

Pág. 10

1. $f(x) = x^2 + 1$.

1.1 $D_f = \mathbb{R}$.

1.2 $f'(x) = 2x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

1.3 Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_0^+$, g é estritamente crescente.

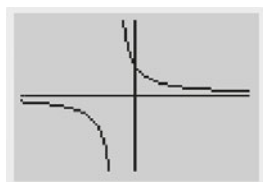
2. $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

2.1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

f é do tipo $a + \frac{b}{x+c}$ com $a = 0$.

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2.2



f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

2.3 Com $\mathbb{N} \subset]-1, +\infty[$, g é estritamente decrescente.

3.1 $O(0, 0)$; $A(2, 1)$; $B(2, -1)$; $C(4, 1)$.

Reta OA :

$$m = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Reta BC :

$$m = \frac{1+1}{4-2} = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 3$$

$$h(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

3.2 h é constante em $[-2, 0]$ e é estritamente crescente em $]0, 2]$ e em $]2, 4]$.

3.3

x	1	2	3	4
$g(x) = h(x)$	$\frac{1}{2}$	1	0	1

a) $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

$$D'_g = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

b) g não é monótona

$$g(1) < g(2), g(2) > g(3) \text{ e } g(3) < g(4).$$

4. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, a, \frac{11}{36}, \dots, \frac{2n-1}{n^2}$

4.1 $a = \frac{9}{25}$.

4.2 $\frac{2n-1}{n^2}$.

Pág. 11

5.1 $1, 2, 3, 4, 5$
 $4, 7, 10, 13, 16$

A figura 5 tem 16 ruas.

5.2 $1, 2, 3, 4, \dots, n$
 $3, 6, 9, 12, \dots, 3n$
 $4, 7, 10, 13, \dots, 3n+1$
 $3n+1$.

5.3 $3 \times 15 + 1 = 46$

A figura 15 tem 46 ruas.

6.1

Número da figura	3	4
Número de pontos no retângulo	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 5 = 20$
Número de pontos no triângulo	6	10

6.2 $10 \times (10 + 1) = 10 \times 11 = 110$

$$a = 110.$$

6.3 $n(n+1)$ pontos.

6.4 $\frac{n(n+1)}{2}$ pontos.

6.5 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Pág. 12

1.

n	1	2	3	4	5	...	n
a_n	12	24	36	48	60	...	$12n$

2.

n	1	2	3	4	5	...	n
a_n	2	8	18	32	50	...	$2n^2$

3.

n	1	2	3	4	5	...	n
a_n	3	8	15	24	35	...	$n(n+2)$

Pág. 14

1.1

a) $a_n = 2^n$

$$a_1 = 2; a_2 = 2^2 = 4; a_3 = 2^3 = 8; a_4 = 2^4 = 16; a_5 = 2^5 = 32.$$

b) $b_n = 30$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 30.$$

c) $c_n = 1 - 2n$

$$c_1 = 1 - 2 \times 1; c_2 = 1 - 2 \times 2 = -3; c_3 = 1 - 2 \times 3 = -5;$$

$$c_4 = 1 - 2 \times 4 = -7; c_5 = 1 - 2 \times 5 = -9.$$

d) $d_n = (-1)^{n+1} \times \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^2 \times \frac{1}{1} = 1; \quad d_2 = (-1)^3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$d_3 = (-1)^4 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}; \quad d_4 = (-1)^5 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$d_5 = (-1)^6 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

1.2 $u_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

a)

i) $u_1 = \frac{1^2 - 1}{1} = 0$

ii) $u_5 = \frac{5^2 - 1}{5} = \frac{24}{5}$

iii) $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$

b) $u_n = 9,9 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 1}{n} = 9,9 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 9,9n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9,9n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{9,9 \pm \sqrt{9,9^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 0,1 \vee n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 10$ pelo que $u_{10} = 9,9$.

c) $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 1}{n} = 6 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 6n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

A equação é impossível em $\mathbb{N}$ pelo que 6 não é termo da sucessão (u_n) .

Pág. 14

2.1 $a_n = \frac{6}{n}$

$$a_1 = \frac{6}{1} = 6; \quad a_2 = \frac{6}{2} = 3; \quad a_3 = \frac{6}{3} = 2;$$

$$a_4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \quad a_5 = \frac{6}{5}.$$

$$b_n = \frac{9}{3^n}$$

$$b_1 = \frac{9}{3^1} = 3; \quad b_2 = \frac{9}{3^2} = 1; \quad b_3 = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3};$$

$$b_4 = \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}; \quad b_5 = \frac{9}{3^5} = \frac{1}{27}.$$

$$c_n = 4 + (-1)^n$$

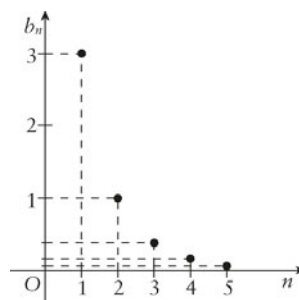
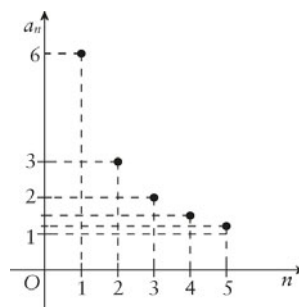
$$c_1 = 4 + (-1)^1 = 3; \quad c_2 = 4 + (-1)^2 = 5;$$

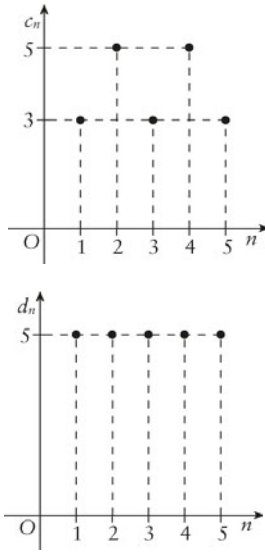
$$c_3 = 4 + (-1)^3 = 3; \quad c_4 = 4 + (-1)^4 = 5;$$

$$c_5 = 4 + (-1)^5 = 3.$$

$$d_n = 5, \text{ logo, } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 5.$$

2.2





Pág. 15

3.

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

3.1 $b_1 = 5$

$$b_2 = 3 + b_1 = 3 + 5 = 8$$

$$b_3 = 3 + b_2 = 3 + 8 = 11$$

$$b_4 = 3 + b_3 = 3 + 11 = 14$$

A diferença entre dois termos consecutivos é igual a 3.

3.2 n :	1	2	3	4
$3n$:	3	6	9	12
$3n + 2$:	5	8	11	14
$b_n = 3n + 2$.				

Pág. 19

4.1

a) $a_n = 6 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(6 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(6 - \frac{1}{n}\right) = 6 - 6 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

b) $b_n = 6 + (-1)^n$

$$b_1 = 6 - 1 = 5, \quad b_2 = 6 + 1 = 7, \quad b_3 = 6 - 1 = 5$$

$$b_2 > b_1 \text{ e } b_3 < b_2$$

(b_n) não é monótona.

c) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} = \\ &= \frac{(n+4)(n+1) - (n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^2+n+4n+4 - n^2-2n-3n-6}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$c_{n+1} - c_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (c_n) \text{ é estritamente decrescente.}$$

4.2 $u_n = (-3)^n$

$$u_1 = -3; \quad u_2 = 9; \quad u_3 = -27.$$

$$u_2 > u_1 \text{ e } u_3 < u_2 \Rightarrow (u_n) \text{ não é monótona.}$$

4.3 $v_n = (6-n)^2$

$$v_5 = (6-5)^2 = 1; \quad v_6 = (6-6)^2 = 0$$

$$v_7 = (6-7)^2 = 1$$

$$v_6 < v_5 \text{ e } v_7 > v_6 \Rightarrow (v_n) \text{ não é monótona.}$$

Pág. 22

5.1 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 < a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

5.2 $b_n = 5$

(b_n) é limitada dado ser uma sucessão constante.

5.3 $c_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Se n é ímpar:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0$$

Então:

$$-1 \leq c_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n) \text{ é limitada.}$$

5.4

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < d_n \leq \frac{1}{2}$$

Se n é ímpar:

$$d_n = -1$$

Então:

$$-1 \leq d_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (d_n) \text{ é limitada.}$$

Pág. 23

6. Em $\mathbb{N}$, a sucessão dos quadrados perfeitos não é limitada superiormente. Então a sucessão dos seus simétricos não é limitada inferiormente.

Logo, (u_n) não é limitada.

7. $\sqrt{n^2 + 1}$ aumenta com n , ou seja,

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} > \sqrt{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então,

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} > \frac{-3}{\sqrt{n^2 + 1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

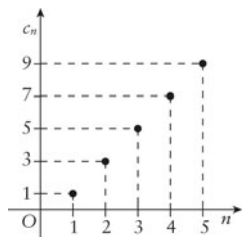
$$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (u_n) \text{ é monótona crescente.}$$

Pág. 25

8. $c_n = 2n - 1$.

8.1



8.2 $c_{10} = 2 \times 10 - 1 = 19$

$$c_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199$$

$$c_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$c_{t+7} = 2(t+7) - 1 = 2t + 13, \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.3 $c_n < 100 \Leftrightarrow 2n - 1 < 100 \Leftrightarrow 2n < 101 \Leftrightarrow n < 50,5 \Leftrightarrow n \leq 50$

A sucessão tem 50 termos inferiores a 100.

8.4 $c_n \geq 1000 \Leftrightarrow 2n - 1 \geq 1000 \Leftrightarrow 2n \geq 1001 \Leftrightarrow n \geq 501$

Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente o número de termos superiores a 1000 é infinito.

8.5 $c_{n+1} - c_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$

$$c_{n+1} - c_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (c_n) \text{ é monótona crescente.}$$

8.6 (c_n) é a sucessão dos números ímpares.

Logo, (c_n) não é limitada.

Pág. 26

9. $a_n = \frac{2n+6}{n+1}.$

9.1 $a_n = 7,3 \Leftrightarrow \frac{2n+6}{n+1} = 7,3 \Leftrightarrow 2n+6 = 7,3n+7,3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5,3n = -1,3 \Leftrightarrow n = -\frac{1,3}{5,3} \notin \mathbb{N}$

Dado que $-\frac{1,3}{5,3} \notin \mathbb{N}$, 7,3 não é termo de a_n .

9.2 $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+6}{(n+1)+1} - \frac{2n+6}{n+1} = \frac{2n+8}{n+2} - \frac{2n+6}{n+1} =$
 $= \frac{2(n+8)(n+1) - (n+2)(2n+6)}{(n+2)(n+1)} =$
 $= \frac{2n^2 + 2n + 8n + 8 - 2n^2 - 6n - 4n - 12}{(n+2)(n+1)} =$
 $= \frac{-4}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) \text{ é monótona decrescente.}$$

9.3 $a_n > 2 \Leftrightarrow \frac{2n+6}{n+1} > 2 \Leftrightarrow 2n+6 > 2n+2 \Leftrightarrow 6 > 2 \text{ (V)}$

$$a_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

9.4 $a_1 = \frac{2+6}{1+1} = 4$

$$(a_n) \text{ é monótona decrescente} \Rightarrow a_n \leq a_1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}.$$

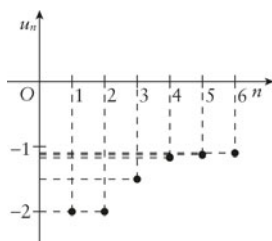
Logo, $2 < a_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é limitada.

Pág. 27

10. $u_n = \begin{cases} -2 & \text{se } n \leq 2 \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{se } n > 2 \end{cases}.$

10.1 $u_1 = u_2 = -2; \quad u_3 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}; \quad u_4 = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4};$

$$u_5 = -1 - \frac{1}{5} = -\frac{6}{5}$$



10.2 Para $n > 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(-1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(-1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 \wedge u_3 > u_2 \wedge u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(u_n) é monótona crescente em sentido lato.

10.3 Para $n > 2$:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq -1 - \frac{1}{n} < -1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq u_n < -1$$

$$u_1 = u_2 = -2 \wedge -\frac{4}{3} \leq u_n < -1, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow -2 \leq u_n < -1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n) \text{ é limitada.}$$

Pág. 28

1.1 $a_n = \frac{2-3n}{2}$

$$a_1 = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{2-6}{2} = -2; \quad a_3 = \frac{2-9}{2} = -\frac{7}{2};$$

$$a_4 = \frac{2-12}{2} = -5; \quad a_5 = \frac{2-15}{2} = -\frac{13}{2}.$$

1.2 $b_n = (-1)^n \times \frac{n}{1+n}$

$$b_1 = (-1)^1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}; \quad b_2 = (-1)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3};$$

$$b_3 = (-1)^3 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}; \quad b_4 = (-1)^4 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5};$$

$$b_5 = (-1)^5 \times \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}.$$

1.3 $c_n = \frac{2+(-1)^{n+1} \times n}{n}$

$$c_1 = \frac{2+(-1)^2 \times 1}{1} = \frac{2+1}{1} = 3; \quad c_2 = \frac{2+(-1)^3 \times 2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$c_3 = \frac{2+(-1)^4 \times 3}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$c_4 = \frac{2+(-1)^5 \times 4}{4} = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$c_5 = \frac{2+(-1)^6 \times 5}{5} = \frac{2+5}{5} = \frac{7}{5}$$

2.1

n	1	2	13	15	...	n
a_n	8	6	-16	-20	...	$10-2n$

$$10-2n = -16 \Leftrightarrow 2n = 26 \Leftrightarrow n = 13$$

$$10-2n = -20 \Leftrightarrow 2n = 30 \Leftrightarrow n = 15$$

n	1	2	4	5	...	n
a_n	-2	4	16	-32	...	$(-1)^n \times 2^n$

$$2^n = 16 \Leftrightarrow 2^n = 2^4 \Leftrightarrow n = 4$$

$$2^n = 32 \Leftrightarrow 2^n = 2^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

3.1

1	2	3	4	...	n
3	5	7	9	...	$2n+1$

$a_n = 2n+1.$

3.2

1	2	3	4	...	n
4	8	12	16	...	$4n$

$b_n = 4n.$

Pág. 29

4.1

1	2	3	4	...	n
8	16	24	32	...	$8n$

$a_n = 8n.$

4.2

1	2	3	4	...	n
2	-2	2	-2	...	$(-1)^{n+1} \times 2$

$b_n = 2 \times (-1)^{n+1}.$

4.3

2	2	3	4	...	n
-2	2	-2	2	...	$(-1)^n \times 2$

$c_n = 2 \times (-1)^n.$

4.4

1	2	3	4	5	...	n
4	6	8	10	12	...	$2(n+1) = 2n+2$

$d_n = 2n+2.$

4.5

1	2	3	4	5	6	...	n
3	5	7	9	11	13	...	$2n-1$

$e_n = 2n-1.$

$$4.6 \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \dots & 3n-1 \\ f_n = 3n-1. \end{array}$$

$$4.7 \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots & 2^n \\ g_n = 2^n. \end{array}$$

$$4.8 \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ \frac{7}{1} & \frac{10}{3} & \frac{13}{5} & \frac{16}{7} & \frac{19}{9} & \dots & \frac{3n+4}{2n-1} \\ h_n = \frac{3n+4}{2n-1}. \end{array}$$

