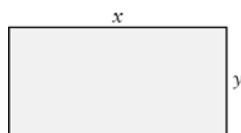


Pág. 12

1. $2x + 2y = 2000$
 $x + y = 1000$
 $y = 1000 - x$
 $A = xy$
 $A(x) = x(1000 - x)$



O gráfico de A é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

O máximo de A corresponde à ordenada do vértice da parábola cuja abscissa é a média dos zeros.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1000$$

A área é máxima para $x = 500$.

$$A(500) = 500 \times 500 = 250\,000$$

Resposta: (A).

- 2.1 Sejam x e y as dimensões do mural

$$2x + 2y = 26$$

$$x + y = 13$$

$$y = 13 - x$$

As dimensões do mural são, em metros, dadas por x e $13 - x$.

As dimensões da tapeçaria são $x - 2 \times 0,5$ e $13 - x - 2$, ou seja, $x - 1$ e $11 - x$.

Como $x - 1 > 0 \wedge 11 - x > 0$ temos $x > 1$ e $x < 11$.

- 2.2 $A(x) = (x - 1) \times (11 - x) = 11x - x^2 - 11 + x$
 $= -x^2 + 12x - 11$.

- 2.3 Zeros da expressão que define A : $x = 1 \vee x = 11$.

Abcissa do vértice da parábola que contém o gráfico A :

$$x_0 = \frac{1+11}{2} = 6.$$

A área da tapeçaria é máxima para $x = 6$.

3. $P(x, -2x)$
 $P'(-x, 2x)$

Seja $x > 0$.

Os vértices do retângulo são:

$P(x, -2x)$, $Q(x, 2x)$, $P'(-x, 2x)$ e

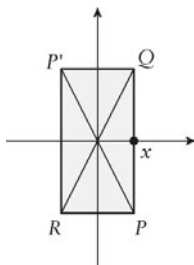
$R(-x, -2x)$.

As dimensões do retângulo são:

$$\overline{PQ} = |2x + 2x| = |4x| = 4x$$

$$\overline{P'Q} = |x + x| = |2x| = 2x$$

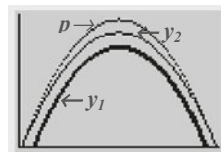
$$A(x) = 4x \times 2x = 8x^2.$$



Pág. 13

4. $P(x) = -0,05x^2 + 100x - 2000$

4.1



A opção B é melhor. Com esta opção o lucro é sempre superior ao da opção A.

- 4.2 O gráfico de y_1 é obtido do gráfico de p por uma translação associada ao vetor $(0, -10\,000)$.

$y_2 = 0,9p(x)$. O gráfico y_2 é obtido do gráfico p por uma compressão vertical segundo o fator $0,9$.

- 4.3 $p(x) = -0,05x^2 + 100x - 2000$

$$= -0,05(x^2 - 2000x) - 2000$$

$$= -0,05(x^2 - 2000x + 1000^2) + 50\,000 - 2000$$

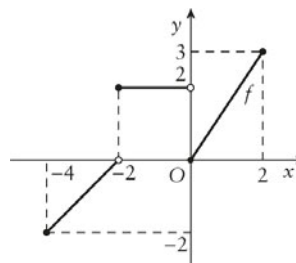
$$p(x) = -0,05(x - 1000)^2 + 48\,000$$

$$V(1000, 48\,000)$$

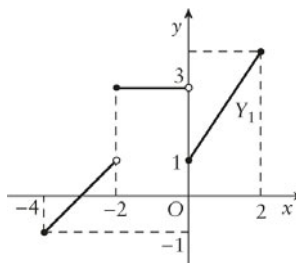
O lucro é máximo para $x = 1000$.

- 5.1 $D_f = [-4, 2]$; $D'_f = [-2, 3]$.

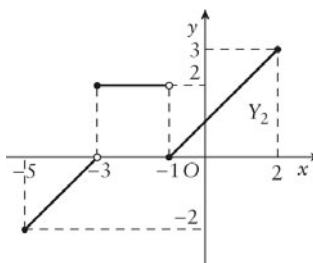
5.2



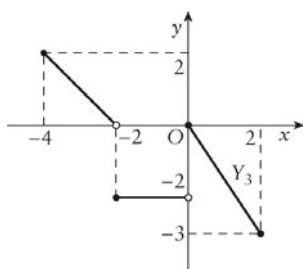
a)



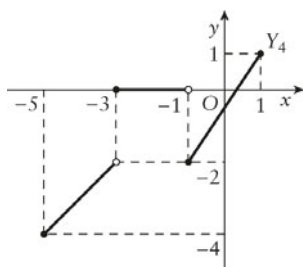
b)



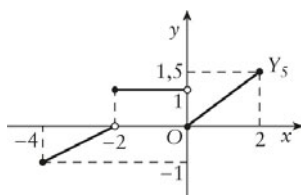
c)



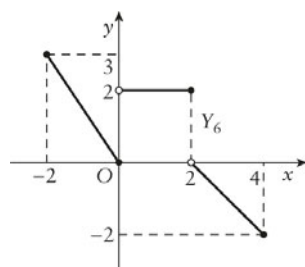
d)



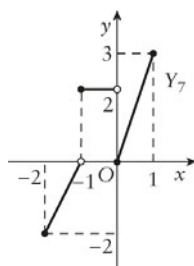
e)



f)



g)



Pág. 14

1.1 $V = 1000 \text{ dm}^3$

$$x^2 \times y = 1000 \Leftrightarrow y = \frac{1000}{x^2}$$

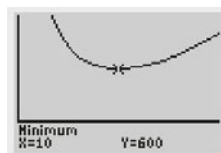
$$\text{Área total} = 2x^2 + 4xy$$

$$Q(x) = 2x^2 + 4x \frac{1000}{x^2}$$

$$Q(x) = 2x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$Q(x) = \frac{2x^3 + 4000}{x}$$

1.2 $y_1 = Q(x)$



$$x = 10 \Rightarrow y = \frac{1000}{10^2} = 10$$

A caixa deverá ser um cubo de aresta 10 dm.

Pág. 15

1. São funções racionais as definidas por:

1.1 $f(x) = x^2 - 3$.

1.2 $g(x) = \frac{-x+3}{2}$.

1.3 $i(x) = \frac{\pi x + 3}{5x + 1}$.

Pág. 16

2.1 $f(x) = \frac{1}{3x+3}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

2.2 $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

2.3 $h(x) = \frac{3x}{x^2 - x^3}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

2.4 $i(x) = \frac{2}{3x^2 - 6x + 9}$

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 6x + 9 \neq 0\} = \mathbb{R}.$$

Cálculos auxiliares:

$$3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}.$$

A equação é impossível.

2.5 $j(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 - 5x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 5\}$.

Cálculos auxiliares:

$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 5$.

Pág. 19

3.1 $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

A reta de equação $x = -5$ é uma assíntota do gráfico de f .

3.2 $g(x) = \frac{1}{3-x^2}$

$3-x^2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

As retas de equações $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ são assíntotas do gráfico de g .

3.3 $h(x) = \frac{9-x}{x^2-81}$

$9-x=0 \Leftrightarrow x=9$; $x^2-81=0 \Leftrightarrow x=-9 \vee x=9$

A reta de equação $x = -9$ é uma assíntota do gráfico de h .

3.4 $i(x) = \frac{x-3}{x-3} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

O gráfico de i não tem assíntotas verticais.

3.5 $j(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$

$x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

O gráfico de j não tem assíntotas verticais.

Pág. 21

4.1 $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Numerador: $A(x) = 2$

Denominador: $B(x) = x-1$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Assíntota vertical: reta de equação $x = 1$

Grau de $B(x) >$ grau de $A(x)$

Assíntota horizontal: reta de equação $y = 0$.

4.2 $g(x) = \frac{2x}{7-x}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = -x+7$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow -x+7=0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x=7$

Assíntota vertical: reta de equação $x = 7$

Grau de $B(x) =$ grau de $A(x)$

Assíntota horizontal: reta de equação $y = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow y = -2$.

4.3 $h(x) = \frac{3x}{x^2-x-6}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = x^2-x-6$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \wedge 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

Assíntotas verticais: retas de equações $x = -2$ e $x = 3$

Grau de $B(x) >$ grau de $A(x)$

Assíntota horizontal: reta de equação $y = 0$.

4.4 $i(x) = \frac{-x^2}{x^2-3x+4}$

Numerador: $A(x) = -x^2$

Denominador: $B(x) = x^2-3x+4$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+4=0 \wedge -x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

O gráfico de i não tem assíntotas verticais.

Grau de $B(x) =$ grau de $A(x)$

Assíntota horizontal: reta de equação $y = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow y = -1$.

4.5 $j(x) = \frac{x^3-3}{x^3}$

Numerador: $A(x) = x^3-3$

Denominador: $B(x) = x^3$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \wedge x^3-3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$

Assíntota vertical: reta de equação $x = 0$

Grau de $B(x) =$ grau de $A(x)$

Assíntota horizontal: reta de equação $y = \frac{1}{1} \Leftrightarrow y = 1$.

4.6 $k(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Numerador: $A(x) = x^2$

Denominador: $B(x) = x-1$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x=1$

Assíntota vertical: reta de equação $x = 1$

Grau de $B(x) <$ grau de $A(x)$

O gráfico de k não tem assíntota horizontal.

4.2 Por exemplo:

$$A =]-\infty, -2[\text{ e } B =]-2, +\infty[.$$

5.1

a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

b) $D'_g = \mathbb{R}$

c) Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = -1.$

5.2

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty.$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty.$

d) $g(0) = -1.$

5.3 Por exemplo:

$$A =]0, 2[\text{ e } B =]-\infty, -1[.$$

6.1

a) $D_h = \mathbb{R}.$

b) $D'_h = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[.$

c) Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota horizontal: $y = 2.$

6.2

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = +\infty.$

6.3 A função h tem três zeros.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

7.3 A função f tem dois zeros.

8. Por exemplo:

8.1 $f(x) = \frac{1}{x-2}.$

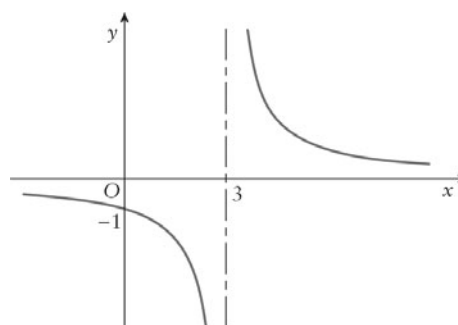
8.2 $f(x) = \frac{2-30x}{x+5}.$

9.1 $f(x) = -1 + \frac{x}{x-3} = -1 + 1 + \frac{3}{x-3} = \frac{3}{x-3}$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{x}{-x+3} = \frac{|x-3|}{3}$$

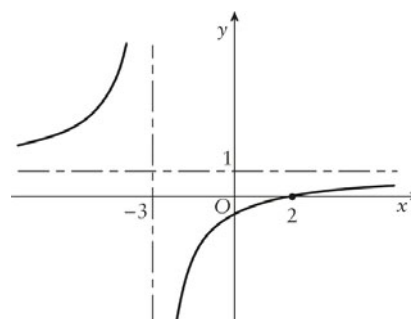
$f(0) = -1$



9.2 $g(x) = \frac{x-2}{x+3} = 1 - \frac{5}{x+3}$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{x-2}{-x-3} = \frac{|x+3|}{-5}$$



Pág. 27

7.1

a) $D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.$

b) $D'_f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}.$

c) Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}.$

7.2

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$

10. $f(x) = a + \frac{b}{x-3}$

A reta de equação $y = a$ é a assíntota horizontal do gráfico de f . Logo, $a = 3$.

$$f(x) = 3 + \frac{b}{x-3}$$

$$f(4) = 4 \Leftrightarrow 3 + \frac{b}{4-3} = 4 \Leftrightarrow 3 + b = 4 \Leftrightarrow b = 1$$

$$a = 3 \text{ e } b = 1.$$

11. $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{c\}. \text{ Logo, } c = 0.$$

$$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{a\}. \text{ Logo, } a = -3.$$

$$g(1) = 4 \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{1-0} = 4 \Leftrightarrow b = 7$$

$$a = -3, b = 7 \text{ e } c = 0.$$

12. $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$

A reta de equação $y = a$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f . Logo, por observação do gráfico, $a = 1$.

A reta de equação $x = c$ é a assíntota vertical do gráfico de f . Então $c = -1, 2$.

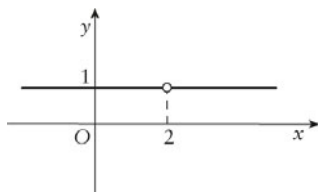
$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{1+1,2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{2,2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2,2} = -1 \Leftrightarrow b = -2,2$$

$$a = 1, b = -2,2 \text{ e } c = -1,2.$$

Pág. 28

1.



2.1 Adicionado $\frac{1}{x+7}$ a ambos os membros da equação.

2.2 Não porque não têm o mesmo conjunto-solução:
 -7 é solução da primeira condição mas não pertence ao domínio da segunda.

3.1 Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{x+7}$.

3.2 Não, porque, pela mesma razão apontada em 2.2, as condições não têm a mesma solução.

4. Devemos determinar o domínio e eliminar das soluções os elementos que não lhe pertençam.

Pág. 29

7.1 $f(x) = \frac{x+4}{x^2-2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

A expressão de f não é simplificável.

$$\text{Assíntota vertical: } x = -\sqrt{2} \text{ e } x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Assíntota horizontal: } y = 0.$$

7.2 $g(x) = \frac{x^2-4}{3x^3+4x^2-x+6}$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Vejamos se algum dos zeros é numerador é zero denominador:

$$x = -2: \quad 3 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2) + 6 = 0$$

$$x = 2: \quad 3 \times 2^3 + 4 \times 2^2 - 2 + 6 = 44$$

-2 é um zero do denominador

	3	4	-1	6
-2		-6	4	-6
	3	-2	3	0

$$3x^3 + 4x^2 - x + 6 = (x+2)(3x^2 - 2x + 3)$$

$$3x^3 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-36}}{6}$$

(equação impossível)

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(3x^2-2x+3)}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$g(x) = \frac{x-2}{3x^2-2x+3}$$

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

$$\text{Assíntota horizontal: } y = 0.$$

7.3 $h(x) = \frac{-2x^3 - x^2 + x - 3}{2x^2 + x - 3}$

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$$

Vejamos se $-\frac{3}{2}$ é zero do numerador:

$$-2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = 0$$

$-\frac{3}{2}$ é um zero de $-2x^3 - x^2 + x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -1 & 1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & & 3 & -3 & 3 \\ \hline & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$-2x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{-4}$$

A equação é impossível.

$$h(x) = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)(-2x^2 + 2x - 2)}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$h(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 2}{2(x-1)} = \frac{-x^2 + x - 1}{x-1}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} -x^2 + x - 1 \quad | \quad x-1 \\ +x^2 - x \quad \quad \quad -x \\ \hline -1 \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 1$.

Assíntota horizontal: $y = -x$.

Pág. 30

8.1 $\frac{b^2 - b}{b+2} : \frac{b^2 - 2b}{b^2 - 4}$

$$D = \{b \in \mathbb{R} : b+2 \neq 0 \wedge b^2 - 2b \neq 0 \wedge b^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

$$\frac{b^2 - b}{b+2} : \frac{b^2 - 2b}{b^2 - 4} = \frac{b(b-1)}{b+2} \times \frac{(b-2)(b+2)}{b(b-2)} = b-1, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

8.2 $A = \frac{x}{2x-14} \times \frac{x^2 - 7x}{5}$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2x-14} > 0 \wedge \frac{x^2 - 7x}{5} > 0\right\}$$

$$\frac{x}{2x-14} > 0 \wedge \frac{x^2 - 7x}{5} > 0 \Leftrightarrow x \times (2x-14) > 0 \wedge x(x-7) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-7) > 0 \wedge x(x-7) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]7, +\infty[$$



$$A = \frac{x}{2(x-7)} \times \frac{x(x-7)}{5} = \frac{x^2}{10}$$

com $x \in]-\infty, 0[\cup]7, +\infty[$.

Pág. 31

9.1 $\frac{3}{2x+18} + \frac{27}{x^2 - 81}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x+18 \neq 0 \wedge x^2 - 81 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-9, 9\}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x+18} + \frac{27}{x^2 - 81} &= \frac{3}{2(x+9)} + \frac{27}{(x-9)(x+9)} = \\ &= \frac{3(x-9)+54}{2(x-9)(x+9)} = \frac{3x-27}{2(x-9)(x+9)} = \frac{3(x-9)}{2(x-9)(x+9)} = \\ &= \frac{3}{2x+18} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-9, 9\}. \end{aligned}$$

9.2 $\frac{2}{5x+25} + \frac{4}{x^2 - 25}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5x+25} + \frac{4}{x^2 - 25} &= \frac{2}{5(x+5)} + \frac{4}{(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{2(x-5)+20}{5(x-5)(x+5)} = \frac{2x-10+20}{5(x-5)(x+5)} = \frac{2(x-5)}{5(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{2}{5x-25} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}. \end{aligned}$$

9.3 $\frac{x}{x-7} - \frac{1}{7-x} = \frac{x}{x-7} + \frac{1}{x-7} = \frac{x+1}{x-7} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{7\}.$

9.4 $\frac{x}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$$

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2} =$$

$$= \frac{x}{(x+3)(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \frac{x(x+1)-2(x+3)}{(x+3)(x+2)(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2x - 6}{(x+3)(x+2)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 - x - 6}{(x+3)(x+2)(x+1)} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x+2)(x+1)} =$$

$$= \frac{x-3}{x^2 + 4x + 3} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}.$$

Pág. 32

10.1 $\frac{x^2}{x+1} - x = \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$\frac{x^2}{x+1} - x = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} - x - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2x^2(x+1) - 2(x+1) + 3x(x+1)}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 + 3x^2 + 3x}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 1) \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1.$

10.2 $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{1-x} = 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{1-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = 6.$

Pág. 33

11. $f(x) = \frac{-2x+6}{x-1}$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x-1} = x \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x-1} - x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+6-x(x-1)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6-x^2+x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2-x+6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow -x^2-x+6 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

(2, 2) e (-3, 3) são as coordenadas desses pontos.

Pág. 34

12.

	Quantidade (kg)	Custo
Tipo A	25	$25 \times 2 = 50$
Tipo B	x	$50 + 2,9x$
Totais	$25 + x$	$50 + 2,9x$

Custo por quilo = $\frac{50+2,9x}{25+x}$

$\frac{50+2,9x}{25+x} = 2,4 \Leftrightarrow \frac{50+2,9x}{25+x} - 2,4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{50+2,9x-60-2,4x}{25+x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,5x - 10 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 20$

Devem ser utilizados 20 kg de farinha tipo B.

Pág. 35

13. $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$

$v_s = 300$ km/h (velocidade sem vento)

$e_f = 600$ km/h (espaço percorrido a favor do vento no tempo t)

$e_c = 500$ km/h (espaço percorrido contra o vento no mesmo tempo t)

Seja v a velocidade do vento e v_a a velocidade do avião.

v_a = velocidade do avião	d = distância percorrida	t = tempo
$300 + v$	600	$t = \frac{600}{300 + v}$
$300 - v$	500	$t = \frac{500}{300 - v}$

Como o tempo t é o mesmo temos:

$\frac{600}{300 + v} = \frac{500}{300 - v} \Leftrightarrow \frac{600}{300 + v} - \frac{500}{300 - v} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{600(300 - v) - 500(300 + v)}{(300 + v)(300 - v)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 600(300 - v) - 500(300 + v) = 0 \wedge 0 \leq v < 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6(300 - v) - 5(300 + v) = 0 \wedge 0 \leq v < 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1800 - 6v - 1500 - 5v = 0 \wedge 0 \leq v < 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11v = 300 \wedge 0 \leq v < 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = \frac{300}{11} \Rightarrow v \approx 27,3$

$v \approx 27,3$ km/h.

Pág. 37

14.1 $\frac{x+1}{3-x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Cálculos auxiliares:

$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$3-x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x+1}{3-x}$	$-$	0	$+$	s.s.	$-$

$$S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[.$$

$$14.2 \quad \frac{x+1}{x-3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+6}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+7}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]3, 7]$$

Cálculos auxiliares: $-x+7=0 \Leftrightarrow x=7$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$-x+7$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+7}{x-3}$	$-$	s.s.	$+$	0	$-$

$$S =]3, 7].$$

$$14.3 \quad \frac{3x-1}{x} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(x-1)-2x}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-3x-x+1-2x}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-6x+1}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left]1, \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right]$$

Cálculos auxiliares:

$$N(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 6}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

$$D(x)=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Sendo $a = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ e $b = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$, temos

x	$-\infty$	0		a		1		b	$+\infty$
$N(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$D(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

$$S = \left]0, \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left]1, \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right].$$

$$15. \quad V = 1,5 \text{ dm}^3$$

$$xy \times 1 = 1,5 \Leftrightarrow y = \frac{1,5}{x}$$

$$A_{\text{total}} < 8 \text{ dm}^2$$

$$2xy + 2x + 2y < 8 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \times \frac{1,5}{x} + 2x + 2 \times \frac{1,5}{x} < 8 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2x + \frac{2}{x} - 8 < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

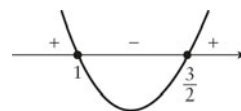
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3 - 5x}{x} < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$$

Cálculos auxiliares:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$$



$$1 < x < \frac{3}{2} \wedge y = \frac{1,5}{x}$$

$$1. \quad f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$$

$$0 \leq f(x) \leq \pi \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x+3} \geq 0 \wedge \frac{5x-1}{x+3} \leq \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x+3} \geq 0 \wedge \frac{5x-1}{x+3} - \pi \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x+3} \geq 0 \wedge \frac{5x-1-\pi x-3\pi}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x+3} \geq 0 \wedge \frac{(5-\pi)x-1-3\pi}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{3\pi+1}{5-\pi}\right]$$

Cálculos auxiliares:

$$5x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}; \quad x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$5x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{5x-1}{x+3}$	$+$	s.s.	$-$	0	$+$

$$(5-\pi)x-1-3\pi=0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi+1}{5-\pi}$$

Seendo $a = \frac{3\pi+1}{5-\pi}$, temos

x	$-\infty$	-3		a	$+\infty$
$(5-\pi)x - 1 - 3\pi$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$+$	s.s.	$-$	0	$+$

$$S = \left(]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty[\right) \cap]-\infty, \frac{3\pi+1}{5-\pi}] = \left[\frac{1}{5}, \frac{3\pi+1}{5-\pi} \right].$$

$$2. \quad \frac{x+1}{x^2-4x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leq 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1].$$

$$3. \quad f(x) = \frac{2x}{x-1}, x > 1$$

$$\overline{OA} = x$$

$$\overline{AP} = f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 12,1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 12,1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 12,1x + 12,1}{x-1} < 0$$

Como $x-1 > 0$, temos que:

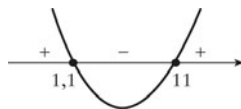
$$\frac{x^2 - 12,1x + 12,1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 12,1x + 12,1 < 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [1,1;11]$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 - 12,1x + 12,1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1,1 \vee x = 11$$



4. Em uma hora os pintores

pintam $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ da vedação, respetivamente.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

Os três pintores pintam $\frac{37}{60}$ da vedação por hora.

$$1 \text{ h} \longrightarrow \frac{37}{60} \times \text{vedação}$$

$$t \text{ h} \longrightarrow 1 \times \text{vedação}$$

$$t = \frac{1}{\frac{37}{60}} h = \frac{60}{37} h = \left(1 + \frac{23}{37}\right) h \times \text{vedação}$$

$$\frac{23}{37} \times 60 \text{ min} \approx 37 \text{ min}$$

$$t \approx 1 \text{ h } 37 \text{ min.}$$

Pág. 40

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

Seja D o ponto de coordenadas $(x, 0)$.

$$A_{[OCBA]} = A_{[ODC]} + A_{[DCBA]}$$

$$= \frac{\overline{OD} \times \overline{DA}}{2} + \frac{\overline{DA} \times \overline{CB}}{2} \times \overline{DC}$$

Sabemos que:

$$\overline{OD} = x$$

$$\overline{DA} = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\overline{CB} = f(x+1) = \frac{1}{x+1}$$

$$\overline{DC} = 1$$

$$A_{[OCBA]} = \frac{x \times \frac{1}{x}}{2} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{x(x+1) + (x+1) + x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 2x + 1}{2x^2 + 2x} = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 2x}$$

$$A(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 2x}.$$

2.1 Quando $x \rightarrow 0$, $\overline{OC} \rightarrow 1$, $\overline{CB} \rightarrow 1$ e a ordenada de A tende para $+\infty$. Logo, a área do quadrilátero vai tender para $+\infty$.

2.2 A reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal do

gráfico de A . Logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \frac{1}{2}$.

Pág. 41

$$16. \quad N(t) = \frac{20t}{t+2}, t \geq 0.$$

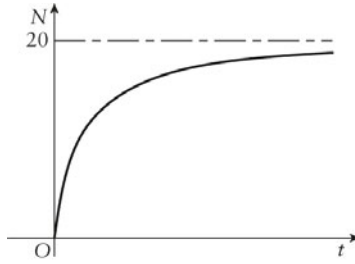
16.1 O gráfico de N não tem assíntota horizontal porque

$$D_N = [0, +\infty[.$$

A reta de equação $y = \frac{20}{1} \Leftrightarrow y = 20$ é uma assíntota

horizontal do gráfico de N .

16.2



Com o decorrer do tempo o número de peças montadas aumenta com tendência para que o seu número estabilize próximo de 20.

Pág. 43

17. $A = 500 \text{ m}^2$

$$xy = 500 \Leftrightarrow y = \frac{500}{x}.$$

17.1 $p = 2(x + y) = 2x + 2y = 2x + 2 \times \frac{500}{x} = 2x + \frac{1000}{x}$

$$p(x) = \frac{2x^2 + 1000}{x}.$$

17.2 $120 \leq p(x) \leq 300 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1000}{x} \geq 120 \wedge \frac{2x^2 + 1000}{x} \leq 300 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1000}{x} - 120 \geq 0 \wedge \frac{2x^2 + 1000}{x} - 300 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1000 - 120x}{x} \geq 0 \wedge \frac{2x^2 + 1000 - 300x}{x} \leq 0 \wedge x > 0$$

Atendendo a que $x > 0$, vem:

$$2x^2 - 120x + 1000 \geq 0 \wedge 2x^2 - 300x + 1000 \leq 0 \wedge x > 0$$

$$x \in ([0, 10] \cup [50, +\infty[) \cap [3, 4; 146, 5]$$

$$x \in [3, 4; 10] \cup [50; 146, 5]$$

Cálculos auxiliares:

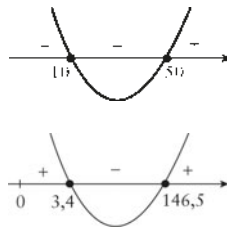
$$2x^2 - 120x + 1000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 50$$

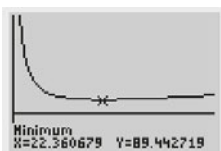
$$2x^2 - 300x + 1000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \approx 146,5 \vee x \approx 3,4$$

$$x \in [3, 4; 10] \cup [50; 146, 5] \text{ e } y = \frac{500}{x}.$$



17.3 $y_1 = p(x)$



$$x \approx 22,4 \text{ m}$$

$$y \approx \frac{500}{x} \approx 22,4$$

O custo é mínimo se o retângulo for um quadrado de lado 22,4 m.

