

MAT 11

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

11.º ANO Matemática A

Cristina Viegas • Sérgio Valente

Documentos orientadores

Planificação

Guia de exploração de recursos multimédia

Questões de aula

Testes

Introdução	2
Documentos orientadores	3
Programa e Metas Curriculares – Matemática A	3
Conteúdos	3
Níveis de desempenho	6
Indicações metodológicas	7
Avaliação	8
Metas Curriculares Secundário	9
Planificações	70
Planificação semanal do 1.º período	71
Planificação semanal do 2.º período	75
Planificação semanal do 3.º período	78
Guia de exploração de recursos multimédia	80
Testes de avaliação	87
Respostas dos testes de avaliação	104
Questões de aula	128
Banco de questões	148

No ano letivo 2015/2016 entrou em vigor o novo Programa de Matemática A para o 10.º ano de escolaridade, e as respetivas Metas Curriculares. Tratando-se de documentos orientadores fundamentais para o planeamento da atividade letiva do 11.º ano, transcrevem-se neste Caderno de Apoio ao Professor as **Metas Curriculares** para o Secundário.

Considerando o número de aulas previstas no Programa para cada tema, apresenta-se uma **planificação semanal** para cada período letivo.

O projeto MVT 11 apresenta, complementarmente ao Manual e ao Caderno de Exercícios, um Simulador de Testes e um conjunto de recursos multimédia. O **Simulador de Testes** estará disponível para todos os alunos em www.mat11.te.pt. Apresenta-se neste Caderno de Apoio ao Professor um **guia com sugestões de exploração** para os **recursos multimédia** que estarão disponíveis em **20 AULA DIGITAL**. Destacam-se, entre estes, as resoluções animadas de exercícios com grau de dificuldade diversificado.

Para facilitar ao professor a gestão do tempo, nomeadamente agilizando a correção de exercícios em sala de aula, o projeto MVT 11 disponibiliza ao professor as seguintes propostas de resolução:

- propostas de resolução de todos os exercícios e das propostas «Será que...?» do Manual;
- propostas de resolução de todos os exercícios do Caderno de Exercícios.

Todas estas propostas estarão disponíveis, em formato projetável, em **20 AULA DIGITAL**.

Para apoiar o professor no trabalho de avaliação, o projeto MVT 11 disponibiliza seis testes e 20 questões de aula pensadas para uma duração aproximada de 30 minutos. Todas estas propostas estarão disponíveis, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**.

Disponibiliza-se ainda ao professor um banco de questões, ferramenta útil para construir as suas próprias fichas e testes. Este banco de questões estará disponível, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**.

Nas páginas 3 a 69 apresentam-se transcrições do *Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário*, de janeiro de 2014. A versão completa do documento pode ser consultada no sítio da Direção Geral da Educação.

Conteúdos de 11.º ano

Domínio	Conteúdos
TRI11 38 aulas	Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos – Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos; Lei dos senos e Lei dos cossenos; – Resolução de triângulos. Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações – Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respetivas medidas; – Rotações; – Ângulos generalizados; medidas de amplitude de ângulos generalizados; – Ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados – Circunferência trigonométrica (círculo trigonométrico); – Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados e às respetivas medidas de amplitude; – Medidas de amplitude em radianos. Funções trigonométricas – As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais; – Fórmulas trigonométricas de “redução ao 1.º quadrante”: seno e cosseno de $x \pm \frac{\pi}{2}$ e de $x \pm \pi, x \in \mathbb{R}$; – Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria; – Equações do tipo $\sin x = k, \cos x = k$ e $\operatorname{tg} x = k$; – Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado; – Funções trigonométricas inversas; – Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias; – Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas.
GA11 32 aulas	Declive e inclinação de uma reta do plano – Inclinação de uma reta do plano e relação com o respetivo declive. Produto escalar de vetores – Produto escalar de um par de vetores; – Ângulo formado por um par de vetores não nulos; relação com o produto escalar; – Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar; – Simetria e bilinearidade do produto escalar; – Cálculo do produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas; – Relação entre o declive de retas do plano perpendiculares; – Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar.

	Equações de planos no espaço – Vetores normais a um plano; – Relação entre a posição relativa de dois planos e os respectivos vetores normais; – Paralelismo entre vetores e planos; – Equações cartesianas, vetoriais e sistemas de equações paramétricas de planos; – Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores; – Resolução de problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações envolvendo a noção de perpendicularidade; – Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de planos, em situações envolvendo a perpendicularidade; – Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.
SUC11 44 aulas	Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$ – Conjuntos minorados, majorados e limitados; – Máximo e mínimo de um conjunto. Generalidades acerca de sucessões – Sucessões numéricas; sucessões monótonas, majoradas, minoradas e limitadas; – Resolução de problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões. Princípio de indução matemática – Princípio de indução matemática; – Definição de uma sucessão por recorrência; – Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática. Progressões aritméticas e geométricas – Progressões aritméticas e geométricas; termos gerais e somas de N termos consecutivos; – Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Limites de sucessões – Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); unicidade do limite; caso de sucessões que diferem num número finito de termos; – Convergência e limitação; – Operações com limites e situações indeterminadas; – Levantamento algébrico de indeterminações; – Limites de polinómios e de frações racionais; – Limites $\lim_n a^n$, $\lim_n \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) e $\lim_n n^p$ ($p \in \mathbb{Q}$); – Resolução de problemas envolvendo limites de sucessões.
FRVR11 56 aulas	Limites segundo Heine de funções reais de variável real – Pontos aderentes a um conjunto de números reais; – Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio; – Limites laterais; – Limites no infinito; – Operações com limites e casos indeterminados; produto de uma função limitada por uma função de limite nulo; – Limite de uma função composta; – Levantamento algébrico de indeterminações; – Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios; – Resolução de problemas envolvendo a noção de limite de uma função.

	Continuidade de funções – Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio; – Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas; – Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional. Assíntotas ao gráfico de uma função – Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função; – Resolução de problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$); – Resolução de problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações – Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica; – Derivada de uma função num ponto; interpretação geométrica; – Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta; unidades de medida de velocidade; – Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis; – Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis; – Derivada da função composta; – Derivada da função definida por $f(x) = x^p$, p inteiro; – Sinal da derivada de funções monótonas; nulidade da derivada num extremo local de uma função; – Teorema de Lagrange; interpretação geométrica; – Monotonia das funções com derivada de sinal determinado num intervalo; – Cálculo e memorização da derivada das funções dadas pelas expressões $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$; – Cálculo da derivada de funções dadas por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (x não nulo se $n > 1$ ímpar, $x > 0$ se n par); – Cálculo e memorização das derivadas de funções dadas por $f(x) = x^\alpha$ (α racional, $x > 0$); – Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência; – Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função; – Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real; – Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade; – Resolução de problemas envolvendo a aplicação do cálculo diferencial ao estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.
EST11 8 aulas	Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação – Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano; – Amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa; – Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos; – Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos; – Coeficiente de correlação; – Resolução de problemas envolvendo a determinação de retas de mínimos quadrados; – Resolução de problemas envolvendo amostras de dados bivariados quantitativos e o cálculo e interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados e do coeficiente de correlação.

Níveis de desempenho

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
10.º ano	LTC10 1.16, 2.19, 3.1, 3.2. ALG10 1.1, 1.2, 1.11, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 4.2, 4.5, 4.11, 5.1, 5.2, 5.3. GA10 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2. FRVR10 1.11, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 4.8, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. EST10 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.
11.º ano	TRI11 1.6, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. GA11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. SUC11 3.3, 5.2, 5.3, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. FRVR11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 7.13, 9.1, 9.2, 9.3. EST11 1.3, 2.1, 2.2, 2.3.
12.º ano	CC12 2.4, 2.5, 2.8, 2.10, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3. PRB12 3.1, 3.2, 3.3. FRVR12 3.1, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5. TRI12 1.1, 1.2, 2.1, 4.1, 4.2. FEL12 4.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. PCI12 1.7, 3.1, 3.2, 3.3. NC12 1.3, 4.3, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3; TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11; CC12 2.3; FRVR12 4.3, 4.4; FEL12 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 3.11, 4.1), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios LTC10, ALG10, SUC11, FRVR11, FRVR12, CC12, PRB12 e FEL12 encontram-se assinalados com o símbolo «#» alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Indicações metodológicas

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de

pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjecturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

Avaliação

O Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei n.º 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação científico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas metas curriculares.