5.1 Falso: $u_3 > u_2 \wedge u_4 < u_3$.

5.2 Falso: O conhecimento dos 10 primeiros termos não permite concluir se a sucessão é, ou não, limitada.

5.3 Verdadeiro. Toda a sucessão constante é limitada.

5.4 Falso. Por exemplo a sucessão $a_n = (-1)^n \times 2$ é limitada e não monótona.

5.5 Verdadeiro. (u_n) é monótona crescente $\Rightarrow u_n \geq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.6 Falso. (u_n) é monótona crescente $\Rightarrow u_n \geq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

6.1

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = 4, u_2 = 2 u_1 = 2 \times 4 = 8; u_3 = 2 u_2 = 2 \times 8 = 16;$$

$$u_4 = 2 u_3 = 2 \times 16 = 32; u_5 = 2 u_4 = 2 \times 32 = 64.$$

6.2

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = 10, u_2 = \frac{2}{3} u_1 = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3};$$

$$u_3 = \frac{2}{3} u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{20}{3} = \frac{40}{9};$$

$$u_4 = \frac{2}{3} u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{40}{9} = \frac{80}{27};$$

$$u_5 = \frac{2}{3} \times u_4 = \frac{2}{3} \times \frac{80}{27} = \frac{160}{81}.$$

6.3

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$u_3 = u_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4};$$

$$u_4 = u_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8};$$

$$u_5 = u_4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

6.4

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = 1;$$

$$u_2 = 2;$$

$$u_3 = u_1 + u_2 = 1 + 2 = 3;$$

$$u_4 = u_2 + u_3 = 2 + 3 = 5;$$

$$u_5 = u_3 + u_4 = 3 + 5 = 8.$$

$$7.1 \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

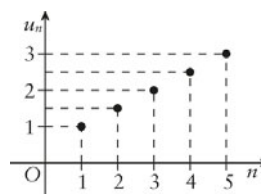
$$7.2 \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pág. 30

$$8. \quad u_n = \frac{n+1}{2}.$$

$$8.1 \quad u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = 2, u_4 = \frac{5}{2}, u_5 = 3$$



$$8.2 \quad u_n = 8,5 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} = 8,5 \Leftrightarrow n+1 = 17 \Leftrightarrow n = 16$$

$$u_{16} = 8,5.$$

8.3 Por exemplo 6,1, pois:

$$u_n = 6,1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} = 6,1 \Leftrightarrow n+1 = 12,2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = 11,2 \notin \mathbb{N}.$$

8.4 $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{2} =$

$$= \frac{n+2-n-1}{2} = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (u_n) \text{ é monótona crescente.}$$

8.5 u_n é monótona crescente $\Rightarrow u_n \geq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ é um minorante de } \{u_n\}$$

Logo, $\{u_n\}$ é minorado.

9.1 A área do losango (F_n) é metade do losango (F_{n-1}):

Número da figura	1	2	3	4	5
Área da figura (cm ²)	200	100	50	25	12,5

9.2

$$a_n : \begin{cases} a_1 = 200 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

9.3 A área de qualquer das figuras é representada por um número positivo, ou seja $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) \text{ é monótona decrescente.}$$

$$(a_n) \text{ é monótona decrescente} \Rightarrow a_n \leq a_1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \leq 200, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 < a_n \leq 200, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

10. $v_n = \frac{n+6}{3n}.$

10.1 $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{7}{3} + \frac{8}{6} + \frac{9}{9} = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{14}{3}.$

10.2 $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1+6}{3(n+1)} - \frac{n+6}{3n} = \frac{(n+7)n - (n+6)(n+1)}{3(n+1)n} =$

$$= \frac{n^2 + 7n - n^2 - n - 6n - 6}{3(n+1)n} = \frac{-6}{3(n+1)n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_{n+1} - v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (v_n) \text{ é monótona decrescente.}$$

10.3 $v_n = \frac{n+6}{3n} = \frac{n}{3n} + \frac{6}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{n} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{2}{n} \leq \frac{1}{3} + 2$$

$$\frac{1}{3} < v_n \leq \frac{7}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (v_n) \text{ é limitada.}$$

10.4 Por exemplo:

$$w_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ \frac{n+6}{3n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

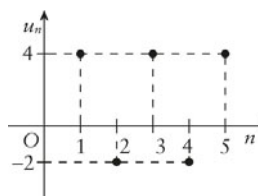
$$w_8 = 8; w_9 = 9; w_{10} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15};$$

$$w_9 > w_8 \wedge w_{10} < w_9 \Rightarrow (w_n) \text{ não é monótona.}$$

11. $a_n = (-1)^{n+1} \times 3 + 1.$

11.1 $a_1 = 3 + 1 = 4; a_2 = -3 + 1 = -2; a_3 = 3 + 1 = 4;$

$$a_4 = -3 + 1 = -2; a_5 = 3 + 1 = 4$$



11.2 $a_n : \begin{cases} 4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$$-2 \leq a_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

11.3 Por exemplo $b_n = (-1)^n \times 3 + n.$

$$a_n + b_n = (-1)^n \times 3 + 1 + (-1)^n \times 3 + n =$$

$$= (-1)^n (-1)^1 \times 3 + (-1)^n \times 3 + 1 + n =$$

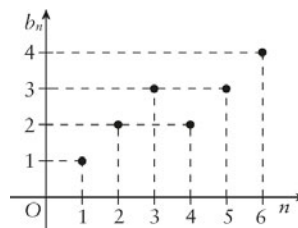
$$= -(-1)^n \times 3 + (-1)^n \times 3 + 1 + n = 1 + n$$

$$a_n + b_n = 1 + n. \text{ Logo, } (a_n + b_n) \text{ é monótona crescente.}$$

Pág. 31

12. $b_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 3 \\ n-2 & \text{se } n > 3 \end{cases}$

12.1



12.2 Para:

$$n < 3, \quad b_{n+1} - b_n = n + 1 - n = 1 > 0$$

$$n < 3, \Rightarrow b_{n+1} - b_n > 0$$

Para:

$$n > 3, \quad b_{n+1} - b_n = (n+1) - 2 - (n-2) = 1 > 0$$

$$n > 3, \Rightarrow b_{n+1} - b_n > 0.$$

12.3 (b_n) não é monótona, dado que:

$$\text{Para } n = 3, \quad b_{n+1} - b_n = b_4 - b_3 = 2 - 3 = -1 < 0.$$

$$\text{Para } n \neq 3, \quad b_{n+1} - b_n > 0.$$

12.4

$$\text{Se } a_n = \begin{cases} u_n & \text{se } n \leq k \\ v_n & \text{se } n > k \end{cases}$$

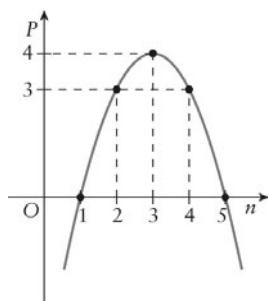
Para se estudar a monotonia de (a_n) verifica-se o sinal de

$a_{n+1} - a_n$ para:

- $n < k$
- $n > k$ e
- $n = k$

Se o sinal se mantiver nos três pontos então (a_n) é monótona.

13.1 $p(x) = -x^2 + 6x - 5, \quad D_p = \mathbb{R}$



13.2

$$u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto n^2 + 6n - 5$$

(u_n) é a restrição de p a $\mathbb{N}$.

(u_n) não é monótona

$$u_2 = p(2) = 3, \quad u_3 = p(3) = 4$$

$$u_4 = p(4) = 3$$

$$u_3 > u_2 \wedge u_4 < u_3 \Rightarrow (u_n) \text{ não é monótona.}$$

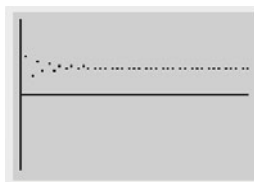
$(3, 4)$ são as coordenadas do vértice de P

$$D'_p =]-\infty, 4]; \quad u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$$

O conjunto dos termos (u_n) é majorado mas não é minorado pelo que a sucessão (u_n) não é limitada.

$$u_1 = u_5 = 0.$$

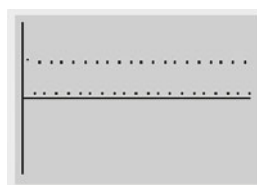
14.1



$$k = 0,5$$

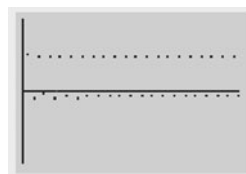


$$k = 0,75$$



$$k = 0,9.$$

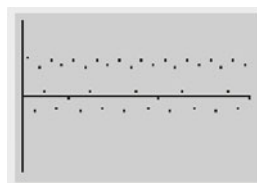
14.2



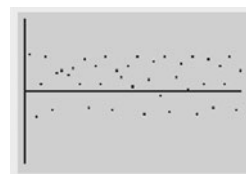
$$k = 1,2$$



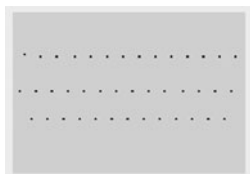
$$k = 1,3$$



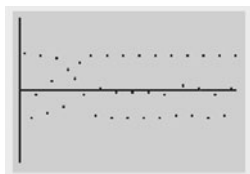
$$k = 1,4$$



$$k = 1,7$$



$$k = 1,75$$



$$k = 1,8$$

Pág. 32

1. (A) Falso. O domínio não é $\mathbb{N}$.
- (B) Falso. O domínio de uma sucessão é $\mathbb{N}$.
- (C) Falso. O contradomínio de uma sucessão é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Resposta: (D).

2. Se $k = 10$, $u_{k+1} = u_{11} = 3$

Resposta: (C).

3. $a_1 = 3 = 2 \times 1 + 1$
 $a_2 = 3 + 2 = 5 = 2 \times 2 + 1$
 $a_3 = 5 + 2 = 7 = 2 \times 3 + 1$
 $a_n = 2n + 1$

Resposta: (C).

4. (A): $a_1 = -1$; $a_2 = 2$; $a_3 = -3$.
 (B): $a_{99} = 101$; $a_{100} = 100$; $a_{101} = 101$.
 (C): $a_{99} = -101$; $a_{100} = -100$; $a_{101} = -101$.

$$(D) \quad d_n = \frac{n+2}{n+3}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \\ &= \frac{1}{(n+4)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(d_n) é monótona.

Resposta: (D).

$$5. \quad 0 < \frac{3}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1000 < \frac{3}{n} + 1000 \leq 1003$$

$$1000 < c_n \leq 1003, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n) \text{ é limitada.}$$

Resposta: (C).

$$6. \quad a_n = (-1)^n \frac{1}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Se n é ímpar:

$$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$$

$$\text{Então } -1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

(a_n) não é monótona porque os seus termos são alternadamente negativos e positivos.

Resposta: (A).

7. Uma sucessão constante é monótona (em sentido lato) e limitada.

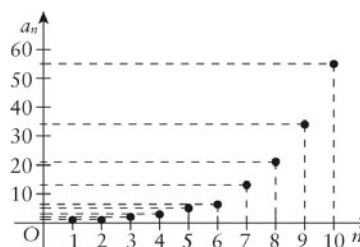
Resposta: (D).

Pág. 33

$$1. \quad \begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1.1 $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1 + 1 = 2$; $a_4 = 1 + 2 = 3$;
 $a_5 = 2 + 3 = 5$; $a_6 = 3 + 5 = 8$; $a_7 = 5 + 8 = 13$;
 $a_8 = 8 + 13 = 21$; $a_9 = 13 + 21 = 34$; $a_{10} = 21 + 34 = 55$
 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$.

1.2



$$1.3 \quad b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 1; b_2 = \frac{a_3}{a_2} = 2; b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}; b_4 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3};$$

$$b_5 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}; b_6 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8}; b_7 = \frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13}; b_8 = \frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21};$$

$$b_9 = \frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34}.$$

1.4 $b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}, n \geq 2$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \text{ dado que } b_{n-1} = \frac{a_{(n-1)+1}}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}, n \geq 2.$$

2.1 $a_n = \frac{n}{n+3}$

$$a_n \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{n+3} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4n \geq n+3 \Leftrightarrow 3n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Como $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\frac{1}{4} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Atendendo a que $n+3 > 0$ e $n > n+3, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que,

dividindo ambos os membros por $n+3, \frac{n}{n+3} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então $\frac{1}{4} \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é limitada.

3. $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_{n+1} = 3t_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$t_1 = 2 = 3^0 \times 2; t_2 = 3 \times 2 = 3^1 \times 2;$$

$$t_3 = 3 \times 3 \times 2 = 3^2 \times 2; t_4 = 3 \times 3^2 \times 2 = 3^3 \times 2$$

$$t_n = 2 \times 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

4. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < u_n \leq \frac{3}{2}$$

Se n é ímpar:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow -1 - 1 \leq -1 - \frac{1}{n} \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq u_n \leq -1$$

Então, $-2 \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)$ é limitada.

(u_n) não é monótona porque os seus termos são alternadamente positivos e negativos.

5.1 A área de cada quadrado é igual a metade da área do quadrado precedente como a figura sugere:

$$a_1 = 1^2 = 1;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2};$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.$$

5.2 $a_1 = 1 = \frac{1}{2^0}; a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1};$

$$a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}; a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3};$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

5.3 $l_n = \sqrt{a_n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt{2^{-n+1}} = (2^{1-n})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1-n}{2}}$

$$l_n = 2^{\frac{1-n}{2}}.$$

6. $f(n) = \frac{n+1}{n}.$

6.1 $f(20) = \frac{21}{20}.$

6.2 $f(n) = 1,01 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} = 1,01 \Leftrightarrow n+1 = 1,01n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,01n = 1 \Leftrightarrow n = \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow n = 100$$

$$f(100) = 0,01.$$

6.3 $f(n) < 1,001 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < 1,001 \Leftrightarrow n+1 < 1,001n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,001n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,001} \Leftrightarrow n > 1000$$

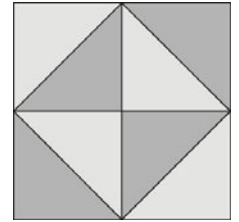
A partir do termo de ordem 1001, inclusive, os termos de f são menores que 1,001.

6.4 $f(n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq f(n) \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

1 é minorante e 2 um majorante de $\{f(n)\}$.



7. $(-1)^{n+1} \times 2 + \frac{n+1}{n}$.

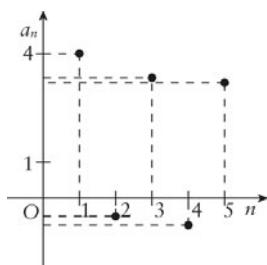
7.1 $a_1 = 2 + 2 = 4$;

$$a_2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$a_3 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3};$$

$$a_4 = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4};$$

$$a_5 = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$$



7.2

$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -2 + \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} 2 + 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -2 + 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Se n é ímpar:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4$$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2}$$

Logo, $-1 < a_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é limitada.