Pág. 44

1. $N(t) = \frac{20(5 + 2t)}{1 + 0,06t}, 0 \leq t \leq 20.$

1.1

a) $N(0) = \frac{20 \times 5}{1} = 100$

No início do estudo existiam 100 000 árvores.

b) $N(15) = \frac{20(5 + 30)}{1 + 0,06 \times 15} \approx 368$

Decorridos 15 anos existiam cerca de 368 000 árvores.

1.2 $N(t) = \frac{40t + 100}{0,06t + 1}$

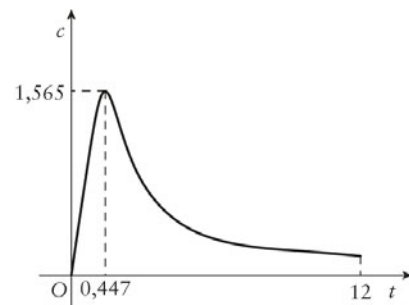
A reta de equação $y = \frac{40}{0,06} \Leftrightarrow y = \frac{2000}{3}$ é uma assíntota

horizontal do gráfico de N .

Com o decorrer do tempo o número de árvores desta zona tende a aproximar-se de 667 000.

2. $C(t) = \frac{7t}{5t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 12.$

2.1



2.2 A concentração máxima de 1,565 mg/l ocorre 0,447 horas após a tomada do medicamento. Após este instante e com o decorrer do tempo a concentração tende a ser eliminada do organismo.

2.3 $C(t) > 0,5 \Leftrightarrow \frac{7t}{5t^2 + 1} > 0,5 \wedge 0 \leq t \leq 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{7t}{5t^2 + 1} - 0,5 > 0 \wedge 0 \leq t \leq 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7t - 2,5t^2 - 0,5}{5t^2 + 1} > 0 \wedge 0 \leq t \leq 12$$

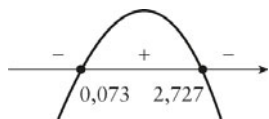
Dado que $5t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, esta condição é equivalente a:

$$-2,5t^2 + 7t - 0,5 > 0 \wedge 0 \leq t \leq 12 \Rightarrow 0,073 < t < 2,727$$

Cálculos auxiliares:

$$-2,5t^2 + 7t - 0,5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 2,727 \vee t \approx 0,073$$



$$2,727 - 0,073 = 2,654$$

$$2,654 \text{ h} \approx 2 \text{ h } 39 \text{ min}$$

A concentração foi superior a 0,5 g/l durante 2 h 39 min.

Pág. 45

$$3. \quad n(h) = \frac{80h}{0,8h + 16}, h > 0.$$

$$3.1 \quad n(100) = \frac{80 \times 100}{0,8 \times 100 + 16} = \frac{250}{3} \approx 83.$$

Com 100 hectares de terra de pastagem podem sobreviver 83 veados.

$$3.2 \quad \text{A reta de equação } y = \frac{80}{0,8} \Leftrightarrow y = 100 \text{ é uma assíntota do}$$

gráfico da função n . Significa que, com um aumento significativo da terra de pastagem, o número de veados tende a estabilizar à volta das 100 unidades.

$$3.3 \quad \frac{80h}{0,8h + 16} \leq 50 \Leftrightarrow \frac{80h}{0,8h + 16} - 50 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{80h - 40h - 800}{0,8h + 16} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{40h - 800}{0,8h + 16} \leq 0 \Leftrightarrow$$

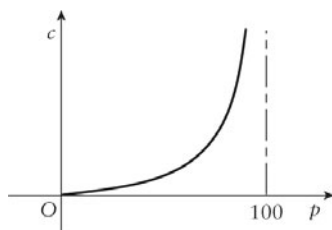
$$\Leftrightarrow 40h - 800 \leq 0 \Leftrightarrow h < \frac{800}{40} \Leftrightarrow h \leq 20$$

Com uma área de pastagem não superior a 20 hectares sobrevivem, no máximo, 50 veados.

$$4. \quad c(p) = \frac{180p}{100 - p}, 0 \leq p < 100.$$

4.1 $p = 100$, significa que $\lim_{p \rightarrow 100} c(p) = +\infty$, ou seja, segundo este modelo matemático, é impossível despoluir totalmente o rio.

4.2



O custo da despoluição cresce lentamente no início e aumenta de forma cada vez mais rápida à medida que a percentagem de poluentes removidos aumenta.

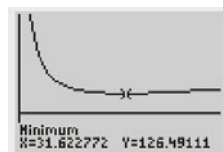
4.3 $C(85) = 1020$; Despoluir 85% dos poluentes custa 1020 milhões de euros.

$$5.1 \quad A = 1000 \text{ m}^2; xy = 1000 \Leftrightarrow y = \frac{1000}{x}.$$

$$5.2 \quad P = 2x + 2y$$

$$P(x) = 2x + 2 \times \frac{1000}{x} \Leftrightarrow P(x) = \frac{2x^2 + 2000}{x}, x > 0$$

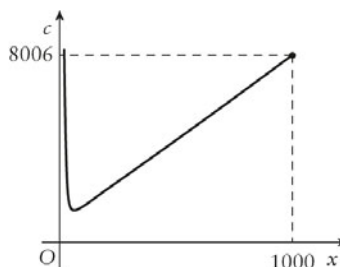
$$y_1 = P(x)$$



O perímetro é mínimo se $x \approx 31,6$ m.

Pág. 46

6.1



$$6.2 \quad C(x) = 814 \Leftrightarrow 8x + \frac{6000}{x} - 814 = 0 \Leftrightarrow$$

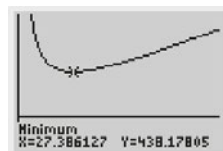
$$\Leftrightarrow \frac{8x^2 + 6000 - 814x}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 814x + 6000 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 93,75$$

O custo de manuseamento de 8 litros de produto é igual ao custo de manuseamento de 93,75 litros: 8,14 euros nos dois casos.

6.3

$$y_1 = C(x)$$



O custo é mínimo para $x \approx 27,4$ litros.

$$7. \quad h(t) = \frac{5t + k}{t}, 0 < t \leq 10.$$

7.1 150 euros por 10 horas equivale a 15 euros por hora.

$$h(10) = 15 \Leftrightarrow \frac{5 \times 10 + k}{10} = 15 \Leftrightarrow 50 + k = 150 \Leftrightarrow k = 100.$$

$$7.2 \quad h(8) = \frac{5 \times 8 + 100}{8} = \frac{140}{8} = 17,5$$

$$8 \times 17,5 = 140$$

O funcionário recebeu 140 euros.

$$7.3 \quad h(t) = \frac{5t + 100}{t}$$

Tiago: Recebeu 130,02 euros por t horas, ou seja, $\frac{130,02}{t}$

euros por hora.

$$h(t) = \frac{130,02}{t} \Leftrightarrow \frac{5t + 100}{t} = \frac{130,02}{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t + 100 = 130,02 \Leftrightarrow 5t = 30,02 \Rightarrow t \approx 6.$$

$$h(6) = \frac{5 \times 6 + 100}{6} \approx 21,67$$

O Tiago demorou 6 horas a completar a tarefa tendo recebido 21,67 € por hora.

Inês: Recebeu $\frac{144,99}{t}$ euros por hora.

$$h(t) = \frac{144,99}{t} \Leftrightarrow \frac{5t + 100}{t} = \frac{144,99}{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t + 100 = 144,99 \Leftrightarrow 5t = 44,99 \Rightarrow t \approx 9.$$

$$h(9) = \frac{5 \times 9 + 100}{6} = 16,11$$

A Inês demorou 9 horas a completar a tarefa tendo recebido 16,11 euros por hora.

Pág. 47

$$8. \quad C(x) = \frac{1000x + 3800}{x + 10}.$$

$$8.1 \quad C(x) = 600 \Leftrightarrow \frac{1000x + 3800}{x + 10} = 600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000x + 3800}{x + 10} - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000x + 3800 - 600x - 6000}{x + 10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 400x - 2200 = 0 \Leftrightarrow x = 5,5$$

A CPU tem de investir 5500 euros.

$$8.2 \quad C(0) = \frac{3800}{10} = 380$$

$$C(15) = \frac{1000 \times 15 + 3800}{15 + 10} = 752$$

$$C(30) = \frac{1000 \times 30 + 3800}{30 + 10} = 845$$

A empresa venderá 380 computadores se nada investir em publicidade, 752 se investir 15 mil euros e 845 se investir 30 mil euros.

8.3 Lucro sem despesas de publicidade:

$$380 \times 150 \text{ €} = 57\,000 \text{ €}$$

Lucro se forem investidos 15 mil euros:

$$752 \times 150 \text{ €} - 15\,000 \text{ €} = 97\,800 \text{ €}$$

Lucro se forem investidos 30 mil euros:

$$845 \times 150 \text{ €} - 30\,000 \text{ €} = 96\,750 \text{ €}$$

Conclusão: Compensa gastar 15 000 euros em publicidade mas não compensa gastar 30 mil.

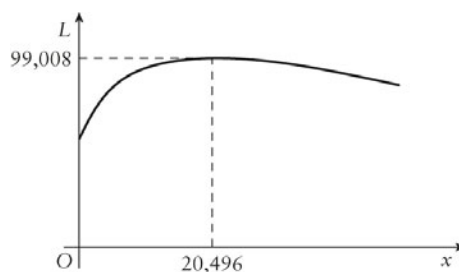
$$8.4 \quad L(x) = 0,15 \times C(x) - x$$

a) 0,15 milhares de euros = 150 euros é o lucro por computador sem despesas de publicidade.

$0,15 \times C(x)$ é o lucro obtido pela venda de C computadores quando são investidos x milhares de euros, não considerando esta despesa em publicidade.

$0,15 \times C(x) - x$ é o lucro obtido pela venda de C computadores depois de deduzido o investimento de x milhares de euros em publicidade.

b)



O lucro é máximo para um investimento de 20 496 euros em publicidade.

9.1 Seja y a largura do retângulo, em metros

$$xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}.$$

$$9.2 \quad x > 0 \wedge y > 1$$

$$x > 0 \wedge \frac{100}{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 100$$

$$D =]0, 100[.$$

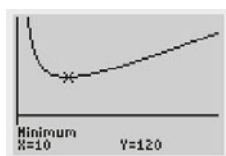
$$9.3 \quad P = 2x + 2y$$

$$P = 2x + 2 \times \frac{100}{x}$$

$$P(x) = \frac{2x^2 + 200}{x}.$$

$$9.4 \quad C(x) = 3P(x) = \frac{6x^2 + 600}{x}.$$

9.5 $y_1 = C(x)$



$x = 10 \Rightarrow y = 10$

O custo da rede é mínimo se o jardim tiver a forma de um quadrado com 10 m de lado.

Pág. 48

10.1 $0,3 \times 5 = 1,5$

$5 - 1,5 = 3,5$

1,5 litro de ácido e 3,5 litros de água.

10.2 Existente:

Ácido: $0,4 \times 5 \text{ L} = 2 \text{ L}$

Água: $5 \text{ L} - 2 \text{ L} = 3 \text{ L}$

A existir:

Ácido: 2 L

Água: $(3 + x) \text{ L}$

Total: $(5 + x) \text{ L}$

Sabe-se que:

$$\frac{2}{5+x} = 0,3 \Leftrightarrow 0,3(5+x) = 2 \Leftrightarrow 5+x = \frac{2}{0,3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{0,3} - 5 \Rightarrow x \approx 1,67$$

Deve adicionar 1,67 litro de água para obter 6,67 litros de solução ácida a 30%.

10.3 x litros de solução a 32%

y litros de solução a 50%

$$\begin{cases} x+y=16 \\ 0,32x+0,5y=0,4 \times 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x \\ 0,32x+0,5(16-x)=6,4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x \\ 0,32x+8-0,5x=6,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x \\ -0,18x=-1,6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{64}{9} \\ x=\frac{80}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 8,9 \\ y \approx 7,1 \end{cases}$$

Deve utilizar 8,9 litros de solução a 32% e 7,1 litros de solução a 50%.

11.1 Como $\overline{IH} = 4$, $D_f =]4, +\infty[$.

11.2 Atendendo à semelhança dos triângulos $[DCG]$ e $[EFG]$ temos que:

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{IG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x} = \frac{4}{\overline{EF}}$$

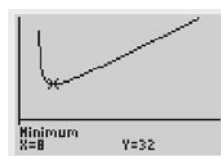
Como $x \neq 0$ e $\overline{EF} \neq 0$, vem:

$$(x-4)\overline{EF} = 4x \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{4x}{x-4}$$

$$A_{[EFG]} = \frac{\overline{EF} \times \overline{IG}}{2}$$

$$f(x) = \frac{4x}{x-4} \times x \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x^2}{x-4}$$

11.3 $y_1 = f(x)$



A área do triângulo $[EFG]$ é mínima para $x = 8$.

11.4 4 é zero do denominador de $f(x)$ e 4 não é zero do numerador e, ainda, $D_f =]4, +\infty[$. Logo a reta de equação

$x = 4$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-4} = 2x + 8 + \frac{32}{x-4}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad | \quad x-4 \\ -2x^2 + 8x \quad | \quad 2x+8 \\ \hline 8x \\ -8x + 32 \\ \hline 32 \end{array}$$

A reta de equação $y = 2x + 8$ é uma assíntota do gráfico de f .

Pág. 49

12.1 Os triângulos $[CNP]$ e $[BNA]$ são semelhantes (retângulos

de lados paralelos), logo $\frac{\overline{CP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$. Fazendo $\overline{CN} = y$,

vem $\overline{NB} = 1 - y$. Então como $\overline{CP} = x$ e $\overline{AB} = 1$, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow xy + y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + y = x \Leftrightarrow y(x+1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x+1}$$

$$A_{[NPC]} = \frac{\overline{CN} \times \overline{CP}}{2} = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \times y = \frac{x}{2} \times \frac{x}{x+1}$$

Logo, $A(x) = \frac{x^2}{2x+2}$, $x > 0$.

12.2 $D_A =]0, +\infty[$.

Como o único zero do denominador de $A(x)$ é -1 , o gráfico da função A não tem assíntotas verticais.

$$A(x) = \frac{x^2}{2x+2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+2}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 - x \\ \hline -x \\ +x+1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{array}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ é uma assíntota do gráfico de A .

13. $T(x) = \frac{22+270x}{x+1}, x > 0$.

13.1 $T(0) = 22$

O forno encontrava-se à temperatura de 22 °C.

13.2 $y = \frac{270}{1} \Leftrightarrow y = 270$

A reta $T = 270$ é uma assíntota horizontal do gráfico de T .

Com o decorrer do tempo a temperatura do forno tende a aproximar-se de 270 °C.

13.3 $T(4) - T(1) = \frac{22+270 \times 4}{4+1} - \frac{22+270}{1+1} = 74,4^\circ$

$$T(4) - T(1) = 74,4^\circ$$

13.4 $T(x) = 262 \Leftrightarrow \frac{22+270x}{x+1} = 262 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{22+270x}{x+1} - 262 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{22+270x-262x-262}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{240}{8} \Leftrightarrow x = 30$$

30 minutos após ser ligado o forno encontrava-se a uma temperatura de 262 °C.

$$2a = 680 \Leftrightarrow a = 340; \quad a^2 = 340^2 = 115\,600$$

$$\overline{AB} = 10\,000 \text{ (distância focal)}$$

$$2c = 10\,000 \Leftrightarrow c = 5000$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5000^2 = 340^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 24\,884\,400$$

A explosão registou-se num ponto de um dos ramos da

hipérbole $\frac{x^2}{115\,600} - \frac{y^2}{2\,484\,400} = 1$, de focos nos pontos A

e B .

19. $A(0, 2)$ e $B(6, 2)$

Os vértices pertencem à reta de equação $y = 2$ (horizontal).

$$2a = \overline{AB} \Leftrightarrow 2a = |6-0| \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3.$$

Como $y = \frac{2}{3}x$ é uma assíntota, temos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = 2.$$

Centro da hipérbole (é o ponto médio de $[AB]$):

$$C(3, 2).$$

Equação da hipérbole:

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Pág. 54

1. $g(x) = f(x-1) + 5$

O gráfico de g obtém-se por uma translação do gráfico de f associado ao vetor $\vec{u} = (1, 5)$.

As assíntotas sofrem o mesmo deslocamento:

$$x = -1 \rightarrow x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y = 2 \rightarrow y-5 = -1 \Leftrightarrow y = 7$$

Resposta: (A).

2. $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$

As assíntotas do gráfico de f : $x = b$ e $y = a$.

Por observação do gráfico temos $a > 0$ e $b > 0$.

Resposta: (B).

3. $V = 2t$ sendo V em metros cúbicos e t em horas.

$$2^2 \times h = 2t; \quad h = \frac{t}{2}.$$

Resposta: (B).

4. $C(h) = \frac{50h}{h^2+1}, h \geq 0$

$$C(7) = 7$$

Resposta: (D).

Pág. 53

18. Distância a A: $d_A = 340(t+2) \text{ m} = 340t + 680 \text{ m}$

Distância a B: $d_B = 340t \text{ m}$

$$d_A - d_B = 680$$

A diferença das distâncias de P (ponto onde se deu a explosão) aos pontos A e B é constante e igual a 680 m.

O ponto P situa-se sobre uma hipérbole de focos A e B .

Temos, então:

$$|d_A - d_B| = 2a$$

$$5. \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 6}{x - 2} = x + 1 + \frac{8}{x - 2}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ -x^2 + 2x \quad \quad | \quad x + 1 \\ \hline x + 6 \\ -x + 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f .

Resposta: (A).

$$6. \quad \frac{4}{x^3 - x} = \frac{A(x^2 - 1) + B(x^2 - x) + C(x^2 + x)}{x(x + 1)(x - 1)}$$

$$\frac{4}{x^3 - x} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x(x^2 - 1)}$$

$$\frac{4}{x^3 - x} = \frac{(A + B + C)x^2 + (C - B)x - A}{x^3 - x}$$

Logo,

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ C - B = 0 \\ -A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 4 \\ -B + C = 0 \\ A = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C = 4 \\ B = C \\ A = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ B = 2 \\ A = -4 \end{cases}$$

Resposta: (A).

Pág. 55

$$1. \quad P(x) = \frac{x}{500 + x}, x > 0$$

Assíntota horizontal: $y = 1$.

Se o número de robalos introduzidos for significativamente elevado a percentagem de peixes desta espécie tende a aproximar-se de 100%.

Assíntota vertical: Não há porque -500 é o único zero do denominador e $D_P = \mathbb{R}^+$.

$$1.2 \quad P(x) \leq 0,2 \Leftrightarrow \frac{x}{500 + x} \leq 0,2 \Leftrightarrow \frac{x}{500 + x} - 0,2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 0,2 \times 500 - 0,2x}{500 + x} \leq 0$$

Como $500 + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$0,8x - 100 \leq 0 \Leftrightarrow 0,8x \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{100}{0,8} \Leftrightarrow x \leq 125$$

Podem ser introduzidos 125 robalos, no máximo.

$$2. \quad N(t) = \frac{50t + k}{t + 25}, t \geq 0.$$

$$2.1 \quad N(0) = 15 \Leftrightarrow \frac{k}{25} = 15 \Leftrightarrow k = 375.$$

$$2.2 \quad N(t) = \frac{50t + 375}{t + 25}$$

$$N(10) = \frac{50 \times 10 + 375}{10 + 25} = 25$$

É de esperar que produza 25 peças.

2.3 A reta de equação $y = 50$ é uma assíntota horizontal do gráfico de N . Logo $b = 50$.

Com o decorrer do tempo de experiência o número de peças produzidas por hora tende a aproximar-se de 50.

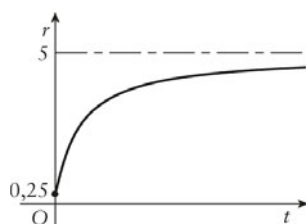
$$3.1 \quad r(t) = \frac{1 + 5t}{4 + t}$$

$$r(0) = \frac{1}{4} = 0,25$$

No momento em que a nódoa foi detetada tinha um raio de 0,25 cm.

3.2 A reta $y = 5$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função r . Significa que com o decorrer do tempo o raio da nódoa tende a aproximar-se de 5 cm.

3.3



$$3.4 \quad A = 40 \text{ cm}^2$$

$$\pi r^2 = 40$$

$$r = \sqrt{\frac{40}{\pi}}$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \frac{1 + 5t}{4 + t} = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \frac{1 + 5t}{4 + t} - \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + 5t)\sqrt{\pi} - (4 + t)\sqrt{40}}{4 + t} = 0 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi} + 5\sqrt{\pi}t - 4\sqrt{40} - t\sqrt{40} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(5\sqrt{\pi} - \sqrt{40}) = 4\sqrt{40} - \sqrt{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4\sqrt{40} - \sqrt{\pi}}{5\sqrt{\pi} - \sqrt{40}} \Rightarrow t \approx 9,3$$

A área da mancha atingiu 40 cm² cerca de 9,3 segundos após ter sido detetada.

Pág. 57

$$\begin{aligned} 1.1 \quad 36^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{5}} - 121^{\frac{1}{2}} + 81^{-\frac{3}{4}} &= \sqrt{36} + \sqrt[5]{32} - \sqrt{121} + \left(\sqrt[4]{81^3}\right)^{-1} = \\ &= 6 + 2 - 11 + \left(\sqrt[4]{(3^4)^3}\right)^{-1} = -3 + \left(\sqrt[4]{(3^3)^4}\right)^{-1} = -3 + (3^3)^{-1} = \\ &= -3 + \frac{1}{27} = -\frac{80}{27}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{2}{5}} - \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{1}{2}} &= \\ &= \sqrt{\frac{16}{9}} + \left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\frac{27}{64}}\right)^4 - 1 = \\ &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{81}{256} - 1 = -\frac{81}{256}. \end{aligned}$$

$$2.1 \quad \sqrt{(t+1)^2} = |t+1|, t \in \mathbb{R}.$$

$$2.2 \quad \sqrt[3]{\sqrt{3x}} = \sqrt[6]{3x}, x \in \mathbb{R}_0^+.$$

$$2.3 \quad \left(\frac{x^3}{x^6}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \left(x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{x^3}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+.$$

$$2.4 \quad \frac{(2x^3)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}x^4} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \times x^4}{2^{\frac{1}{3}} \times x^4} = 2^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$3.1 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 0\} = \mathbb{R}^+.$$

$$3.2 \quad y = 6x^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow y = 6\sqrt[3]{x^2}; D = \mathbb{R}.$$

$$3.3 \quad y = \sqrt[3]{x}; D = \mathbb{R}.$$

$$4.1 \quad \sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

$$4.2 \quad \sqrt[4]{(x-3)^4} = |x-3|, x \in \mathbb{R}.$$

$$4.3 \quad \sqrt[3]{\frac{a^{18}}{27x^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^6}{3x}\right)^3} = \frac{a^6}{3x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$4.4 \quad \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{64x^3}{a^6}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{4x}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{4x}{a^2} = \frac{2x}{a^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$5.1 \quad (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32}.$$

$$5.2 \quad 2x^{\frac{3}{7}} = 2\sqrt[7]{x^3}.$$

$$5.3 \quad (x-1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(x-1)^3}.$$

$$5.4 \quad 2(x-1)^{\frac{3}{5}} = 2\sqrt[5]{(x-1)^3}.$$

$$\begin{aligned} 6.1 \quad 8^{-\frac{4}{3}} + 64^{-\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{5}{4}} + 4^{\frac{3}{2}} &= \\ &= (2^3)^{-\frac{4}{3}} + (4^3)^{-\frac{2}{3}} - (2^4)^{-\frac{5}{4}} + (2^2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= 2^{-4} + 4^{-2} - 2^{-5} + 2^{-3} = \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

$$6.2 \quad \frac{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{7}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}} = a^{1 + \frac{5}{6}} = a \times a^{\frac{5}{6}} = a\sqrt[6]{a^5}.$$

$$6.3 \quad \frac{a^{\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{4} + 1} = a^1 \times a^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{a}.$$

$$\begin{aligned} 6.4 \quad \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}})}{a} &= \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}}{a} = \frac{a - a^{\frac{7}{6}}}{a} = \\ &= 1 - \frac{a^{\frac{7}{6}}}{a^1} = 1 - a^{\frac{7}{6} - 1} = 1 - a^{\frac{1}{6}} = 1 - \sqrt[6]{a}. \end{aligned}$$

$$7.1 \quad \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{15} + 3.$$

$$\begin{aligned} 7.2 \quad \sqrt{5x}(\sqrt{x} + \sqrt{5}) &= \sqrt{5x}\sqrt{x} + \sqrt{5x}\sqrt{5} = \\ &= \sqrt{5}\sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt{5}\sqrt{x}\sqrt{5} = x\sqrt{5} + 5\sqrt{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.3 \quad (2\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 1) &= 6\sqrt{x}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 1 = \\ &= 6x - \sqrt{x} - 1. \end{aligned}$$

$$7.4 \quad \sqrt{3}(\sqrt{3} + x\sqrt{3}) = \sqrt{3}\sqrt{3} + x\sqrt{3}\sqrt{3} = 3 + 3x.$$

$$7.5 \quad (\sqrt{2x} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2x} + 3\sqrt{2}) = (\sqrt{2x})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 2x - 18.$$

$$7.6 \quad (\sqrt{3} - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} + 4 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 8.1 \quad A &= 2\sqrt{20} \times \sqrt{\frac{125}{36}} = 2\sqrt{\frac{20 \times 125}{36}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{2500}{36}} = 2\sqrt{\frac{50}{6}} = \frac{50}{3}; \quad A = \frac{50}{3} \text{ m}^2 \\ P &= 2\left(2\sqrt{20} + \sqrt{\frac{125}{36}}\right) = 2\left(2\sqrt{4 \times 5} + \frac{\sqrt{25 \times 5}}{6}\right) = \\ &= 2\left(2 \times 2\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{6}\right) = 8\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} = \frac{29\sqrt{5}}{3} \\ P &= \frac{29\sqrt{5}}{3} \text{ m}. \end{aligned}$$

$$8.2 \quad A = \frac{\sqrt{27} + 3\sqrt{12}}{2} \times \sqrt{12} = \frac{\sqrt{9 \times 3} + 3\sqrt{4 \times 3}}{2} \times \sqrt{4 \times 3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 9 \times 3 = 27; A = 27 \text{ m}^2$$

$$P = 3\sqrt{12} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{(3\sqrt{12} - \sqrt{27})^2 + (\sqrt{12})^2} =$$

$$= 4\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{9 \times 12 - 6\sqrt{12} \times \sqrt{27} + 27 + 12} =$$

$$= 4\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{147 - 6 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}} =$$

$$= 8\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{147 - 36 \times 3} = 11\sqrt{3} + \sqrt{39}$$

$$P = 11\sqrt{3} + \sqrt{39} \text{ m.}$$

$$8.3 \quad \text{Lado do triângulo } \sqrt{32} \text{ m} = \sqrt{16 \times 2} \text{ m} = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

Altura do triângulo:

$$h^2 + (2\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = 32 - 8 \Leftrightarrow h = \sqrt{24}$$

$$A = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{24}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times \sqrt{4 \times 6}}{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 4\sqrt{4 \times 3} = 8\sqrt{3}$$

$$A = 8\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$P = 3 \times \sqrt{32} = 3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}; P = 12\sqrt{2} \text{ m.}$$

$$9. \quad r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

$$9.1 \quad r = \sqrt{\frac{200}{4\pi}} = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{\pi}} = 5\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$9.2 \quad 12,2 = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \Leftrightarrow 12,2^2 = \frac{A}{4\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 4\pi \times 12,2^2 \Leftrightarrow A = 595,36\pi$$

$$A = 595,36\pi \text{ cm}^2.$$

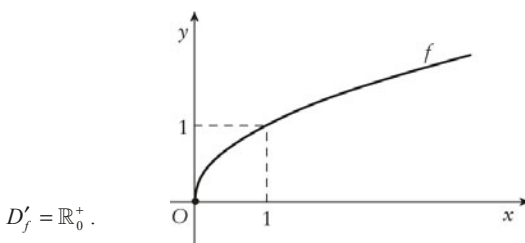
Pág. 58

$$20.1 \quad x^2 + h^2 = 10^2; h^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{100 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 10).$$

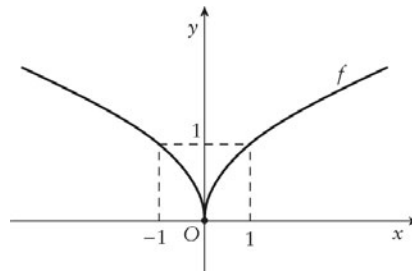
20.2 $D_h = [0, 10]$. À medida que x aumenta, h diminui. Logo, h é estritamente decrescente.