Metas Curriculares para o Ensino Secundário – Matemática A

O presente documento descreve o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o Ensino Secundário. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados em cada ano de escolaridade, por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

Subdomínio

1. *Objetivo geral*

1. Descritor
2. Descritor

.....

Domínio

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («identificar», «designar», «referir», «representar», «reconhecer», «saber», «provar», «demonstrar», «justificar») encontra-se definido no parágrafo intitulado «Leitura das Metas Curriculares».

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

São também disponibilizados aos professores Cadernos de Apoio às presentes metas curriculares (um por ano de escolaridade) contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

Leitura das Metas Curriculares

«Identificar»/«Designar»/«Referir»/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

«Reconhecer»: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«Saber»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«Provar»/«Demonstrar»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«Justificar»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo «+».

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificaram-se nos Cadernos de Apoio diferentes níveis de desempenho.

- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo «#», ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

1. Operar com proposições

1. Designar por «proposição» toda a expressão p suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa» e designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições p e q , que « p é equivalente a q » é uma proposição, designada por «equivalência entre p e q », que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Saber, dada uma proposição p , que «não p » é uma proposição, designada por «negação de p », que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
5. Justificar, dada uma proposição p , que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
6. Saber, dadas proposições p e q , que « p e q » é uma proposição, designada por «conjunção de p e q », que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
7. Saber, dadas proposições p e q , que « p ou q » é uma proposição, designada por «disjunção de p e q », que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por « $p \vee q$ » e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
8. Saber, dadas proposições p e q , que « p implica q » é uma proposição, designada por «implicação entre p e q », que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar p por «antecedente» e q por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição r , que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$.
9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
10. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.
11. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
12. #Provar, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$.
13. #Provar, dadas proposições p e q , que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».

14. #Provar, dadas proposições p, q e r , que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade» e «distributividade».
15. #Provar, dadas duas proposições p e q , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ».
16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

2. Relacionar condições e conjuntos

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a , se obtém uma proposição $p(a)$.
2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «qualquer que seja x , $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «existe x tal que $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como «impossível» se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
6. Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por « $\forall x \in U, p(x)$ », e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por «condição universal em U ».
8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por « $\exists x \in U: p(x)$ », no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por «condição possível em U » e, no caso contrário, por «condição impossível em U ».
9. +Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$.

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por $\{x : p(x)\}$ um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$ ».
11. Saber, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A , a por «elemento de A » quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por $\{a_1, \dots, a_k\}$ o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por «definição em extensão do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$ ».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em U » (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U ») e representá-lo também por $\{x \in U : p(x)\}$.
14. Identificar, dados conjuntos A e B , o «conjunto união (ou reunião) de A e B » e o «conjunto interseção de A e B » respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
15. Identificar, dados conjuntos A e B , A como estando «contido em B » (« $A \subset B$ ») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por «subconjunto de B » ou por «uma parte de B ».
16. Designar, dados conjuntos A e B , por «diferença entre A e B » o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de B em A ».
17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
18. Reconhecer, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
19. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição « $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ » é equivalente à proposição « $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ », isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.
20. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Álgebra ALG10

Radicais

1. Definir e efetuar operações com radicais

1. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que se $a < b$ então $a^n < b^n$.
2. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que se $0 \leq a < b$ então $0 \leq a^n < b^n$ e se $a < b \leq 0$ então $a^n > b^n \geq 0$.
3. Saber, dado um número real a e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que existe um número real b tal que $b^n = a$, provar que é único, designá-lo por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
4. +Saber, dado um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que existe um número real positivo b tal que $b^n = a$, provar que $(-b)^n = a$ e que não existe, para além de b e de $-b$, qualquer outra solução da equação $x^n = a$, designar b por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
5. Justificar, dado um número natural n , que 0 é o único número real cuja potência de expoente n é igual a 0 e, por esta razão, representá-lo também por « $\sqrt[n]{0}$ » («raiz índice n de 0»).
6. #Provar, dados números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
7. #Provar, dados números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
8. #Provar, dados números reais a e b (respetivamente números reais a e b não negativos), $b \neq 0$, e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar (respetivamente um número $n \in \mathbb{N}$ par), que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e justificar que para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{b})^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$.
9. #Provar, dados números naturais n e m (respetivamente números naturais ímpares n e m) e um número real não negativo a (respetivamente um número real a), que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
10. Designar também por «fração» a representação « $\frac{a}{b}$ » do quociente entre números reais a e b (com $b \neq 0$), a e b , neste contexto, respetivamente por «numerador» e «denominador» e identificar duas frações como «equivalentes» quando representam o mesmo número.
11. +Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$, ou $a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{d}$ (a e c números inteiros, b, d, n números naturais, $n > 1$).

Potências de expoente racional

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional

1. +Reconhecer, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (sendo m, n, m' e n' números inteiros, $m, m' \geq 0$ e $n, n' \geq 2$), que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.
2. +Identificar, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo $q = \frac{m}{n}$ (m e n números inteiros, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), $q \neq 0$ se $a = 0$, a «potência de base a e de expoente q », a^q , como $\sqrt[n]{a^m}$, reconhecendo que este número não depende da fração escolhida para representar q , e que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $(a^b)^c = a^{bc}$ a expoentes racionais positivos.
3. Identificar, dado um número real positivo a e um número racional positivo q , a «potência de base a e de expoente $-q$ », a^{-q} , como $\frac{1}{a^q}$, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $a^b \times a^c = a^{b+c}$ a expoentes racionais.
4. +Reconhecer que as propriedades algébricas previamente estudadas das potências de expoente inteiro (relativas ao produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência) podem ser estendidas às potências de expoente racional.
5. +Simplificar expressões envolvendo radicais e potências.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações com radicais e com potências.

Divisão inteira de polinómios

4. Efetuar operações com polinómios

1. Designar um polinómio P com apenas uma variável x por « $P(x)$ ».
2. +Reconhecer, dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, que o grau do polinómio $A(x)B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.
3. Saber, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, que existem dois únicos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$ e $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, e designar, neste contexto, $A(x)$ por «polinómio dividendo», $B(x)$ por «polinómio divisor», $Q(x)$ por «polinómio quociente» e $R(x)$ por «polinómio resto» da «divisão inteira» (ou «divisão euclidiana») de $A(x)$ por $B(x)$.
4. Determinar, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, as formas reduzidas dos polinómios quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
5. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que aplicando a «regra de Ruffini» se obtém o quociente e o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$.
6. Provar, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ e designar esta propriedade por «Teorema do Resto».

7. Designar, dado um polinómio $P(x)$, por «raiz do polinómio» (ou «zero do polinómio») qualquer número real a tal que $P(a) = 0$.
8. Identificar um polinómio $P(x)$ como «divisível» por um polinómio $Q(x)$ não nulo se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é nulo.
9. Provar, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ e um número real a , que a é uma raiz de $P(x)$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $x - a$ e que, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
10. Identificar, dado um polinómio $P(x)$ e uma raiz a de $P(x)$, a «multiplicidade de a » como o maior número natural n tal que existe um polinómio $Q(x)$ com $P(x) = (x - a)^n Q(x)$, justificar que nesta situação $Q(a) \neq 0$ e designar a por «raiz simples» quando a respetiva multiplicidade é igual a 1.
11. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, que $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, tendo-se $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero.
12. Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a divisão inteira de polinómios e o Teorema do resto.
2. +Resolver problemas envolvendo a fatorização de polinómios de que se conhecem algumas raízes.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação dos zeros e do sinal de funções polinomiais de grau superior a dois.

