(\frac{1}{2} \overline{AD} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AD} + \frac{1}{4} \overline{AD} \cdot \overline{AB} = \\ &= \frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 + \frac{1}{2} \|\overline{AD}\|^2 + \frac{1}{4} \times 0 = \\ &= \frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 + \frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 = \quad (\|\overline{AD}\| = \|\overline{AB}\|) \\ &= \|\overline{AB}\|^2.\end{aligned}$$

2.2 $\overline{AB} = 2$.

a) $\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{2} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \overline{PB} = 2 \operatorname{tg} \alpha$

$\overline{PC} = 2 - \overline{PB} = 2 - 2 \operatorname{tg} \alpha = \overline{QC}$

$$\begin{aligned}A_{[APQ]} &= A_{[ABCD]} - 2A_{[ABP]} - A_{[PCQ]} \\ &= 2^2 - 2 \frac{\overline{AB} \times \overline{BP}}{2} - \frac{\overline{PC} \times \overline{QC}}{2} = \\ &= 4 - 2 \times 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{(2 - 2 \operatorname{tg} \alpha)(2 - 2 \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \\ &= 4 - 4 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2(1 - \operatorname{tg} \alpha) \times 2(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \\ &= 4 - 4 \operatorname{tg} \alpha - 2(1 - 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ &= 4 - 4 \operatorname{tg} \alpha - 2 + 4 \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \\ f(\alpha) &= 2 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.\end{aligned}$$

b) $f(\alpha) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4}{3} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{2}{3} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\Leftrightarrow$

$\alpha \in 1.^{\circ} Q \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$

3. Seja:

$x = \text{n.}^\circ \text{ de litros de bebida } X \text{ fabricados}$

$y = \text{n.}^\circ \text{ de litros de bebida } Y \text{ fabricados}$

	Laranja	Manga
x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$
y	$\frac{2}{3}y$	$\frac{1}{3}y$

Restrições:

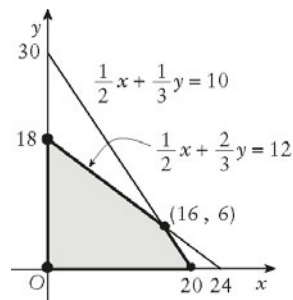
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 12 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y \leq 72 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 12 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (16, 6)$$

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 12$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 10$												
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>18</td></tr><tr><td>24</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	18	24	0	<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>30</td></tr><tr><td>20</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	30	20	0
x	y												
0	18												
24	0												
x	y												
0	30												
20	0												

Região admissível



Função objetivo: $f(x, y) = 4x + 5y$

x	y	$f(x, y) = 4x + 5y$
0	0	0
20	0	80
16	6	94
0	18	90

← Máximo

Deve confeccionar 16 litros de bebida X e 6 litros de bebida Y .