Pág. 59

$$21.1 \quad f(x) = \sqrt{x}; D_f = \mathbb{R}_0^+$$

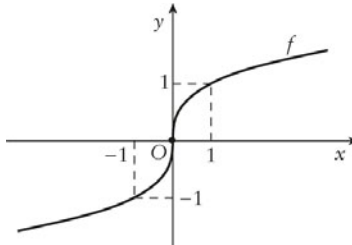


$$21.2 \quad f(x) = \sqrt{|x|}; D_f = \mathbb{R}$$



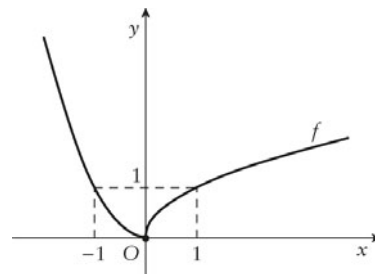
$$D'_f = \mathbb{R}_0^+.$$

$$21.3 \quad f(x) = \sqrt[3]{x}; D_f = \mathbb{R}$$



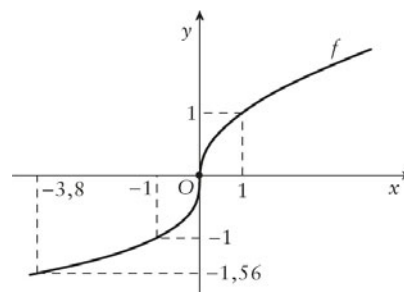
$$D'_f = \mathbb{R}.$$

$$21.4 \quad i(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}; D_f = \mathbb{R}$$



$$D'_f = \mathbb{R}_0^+.$$

$$21.5 \quad j(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}; D_j = \mathbb{R}$$



$$D'_j = \mathbb{R}.$$

Pág. 60

$$22.1 \quad f(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_f =]1, +\infty[.$$

As retas de equações $x = 0$ e $y = 0$ são assintotas do gráfico

da função h definida por $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

O gráfico da função f pode ser obtido do gráfico de h por uma translação associada ao vetor $\vec{u} = (1, 0)$. Como as

assintotas sofrem o mesmo deslocamento, temos como assintotas do gráfico de f as retas de equação:

$$x = 0 \quad \hookrightarrow \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 0 \quad \hookrightarrow \quad y - 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$22.2 \quad g(x) = f(x-2) + 3$$

O gráfico da função g é obtido do gráfico de h por uma translação associada ao vetor $\vec{u} = (2, 3)$. As assintotas

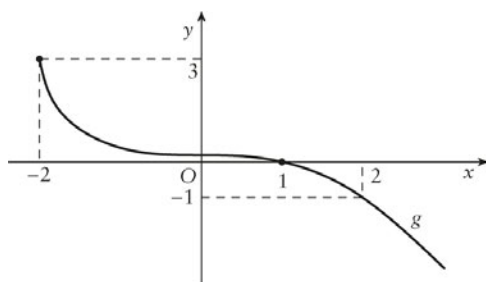
sofrem o mesmo deslocamento. Então:

$$x = 1 \quad \hookrightarrow \quad x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

$$y = 0 \quad \hookrightarrow \quad y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

Pág. 61

23. Esboço do gráfico:



$$D_g = [-2, +\infty[$$

Zeros: $\{1\}$.

g é estritamente decrescente

3 é o máximo absoluto de g

$$D'_g =]-\infty, 3]$$

Pág. 62

$$1.1 \quad f(x) = 3x - \sqrt{2x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$$

$$1.2 \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} =]2, +\infty[.$$

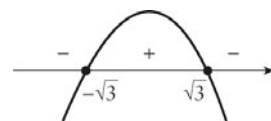
$$1.3 \quad h(x) = \sqrt{9-3x^2}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 9-3x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

Cálculos auxiliares:

$$9-3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$



$$1.4 \quad i(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-x}$$

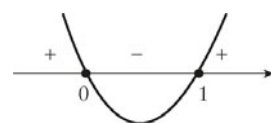
$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x+1 \geq 0 \wedge x^2-x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2+2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$x^2-x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$



$$2. \quad \frac{a \times a}{2} = x$$

$$\frac{a^2}{2} = x \Leftrightarrow a^2 = 2x$$

Como $a > 0$ e $x > 0$ temos:

$$a = \sqrt{2x}.$$

$$3.1 \quad V_{\text{prisma}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BN}}{2} \times \overline{BC}.$$

Dado que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ e $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BF} = \frac{2}{3}a$, temos:

$$V_{\text{prisma}} = \frac{a \times \frac{2}{3}a}{2} \times a = a \times \frac{1}{3}a \times a = \frac{a^3}{3}.$$

$$3.2 \quad V = \frac{a^3}{a} \Leftrightarrow a^3 = 3V \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3V}.$$

3.3 $[AEFN]$ é um trapézio.

$$A_{[AEFN]} = \frac{\overline{AE} + \overline{FN}}{2} \times \overline{EF} =$$

$$= \frac{a + \frac{1}{3}a}{2} \times a = \frac{\frac{4}{3}a}{2} \times a = \frac{2}{3}a^2.$$

$$3.4 \quad A = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow 3A = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3A}{2}$$

Como $a > 0$ e $A > 0$ temos:

$$a = \sqrt{\frac{3A}{2}}.$$

3.5 $V_{\text{cubo}} = 27 \text{ cm}^3$

$$a^3 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow a = 3; \quad a = 3 \text{ cm}$$

$$V_{[ANBDMC]} = \frac{a^3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \text{ cm}^3$$

$$V_{[AEFNDHGN]} = 27 - 9 = 18 \text{ cm}^3.$$

Pág. 63

4. $\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{13}$

$$\overline{AF}^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{FC}^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \overline{FC} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Perímetro} = (\sqrt{13} + 2\sqrt{5} + 5) \text{ cm}.$$

5. $x\sqrt{7} = \sqrt{35} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$

$$P = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} \text{ cm}.$$

6.1 $\overline{OC} = 8:4 = 2; \quad \overline{OB} = \frac{x}{2}$

$$\overline{BC}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$$

$$\overline{BC}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$

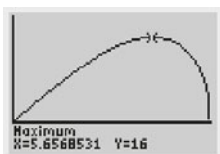
$$A = \overline{AB} \times \overline{BC}$$

$$A(x) = 2 \times \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = x \sqrt{\frac{16 - x^2}{4}} = x \times \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2}$$

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2}.$$

6.2 $0 < \frac{x}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 < x < 8; \quad D_A =]0, 8[$

$$y_1 = A(x)$$



A é crescente em $]0, a[$ e decrescente em $]a, 8[$ com $a \approx 5,7$.

7. $\overline{EA} = \frac{1}{3} \overline{AB}; \quad \overline{AC} = 10$

7.1 $\overline{EA} = x$

$$x = \frac{1}{3} \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} = 3x$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 10^2$$

$$(3x)^2 + \overline{BC}^2 = 100 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100 - 9x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{100 - 9x^2}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{100 - 9x^2}$$

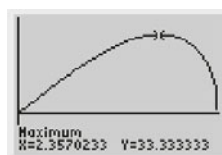
$$\begin{aligned} A &= A_{[EAD]} + A_{[ABC]} = \frac{\overline{EA} \times \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \\ &= \frac{x\sqrt{100 - 9x^2}}{2} + \frac{3x\sqrt{100 - 9x^2}}{2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{3x}{2}\right)\sqrt{100 - 9x^2} \end{aligned}$$

$$A(x) = 2x\sqrt{100 - 9x^2}.$$

7.2 $x > 0 \wedge 3x < 10 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < \frac{10}{3} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{10}{3}\right[$

$$D_A = \left]0, \frac{10}{3}\right[.$$

7.3 $y_1 = A(x)$



A área é máxima para $x \approx 2,3$ cm.

8.1 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0 \wedge \frac{x}{x-1} > 0\right\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$\frac{x}{x-1}$	+	0	-	s.s.	+

8.2 $g(x) = \sqrt[3]{\frac{3x}{x^2-1}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

8.3 $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}}$

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 2x^2 + 1 \neq 0 \wedge \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0\right\} = \\ &= [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 0$$

A equação é impossível porque $(x^2 + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Logo, } \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Pág. 64

1. $A = \frac{P}{2} \times g$.

1.1 $g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \quad (g > 0)$

$P = 2 \pi r$

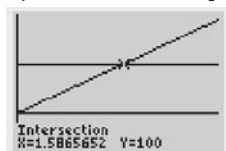
$A = \frac{1}{2} P \times g = \frac{1}{2} \times 2 \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$

$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

1.2 $h = 20$ cm.

a) $100 = \pi r \sqrt{r^2 + 20^2}$

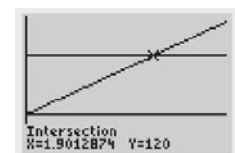
$y_1 = \pi r \sqrt{x^2 + 20^2}$; $y_2 = 100$



$r \approx 1,59$.

b) $\pi r \sqrt{r^2 + 20^2} > 120$

$y_1 = \pi r \sqrt{x^2 + 20^2}$; $y_2 = 120$



$r \geq 1,91$.

2. $h = 1430$ m

$r = \frac{17\,140}{2} = 8570$ m

$A = \pi \times 8,570 \sqrt{8,570^2 + 1,430^2} \approx 233,92$

$A \approx 233,92$ km².

Pág. 65

24.1 $\sqrt{2x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{2x-1})^2 = 1^2 \Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$

Verificação:

$\sqrt{2 \times 1 - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ (verdadeiro)

$S = \{1\}$.

24.2 $\sqrt{3x+5} = -2$

A equação é impossível porque $\sqrt{3x+5} \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$

$S = \emptyset$.

24.3 $\sqrt[3]{1-2x} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{1-2x})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 1-2x = 27 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = -26 \Leftrightarrow x = -13$.

24.4 $\sqrt{12-x}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{12-x}=x \Rightarrow (\sqrt{12-x})^2 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12-x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$

Verificação:

$x = -4: \sqrt{12 - (-4)} - (-4) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4 = 0$ (Falso)

$x = 3: \sqrt{12 - 3} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0$ (Verdadeiro)

$S = \{3\}$.

24.5 $3-x = \sqrt{3x+1} \Rightarrow (3-x)^2 = (\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 8$

Verificação:

$x = 1: 3 - 1 = \sqrt{3 \times 1 + 1} = 2 = \sqrt{4}$ (Verdadeiro)

$x = 8: 3 - 8 = \sqrt{3 \times 8 + 1} \Leftrightarrow -5 = 5$ (Falso)

$S = \{1\}$.

24.6 $\sqrt{3-2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3-x \Rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (3-x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 9$

Verificação:

$x = 1:$

$\sqrt{3-2\sqrt{1}} - \sqrt{1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ (Verdadeiro)

$x = 9:$

$\sqrt{3-2\sqrt{9}} - \sqrt{9} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-6} - 3 = 0$ (Falso)

$S = \{1\}$.

24.7 $\frac{x}{2} = (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Verificação:

$\frac{2}{2} = (2-1)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 = 1$ (Verdadeiro)

$S = \{2\}$.

25. $f(x) = (3x+4)^{\frac{1}{2}}; D_f = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

$g(x) = (15-2x)^{\frac{1}{2}}; D_g = \left]-\infty, \frac{15}{2}\right]$.

25.1 $f(x) = 2 \Leftrightarrow (3x+4)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \left[(3x+4)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+4 = 4 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Verificação:

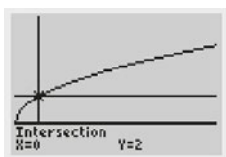
$(3 \times 0 + 4)^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ (verdadeiro)

Como $f(0) = 2$ e f é crescente temos que

$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 0$

$S = [0, +\infty[$

$y_1 = f(x)$



25.2 $g(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq x$

$g(x) = x \Leftrightarrow (15-2x)^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow \left[(15-2x)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$

Verificação:

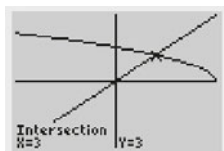
$x = -5: (15-2 \times (-5))^{\frac{1}{2}} = -5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = -5$ (Falso)

$x = 3: (15-2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$ (Verdadeiro)

Como $g(3) = 3$, g é decrescente e $y = x$ é crescente:

$g(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3]$

$y_1 = g(x); y_2 = x$



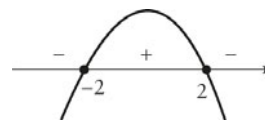
1. $f(x) = 2\sqrt{16-4x^2}$.

1.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 16-4x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$

Cálculos auxiliares:

$16-4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$



1.2 No radicando está uma expressão quadrática cujo máximo absoluto é 16. A raiz quadrada desse valor é não superior a 4 e o respetivo dobro será não superior a 8.

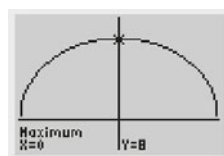
O máximo absoluto de f é 8.

1.3 $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 16-4x^2 \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{16-4x^2} \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{16-4x^2} \leq 8$

$D'_f = [0, 8]$.

1.4 $y_1 = f(x)$



f é estritamente crescente em $[-2, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, 2]$.

1.5 $f(x) = -3x \Leftrightarrow 2\sqrt{16-4x^2} = -3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{16-4x^2}\right)^2 = (-3x)^2 \Leftrightarrow 4(16-4x^2) = 9x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64-16x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{25} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5} \vee x = \frac{8}{5}$

Verificação:

$x = -\frac{8}{5}: 2\sqrt{16-4 \times \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = -3 \times \left(-\frac{8}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$ (V)

$x = \frac{8}{5}: 2\sqrt{16-4 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2} = -3 \times \frac{8}{5} \Leftrightarrow 2 \times \frac{12}{5} = -\frac{24}{5}$ (F)

$S = \left\{-\frac{8}{5}\right\}$.

2.1 Seja $\frac{AB}{2} = y$

$x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

$AB = 2y = 2\sqrt{100 - x^2}$

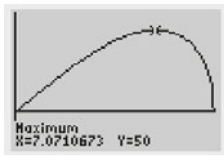
$A_{[ABC]} = \frac{AB \times x}{2} = \frac{2\sqrt{100 - x^2} \times x}{2}$

$A(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$0 < x < \overline{AC} \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

$$D_A =]0, 10[$$

$$y_1 = A(x)$$



$$D'_A =]0, 50].$$

$$2.2 \quad P = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB}$$

$$P(x) = 10 + 10 + 2\sqrt{100 - x^2}$$

$$P(x) = 20 + 2\sqrt{100 - x^2}$$

$$D_P =]0, 10[$$

$$0 < x < 10$$

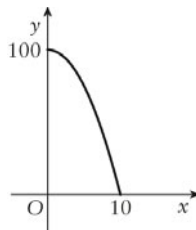
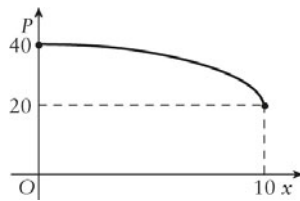
$$0 < 100 - x^2 < 100$$

$$0 < \sqrt{100 - x^2} < 10$$

$$0 < 2\sqrt{100 - x^2} < 20$$

$$20 < 20 + 2\sqrt{100 - x^2} < 40$$

$$D'_P =]20, 40[$$



$$2.3 \quad A(x) = 48 \Leftrightarrow x\sqrt{100 - x^2} = 48 \Rightarrow (x\sqrt{100 - x^2})^2 = 48^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(100 - x^2) = 2304$$

$$\Leftrightarrow 100x^2 - x^4 - 2304 = 0$$

Fazendo $y = x^2$, temos:

$$y^2 - 100y + 2304 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 36 \vee y = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 36 \vee x^2 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 6 \vee x = -8 \vee x = 8$$

Verificação:

$$x = -6: -6 \notin D_A$$

$$x = 6: 6\sqrt{100 - 36} = 48 \Leftrightarrow 48 = 48 \text{ (verdadeiro)}$$

$$x = -8: -8 \notin D_A$$

$$x = 8: 8\sqrt{100 - 64} = 48 \Leftrightarrow 48 = 48 \text{ (verdadeiro)}$$

$$A(x) = 48 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 8$$

Atendendo à variação de A , observada no gráfico obtido em

2.1 temos que:

$$A(x) \geq 48 \Leftrightarrow x \in [6, 8].$$

$$2.4 \quad P(x) = 32 \Leftrightarrow 20 + 2\sqrt{100 - x^2} = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} = 6 \Rightarrow 100 - x^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 8$$

Verificação:

$$x = -8: -8 \notin D_P$$

$$x = 8: 20 + 2\sqrt{100 - 64} = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 + 2\sqrt{36} = 32 \Leftrightarrow 20 + 12 = 32 \text{ (verdadeiro)}$$

$$S = \{8\}.$$

$$3.1 \quad \text{Se } \overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB} \text{ então } \overline{EB} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \text{ ou seja, } \overline{AB} = 3\overline{EB}.$$

$$\text{Área de } [AECD] = \text{Área de } [ABCD] - \text{Área de } [EBC] =$$

$$= \overline{AB} \times \overline{BC} - \frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2} =$$

$$= 3\overline{EB} \times \overline{BC} - \frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2} =$$

$$= \frac{6\overline{EB} \times \overline{BC} - \overline{EB} \times \overline{BC}}{2} =$$

$$= \frac{5\overline{EB} \times \overline{BC}}{2} = 5 \frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2}$$

$$= 5 \times \text{Área do triângulo } [EBC].$$

$$3.2 \quad \overline{EC} = 10 \text{ e } x = \overline{AB}$$

$$\overline{EB} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}x$$

$$\overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{EC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \overline{BC}^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}x^2 + \overline{BC}^2 = 100 \Leftrightarrow$$

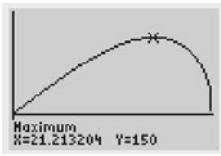
$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100 - \frac{1}{9}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{BC} > 0 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{100 - \frac{1}{9}x^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{Área } [ABCD] = \overline{AB} \times \overline{BC}$$

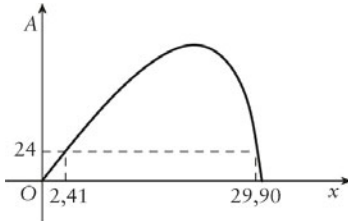
$$A(x) = x\sqrt{100 - \frac{1}{9}x^2}.$$

3.3 $y_1 = A(x)$



A área é máxima para $x \approx 21,2$ cm.

3.4



$A(x) \geq 24$ para $x \in [2,41; 29,90]$.

Pág. 68

1. $\overline{AB} = 0,3$ km ; $\overline{BP} = x$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AP}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,3^2 + x^2 = \overline{AP}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AP} > 0 \Leftrightarrow \overline{AP} = \sqrt{x^2 + 0,3^2} \Leftrightarrow$$

$$d = \overline{AP} + \overline{PC}$$

$$d = \sqrt{x^2 + 0,3^2} + 1 - x, 0 \leq x \leq 1$$

2. $V = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{V}$

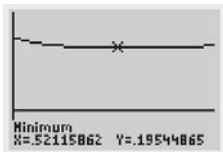
Tempo total = tempo de A a P + tempo de P a C

$$t = t_{AP} + t_{PC}$$

$$= \frac{d_{AP}}{v_{AP}} + \frac{d_{PC}}{v_{PC}} = \frac{\sqrt{x^2 + 0,3^2}}{5,2} + \frac{1-x}{6}$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 0,3^2}}{5,2} + \frac{1-x}{6}$$

3. $y_1 = t(x)$



O tempo do trajeto é mínimo se $\overline{BP} \approx 0,521$ km, ou seja,

$$\overline{BP} \approx 521 \text{ m.}$$

O tempo mínimo é de aproximadamente 0,195 h, ou seja, cerca de 12 minutos.

Pág. 69

26. $r = 10$ cm; $\overline{AB} = 20$ cm.

26.1 Se o triângulo $[ABC]$ está inscrito numa circunferência de diâmetro $[AB]$ então é retângulo em C . Assim,

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Leftrightarrow y^2 = 400 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{400 - x^2} \quad y > 0$$

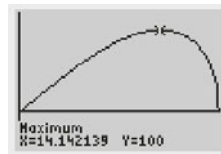
$$0 < x < \overline{AB} \Leftrightarrow 0 < x < 20$$

$$D =]0, 20[.$$

26.2 $A = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \sqrt{400 - x^2}$

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{400 - x^2}$$

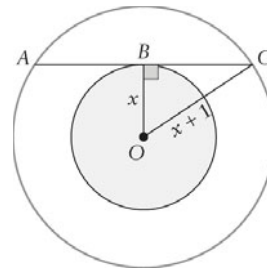
$$y_1 = A(x)$$



A área mínima do triângulo é 100 cm^2 para $x \approx 14,142$ cm.

27.1 $f(x) = \overline{AB}$

Seja C o ponto de tangência da reta AB no círculo de raio x e centro O .



Então $OC \perp AB$ e $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Sabe-se ainda que $\overline{OB} - \overline{OC} = 1$, ou seja, $\overline{OB} = x + 1$, dado que $\overline{OC} = x$.

$$\text{Logo, } x^2 + \overline{CB}^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB} = \sqrt{2x+1}$$

$$f(x) = \overline{AB} = 2\overline{CB}$$

$$f(x) = 2\sqrt{2x+1}$$

27.2 $\overline{AB} = 10 \Leftrightarrow$

$$f(x) = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 25 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$$

Verificação

$$2\sqrt{2 \times 12 + 1} = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{25} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 5 = 10 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo, como $x = 12$ temos $\overline{OC} = 12$ e $\overline{OB} = 13$.

Círculo de raio menor:

$$A = \pi \times \overline{OC}^2 = \pi \times 12^2 = 144\pi; \quad A = 144\pi \text{ m}^2$$

Círculo de raio maior:

$$A = \pi \times \overline{OB}^2 = \pi \times 13^2 = 169\pi$$

$$A = 169\pi \text{ m}^2.$$

Pág. 70

1. $\overline{FA} = 4$

$$\overline{BA} = x \Rightarrow \overline{FB} = 4 - x$$

$$\overline{AC} = 2.$$

1.1 $P = \overline{FB} \times 3 + \overline{BC} \times 5$

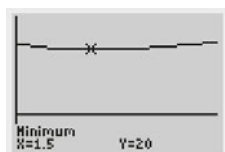
$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = x^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$p(x) = 3 \times (4 - x) + 5\sqrt{x^2 + 4}$$

$$p(x) = 12 - 3x + 5\sqrt{x^2 + 4}, 0 < x < 4.$$

1.2 $y_1 = p(x)$



O preço de colocação da conduta é mínimo para $x = 1,5$ km.

2.1 $\overline{B'A'} = 9$ e $\overline{B'P} = x \Rightarrow \overline{PA'} = 9 - x$

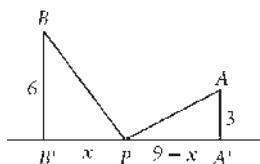
$$\overline{BP}^2 = 6^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{BP} = \sqrt{36 + x^2}$$

$$\overline{AP}^2 = (9 - x)^2 + 3^2$$

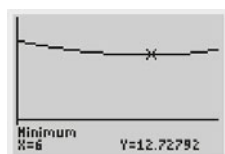
$$\overline{AP}^2 = 81 - 18x + x^2 + 9$$

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 - 18x + 90}$$

$$\overline{BP} + \overline{AP} = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 18x + 90}.$$



2.2 $y_1 = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 18x + 90}$



Para o percurso ser mínimo, P deverá estar a 6 km de B' e a 3 km de A' .