7.3 Por exemplo $b_n = (-1)^n \times 2$

$$\begin{aligned} b_n + a_n &= (-1)^n \times 2 + (-1)^{n+1} \times 2 + \frac{n+1}{n} = \\ &= (-1)^n \times 2 + (-1)^1 (-1)^n \times 2 + \frac{n+1}{n} = \\ &= (-1)^n \times 2 - (-1)^n \times 2 + \frac{n+1}{n} = \end{aligned}$$

$$b_n + a_n = \frac{n+1}{n}.$$

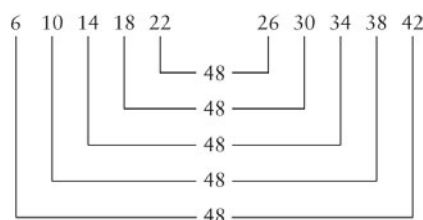
1.

N.º da construção (n)	1	2	3	4	5	n
Perímetro da construção (P_n)	6	10	14	18	22	$P_n = 4n + 2$

2. $P_{10} = 4 \times 10 + 2 = 42$.

3. A soma é sempre igual a 48.

4.



Há cinco somas iguais a 48.

Logo, $6 + 10 + \dots + 42 = 5 \times 48 = 240$.

11. $a_n = \frac{3-2n}{5}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3-2(n+1)}{5} - \frac{3-2n}{5} = \frac{3-2n-2-3+2n}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $-\frac{2}{5}$.

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 6$$

$b_2 - b_1 \neq b_3 - b_2 \Rightarrow (b_n)$ não é progressão aritmética.

12. $a_1 = 5$ e $r = -2$.

12.1 $a_1 = 5$; $a_2 = 5 - 2 = 3$; $a_3 = 3 - 2 = 1$; $a_4 = 1 - 2 = -1$.

12.2 $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$a_n = 5 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow a_n = 5 - 2n + 2 \Leftrightarrow a_n = 7 - 2n.$$

13. $b_5 = -10, b_{10} = -25$

$$b_n = b_k + (n - k)r$$

$$b_{10} = b_5 + (10 - 5)r \Leftrightarrow -25 = -10 + 5r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5r = -15 \Leftrightarrow r = -3$$

$$b_n = b_5 + (10 - 5) \times (-3)$$

$$b_n = -10 - 3n + 15$$

$$b_n = -3n + 5$$

Pág. 39

14.1

a) $6 \times 3 = 18$; 18 cubos.

b) $6 \times 2 = 12$; $18 + 12 = 30$ cubos.

c) $6 \times 1 = 6$; $18 + 12 + 6 = 36$ cubos.

14.2 $6 + 12 + 18 + \dots$

a) O número de cubos gastos em cada degrau é uma progressão aritmética (d_n) de razão 6 sendo $d_1 = 6$.

$$d_n = d_1 + (n - 1) \times r$$

$$d_n = 6 + (n - 1) \times 6 \Leftrightarrow d_n = 6n$$

$$S_7 = \frac{d_1 + d_7}{2} \times 7 = \frac{6 + 42}{2} \times 7 = 168$$

$$S_7 = 168 \text{ cubos.}$$

b) $6 + 12 + 18 = 36$ cubos.

14.3 $S_n = 330$

$$\frac{d_1 + d_n}{2} \times n = 330 \Leftrightarrow \frac{6 + 6n}{2} \times n = 330 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 + 3n)n - 330 = 0 \Leftrightarrow 3n^2 + 3n - 330 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

É possível construir 10 degraus.

Pág. 40

15. A escadaria tem n degraus. Cada degrau tem a cm de altura.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}na = 2000 \\ 20a = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \times 20 = 6000 \\ a = 20 \end{cases} \Rightarrow n = 300$$

A escadaria tem 300 degraus.

16. $b - a = c - b$

$$\Leftrightarrow a + c = 2b \Leftrightarrow \frac{a + c}{2} = b.$$

Pág. 41

Pág. 42

17. $t_1 = 15, t_{n+1} = t_n + 3, n \geq 1.$

17.1 (t_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

$$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

$$t_n = 15 + (n - 1) \times 3 \Leftrightarrow t_n = 15 + 3n - 3 \Leftrightarrow t_n = 3n + 12$$

$$t_{10} = 30 + 12 = 42$$

No 10.º dia dedicou 42 minutos ao exercício.

17.2 $10 \text{ h} = 600 \text{ min}$

$$S_n = 600$$

$$\frac{t_1 + t_n}{2} \times n = 600 \Leftrightarrow \frac{15 + 3n + 12}{2} \times n = 600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3n + 27)n = 1200 \Leftrightarrow 3n^2 + 27n - 1200 = 0 \Leftrightarrow n = 16 \quad n \in \mathbb{N}$$

Vão decorrer 16 dias.

1. $a_1 = -2.$

1.1 $r = 2: -2, 0, 2, 4, 6.$

1.2 $r = -3: -2, -5, -8, -11, -14.$

1.3 $r = \frac{1}{2}: -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0.$

1.4 $r = 0: -2, -2, -2, -2, -2.$

2. $a_n = \frac{1}{2} - 3n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} - 3(n+1) - \left(\frac{1}{2} - 3n\right) = \frac{1}{2} - 3n + 3 - \frac{1}{2} + 3n = 3$$

$a_{n+1} - a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 3.

$$b_n = n^2 - 1$$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1$$

$b_{n+1} - b_n$ não é constante. Logo, (b_n) não é uma progressão aritmética.

3.

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow (u_n)$ é uma progressão aritmética de razão 5.

4. $u_5 = 14, u_8 = 23$

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

$$u_8 = u_5 + (8 - 5)r \Leftrightarrow 23 = 14 + 3r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r = 9 \Leftrightarrow r = 3.$$

5. $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = 0$

$$r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_{500} = u_1 + (500 - 1) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{499}{2} = \frac{498}{2} = 249.$$

6.1 $u_1 = 3, r = 10$

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times 10$$

$$u_n = 3 + 10n - 10 \Leftrightarrow u_n = 10n - 7$$

6.2 $u_2 = 10, u_4 = 20$

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

$$u_4 = u_2 + (4 - 2) \times r \Leftrightarrow 20 = 10 + 2r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r = 10 \Leftrightarrow r = 5.$$

$$u_n = u_2 + (n - 2) \times 5 \Leftrightarrow u_n = 10 + 5n - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 5n$$

6.3 $u_3 = -10$ e $r = 5$

$$u_n = u_3 + (n - 3) \times 5 \Leftrightarrow u_n = -10 + 5n - 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 5n - 25$$

6.4 $u_6 + u_8 = 28$ e $r = 3$

$$\begin{cases} u_8 = u_6 + (8 - 6)r \\ u_6 + u_8 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28 - u_6 = u_6 + 2 \times 3 \\ u_8 = 28 - u_6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 = 22 \\ u_8 = 28 - u_6 \end{cases} \Rightarrow u_6 = 11$$

$$u_n = u_6 + (n - 6) \times r \Leftrightarrow u_n = 11 + (n - 6) \times 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 11 + 3n - 18 \Leftrightarrow u_n = 3n - 7$$

6.5 $u_{10} = 5, u_{30} = -5$

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

$$u_{30} = u_{10} + (30 - 10) \times r \Leftrightarrow -5 = 5 + 20r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20r = -10 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}.$$

$$u_n = u_{10} + (n - 10) \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u_n = 5 - \frac{1}{2}n + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + 10.$$

7.1 $\sum_{n=1}^{10} n = \frac{1+10}{2} \times 10 = 55.$

7.2 $\sum_{n=1}^{100} 3n = \frac{3+300}{2} \times 100 = 15\,150.$

7.3 $\sum_{n=1}^{50} n - \sum_{n=1}^{30} n = \frac{1+50}{2} \times 50 - \frac{1+30}{2} \times 30 = 1275 - 465 = 810.$

7.4 $\sum_{n=1}^{10} (2n-1) = \frac{1+19}{2} \times 10 = 100.$

7.5 $\sum_{n=1}^{100} \frac{n+1}{2} = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{1 + \frac{101}{2}}{2} \times 100 = 51,5 \times 50 = 2575.$$

7.6 $\sum_{n=1}^{100} \frac{8-2n}{4} = \sum_{n=1}^{100} \left(-\frac{1}{2}n + 2\right) = \frac{2 + (-48)}{2} \times 101 = -2323.$

8. $\sum_{k=-20}^{50} k = -\frac{20+50}{2} (50+20+1) = 15 \times 71 = 1065.$

9. $t_1 = 20, r = 3; (t_n)$ é uma progressão aritmética.

$$S_{20} = \frac{t_1 + t_{20}}{2} \times 20$$

$$t_{20} = t_1 + (20 - 1) \times 3 = 20 + 57 = 77$$

$$S_{20} = \frac{20 + 77}{2} \times 20 = 97 \times 10 = 970$$

Ao fim de 20 dias correu 970 km.

10. $s_1 = 16\,800, r = 1700$

$$s_5 = 16\,800 + 4r = 16\,800 + 4 \times 1700 = 23\,600$$

$$S_5 = \frac{s_1 + s_5}{2} \times 5 = \frac{16\,800 + 23\,600}{2} \times 5 = 101\,100$$

Nos 5 anos o Sr. Adriano ganhará 101 100 €.

11. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1+2n-1}{2} \times n = n^2.$

12. $f_1 = 15, r = 2, S_{30} = \frac{f_1 + f_{30}}{2} \times 30$

$$f_{30} = f_1 + (30 - 1) \times 2 = 15 + 29 \times 2 = 73$$

$$S_{30} = \frac{15 + 73}{2} \times 30 = 1320$$

O auditório tem 1320 lugares.

13. $f_1 = 20$, $r = 2$

$$\begin{aligned} S_n = 510 &\Leftrightarrow \frac{f_1 + f_n}{2} \times n = 510 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{20 + 20 + (n-1) \times 2}{2} \times n = 510 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{40 + 2n - 2}{2} \times n = 510 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (19 + n)n - 510 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + 19n - 510 = 0 \Leftrightarrow n = 15 \end{aligned}$$

A plateia tem 15 filas.

14. $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2 + n}{2}$

14.1 $t_{27} = \frac{27^2 + 27}{2} = 378$

A figura 27 tem 378 círculos.

14.2 $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

14.3 $t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2 + n}{2}$

Pág. 44

1.

Dia	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
Bilhetes vendidos	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Receita apurada	3	12	39	120	363	1092	3279	9840

2. $9840 + 6561 \times 3 + 6561 \times 3 \times 3 = 88\,572$

A receita apurada foi 88 572 €.

3. $a_1 = 3$;

$a_2 = 3 \times 3 = 3^2$;

$a_3 = 3^2 \times 3 = 3^3$;

$a_n = 3^n$.

Pág. 45

18. $a_1 = -5$; $a_4 = -40$;

$a_1 = -5$; $a_2 = -5 \times r$; $a_3 = -5 \times r \times r$;

$a_4 = -5 \times r \times r \times r$;

$-40 = -5r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$

A razão é igual a 2.

Pág. 46

19.1 $a_n = (\sqrt{3})^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\sqrt{3})^{n+1-1}}{(\sqrt{3})^{n-1}} = (\sqrt{3})^{n-n+1} = \sqrt{3}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \sqrt{3}$.

19.2

$$\begin{cases} b_1 = -2 \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3}{4} \quad (b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ porque } b_1 \neq 0)$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3}{4}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (b_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.

19.3 $c_n = -2 \times 4^{n+1}$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-2 \times 4^{n+1+1}}{-2 \times 4^{n+1}} = 4^{n+2-(n+1)} = 4$$

(c_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

19.4 $d_n = \frac{2^n}{5^{n+1}} = \frac{2^n}{5^n \times 5} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{5}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \times \frac{1}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{5}$$

(d_n) é uma progressão geométrica de razão $\left(\frac{2}{5}\right)$.

19.5

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Como $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, dado que $u_1 \neq 0$, temos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.1 $u_1 = 3$; $u_6 = \frac{3}{32}$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{3}{32} = 3 \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \times 2^{1-n}$$

20.2 $a_2 = 8$; $a_4 = 128$

$$a_n = a_k \times r^{n-k}$$

$$a_6 = a_4 \times r^{4-2} \Leftrightarrow 128 = 8 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = -4 \vee r = 4$$

Se $r = 4$,

$$a_n = a_2 \times 4^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 8 \times 4^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 2^3 \times (2^2)^{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^3 \times 2^{2n-4} \Leftrightarrow a_n = 2^{2n-1}$$

Se $r = -4$,

$$a_n = a_2 \times (-4)^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 8 \times (-4)^n \times (-4)^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{8}{16} \times (-1)^n \times 4^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right) \times (2^2)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = (-1)^n \times 2^{-1} \times 2^{2n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = (-1)^n \times 2^{2n-1}$$

21. $u_7 + u_6 = -488$; $r = 3$;

$$u_6 \times r + u_6 = -488 \Leftrightarrow 3u_6 + u_6 = -488 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4u_6 = -488 \Leftrightarrow u_6 = -122$$

$$u_{10} = u_6 \times r^{10-6} = -122 \times 3^4 = -9882$$

22. Por exemplo:

22.1 $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22.2 $a_n = \sqrt{3} \times (-1)^{n+1}$

22.3 $b_n = 5 \times (-2)^n$

23.1 Dois triângulos consecutivos são semelhantes.

A razão das áreas é igual a $\frac{1}{4}$. Então a razão das medidas

dos lados é igual a $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Portanto, a sucessão (a_n) das

áreas é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e as

sucessões (l_n) dos comprimentos dos lados e (P_n) dos

perímetros são progressões geométricas de razão $\frac{1}{2}$.

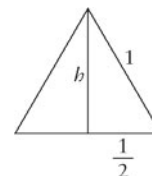
$$p_1 = 1 \times 3 = 3 \text{ e } r = \frac{1}{2}$$

$$p_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times 2^{1-n}$$

23.2 $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$; $h^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$$h^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$S_{10} = a_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right) \approx 0,58$$

23.3 $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

24. $u_3 = 208$ e $u_5 = 3328$

$$u_5 = u_3 \times r^{5-3} \Leftrightarrow 3328 = 208 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16$$

Como $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ terá de ser $r > 0$ pelo que $r = 4$.

$$u_8 = u_5 \times r^{8-5} = 3328 \times 4^3 = 212\,992$$

$$S = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = u_8 \times \frac{1-r^5}{1-r} =$$

$$= 212\,992 \times \frac{1-4^5}{1-4} = 212\,992 \times 341 = 72\,630\,272$$

Pág. 52

25. Dados:

x, xr, xr^2 são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão r .

$4x, 5xr, 4xr^2$ estão em progressão aritmética.

$$\begin{cases} x + xr + xr^2 = 70 \\ 4xr^2 - 5xr = 5xr - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xr + xr^2 = 70 \\ 4xr^2 - 10xr + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + xr + xr^2 = 70 \\ 2r^2 - 5r + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xr + xr^2 = 70 \\ r = \frac{1}{2} \vee r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 70 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x + 2x + 4x = 70 \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4}x = 70 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 7x = 70 \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 10 \\ r = 2 \end{cases}$$

Se $r = \frac{1}{2}$, $x = 40$, $xr = 40 \times \frac{1}{2} = 20$, $xr^2 = 40 \times \frac{1}{4} = 10$.

Se $r = 2$, $x = 10$, $xr = 10 \times 2 = 20$, $xr^2 = 10 \times 4 = 40$.