Geometria Analítica GA10

Geometria Analítica no plano

1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

1. Designar por «referencial ortonormado» um referencial ortogonal e monométrico de um dado plano, tal que a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento pré-fixada e, dados números reais a_1 e a_2 , designar por « $A(a_1, a_2)$ », o ponto A de abscissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial.
2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por « $d(A, B)$ ».
3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abscissas a e b respetivamente, que a abscissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$.
4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por «equação cartesiana» (respetivamente por «inequação cartesiana») de um conjunto C uma equação (respetivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C .
6. Determinar, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ na forma $y = mx + b$ (equação reduzida da reta) ou na forma $x = c$.
7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a esse plano e um número $r > 0$, que a equação $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da circunferência».
8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «elipse» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, por «focos da elipse» os pontos A e B , por «centro da elipse» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «eixo maior da elipse» o número $2a$ (e a por «semieixo maior da elipse»), interpretando-o geometricamente.
9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseca a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).
10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação

cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

11. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação reduzida $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $y > ax + b$ e $y < ax + b$ (respetivamente $y \geq ax + b$ e $y \leq ax + b$) e designá-los respetivamente por «semiplano superior» e «semiplano inferior» em relação à reta r .
12. Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação cartesiana $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $x > c$ e $x < c$ (respetivamente $x \geq c$ e $x \leq c$) e designá-los respetivamente por «semiplano à direita» e «semiplano à esquerda» da reta r .
13. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que a inequação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$) é uma inequação do círculo de centro $C(a, b)$ e de raio r .

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano, e equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

Cálculo vetorial no plano

3. Operar com vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a «norma do vetor $\vec{v}$ » como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por $\|\vec{v}\|$.
2. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por «escalar») λ , o «produto de $\vec{v}$ por λ » (« $\lambda\vec{v}$ ») como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda > 0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda < 0$, justificar que $\lambda\vec{v}$ não depende da unidade de comprimento fixada e que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.
3. Justificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.
4. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, provando que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por «diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » e representá-lo por $\vec{u} - \vec{v}$.
5. +Reconhecer, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ , que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.
6. +Reconhecer, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

4. Operar com coordenadas de vetores

1. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1,0)$, $Y(0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)» e representar por « $\vec{v}(v_1, v_2)$ » o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2) .
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A , o «vetor-posição do ponto A » como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ , que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são colineares se e somente se as respetivas coordenadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a «diferença entre os pontos B e A » como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por « $B - A$ » e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

5. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano

1. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo e uma reta r , $\vec{v}$ como «tendo a direção de r » quando r tiver a direção das retas suporte dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$.
2. Designar por «vetor diretor» de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção do que r .
3. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r não vertical de declive m , que o vetor $\vec{v}(a, b)$ é vetor diretor de r se e somente se $a \neq 0$ e $m = \frac{b}{a}$, e que, em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r .
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que os vetores diretores das retas verticais são os vetores $\vec{v}(0, b)$, $b \neq 0$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r , e designar esta equação por «equação vetorial da reta r ».

- Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1$ e $y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por «sistema das equações paramétricas da reta r ».

6. Resolver problemas

- +Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo a colinearidade de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo equações vetoriais, paramétricas e cartesianas de retas do plano.

Geometria Analítica no espaço

7. Definir referenciais cartesianos do espaço

- Identificar um «referencial (cartesiano) ortonormado do espaço» (ou simplesmente «referencial cartesiano») como um terno ordenado de retas numéricas que se intersectam nas respectivas origens, duas a duas perpendiculares e com unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada, designar a origem comum das três retas por «origem do referencial», a primeira reta por «eixo das abcissas», a segunda por «eixo das ordenadas», a terceira por «eixo das cotas», genericamente cada uma delas por «eixo coordenado» e, se for representada por « O » a origem do referencial, representar estes três eixos respetivamente por « Ox », « Oy » e « Oz » e o referencial por « $Oxyz$ ».
- Designar, dado um ponto P e uma reta r , por «projeção ortogonal de P sobre r » como o próprio ponto P quando P pertencer a r e como o pé da perpendicular traçada de P para r no caso contrário, reconhecendo que é a interseção com r do plano normal a r passando por P .
- Designar, dado um referencial ortonormado e um ponto P de projeções ortogonais P_x , no eixo das abcissas, P_y , no eixo das ordenadas e P_z , no eixo das cotas, por «abscissa de P », «ordenada de P » e «cota de P » respetivamente a abscissa de P_x , de P_y e de P_z nas respetivas retas numéricas, e o terno ordenado destes três valores por «coordenadas de P ».
- Designar por «planos coordenados» os três planos determinados por dois dos eixos coordenados, representá-los por « xOy », « xOz » e « yOz » consoante os eixos coordenados que contêm, e reconhecer que são perpendiculares dois a dois.
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um terno ordenado de números reais (x, y, z) , que existe um e apenas um ponto P com essas coordenadas e representá-lo por « $P(x, y, z)$ ».
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$ de projeção ortogonal P' no plano xOy , que, nesse plano, munido do referencial constituído pelos eixos Ox e Oy , P' tem coordenadas (a, b) e enunciar resultados análogos para os planos xOz e yOz .

8. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que intersesta o eixo das abscissas no ponto $A(a, 0, 0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados xOz e xOy .
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o «sistema de equações cartesianas» $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que intersesta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.
3. +Provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ e representá-la por « $d(A, B)$ ».
4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica».
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$ é uma inequação cartesiana da esfera de centro A e de raio r , e designá-la por «inequação (cartesiana) reduzida da esfera».

Cálculo vetorial no espaço

9. Definir vetores do espaço

1. Designar um par de segmentos orientados do espaço por «equipolentes» quando são coplanares e equipolentes num plano que os contenha.
2. Saber que um «vetor do espaço» fica determinado por um segmento orientado do espaço de tal modo que segmentos de reta equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos de reta não equipolentes determinam vetores distintos.
3. Estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor, de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respectivas propriedades geométricas e algébricas.

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

1. +Reconhecer, fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O e um vetor $\vec{v}$ que, sendo $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$, existe um e somente um terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, designar o terno ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do espaço», (v_1, v_2, v_3) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)» e representar por « $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ » o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3) .
2. Estender do plano ao espaço a definição do vetor posição de um ponto e a identificação das respectivas coordenadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas da soma e da diferença de vetores, do produto de um vetor por um escalar, do simétrico de um vetor, da diferença de dois pontos, da soma de um ponto com um vetor e da norma de um vetor, e o critério de colinearidade de vetores através das respectivas coordenadas.
3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

11. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço, equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.
2. +Resolver problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

Funções Reais de Variável Real FRVR10

Generalidades acerca de funções

1. Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva

1. Identificar, dados conjuntos A e B , o «produto cartesiano de A por B » como o conjunto $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a, b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por « $A \times B$ ».
2. Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.
3. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e um conjunto C , a «restrição de f a C » como a função $f|_C : C \cap A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$.
4. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e $C \subset A$, o «conjunto imagem de C por f » como o conjunto $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C : y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C , representá-lo também por « $\{f(x) : x \in C\}$ ».
5. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B ».
6. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B , existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B » ou por «função de A sobre B ».
7. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «bijetiva» se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por «bijeção de A em B ».
8. Identificar, dadas funções $f : D_f \rightarrow A$ e $g : D_g \rightarrow B$, a «função composta de g com f » como a função $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow B$, tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g(f(x))$ e designá-la também por « g composta com f », « g após f » ou « f seguida de g ».
9. Designar, dado um conjunto A , por «função identidade em A » a função $Id_A : A \rightarrow A$ tal que $\forall x \in A, Id_A(x) = x$ e justificar que se trata de uma função bijetiva.
10. Justificar, dados conjuntos A e B e uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que para todo o y pertencente a B existe um e apenas um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$ e, representando-o por x_y , designar por «função inversa de f » a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$.
11. +Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que f^{-1} é bijetiva e que $(f^{-1})^{-1} = f$ e designar também f^{-1} por «bijeção recíproca de f ».
12. Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$, que f é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$, tal que $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.
13. Justificar que uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$ e que, nesse caso, $g = f^{-1}$.