Pág. 71

3. $x^2 + y^2 = 10^2, \quad 0 < x < 12, \quad 0 < y < 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$A = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2}y$$

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100 - x^2}$$

$$A(x) = 20 \Leftrightarrow \frac{x}{2}\sqrt{100 - x^2} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\sqrt{100 - x^2}\right)^2 = 20^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}(100 - x^2) = 400$$

$$\Leftrightarrow 100^2 - x^4 = 1600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 100x^2 + 1600 = 0$$

Fazendo $x^2 = a$, vem:

$$a^2 - 100a + 1600 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 20 \vee a = 80$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 20 \vee x^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{20} \vee x = \sqrt{80}$$

Verificação:

$$x = \sqrt{20} : \frac{\sqrt{20}}{2}\sqrt{100 - (\sqrt{20})^2} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20}\sqrt{80} = 40 \Leftrightarrow \sqrt{1600} = 40 \text{ (verdadeiro)}$$

$$x = \sqrt{80} : \frac{\sqrt{80}}{2}\sqrt{100 - (\sqrt{80})^2} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{80}\sqrt{20} = 40 \Leftrightarrow \sqrt{1600} = 40 \text{ (verdadeiro)}$$

$$x = \sqrt{20} \Rightarrow y = \sqrt{100 - 20} = \sqrt{80}$$

Como $\sqrt{80} > 6$, $\sqrt{20}$ não é solução.

$$x = \sqrt{80} \Rightarrow y = \sqrt{100 - 80} = \sqrt{20}$$

$$x = \sqrt{80} \approx 8,94 \text{ m e } y = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ m.}$$

4.1 $P = 2\pi r$

$$r^2 + h^2 = g^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Como $h = 14$, temos $g = \sqrt{r^2 + 14^2}$.

$$A = \frac{P}{2} \times g$$

$$A = \frac{1}{2}2\pi r\sqrt{r^2 + 14^2} \Leftrightarrow A = \pi r\sqrt{r^2 + 14^2}.$$

4.2 $A = 282,7 \text{ cm}^2$

$$\pi r \sqrt{r^2 + 14^2} = 282,7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pi r \sqrt{r^2 + 14^2} \right)^2 = 282,7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^2 r^2 (r^2 + 14^2) = 282,7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 + 14^2 r^2 = \left(\frac{282,7}{\pi} \right)^2$$

Fazendo $x = r^2$, temos:

$$x^2 + 14^2 x - \left(\frac{282,7}{\pi} \right)^2 = 0$$

$$x \approx -231,047 \vee x \approx 35,047$$

Como $x > 0$, temos:

$r^2 = 35,047$, pelo que, sendo $r > 0$, vem:

$$r \approx \sqrt{35,047} \text{ cm} \approx 5,9 \text{ cm}$$

Verificação:

$$\pi \times \sqrt{35,047} \sqrt{35,047 + 14^2} \approx 282,7$$

$$r \approx 5,9 \text{ cm}.$$

5. Área da base da caleira

$$A_b = \frac{xy}{2}$$

$$x^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 25 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 100 - 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{100 - 4x^2}$$

$$A(x) = \frac{x}{2} \times \sqrt{100 - 4x^2}$$

$$V(x) = A_b \times 20 = \frac{x}{2} \times \sqrt{100 - 4x^2} \times 20 =$$

$$= 10x \sqrt{100 - 4x^2} \text{ com } 0 < x < 5.$$

$$60 \text{ L} = 60 \text{ dm}^3$$

$$V(x) = 60 \Leftrightarrow 10x \sqrt{100 - 4x^2} = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{100 - 4x^2} = 6 \Rightarrow x^2 (100 - 4x^2) = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100x^2 - 4x^4 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 100x^2 + 36 = 0$$

Fazendo $a = x^2$, temos:

$$4a^2 - 100a + 36 = 0 \Rightarrow a \approx 0,3653 \vee a \approx 24,6347$$

Como $x > 0$, vem:

$$x \approx \sqrt{0,3653} \vee x \approx \sqrt{24,6347}$$

Verificação:

$$\sqrt{0,3653} \times \sqrt{100 - 4 \times 0,3653} \approx 6$$

$$\sqrt{24,6347} \times \sqrt{100 - 4 \times 24,6347} \approx 6$$

$$x \approx \sqrt{0,3653} \Rightarrow y \approx \sqrt{100 - 4x^2} \approx 9,93$$

$$x \approx \sqrt{24,6347} \Rightarrow y \approx \sqrt{100 - 4x^2} \approx 1,21$$

Temos, então:

$$x \approx 0,60 \text{ dm e } y \approx 9,93 \text{ dm ou}$$

$$x \approx 4,96 \text{ dm e } y \approx 1,21 \text{ dm}.$$

$$6. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{e}{980}}$$

$$6.1 \quad T(20) = 2\pi \sqrt{\frac{20}{980}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{2\pi}{7} \approx 0,9$$

$$T(20) \approx 0,9 \text{ s}.$$

$$6.2 \quad T = 1,2 \Leftrightarrow 2\pi \sqrt{\frac{e}{980}} = 1,2 \Rightarrow \left(2\pi \sqrt{\frac{e}{980}} \right)^2 = 1,2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\pi^2 \times \frac{e}{980} = 1,44 \Leftrightarrow e = \frac{1,44 \times 980}{4\pi^2} \Leftrightarrow e \approx 35,7 \text{ cm}$$

Verificação:

$$2\pi \sqrt{\frac{1,44 \times 980}{4\pi^2}} \times \frac{1}{980} = 1,2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{2\pi} \times \sqrt{1,44} = 1,2 \Leftrightarrow 1,2 = 1,2 \text{ (verdadeiro).}$$

$$6.3 \quad T_1 = 3T_2 \Leftrightarrow 2\pi \sqrt{\frac{e_1}{380}} = 3 \times 2\pi \sqrt{\frac{e_2}{380}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{e_1}{380}} = 3 \sqrt{\frac{e_2}{380}} \Rightarrow \frac{e_1}{380} = 9 \frac{e_2}{380} \Leftrightarrow e_1 = 9e_2$$

$$T_1 = 3T_2 \Rightarrow e_1 = 9e_2$$

Se o período de um pêndulo é o triplo do período de outro então o seu comprimento é nove vezes maior.

$$1. \quad (A) \text{ é falsa. Por exemplo } \sqrt[3]{1} = \sqrt[4]{1}$$

$$(B) \text{ é falsa. Por exemplo } \sqrt{64} = 2\sqrt[3]{64} \text{ dado que } 8 = 2 \times 4$$

$$(C) \text{ é verdadeira pois } \sqrt{0} = 3\sqrt[4]{0}$$

Resposta: (C).

$$2. \quad (A) \text{ é falsa porque } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Resposta: (A).

$$3. \quad 1 = (3x - 2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1^2 = \left((3x - 2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Verificação:

$$1 = (3x - 2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 = 1$$

Resposta: (A).

$$4. \quad \sqrt{2x+1} = 5 \Rightarrow 2x+1 = 25 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$$

Verificação:

$$\sqrt{2 \times 12 + 1} = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$$

Como a função definida por $f(x) = \sqrt{2x+1}$ é estritamente

$$\text{crescente em } \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right] \text{ e } f(12) = 5$$

$$\text{então } f(x) > 5 \Leftrightarrow x \in]12, +\infty[.$$

Resposta: (B).

$$5. \quad f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1}$$

$$g(x) = 1$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (1 + \sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+1 = 1 + (2x-1) + 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{2x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (2\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Verificação:

$$x = 1: \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \Leftrightarrow 2 - 1 = 1 \text{ (verdadeiro)}$$

$$x = 5: \sqrt{15+1} - \sqrt{10-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1 \Leftrightarrow 4 - 3 = 1 \text{ (verdadeiro)}$$

Os pontos de interseção dos dois gráficos têm coordenadas

(1, 1) e (5, 1).

Resposta: (B).

$$6. \quad y^2 + 10^2 = (10+x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (10+x)^2 - 100 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{(10+x)^2 - 100}$$

Resposta: (D).

7. A equação $\sqrt[4]{x+3} = -5$ é impossível porque

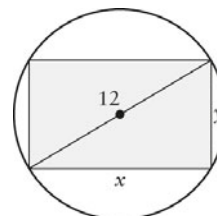
$$\sqrt[4]{x+3} > 0, \forall x \in [-3, +\infty[.$$

Resposta: (B).

Pág. 73

1.1 A altura do sabonete terá de ser igual a 3 cm.

A base terá a forma do retângulo de área máxima que se pode inscrever num círculo de raio 6 cm:



Sejam x e y as dimensões da base.

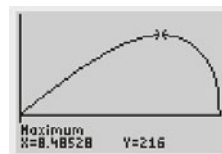
$$\text{Então } x^2 + y^2 = 12^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{144 - x^2}$$

$$A_{\text{base}} = xy$$

$$A(x) = x\sqrt{144 - x^2}$$

$$V(x) = 3x\sqrt{144 - x^2}, \quad 0 < x < 12$$

$$y_1 = V(x)$$



$$x \approx 8,4852 \Rightarrow y = \sqrt{144 - x^2} \approx 8,4852$$

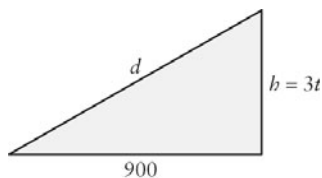
Para que o volume seja máximo, o sabonete terá de ter as dimensões, em centímetros, $8,5 \times 8,5 \times 3$.

1.2 O volume máximo do sabonete é igual a 216 cm^3 .

2. $\overline{OA} = 900 \text{ m}$

$v = 3 \text{ m/s}$

2.1



$$v = \frac{e}{t} \Leftrightarrow e = vt$$

Então $h = 3t$, sendo h em metros e t em segundos.

$$d^2 = 900^2 + (3t)^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{900^2 + 9t^2}$$

$$d(t) = \sqrt{900^2 + 9t^2}$$

$$d = 2 \text{ km} = 2000 \text{ m}$$

$$d(t) = 2000 \Leftrightarrow \sqrt{900^2 + 9t^2} = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 900^2 + 9t^2 = 2000^2 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{2000^2 - 900^2}{9} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3\,190\,000}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{100}{3} \sqrt{319} \Leftrightarrow t = \frac{100}{3} \sqrt{319}$$

$$t \approx 595,352 \text{ s}$$

Verificação:

$$\sqrt{900^2 + 9 \frac{3\,190\,000}{9}} = 2000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4\,000\,000} = 2000 \text{ (verdadeiro)}$$

Então, $t \approx 395,325 \text{ s} \approx 9 \text{ min } 55 \text{ s}$.

3. (A) $(3 - x^2)^{\frac{1}{2}} (3 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (3 - x^2)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = (3 - x^2)^2$

(B) $\sqrt{a^2 + 4} = a + 2$ apenas se $a = 0$, pois:
 $(a + 2)^2 = a^2 + 4 + 4a$

(C) $\frac{2}{\sqrt{x+3}} + 2\sqrt{x+3} = \frac{2 + 2(\sqrt{x+3})^2}{\sqrt{x+3}} =$
 $= \frac{2 + 2(x+3)}{\sqrt{x+3}}$

(D) $\sqrt{2+2x} = \sqrt{2(1+x)} = \sqrt{2}\sqrt{1+x}$

(E) $\sqrt{2x^3 + x^5} = \sqrt{x^2(2x + x^3)} = |x|\sqrt{2x + x^3}$

(F) $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

(G) $x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right) = x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^2)$

(H) $\sqrt[4]{(x+7)^2} = \sqrt{x+7}$ apenas se $x + 7 \leq 0$.

4.1 $x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

$$A = 4xy; A(x) = 4x\sqrt{100 - x^2}$$

4.2 Terá de ser um retângulo semelhante com área A' sendo $A' = 2A$.

Como $\frac{A'}{A} = 2$, a razão de semelhança será $\sqrt{2}$.

Logo, o raio do círculo é multiplicado por $\sqrt{2}$, ou seja é igual a $10\sqrt{2} \text{ cm}$.

5.1 Atendendo aos dados temos:

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{25 + x^2}$$

$$\overline{CP} = 12 - x$$

Velocidade de B a C: 30 km/h

Velocidade de C a P: 40 km/h

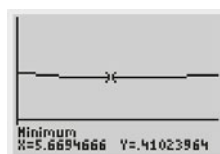
$$T = T_{BC} + T_{CP}$$

$$v = \frac{e}{t} \Leftrightarrow t = \frac{e}{v}$$

$$T = \frac{\overline{BC}}{30} + \frac{\overline{CP}}{40}$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{30} + \frac{12 - x}{40}$$

5.2 $y_1 = T(x)$



$$x \approx 5,67 \text{ km.}$$

1. $\beta: 3x - z = 2; r: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}; P(0, 2, 3)$

$$3 \times 0 - 3 = 2 \text{ (falso); } P \notin \beta$$

$$0 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \text{ (falso); } P \notin r$$

$$\vec{r} = (1, 2, 3); \vec{n} = (3, 0, -1) \perp \beta$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 3 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{n} \Rightarrow r \parallel \beta$$

A reta r é paralela ao plano β .

Resposta: (C).

2. $\frac{\overline{AB}}{2} = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \text{tg } \alpha$

$$A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{AB} = 2 \times 2 \text{tg } \alpha = 4 \text{tg } \alpha$$

Resposta: (C).

Pág. 79

$$\begin{aligned} 3. \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CB} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = -\|\overrightarrow{BC}\|^2 = -1 \end{aligned}$$

Resposta: (B).

4. O gráfico de g é obtido do gráfico de f pela translação associado ao vetor $\vec{u} = (-1, 0)$.

A mesma transformação pode ser aplicada às assintotas:

$$x = 3 \rightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$$

$$y = 4 \rightarrow y - 0 = 4 \Leftrightarrow y = 4$$

Resposta: (C).

$$5. \quad f(x) = a + \frac{1}{x+b}$$

As retas de equações $y = a$ ($a < 0$) e $x = -b$ ($-b > 0$) são assintotas do gráfico de f .

Resposta: (D).

Pág. 80

$$1. \quad A(t) = \frac{10t+3}{2(t+2)}, \quad t \geq 0.$$

$$1.1 \quad A(0) = \frac{3}{4} \text{ m} = 0,75 \text{ m} = 75 \text{ cm}$$

Na altura da plantação as árvores mediam, em média, 75 cm.

$$1.2 \quad A(t) = 4,5 \Leftrightarrow \frac{10t+3}{2t+4} - 4,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10t+3-9t-18}{2t+4} = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Decorridos 15 anos a altura das árvores será de 4,5 m, em média.

$$1.3 \quad A(t) = a + \frac{b}{t-c}, t \geq 0$$

$$A(t) = \frac{10t+3}{2t+4} = 5 + \frac{-17}{2t+4} = 5 + \frac{-17}{2(t+2)}$$

$$a = 5, \quad b = -\frac{17}{2} \text{ e } c = -2$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} 10t+3 \quad | \quad 2t+4 \\ -10t-20 \quad | \quad 5 \\ \hline -17 \end{array}$$

- 1.4 A reta de equação $y = 5$ é uma assintota do gráfico de A . Significa que a altura média das árvores desta espécie na idade adulta aproxima-se dos 5 metros.

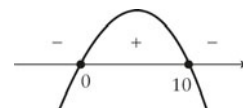
$$2. \quad f(x) = \sqrt{10x-x^2}; \quad g(x) = 10-3x$$

$$2.1 \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 10x-x^2 \geq 0\} = [0, 10]$$

Cálculo auxiliar:

$$10x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x(10-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$$



$$2.2 \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{10x-x^2} = 10-3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{10x-x^2})^2 = (10-3x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x-x^2 = 100-60x+9x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2-70x+100=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=5$$

Verificação:

$$x=2: \sqrt{20-4} = 10-6 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 \text{ (verdadeiro)}$$

$$x=5: \sqrt{50-25} = 10-15 \Leftrightarrow \sqrt{25} = -5 \text{ (falso)}$$

$$g(2) = 10-6 = 4$$

Os gráficos de f e g interseitam-se no ponto de coordenadas (2, 4).

Pág. 81

$$3. \quad C(2, -2, 0);$$

$$ACB: 3x+z=6$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -2,5$$

$$3.1 \quad E(0, -2, 0)$$

- a) Um plano paralelo a ACB pode ser definido por uma equação da forma $3x+z=d$.

Substituindo as coordenadas de E , vem:

$$3 \times 0 + 0 = d \Leftrightarrow d = 0$$

$3x+z=0$ é uma equação do plano paralelo a ACB que passa em E .

$$b) \quad \overrightarrow{EC} = C - E = (2, 0, 0) \perp \alpha$$

Ponto A : (1, -1, z)

Como $A \in ACB$ temos: $3 \times 1 + z = 6 \Leftrightarrow z = 3$

$$A(1, -1, 3)$$

Plano perpendicular a EC e que passa em A :

$$2(x-1) + 0(y+1) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$c) \quad E(0, -2, 0)$$

(3, 0, 1) é um vetor diretor da reta, por ser perpendicular ao plano ACB .

$$\frac{x}{3} = z \wedge y = -2 \text{ é uma equação da reta que passa em } E \text{ e é}$$

perpendicular a ACB .

3.2 Superfície esférica de diâmetros $[BE]$:

$$B(2, 0, 0), E(0, -2, 0)$$

$$\text{Centro: } M(1, -1, 0)$$

$$\text{Raio: } r = \overline{ME} = \sqrt{1^2 + (-1+2)^2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$\text{Equação: } (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$$

Dado que o ponto $P(1 + \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha - 1, \cos \alpha)$ pertence à superfície esférica, temos:

$$(1 + \sin \alpha - 1)^2 + (\operatorname{tg} \alpha - 1 + 1)^2 + \cos^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ vem } \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ e } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Temos então:

$$1 + \sin \alpha = 1 + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } P\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3.3 $C(2, -2, 0), A(1, -1, 3)$,

$$D(1, -1, a), a < 0$$

$$\overline{CA} = A - C = (-1, 1, 3)$$

$$\overline{CD} = D - C = (-1, 1, a)$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CD} = 1 + 1 + 3a = 2 + 3a$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CD} = -2,5 \Leftrightarrow 2 + 3a = -2,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a = -4,5 \Leftrightarrow a = -1,5$$

O octaedro $[OABCDE]$ é composto por duas pirâmides com a base comum de área igual a $2 \times 2 = 4$ e alturas 3 (cota de A) e 1,5 (módulo da cota de D).

Logo:

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 + \frac{1}{3} \times 4 \times 1,5 = 4 + 2 = 6$$

$$V = 6 \text{ u. a.}$$

Pág. 82

$$1. \quad r: (x, y, z) = (3, 1, 0) + k(0, 1, -2), k \in \mathbb{R}$$

$$s: y = 1 \wedge x = z$$

$$\vec{r} = (0, 1, -2); \vec{s} = (1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \cos(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{s}}) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{0+1+4} \times \sqrt{1+0+1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{s}}) \approx 51.$$

Resposta: (C).

$$2. \quad \sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha < 0$$

$\sin \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ têm sinais contrários. Então α é do 2.º ou do 3.º quadrante pelo que $\cos \alpha < 0$.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\text{Como } \cos \alpha < 0, \text{ temos } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Resposta: (C).

$$3. \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \wedge x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 3) \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = 3$$

Resposta: (D).

Pág. 83

$$4. \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$$

As retas de equações $y = 2$ e $x = 3$ são assintotas do gráfico da função f .

O gráfico da função g tal que $g(x) = f(x+2) - 1$ é a imagem do gráfico de f na translação associada ao vetor $\vec{u} = (-2, -1)$. O mesmo acontece com as correspondentes assintotas:

$$x = 3 \rightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 2 \rightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

Resposta: (C).

$$5. \quad A(3, 5), B(4, 3)$$

$$\text{Reta } AB: m = \frac{3-5}{4-3} = -2$$

$$y - 3 = -2(x - 4) \Leftrightarrow y - 3 = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x + y = 11$$

Região admissível:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 11 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Vértices: $(0, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 5)$ e $(0, 5)$

$$L(0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$L(4, 1) = 4 + 1 = 5$$

$$L(3, 5) = 3 + 5 = 8$$

$$L(0, 5) = 0 + 5 = 5$$

O máximo de L é 8. Resposta: (C).

Pág. 84

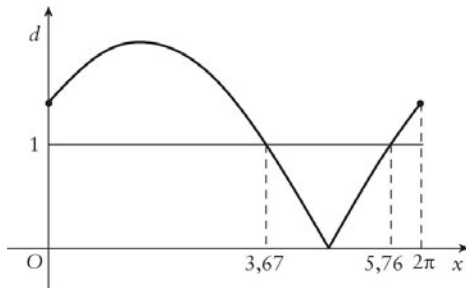
1. $A(0, -1)$, $B(1, 0)$, $P(\cos x, \sin x)$.

1.1 $d(x) = \overline{AP}$

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{\cos^2 x + (\sin x + 1)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x + 1} = \\ &= \sqrt{1 + 2\sin^2 x + 1} = \sqrt{2 + 2\sin x} \end{aligned}$$

1.2 Trata-se de resolver graficamente a equação $d(x) = 1$.

Introduziram-se na calculadora as funções $y_1 = d(x)$ e $y_2 = 1$. Determinaram-se as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos, tendo sido obtidos os seguintes resultados:



$x \approx 3,76 \text{ rad}$ ou $x \approx 5,76 \text{ rad}$.

Pág. 85

2. Seja:

x = número de mesas do tipo A e

y = número de mesas do tipo B produzidas diariamente.

	Produção	Acabamento
x	$3x$	$5y$
y	$2y$	$8y$

Função objetivo: $L(x, y) = 2000x + 1500y$

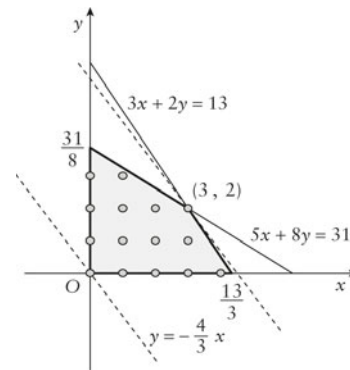
Restrições:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 13 \\ 5x + 8y \leq 31 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 5x + 8y = 31 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{3} & 0 \end{array} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (3, 2) \end{aligned}$$

Região admissível:



Reta de nível zero: $2000x + 1500y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$.

A solução ótima corresponde ao vértice $(3, 2)$.

Para minimizar o lucro devem ser fabricadas três mesas do estilo A e duas do estilo B.

3. $f(6) = 0$

3.1 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$.

3.2 $g(x) = x - 1$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1		3		6	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+		-	0	+
$g(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	-	0	+		-	0	+

$f(x) \times g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3] \cup [6, +\infty[$.

3.3 $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$

As retas de equações $y = a$ e $x = c$ são assíntotas do gráfico de f .

Logo, $c = 3$ e $f(x) = a + \frac{b}{x - 3}$.

$$\begin{cases} f(6) = 0 \\ f(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{6-3} = 0 \\ a + \frac{b}{-3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -3a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ b + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -3a \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

$a = 2$, $b = -6$, $c = 3$.

Pág. 88

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{3-x}$.

1.1 $f(x) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3-x} - \frac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3-x+4}{4(3-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7-x}{4(3-x)} \leq 0$

$7-x=0 \Leftrightarrow x=7; \quad 4(3-x)=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$7-x$	+	+	+	0	-
$4(3-x)$	+	0	-	-	-
$\frac{7-x}{4(3-x)}$	+	s.s.	-	0	+

$S =]3, 7]$.

1.2 $r: y = 1; \quad s: x = 3$.

1.3 $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$

As retas de equações $y = a$ e $x = c$ são assintotas do gráfico de g . Logo, por observação do gráfico, temos que $a = -1$ e $c = -1$, pelo que:

$g(x) = -1 + \frac{b}{x+1}$.

Verifica-se que $g(0) = 0$. Então:

$-1 + \frac{b}{1} = 0 \Leftrightarrow b = 1$

$a = -1, \quad b = 1$ e $c = -1$.

1.4 $g(x) = -1 + \frac{b}{x+1}; \quad r: y = 1$

Ponto C

$\begin{cases} y = 1 \\ y = -1 + \frac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 1 = -1 + \frac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{-2x-2+1}{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$B(3, 1), \quad A(-1, -1)$

$\overline{BC} = \left| 3 + \frac{1}{2} \right| = \frac{7}{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} =$
 $= \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} =$
 $= \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$P = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} + 2\sqrt{5} = \frac{7 + \sqrt{17} + 4\sqrt{5}}{2}$.

1.5 $\overline{BC} = C - B = \left(-\frac{1}{2} - 3, 0\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

$\overline{BA} = A - B = (-1-3, -1-1) = (-4, -2)$

$\cos(\overline{BC}, \overline{BA}) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{\|\overline{BC}\| \times \|\overline{BA}\|} =$
 $= \frac{-4 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 0 \times (-2)}{\frac{7}{2} \times \sqrt{16+4}} = \frac{14}{\frac{7}{2} \times 2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Logo, $\hat{CBA} \approx 27^\circ$.

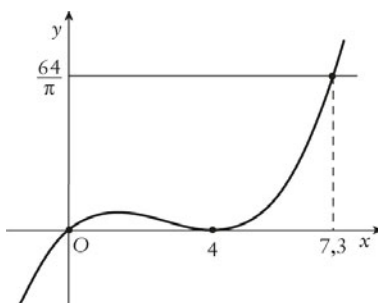
1.6 Base $\overline{CB} = \frac{7}{2}$

Altura: distância de $A(-1, -1)$ à reta $CB: y = 1$ que é igual a $|-1-1| = 2$.

$A_{[ABC]} = \frac{\frac{7}{2} \times 2}{2} = \frac{7}{2}$ u. a.

2. $0 < \pi \left(\frac{x^3}{4} - 2x^2 + 4x \right) \leq 64 \Leftrightarrow 0 < \frac{x^3}{4} - 2x^2 + 4x \leq \frac{64}{\pi}$

$y_1 = \frac{x^3}{4} - 2x^2 + 4x; \quad y_2 = \frac{64}{\pi}$



$S =]0, 4[\cup]4, a]$ com $a \approx 7,3$

Pág. 89

$$3. \quad d(t) = \frac{40t^2 + 8000}{t^2 + 500}$$

$$3.1 \quad 8:08 \rightarrow t = 8$$

$$8:14 \rightarrow t = 14$$

$$d(8) = \frac{40 \times 64 + 8000}{64 + 500} \approx 19 \text{ min}$$

$$8 \text{ h } 8 \text{ min} + 19 \text{ min} = 8 \text{ h } 27 \text{ min.}$$

A Antónia chega ao trabalho 3 minutos antes das 8 h 30 min.

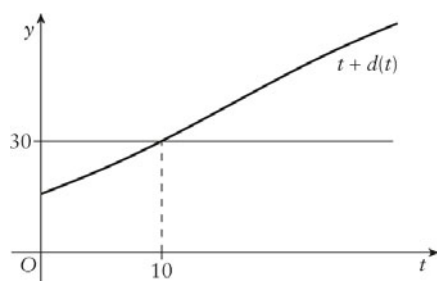
$$d(14) = \frac{40 \times 14^2 + 8000}{14^2 + 500} \approx 22,7 \text{ min}$$

$$8 \text{ h } 8 \text{ min} + 22,7 \text{ min} = 8 \text{ h } 30 \text{ min } 42 \text{ s.}$$

A Antónia chega cerca de 42 s depois da hora.

- 3.2 Trata-se de resolver a inequação $t + d(t) \leq 30$ sendo t o tempo que decorre desde as 8 horas até sair de casa e $d(t)$ o tempo da viagem. A soma dos dois tempos não pode exceder 30 minutos para que a Antónia chegue a tempo ao trabalho.

$$y_1 = t + d(t), \quad 0 < t < 30; \quad y_2 = 30$$



Para que a Antónia não chegue atrasada terá de sair de casa até às 8 horas e 10 minutos.

4. i) A amplitude do ângulo BAC varia entre 0 e π .

Logo $D_s =]0, \pi[$.

$$ii) \quad A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (\overline{AB} = 1)$$

$$s(\alpha) = \frac{\pi}{2}, \forall \alpha \in]0, \pi[$$

(A) e (C) são de rejeitar porque não verifica a condição i).

(B) é de rejeitar porque não verifica as condições i) e ii).

A opção correta é a (D).