Os números são 10, 20 e 40.

Pág. 53

26. $a_1 = 2$; $r = 3$ e (a_n) é uma progressão geométrica.

$$\begin{aligned} S_n = 2186 &\Leftrightarrow a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 2186 \Leftrightarrow & 2187 & \mid & 3 \\ &\Leftrightarrow 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} = 2186 \Leftrightarrow & 729 & \mid & 3 \\ &\Leftrightarrow 2 \times \frac{1-3^n}{-2} = 2186 \Leftrightarrow & 243 & \mid & 3 \\ &\Leftrightarrow -1+3^n = 2186 \Leftrightarrow & 81 & \mid & 3 \\ &\Leftrightarrow 3^n = 2187 \Leftrightarrow & 27 & \mid & 3 \\ &\Leftrightarrow 3^n = 3^7 \Leftrightarrow n = 7. & 9 & \mid & 3 \\ & & 3 & \mid & 3 \\ & & 1 & \mid & 3 \end{aligned}$$

Pág. 54

1.1 $a_n = 5^{1-n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{1-(n+1)}}{5^{1-n}} = \frac{5^{-n}}{5^{1-n}} = 5^{-n-1+n} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

1.2 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4-(n+3)} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

1.3 $a_n = (-1)^{2n+1}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(-1)^{2(n+1)+1}}{(-1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(-1)^{2n+1}} = \\ &= (-1)^{2n+3-(2n+1)} = (-1)^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 1.

1.4 $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{3-n}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3-(n+1)}}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3-n}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3-n}} = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2-n-3+n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

1.5 $a_n = \frac{-1}{5^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-1}{5^{n+1}}}{\frac{-1}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = 5^{n-n-1} = \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

1.6 $u_n = -\frac{n}{2}(0,4)^{n+1}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{-\frac{n+1}{2} \times (0,4)^{n+2}}{-\frac{n}{2} \times (0,4)^{n+1}} = \\ &= \frac{n+1}{n} (0,4)^{n+2-n-1} = 0,4 \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Como $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ não é constante, (a_n) não é uma progressão geométrica.

Pá $a_1 = 5; a_2 = -10$

$$a_n = a_k \times r^{n-1}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$a_{60} = 5 \times (-2)^{59}.$$

3á $a_2 = 6; a_3 = 18, r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$

$$a_n = a_k \times r^{n-k}$$

$$a_n = a_2 \times 3^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 6 \times 3^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 2 \times 3^1 \times 3^{n-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_n = 2 \times 3^{1+n-2} \Leftrightarrow a_n = 2 \times 3^{n-1}.$$

4á Por exemplo:

4g $a_n = 2 \times 4^{n-1}.$

4P $a_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \Leftrightarrow a_n = 4 \times 3 \times 3^{-n+3} \Leftrightarrow a_n = 4 \times 3^{-n+4}.$

4B $a_n = -16 \times (-2)^{n-5} \Leftrightarrow a_n = -(-2)^4 \times (-2)^{n-5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_n = -(-2)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = -(-2)^n \times (-2)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2} \times (-2)^n.$$

. á $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2} = 2; r = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = a_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times 2 \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) =$$

$$= 4 - \frac{4}{2^{10}} = 4 - \frac{1}{2^8} = \frac{1023}{256}.$$

5g $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{21}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{21}} =$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21-2+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2^{20}-1}{2^{20}} =$$

$$= \frac{2^{20}-1}{2^{21}} = \frac{1\,048\,575}{2\,097\,152}.$$

5P $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{1536}$

$$a_1 = \frac{1}{3}; r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{1536} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1536} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1536} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{1536} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1536} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 10 \quad \left| \quad 2^{10} = 1024 \right.$$

$$S_{10} = a_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2^{10}-1}{2^{10}} = \frac{2 \times 1023}{3 \times 1024} = \frac{2046}{3072} = \frac{341}{512}.$$

5B $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1024 =$

$$= (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^{10}$$

São 11 termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão -2 sendo $a_1 = 1$.

$$S = 1 \times \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = \frac{1+2048}{3} = 683.$$

7á $u_2 = 52$ e $u_4 = 832$

$$u_4 = u_2 \times r^2 \Leftrightarrow 832 = 52 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16$$

Como $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, r terá de ser positiva. Logo $r = 4$.

$$u_7 = u_2 \times 4^{7-2} \Leftrightarrow 52 \times 4^5 = 53\,248$$

$$S = u_7 \times \frac{1-4^6}{1-4} = 53\,248 \times \frac{-4095}{-3} =$$

$$= 53\,248 \times 1365 = 72\,683\,520.$$

126á. .

8á $P_0 = 50, r = 1 + 0,02 = 1,02$

P_n é uma progressão geométrica de razão 1,02 sendo:

$$P_1 = 50 \times 1,02.$$

8g $P_n = P_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow P_n = 50 \times 1,02^1 \times (1,02)^{n-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P_n = 50 \times (1,02)^n.$$

8P $u(n) = P_n$

Para a população duplicar terão de decorrer 35 anos.

n	u(n)
30	90.568
31	92.379
32	94.227
33	96.112
34	98.034
35	99.994
36	101.99

9.1 (V_n) é uma progressão geométrica de razão $1 - 0,1 = 0,9$

$$V_1 = V_0 \times 0,9$$

$$V_n = V_1 \times (0,9)^{n-1} \Leftrightarrow V_n = V_0 \times (0,9) \times (0,9)^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_n = V_0 \times (0,9)^n.$$

9.2 $V_n = \frac{1}{2} V_0 \Leftrightarrow V_0 (0,9)^n = \frac{1}{2} V_0 \Leftrightarrow (0,9)^n = \frac{1}{2}$

$$u(n) = (0,9)^n$$

n	u(n)
1	.9
2	.81
3	.729
4	.6561
5	.59049
6	.53144
7	.47829

A população reduz-se a metade durante a sétima hora após o instante inicial.

10. (u_n) é uma progressão aritmética $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $v_n = k^{u_n}$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{k^{u_{n+1}}}{k^{u_n}} = k^{u_{n+1} - u_n} = k^r$$

Logo, se (u_n) é uma progressão aritmética de razão r a sucessão (v_n) definida por $v_n = k^{u_n}$ é uma progressão geométrica de razão k^r .

11.1 Sejam l_n e d_n o lado e a diagonal do quadrado q_n .

$$\text{Então } l_n^2 + l_n^2 = d_n^2.$$

Como a diagonal d_n do quadrado q_n é o lado (l_{n+1}) do quadrado q_{n+1} , vem:

$$l_n^2 + l_n^2 = l_{n+1}^2 \Leftrightarrow 2 l_n^2 = l_{n+1}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_{n+1}^2}{l_n^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} \right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{l_{n+1}}{l_n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4l_{n+1}}{4l_n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{P_{n+1}}{P_n} = \sqrt{2}$$

Então, a sucessão (l_n) dos lados e a sucessão (P_n) dos perímetros são progressões geométricas de razão $\sqrt{2}$.

$$a_n = (l_n)^2$$

$$a_{n+1} = (l_{n+1})^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} = \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} \right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

11.2 $l_1 = 2$

$$P_1 = 4 \times 2 = 8 \text{ e } a_1 = 2^2 = 4$$

$$P_n = P_1 \times r^{n-1}, \quad P_n = 8 \times (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_n = 4 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2^2 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n-1+2} \Leftrightarrow a_n = 2^{n+1}.$$

12. Relativamente ao movimento da bola sejam (d_n) e (s_n) as sucessões das descidas e das subidas.

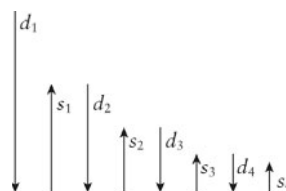
(d_n) é uma progressão geométrica de razão 0,6 sendo $d_1 = 12$.

(s_n) é uma progressão geométrica de razão 0,6 sendo

$$s_1 = 12 \times 0,6 = 7,2.$$

12.1 Trata-se de calcular s_4

$$s_4 = s_1 \times r^{4-1} = 7,2 \times (0,6)^3 \approx 1,56$$



Na 4.ª subida a bola atinge cerca de 1,56 m.

12.2 $s_n = s_1 \times r^{n-1}$

$$s_n = 7,2 \times (0,6)^{n-1}.$$

12.3 Trata-se de calcular $S = S_d + S_s$ sendo S_d a soma dos primeiros 15 termos de (d_n) e S_s a soma dos primeiros 14 termos de (s_n) :

$$\begin{aligned} S &= d_1 \times \frac{1-0,6^{15}}{1-0,6} + s_1 \times \frac{1-0,6^{14}}{1-0,6} = \\ &= 12 \times \frac{1-0,6^{15}}{0,4} + 7,2 \times \frac{1-0,6^{14}}{0,4} = \\ &= 30(1-0,6^{14}) + 18(1-0,6^{14}) \approx 48,0 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$1. \begin{cases} u_4 + u_5 + u_6 = 63 \\ u_{10} + u_{12} = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3r + u_1 + 4r + u_1 + 5r = 63 \\ u_1 + 9r + u_1 + 11r = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 12r = 63 \\ 2u_1 + 20r = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(51-10r) + 12r = 63 \\ u_1 = 51-10r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 153 - 30r + 12r = 63 \Leftrightarrow 18r = 90 \Leftrightarrow r = 5$$

Resposta: (C).

2. $14 + 10,5 + 7 + 3,5 + \dots + (-17,5) = S$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão 3,5.

$$a_n = 14 + (n-1) \times 3,5$$

$$-17,5 = 14 + 3,5n + 3,5 \Leftrightarrow 3,5n = 35 \Leftrightarrow n = 10$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = \frac{14 - 17,5}{2} \times 10 = -17,5$$

Resposta: (D).

3. $u_1 = 2 \wedge u_{n+1} = u_n - 7, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = -7, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo (u_n) é monótona decrescente.

Resposta: (B).

4. $\frac{x}{6} = \frac{8,64}{x} \Leftrightarrow x^2 = 6 \times 8,64 \Leftrightarrow x^2 = 51,84 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{51,84} \Leftrightarrow x = \pm 7,2$$

Resposta: (A).

5. $a_2 = 0,9; \quad r = 0,3$

$$a_{20} = a_2 \times r^{20-2} = 0,9 \times (0,3)^{18} =$$

$$= 3 \times (0,3) \times (0,3)^{18} = 3(0,3)^{19}$$

Resposta: (B).

6. $S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} =$

$$= 2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2(2^{10}-1) = 2 \times 1023 = 2046.$$

Resposta: (B).

7. Progressão aritmética (c_n) de razão 500 sendo:

$$c_1 = 5500$$

$$c_n = 50\,000 \Leftrightarrow 5500 + (n-1) \times 500 = 50\,000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 55 + 5n - 5 = 500 \Leftrightarrow 5n = 450 \Leftrightarrow n = 90$$

Resposta: (C).

8. (v_n) é uma progressão geométrica de razão $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$$v_1 = 510 \times \frac{3}{4} = 382,5$$

$$v_{10} = v_1 \times r^9 = 382,5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 28,72$$

Resposta: (A).

1 $u_3 = 90, \quad u_6 = 2430, \quad (u_n)$ é uma p.g.

1.1 $u_n = u_k \times r^{n-k}$

$$u_6 = u_3 \times r^{6-3} \Leftrightarrow 2430 = 90 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$$

$$u_1 = u_3 \times r^{1-3} = 90 \times 3^{-2} = 10$$

$$u_1 = 10 \text{ e } r = 3$$

1.2 $S_{10} = u_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 10 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 5(3^{10}-1) = 295\,240$

2. $u_2 = 24 \text{ e } u_6 = 384. \quad (u_n)$ é uma p.g.

2.1 $u_n = u_k \times r^{n-k}$

$$u_6 = u_2 \times r^{6-2} \Leftrightarrow 384 = 24 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 16 \Leftrightarrow r = -2 \vee r = 2$$

$$u_1 = u_2 \times r^{-1}$$

$$\text{Se } r = 2, \quad u_1 = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{Se } r = -2, \quad u_1 = \frac{24}{-2} = -12$$

$$u_1 = 12 \text{ e } r = 2 \text{ ou } u_1 = -12 \text{ e } r = -2$$

2.2 $S_{10} = 12 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 12(2^{10}-1) = 12\,276 \text{ ou}$

$$S_{10} = -12 \times \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = -4(1-2^{10}) = 4092$$

$$\text{Se } u_1 = 12, \quad S_{10} = 12\,276$$

$$\text{Se } u_1 = -12, \quad S_{10} = 4092$$

3. (a_n) é uma p. g.; $a_1 = \frac{\pi}{2}$ e $r = \frac{\pi}{2}$

3.1 $a_{10} = a_1 \times r^9 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = \frac{\pi^{10}}{1024}$

3.2 $S_{10} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}}{1-\frac{\pi}{2}} \approx 248,92$

4.1 $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

(A) e (C) são falsas. (B) é verdadeira.

4.2 $u_n = 2^{n+1}$

$$u_{2n} = 2^{2n+1}$$

$$u_{3n} = 2^{3n+1}$$

$$u_{5n} = 2^{5n+1}$$

(A) e (B) são falsas. (C) é verdadeira

4.3

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$v_2 = 2v_1 + 3$$

$$v_{2n-1} = 2v_{2n-1-1} + 3 = 2v_{2n-2} + 3$$

(A) e (B) são falsas

4.4

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{8}{5}v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3 :

(A) é verdadeira.

A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{5}$:

(B) é falsa.

4.5 $a_n = a_k \times r^{n-k}$

$$a_n = a_2 \times r^{n-2};$$

A afirmação é verdadeira.

4.6 A sucessão (u_n) definida por $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma

progressão geométrica estritamente crescente e

$$u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n: -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$$

(A) e (B) são falsas

4.7 $x-r, x, x+r$

$$\begin{cases} (x-r) + x + (x+r) = 3 \\ (x-r) \times x \times (x+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (1-r) \times 1 \times (1+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1-r^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ r=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ r=-2 \end{cases}$$

$$1-2 = -1$$

$$1+2 = 3$$

Os números são $-1, 1$ e 3 .

6. $1, 3, 9, \dots$

$u_1 = 3$ e $r = 3$; (u_n) é uma progressão geométrica.

$$0 \quad 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60$$

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7$$

$$S_7 = 3 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 3 \times \frac{-2186}{-2} = 3279$$

$$1 + S_7 = 1 + 3279 = 3280$$

7. 1.ª hipótese

$$20 \times 50 \text{ €} = 1000 \text{ €}$$

2.ª hipótese

$a_1 = 8$ e $r = 5$ sendo (a_n) uma progressão aritmética

$$a_{20} = a_1 + 19r = 8 + 19 \times 15 = 103$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{8 + 103}{2} \times 20 = 1110 \text{ €}$$

3.ª hipótese

$a_1 = \frac{0,2}{100} = 0,002$ e $r = 2$ sendo (a_n) uma progressão

geométrica.

$$S_{20} = a_1 \times \frac{1-r^{20}}{1-r} = 0,002 \times \frac{1-2^{20}}{1-2} =$$

$$= 0,002 (2^{10} - 1) = 2097,15 \text{ €}$$

A melhor hipótese é a terceira e a pior é a primeira.