Generalidades acerca de funções reais de variável real

2. Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respectivas funções

1. Designar por «função real de variável real» uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
2. Saber, dada uma expressão $f(x)$, que se convencionou, quando nada for indicado em contrário, que essa expressão representa a função f com conjunto de chegada igual a $\mathbb{R}$ e domínio constituído por todos os números reais a para os quais fica representado um número real pela expressão que se obtém substituindo todas as ocorrências de x em $f(x)$ por um símbolo representando o número a , designar, nesse caso, a expressão $f(x)$ por «expressão analítica de f » e este processo de caracterizar f por «definição (analítica) de f pela expressão $f(x)$ ».
3. Identificar uma função real de variável real f como «par» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
4. Identificar uma função real de variável real f como «ímpar» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
5. Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f , que, se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
6. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.
7. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à origem O do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.
9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.
10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay) .
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a .

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y) .
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.
15. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox .
16. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy .

3. Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) crescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) crescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) decrescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) decrescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «crescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «crescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «decrescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «decrescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.
5. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) monótona em A » (ou simplesmente «(estritamente) monótona» se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como «monótona, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «monótona, em sentido lato» se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , um «intervalo de (estrita) monotonia de f » como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f|_I$ é (estritamente) monótona.
7. Identificar, dada uma função real de variável real e $A \subset D_f$, f como «constante em A » se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A , $f(x_1) = f(x_2)$.
8. Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).
9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $] - \infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $] - \infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

4. Identificar extremos de funções reais de variável real

1. Designar, dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, um número real M como «majorante de f » (respetivamente «minorante de f ») quando $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(x) \geq M$), referindo a função f como «majorada» (respetivamente «minorada») quando admitir um majorante (respetivamente um minorante).
2. Designar por «limitada» uma função simultaneamente majorada e minorada.
3. Designar por «mínimo absoluto» (respetivamente por «máximo absoluto») de uma função real de variável real um valor $f(a)$ do contradomínio de f tal que $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$) e designar por «extremos absolutos de f » os máximos absolutos e os mínimos absolutos de f .
4. Designar, dados um número real x_0 e um número real positivo r , por «vizinhança r de x_0 » o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representá-la por « $V_r(x_0)$ ».
5. Referir que uma função real de variável real «atinge um mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «atinge um máximo relativo (ou local)») em $a \in D_f$ quando existe $r > 0$, tal que, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$ (respetivamente, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$) e designar $f(a)$ por «mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «máximo relativo (ou local)») de f e a por um «minimizante» (respetivamente por um «maximizante») de f .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abscissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR .
7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abscissas em I , a parte do gráfico de f de abscissas estritamente situadas entre as abscissas de P e Q ficar «abaixo» (respetivamente «acima») do segmento de reta $[PQ]$.
8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a , que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

5. Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções

1. Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x - b)^2 + c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos.
2. Identificar uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual são dados um número natural $n > 1$, uma partição $A_1, A_2, \dots, A_n$ de D_f e n expressões $f_j(x)$ ($1 \leq j \leq n$) tais que para todo o j e para todo o $x \in A_j, f(x) = f_j(x)$ como «estando definida por ramos pelas expressões $f_j(x)$, respetivamente nos conjuntos A_j ($1 \leq j \leq n$)».
3. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) interpretando geometricamente os valores a, b e c .

4. Justificar que a função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
5. Justificar que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
6. Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt[n]{x-b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$, $a \neq 0$).
7. Identificar «função polinomial» como uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.
8. Esboçar o gráfico de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3.º grau, módulos e radicais quadrados e cúbicos.
9. Identificar, dadas funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, um número real α e um número racional r , as funções $f + g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$ («soma de f com g »), $fg: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, («produto de f por g »), $\frac{f}{g}: D_{\frac{f}{g}} \rightarrow \mathbb{R}$ («quociente de f por g », onde $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\}$), $\alpha f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ («produto de f pelo escalar α ») e $f^r: D_{f^r} \rightarrow \mathbb{R}$ («potência de expoente r de f », onde D_{f^r} é o conjunto dos números reais x para os quais está definido $f(x)^r$), como as funções com os domínios e conjunto de chegada indicados, definidas, para cada elemento x do respetivo domínio, respetivamente por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $f^r(x) = f(x)^r$, podendo utilizar-se, para representar as potências de expoente racional, as notações envolvendo raízes.

6. Resolver problemas

1. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais e a composição da função módulo com funções polinomiais.
2. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica.
3. +Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo as funções afim, quadrática, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas.

Estatística EST10

Características amostrais

1. Manipular o sinal de somatório

1. Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ por «somatório de 1 a p dos x_i » (ou por «soma dos p termos da sequência», quando esta designação não for ambígua), representá-la por « $\sum_{i=1}^p x_i$ », designar o símbolo « Σ » por «sinal de somatório» e, para $1 < m \leq p$, representar também por « $\sum_{i=m}^p x_i$ » a soma $x_m + x_{m+1} + \dots + x_p$ («somatório de m a p dos x_i »).
2. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
3. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
4. Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p$.

2. Utilizar as propriedades da média de uma amostra

1. Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.
2. Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , por « x_i » o valor da variável x no elemento de A com o número i , por « $\tilde{x}$ » a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, designá-la por «amostra da variável estatística x » ou simplesmente por «amostra» e por «valores da amostra» os valores x_i , $1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.
3. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de uma variável estatística, por « $\bar{x}$ » a média $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, designando-a igualmente por «média da amostra $\tilde{x}$ » sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.
4. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com m valores ($1 \leq m \leq n$), por « $\tilde{\tilde{x}}$ » o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \dots, \tilde{\tilde{x}}_m$ os elementos de $\tilde{\tilde{x}}$, por

« n_j » ($1 \leq j \leq m$) o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por «frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$ », e justificar que $\sum_{j=1}^m n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j n_j}{n}$, designando esta última igualdade por «fórmula da média para dados agrupados».

5. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e a , por « $a\bar{x} + h$ » a amostra $\underline{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
6. Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a média de $\underline{x}$ como a abscissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\tilde{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abscissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j .
7. Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».

3. Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por «desvio de x_i em relação à média» a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por « d_i » e provar que $\sum_{i=1}^n d_i = 0$.
2. +Representar dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por « SS_x » a soma $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que é possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios, e referir, por esta razão, que « SS_x tem $n - 1$ graus de liberdade».
4. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
5. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente $\underline{y} = \alpha \underline{x}$) então $SS_y = SS_x$ (respetivamente $SS_y = \alpha^2 SS_x$).
6. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = \sum_{j=1}^m (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\underline{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
7. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por «variância da amostra $\underline{x}$ » e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por «desvio-padrão da amostra $\underline{x}$ ».

8. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $s_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
 9. Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente $\underline{y} = \alpha \underline{x}$) então $s_y = s_x$ (respetivamente $s_y = |\alpha| s_x$).
 10. Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra correspondente da variável estatística x , que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par $(\bar{x}, s_x)$ reflete a distribuição dos valores da amostra $\underline{x}$ em termos de “localização” e de “dispersão”.
 11. Reconhecer que para comparar a “dispersão” dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.
 12. Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são consideradas boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.
4. Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k
1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por «amostra $\underline{x}$ ordenada» a sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\underline{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\underline{x}$.
 2. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0, 100]$, por «percentil de ordem k » o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100} \right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ designa a «parte inteira de x », ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por « P_k ».

3. Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\tilde{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75} .
4. Designar, dados números naturais n e k , $k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$ que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por «percentil de ordem k », o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1} (a_{i+1} - a_i) n_i + (x - a_L) n_L = \frac{k}{100} \sum_{i=1}^m (a_{i+1} - a_i) n_i$, ou seja, tal que $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{kh n}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.
2. +Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

Trigonometria e Funções trigonométricas TRI11

Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

1. Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos

1. Provar, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{ACB}$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, e designar estas igualdades por «Lei dos senos» ou «Analogia dos senos».
2. Estender a definição do seno aos ângulos retos, tomando $\sin \alpha = 1$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos retângulos.
3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin \alpha = \sin \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos obtusângulos.
4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A , que, se $\alpha = \widehat{BAC}$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».
5. Estender a definição do cosseno aos ângulos retos, tomando $\cos \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao Teorema de Pitágoras.
6. +Estender a definição do cosseno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos \alpha = -\cos \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno obtuso.
7. Estender a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\hat{\alpha}$.
8. Determinar, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos comprimentos dos três lados (LLL), as medidas do comprimento de dois dos lados e da amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou as medidas do comprimento de um dos lados e das amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA), as medidas dos comprimentos dos restantes lados e as medidas das amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo, designar este procedimento por «resolução do triângulo $[ABC]$ » e obter valores aproximados destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma máquina de calcular.

Orientação de ângulos num plano e rotações

2. Definir ângulos orientados e as respectivas medidas de amplitude

1. Identificar «ângulo orientado» como um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para «lado origem», designando o outro por «lado extremidade».
2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo «orientação negativa» quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado nesse plano π , os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade, identificar um ângulo orientado como tendo «orientação positiva» no caso contrário, e afetar do sinal «-» as amplitudes dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respectivas medidas.

3. Definir rotações segundo ângulos orientados

1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por «imagem do ponto M pela rotação de centro O e de ângulo orientado α » quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\widehat{OM'}$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\widehat{OM}$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

4. Definir ângulos generalizados

1. Identificar um «ângulo generalizado» (ou «ângulo trigonométrico») como um par ordenado (α, n) , onde α é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e n é um número inteiro, que é positivo ou nulo se α tiver orientação positiva e negativo ou nulo se α tiver orientação negativa, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n .
2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por «lado origem (respetivamente extremidade) dos ângulos generalizados (α, n) » e um ângulo nulo ω também como «lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n) ».
3. Identificar, fixado um ângulo unidade e sendo g a medida de amplitude dos ângulos giros, a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) como $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α .
4. Reconhecer que dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') têm a mesma amplitude se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude e $n = n'$ e justificar, fixado um ângulo unidade que, dado um número real x e fixada uma semirreta para lado origem, existe um e apenas um ângulo generalizado cuja medida de amplitude é igual a x .
5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n) , a «rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) », no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α e ao ponto O associa o próprio ponto O .
6. Reconhecer, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') , α, α' ângulos orientados, que as rotações de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') coincidem se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude ou se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respectivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro.

5. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados

1. Designar um referencial ortonormado num dado plano como «direto» quando o primeiro quadrante, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com semieixo positivo Oy , tem orientação positiva.
2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por «circunferência trigonométrica» (ou, por abuso de linguagem, por «círculo trigonométrico»).
3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um ângulo orientado α desse plano, o «seno de α » (respetivamente o «cosseno de α ») como a ordenada (respetivamente a abcissa) do ponto P , interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\text{sen}(\alpha)$, $\sin \alpha$ ou $\text{sen } \alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos \alpha$), reconhecer que este valor não depende da escolha do referencial, e que esta definição estende a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos convexos, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um ângulo orientado α desse plano de lados não perpendiculares, a «tangente de α » como a ordenada do ponto P , interseção da reta de equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a reta suporte do lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-la por $\tan(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$, $\tan \alpha$ ou $\text{tg } \alpha$, reconhecer que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e que esta definição estende a definição de tangente de um ângulo agudo, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
5. Identificar, dado um ângulo generalizado $\theta = (\alpha, n)$, o «seno de θ », o «cosseno de θ » e a «tangente de θ » como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α .
6. Justificar, dados ângulos generalizados θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

6. Definir medidas de ângulos em radianos

1. Designar por «radiano» a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio e reconhecer que o radiano não depende da escolha da circunferência, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.
2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.

7. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades

1. Identificar, dado um número real x , a «tangente de x » (respetivamente o «seno de x » e o «cosseno de x ») como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um ângulo generalizado de medida de amplitude igual a x , em radianos, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por «(função) tangente» (respetivamente «(função) seno» e «(função) cosseno»), representando-a por «tan» ou «tg» (respetivamente por «sin» ou «sen» e por «cos») e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$ (respetivamente por «sin x » ou «sen x » e por «cos x »).
2. Identificar, dado um número $P > 0$, uma função f como «periódica de período P » ou « P -periódica» se para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x + P) = f(x)$.
3. Designar, dada uma função f , o número $P_0 > 0$ por «período fundamental de f ou por «período positivo mínimo de f » se f for P_0 -periódica e não admitir outro período P inferior a P_0 .
4. Justificar que as funções reais de variável real seno e cosseno têm domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1, 1]$ e período fundamental $P_0 = 2\pi$.
5. Provar que os zeros da função seno (respetivamente da função cosseno) são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
6. Justificar que a função seno (respetivamente a função cosseno) admite extremos locais nos pontos de abcissa da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
7. Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a fórmula fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.
8. Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.
9. Justificar que a função real de variável real tangente tem domínio $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período fundamental $P_0 = \pi$ e que os respetivos zeros são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. Justificar que as funções seno e tangente são ímpares e a função cosseno é par.

8. Definir funções trigonométricas inversas

1. +Reconhecer que as funções $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ e $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por «(função) arco-seno» (arcsin ou arcsen), «(função) arco-cosseno» (arccos) e «(função) arco-tangente» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.
2. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\cos x = \cos \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

3. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\sin x = \sin \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Reconhecer, dados números reais x e α do domínio da função tangente, que $\tan x = \tan \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + k\pi$.
5. Resolver equações da forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos.
2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respectivas razões trigonométricas.
3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas.
4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas.

Geometria Analítica GA11

Declive e inclinação de uma reta

1. Definir a inclinação de uma reta

1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dada uma reta r que passa pela origem e é distinta do eixo Ox , a «inclinação de r » como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semirreta $\vec{OP}$, onde P é um qualquer ponto de r de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O , a inclinação de uma reta r como a inclinação da reta paralela a r que passa por O .
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

Produto escalar

2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o «produto escalar (ou interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como o número $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$, (respetivamente o número $-\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ'}$) onde, fixado um ponto O , $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP , se $\overrightarrow{OQ'}$ e $\overrightarrow{OP}$ tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto O , identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».
2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, «ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, reconhecendo que têm todos a mesma amplitude, designar também essa amplitude por «ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » quando essa designação não for ambígua, e representá-la por « $(\vec{u}, \vec{v})$ ».
3. Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Identificar vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como «perpendiculares» quando um deles for nulo ou quando, não sendo nulo nenhum dos dois, forem perpendiculares duas retas de vetores diretores respetivamente iguais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e indicar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares escrevendo « $\vec{u} \perp \vec{v}$ ».
5. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
6. Justificar, dado um vetor $\vec{u}$, que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
7. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
8. +Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ , que $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
9. +Provar, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
10. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

11. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que duas retas de declives respetivamente iguais a m e a m' são perpendiculares se e somente se $mm' = -1$.
12. Justificar, fixado um referencial ortonormado do espaço e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$.

3. Determinar equações de planos no espaço

1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como «normal a um plano α » se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β , que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \cdot \vec{v} = 0$.
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.
5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.
7. Identificar, dado um plano α , um vetor $\vec{v}$ como «paralelo a α » se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α .
8. +Provar, dado um plano α , um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por «equação vetorial do plano α ».
9. Justificar, dado um plano α , um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por «sistema das equações paramétricas do plano α ».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores.
2. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.
3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Sucessões SUC11

Generalidades sobre sucessões

1. Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais

1. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «majorado» quando existe um número real M tal que $\forall a \in A, a \leq M$ e designar M por «majorante de A ».
2. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «minorado» quando existe um número real m tal que $\forall a \in A, a \geq m$ e designar m por «minorante de A ».
3. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «limitado» quando for majorado e minorado.
4. Designar por «máximo» (respetivamente por «mínimo») de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ um majorante (respetivamente um minorante) de A pertencente a A e justificar que se existir é único.