Pág. 90

1. As funções f e g não são iguais porque não têm o mesmo domínio.

Pág. 91

$$1.1 \quad \text{Não. } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \text{ e } D_g = \mathbb{R}.$$

$$1.2 \quad \text{Não. } \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|. \text{ Logo, } f(x) \neq g(x), \forall x \in]-\infty, -3[.$$

$$1.3 \quad f(x) = \sqrt{(-2x)^2} = |-2x| = |2x| = g(x) \text{ e } D_f = D_g.$$

As funções f e g são iguais.

$$1.4 \quad \text{As funções são iguais.}$$

Pág. 93

$$2.1 \quad f(x) = 3x; \quad g(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}, \quad D_f \cap D_g = \mathbb{R},$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + x + \frac{1}{2} = 4x + \frac{1}{2}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 4x + \frac{1}{2}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3x - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x - \frac{1}{2}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$f-g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{2}$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = 3x \left(x + \frac{1}{2}\right) = 3x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x}{x + \frac{1}{2}} = \frac{3x}{\frac{2x+1}{2}} = \frac{6x}{2x+1}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{6x}{2x+1}$$

$$2.2 \quad f(x) = \frac{x+3}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = \frac{x}{x+4}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}.$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{x+3}{x} + \frac{x}{x+4} = \\ &= \frac{(x+3)(x+4) + x^2}{x(x+4)} = \frac{2x^2 + 7x + 12}{x^2 + 4x} \end{aligned}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 + 7x + 12}{x^2 + 4x} \end{aligned}$$

$$(f-g)(x) = \frac{x+3}{x} - \frac{x}{x+4} = \frac{(x+3)(x+4) - x^2}{x(x+4)} = \frac{7x+12}{x^2+4x}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$\begin{aligned} f-g : \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{7x+12}{x^2+4x} \end{aligned}$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x+3}{x} \times \frac{x}{x+4} = \frac{x+3}{x+4}$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+3}{x+4} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x+4}} = \frac{(x+3)(x+4)}{x^2} = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2} \end{aligned}$$

$$2.3 \quad f(x) = \frac{2x-6}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-3}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}.$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \frac{2x-6}{x} + \frac{x+1}{x-3} = \\ &= \frac{(2x-6)(x-3) + x(x+1)}{x(x-3)} = \frac{3x^2 - 11x + 18}{x^2 - 3x} \end{aligned}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3x^2 - 11x + 18}{x^2 - 3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= \frac{2x-6}{x} - \frac{x}{x-3} = \frac{(2x-6)(x-3) - x^2}{x(x-3)} = \\ &= \frac{x^2 - 13x + 18}{x^2 - 3x} \end{aligned}$$

$$D_{f-g} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$\begin{aligned} f-g : \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 - 13x + 18}{x^2 - 3x} \end{aligned}$$

$$(fg)(x) = \frac{2x-6}{x} \times \frac{x+1}{x-3} = \frac{2(x-3)(x+1)}{x(x-3)} = \frac{2x+2}{x}$$

$$D_{fg} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x+2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2x-6}{x}}{\frac{x+1}{x-3}} = \frac{2(x-3)(x-3)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + x} \end{aligned}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + x} \end{aligned}$$

$$3.1 \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = \mathbb{R}_0^+$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+.$$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R}^+$$

$$f+g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$$

$$D_{f-g} = \mathbb{R}^+$$

$$f-g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x}$$

$$(fg)(x) = \frac{1}{x} \times \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$D_{fg} = \mathbb{R}^+$$

$$fg: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}^+$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$3.2 \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1},$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \wedge x-1 \neq 0\} = [-1, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R}_0^+$$

$$f+g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$D_{f-g} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$f-g: \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x} \times \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$$

$$D_{fg} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$fg: \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}} = \frac{\sqrt{x}(x-1)}{\sqrt{x+1}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}(x-1)}{\sqrt{x+1}}$$

$$3.3 \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad D_f = [-1, +\infty[$$

$$g(x) = \sqrt{6-x}, \quad D_g =]-\infty, 6]$$

$$D_f \cap D_g = [-1, 6]$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = [-1, 6[$$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x}$$

$$D_{f+g} = [-1, 6]$$

$$f+g: [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$D_{f-g} = [-1, 6]$$

$$f-g: [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{6-x} = \sqrt{(x+1)(6-x)} =$$

$$= \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$$

$$D_{fg} = [-1, 6]$$

$$fg: [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{6-x}} = \sqrt{\frac{x+1}{6-x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = [-1, 6[$$

$$\frac{f}{g}: [-1, 6[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{6-x}}$$

Pág. 95

$$4. \quad f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 3 \\ -x & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

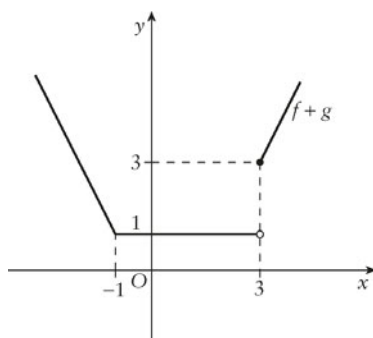
$$D_f = D_g = \mathbb{R}; \quad D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f(x)$	$-x-1$	0	$x+1$	4	$x+1$
$g(x)$	$-x$	1	$-x$	-1	$x-4$
$(f+g)(x)$	$-2x-1$	1	1	3	$2x-3$
$(f-g)(x)$	-1	-1	$2x+1$	5	5
$(fg)(x)$	x^2+x	0	$-x^2-x$	-4	x^2-3x-4
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{x+1}{x}$	0	$\frac{-x-1}{x}$	-4	$\frac{x+1}{x-4}$

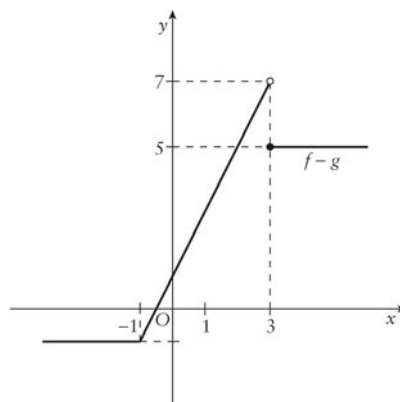
$$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -2x-1 & \text{se } x < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ 2x-3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



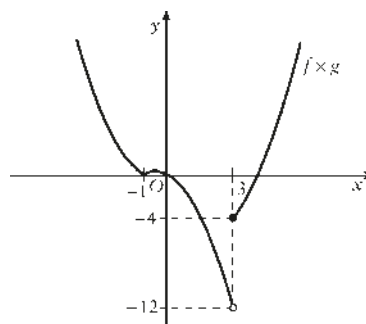
$$f-g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ 2x+1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



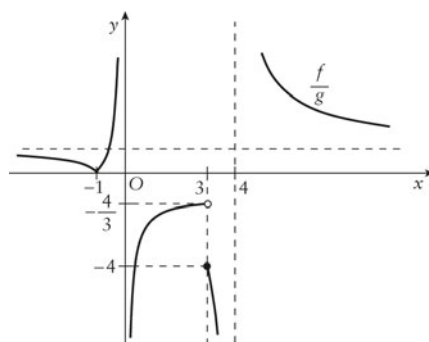
$$fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2+x & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2-x & \text{se } -1 < x < 3 \\ x^2-3x-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{-x-1}{x} & \text{se } -1 < x < 3 \wedge x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-4} & \text{se } x \geq 3 \wedge x \neq 4 \end{cases}$$



Pág. 96

$$5.1 \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f(x)$	$-x$	1	$-x$	0	x
$-g(x)$	$x+1$	0	$-x-1$	-1	$-x-1$
$(f-g)(x)$	1	1	$-2x-1$	-1	-1

$$(f-g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -2x-1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$5.2 \quad |x| - |x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 < \frac{1}{2} \wedge x \leq -1 \right) \vee \left(-2x-1 < \frac{1}{2} \wedge -1 < x < 0 \right)$$

$$\vee \left(-1 < \frac{1}{2} \wedge x \geq 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee \left(-2x < \frac{3}{2} \wedge -1 < x < 0 \right) \vee x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x > -\frac{3}{4} \wedge -1 < x < 0 \right) \vee x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3}{4}, 0 \right[\cup [0, +\infty[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3}{4}, +\infty[.$$

Pág. 97

$$1.1 \quad 4 + 3 - 1 = 6$$

Resposta: (C).

$$1.2 \quad 4 - 1 = 3$$

Resposta: (D).

$$2.1 \quad P = 10 + x + y$$

$$y^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 8^2 + (6-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 64 + 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{100 - 12x + x^2}$$

$$P(x) = x + 10 + \sqrt{100 - 12x + x^2}.$$

$$2.2 \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{P(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0$$

Como P não tem zeros $\frac{P}{g}$ também não tem.

Pág. 98

$$3. \quad f(x) = 1 + \frac{5}{x}; \quad g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

$$3.1 \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{5}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-5, 0[$$

Cálculos auxiliares:

x	$-\infty$	-5		0	$+\infty$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+5}{x}$	$+$	0	$-$		$+$

$$3.2 \quad D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x \in D_g \wedge g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

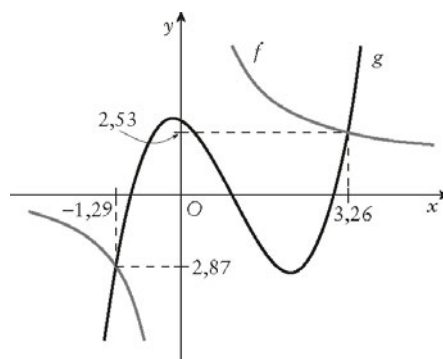
	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	0

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=3$$

$$3.3 \quad y_1 = f(x); \quad y_2 = g(x)$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x \approx -1,29 \vee x \approx 3,26.$$

4. $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$; $g(x) = -3 - \frac{2}{x+3}$.

4.1 $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1]$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2-2x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\frac{2-2x}{x}$	-	s.s.	+	0	-

4.2 $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = -3 - \frac{2}{x+3}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{11}{3}, 0\right\}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3 - \frac{2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3-11=0 \wedge x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}$

$(f+g)(x) = 1 + \frac{2}{x} - 3 - \frac{2}{x+3} = -2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3} =$
 $= \frac{-2x(x+3) + 2(x+3) - 2x}{x(x+3)} = \frac{-2x^2 - 6x + 6}{x^2 + 3x}$

$f+g: \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \frac{-2x^2 - 6x + 6}{x^2 + 3x}$

$(f-g)(x) = 1 + \frac{2}{x} + 3 + \frac{2}{x+3} =$
 $= \frac{4x(x+3) + 2(x+3) + 2x}{x(x+3)} = \frac{4x^2 + 16x + 6}{x^2 + 3x}$

$f-g: \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \frac{4x^2 + 16x + 6}{x^2 + 3x}$

$(f \times g)(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(-3 - \frac{2}{x+3}\right) = \frac{x+2}{x} \times \frac{-3x-9-2}{x+3} =$
 $= \frac{(x+2)(-3x-11)}{x(x+3)} = \frac{-3x^2 - 17x - 22}{x^2 + 3x}$

$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \frac{-3x^2 - 17x - 22}{x^2 + 3x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{-3x-9-2}{x+3}} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(-3x-11)} =$
 $= \frac{-x^2 - 5x - 6}{3x^2 + 11x}$

$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{11}{3}, 0\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \frac{-x^2 - 5x - 6}{3x^2 + 11x}$

4.3 $C(-3, 1)$, $A(-3, -3)$

Ponto B:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$B(-2, 0)$

Base: $\overline{AC} = |-3-1| = 4$

Altura: distância de B à reta AC = $|-2+3| = 1$

$A_{[ABC]} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$.

4.4 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = -3 - \frac{2}{x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} + 3 + \frac{2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x(x+3) + 2(x+3) + 2x}{x(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 12x + 2x + 6 + 2x}{x(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 16x + 6}{x(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 6 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 3 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-24}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{10}}{2} \vee x = \frac{-4 - \sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x \approx -0,42 \vee x \approx -3,58$.

Pág. 99

5.1

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$-$		$+$
$f(x) \times g(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$-$

$$f(x) \times g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0] \cup]2, +\infty[$$

5.2 $h(x) = a + \frac{b}{x-c}$

As retas de equações $y = a$ e $x = c$ são assíntotas do gráfico de h . Logo, $a = -3$ e $c = -2$.

$$h(x) = -3 + \frac{b}{x+2}$$

Sendo $h(0) = f(0)$ então $h(0) = 0$ pelo que:

$$-3 + \frac{b}{0+2} = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

$$a = -3, b = 6 \text{ e } c = -2.$$

5.3 A expressão que define f é do tipo:

$$f(x) = -2 + \frac{b}{x+2}. \text{ Como } f(0) = 0 \text{ temos:}$$

$$-2 + \frac{b}{0+2} = 0 \Leftrightarrow b = 4.$$

Então:

$$f(x) = -2 + \frac{4}{x+2}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x-2}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2 + \frac{4}{x+2}}{\frac{x^2}{x-2}} = \frac{\frac{-2x-4+4}{x+2}}{\frac{x^2}{x-2}} = \\ &= \frac{-2x(x-2)}{x^2(x+2)} = \frac{-2x+4}{x^2+2x} \end{aligned}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{-2x+4}{x^2+2x}$$

Assíntota horizontal do gráfico de $\frac{f}{g}: y = 0$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

As retas de equações $x = 0$ e $x = -2$ são assíntotas verticais do gráfico de $\frac{f}{g}$.

Pág. 100

- $f(1) = 0,5$. Num minuto o pintor pinta $0,5 \text{ m}^2$ de parede.
- $f(x) = 0,5x$.
- $g(1) = \frac{1}{5}$. Para pintar 1 m^2 de parede gasta-se $\frac{1}{5} \text{ L}$ de tinta.
- $g(x) = \frac{x}{5} = 0,2x$.
-

Tempo em minutos	Área pintada em m^2	Quantidade de tinta (L)
1	0,5	0,1
2	1	0,2
6	3	0,6
x	$f(x) = 0,5x$	$g(f(x)) = 0,1x$

- $f(20) = 0,5 \times 20 \text{ m}^2$
 $g(10) = 0,2 \times 10 = 2 \text{ L}$ ou $g(f(20)) = g(10) = 2 \text{ L}$
 O pintor utilizou 2 L de tinta.

Pág. 103

6.1

a) $f(x) = x-1$ e $g(x) = 2x + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-2) &= f(g(-2)) = f\left(-4 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= f\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{2} - 1 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(-2-1) = \\ &= g(-3) = -6 + \frac{1}{2} = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-2) &= f(g(-2)) = f\left(\frac{1}{-2+1}\right) = \\ &= f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g\left(\sqrt{(-2)^2}\right) = g(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

6.2

a) $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = 2x - 2$, $D_g = \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 2) = (2x - 2)^2 + 1 = 4x^2 - 8x + 5$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge (2x - 2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 4x^2 - 8x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 2 = 2x^2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2$$

b) $f(x) = \frac{1}{x-4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = \mathbb{R}_0^+$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 4\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\}$$

Cálculo auxiliar:

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-4}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-4}}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \wedge \frac{1}{x-4} \geq 0\right\} =]4, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

$$g \circ f :]4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-4}}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = \sqrt{x+1}$, $D_g = [-1, +\infty[$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge \sqrt{x+1} \neq 0\} =]-1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1;$$

$$f \circ g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq -1\right\} =]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1+x}{x}$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$$g \circ f :]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

6.3 $f(x) = x - 2$, $D_f = \mathbb{R}$

Seja $g(x) = ax + b$, $D_g = \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(ax + b) = g(x - 2), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + b - 2 = a(x - 2) + b, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + b - 2 = ax - 2a + b, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b - 2 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow -2 = -2a \Leftrightarrow a = 1$$

Qualquer função g definida por $g(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$ é permutável com f .

Pág. 104

$$\begin{aligned} 7.1 \quad f(x) &= -x + 1, \quad D_f = \mathbb{R} \\ g(x) &= \pi x + 3, \quad D_g = \mathbb{R} \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\pi x + 3) = \\ &= -(\pi x + 3) + 1 = -\pi x - 2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-x + 1) = \\ &= \pi(-x + 1) + 3 = -\pi x + \pi + 3 \end{aligned}$$

Embora $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$,

$$\exists x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

f e g não são permutáveis.

$$\begin{aligned} 7.2 \quad f(x) &= \sqrt{x}, \quad D_f = [0, +\infty[\\ g(x) &= \frac{1}{x-3}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge \frac{1}{x-3} \geq 0\right\} =]3, +\infty[\\ D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 3\} = [0, +\infty[\setminus \{9\} \end{aligned}$$

$D_{f \circ g} \neq D_{g \circ f} \Rightarrow f$ e g não são permutáveis.

8. Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x-2}, \quad D_f = [2, +\infty[\\ g(x) &= 1 - |x|, \quad D_g = \mathbb{R} \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 1 - |x| \geq 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq -1\} = \emptyset \end{aligned}$$

Sendo $D_{f \circ g} = \emptyset$, $f \circ g$ não existe.

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \wedge \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[\\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = 1 - |\sqrt{x-2}| \\ &= g \circ f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto 1 - |\sqrt{x-2}| \end{aligned}$$

Pág. 105

$$9.1 \quad h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-1)^2$$

Por exemplo se $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$ vem:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (2x-1)^2 \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 2x-1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \\ f \circ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto (2x-1)^2 \end{aligned}$$

f pode ser definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e g pode ser definida, também em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 2x - 1$.

$$9.2 \quad h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+5}$$

Por exemplo se $g(x) = x + 5$ e $f(x) = \sqrt{x}$, com $D_g = \mathbb{R}$ e

$D_f = \mathbb{R}_0^+$ temos que:

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+5) = \sqrt{x+5} = h(x) \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x+5 \geq 0\} = [-5, +\infty[\\ f \circ g : [-5, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto \sqrt{x+5} \end{aligned}$$

Temos, por exemplo, f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \sqrt{x}$ e g definida, também em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x + 5$.

$$9.3 \quad h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{x+3}$$

Por exemplo, se $f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = x + 3$,

sendo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $D_g = \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+3) = \frac{2}{x+3} = h(x) \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto \frac{2}{x+3} \\ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto \frac{2}{x} \quad \quad \quad x \mapsto x+3 \end{aligned}$$

é uma possível resposta.

9.4 Por exemplo se:

$$f(x) = x^3, \quad D_f = \mathbb{R} \text{ e}$$

$$g(x) = \frac{-2}{x+3}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \text{ temos:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-2}{x+3}\right) = \left(\frac{-2}{x+3}\right)^3 = h(x)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3 \wedge \frac{-2}{x+3} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3 \quad \quad \quad x \mapsto \frac{-2}{x+3}$$

é uma possível resposta.

Pág. 106

10. $C(x) = 0,16x^2 + 0,92x + 800$

$$x(t) = 0,95t^2 + 90t.$$

10.1 $(C \circ x)(5) = C(x(5)) = C(0,95 \times 5^2 + 90 \times 5) =$
 $= C(473,75) = 0,16(473,75)^2 + 0,92 \times 473,75 + 800 =$
 $= 37\,146,10$

$$C(x(5)) = 37\,146,10 \text{ €}$$

10.2 $C(x(t)) = 20\,000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,16(x(t))^2 + 0,92(x(t)) + 800 = 20\,000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,16(x(t))^2 + 0,92(x(t)) - 19\,200 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{-0,92 \pm \sqrt{0,92^2 + 4 \times 0,16 \times 19\,200}}{0,32}$$

$$\begin{matrix} x(t) > 0 \\ \Rightarrow x(t) \approx 34\,354,71 \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 0,95t^2 + 90t = 343,5471 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,95t^2 + 90t - 343,5471 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} t > 0 \\ \Leftrightarrow t \approx 3,67 \text{ h} \end{matrix}$$

O custo de produção de x unidades é 20 000 euros 3,67 h após o início do turno.

Pág. 107

1. $f(x) = |x+1|.$

1.1 $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = |0+1| = 1.$

1.2 Sendo g uma função que se pode definir por uma expressão do tipo $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$ cujas assintotas do gráfico são as retas de equações $y = 1$ e $x = 1$ temos que $a = 1$ e $c = 1$.

$$\text{Logo, } g(x) = 1 + \frac{b}{x-1}.$$

$$\text{Como } g(0) = 0, \text{ temos } 1 + \frac{b}{0-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Leftrightarrow b = 1.$$

$$\text{Temos, então, } g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

1.3 $f(x) = |x-1|, \quad D_f = \mathbb{R}$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

a) $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
 $= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 1 + \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \left|1 + \frac{1}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x-1}\right|$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left|\frac{1}{x-1}\right|$$

b) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge |x-1| \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

Cálculo auxiliar:

$$|x-1| = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \vee x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x-1|) = 1 + \frac{1}{|x-1|-1}$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{|x-1|-1}$$

2.1

a) $(g \circ h)(\sqrt{3}) = g(h(\sqrt{3})) = g(1) = \sqrt{1^2} + 1 = 2. \quad (0 < \sqrt{3} < 2)$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2.$

c) $\left[(f \circ g) \circ h\right]\left(2\frac{1}{3}\right) = (f \circ g)\left(h\left(\frac{7}{3}\right)\right) = \quad \left(2 < \frac{7}{3} < 3\right)$
 $= (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(\sqrt{4} + 1) = f(3) = 2.$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad [g \circ (f \circ h)](\sqrt{2}) &= g[(f \circ h)(\sqrt{2})] = \\ &= g[f(h(\sqrt{2}))] = g[f(1)] = g(-1) = \sqrt{1} + 1 = 2. \end{aligned}$$

2.2

x	1	2	3
$f(x)$	-1	1	2

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2} + 1$$

$$h: [-1, 3] \rightarrow \{-1, 1, 2\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad D_{f \circ h} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 3] \wedge h(x) \in \{1, 2, 3\}\} =]0, 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ h)(x) &= f(h(x)) = \begin{cases} -1 & \text{se } h(x) = 1 \\ 1 & \text{se } h(x) = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f \circ h:]0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad D_{h \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_h\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \{1, 2, 3\} \wedge f(x) \in [-1, 3]\} = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x))$$

$$(h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(-1) = -1$$

$$(h \circ f)(2) = h(f(2)) = h(1) = 1$$

$$(h \circ f)(3) = h(f(3)) = h(2) = 1$$

$$h \circ f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x = 2 \vee x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad D_{h \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_h\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq \sqrt{x^2} + 1 \leq 3\} = [-2, 2] \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$-1 \leq \sqrt{x^2} + 1 \leq 3 \Leftrightarrow |x| + 1 \geq -1 \wedge |x| + 1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq -2 \wedge |x| \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} (h \circ g)(x) &= h(g(x)) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq g(x) \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < g(x) \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < g(x) \leq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } -2 \leq x < -1 \vee 1 < x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$g(x) = \sqrt{x^2} + 1 = |x| + 1$$

$$-1 \leq g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq |x| + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| + 1 \geq -1 \wedge |x| + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq -2 \wedge |x| \leq -1 \text{ (condição impossível)}$$

$$0 < g(x) \leq 2 \Leftrightarrow |x| + 1 > 0 \wedge |x| + 1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$2 < g(x) \leq 3 \Leftrightarrow |x| + 1 > 2 \wedge |x| + 1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| > 1 \wedge |x| \leq 2$$

Como $-2 \geq x \geq 2$, temos:

$$|x| > 1 \wedge |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < -1 \vee 1 < x \leq 2$$

$$h \circ h: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } -2 \leq x < -1 \vee 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad D_{g \circ h} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 3] \wedge h(x) \in \mathbb{R}\} = [-1, 3] \end{aligned}$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \begin{cases} g(-1) & \text{se } -1 \leq (x) \leq 0 \\ g(1) & \text{se } 0 < (x) \leq 2 \\ g(2) & \text{se } 2 < (x) \leq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$g \circ h: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \sqrt{x}; \quad g(x) = x - 3; \quad h(x) = 2x.$$

$$\begin{aligned} 3.1 \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 3) = \sqrt{x - 3} = a(x) \\ a(x) &= (f \circ g)(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2 \quad (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = g(2x) = 2x - 3 = b(x) \\ b(x) &= (g \circ h)(x). \end{aligned}$$

$$3.3 \quad (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$$

$$(g \circ (h \circ f))(x) = g((h \circ f)(x)) = g(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3 = c(x)$$

$$c(x) = (g \circ (h \circ f))(x).$$

4. $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

4.1 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x^2-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = f(x) \times \frac{x^2-x}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x(x-1)}{x+1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

4.2 $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \Leftrightarrow g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}, D_g = \mathbb{R}.$$

Pág. 108

5.1 Se o grau de g for inferior a 3, existe pelo menos um zero do denominador que não é zero do numerador pelo que existirá pelo menos uma assíntota vertical.

Resposta: (D).

5.2 $(h \circ f)(a) = 0 \Leftrightarrow h(f(a)) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$

Apenas em (B) se tem $h(0) = 0$.

Resposta: (B).

6. $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)};$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ o sinal de f é igual ao sinal de $\frac{1}{f}$, ou

seja, é igual ao sinal de h .

x		-1		1	
$f(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	-		+		-

Resposta: (A).

Pág. 109

7.1 $h^2 + 150^2 = d^2 \stackrel{d>0}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{h^2 + 150^2}$

$$d(h) = \sqrt{h^2 + 150^2}.$$

7.2 $d(h(t)) = d(6t) = \sqrt{(6t)^2 + 150^2} = \sqrt{36t^2 + 150^2}$

$$d(t) = \sqrt{36t^2 + 150^2}.$$

8. $r(t) = 0,6t^{\frac{2}{3}}.$

8.1 $V = A_b \times \text{altura} = \pi \times r^2 \times 3: \quad V(t) = 1,08\pi t^{\frac{4}{3}}.$

8.2 $V(10) = 1,08\pi \times 10^{\frac{4}{3}} \approx 73,1$

Dez segundos após o início do derrame, o volume da mancha era de 73,1 m³.

9. $C(x) = 2,5x + 500$, custo diário da produção de x unidades.

$$x(t) = 10t, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

9.1 $(C \circ x)(t) = C(x(t)) = C(10t) = 2,5 \times 10t + 500$

$$(C \circ x)(t) = 25t + 500.$$

9.2 $(C \circ x)(8) = 25 \times 8 + 500 = 700$

O custo de produção das unidades produzidas em oito horas é de 700 euros.

10.1 Sejam f e g funções crescentes:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b), \quad \forall a, b \in D_f$$

$$a < b \Leftrightarrow g(a) < g(b), \quad \forall a, b \in D_g$$

Sejam $a, b \in D_{f \circ g}$, ou seja, $a, b \in D_g \wedge g(a), g(b) \in D_f$ tais que $a < b$.

$$a < b \Leftrightarrow g(a) < g(b) \Rightarrow (a, b \in D_g \text{ e } g \text{ é crescente})$$

$$\Rightarrow f(g(a)) < f(g(b)) \Rightarrow (g(a), g(b) \in D_f \text{ e } f \text{ é crescente})$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(a) < (f \circ g)(b)$$

ou seja, $f \circ g$ é crescente.

10.2 Admitamos que f e g são crescentes:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b), \quad \forall a, b \in D_f$$

$$a < b \Leftrightarrow g(a) < g(b), \quad \forall a, b \in D_g$$

Sejam $a, b \in D_{g \circ f}$, ou seja,

$$a, b \in D_f \wedge f(a), f(b) \in D_g \text{ tais que } a < b.$$

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow (a, b \in D_f \text{ e } f \text{ é crescente})$$

$$\Rightarrow g(f(a)) < g(f(b)) \Rightarrow (f(a), f(b)) \in D_g \text{ e } g \text{ é crescente)}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) < (g \circ f)(b)$$

ou seja, $g \circ f$ é crescente.

Admitamos agora que f e g são decrescentes:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b), \forall a, b \in D_f$$

$$a < b \Leftrightarrow g(a) > g(b), \forall a, b \in D_g$$

Sejam $a, b \in D_{g \circ f}$, ou seja,

$$a, b \in D_f \wedge f(a), f(b) \in D_g \text{ tais que } a < b.$$

$$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow (a, b \in D_f \text{ e } f \text{ é decrescente})$$

$$\Rightarrow g(f(a)) < g(f(b)) \Rightarrow (f(a), f(b)) \in D_g \text{ e } g \text{ é decrescente)}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) < (g \circ f)(b), \text{ ou seja, } g \circ f \text{ é crescente.}$$

10.3 Admitamos que f é crescente e que g é decrescente:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b), \forall a, b \in D_f$$

$$a < b \Leftrightarrow g(a) > g(b), \forall a, b \in D_g$$

Sejam $a, b \in D_{g \circ f}$, ou seja,

$$a, b \in D_f \wedge f(a), f(b) \in D_g \text{ tais que } a < b.$$

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow (a, b \in D_f \text{ e } f \text{ é crescente})$$

$$\Rightarrow g(f(a)) > g(f(b)) \Rightarrow (f(a), f(b)) \in D_g \text{ e } g \text{ é decrescente)}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$$

ou seja, $g \circ f$ é decrescente.