Pág. 60

1. $t: y = 3x - 4$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3 - 4 = -1$$

Ponto de tangência: $(1, -1)$

Declive: 3.

$$\text{Terá de ser } f(1) = -1 \text{ e } f'(1) = 3$$

$$f(1) = -1 \text{ em (A) e em (B)}$$

$$\text{Em (A), } f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(1) = 0$$

$$\text{Em (B), } f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

$$f'(1) = 6 - 3 = 3$$

Resposta: (B).

$$2. \quad r: x = -y = \frac{z}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y = \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$\alpha: 2x - y + z + 15 = 0$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ 2x - y + z + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ -2y - y - 2y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ -5y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ z = -6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$I(-3, 3, -6)$.

Resposta: (A).

Pág. 61

$$3. \quad \overline{DE} = 6 - x; \quad \overline{AD} = 8$$

$$\overline{AE}^2 = 8^2 + (6 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 64 + 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AE} > 0 \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{100 - 12x + x^2}$$

$$P_{[ABCE]} = 6 + 8 + x + \sqrt{100 - 12x + x^2}$$

$$P_{[ABCE]} = 14 + x + \sqrt{100 - 12x + x^2}$$

Resposta: (A).

$$4. \quad f(x) = 3 + \frac{2}{x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Resposta: (B).

$$5. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow u_n$ é monótona decrescente

$\Rightarrow u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como (u_n) é uma sucessão de termos positivos temos que

$0 < u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja (u_n) é limitada.

Resposta: (C).

Pág. 62

$$1. \quad f(x) = \frac{4}{x-2} - 1.$$

$$1.1 \quad f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-4x-8}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-12}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$-4x + 12$	+	+	+	0	-
$x - 2$	-	0	+	+	+
$\frac{-4x+12}{x-2}$	-	s.s.	+	0	-

$$1.2 \quad s: x = 2; \quad r: y = -1$$

$A(0, -1), D(2, 0)$

$$f(0) = \frac{4}{0-2} - 1 = -2 - 1 = -3$$

$B(0, -3)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-x = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$C(6, 0)$

$$A_{[ABCD]} = A_{[OBC]} - A_{[OAD]} =$$

$$= \frac{\overline{OB} \times \overline{OC}}{2} - \frac{\overline{OA} \times \overline{OD}}{2}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2} - \frac{1 \times 2}{2}$$

$$= 9 - 1 = 8$$

$$A_{[ABCD]} = 8 \text{ u.a.}$$

Pág. 63

$$2. \quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$2.1 \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		20		16	
		Máx.		Mín.	

$f(2) = 20$
 $f(4) = 16$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e em $[4, +\infty[$ e

estritamente decrescente em $[2, 4]$.

f admite um máximo relativo igual a 20 para $x = 2$ e um mínimo relativo igual a 16 para $x = 4$.

2.2 As coordenadas de A e B , calculadas em 2.1, são $A(4, 16)$ e $B(2, 20)$.

2.3 $C(0, 20)$

Tomando $[CB]$ para base do triângulo temos

$\overline{CB} = |2 - 0| = 2$ e a altura h do triângulo $[ABC]$ igual à

diferença das ordenadas de B e A , ou seja, $h = 20 - 16 = 4$.

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times 4}{2} = 4.$$

2.4 Ponto de tangência: $P(3, 18)$ dado que $f(3) = 18$.

Declive: $m = f'(3) = 3 \times 9 - 18 \times 3 + 24 = -3$

$$y - 18 = -3(x - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -3x + 9 + 18 \Leftrightarrow y = -3x + 27.$$

3.

$$\begin{cases} v_1 = 1024 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1 Como $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v_n) \text{ é uma progressão geométrica de razão } -\frac{1}{2}.$$

3.2 $v_1 = 1024$;

$$v_2 = 1024 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -512$$

$$v_3 = -512 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 256.$$

3.3 (v_n) não é monótona: $v_2 < v_1$ e $v_3 > v_2$.

3.4 $S_{10} = v_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1024 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$

$$= 1024 \times \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= 1024 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) = 682$$

3.5 $v_n = v_1 \times r^{n-1}$;

$$v_n = 1024 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pág. 66

1. $a_{n+1} - a_n = n^2 - 15n + 56$.

1.1 $n^2 - 15n + 56 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = 8$



$$n^2 - 15n + 56 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é monótona crescente em sentido lato.

1.2 $a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = 8$

Se $n = 7$: $a_8 - a_7 = 0 \Leftrightarrow a_8 = a_7$

Se $n = 8$: $a_9 - a_8 = 0 \Leftrightarrow a_9 = a_8$

Então $a_7 = a_8 = a_9$.

2.1 $b_n = 16n - n^2$

$$b_7 = 16 \times 7 - 7^2 = 63; \quad b_8 = 16 \times 8 - 8^2 = 0$$

$$b_9 = 16 \times 9 - 9^2 = 63$$

$$b_8 < b_7 \text{ e } b_9 > b_8 \Rightarrow (b_n) \text{ não é monótona.}$$

2.2 $b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow 16(n+1) - (n+1)^2 < 16n - n^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16n + 16 - n^2 - 2n - 1 < 16n - n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - 2n < 0 \Leftrightarrow 2n > 15 \Leftrightarrow n > 7,5 \Leftrightarrow n > 7$$

Logo, $p = 7$.

3. $|c_n| < 50, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -50 < c_n < 50, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -50 \text{ é um minorante do}$$

conjunto dos termos de (c_n) .

Resposta: (C).

4.
$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

4.1 $a_1 = 1 - 2 = -1; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$a_2 > a_1 \text{ e } a_3 < a_2 \Rightarrow (a_n) \text{ não é monótona.}$$

4.2 Se n é ímpar:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{n} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{n} < 1$$

$$-1 \leq a_n < 1$$

Se n é par, $a_n = 1$.

Então, $-1 \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é limitada.

Pág. 67

5.1 $a_n = \frac{(-1)^n}{3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{3}}{\frac{(-1)^n}{3}} = \frac{3 \times (-1)^{n+1}}{3 \times (-1)^n} =$$

$$= (-1)^{n+1-n} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão -1 .

5.2 $b_n = 2^{1-n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{1-(n+1)}}{2^{1-n}} = \frac{2^{-n}}{2^{1-n}} = 2^{-n-1+n} =$$

$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

5.3 $c_n = n \times 3^n$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{n \times 3^n} = \frac{n+1}{n} 3^{n+1-n} = \frac{n+1}{n} \times 3$$

(c_n) não é progressão geométrica.

5.4

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = \frac{1}{4} d_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Como $d_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$d_{n+1} = \frac{1}{4} d_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(d_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

6. As quantias recebidas pela Antónia estão em progressão geométrica de razão $1 + 0,1 = 1,1$.

6.1 $a_1 = 5$

$$a_2 = 5 \times 1,1 = 5,5 \text{ €}$$

$$a_3 = 5,5 \times 1,1 = 6,05 \text{ €}.$$

6.2

a) $a_{n+1} = 1,1 \times a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $a_{12} = a_1 \times r^{12-1} = 5 \times 1,1^{11} \approx 14,27$.

c) $S_{12} = 5 \times \frac{1 - (1,1)^{12}}{1 - (1,1)} \approx 106,92 \text{ €}.$

7.1 $b_n = -3n + 2$

$$b_{n+1} - b_n = -3(n+1) + 2 - (-3n + 2) = -3n - 3 + 2 + 3n - 2$$

$$b_{n+1} - b_n = -3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b_n) é uma progressão aritmética de razão -3 .

7.2 $S_n = -590 \Leftrightarrow \frac{b_1 + b_n}{2} \times n = -590 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - 3n + 2}{2} \times n = -590 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3n)n + 1180 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3n^2 + n + 1180 = 0 \Leftrightarrow n = 20.$$

Pág. 68

Atividade inicial

n	1	2	10	1000	100 000	...	$n \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100 000}$	...	$\frac{1}{n} \rightarrow 0$

n	1	2	10	1000	100 000	...	$n \rightarrow +\infty$
$-\frac{1}{n}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{100 000}$	...	$-\frac{1}{n} \rightarrow 0$

n	1	2	10	1000	100 000	...	$n \rightarrow +\infty$
$\frac{(-1)^n}{n}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100 000}$	...	$\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$

Pág. 71

1.1 $\lim\left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3.$ 1.2 $\lim\left(\frac{1}{n} - 3\right) = -3.$

1.3 $\lim\left(\frac{1}{n} + 5\right) = 5.$ 1.4 $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$

Pág. 73

2.1 $\lim\left(\frac{n^4}{3} - n\right) = +\infty$ porque $\frac{1}{3} > 0.$

2.2 $\lim\left(-n + \frac{n^2}{3}\right) = \lim\left(\frac{n^2}{3} - n\right) = +\infty$ porque $\frac{1}{3} > 0.$

2.3 $\lim\left(-1 - n - \frac{n^5}{5}\right) = -\infty$ porque $-\frac{1}{5} < 0.$

Pág. 75

3.1

a) $u_n = \sqrt{n+2} > 100 \Leftrightarrow n+2 > 100^2 \Leftrightarrow n > 9998$

A partir da ordem 9999, inclusive.

b) $u_n = n^2 + n - 1$

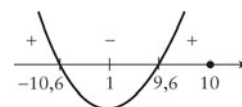
$$u_n > 100 \Leftrightarrow n^2 + n - 1 - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 101 > 0 \Leftrightarrow n \geq 10$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + x - 101 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{405}}{2}$$

$$\Rightarrow x \approx -10,6 \vee x \approx 9,6$$



c) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$

$$u_n > 100 \Leftrightarrow \frac{n^2}{n+1} > 100 \Leftrightarrow \frac{n^2}{n+1} - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 100n - 100}{n+1} > 0 \Leftrightarrow n^2 - 100n - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

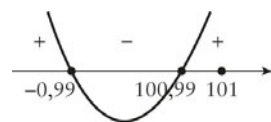
$$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \geq 101$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 100x - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{100 \pm \sqrt{10400}}{2}$$

$$\Rightarrow x \approx -0,99 \vee x \approx 100,999$$



3.2 $u_n = -\sqrt{n} + 1.$

a) $-u_n = \sqrt{n} - 1.$

b) $-u_n > 100 \Leftrightarrow \sqrt{n} - 1 > 100 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 101 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n > 101^2 \Leftrightarrow n > 10 201 \Leftrightarrow n \geq 10 202$$

A partir do termo de ordem 10 202 todos os termos $(-u_n)$ são superiores a 100.

c) Seja A um número positivo qualquer:

$$-u_n > A \Leftrightarrow \sqrt{n} - 1 > A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} > A + 1 \Leftrightarrow n > (A + 1)^2$$

Consideramos p o maior inteiro menor ou igual a

$(A + 1)^2$, podemos afirmar que para $n > p$ todos os termos da sucessão são maiores do que A.

Como A é um número real positivo qualquer, temos que:

$$\lim(-u_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim(u_n) = -\infty$$

3.3

- a) $a_n = n \rightarrow +\infty$; (a_n) é um infinitamente grande positivo.
- b) $a_n = -n \rightarrow -\infty$; (a_n) é um infinitamente grande em módulo.
- c) $a_n = (-1)^n n$
 $|a_n| = n \rightarrow +\infty$; (a_n) é um infinitamente grande em módulo.

Pág. 76

4. $n \rightarrow (-1)^n$.
- 4.1 $-1, 1, -1, 1, -1, 1$.
- 4.2 $a_n = 1$ e $b_n = -1$, por exemplo.

Pág. 77

- 1.1 $\lim \left(5 + \frac{1}{n} \right) = 5$. 1.2 $\lim \left(-5 + \frac{1}{n} \right) = -5$.
- 1.3 $\lim \left(7 - \frac{1}{n} \right) = 7$. 1.4 $\lim \left(-7 - \frac{1}{n} \right) = -7$.
- 1.5 $\lim \left((-1)^n \times 2 \times \frac{1}{n} \right) = 0$. 1.6 $\lim \left((-1)^n \times (-2) \times \frac{1}{n} \right) = 0$.
- 2.1 $\lim (-n^2 + 1) = -\infty$ ($-1 < 0$).
- 2.2 $\lim (3n^2 - 5) = +\infty$ ($3 > 0$).
- 2.3 $\lim \left((-1)^n (3n+1) \right)$ não existe porque $\lim (3n+1) = +\infty$ e $\lim [-(3n+1)] = -\infty$.
- 2.4 $\lim (1 - 2n - 7n^3 - 12n^2) = -\infty$ ($-7 < 0$).
- 3.1 $a_n = \sqrt{3n-1}$

$$a_n > 1000 \Leftrightarrow \sqrt{3n-1} > 1000 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 3n-1 > 1000^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3n > 1000^2 + 1 \Leftrightarrow n > \frac{1000^2 + 1}{3} \Leftrightarrow n \geq 333\,334$$

A partir da ordem 333 334, inclusive.

- 3.2 $b_n = n^2 + n - 1$
 $b_n > 1000 \Leftrightarrow n^2 + n - 1 > 1000 \Leftrightarrow$

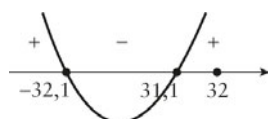
$$\Leftrightarrow n^2 + n - 1001 > 0 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n \geq 32$$

A partir da ordem 32, inclusive.

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + x - 1001 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4004}}{2} \Rightarrow x \approx -32,1 \vee x \approx 31,1$$



$$3.3 \quad c_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$c_n > 1000 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 1}{n} > 1000 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 1}{n} - 1000 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 1 - 1000n}{n} > 0 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n^2 - 1000n + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n \geq 1000$$

A partir do termo de ordem 1000, inclusive.

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 1000x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1000 \pm \sqrt{1000^2 - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 0,001 \vee x \approx 999,99$$



4. $t_n = \sqrt{n+5}$.

4.1 $-t_n = -\sqrt{n+5}$.

4.2 $-t_n < -50 \Leftrightarrow t_n > 50 \Leftrightarrow \sqrt{n+5} > 50 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow n+5 > 50^2 \Leftrightarrow n > 50^2 - 5 \Leftrightarrow n \geq 2496$$

A partir da ordem 2496 (inclusive) todos os termos de $(-t_n)$ são inferiores a -50 .

- 4.3 Seja A um número positivo qualquer:

$$t_n > A \Leftrightarrow \sqrt{n+5} > A \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n+5 > A^2 \Leftrightarrow n > A^2 - 5$$

Considerando p o maior inteiro menor ou igual a $A^2 - 5$, podemos afirmar que para $n > p$ todos os termos da sucessão são maiores do que A .

Como A é um número positivo qualquer temos, pela definição de infinitamente grande positivo,

$$t_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow -t_n \rightarrow -\infty.$$

5. Seja $A \in \mathbb{R}^+$, $n+5 > A \Leftrightarrow n > A-5$

Seja p o maior inteiro menor ou igual a $A-5$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, n > p \Rightarrow n+5 > A \Leftrightarrow n+5 \rightarrow +\infty$$

$$\left| (-1)^n (n+5) \right| = (n+5) \rightarrow +\infty$$

$$\left| (-1)^n (n+5) \right| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow (-1)^n (n+5) \rightarrow \infty.$$

6.1 $a_n = -\frac{n^2}{3} + n - 1$; $\lim a_n = -\infty$

(a_n) é propriamente divergente.