2. Estudar propriedades elementares de sucessões reais

1. Identificar uma «sucessão real» (ou simplesmente «sucessão» quando esta designação não for ambígua) como uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e de conjunto de chegada $\mathbb{R}$, e representar por « u_n », dito «termo geral da sucessão», a imagem $u(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ por u e por « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » (ou simplesmente por « (u_n) », ou ainda por « u_n », quando estas notações não forem ambíguas) a própria sucessão u .
2. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente» (respetivamente «decrescente») quando o for como função real de variável real, ou seja, quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} > u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} < u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (respetivamente $u_{n+1} < u_n$).
3. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato» quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \geq u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \leq u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respetivamente $u_{n+1} \leq u_n$).
4. Identificar uma sucessão (u_n) como «majorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for majorado e designar os majorantes deste conjunto também por «majorantes da sucessão».
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «minorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for minorado e designar os minorantes deste conjunto também por «minorantes da sucessão».
6. Designar por «limitada» uma sucessão (u_n) simultaneamente majorada e minorada.

Princípio de Indução matemática

3. Utilizar o princípio de indução matemática

1. Saber, dada uma condição $T(n)$, que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, T(n)$ é verdadeira se $T(1)$ for verdadeira e se, além disso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, designar este resultado por «princípio de indução (matemática)», $T(n)$, enquanto antecedente da

implicação $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, por «hipótese de indução» e a proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ por «hereditariedade» da propriedade $T(n)$ e saber que o princípio de indução pode estender-se, *mutatis mutandis*, fixado um número inteiro p e uma condição $T(n)$, à demonstração da proposição $\forall n \in \mathbb{N}_p$ $T(n)$, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$.

2. Saber, dada uma função $f: A \rightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) «por recorrência» e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A , onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$, também designadas por «sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)».
3. +Utilizar o princípio de indução para efetuar demonstrações.

Progressões aritméticas e geométricas

4. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão aritmética de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.
3. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão geométrica de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times r$.
4. Justificar que o termo geral da progressão geométrica de primeiro termo a e razão r não nula é dado por $u_n = ar^{n-1}$.

5. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por «progressão aritmética (finita) de comprimento N » (respetivamente «progressão geométrica (finita) de comprimento N »), a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ «dos N primeiros termos» de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n) .
2. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento N , $(u_1, u_2, \dots, u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^N u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.
3. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento N , de primeiro termo u_1 e de razão r diferente de 1, é dada por $S = u_1 \frac{1-r^N}{1-r}$.

Limites de sucessões

6. Definir o limite de uma sucessão

1. Identificar, dada uma sucessão (u_n) , um número real l como «limite da sucessão (u_n) » ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$ » quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que « u_n tende para l » (« $u_n \rightarrow l$ »), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite l existe e por «divergente» quando não for convergente.

2. Provar que uma sucessão convergente (u_n) admite um único limite e representá-lo por « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ », « $\lim_n u_n$ » ou simplesmente por « $\lim u_n$ ».
3. +Reconhecer que as sucessões convergentes são limitadas.
4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $+\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_n u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $+\infty$ » (« $u_n \rightarrow +\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente.
6. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $-\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, $\lim_n u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $-\infty$ » (« $u_n \rightarrow -\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).
7. Reconhecer, dada uma sucessão (u_n) com limite $l \in \mathbb{R}$ ou tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente sem limite), que qualquer sucessão (v_n) que possa ser obtida de (u_n) alterando apenas um número finito de termos, tem o mesmo limite (respetivamente não tem limite).
8. +Provar, dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (u_n) com limite nulo, que $\lim u_n v_n = 0$.
9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($cn+d \neq 0$ para todo o n) é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d}$, se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.
10. Provar, utilizando a definição de limite, que, dado um número racional p , $\lim n^p = +\infty$ se $p > 0$ e $\lim n^p = 0$ se $p < 0$.
11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e que $\lim (u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n v_n)$ é convergente e que $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.
13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.
14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a , que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim (au_n) = a \lim u_n$.
15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r , que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim (u_n)^r = (\lim u_n)^r$.
16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por « $+\infty + l = +\infty$ » (ou por « $+\infty + (+\infty) = +\infty$ »).
17. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por « $-\infty + l = -\infty$ » (ou por « $-\infty + (-\infty) = -\infty$ »).

18. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ ».
19. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por « $(+\infty) \times l = +\infty$ » e « $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ » (respetivamente por « $(+\infty) \times l = -\infty$ » e « $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ »).
20. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por « $(-\infty) \times l = -\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty) \times l = +\infty$ » e « $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ »).
21. #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por « $(+\infty)^r = +\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty)^r = +\infty$ » se r for par e por « $(-\infty)^r = -\infty$ » se r for ímpar).
22. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\infty \times 0$ ».
23. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^+$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ».
24. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, negativa a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^-$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^-} = -\infty$ ».
25. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{\infty} = 0$ ».
26. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ » (respetivamente «indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ »).
27. Justificar, dado um polinómio $P(x)$ de grau superior ou igual a 1, que a sucessão $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim P(n) = +\infty$ se o coeficiente do termo de maior grau da forma reduzida de P for positivo e que $\lim P(n) = -\infty$ no caso contrário.
28. Calcular, dadas sucessões $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, $Q(x)$ sem raízes naturais, o limite $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ e relacioná-lo com os graus de $P(n)$ e $Q(n)$ e com os coeficientes dos termos de maior grau das respetivas formas reduzidas.
29. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ e que $\lim a^n = 0$ se $a < 1$.

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.
31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral n^p ($p \in \mathbb{Q}$), a^n e $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

7. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.
2. +Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.
3. +Calcular, por meios algébricos, o limite de sucessões em situação indeterminada e referir esse cálculo como um «levantamento da indeterminação».
4. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite de uma sucessão.

Funções Reais de Variável Real FRVR11

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A » quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a » quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a » e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à esquerda de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f , que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
7. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
8. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, se calculam, em pontos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.
10. Justificar, dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$ e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

2. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a » quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
3. Designar, dada uma função real de variável real f de domínio D_f , a função f por «contínua no conjunto $A \subset D_f$ » quando f é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por «contínua» quando é contínua em todos os pontos de D_f .
4. Saber que se uma função real de variável real f de domínio D_f for contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$) então existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a , então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a .
6. Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.
7. Justificar que as funções polinomiais e racionais são contínuas.
8. Justificar que as potências de expoente racional são contínuas.
9. Saber que as funções seno e cosseno são contínuas e justificar que a função tangente é contínua.
10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .
11. Justificar a continuidade de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções «de referência para a continuidade»: funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções cosseno, seno e tangente.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como « assíntota vertical ao gráfico de f » quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) por « assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ » (respetivamente por « assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ ») se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por « assíntota horizontal ».
3. Provar, dada uma função real de variável real f , que a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um « levantamento da indeterminação ».
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

5. Definir a noção de derivada

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a « taxa média de variação de f entre a e b » como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. Justificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a « taxa instantânea de variação de f no ponto x_0 » como o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por « derivada de f no ponto x_0 », representá-lo por « $f'(x_0)$ » e, nesse caso, identificar a função f como « diferenciável em x_0 » ou « derivável em x_0 ».
4. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.

5. Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a «reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ » como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in D_f$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) = f'(x_0)$.