De igual modo, se f é decrescente e g é crescente temos:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(f(a)) > g(f(b)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$$

ou seja, $g \circ f$ é crescente.

Logo, se f e g têm sentidos de variação diferentes então

$g \circ f$ é estritamente decrescente.

Pág. 110

1.

x	$y = f(x)$
10	9,2
100	92
200	184
x	$y = 0,92x$

2.

y	x
9,2	10
92	100
200	184
y	$x = \frac{y}{0,92}$

Pág. 113

11.1 $f(x) = |x|$

f não é injetiva. Por exemplo, $f(-1) = f(1)$.

11.2 $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} \neq \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_g.$$

g é injetiva.

11.3 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

f não é injetiva. Por exemplo, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 = f(2)$.

12. $f(x) = \frac{1}{x^2}, D_f = \mathbb{R}^+$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$$

Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ temos que $x_1 = x_2$. Então:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Pág. 115

13.1 $f(x) = \frac{6}{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{6}{x} = y$$

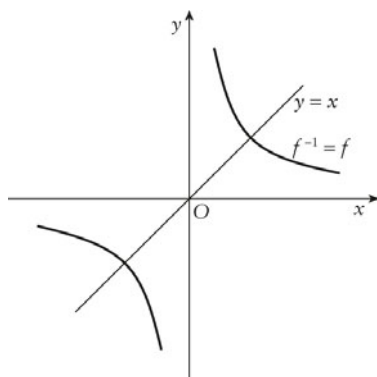
$$x = \frac{6}{y} \Leftrightarrow xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{6}{x}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{6}{x}$$



13.2 $g(x) = 6x + 1$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow 6x + 1 = y$$

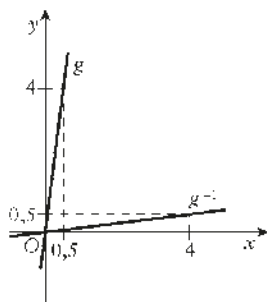
$$6y + 1 = x \Leftrightarrow 6y = x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{6}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$$

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x-1}{6}$$



13.3 $h(x) = \frac{2}{x-3}$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} = y$$

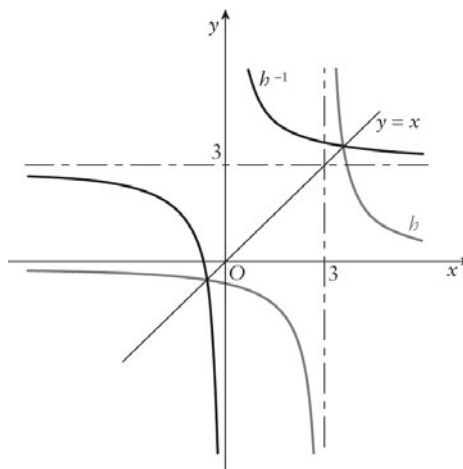
$$\frac{2}{y-3} = x \Leftrightarrow 2 = xy - 3x \Leftrightarrow xy = 2 + 3x \Leftrightarrow y = \frac{2+3x}{x}$$

$$h^{-1}(x) = \frac{2+3x}{x}$$

$$D_{h^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2+3x}{x}$$



Pág. 116

14. $h(x) = \frac{3x}{x-1}$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x}{x-1} = y ;$$

$$\frac{3y}{y-1} = x \Leftrightarrow 3y = xy - x$$

$$\Leftrightarrow 3y - xy = -x$$

$$\Leftrightarrow y(3-x) = -x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-3}$$

$$D_{h^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$h^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-3}$$

$$D_{h \circ h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{h^{-1}} \wedge h^{-1}(x) \in D_h\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge \frac{x}{x-3} \neq 1\right\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\begin{aligned}(h \circ h^{-1})(x) &= h(h^{-1}(x)) = h\left(\frac{x}{x-3}\right) = \\&= \frac{3 \frac{x}{x-3}}{\frac{x}{x-3} - 1} = \frac{\frac{3x}{x-3}}{\frac{x - (x-3)}{x-3}} = \frac{3x}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-3} = \frac{3x(x-3)}{3(x-3)} = x \\(h \circ h^{-1})(x) &= x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{h^{-1} \circ h} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_{h^{-1}}\} = \\&= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge \frac{3x}{x-1} \neq 3\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\(h^{-1} \circ h)(x) &= h^{-1}(h(x)) = h^{-1}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = \\&= \frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3x}{x-1} - 3} = \frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3x - 3(x-1)}{x-1}} = \frac{3x}{3x - 3x + 3} = \frac{3x}{3} = x \\(h^{-1} \circ h)(x) &= x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Pág. 117

$$15. \quad f(x) = \frac{x}{2x-3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$15.1 \quad f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{2x-3} = y$$

$$\frac{y}{2y-3} = x \Leftrightarrow y = 2xy - 3x \Leftrightarrow 2xy - y = 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(2x-1) = 3x \Leftrightarrow y = \frac{3x}{2x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{2x-1}; \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}D_{f^{-1} \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \\&= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3}{2} \wedge \frac{3}{2} \wedge \frac{x}{2x-3} \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}\end{aligned}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x}{2x-3}\right) =$$

$$= \frac{3 \frac{x}{2x-3}}{2 \frac{x}{2x-3} - 1} = \frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{2x - (2x-3)}{2x-3}} = \frac{3x}{2x-3} \cdot \frac{2x-3}{2x-3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Pág. 118

16. Por exemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Pág. 119

$$17. \quad f(x) = \frac{3x+1}{x-4}.$$

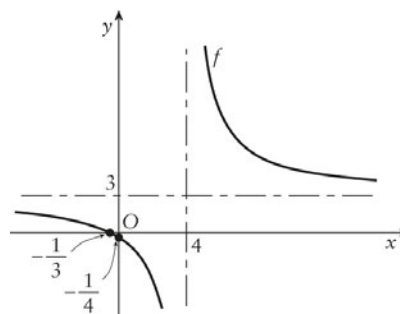
$$17.1 \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (A reta de equação $y = 3$ é a assíntota horizontal do gráfico de f).

17.2

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-4}$$

Gráfico de f



$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

$$D_g = \mathbb{R}^+; \quad D'_g = \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[\cup] 3, +\infty[.$$

17.3 Por exemplo:

$$h: \left[-\frac{1}{3}, 4\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-4}$$

Pág. 120

18. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}; \quad D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

g não tem inversa por não ser injetiva.

Expressão da correspondência inversa:

$$y = \frac{2}{x^2 - 4} \stackrel{x \in D_f}{\Leftrightarrow} x^2 y - 4y = 2 \Leftrightarrow x^2 y = 4y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4y+2}{y} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4y+2}{y}}$$

Atendendo à equivalência, temos:

$$D'_g = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \wedge \frac{4y+2}{y} \geq 0 \right\} = \\ = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup]0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

y	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$4y+2$	-	0	+	+	+
y	-	-	-	0	+
$\frac{4y+2}{y}$	+	0	-	s.s.	+

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}; \quad D'_g = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup]0, +\infty[.$$

18.2 Por exemplo:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

18.3 Por exemplo:

$$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } i(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 - 4} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ 0 & \text{se } x = -2 \vee x = 2 \end{cases}$$

18.4 Por exemplo:

$$j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 0,2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Pág. 121

1.1 $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = y$$

$$\sqrt[3]{y+1} = x \Leftrightarrow y+1 = x^3 \Leftrightarrow y = x^3 - 1$$

$$f^{-1}(x) = x^3 - 1 = g(x)$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = D_g$$

$$\text{Então, } f^{-1} = g.$$

1.2 $f(x) = -3x + 2$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow -3x + 2 = y$$

$$-3y + 2 = x \Leftrightarrow -3y = x - 2 \Leftrightarrow 3y = 2 - x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(2 - x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(2 - x) = g(x)$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = D_g$$

$$\text{Então, } f^{-1} = g.$$

2. Atendendo a que os gráficos de uma função e da sua inversa são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$, temos:

$$f^{-1} \leftarrow \text{II}$$

$$g^{-1} \leftarrow \text{I}$$

$$h^{-1} \leftarrow \text{III}$$

$$i^{-1} \leftarrow \text{IV}$$

3.1 $f(x) = 4x + 4$ e $g(x) = \frac{1}{4}x - 1$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 4\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + 4 = x$$

$$(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $(f \circ g)(x) = x$, g pode ser a função inversa de f .

Verifiquemos:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 4x + 4 = y$$

$$4y + 4 = x \Leftrightarrow 4y = x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1 = g(x)$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = D_g$$

g é a inversa de f .

3.2 $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-1}$, $D_g = [1, +\infty[$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty[$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 =$

$= x - 1 + 1 = x, \forall x \in [1, +\infty[$

3.3 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge \frac{2x+1}{x-1} \neq 2\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) =$

$= \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 2} = \frac{\frac{2x+1+x+1}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{3x}{3} = x$

g pode ser a função inversa de f .

Verifiquemos:

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = y$

$\frac{y+1}{y-2} = x \Leftrightarrow y+1 = xy-2x \Leftrightarrow y-xy = -2x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(1-x) = -2x-1 \Leftrightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1} = g(x); \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = D_g$

Logo, $f^{-1} = g$.

3.4 $f(x) = x^3 - 27$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt[3]{x} + 3$, $D_g = \mathbb{R}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt[3]{x} + 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x} + 3) = (\sqrt[3]{x} + 3)^3 - 27 =$

$= (\sqrt[3]{x} + 3)^2 (\sqrt[3]{x} + 3) - 27 =$

$= (\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} + 9) (\sqrt[3]{x} + 3) - 27 =$

$= \sqrt[3]{x^3} + 6(\sqrt[3]{x})^2 + 9\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 18\sqrt[3]{x} + 27 - 27 =$

$= x + 9\sqrt[3]{x^2} + 27\sqrt[3]{x}$

g não é a função inversa de f .

Pág. 122

4.1 g e h admitem inversa por serem injetivas.

4.2 Se g e h são injetivas e têm gráficos simétricos relativamente à reta de equação $y = x$, então g e h são inversas uma da outra e

$(g \circ h)(x) = x, \forall x \in D_h$.

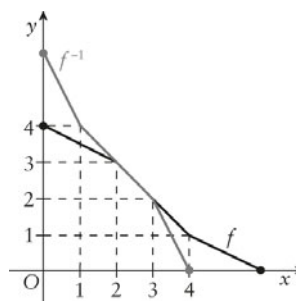
5. (A) é falsa. A função inversa da função g definida por $g(x) = -x$ é a própria função g , ou seja, $g^{-1} = g$.

(B) é falsa. f não tem inversa por não ser injetiva.

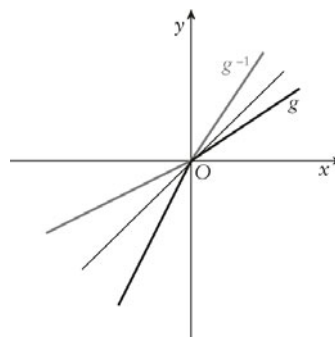
(C) é falsa. As funções $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, não são invertíveis por não serem injetivas.

(D) é verdadeira.

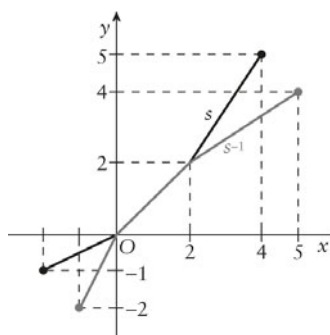
6.1



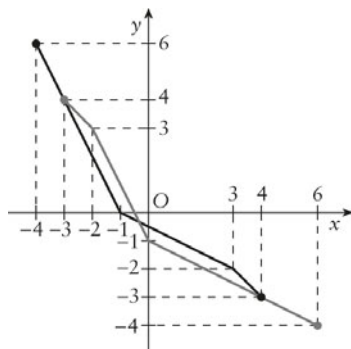
6.2



6.3



6.4



Pág. 123

7.1 $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}.$$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) =$
 $= 2(x + 1) = 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $y = (f \circ g)(x)$

$$y = 2x + 2$$

$$x = 2y + 2 \Leftrightarrow 2y = x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{x - 2}{2}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x - 2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x$

$$x = 2y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) $y = g(x) \Leftrightarrow y = x + 1$

$$x = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

$$g^{-1}(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

e) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - 1 = \frac{x - 2}{2}$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x).$$

7.2 $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = 3x$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 1 = y$$

$$y^3 - 1 = x \Leftrightarrow y^3 = x + 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x + 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow 3x = y$$

$$3y = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{3}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = 3(x^3 - 1) = 3x^3 - 3$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{x}{3} + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = y \Leftrightarrow 3x^3 - 3 = y$$

$$3y^3 - 3 = x \Leftrightarrow 3y^3 = x + 3 \Leftrightarrow y^3 = \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{3} + 1}$$

A inversa da composta de duas funções f e g é igual à composta das inversas, por ordem inversa.

8. x : número de balões de 0,50 €.

8.1 $100 - x$: número de balões de 0,75 €

$y = 0,50x + 0,75(100 - x)$ representa o custo dos 100 balões.

8.2 $y = 0,50x + 0,75(100 - x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = 0,50x + 75 - 0,75x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -0,25x + 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,25x = 75 - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 300 - 4y$$

Função inversa: $y = 300 - 4x$, exprime o número de balões comprados a 0,50 € (y) em função do custo total dos 100 balões (x).

8.3 $100 \times 0,5 = 50$ (compra de 100 balões a 0,5)

$$100 \times 0,75 = 75 \text{ (compra de 100 balões a 0,75)}$$

$$D_{f^{-1}} = [50, 75].$$

8.4 $0,50x + 0,75(100 - x) = 60 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 75 - 0,25x = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,25x = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 60$$

Comprou 60 balões de 0,50 € e 40 balões de 0,75 €.

9.1 Por exemplo:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } h(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

9.2 Por exemplo:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

10.1 Seja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente crescente, ou seja,

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad (1)$$

Sejam $x_1, x_2 \in D_f$ tais que $x_1 \neq x_2$.

Então: $x_1 > x_2 \vee x_2 > x_1$

$$x_1 > x_2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$x_2 > x_1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_2) > f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$$

Logo,

$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ pelo que f é injetiva.

10.2 Seja f uma função par e x_1 um elemento não nulo de D_f .

Então, sendo $x_2 = -x_1$ temos que $x_2 \in D_f$ e $x_2 \neq x_1$.

f é par $\Rightarrow f(-x_1) = f(x_1)$ pelo que existem

$x_1, x_2 \in D_f: x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$, ou seja f não é

injetiva pelo que não tem inversa.

10.3 Por exemplo a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$f(x) = x^3$ é ímpar e admite inversa. No entanto a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^3 - x$ é ímpar e não tem inversa por não ser injetiva (por exemplo, $g(0) = g(1)$).

Pág. 124

1.

x	$-\infty$	0		a		b	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-		+	+	+
$g(x)$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	0	+	s.s.	-	s.s.	+

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow x \in [0, a[\cup]b, +\infty[$$

Pode ser $a = 1$ e $b = 2$.

Resposta: (D).

$$2.1 \quad f(1) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

$$f(-2) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = -2$$

$$f^{-1}(0) - f^{-1}(2) = 1 + 2 = 3$$

Resposta: (C).

$$2.2 \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x-3}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 1 + \frac{2}{-1-3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: (A).

$$3.1 \quad (g \circ f)(29) = g(f(29)) = g(\sqrt[3]{-2+29}) = g(3) = 2$$

Resposta: (C).

$$3.2 \quad f(x) = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-2+x} = -2 \Leftrightarrow -2+x = (-2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -8 + 2 \Leftrightarrow x = -6$$

$$f(-6) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -6$$

$$f^{-1}(-2) + f(-6) = -6 + \sqrt[3]{-2-6} = -6 + \sqrt[3]{-8} = -6 - 2 = -8$$

Resposta: (B).

4. $D_f = \mathbb{R}$ e f é injetiva.

Se f é injetiva a equação $f(x) = 3$ tem, no máximo, uma solução. Como a é solução da equação, esta é única.

Resposta: (D).

5. $f(-1) \neq g(-1) \Leftrightarrow f(-1) - g(-1) \neq 0 \Leftrightarrow (f-g)(-1) \neq 0$
 -1 não é zero de $f-g$.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$$

1 é zero de f . Logo não é zero de $\frac{g}{f}$.

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 0 \neq -1$$

Em $]0, 4[$, g tem dois zeros e f tem um, todos diferentes.

Logo, $f \times g$ tem três zeros.

Resposta: (D).

Pág. 125

$$1. \quad a(t) = \frac{11t+6}{t+1}, t \geq 0; \quad b(t) = \frac{t+9}{t+3}, t \geq 0.$$

1.1 No início de 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A, é dado por $a(0) = 6$. Logo, no início de 2009 existiam 6000 animais da espécie A.

No início de 2010, o número de animais, em milhares, da espécie A era dado por $a(1) = 8,5$ pelo que havia, no início de 2010, 8500 animais da espécie A.

Logo, desde o início do ano de 2009 até ao início do ano de 2010, o número de animais da espécie A aumentou 2500. Como, nesse intervalo de tempo, morreram 500 animais da espécie A, podemos concluir que no intervalo de tempo em causa, nasceram 3000 animais da espécie A ($2500 + 500 = 3000$).

$$1.2 \quad a(t) = \frac{11t+6}{t+1} = 11 - \frac{5}{t+1}$$

$$\frac{11t+6}{t+1} = \frac{11(t+1) - 5}{t+1} = \frac{11t+11-5}{t+1} = \frac{11t+6}{t+1}$$

A reta de equação $y = 11$ é uma assíntota horizontal do gráfico de a .

$$b(t) = \frac{t+9}{t+3} = 1 + \frac{6}{t+3}$$

$$\frac{t+9}{t+3} = \frac{t+3+6}{t+3} = \frac{t+3}{t+3} + \frac{6}{t+3} = 1 + \frac{6}{t+3}$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de b .

Podemos então concluir que, com o decorrer do tempo, o número de animais da espécie A tende para 11 000, enquanto que o número de animais da espécie B tende para 1000.

Logo, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B, com o decorrer do tempo, tende para 10 000.

$$1.3 \quad (a \circ b)(t) = a(b(t)) = a\left(\frac{t+9}{t+3}\right) = \frac{11\left(\frac{t+9}{t+3}\right) + 6}{\frac{t+9}{t+3} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{11t+99}{t+3} + 6}{\frac{t+9+t+3}{t+3}} = \frac{\frac{11t+99+6t+18}{t+3}}{\frac{2t+12}{t+3}} = \frac{17t+117}{2t+12}$$

$$D_{a \circ b} = \{t \in \mathbb{R} : t \in D_b \wedge b(t) \in D_a\} =$$

$$= \left\{t \in \mathbb{R} : t \neq -3 \wedge \frac{t+9}{t+3} \neq -1\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{t+9}{t+3} = -1 \Leftrightarrow \frac{t+9}{t+3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t+9+t+3}{t+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t+12}{t+3} = 0 \Leftrightarrow 2t+12 = 0 \wedge t \neq -3 \Leftrightarrow t = -6$$

$$(a \circ b)(t) = \frac{17t+117}{2t+12}; \quad D_{a \circ b} = \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}.$$

1.4 Se $x \neq -1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{11x+6}{x+1} = y$$

Se $y \neq -1$

$$\frac{11y+6}{y+1} = x \Leftrightarrow 11y+6 = xy+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11y - xy = x - 6 \Leftrightarrow y(11-x) = x - 6 \Leftrightarrow y = \frac{x-6}{11-x}$$

$$f(-1) = 11 \Leftrightarrow f^{-1}(11) = -1$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{11-x} & \text{se } x \neq 11 \\ -1 & \text{se } x = 11 \end{cases}$$

2.1 Reta OC:

$$m = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{4}{3}x; \quad C\left(x, \frac{4}{3}x\right)$$

$$\overline{OB} = 12$$

A altura do triângulo $[OBC]$ relativa ao vértice C é a ordenada deste ponto, ou seja, é igual a $\frac{4}{3}x$.

$$A_{[OBC]} = \frac{12 \times \frac{4}{3}x}{2} = 6 \times \frac{4}{3}x = 8x; \quad A(x) = 8x.$$

2.2 $\overline{OB} = 12$

$$\overline{OC} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}|x| \stackrel{x>0}{=} \frac{5}{3}x$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-12)^2 + \left(\frac{4}{3}x-0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 24x + 144 + \frac{16}{9}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

$$P(x) = 12 + \frac{5}{3}x + \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

3. $N(t) = T^2 + 125T + 100, \quad 20 \leq T \leq 32$

$$T(h) = 4h + 10, \quad 0 < h < 6.$$

3.1 $(N \circ T)(h) = N(T(h)) = N(4h + 10)$

$$= (4h+10)^2 + 125(4h+10) + 100$$

$$= 16h^2 + 580h + 1450.$$

$$3.2 \quad (N \circ T)(4) = 16 \times 16 + 580 \times 4 + 1450 = 4026$$

4026 bactérias.

$$3.3 \quad (N \circ T)(h) = 5000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16h^2 + 580h + 1450 = 5000$$

$$\Leftrightarrow 16h^2 + 580h - 3550 = 0$$

$$\stackrel{h>0}{\Leftrightarrow} h \approx 5,3554$$

$$0,3554 \times 60 \approx 21.$$

Terão de decorrer 5 h 21 min.

Pág. 126

$$1. \quad f(x) = 5x^2$$

$f(0) = 0$. No instante inicial a caixa tinha percorrido 0 m (estava imóvel).

$$2. \quad f(x) = 100 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{20} \Rightarrow x \approx 4,5 \text{ s.}$$

$$3. \quad v = \frac{100}{4,5} \text{ m/s} \approx 22,2 \text{ m/s.}$$

4.1 $f(3) - f(1)$ representa a distância percorrida pela caixa entre os instantes $t = 1$ s e $t = 3$ s.

4.2 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ representa a velocidade média da caixa no

intervalo de tempo $[1, 3]$, em m/s.

4.3 $\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$ representa a velocidade média da caixa, em

metros por segundo, nos quatro primeiros segundos.

$$5.1 \quad v.m._{[0,1]} = \frac{f(-1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5}{1} = 5 \text{ m/s.}$$

$$5.2 \quad v.m._{[1,2]} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{1} = 15 \text{ m/s.}$$

$$5.3 \quad v.m._{[2,3]} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{45 - 20}{1} = 25 \text{ m/s.}$$

$$5.4 \quad v.m._{[1,4]} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 5}{3} = \frac{75}{3} = 25 \text{ m/s.}$$

Pág. 130

$$19. \quad f(x) = x^2 - 4.$$

$$19.1 \quad f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 4 - (1-4) = \\ = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2.$$

$$19.2 \quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h.$$

$$19.3 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

Pág. 132

$$20. \quad g(x) = -x^2 + 3.$$

20.1 Ponto de tangência:

$$P(3, -6) \text{ dado que } g(3) = -9 + 3 = -6$$

Declive:

$$m = f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 3 - (-6)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 9}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6-h)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (-6-h) = -6$$

Equação da reta tangente:

$$y - (-6) = -6(x - 3) \Leftrightarrow y = -6x + 18 - 6$$

$$t: y = -6x + 12$$

20.2 Ponto de tangência:

$$P(-1, 2) \text{ dado que } g(-1) = -(-1)^2 + 3 = 2$$

Declive:

$$m = f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-1+h)^2 + 3 - 2}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1-2h+h^2) + 1}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - h^2}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2-h)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (2-h) = 2$$

Equação da reta tangente:

$$y - 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = 2x + 2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 4$$

$$t: y = 2x + 4.$$

Pág. 133

21.1 $y = x^2$, $x = 2$

$P(2, 4)$; $m = 4$

$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 4x - 8 + 4$

$t: y = 4x - 4$

21.2 $y = 2x^2$, $x = -2$

$P(-2, 8)$; $m = -8$

$y - 8 = -8(x + 2) \Leftrightarrow y = -8x - 16 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -8x - 8$

$t: y = -8x - 8.$

21.3 $y = x^3$, $x = 0$

$P(0, 0)$; $m = 0$

$t: y = 0.$

21.4 $y = 2x^2 + 3$; $x = 1$

$P(1, 5)$; $m = 4$

$y - 5 = 4(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 4x - 4 + 5$

$t: y = 4x + 1.$

21.5 $y = -x^2 + 7$; $x = -4$

$P(-4, -9)$ $y(-4) = -(-4)^2 + 7 = -9$

$m = 8$

$y + 9 = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = 8x + 32 - 9$

$t: y = 8x + 23.$

21.6 $y = x^3 - 2x$; $x = -1$

$P(-1, 1)$; $y(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$

$m = 1$

$y - 1 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1 + 1$

$t: y = x + 2.$

21.7 $y = x^4 - 2x$; $x = 2$

$P(2, 12)$; $y(2) = 2^4 - 4 = 12$

$m = 30$

$y - 12 = 30(x - 2) \Leftrightarrow y = 30x - 60 + 12$

$t: y = 30x - 48.$

```
nDeriv(X^2,X,2)
4
nDeriv(2X^2,X,-2)
-8
nDeriv(X^3,X,0)
1E-6
```

```
nDeriv(2X^2+3,X,1)
4
nDeriv(-X^2+7,X,-4)
8
```

```
nDeriv(X^3-2X,X,-1)
1
nDeriv(X^4-2X,X,2)
30
```

1.2 $h(5) = -\frac{5^2}{5} = 3$

$h(5) = 3 \text{ cm} = 0,3 \text{ dm}$

Dimensões da base: 1 dm e 1,3 dm.

$V = 1 \times 1,3 \times 0,3 = 0,39$

Ao fim de 5 s existe no depósito 0,39 litro de água.

1.3

a) $h(5) - h(0) = 3 - 8 = -5$

Nos primeiros 5 segundos a altura da água no depósito baixou 5 cm.

b) $\frac{h(5) - h(0)}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

Nos primeiros 5 segundos a altura da água no depósito baixou à velocidade média de 1 m/s.

1.4 Taxa de variação da função no instante

$t = 5:$

$h'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5+h) - h(5)}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}(5+h)^2 + 8 - 3}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}(h^2 + 10h + 25) + 5}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}h^2 - 2h - 5 + 5}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(-\frac{1}{5}h - 2\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{5}h - 2\right) = -2$

$t = 2:$

$h'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h) - h(2)}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}(2+h)^2 + 8 - \frac{36}{5}}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}(h^2 + 4h + 4) + \frac{4}{5}}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{5}h^2 - \frac{4}{5}h - \frac{4}{5} + \frac{4}{5}}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(-\frac{1}{5}h - \frac{4}{5}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{5}h - \frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5} = -0,8$

Pág. 135

1. $h(t) = -\frac{t^2}{5} + 8.$

1.1 $h(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{t^2}{5} + 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{40} \Rightarrow t \approx 6,3$

O esvaziamento demorou 6,3 s.

$h'(5) = -2$ e $h'(2) = -0,8$. Como $h'(2) > h'(5)$, a taxa de variação de h no instante $t = 2$ é maior do que no instante $t = 5$. No entanto considerando os valores em módulo podemos concluir que no instante $t = 2$ a altura da água no depósito decrescia a uma velocidade de $0,8$ cm/s enquanto que no instante $t = 5$ essa velocidade era de 2 cm/s.