6.2 $b_n = 1 + \frac{2}{n}$; $\lim b_n = 1$

(b_n) é convergente.

6.3 $c_n = (-1)^n n^2$

$|c_n| \rightarrow +\infty$; $c_n \rightarrow \infty$

(c_n) é divergente oscilante.

6.4 $d_n = n^8 + 1$

$d_n \rightarrow +\infty$

(d_n) é propriamente divergente.

7. Por exemplo:

7.1 $u_n = (-1)^{2n} \frac{1}{3}$. 7.2 $v_n = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Pág. 78

1. $a_n = \sqrt{n}$.

1.1 $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow +\infty$. Logo o conjunto dos termos de (a_n) é minorado mas não majorado.

1.2 $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

1.3 $n+1 > n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (a_n) é monótona crescente.

2. $u_n = \begin{cases} 2n+4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n-1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

2.1 $u_1 = 2 + 4 = 6$; $u_2 = 2 - 1 = 1$

$u_3 = 6 + 4 = 10$; $u_4 = 4 - 1 = 3$

$u_5 = 10 + 4 = 14$;

2.2 Seja $A \in \mathbb{R}^+$

Se n é ímpar:

$$u_n > A \Leftrightarrow 2n+4 > A \Leftrightarrow 2n > A-4 \Leftrightarrow n > \frac{A-4}{2}.$$

Se n é par:

$$u_n > A \Leftrightarrow n-1 > A \Leftrightarrow n > A+1 \Leftrightarrow .$$

Como $A+1 > \frac{A-4}{2}, \forall A \in \mathbb{R}^+$, considerando p o maior

inteiro menor ou igual a $A+1$, podemos afirmar que,

para $n > p$, todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que A .

Como A é um número positivo qualquer temos, pela definição de infinitamente grande positivo, que

$$u_n \rightarrow +\infty.$$

2.3 $u_3 > u_2 \wedge u_2 < u_1 \Rightarrow (u_n)$ não é monótona.

2.4 Por exemplo, a subsucessão dos termos de ordem ímpar:

$$a_n = u_{2n-1} = 2(2n-1) + 4 = 4n + 2.$$

3. $v_n = \begin{cases} -n & \text{se } n < 1000 \\ n & \text{se } n \geq 1000 \end{cases}$

3.1 $v_{999} = -999$; $v_{1000} = 1000$.

3.2 $\lim(v_n) = \lim(n) = +\infty$

(v_n) é propriamente divergente.

3.3 $v_{1001} = -1001$

$v_{1000} > v_{999}$ e $v_{1001} < v_{1000} \Rightarrow (v_n)$ não é monótona.

3.4 $a_n = n + 999$, por exemplo.

Pág. 79

5. Por exemplo:

5.1 $u_n = (n-9)^2$. 5.2 $u_n = -(n-4)^2$.

5.3 $u_n = 2 - \frac{1}{n}$. 5.4 $u_n = 4 + \frac{1}{n}$.

Pág. 80

6.1 $a_1 = 8 - 8 = 0$; $a_2 = 16 + 16 = 32$; $a_3 = 24 - 24 = 0$;
 $a_4 = 32 + 32 = 64$; $a_5 = 40 - 40 = 0$; $a_6 = 48 + 48 = 96$.

6.2 Por exemplo:

$$b_n = a_{2n} = 8(2n) + (-1)^{2n} \times 8(2n) = 16n + 16n = 32n$$

$$c_n = a_{2n-1} = 8(2n-1) + (-1)^{2n-1} \times 8(2n-1) =$$

$$= 8(2n-1) - 8(2n-1) = 0$$

$b_n = 32n$ e $c_n = 0$ são subsucessões de (a_n) .

6.3 Não. Todos os termos de ordem ímpar são nulos.

Pág. 81

7.1 $\lim a_n = \lim(n+1) = +\infty$.

7.2 $\lim d_n = \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ porque $n+1 \rightarrow +\infty$.

7.3 $\lim g_n = \lim\left(\frac{1}{3n+2}\right) = 0$ porque $3n+2 \rightarrow +\infty$.

Pág. 83

$$\begin{aligned} 8.1 \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-n}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n^2 - (1-n)(n+1)}{2n(n+1)} \\ &= \frac{-n^2 - 1 + n^2}{2n(n+1)} = \frac{-1}{2n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é monótona decrescente.

$$8.2 \quad a_n = \frac{1-n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{2} < a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) \text{ é limitada.}$$

8.3 (a_n) é convergente porque toda a sucessão monótona é limitada e convergente.

Pág. 84

$$9.1 \quad \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2. \quad 9.2 \quad \lim \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Pág. 86

$$10. \quad a_n \leftarrow -3$$

$$\lim (2a_n - a_n^2) = \lim (2a_n) - \lim (a_n^2) =$$

$$= 2 \lim (a_n) - \lim (a_n)^2 =$$

$$= 2 \times (-3) - (-3)^2 = -6 - 9 = -15.$$

$$11. \quad a_n \leftarrow -1 \text{ e } a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n \leftarrow \frac{1}{3} \text{ e } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$11.1 \quad \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$11.2 \quad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

$$11.3 \quad \lim (a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = (-1) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

$$11.4 \quad \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

$$11.5 \quad \lim \left(\frac{a_n + b_n}{a_n} \right)^3 = \left(\lim \frac{a_n + b_n}{a_n} \right)^3 = \left(\frac{\lim (a_n + b_n)}{\lim a_n} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{\lim a_n + \lim b_n}{-1} \right)^3 = \left(-\left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Pág. 87

$$12. \quad \lim \sqrt[3]{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt[3]{\lim \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \sqrt[3]{2}.$$

Pág. 88

$$13.1 \quad u_n = \frac{1 + \sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin(n) \leq 2, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \\ \lim 0 = \lim \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = 0. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pelo teorema das} \\ \text{sucessões encastradas} \end{array} \right.$$

$$13.2 \quad v_n = \left(\frac{n + \cos(2n)}{2n} \right)^2$$

$$-1 \leq \cos(2n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq n + \cos(2n) \leq n+1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{2n} \leq \frac{n + \cos(2n)}{2n} \leq \frac{n+1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n-1}{2n} \right)^2 \leq \left(\frac{n + \cos(2n)}{2n} \right)^2 \leq \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n-1}{2n} \right)^2 \leq v_n \leq \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim \left(\frac{n-1}{2n} \right)^2 = \left[\lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 = \left[\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Pelo teorema das sucessões encastradas:

$$\begin{cases} \left(\frac{n-1}{2n} \right)^2 \leq v_n \leq \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2, \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim \left(\frac{n-1}{2n} \right)^2 = \lim \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim v_n = \frac{1}{4}.$$

Pág. 89

$$1. \quad a_n = (-1)^n 4n + 4n, \text{ por exemplo.}$$

$$2. \quad b_n = \begin{cases} n+3 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 - \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \text{ por exemplo.}$$

$$3. \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim 0 = 0 \text{ e } \lim 1 = 1.$$

A sucessão (u_n) é divergente porque existem duas sub-sucessões de (u_n) com limites diferentes.

4. Se uma sucessão (a_n) é convergente então todas as subsucessões de (a_n) são convergentes com o mesmo limite. Logo, se (a_n) tem uma subsucessão divergente, então (a_n) também é divergente.

5.1 $\lim b_n = \lim (n^2 + 2) = +\infty$.

5.2 $\lim c_n = \lim (-n + 1) = -\infty$.

5.3 $\lim e_n = \lim \frac{1}{n^2 + 2} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

5.4 $\lim f_n = \lim \frac{1}{-n + 1} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

5.5
$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n+3} = \begin{cases} \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\lim \frac{1}{n+3} = \lim \left(-\frac{1}{n+3} \right) = 0$$

Logo, $\lim h_n = 0$.

6. $u_n \rightarrow 3$; $\lim (2 + u_n) = 2 + 3 = 5$.

7. Por exemplo:

$$a_n = (-1)^n \times 3; \quad b_n = (-1)^n$$

$$a_n \times b_n = (-1)^n \times 3 \times (-1)^n = \left((-1)^n \right)^2 \times 3 = 3 \rightarrow 3.$$

8.1 $\lim \frac{n^2 + n + 1}{n^2} = \lim \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1 + 0 + 0 = 1$.

8.2 $\lim \frac{1 - n^2 + 3n}{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2} - 1 + \frac{3}{n} \right) = 0 - 1 + 0 = -1$.

9. (A) Falsa. Por exemplo a sucessão $u_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$ é

convergente e não é monótona.

- (B) Falsa. Por exemplo sendo $u_n = 4 + \frac{1}{n}$,

$$u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \text{ é decrescente e } \lim (u_n) = 4.$$

- (C) Falsa. Se $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n = a$ então $a \geq 0$.

- (D) Verdadeira. Se $-a < 0$ e $\lim u_n = -a$ então, a partir de certa ordem p , todos os termos de (u_n) pertencem ao intervalo $]-a - \partial, -a + \partial[$, $\forall \partial > 0$. Em particular, para $\partial = |a|$, vem: $]-a - \partial, -a + \partial[=]-2a, 0[$. Então se u_n converge para um número negativo, a partir de certa ordem todos os termos de (u_n) são negativos.

- (E) Se $u_n \rightarrow m + 3, m \in \mathbb{R}^+$, a partir de certa ordem todos os termos de u_n pertencem ao intervalo $]m + 3 - \partial, m + 3 + \partial[$, $\forall \partial > 0$.

Em particular, se $\partial = 3$, a partir de certa ordem todos os termos de (u_n) pertencem ao intervalo $]m, m + 6[$ pelo que, como $m \in \mathbb{R}^+$, são positivos.

- (F) Falsa. Por exemplo a sucessão $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ é limitada, não monótona e convergente.

Pág. 90

2. $u_n = n$ e $v_n = -n$

$$u_n \rightarrow +\infty \text{ e } v_n \rightarrow -\infty$$

$$(u_n \times v_n) = n \times (-n) = -n^2 \rightarrow -\infty.$$

3. $u_n = -n + 1$ e $v_n = -n$

$$u_n \rightarrow -\infty \text{ e } v_n \rightarrow -\infty$$

$$(u_n \times v_n) = (-n + 1)(-n) = n^2 - n \rightarrow +\infty.$$

4. $u_n = 4$ e $v_n = 2n + 1$

$$u_n \rightarrow 4 \text{ e } v_n \rightarrow +\infty$$

$$(u_n \times v_n) = 8n + 4 \rightarrow +\infty.$$

5. $u_n = 2$ e $v_n = -3n$

$$u_n \rightarrow 2 \text{ e } v_n \rightarrow -\infty$$

$$(u_n \times v_n) = 2 \times (-3n) = -6n \rightarrow -\infty.$$

6. $u_n = -5 + \frac{1}{n}$ e $v_n = n$

$$u_n \rightarrow -5 \text{ e } v_n \rightarrow +\infty$$

$$(u_n \times v_n) = \left(-5 + \frac{1}{n} \right) \times n = -5n + 1 \rightarrow -\infty.$$

7. $u_n = -7$ e $v_n = -3n + 1$

$$u_n \rightarrow -7 \text{ e } v_n \rightarrow -\infty$$

$$(u_n \times v_n) = -7(-3n + 1) = 21n - 7 \rightarrow +\infty.$$

Pág. 92

14.1 $\lim [-7(-1 + 3n)] = -7 \times (+\infty) = -\infty$.

14.2 $\lim [-4(2 - 7n)] = -4 \times (-\infty) = +\infty$.

14.3 $\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) (1 - n) \right] = (1 + 0) \times (-\infty) = -\infty$.

$$14.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{1-2n} = \frac{7}{-\infty} = 0.$$

$$14.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{1+n} = \frac{-4}{\infty} = 0.$$

$$14.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n \times \frac{1}{n} \right) \times (n-1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 \times (n-1)] = +\infty.$$

$$14.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^2 \times \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{3n} \right) \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - \frac{1}{3n} \right) \right] = +\infty \times (-\infty) = -\infty.$$

Pág. 93

$$15.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-n) = -\infty.$$

$$15.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-3) = +\infty.$$

$$15.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 0 - 1 = -1.$$

$$15.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n} \right)^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right]^2 = (0-1)^2 = 1.$$

$$15.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$15.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$15.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$15.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^2 + n^3] = (+\infty)^2 + (+\infty)^3 = +\infty.$$

Pág. 95

$$16.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

$$16.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0.$$

$$16.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+3n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1.$$

$$16.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5+3n^3+5n}{1-n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{-n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$$

$$16.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+3}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$16.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{n^3+5}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \\ = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} (n) = 0 + \infty = +\infty.$$

$$17.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{4n^2+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{4n^2+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$17.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} + n}{n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)}{n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \right) = \sqrt{0+0} + 1 = 1.$$

Pág. 96

$$18. \quad u_n = \sqrt{2n+3} \rightarrow +\infty; \quad v_n = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0;$$

$$w_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}.$$

$$18.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} \times \frac{1}{2n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{0+0}}{2+0} = 0.$$

$$18.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{w_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{4n+2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)} + n}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n}{4n+2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)}{n \left(4 + \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{1+0} + 1}{4+0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pág. 97

$$19.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3 + n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3) = -\infty.$$

$$19.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^8 - n^5) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^8) = +\infty.$$

$$19.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2} - n)(\sqrt{n^2+2} + n)}{\sqrt{n^2+2} + n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 19.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 1}) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + 1)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{-1}{\infty} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \stackrel{n > 0}{=} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\
 &= \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Pág. 99

$$20.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4^n \times 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} \right] = 0 \times \frac{1}{4} = 0.$$

$$20.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{4^n \times 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{6}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} \right] = +\infty \times \frac{1}{4} = +\infty.$$

$$\begin{aligned}
 20.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 7}{3^n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times 3 + 7}{3^n - 1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(3 + \frac{7}{3^n}\right)}{3^n \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{3^n}}{1 - \frac{1}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{4^n + 8} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(\frac{2^n}{4^n} + \frac{3}{4^n}\right)}{4^n \left(1 + \frac{8}{4^n}\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4^n}}{1 + \frac{8}{4^n}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 2^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n \times 2 - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [2^n (2 - 1)] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n) = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$20.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = 1 - 0 = 1.$$

Pág. 101

$$21.1 \quad \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots; \quad r = \frac{1}{3}, \quad |r| < 1$$

$$S = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2 \times 9} = \frac{1}{6}.$$

$$21.2 \quad 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots; \quad r = -\frac{1}{2}, \quad |r| < 1$$

$$S = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}.$$

$$21.3 \quad 2, 4, 8, 16, \dots; \quad r = 2, \quad |r| > 1$$

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

$$22.1 \quad 0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,000\,045 + \dots$$

0,(45) é a soma de todos os termos de uma progressão

geométrica (a_n) de razão $\frac{1}{100}$ sendo $a_1 = 0,45$.

$$0,(45) = S = \frac{0,45}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0,45}{0,99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

$$22.2 \quad 0,(451) = 0,451 + 0,000\,451 + 0,000\,000\,451 + \dots$$

$$r = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$0,(451) = \frac{0,451}{1 - 0,001} = \frac{0,451}{0,999} = \frac{451}{999}.$$

$$22.3 \quad 0,2(12) = 0,2 + 0,0(12) =$$

$$= 0,2 + (0,012 + 0,000\,12 + 0,000\,001\,2 + \dots)$$

$$0,2(12) = 0,2 + 0,012 = \frac{2}{10} + \frac{0,012}{1 - 0,01} = \frac{2}{10} + \frac{12}{990} = \frac{7}{33}.$$

Pág. 102

23. $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{16}, \dots$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$

$$S = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Pág. 103

1.1 $\lim c_n = \lim(-n+1) = -\infty$.