6. *Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto*
 1. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L e um intervalo I , uma função $p: I \rightarrow \mathbb{R}$, como «função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I », se, para cada $t \in I$, $p(t)$ for a abcissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo T depois de τ_0 se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo T antes de τ_0 se $t < 0$, designando também por «instante», neste contexto, cada $t \in I$.
 2. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo I , a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I , e dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T » como a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 , $\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T » como a derivada de p em t , $p'(t)$, caso exista.

7. *Operar com derivadas*
 1. Designar, dada uma função real de variável real f , a «função derivada de f » como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f: f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.
 2. Identificar uma função real de variável real como «diferenciável num conjunto A » quando é diferenciável em todos os pontos de A .
 3. Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).
 4. Provar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se f é diferenciável em a , f é contínua em a e justificar que a recíproca não é verdadeira.
 5. Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k , que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
 6. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
8. +Provar, dada uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e que $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.
10. Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
11. +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
12. Provar, para todo o número racional α , que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
13. +Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

8. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções

1. Provar, dada uma função real de variável real f com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$), e diferenciável em $x_0 \in I$, que se f atinge um extremo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e dar um contraexemplo para a implicação recíproca.
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a, b]$, ($a < b$), e diferenciável em $]a, b[$ que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».
3. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$) então f é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) no intervalo I .
4. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$) então f é crescente em sentido lato (respetivamente decrescente em sentido lato) no intervalo I .

5. Justificar que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante em I .

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.

Estatística EST11

Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

1. Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados

1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) por «desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t » ($i \in \{1, \dots, n\}$) a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por « e_i ».
2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que as condições $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.
3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^n e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t , que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $\bar{y} - a\bar{x}$) por «reta de mínimos quadrados» da sequência de pontos.
4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , a «amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y » (ou simplesmente «amostra de dados bivariados (quantitativos)») como a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, representá-la por « (x, y) » e designar por «dimensão da amostra bivariada» o número natural n .
5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.
6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por «variável resposta» e a variável considerada independente por «variável explicativa».
7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos $(x, y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, por «nuvem de pontos» o conjunto $\{(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))\}$ e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.
9. Designar, dado um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos (x, y) , por «coeficiente de correlação linear» o quociente $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por « r », reconhecer que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que $|r|$ é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, estão alinhados e referir que a «associação linear entre as variáveis estatísticas» é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais «forte» quanto mais perto de 1 estiver $|r|$.

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2. +Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
3. +Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

Cálculo Combinatório CC12

Introdução ao cálculo combinatório

1. Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos

1. #Provar, dados conjuntos A e B , que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
2. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U , que $A \subset B$ se e somente se $\bar{B} \subset \bar{A}$.
3. #Provar, dados conjuntos A , B e C , que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $A \cap A = A$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\cap$ » e « $\cup$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».
4. #Provar, dado um conjunto U , que, para quaisquer subconjuntos A e B de U , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».
5. Provar, dados conjuntos A , B e C , que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

2. Conhecer factos elementares da combinatória

1. Saber, dados conjuntos A e B , que $\#A = \#B$ se e somente se existir uma bijeção de A sobre B e nesse caso identificar os conjuntos A e B como «equipotentes».
2. Saber, dados conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$, que $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
3. +Provar, dados conjuntos A e B de cardinais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, que o cardinal do produto cartesiano $A \times B$ é igual a $n \times m$.
4. +Reconhecer que existem exatamente n^p sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$, designar esse número por «arranjos com repetição de n elementos p a p » (« ${}^nA'_p$ ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA'_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.
5. +Designar, dado um conjunto E , por «conjunto das partes de E » o conjunto formado pelos subconjuntos de E , representá-lo por $\mathcal{P}(E)$ e reconhecer que se E tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#E = p$) então $\mathcal{P}(E)$ tem 2^p elementos ($\#\mathcal{P}(E) = 2^p$).
6. Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ formas de ordenar os elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$, designar este número por «(número de) permutações de n elementos» e representá-lo por « $n!$ » (« n fatorial»).
7. Saber que, por convenção, $0! = 1$, reconhecendo que esta definição é a única para a qual a igualdade $n! = n(n-1)!$ vale também para $n = 1$.

8. +Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos distintos escolhidos num conjunto de $n \geq p$ elementos, designar este número por «(número de) arranjos (sem repetição) de n elementos p a p » (« nA_p ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente nA_p formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem repor o objeto escolhido após cada uma das extrações.
9. Justificar que um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos tem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos de p elementos ($0 \leq p \leq n$), e designar este número por «(número de) combinações de n elementos p a p », reconhecendo que, dado $n \in \mathbb{N}$ objetos, existem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!}$ formas de escolher p ($p \leq n$) de entre eles e representar este número por « nC_p », por « C_p^n » ou por « $\binom{n}{p}$ », reconhecendo que se trata de um número natural.
10. +Simplificar expressões envolvendo fatoriais, arranjos e combinações.

3. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton

1. Justificar, dados números naturais n e p , $p \leq n$, que ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ de dois modos distintos: utilizando um cálculo algébrico e um argumento combinatório.
2. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=0}^n {}^nC_k = 2^n$, interpretando esta igualdade à luz do número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.
3. +Reconhecer, dados números naturais n e p , $p < n$, que ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$ e utilizar esta igualdade para construir, progressivamente, o «triângulo de Pascal», no qual figuram, na n -ésima linha, os números ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \dots, {}^nC_{n-1}$ e nC_n , por esta ordem.
4. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$, a igualdade entre polinómios nas variáveis x e y , $(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}y^1 + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 + \dots + {}^nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} y^k$, designando-a por «binómio de Newton», e por esta razão, designar os números nC_p igualmente por «coeficientes binomiais».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos.
2. +Resolver problemas de contagens envolvendo arranjos e combinações.
3. +Resolver problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

Probabilidades PRB12

Definição de probabilidade

1. Definir espaços de probabilidade

1. Identificar, dado um conjunto finito E , uma «probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E » como uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ e de valores não negativos tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, designar, neste contexto, o conjunto E por «espaço amostral» ou «universo dos resultados», $\mathcal{P}(E)$ por «espaço dos acontecimentos», os respetivos elementos por «acontecimentos», $P(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, por «probabilidade do acontecimento A » e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ por (um caso particular de) «espaço de probabilidade».
2. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, o conjunto vazio $\emptyset$ por «acontecimento impossível», o conjunto E por «acontecimento certo», dois acontecimentos por «incompatíveis» ou por «mutuamente exclusivos» se forem disjuntos, por «complementares» ou por «contrários» se forem disjuntos e a respetiva união for igual a E e por «equiprováveis» se tiverem a mesma probabilidade.
3. Designar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \subset E$, por «casos favoráveis a A » os elementos de A e por «casos possíveis» os elementos do espaço amostral E .
4. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, um acontecimento A por «elementar» quando $\#A = 1$ e por «composto» quando $\#A \geq 2$.
5. Justificar, dado um conjunto finito E , que a função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ definida por $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) = \frac{\#A}{\#E}$ é a única probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ tal que os acontecimentos elementares são equiprováveis e designar esta definição da função de probabilidade por «definição de Laplace».
6. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$, que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e que $P(\emptyset) = 0$.
7. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que se $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, justificando que $P(A) \leq P(B)$, e designar este último resultado por «monotonia da probabilidade».
8. Justificar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, que $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \in [0, 1]$.
9. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
10. Saber que se podem considerar espaços amostrais E infinitos, podendo-se definir, nessa situação, uma função de probabilidade P cujas propriedades generalizam as que caracterizam este conceito no caso em que E é finito, desde que se defina de forma apropriada a classe de acontecimentos, subconjunto de $\mathcal{P}(E)$, que constitui o domínio de p .