1.5 Ponto de tangência:

$$P(5, 3)$$

$$m = h'(5) = -2$$

$$y - 3 = -2(x - 5) \Leftrightarrow y = -2x + 10 + 3$$

$$t: y = -2x + 13.$$

1.6

a) $V(t) = 10 \times 13 \times h(t)$

$$V(t) = 130 \left(-\frac{t^2}{5} + 8 \right)$$

$$V(t) = -26t^2 + 1040.$$

b) $t.m.v._{[1,5]} = \frac{V(5) - V(1)}{5 - 1}$

$$V(5) = -26 \times 5^2 + 1040 = 390$$

$$V(1) = -26 + 1040 = 1014$$

$$t.m.v._{[1,5]} = \frac{390 - 1014}{4} = -156 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) $V'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(5+h) - V(5)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-26(5+h)^2 + 1040 - 390}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-26(25 + 10h + h^2) + 650}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-650 - 260h - 26h^2 + 650}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-260 - 26h)}{h} = -260 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

d) Ponto de tangência: $P(5, 390)$

$$m = V'(5) = -260$$

$$y - 390 = -260(x - 5) \Leftrightarrow y = -260x + 1300 + 390$$

$$t: y = -260x + 1690.$$

2.1 f não tem derivada nos pontos da abscissa -2 e 1 por serem pontos angulosos.

2.2 Reta AB :

$$A(-3, -2), B(-2, 2); \quad m = \frac{2+2}{-2+3} = 4$$

$$y + 2 = 4(x + 4) \Leftrightarrow y = 4x + 12 - 2 \Leftrightarrow y = 4x + 10$$

Reta BC :

$$B(-2, 2), C(1, -1); \quad m = \frac{-1-2}{1+2} = -1$$

$$y + 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 - 1 \Leftrightarrow y = -x$$

Reta CD :

$$C(1, -1), D(3, 1); \quad m = \frac{1+1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

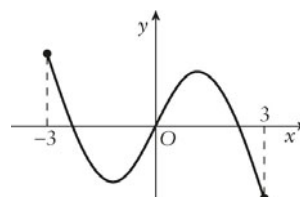
$$y + 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x+10 & \text{se } -3 \leq x \leq -2 \\ -x & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ x-2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

2.3 $f'(2) = 1$: O declive da tangência ao gráfico de f no ponto de abscissa 2 ($y = x - 2$) é igual a 1 .

$f'(-1) = -1$: O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 ($y = -x$) é igual a -1 .

3. Por exemplo:



Pág. 136

1.

x	-3	-1	-2	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-2	-4	0	2	4	6

2. $f'(x_0) = 2x_0$.

Pág. 137

22. $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 3x$.

22.1

a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$f'(x) = 2x.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 + 3(x+h) - (-x^2 + 3x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h + x^2 - 3x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 3h + x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2x - h + 3)}{h} = -2x + 3 \\ g'(x) &= -2x + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.2 \quad f'(3) &= 2 \times 3 = 6; \quad g'(2) = -2 \times 2 + 3 = -1 \\ f'(3) + g'(2) &= 6 - 1 = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.3 \quad f(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ g'(0) &= -2 \times 0 + 3 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.4 \quad f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 = -x^2 + 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2} \\ f'(0) &= 2 \times 0 = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) &= 2 \times \frac{3}{2} = 3. \end{aligned}$$

Pág. 138

23.1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= (2x)' = 2. \\ \text{b)} \quad g'(x) &= \left(-\frac{x}{7}\right)' = -\frac{1}{7}. \\ \text{c)} \quad h'(x) &= (-12)' = 0. \\ \text{d)} \quad i'(x) &= \left(-3x - \frac{1}{2}\right)' = -3. \\ \text{e)} \quad j'(x) &= \left(-\frac{x}{3} + 15\right)' = -\frac{1}{3}. \\ \text{f)} \quad k'(x) &= \left(-\frac{7x-1}{3}\right)' = \left(-\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}\right)' = -\frac{7}{3}. \\ \text{g)} \quad e'(x) &= \left(-5 - \frac{2x}{3}\right)' = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$23.2 \quad h(x) = mx + b$$

$$\begin{cases} h'(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \\ h(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Pág. 139

24.1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y' &= (x^2)' = 2x. \\ \text{b)} \quad y' &= (3x^2)' = 6x. \\ \text{c)} \quad y' &= (-7x^2)' = -14x. \\ \text{d)} \quad y' &= \left(\frac{1}{3}x^2\right)' = \frac{2}{3}x. \\ \text{e)} \quad y' &= \left(-\frac{8}{15}x^2\right)' = -\frac{16}{15}x. \\ \text{f)} \quad y' &= \left(-\frac{7}{27}x^2\right)' = -\frac{14}{27}x. \end{aligned}$$

$$24.2 \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= -\frac{2}{3}x. \\ \text{b)} \quad f'(2) &= -\frac{2}{3} \times 2 = -\frac{4}{3}. \\ \text{c)} \quad \text{Ponto de tangência:} \\ P\left(2, -\frac{4}{3}\right) &\text{ pois } f(2) = -\frac{1}{3} \times 2^2 = -\frac{4}{3} \\ \text{Declive: } m &= f'(2) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Equação da reta tangente: } y + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

$$t: y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Pág. 140

25.1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y' &= (x^2 + x)' = 2x + 1. \\ \text{b)} \quad y' &= (-x^2 - x)' = -2x - 1. \\ \text{c)} \quad y' &= \left(-2x^2 + \frac{1}{7}x\right)' = -4x + \frac{1}{7}. \\ \text{d)} \quad y' &= \left(-\frac{3}{2}x^2 - 7x\right)' = -3x - 7. \\ \text{e)} \quad y' &= \left(-3x^2 - \frac{1}{4}x\right)' = -6x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$f) \quad y' = \left(-\frac{x^2}{8} - \frac{7}{4}x \right)' = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}.$$

$$g) \quad y' = \left(-\frac{3}{7}x - \frac{1}{5}x^2 \right)' = -\frac{3}{7} - \frac{2}{5}x.$$

$$25.2 \quad s(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

Ponto de tangência:

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) \text{ dado que}$$

$$s\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\text{Declive: } s'(x) = -\frac{2}{4}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

$$m = s'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\text{Equação da reta tangente: } y - \frac{1}{16} = 0 \left(x + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{16}.$$

Pág. 142

26.1

$$a) \quad y' = (x^3 - 7x^2 - 1)' = 3x^2 - 14x.$$

$$b) \quad y' = (x^4 - 2x^3 - 7x + 3)' = 4x^3 - 6x^2 - 7.$$

$$c) \quad y' = (-5x^5 - 6x^2 - 1)' = -25x^4 - 12x.$$

$$d) \quad y' = (-8x^8 - 1)' = -64x^7.$$

$$e) \quad y' = (-12x^{99} - x^7 - x^6)' = -1188x^{98} - 7x^6 - 6x^5.$$

$$f) \quad y' = \left(x^4 - \frac{1}{4}x^8 - 3x^2 \right)' = 4x^3 - 2x^7 - 6x.$$

$$g) \quad y' = \left(-x^5 - 8x^4 - 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 17x + 17 \right)' = -5x^4 - 32x^3 - 9x^2 - x - 17.$$

$$26.2 \quad f(x) = 3x^2 + 3x + 1; \quad f(0) = 1$$

Ponto de tangência: $P(0, 1)$.

Declive:

$$f'(x) = 6x + 3; \quad f'(0) = 3$$

$$m = 3$$

$$\text{Reta tangente: } y = 3x + 1.$$

Pág. 143

$$27.1 \quad f'(x) = \left(\frac{3}{x} \right)' = -\frac{3}{x^2}.$$

$$27.2 \quad f'(x) = \left(-\frac{13}{x^2} \right)' = (-13x^{-2})' = (26x^{-3})' = \frac{26}{x^3}.$$

$$27.3 \quad f'(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2} \right)' = (2x - x^{-2})' = 2 + 2x^{-3} = 2 + \frac{2}{x^3}.$$

$$27.4 \quad f'(x) = \left[2x \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right]' = \left(\frac{2}{x} + 2x \right)' = -\frac{2}{x^2} + 2.$$

$$27.5 \quad f'(x) = (8\sqrt{x})' = (8x^{\frac{1}{2}})' = 4x^{\frac{1}{2}-1} = 4x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

$$27.6 \quad f'(x) = \left(-\frac{3}{\sqrt{x}} \right)' = \left(-\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} \right)' = \left(-3x^{\frac{1}{2}-1} \right)' = \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x^3}}.$$

$$27.7 \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}x \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}+1} \right)' = \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \right)' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Pág. 144

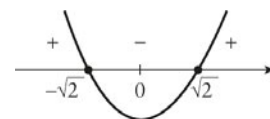
$$28. \quad f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{6}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 - 4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$3 + \frac{6}{x} = \frac{3x+6}{x}.$$

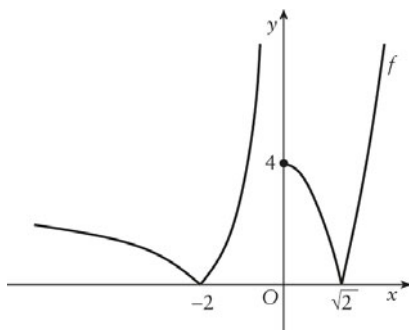
x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{3x+6}{x}$	$+$	0	$-$		

$$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$



$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{6}{x} & \text{se } x < 0 \\ -3 - \frac{6}{x} & \text{se } -2 < x < 0 \\ -2x^2 + 4 & \text{se } 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 2x^2 - 4 & \text{se } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$



Não existe derivada em -2 , 0 e $\sqrt{2}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x^2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{6}{x^2} & \text{se } -2 < x < 0 \\ -4x & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \\ 4x & \text{se } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

28.3 A bissetriz dos quadrantes pares é a reta de equação $y = -x$.

Logo tem declive igual a -1 .

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{6}{x^2} = -1 \wedge x < -2 \right) \vee \left(\frac{6}{x^2} = -1 \wedge -2 < x < 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(-4x = -1 \wedge 0 < x < \sqrt{2} \right) \vee \left(4x = -1 \wedge x > \sqrt{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 6 \wedge x < -2) \vee x \in \emptyset \vee \left(x = \frac{1}{4} \wedge 0 < x < \sqrt{2} \right) \vee$$

$$\vee \left(x = -\frac{1}{4} \wedge x > \sqrt{2} \right) \Leftrightarrow x = -\sqrt{6} \vee x = \frac{1}{4}.$$

$$f(-\sqrt{6}) = 3 + \frac{6}{-\sqrt{6}} = 3 - \frac{6\sqrt{6}}{6} = 3 - \sqrt{6}$$

$$P(-\sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}) \leftarrow \text{Ponto de tangência}$$

$$m = -1$$

$$y - 3 + \sqrt{6} = -1(x + \sqrt{6}) \Leftrightarrow y = -x - \sqrt{6} - \sqrt{6} + 3$$

$$t_1: y = -x - 2\sqrt{6} + 3.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 = \frac{31}{8}$$

$$P\left(\frac{1}{4}, \frac{31}{8}\right) \leftarrow \text{Ponto de tangência}$$

$$m = -1$$

$$y - \frac{31}{8} = -1\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{4} + \frac{31}{8}$$

$$t_2: y = -x + \frac{33}{8}.$$

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{x}; \quad f(1) = 1$$

Ponto de tangência: $P(1, 1)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = -1; \quad m = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

$$2. \quad f(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$f(-1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

Ponto de tangência: $P(-1, -1)$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$\text{Declive: } m = f'(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1$$

$$y + 1 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x.$$

$$3. \quad t(x) = x^2 - 5x; \quad t'(x) = 2x - 5.$$

$$3.1 \quad P(-1, 6); \quad t(-1) = 1 + 5 = 6$$

$$m = t'(-1) = -2 - 5 = -7$$

$$y - 6 = -7(x + 1) \Leftrightarrow y = -7x - 7 + 6 \Leftrightarrow y = -7x - 1.$$

$$3.2 \quad P(3, -6); \quad t(3) = 9 - 15 = -6$$

$$m = t'(3) = 6 - 5 = 1$$

$$y + 6 = 1(x - 3) \Leftrightarrow y = x - 3 - 6 \Leftrightarrow y = x - 9.$$

$$3.3 \quad P(2,5; -6,25); \quad t(2,5) = (2,5)^2 - 5 \times 2,5 = -6,25$$

$$m = t'(2,5) = 2 \times 2,5 - 5 = 0$$

$$y + 6,25 = 0(x - 2,5) \Leftrightarrow y = -6,25 \Leftrightarrow y = -\frac{25}{4}.$$

$$4. \quad p(x) = x^3 - 3x + 3$$

$$p'(x) = 3x^2 - 3$$

$$p'(1) = 3 - 3 = 0$$

$p'(1) = 0 \Rightarrow$ A reta tangente ao gráfico de p no ponto de abscissa 1 é horizontal.

$$5. \quad f(x) = 2 - \frac{4}{x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = x^3 - 4x; \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$5.1 \quad f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$$

Cálculos auxiliares:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x-4$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\frac{2x-4}{x}$	+	s.s.	-	0	+

$$5.2 \quad f'(x) = \left(4 - \frac{4}{x}\right)' = 0 - \left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

$$P(4, 1); \quad f(4) = 2 - \frac{4}{4} = 1$$

$$m = f'(4) = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$$

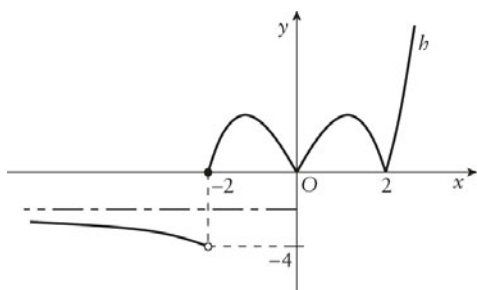
$$y-1 = \frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{4}x-1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x.$$

$$5.3 \quad h(x) = \begin{cases} |x^3 - 4x| & \text{se } x \geq -2 \\ -2 + \frac{4}{x} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

a) Cálculos auxiliares: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+
$x(x^2-4)$	-	0	+	0	-	0	+

$$h(x) = \begin{cases} -2 + \frac{4}{x} & \text{se } x < -2 \\ x^3 - 4x & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -x^3 + 4x & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$



h não é derivável em $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$.

$$b) \quad h'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^2} & \text{se } x < -2 \\ -3x^2 - 4 & \text{se } -2 < x < 0 \vee x > 2 \\ -3x^2 + 4 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$c) \quad y = 2x - \sqrt{2}; \quad m = 2$$

$$h'(x) = 2 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{x^2} = 2 \wedge x < -2\right) \vee$$

$$\vee (3x^2 - 4 = 2 \wedge (-2 < x < 0 \vee x > 2)) \vee$$

$$\vee (-3x^2 + 4 = 2 \wedge 0 < x < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -\sqrt{2} \vee \left(x^2 = \frac{2}{3} \wedge 0 < x < 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x = -\sqrt{2}: \quad P(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

$$h(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 4(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$m = 2$$

$$y - 2\sqrt{2} = 2(x + \sqrt{2}) \Leftrightarrow y = 2x + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$t_1: y = 2x + 4\sqrt{2}.$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}: \quad P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{10\sqrt{6}}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) &= -\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 + 4\frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{6\sqrt{6}}{9} + \frac{4\sqrt{6}}{3} = \\ &= -\frac{2}{9}\sqrt{6} + \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{10\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

$$m = 2$$

$$y - \frac{10\sqrt{6}}{9} = 2\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow y = 2x - \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$$t_2: y = 2x + \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

Pág. 146

1. Em cada conjunto os declives têm o mesmo sinal ou são nulos:

Na figura 1: $m > 0$; na figura 2: $m < 0$; na figura 3: $m = 0$.

2.1

a) $f'(x_1) > 0$. b) $f'(x_2) < 0$.

c) $f'(x_3) = 0$. d) $f'(x_4) > 0$.

2.2 $f'(x_1) > f'(x_4)$ porque o declive da reta t_1 é maior do que o declive da reta t_4 .

Pág. 147

11.

f é estritamente crescente, observando-se um ponto, $x = x_0$, onde a tangente pode ser horizontal ($f'(x_0) = 0$). Pode corresponder-lhe o gráfico B, onde se verifica $f'(x) > 0$ para $x \neq x_0$, e $f'(x_0) = 0$.

Verifica-se que g é sucessivamente crescente, decrescente, crescente. Então g' será positiva, negativa, positiva. Ou seja, a g' pode corresponder o gráfico A. Finalmente, o gráfico de h' só pode ser o apresentado em C.

Pág. 149

12. $g(x) = x^2 - 5x + 4$

$g'(x) = 2x - 5$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$-\frac{9}{4}$	

Mín.

g é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{5}{2}]$ e estritamente

crescente em $[\frac{5}{2}, +\infty[$.

$h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; $h'(x) = 3x^2 - 6x$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		1		-3	

Máx.

Mín.

h é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[0, 2]$.

h tem um máximo relativamente igual a 1 para $x = 0$ e um mínimo relativo igual a -3 para $x = 2$.

$i(x) = 3x^4 - 4x^3$

$i'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$12x^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$i'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$i(x)$		0		-1	

Mín.

i é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

i admite um mínimo relativo igual a -1 para $x = 1$.

$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

$f'(x) = 4x^4 - 4x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{8}{15}$		0		$-\frac{8}{15}$	

Máx.

Mín.

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 1]$.

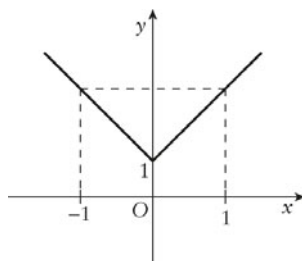
f admite um máximo relativo igual a $\frac{8}{15}$ para $x = -1$ e um

mínimo relativo igual a $-\frac{8}{15}$ para $x = 1$.

Pág. 150

13.1 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ -x+1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

a)



b) f admite um mínimo (absoluto) igual a 1 para $x = 0$.

c) $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.2 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. $D_{f'} = \mathbb{R}$, pois $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		0	

Min.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

f admite um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$.

Pág. 151

14. $P = 2x + y$

$A = 50 \text{ m}^2$

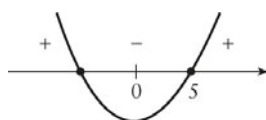
$xy = 50 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x}$

$P(x) = 2x + \frac{50}{x}$, $x > 0$

$P'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$



x	0		5	$+\infty$
$P'(x)$		-	0	+
$P(x)$			20	

Min.

O número de metros de rede é mínimo (20 m) se $x = 5 \text{ m}$ e

$y = \frac{50}{5} \text{ m} = 10 \text{ m}$.

Pág. 152

15. Atendendo à semelhança de triângulos temos:

$\frac{10-y}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - y = x \Leftrightarrow y = 10 - x$

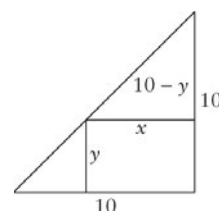
$A = xy$

$A(x) = x(10 - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 10x - x^2$, $0 < x < 10$

$A'(x) = 10 - 2x$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$



x	0		5		10
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$			25		

Máx.

$x = 5 \Rightarrow y = 10 - 5 = 5$

O retângulo de área máxima é um quadrado de lado 5 m.

Pág. 153

16.1 Pela semelhança de triângulos temos:

$\frac{10-h}{10} = \frac{x}{6}$

$10 - h = \frac{10}{6}x$

$h = 10 - \frac{5}{3}x$

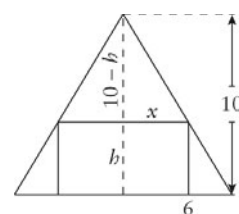
16.2 $V = A_b \times h$

$V(x) = \pi x^2 \left(10 - \frac{5}{3}x\right)$

$V(x) = 10\pi x^2 - \frac{5\pi}{3}x^3$, $0 < x < 6$

16.3 $V'(x) = 20\pi x - 5\pi x^2 = 5\pi x(4 - x)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\pi x(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \Leftrightarrow x = 4$



x	0		4		6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$					

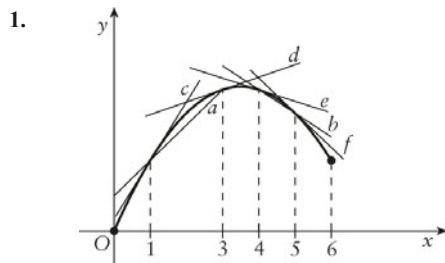
Máx.

O volume é máximo para $x = 4$ cm.

$$16.4 \quad h = 10 - \frac{5}{3} \times 4 = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$h = \frac{10}{3} \text{ cm}.$$

Pág. 154



$$d_f < d_b < d_c < d_d < d_a < d_e$$

$$f < b < e < d < a < c$$

2.1 $C \in F$

2.2 $B \in E$

2.3 $A \in D$

3. $h'(a) > 0$ e $h'(d) > 0$

$$h'(a) \times h'(d) > 0$$

Resposta: (D).

Pág. 155

4.1 Para $x < 1$, f é constante. Logo, para $x < 1$, $f'(x) < 0$.

No ponto de abscissa 1 o gráfico de f é um ponto angular.

Logo, não existe $f'(1)$.

Para $x > 1$, o gráfico de f é uma semirreta de declive negativo. Então, para $x > 1$, $f'(x)$ é uma constante negativa. $g(x)$ pode ser igual a $f'(x)$.

4.2 Para $-1 \leq x < 0$ ou $1 < x \leq 2$ o gráfico de f é formado por dois segmentos de reta de declive igual a 1. Então:

$$f'(x) = -1 \text{ para } x \in [-1, 0[\cup]1, 2].$$

Para $0 < x < 1$ o gráfico de f é um segmento de reta de declive igual a 1. Logo $f'(x) = 1$ neste intervalo.

Não existe $f'(x)$ para $x = 0$ e para $x = 1$ (pontos angulosos). $g(x)$ pode ser igual a $f'(x)$.

4.3 Em $[-1, 0]$, f é estritamente crescente e em $]-1, 0[$ $g(x) > 0$. Logo, $g(x)$ não pode ser igual a $f'(x)$.

4.4 f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

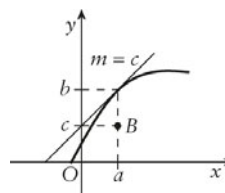
Como $f'(x)$ é numericamente igual ao declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x , observa-se que:

- Quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$, $f'(x) \rightarrow 0$ (a reta tangente tende para a horizontal);
- Quando $x \rightarrow 0$, $f'(x) \rightarrow -\infty$ (a reta tangente tende para a vertical tomando o seu declive valores negativos).

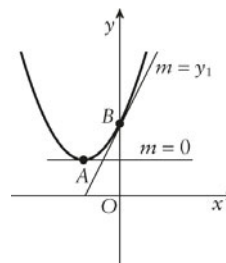
$g(x)$ pode ser igual a $f'(x)$.

Pág. 156

5.1



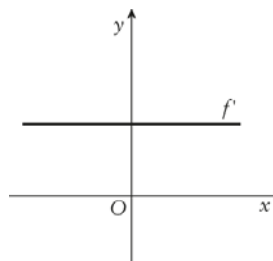
5.2



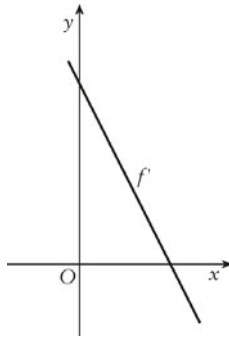
Em A, $f'(x) = 0$.

Em B, $f'(x) = y_1 =$ ordenada de B.

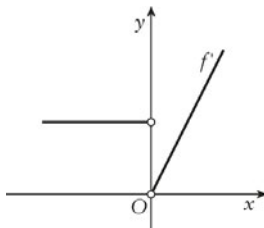
6.1



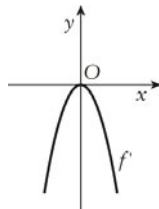
6.2



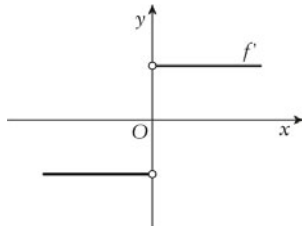
6.3



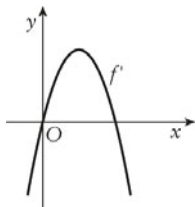
6.4



6.5



6.6



- 7.1 $f(0) < f(1)$;
 7.2 $f'(0) < f'(1)$;
 7.3 $g'(x_1) < g'(x_2)$;
 7.4 $g'(x_2) > g'(x_3)$.

Pág. 157

8.

x	0		2	
$f(x)$				
$f'(x)$		+	0	-

<Gráfico (D)
<Dado

Resposta: (D).

9.

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

Máx. Min.
<Dado
<Gráfico (B)

Resposta: (B).

Pág. 158

10.1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Mín.

f é estritamente decrescente e em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

10.2 Da variação de f resulta que $f(0)$ é um mínimo (absoluto) de f .

10.3 (A) é de rejeitar porque a função que aí se apresenta é crescente em $]-\infty, 0]$.

(B) é de rejeitar porque a função cujo gráfico aí se apresenta é decrescente em $[1, +\infty[$.

(D) é de rejeitar porque observando o gráfico de f' verifica-se que quando $x \rightarrow +\infty$, $f'(x) \rightarrow 0$, o que não acontece no gráfico apresentado em D dado que quando $x \rightarrow +\infty$ a reta tangente tende para a posição vertical ($m \rightarrow +\infty$) .

A opção correta é (C).

11.1

- a) $f(0) = -2$;
 b) $f(1) = 0$;
 c) $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$;
 d) $f'(2) = 0$;
 e) $f'(3) = 0$.

11.2

a) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, 3[$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$.

c) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2] \cup [3, 4]$.

12.1 $f'(x) = (13 - 2x - x^2)' = -2 - 2x$.

12.2 $f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)' = 0 - \frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$.

12.3 $f'(x) = \left(-\frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right)' = -7x^2 - \frac{1}{x^2}$.

12.4 $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{x^2} =$
 $= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

12.5 $f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)' = \left(2 + \frac{1}{x}\right)' = 0 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

12.6 $f'(x) = \left(\frac{x+1}{3x}\right)' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3x}\right)' = 0 + \left(\frac{1}{3}x^{-1}\right)' =$
 $= -\frac{1}{3}x^{-2} = -\frac{1}{3x^2}$.

Pág. 159

13.1 $f'(t) = -2 - 10t$

$f'(1) = -2 - 10 = -12$

13.2 $s'(t) = \left(-\frac{3}{t} + 1\right)' = \frac{3}{t^2}$

$s'(-1) = \frac{3}{1} = 3$.

13.3 $y'(u) = (u^3 - 3\sqrt{u})' = 3u^2 - \left(3u^{\frac{1}{2}}\right)' = 3u^2 - \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}-1} =$
 $= 3u^2 - \frac{3}{2u^{\frac{1}{2}}} = 3u^2 - \frac{3}{2\sqrt{u}}$

$y'(4) = 3 \times 4^2 - \frac{3}{2\sqrt{4}} = 48 - \frac{3}{4} = \frac{189}{4}$.

14. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$g'(0) = 2$.

15. $f(x) = x(3x-1)(x+3) = (3x^2 - x)(x+3) =$
 $= 3x^3 + 8x^2 - 3x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -3$

$f'(x) = 9x^2 + 16x - 3$

$f'(0) = -3$;

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \times \frac{1}{9} + \frac{16}{3} - 3 = \frac{10}{3}$;

$f'(-3) = 30$.