1.2 $\lim d_n = \lim\left(\frac{-3n+2}{2}\right) = \frac{-\infty}{2} = -\infty$.

1.3 $\lim d_n = \lim\left(\frac{n-1}{-2n}\right)^3 = \left(\lim\frac{n-1}{-2n}\right)^3 =$
 $= \left(\lim\frac{n}{-2n}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$.

1.4 $a_n = \frac{6+(-1)^n}{7n} = \begin{cases} \frac{5}{7n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$$\lim\frac{5}{7n} = 0 \text{ e } \lim\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

1.5 $\lim b_n = \lim\frac{2n^2+1}{n^2} = \lim\frac{2n^2}{n^2} = 2$.

1.6 $\lim c_n = \lim\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)^2 =$
 $= \left[\lim\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\right]^2 = \left(-\frac{1}{2} + 0\right)^2 = \frac{1}{4}$.

1.7 $\lim a_n = \lim(-n^2 - n^3) = \lim(-n^3) = -\infty$.

1.8 $a_n = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{n}} + 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$$\lim\left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right) = 0 + 1 = 1; \quad \lim\left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 - 0 = 2$$

(a_n) não tem limite porque existem duas subsucessões de (a_n) com limites diferentes.

1.9 $a_n = \begin{cases} 2 + \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n^2+n}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$$\lim\left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 + 0 = 2$$

$$\lim\frac{2n^2+n}{n^2} = \lim\left(\frac{2n^2}{n^2}\right) = 2$$

$$\lim a_{2n} = \lim a_{2n-1} = 2 \Rightarrow \lim a_n = 2.$$

2.1 $\lim\frac{6^n}{3^n} = \lim\left(\frac{6}{3}\right)^n = \lim 2^n = +\infty$.

2.2 $\lim\frac{2^{-n}}{7^{-n}} = \lim\left(\frac{2}{7}\right)^{-n} = \lim\left(\frac{7}{2}\right)^n = +\infty$.

2.3 $\lim\frac{7^{-n}}{2^{-n}} = \lim\left(\frac{7}{2}\right)^{-n} = \lim\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$.

2.4 $\lim\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^3 = \left(\lim\frac{n+3}{3n+1}\right)^3 =$
 $= \left(\lim\frac{n}{3n}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

2.5 $\lim\frac{3 \times 5^n + 6 \times 5^{n-1} - 1}{4 + 5^n} = \lim\frac{3 \times 5^n + 6 \times 5^n \times 5^{-1} - 1}{4 + 5^n} =$
 $= \lim\frac{5^n\left(3 + 6 \times 5^{-1} - \frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(\frac{4}{5^n} + 1\right)} = \frac{3 + \frac{6}{5} + 0}{0 + 1} = \frac{21}{5}$.

3. (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = -\frac{1}{4}$.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \Leftrightarrow 8 = \frac{a_1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow a_1 = 8 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow a_1 = 10$$

$$a_4 = a_1 \times r^{4-1} = 10 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{10}{64} = -\frac{5}{32}$$

4. Sucessão (s_n) das subidas: progressão geométrica de razão 0,75 sendo $s_1 = 4 \times 0,75 = 3$.

Sucessão (d_n) das descidas: progressão geométrica de razão 0,75 sendo $d_1 = 4$.

$$S = S_d + S_s = \frac{4}{1 - 0,75} + \frac{3}{1 - 0,75} = \frac{4}{0,25} + \frac{3}{0,25} = 16 + 12 = 28$$

$S = 28$ m.

5.1 $A_1 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$; $A_2 = \frac{2\pi r_2}{2} = \pi\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi r}{2}$

$$A_3 = \frac{2\pi r_3}{2} = \pi\left(\frac{r_2}{2}\right) = \pi\left(\frac{r}{4}\right) = \frac{\pi r}{4}$$

$$A_4 = \frac{2\pi r_4}{2} = \pi\left(\frac{r_3}{2}\right) = \pi\left(\frac{r}{8}\right) = \frac{\pi r}{8}$$

$$A_5 = \frac{2\pi r_5}{2} = \pi\left(\frac{r_4}{2}\right) = \pi\left(\frac{r}{16}\right) = \frac{\pi r}{16}$$

5.2 d_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo $d_1 = 2r$

(diâmetro do primeiro arco).

$$S_p = \frac{31}{r}$$

$$d_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{8}r \Leftrightarrow 2r \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) = \frac{31}{8} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{31}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1 - \frac{31}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow p = 5.$$

Pág. 104

1. Valor inicial: 1

$$t = 1 \text{ mês: } 1 + \frac{1}{12}$$

$$t = 2 \text{ meses: } \left(1 + \frac{1}{12}\right) + \left(1 + \frac{1}{12}\right) \frac{1}{12} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{12}\right) \left(1 + \frac{1}{12}\right) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2$$

$$t = 3 \text{ meses: } \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 \times \frac{1}{12} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{12}\right) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^3$$

$$t = 12 \text{ meses: } \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2,61 \text{ €}.$$

2. 1 ano tem 31 536 000 segundos

$$\left(1 + \frac{1}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000} \approx 2,72 \text{ €}$$

Se os juros fossem contados segundo a segundo, no final do ano teria um capital acumulado de 2,72 €.

Pág. 107

$$24.1 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \right] =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = e \times 1^{-1} = e.$$

$$24.2 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3} =$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{-3} \right] =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \times \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{-3} =$$

$$= e \times 1^{-3} = e.$$

$$24.3 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$24.4 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n} = \lim \left(1 + \frac{-3}{-3n}\right)^{-3n} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

$$24.5 \quad \lim \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{2n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$24.6 \quad \lim \left(1 + \frac{4}{3n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{\frac{4}{3}}{n}\right)^n =$$

$$= e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4} = e^{\frac{4}{3}}$$

$$24.7 \quad \lim \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2} = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)^{n^2} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\lim \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e}{e^5} = e^{-4}.$$

$$24.8 \quad \lim \left(\frac{5n-2}{5n+3}\right)^{3n} = \lim \left[\frac{\left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{3n}}{\left(1 + \frac{3}{5n}\right)^{3n}}\right] = \lim \left[\frac{\left(1 - \frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}\right]^3 =$$

$$= \left[\frac{\lim \left(1 - \frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}\right]^3 = \left(\frac{e^{-\frac{2}{5}}}{e^{\frac{3}{5}}}\right)^3 = \left(e^{-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}}\right)^3 = (e^{-1})^3 = e^{-3}.$$

Pág. 110

25. $M = C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$; $C = 10\,000$ €; $i = 0,033$; $t = 3$.

25.1 $n = 2$

$$M = 10\,000 \left(1 + \frac{0,033}{2}\right)^{2 \times 3} \approx 11\,031,75$$

$$M \approx 11\,031,75 \text{ €}.$$

25.2 $n \rightarrow +\infty$

$$M = C e^{it} = 10\,000 \times e^{0,033 \times 3} \approx 11\,040,66$$

$$M \approx 11\,040,66 \text{ €}.$$

Pág. 113

26. Seja $A(n)$ a condição $n^2 + 3n = 2k$, para $k \in \mathbb{Z}$.

i) $i(1)$ é verdadeira:

$$12 + 3 \times 1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Proposição verdadeira dado que $4 = 2 \times 2$ ($k = 2$).

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } A(n) \Leftrightarrow n^2 + 3n = 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Tese: } A(n+1) \Leftrightarrow (n+1)^2 + 3(n+1) = 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$(n+1)^2 + 3(n+1) =$$

$$= (n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 =$$

$$= (n^2 + 3n) + 2n + 4 = 2k_1 + 2(n+2) =$$

$$= 2(k_1 + n + 2) = 2k_2$$

sendo $k_2 = k_1 + n + 2 \in \mathbb{Z}$ porque a soma de números

inteiros é um número inteiro.

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Então, de i) e ii), pelo princípio de indução matemática, $A(n)$

é universal, ou seja, $n^2 + 3n$ é um número par, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pág. 114

27. $a_n : \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + 1 \end{cases}$

27.1 Seja $A(n)$ a condição $a_n < 3$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$a_1 < 3 \Leftrightarrow 2 < 3 \text{ (verdadeiro)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } a_n < 3$$

$$\text{Tese: } a_{n+1} < 3$$

$$a_n < 3 \Rightarrow \frac{2}{3} a_n < \frac{2}{3} \times 3 \Rightarrow \frac{2}{3} a_n < 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a_n + 1 < 2 + 1 \Rightarrow a_{n+1} < 3$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática

concluimos que $A(n)$ é universal, ou seja, $a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

27.2 Seja $A(n)$ a condição $a_{n+1} - a_n > 0$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$a_{1+1} - a_1 > 0 \Leftrightarrow a_2 - a_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} a_1 + 1 - a_1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 2 + 1 - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > 0 \text{ (verdadeiro)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } a_{n+1} - a_n > 0$$

$$\text{Tese: } a_{n+2} - a_{n+1} > 0$$

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a_{n+1} > \frac{2}{3} a_n \Rightarrow \frac{2}{3} a_{n+1} + 1 > \frac{2}{3} a_n + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1} \Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} > 0$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática, $A(n)$ é

universal, ou seja, $a_{n+1} - a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é crescente.

Pág. 115

1.1 $\lim \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n = e^7$.

1.2 $\lim \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = e^{-4}$.

1.3 $\lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{10}{2n}\right)^{2n} = e^{10}$.

1.4 $\lim \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$.

1.5 $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left(1 - \frac{3}{3n}\right)^{3n} = e^{-3}$.

1.6 $\lim \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n = \lim \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\right)^n =$

$$= \frac{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^{-1}}{e^2} = e^{-3}.$$

$$1.7 \quad \lim \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n = \lim \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{\lim \left(1+\frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1+\frac{1}{n} \right)^n} = \frac{e^3}{e} = e^2.$$

$$1.8 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)^{2^{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{2}{2^n \times 2} \right)^{2^{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{2}{2^{n+1}} \right)^{2^{n+1}} = e^2.$$

2.1 Seja $A(n)$ a condição $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$2 \times 1 - 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (verdadeiro)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$\text{Tese: } 1+3+5+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=n^2$$

$$\Rightarrow 1+3+5+\dots+(2n+1)+(2(n+1)-1)=$$

$$= n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$\Rightarrow 1+3+5+\dots+[2(n+1)-1] = n^2 + 2n + 2 - 1$$

$$\Rightarrow 1+3+5+\dots+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática, $A(n)$ é universal, ou seja:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Seja $A(n)$ a condição $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$a_1 = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{1-1} \Leftrightarrow 2 = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (verdadeiro)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\text{Tese: } a_{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \quad (\text{da fórmula de recorrência})$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] \quad (\text{por hipótese})$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1+1} = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática $A(n)$ é

universal, ou seja, $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.3 Seja a_n uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ e S_n a soma dos seus n primeiros termos.

Consideremos a condição $A(n)$:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$S_1 = a_1 \times \frac{1-r^1}{1-r} \Leftrightarrow S_1 = a_1 \text{ (verdadeiro)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\text{Tese: } S_{n+1} = a_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$= a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} + a_{n+1} = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} + a_1 \times r^n$$

$$= a_1 \times \left(\frac{1-r^n}{1-r} + r^n \right) = a_1 \times \frac{1-r^n + r^n - r^{n+1}}{1-r}$$

$$= a_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática $A(n)$ é

universal, ou seja, $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (r \neq 1)$.

2.4 Seja $A(n)$ a condição $n^2 + 3n + 2 = 2k$, para $k \in \mathbb{Z}$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$1^2 + 3 \times 1 + 2 = 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

(verdadeiro, $k = 3$)

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } n^2 + 3n + 2 = 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Tese: } (n+1)^2 + 3(n+1) + 2 = 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 2 =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2$$

$$= (n^2 + 3n + 2) + 2n + 4 \quad (\text{por hipótese})$$

$$= 2k_1 + 2(n+2)$$

$$= 2(k_1 + n + 2) = 2k_2$$

sendo $k_2 = k_1 + n + 2 \in \mathbb{Z}$ porque a soma de números inteiros é um número inteiro.

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática, $A(n)$ é universal, ou seja:

$$n^2 + 3n + 2 \text{ é um número par, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.1 A sucessão dos diâmetros, (d_n) , é uma progressão

geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$ sendo $d_1 = \overline{T_0 T_1}$.

$$S = \frac{d_1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\overline{T_0 T_1}}{\frac{1}{2}} = 2\overline{T_0 T_1} = \text{diâmetro de } C.$$

3.2 A sucessão (r_n) dos raios das circunferências c_n é uma

progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo

$$r_1 = \frac{1}{2}\overline{T_0 T_1} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Logo:

$$r_n = r_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow r_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

A sucessão (P_n) dos perímetros das circunferências é definida por:

$$P_n = 2\pi r_n = 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ porque } 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

P_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo $P_1 = \pi$.

Logo:

$$S = \frac{P_1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi.$$

3.3 A sucessão (a_n) das áreas dos círculos limitados por S_n é:

$$a_n = \pi(r_n)^2 \Leftrightarrow a_n = \pi \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow a_n = \pi \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, sendo

$$a_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Logo:

$$S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

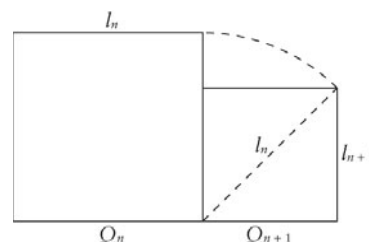
A área do círculo C é $\pi \times \overline{T_0 T_1}^2 = \pi \times 1^2 = \pi$.