16. $f(x) = x^2 - 7x + 6$

$f'(x) = 2x - 7$

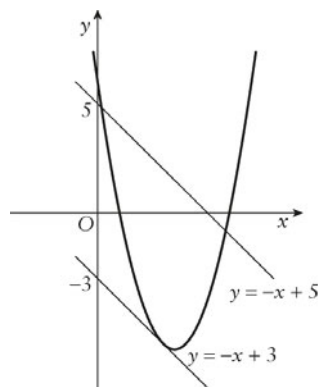
$y = 5 - x$; $m = -1$

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow 2x - 7 = -1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Ponto de tangência: $P(3, -6)$; $f(3) = 9 - 21 + 6 = -6$

$m = -1$

$y + 6 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 3 - 6 \Leftrightarrow y = -x - 3$



17.1 $f'(a) = g'(a)(0)$

17.2

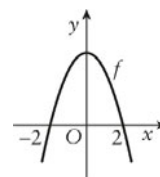
a) $f(x) = -x^2 + 4$

$f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$V(0, 0)$

$f(-2) = f(2) = 0$.



b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

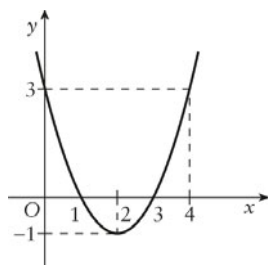
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f(2) = -1$$

$$V(2, -1).$$



c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow$$

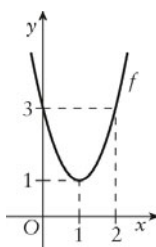
$$\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$f'(x) = 4x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1.$$

$$V(1, 1).$$



$$A(x) = -\frac{6}{10}x^2 + \frac{3}{2}x, \quad 0 < x < \frac{5}{2}$$

$$A'(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -12x + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

x	0		$\frac{5}{4}$		$\frac{5}{2}$
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$					

Máx.

A área é máxima para $x = \frac{5}{4}$. Logo, a abscissa de Q é $-\frac{5}{4}$.

$$y = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 = \frac{3}{2}$$

$$P\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

18. $A(1, 3); B(0, 1)$

Reta r :

$$m = \frac{1-3}{0-1} = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$(x^2 + x)' = 2x + 1 = f(x)$$

Resposta: (B).

19. $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right); B(0, 3)$

Reta AB :

$$m = \frac{3-0}{0+\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$AB: y = \frac{6}{5}x + 3$$

$$Q(-x, 0), \text{ com } x > 0; \quad P\left(-x, -\frac{6}{5}x + 3\right)$$

$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2} = \frac{-x \times \left(-\frac{6}{5}x + 3\right)}{2} = \frac{x}{2} \left(-\frac{6}{5}x + 3\right)$$

20. Dimensões da caixa

Altura: x

Comprimento: $40 - 2x$

Largura: $30 - 2x$

$$0 < x < 15$$

$$V(x) = x(40 - 2x)(30 - 2x)$$

$$V(x) = (40x - 2x^2)(30 - 2x)$$

$$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 280x + 1200 = 0 \wedge 0 < x < 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 70x + 300 = 0 \wedge 0 < x < 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \times 3 \times 300}}{6} \wedge 0 < x < 15 \Rightarrow$$

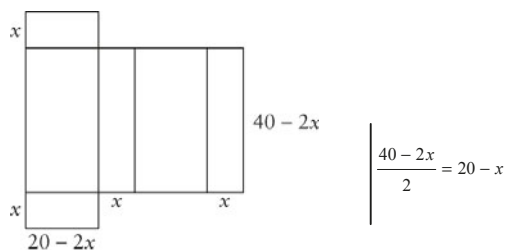
$$\Rightarrow x \approx 5,66$$

x	0		5,66		15
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$					

Máx.

O volume da caixa é máximo para $x \approx 5,66$ cm.

21.



Dimensões da caixa: x , $20 - x$, $40 - 2x$

$$V(x) = x(20 - x)(40 - 2x)$$

$$V(x) = (20x - 2x^2)(40 - 2x)$$

$$V(x) = 2x^3 - 80x^2 + 800x$$

$$0 < x < 20$$

$$V'(x) = 6x^2 - 80x + 800$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = \frac{20}{3} \stackrel{x < 20}{\Leftrightarrow} x = \frac{20}{3}$$

x	0		$\frac{20}{3}$		20
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$					

Máx.

O volume da caixa é máximo para $x = \frac{20}{3}$ cm.

22.1 $P = 6x + 4y$

$$6x + 4y = 300 \Leftrightarrow 4y = 300 - 6x \Leftrightarrow y = 75 - \frac{3}{2}x$$

$$A = 3x \times y$$

$$A(x) = 3x \left(75 - \frac{3}{2}x \right)$$

22.2 $A(x) = 225x - \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A(x) = 225x - 4,5x^2, \quad 0 < x < 50$$

$$A'(x) = 225 - 9x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 225 - 9x = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

x	0		25		50
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$			2812,5		

Máx.

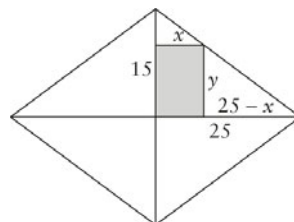
A área máxima para $x = 25$ m.

Dimensões: $3x = 75$ m.

$$y = \left(75 - \frac{3}{2} \times 25 \right) \text{ m} = 37,5 \text{ m}$$

A área máxima é $A(25) = 2812,5 \text{ m}^2$.

23.



Atendendo à semelhança de triângulos temos:

$$\frac{y}{15} = \frac{25-x}{25} \Leftrightarrow y = 15 \times \frac{25-x}{25} \Leftrightarrow y = \frac{75-3x}{5}$$

$$A = 2x \times 2y$$

$$A(x) = 4x \frac{75-3x}{5} = 4x \left(15 - \frac{3}{5}x \right) =$$

$$= 60x - \frac{12}{5}x^2, \quad 0 < x < 25$$

$$A'(x) = 60 - \frac{24}{5}x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 60 - \frac{24}{5}x = 0 \Leftrightarrow \frac{24}{5}x = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \times 60}{24} \Leftrightarrow x = 12,5$$

x	0		12,5		25
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$					

Máx.

A área do retângulo é máxima para $x = 12,5$ m.

Dimensões do retângulo de área máxima:

$$y = \frac{75 - 3 \times 12,5}{5} = 7,5$$

$$2x = 25 \text{ m}; \quad 2y = 15 \text{ m}.$$

O retângulo de área máxima tem 25 m por 15 m.

24.1 $D(x) = 1 + 50x - 25x^2$

$$D(0) = 1$$

Na zona da igreja vivem cerca de 100 habitantes por km^2 .

24.2 $D'(x) = 50 - 50x$

$$D'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - 50x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	
$D'(x)$		+	0	-
$D(x)$				

Máx.

A densidade populacional é máxima a 1 km da igreja.

25. $A = 800 \text{ m}^2 \Rightarrow xy = 800 \Rightarrow y = \frac{800}{x}, x > 0$

Comprimento do muro de tijolo: x m

Comprimento da rede: $x + 2y$ m $= x + \frac{1600}{x}$ m

Custo da vedação: $10x + 2\left(x + \frac{1600}{x}\right)$ em euros

$$C(x) = 10x + 2x + \frac{3200}{x} = 12x + \frac{3200}{x}$$

$$C'(x) = 12 - \frac{3200}{x^2} = \frac{12x^2 - 3200}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 3200 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{800}{3} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{800}{3}}$$

x			$\sqrt{\frac{800}{3}}$	
$C'(x)$		-	0	+
$C(x)$				

Mín.

$$C\left(\sqrt{\frac{800}{3}}\right) \approx 392 \text{ €}$$

$$x = \sqrt{\frac{800}{3}} \text{ m} \approx 16 \text{ m} \Leftrightarrow y \approx 49 \text{ m}$$

$$x + 2y \approx 114 \text{ m}$$

O custo mínimo da vedação é aproximadamente 392 € para um terreno com 16 m por 49 m.

A parte vedada a muro mede, aproximadamente, 16 m e a parte vedada a rede mede, aproximadamente, 114 m.

26.1 $x + y + y - 3 + x - 5 = 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y = 108 \Leftrightarrow x + y = 54 \Leftrightarrow y = 54 - x$$

$$A = xy - 5 \times 3$$

$$A(x) = x(54 - x) - 15 = 54x - x^2 - 15$$

$$A(x) = -x^2 + 54x - 15.$$

26.2 $A'(x) = -2x + 54; \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 27$

x		27	
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$			

Máx.

$$x = 27 \Rightarrow y = 54 - 27 = 27$$

A área máxima para $x = y = 27$ m.

27. $600 \times 1,5 = 900$

$$\begin{cases} R(1,5) = 900 \\ R(1,5 + 0,05) = (600 - 40) \times (1,5 + 0,05) \\ R(1,5 - 0,05) = (600 + 40) \times (1,5 - 0,05) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(1,5) = 900 \\ R(1,55) = 868 \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1,5^2 + b \times 1,5 = 900 \\ a \times 1,55^2 + b \times 1,55 = 868 \end{cases} \Leftrightarrow \\ R(1,45) = 928 \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1,45^2 + b \times 1,45 = 928 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2,25a + 1,5b = 900 \\ 2,4025a + 1,55b = 868 \Leftrightarrow \\ a \times 1,45^2 + b \times 1,45 = 928 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5b = 900 - 2,25a \\ 2,4025a + 1,55b = 868 \Leftrightarrow \\ a \times 1,45^2 + b \times 1,45 = 928 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 600 - 1,5a \\ 2,4025a + 1,55(600 - 1,5a) = 868 \Leftrightarrow \\ a \times 1,45^2 + b \times 1,45 = 928 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 600 - 1,5a \\ 0,0775a = -62 \Leftrightarrow \\ a \times 1,45^2 + b \times 1,45 = 928 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1800 \\ a = -800 \\ -800 \times 1,45^2 + 1800 \times 1,45 = 928(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1800 \\ a = -800 \end{cases}$$

$$R(x) = -800x^2 + 1800x.$$

27.2 $R'(x) = -1600x + 1800$

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -1600x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 1,125$$

x		1,125	
$R'(x)$	+	0	-
$R(x)$			

Máx.

O lucro é máximo se o preço do bilhete for 1,125 €.

Pág. 162

1. $f'(0) = d_t = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$

Resposta: (B).

2. $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \pi$

$f'(x) = -\sqrt{2}x$

$m = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$

Seja α a inclinação de t

$\operatorname{tg}(\alpha) = -1$

$\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Resposta: (A).

3. A função f tem três zeros.

A função $x \mapsto f(x+2)$ tem três zeros.

A função $g: g(x) = f(x+2) - \frac{1}{2}$ tem quatro zeros (o gráfico deixa de ser tangente a Ox).

Resposta: (D).

4. $f(x) = x^3 - \frac{11}{4}x^2$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{11}{2}x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{11}{2}x = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{11}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{6}$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Resposta: (A).

5.

x		-1		0	
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$f(x)$		$f(-1)$	$\nearrow$	2	

Como f é estritamente crescente em $[-1, 0]$, logo,

$f(-1) < f(0)$, ou seja, $f(-1) < 2$.

Entre os valores apresentados apenas $-\pi < 2$.

Resposta: (B).

6.1 $t.m.v_{[0,3]} = \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0} = \frac{-3 - 0}{3} = -1 < 0$

Resposta: (D).

6.2 $h'(-\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$

Resposta: (D).

Pág. 163

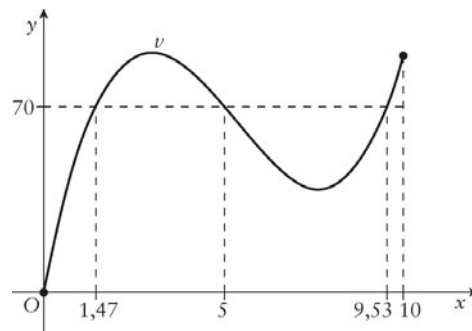
1. $v(t) = t^3 - 16t^2 + 69t$, $0 < t < 10$.

1.1 $v'(t) = 3t^2 - 32t + 69$, $0 < t < 10$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 32t + 69 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = \frac{23}{3}$

t	0		3		$\frac{23}{3}$		10
$v'(t)$		+	0	-	0	+	
$v(t)$	0	$\nearrow$	90	$\searrow$	$\frac{1058}{27}$	$\nearrow$	90
	Min.		Máx.		Min.		Máx..

A velocidade máxima atingida nos primeiros 10 minutos foi 90 centenas de rotações por minuto.



$(5 - 1,47) + (10 - 9,53) = 4$

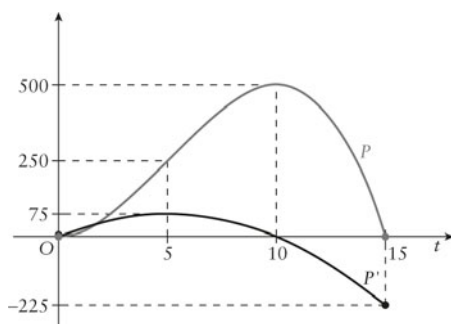
A velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 7000 rotações por minuto durante 4 minutos.

2. $f'(\sqrt{2}) = 0$; $f'(-\sqrt{2}) = \frac{0+3}{1+3} = \frac{3}{4}$

$f'(\sqrt{2}) + f'(-\sqrt{2}) = \frac{3}{4}$

3.1 $P(t) = 15t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 15$

$P'(t) = 30t - 3t^2$



3.2 $P'(5) = 30 \times 5 - 3 \times 5^2 = 75$

$P'(8) = 30 \times 8 - 3 \times 64 = 48$

Ao 5.º dia após o eclodir da epidemia o número de pessoas afetadas crescia a uma velocidade de 75 pessoas/dia e ao 8.º dia essa taxa de crescimento era de 48 pessoas/dia.

3.3

t	0		5		10		12		15
$P'(t)$	0	+	75	+	0	-	72	-	-225
$P(t)$	0	$\nearrow$	25	$\nearrow$	500	$\searrow$	432	$\searrow$	0

Máx.

O número de pessoas afetadas cresceu até ao 10.º dia em que atingiu o máximo de 500. A partir daí entrou em decréscimo podendo considerar-se que a epidemia ficou extinta ao 15.º dia.

A taxa de crescimento foi máxima ao 5.º dia. Neste dia o número de pessoas afetadas crescia à razão de 75 pessoas/dia. No 10.º dia o número de doentes deixou de crescer e no 12.º dia já decrescia à razão de 72 pessoas/dia.

4.1 $x^2 \times y = 125 \text{ cm}^3$

$y = \frac{125}{x^2}$

$A_{\text{total}} = 4xy + 2x^2$

$A(x) = 4x \times \frac{125}{x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$

$A(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}, \quad x > 0.$

4.2 $A'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}, x > 0$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 5$

x	0		5	
$A'(x)$		+	0	+
$A(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Min.

$x = 5 \Rightarrow y = \frac{125}{5^2} = 5.$

O custo do material é mínimo se a caixa tiver a forma de um cubo com 5 cm de aresta.

5. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Reta $r: y = mx + b$

$A(0, 3)$ é um ponto r pelo que $b = 3$.

Seja R o ponto onde r é tangente ao gráfico de f .

Então $R\left(a, \frac{1}{a}\right), \quad 0 < a < 3.$

$m = \frac{\frac{1}{a} - 3}{a - 0} = \frac{\frac{1-3a}{a}}{a} = \frac{1-3a}{a^2}$ (declive de $r = AR$).

$m = f'(a)$

$\frac{1-3a}{a^2} = -\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow 1-3a = -1 \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

$m = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{9}{4}$

$r: y = -\frac{9}{4}x + 3$

$-\frac{9}{4}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -9x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$D\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

Reta $s: y = mx + b$

$B(3, 0)$ é um ponto de s .

Seja S o ponto onde s é tangente ao gráfico de f .

Então $S\left(c, \frac{1}{c}\right), \quad 0 < c < 3.$

$m = \frac{\frac{1}{c} - 0}{c - 3} = \frac{\frac{1}{c}}{c - 3} = \frac{1}{c(c-3)}$

$m = f'(c)$

$\frac{1}{c(c-3)} = -\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c = -(c-3) \Leftrightarrow 2c = 3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$

$m = -\frac{4}{9}$. Como $B(3, 0) \in s$, temos:

$$s: y - 0 = -\frac{4}{9}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$$

$$E\left(0, \frac{4}{3}\right).$$

Ponto C

$$\begin{cases} y = -\frac{9}{4}x + 3 \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} = -\frac{9}{4}x + 3 \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{4}{9} + \frac{9}{4}\right)x = 3 - \frac{4}{3} \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{65}{36}x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{13} \\ y = -\frac{9}{4} \times \frac{12}{13} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{13} \\ y = \frac{12}{13} \end{cases}, \quad C\left(\frac{12}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

$$A_{[BCD]} = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2} = \begin{cases} \text{Base} = \overline{DB} = \left|3 - \frac{4}{3}\right| = \frac{5}{3} \\ \text{Altura} = \text{ordenada de } C = \frac{12}{13} \end{cases}$$

$$= \frac{\frac{5}{3} \times \frac{12}{13}}{2} = \frac{\frac{20}{13}}{2} = \frac{10}{13}$$

$$A_{[AEC]} = A_{[BCD]} \text{ pelo que:}$$

$$A = \frac{10}{13} + \frac{10}{13} = \frac{20}{13}.$$

Pág. 166

1. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 0$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$$

Resposta: (B).

2. $\overline{AC} \cdot \overline{AB} =$

$$= 10 \times 20 \times \cos(\widehat{AC, AB}) =$$

$$= 200 \times \cos 0 = 200 \times 1 = 200$$

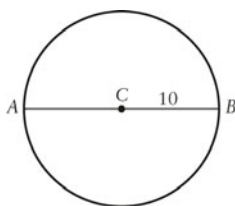
Resposta: (C).

3. $\alpha + \beta + \theta = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \theta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

Resposta: (B).



4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	-		+
g	-	0	+
$f \times g$	+		+

Pág. 167

Resposta: (A).

5. $h(x) = g(x) + x^3$

$$h'(x) = g'(x) + (x^3)'$$

$$h'(x) = 0 + 3x^2$$

$$h'(x) = 3x^2$$

Resposta: (C).

Pág. 168

1. $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{4-x} - 1$

$$g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \sqrt{x}.$$

1.1 $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4-x} - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-8+2x}{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right[$$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$		4	$+\infty$
$2x-7$	-	0	+	+	+
$4-x$	+	+	+	0	-
$\frac{2x-7}{4-x}$	-	0	+	s.s.	-

1.2 $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 4\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{4-\sqrt{x}} - 1$$

$$f \circ g: \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{4-\sqrt{x}} - 1$$

2. Seja: x = número de hectares de milho

y = número de hectares de centeio

Função objetivo: $L(x, y) = 800x + 700y$

Restrições:

$$\begin{cases} 1800x + 1400y \leq 156\,000 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 30 \\ y \geq \frac{1}{3}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x + 14y \leq 1560 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 30 \\ 3y \geq x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 100 \\ -x + 2y \geq 0 \\ 18x + 14y \leq 1560 \\ x \geq 30 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

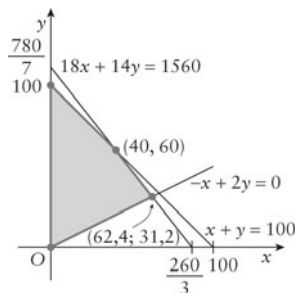
$-x + 2y = 0$		$x + y = 100$	
x	y	x	y
0	0	0	100
100	50	100	0

$18x + 14y = 1560$	
x	y
0	$\frac{780}{7} \approx 111,4$
$\frac{260}{3} \approx 86,7$	0

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 18x + 14y = 1560 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (40, 60)$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 18x + 14y = 1560 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (62,4; 31,2)$$

Região admissível



x	y	$L(x, y) = 800x + 700y$
0	0	0
62,4	31,2	71 600
40	60	74 000
0	100	70 000

← Máximo

Devem ser semeados 40 hectares de milho e 60 hectares de centeio.

3. $ABC: x + y + 2z - 8 = 0$.

3.1 Se $a = 2$ as coordenadas do vértice serão $V(1, 1, h)$.

$$V \in ABC:$$

$$1 + 1 + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow 2h = 6 \Leftrightarrow h = 3$$

$$V(1, 1, 3)$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 4$$

$$V = 4.$$

3.2 $V\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 3,5\right) \in ABC$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2 \times 3,5 - 8 = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$a = 1.$$

3.3 $V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h\right) \in ABC$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow a + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow h = 4 - \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h$$

$$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \left(4 - \frac{a}{2}\right) = \frac{4}{3} a^2 - \frac{a^3}{6}$$

$$V'(a) = \frac{4}{3} a^2 - \frac{1}{6} a^3.$$

3.4 $V'(a) = \frac{8}{3} a - \frac{3}{6} a^2 = a \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} a\right)$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{1}{2} a = \frac{8}{3}$$

Como $a \in [0, 4]$,

$V'(a)$ não tem zeros

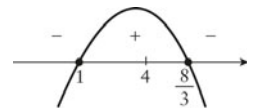
$$V'(a) > 0, \forall a \in [0, 4] \Rightarrow$$

$\Rightarrow V$ é estritamente crescente em $[0, 4] \Rightarrow$

$\Rightarrow V$ é máximo para $a = 4$.

$$a = 4 \Rightarrow h = 4 - \frac{4}{2} = 4 - 2 = 2$$

O volume é máximo se a aresta da base for igual a 4 e a altura igual a 2.



4. $f(x) = a + b \cos x$.

4.1 $f(\theta) = 2 + 3 \cos \theta$; $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$ e $\theta \in]0, \pi[$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + (2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9}.$$

Como $\theta \in]0, \pi[$ e $\operatorname{tg} \theta > 0$ então $\theta \in 1.^\circ \text{Q}$ pelo que

$$\cos \theta = \frac{1}{3}.$$

$$f(\theta) = 2 + 3 \cos \theta = 2 + 3 \times \frac{1}{3} = 3.$$

4.2 $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$-b \leq b \cos x \leq b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a - b \leq a + b \cos x \leq a + b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D_f' = [a - b, a + b] = [-8, 2]$$

$$\begin{cases} a - b = -8 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ -3 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$a = -3 \text{ e } b = 5.$$

Pág. 170

1. $g(1) = 2 \Leftrightarrow 1 = g^{-1}(2)$

$$(f \circ g)(1) + g^{-1}(2) = f(g(1)) + 1 = f(2) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Resposta: (A).

2. Vértices:

$$(0, 1); (1, 1); (3, 3); (1, 4) \text{ e } (0, 4)$$

$$L(x, y) = 4x + y$$

$$L(0, 1) = 1$$

$$L(1, 1) = 4 + 1 = 5$$

$$L(3, 3) = 12 + 3 = 15 \leftarrow \text{Máximo de } L: x = y = 3$$

$$L(1, 4) = 4 + 4 = 8$$

$$L(0, 4) = 0 + 4 = 4$$

Resposta: (B).

Pág. 171

3.

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$					

Como $0 < a$, f é estritamente crescente em $[0, b]$.

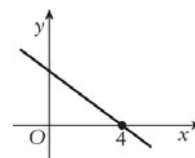
Resposta: (B).

4. $f(4) = 0$ e f é estritamente decrescente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in]-\infty, 4].$$

$$\text{Sendo } g(x) = \sqrt{f(x)},$$

o domínio de g pode ser $]-\infty, 4]$.



Resposta: (B).

5. $\overline{PC} = \sin \alpha$

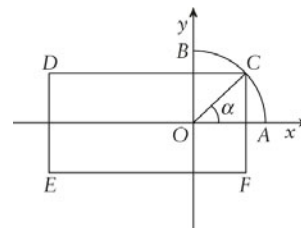
$$\overline{FC} = 2 \sin \alpha$$

$$\overline{QC} = \cos \alpha$$

$$\overline{DC} = 2 + \cos \alpha$$

$$A_{[CDEF]} = \overline{FC} \times \overline{DC} = 2 \sin \alpha (2 + \cos \alpha)$$

Resposta: (A).



Pág. 172

1. $f(x) = \frac{ax+5}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 50.$$

1.1 $f(x) = a - \frac{a-5}{x+1}$

$$\frac{ax+5}{-ax-a} = \frac{x+1}{a}$$

A reta de equação $y = a$ é uma assíntota do gráfico de f , logo, $a = 8$ e $a - 5 = 3$.

$$\text{Assim, } f(x) = 8 - \frac{3}{x+1}.$$

1.2 $f(x) \geq 7 \Leftrightarrow 8 - \frac{3}{x+1} \geq 7 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[$$

Cálculos auxiliares:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	s.s.	-	0	+

1.3 $f'(x) = -6x^2 + 36x - 48$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 36x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Cálculos auxiliares:

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		10		18	
		Mín.		Máx.	

$$f(2) = 10; \quad D(2, 10); \quad A(2, 0)$$

$$f(4) = 18; \quad C(4, 18); \quad B(4, 0)$$

$$\text{Logo: } \overline{AD} = 10, \quad \overline{BC} = 18 \text{ e } \overline{AB} = |4 - 2| = 2.$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{10 + 18}{2} \times 2 = 28$$

$$A_{[ABCD]} = 28 \text{ u.a.}$$

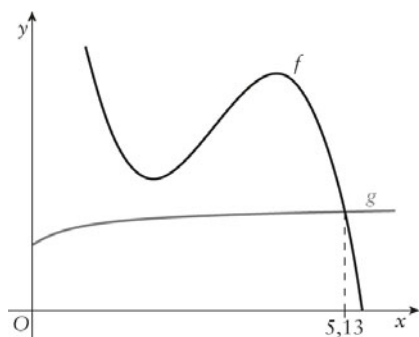
1.4 Ponto de tangência: $P(3, 14)$ dado que $g(3) = 14$.

$$m = g'(3) = -6 \times 9 + 36 \times 3 - 48 = 6$$

$$t: y - 14 = 6(x - 3) \Leftrightarrow y = 6x - 18 + 14$$

$$t: y = 6x - 4$$

1.5



$$f(x) = g(x) \wedge x > 0 \Rightarrow x \approx 5, 13.$$

O quadrilátero $[OABC]$ é um paralelogramo pois $BA \parallel CO$ e $BC \parallel AO$.

$$A_{[OABC]} = \overline{AB} \times \overline{OM}$$

$$A(\alpha) = 2 \cos \alpha \times \sin \alpha.$$

2.2 $P(1, \operatorname{tg} \alpha)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

Como α é do 1.º quadrante vem

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ pelo que:}$$

a) $A(\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$$A(\alpha) = \frac{24}{25} \text{ u. a.}$$

b) $10 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) + 5 \sin (5\pi - \alpha) =$

$$= 10 \sin \alpha + 5 \sin (\pi - \alpha) =$$

$$= 10 \sin \alpha + 5 \sin \alpha = 15 \sin \alpha =$$

$$= 15 \times \frac{4}{5} = 12.$$

c) $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$

$$A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$B\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

O declive da reta BC é igual ao declive da reta OP que é igual a $\operatorname{tg} \alpha$.

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Logo } B\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ é um ponto da reta e } m = \frac{4}{3}.$$

$$y - \frac{4}{5} = \frac{4}{3} \left(x + \frac{3}{5} \right) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{5}.$$

Pág. 173

2.1

$$\overline{AM} = \cos \alpha$$

$$\overline{AB} = 2 \cos \alpha \text{ porque}$$

$$\overline{BM} = \overline{MA}$$

$$\overline{OM} = \sin \alpha$$