Então a área pedida é igual a

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Pág. 116

4.1



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(l_n)^2 = (l_{n+1})^2 + (l_{n+1})^2 \Leftrightarrow (l_n)^2 = 2(l_{n+1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (l_{n+1})^2 = \frac{1}{2}(l_n)^2 \Leftrightarrow \frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Como, $l_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } (l_n) \text{ é uma progressão}$$

geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$l_n = l_1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow l_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = (l_n)^2 \Leftrightarrow a_n = \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 4 \times \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Então, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, sendo

$$a_1 = 4.$$

$$4.2 \quad S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$$

$$S = 8 \text{ u. a.}$$

4.3 A espiral é formada pela sucessão s_n de arcos de circunferência, sendo $s_1 = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{4} 2\pi \times 2 = \pi$.

$$s_n = \frac{1}{4} \times 2\pi \times l_n = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

$$s_n = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

(s_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| < 1$, temos:

$$l_n = S = \frac{s_1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2\pi(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \pi(2 + \sqrt{2}).$$

$$5. \quad \sum_{\alpha=1}^n \alpha^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$5.1 \quad \sum_{\alpha=1}^5 \alpha^2 = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55.$$

$$5.2 \quad \sum_{\alpha=5}^{10} \alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{10} \alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^4 \alpha^2 =$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 385 - 30 = 355.$$

6. Não. O facto de se saber que a condição se verifica para alguns valores de n não permite concluir que é universal.

7.1 Seja $A(n)$ a condição $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$2 = 1(1+1) \Leftrightarrow 2 = 2$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Hipótese: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

Tese: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1)$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Por i) e ii) podemos concluir, pelo princípio de indução matemática, que $A(n)$ é universal, ou seja:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

7.2 Seja $A(n)$ a condição:

$$1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{2 \times 3}{3} \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (V)}$$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Hipótese:

$$1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Tese:

$$1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \\ &= (n+1)(n+2) \left(\frac{n}{3} + 1 \right) \\ &\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \\ &= (n+1)(n+2) \frac{(n+3)}{3} \\ &\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática, que $A(n)$ é universal. Assim:

$$\begin{aligned} &1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + n(n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

7.3 Seja $A(n)$ a condição $64^n - 1 = 9k$, $k \in \mathbb{Z}$.

i) $A(1)$ é verdadeira:

$$64^1 - 1 = 9k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 63 = 9k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Verdadeiro porque $63 = 9 \times 7$ e $7 \in \mathbb{Z}$

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\text{Hipótese: } 64^n - 1 = 9k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Tese: } 64^{n+1} - 1 = 9k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 64^{n+1} - 1 &= 64^n \times 64 - 1 \\ &= 64^n(1 + 63) - 1 = 64^n + 64^n \times 63 - 1 \\ &= (64^n - 1) + 64^n \times 7 \times 9 \quad (\text{por hipótese: } 64^n - 1 = 9k_1) \\ &= 9k_1 + 9 \times 7 \times 64^n = 9(k_1 + 7 \times 64^n) \\ &= 9k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

porque se $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_1 + 7 \times 64^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

De i) e ii), pelo princípio de indução matemática, $A(n)$ é universal, ou seja:

$$64^n - 1 \text{ é múltiplo de } 9, \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. $a_n = an^2 + bn + c$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 7 \\ a_4 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 7 \\ 16a + 4b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 - a - b \\ 4a + 2b + 3 - a - b = 3 \\ 9a + 3b + 3 - a - b = 7 \\ 16a + 4b + 3 - a - b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 - a - b \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 4 \\ 15a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 - a - b \\ b = -3a \\ 8a - 6a = 4 \\ 15a - 9a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 - 2 + 6 \\ b = -6 \\ a = 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_n = 2n^2 - 6n + 7.$$

Pág. 118

1. $500 + (-1)^n \times n =$

$$= \begin{cases} 500 - n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 500 + n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$500 - n \rightarrow -\infty;$$

$$500 + n \rightarrow +\infty$$

Resposta (C).

2. $\lim a_n = \lim \frac{1+n^2}{1-3n^2} = \lim \frac{n^2}{-3n^2} = -\frac{1}{3}.$

Resposta (A).

3. $\lim b_n = \lim \left(\frac{(-1)^n \times 3}{n+2} - 7 \right) =$

$$= \lim \left(\frac{\pm 3}{n+2} - 7 \right) = 0 - 7 = -7$$

Resposta: (D).

4. (A) é falsa.

Por exemplo a sucessão (a_n) definida por:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

tende para $+\infty$ pois $n \rightarrow +\infty$ e $2n \rightarrow +\infty$ e não é crescente ($u_2 = 2$, $u_3 = 6$ e $u_4 = 4$).

Resposta (A).

5. Toda a sucessão convergente é limitada.

Resposta: (B).

6. $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \cdot (a_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$

sendo $a_1 = 1$.

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(4^{-1}\right)^{n-1} = 4^{1-n}$$

Resposta: (D).

7. Seja (c_n) a sucessão dos comprimentos dos arcos que forma

a espiral. (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$

sendo

$$c_1 = \frac{1}{4} 2\pi \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{10} = c_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Resposta: (C).

Pág. 119

1.1 $c_1 = 3, \quad c_2 = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$

$$c_3 = 12 \times \frac{1}{4} = 3, \quad c_5 = 24 \times \frac{1}{8} = 3,$$

$$c_n = 3$$

$$\lim c_n = 3.$$

1.2 Sja $u_n = c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Pretende-se mostrar que:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - c| < \delta$$

$$\text{Ora } |u_n - c| = |c - c| = 0.$$

Logo, como $\delta > 0, \quad |u_n - c| < \delta$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}.$

2.1 $\lim \frac{1+n-3n^2}{8-n^2} = \lim \frac{-3n^2}{-n^2} = 3.$

2.2 $\lim \left(\frac{1+n^4}{\sqrt{n^8+1}} + 3 \right) \stackrel{=}{=} \lim \frac{n^4 \left(\frac{1}{n^4} + 1 \right)}{\sqrt{n^8 \left(1 + \frac{1}{n^8} \right)}} + \lim 3 =$

$$= \lim \frac{n^4 \left(\frac{1}{n^4} + 1 \right)}{n^4 \sqrt{1 + \frac{1}{n^8}}} + 3 = \frac{0+1}{\sqrt{1+0}} + 3 = 1+3 = 4$$

2.3 $\lim \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2+1} \stackrel{=}{=} \lim \frac{n\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} =$

$$= \lim \frac{n^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\sqrt{0+0}}{1+0} = 0.$$

2.4 $\lim \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)^{\infty-\infty} =$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \left(\sqrt{n^2+1} + n \right)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

2.5 $\lim \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^2+2} \right)^{\infty-\infty} =$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^2+2} \right) \left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^2+2} \right)}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^2+2}} =$$

$$= \lim \frac{n^3+1-(n^2+2)}{\sqrt{n^6 \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6} \right)} + \sqrt{n^6 \left(\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^6} \right)}} =$$

$$= \lim \frac{n^3 - n^2 + 3}{n^3 \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + n^3 \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}} =$$

$$= \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}} \right)} =$$

$$= \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}} = \frac{1-0+0}{0^++0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

2.6 $\lim \frac{\sqrt{n^2+n+3}}{n+1} \stackrel{=}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} + 3}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} =$

$$= \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 3}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{3}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+0} + 0}{1+0} = 1.$$

2.7 $\lim \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim \frac{n \pm 1}{n \mp 1} = \lim \frac{n}{n} = 1.$

$$2.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^{n+1}}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \times 4 + 3^n \times 3}{4^n + 3^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(4 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \times 3 \right)}{4^n \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)} = \frac{4 + 0 \times 3}{1 + 0} = 4.$$

3.

$$t_n = n + (-1)^{n+1}(n+3) = \begin{cases} n + (n+3) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n - (n+3) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$t_n = \begin{cases} 2n+3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

(t_n) não é limitada superiormente dado que existe uma subsucessão de (t_n) que é um infinitamente grande positivo $(2n+3 \rightarrow +\infty)$.

(t_n) não é um infinitamente grande porque a subsucessão dos termos de ordem par é convergente.

$$3.2 \quad \text{Por exemplo, se } s_n = \frac{1}{n^2+2}, \quad s_n \times t_n = \frac{n + (-1)^{n+1}(n+3)}{n^2+2}.$$

$$\text{Se } n \text{ é par, } s_n \times t_n = \frac{3}{n^2+2} \text{ e } \lim(s_n \times t_n) = 0$$

$$\text{Se } n \text{ é ímpar, } s_n \times t_n = \frac{2n+3}{n^2+2} \text{ e } \lim(s_n \times t_n) = \lim \frac{2n+3}{n^2+2} =$$

$$= \lim \frac{2n}{n^2} = \lim \frac{2}{n} = 0.$$

$$\text{Então } \lim(s_n \times t_n) = 0.$$

4.1

$$a) \quad p_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_1 = \pi R$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_2 = \frac{\pi R}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_3 = \frac{\pi R}{4}.$$

b) (p_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$p_n = p_1 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \pi R \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$p_n = \pi R \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

$$c) \quad \lim p_n = \lim \left[\pi R \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] = \pi R \times 0 = 0.$$

4.2

$$a) \quad a_1 = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$a_3 = \frac{\pi \left(\frac{R}{4} \right)^2}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{R^2}{16} = \frac{\pi R^2}{32}.$$

b) (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{\pi R^2}{2} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n \times \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \times 4 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$a_n = 2\pi R^2 \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

$$c) \quad \lim a_n = \lim \left[2\pi R^2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] = 2\pi R^2 \times 0 = 0$$

A área de cada um dos semicírculos tende para zero à medida que o seu número aumenta.

Pág. 124

1.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$f(0)$		$f(2)$	
		Máx.		Mín.	

A função f tem um máximo relativo para $x = 0$.

Resposta: (B).

2.

$$A_{[ABCD]} = A_{[ABC]} + A_{[ACD]}$$

$$= \frac{\overline{AC} \times 1}{2} + \frac{\overline{AC} \times \overline{OD}}{2}$$

$$= \frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times \overline{OD}}{2}$$

$$= 1 + \overline{OD}$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{1} = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow \overline{OD} = \text{tg } \alpha$$

$$A_{[ABCD]} = 1 + \overline{OD} + \text{tg } \alpha$$

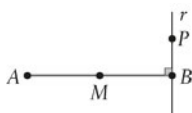
Resposta: (B).

Pág. 125

3. (A) $\frac{g(0)}{f(2)} = \frac{2}{2} = 1$
 (B) $g^{-1}(1) \times f(2) = 2 \times 2 = 4$
 (C) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2) = 1$
 (D) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 0$

Resposta: (D).

4. r é a reta que passa em B e é perpendicular a $\overline{AB}$.



Resposta: (C).

5. $S_n = 2\,304$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \times n = 2304$$

$$\Leftrightarrow \frac{144}{2} \times n = 2304 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72n = 2304 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2304}{72} = 32 \Leftrightarrow n = 32$$

Resposta: (C).

Pág. 126

1. $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 2x - \frac{3}{x} \leq 5 \Leftrightarrow 2x - \frac{3}{x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3 - 5x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x - 3}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup]0, 3]$$

Cálculos auxiliares:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		3	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x}$	-	0	+	s.s.	-	0	+

2. Ponto de tangência: $P(1, -1)$ pois $f(1) = 2 - 3 = -1$.

$$f'(x) = \left(2x - \frac{3}{x} \right)' = 2 + \frac{3}{x^2}$$

$$\text{Declive: } m = f'(1) = 2 + 3 = 5$$

$$y + 1 = 5(x - 1) \Leftrightarrow y = 5x - 5 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5x - 6$$

- 2.1 $A = \overline{RQ} \times x$

$$\overline{CR} = \overline{CA} - \overline{RA} = 4 - x$$

Atendendo à semelhança dos triângulos $[RQC]$ e $[ABC]$, temos:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{\overline{RQ}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RQ} = 5 \times \frac{4-x}{4}$$

$$A = \overline{RQ} \times x$$

$$A(x) = 5 \times \frac{4-x}{4} \times x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 5x \left(1 - \frac{x}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 5x - \frac{5x^2}{4}, \quad 0 < x < 4.$$

- 2.2 $A'(x) = 5 - \frac{10}{4}x = 5 - \frac{5}{2}x$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0		2		4
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$			↗	↘	

Máx.

A área do retângulo $[APQR]$ é máxima para $x = 2$.

3. $\overline{AC} \cdot \overline{AG} = \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{CG}) =$

$$= \overline{AC} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{CG}$$

$$= \|\overline{AC}\|^2 + 0$$

$$= \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

4. $\alpha: 4x + 2y + 5z - 24 = 0$

Ponto $P(x, 0, 4)$

$$P \in \alpha: 4x + 0 + 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

$P(1, 0, 4)$

Ponto $Q: Q(0, y, 4)$

$$Q \in \alpha: 0 + 2y + 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

$Q(0, 2, 4)$.

4.1 $A(4, 0, 0)$

$\vec{n} = (4, 2, 5)$ é perpendicular a α , logo é um vetor diretor

da reta pedida:

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}.$$

4.2 $\overrightarrow{BQ} = Q - B = (0, 2, 4) - (4, 4, 0) = (-4, -2, 4)$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (1, 0, 4) - (4, 4, 0) = (-3, -4, 4)$$

$$\cos(\widehat{QBP}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BP}}) = \frac{\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BP}}{\|\overrightarrow{BQ}\| \times \|\overrightarrow{BP}\|} =$$

$$= \frac{(-4, -2, 4) \cdot (-3, -4, 4)}{\sqrt{16+4+16} \times \sqrt{9+16+16}} =$$

$$= \frac{12+8+16}{6\sqrt{41}} = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

Logo, $\widehat{QBP} \approx 20,4^\circ$.

4.3 $R(4, 0, z)$

$$R \in \alpha: 16 + 0 + 5z - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5z = 8 \Leftrightarrow z = \frac{8}{5}$$

$$R\left(4, 0, \frac{8}{5}\right)$$

$S(0, 4, z)$

$$S \in \alpha: 0 + 8 + 5z - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5z = 16 \Leftrightarrow z = \frac{16}{5}$$

$$S\left(0, 4, \frac{16}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{RS} = S - R = \left(-4, 4, \frac{8}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{RS} \text{ e } \overrightarrow{PQ} \text{ não são colineares } \left(\frac{-4}{-1} \neq \frac{4}{2}\right).$$

Logo, as retas RS e PQ não são paralelas.

As retas r e s são coplanares (estão contidas no plano α) e não paralelas.

Assim, as retas r e s são concorrentes pelo que se intersectam num ponto.

5. $u_{10} = 4$ e $u_{50} = 24$

(u_n) é uma progressão aritmética.

5.1 $u_n = u_k + (n - k)r$

$$u_{50} = u_{10} + (50 - 10)r$$

$$24 = 4 + 40r \Leftrightarrow 40r = 20 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$u_n = u_{10} + (n - 10) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 4 + \frac{1}{2}n - 5$$

$$u_n = \frac{1}{2}n - 1.$$

5.2 $\sum_{k=10}^{50} u_k = \frac{u_{10} + u_{50}}{2} \times (50 - 10 + 1) =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \times 10 - 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 50 - 1\right)}{2} \times 41 = 574.$$

6. $v_n = \frac{1-2n}{n+1}.$

$$\begin{aligned} 6.1 \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{1-2(n+1)}{n+2} - \frac{1-2n}{n+1} = \\ &= \frac{(-2n-1)(n+1) - (1-2n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-2n^2 - 2n - n - 1 - n - 2 + 2n^2 + 4n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$v_{n+1} - v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow v_n$ é monótona decrescente.

6.2 $v_n + 2 \leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{1-2n}{n+1} + 2 \leq 0,001 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2n+2n+2}{n+1} \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{n+1} \leq \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow n+1 \geq 3000 \Leftrightarrow n \geq 2999$$

$$v_n + 2 \leq 0,001 \Leftrightarrow n \geq 2999.$$

6.3 $\lim v_n = \lim \frac{1-2n}{n+1} = \lim \frac{-2n}{n} = -2.$