2. Definir probabilidade condicionada

1. Reconhecer, no quadro de uma experiência aleatória em que o universo dos resultados é finito, que, se se souber que um dado acontecimento B ocorreu, o número de casos possíveis da experiência aleatória é $\#B$ e o número de casos favoráveis de um acontecimento A é dado por $\#(A \cap B)$, e justificar que, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B é igual a $\frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ em que P representa a probabilidade no espaço inicial.
2. Designar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B , com $P(B) \neq 0$, por «probabilidade de A se B », por «probabilidade condicionada de A se B » ou por «probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B » a quantidade $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e representá-la por « $P(A|B)$ ».
3. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) \neq 0$, que a função P_B definida pela expressão $P_B(A) = P(A|B)$ é uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$.
4. Justificar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se e somente se $P(B) = 0$ ou $P(B) \neq 0$ e $P(A|B) = P(A)$, e identificar os acontecimentos A e B como «independentes» quando é verdadeira uma destas condições equivalentes.
5. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, $N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ de E constituída por acontecimentos de probabilidade não nula, que para todo o acontecimento $A \subset E$, $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \dots + P(A|E_N)P(E_N)$ e designar este resultado por «Teorema da probabilidade total».

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório e a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares.
2. +Resolver problemas envolvendo espaços de probabilidades e a determinação de propriedades da função de probabilidade.
3. +Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

Funções Reais de Variável Real FRVR12

Limites e Continuidade

1. *Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções encastradas*
 1. #Provar, dadas sucessões convergentes (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.
 2. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim u_n = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.
 3. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim v_n = -\infty$ então $\lim u_n = -\infty$.
 4. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$, que (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$, e designar este resultado por «Teorema das sucessões encastradas».
 5. #Provar, dadas funções reais de variável real f e g de domínio D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D que, se para todo o $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
 6. #Provar, dado um número real l , funções reais de variável real f, g e h de domínio D e $a \in \mathbb{R}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$, e designar este resultado por «Teorema das funções encastradas».
2. *Conhecer propriedades elementares das funções contínuas*
 1. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $I = [a, b]$, ($a < b$), que para qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$ e designar esta propriedade por «Teorema dos valores intermédios» ou por «Teorema de Bolzano-Cauchy».
 2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que f admite máximo e mínimo absolutos e designar este resultado por «Teorema de Weierstrass».
3. *Resolver problemas*
 1. +Resolver problemas envolvendo os teoremas de comparação e das sucessões e funções encastradas para o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções reais de variável real.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

4. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração

1. Designar, dada uma função real de variável real f diferenciável num intervalo I tal que a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, a derivada $(f')'(a)$ por «derivada de segunda ordem de f no ponto a » e representá-la por « $f''(a)$ ».
2. Identificar uma função real de variável real f como «duas vezes diferenciável» num dado intervalo I se $f''(a)$ existir para todo o $a \in I$.
3. +Provar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a, b[$, $a < b$, e $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, que se $f''(c) > 0$ (respetivamente $f''(c) < 0$) f admite um mínimo (respetivamente um máximo) local em c .
4. +Provar, dada uma função f diferenciável num intervalo I , que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) em I se e somente se f' for estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) em I .
5. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , que se para todo o $x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$ (respetivamente $f''(x) < 0$), o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I .
6. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I então, para todo o $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (respetivamente $f''(x) \leq 0$).
7. Identificar, dada uma função f de domínio D , o ponto $(c, f(c))$ onde $c \in D$, como «ponto de inflexão do gráfico de f » se existirem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a, b] \subset D$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a, c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c, b]$ e, nesse caso, referir que «o gráfico de f tem ponto de inflexão em c ».
8. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico de f tem ponto de inflexão em c então $f''(c) = 0$.
9. Identificar, fixado um instante T_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não vazio nem reduzido a um ponto, dada a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I e dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «aceleração média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T^2 » como a taxa média de variação de p' entre t_1 e t_2 , $\frac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade L/T^2 » como a derivada de segunda ordem de p em t .

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo propriedades das funções diferenciáveis.
2. +Esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas ao respetivo gráfico.

3. +Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.
4. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de valores aproximados de soluções de equações da forma $f(x) = g(x)$ (f e g funções contínuas) utilizando uma calculadora gráfica, em casos em que é possível justificar, através da leitura das informações fornecidas pela calculadora, que determinados valores coincidem, até à casa decimal indicada, com soluções da referida equação, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o Teorema dos valores intermédios, ou outras propriedades analíticas das funções f e g , previamente estabelecidas.

Trigonometria e Funções Trigonométricas TRI12

Diferenciação de funções trigonométricas

1. Estabelecer fórmulas de trigonometria

1. +Reconhecer, dados ângulos α e β cuja soma é um ângulo convexo, que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.
2. +Reconhecer, dado um ângulo α convexo de amplitude superior à de um ângulo β , que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$, onde $\alpha - \beta$ é um ângulo cuja soma com β é igual a α .
3. Saber que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, estendendo-se assim as fórmulas já conhecidas envolvendo apenas medidas de amplitude de ângulos geométricos convexos e justificar que $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ e $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

2. Calcular a derivada de funções trigonométricas

1. +Reconhecer que para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ e provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, referindo este limite como «limite notável».
2. Provar que as funções seno e cosseno são diferenciáveis e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$.
3. Provar que a função tangente é diferenciável no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

3. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

1. Designar por «oscilador harmónico» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I , de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «amplitude», «pulsção» e «fase», justificar que a função x é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f = \frac{1}{T}$ por «frequência» do oscilador harmónico.
2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a \sin(bx + c) + d$, $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ e $f(x) = a \tan(bx + c) + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.
3. Saber, dado um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que P se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de P no instante t satisfaz a equação $mx''(t) = -ax(t)$ ($a > 0$), interpretando o termo $-ax(t)$ como a força exercida pela mola sobre P («lei de Hooke»), designar a igualdade desta força com o produto da massa pela aceleração de P por (um caso particular da) «segunda Lei de Newton» e resolver problemas envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. Justificar, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde A e b são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material P colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

4. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas, o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos.
2. +Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmónicos.

Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas FEL12

Juros compostos e número de Neper

1. Operar com juros compostos e definir o número de Neper

1. Designar, dado um número real r , uma unidade de medida temporal T e $n \in \mathbb{N}$, por «aplicar juros compostos à taxa de $r\%$ a T durante n períodos de tempo T » a um dado capital disponível em certo instante inicial t_0 , a operação que consiste em calcular um juro igual a $r\%$ do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a T e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante t_0 , e levando-o a cabo n vezes seguidas.
2. Provar, dado um capital inicial C_0 , que, aplicando-se juros compostos à taxa de $r\%$ a T , o capital disponível ao fim de $n \in \mathbb{N}$ períodos de tempo T é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.
3. Justificar, dado um número real r , um número natural n e um capital C_0 disponível no início de um determinado período de um ano, que dividindo esse ano em n períodos iguais de medida temporal T e aplicando juros compostos à taxa de $\frac{r}{n}\%$ a T durante esses n períodos ao capital inicial C_0 , o capital disponível ao fim do ano é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$.
4. +Provar que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, majorada, justificar que é convergente, designar por «número de Neper» (« e ») o respetivo limite, interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto e saber que e é um número irracional.

Funções exponenciais

2. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.
2. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e justificar que f é contínua.
3. +Provar, dado um número real $a > 1$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, utilizando o limite já conhecido $\lim a^n = +\infty$ e o facto de f ser crescente.
4. Justificar, dado $a \in \mathbb{R}$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ quando $a > 1$, e, quando $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
5. Saber, dado um número real $a > 0$ e um número irracional x , que se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de números racionais de limite x , a sucessão de termo geral a^{q_n} é convergente e o respetivo limite depende apenas de x e de a , e que, representando esse limite por « a^x », se estende a função definida por $f(x) = a^x$ em $\mathbb{Q}$ ao conjunto $\mathbb{R}$,

obtendo-se por este processo uma função contínua nesse conjunto, designada por «função exponencial de base a », que mantém a monotonia, os limites em $\pm\infty$ e as propriedades algébricas de f em $\mathbb{Q}$: para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(ab)^x = a^x b^x$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

6. Saber que, tal como no caso em que $b \in \mathbb{Q}$, mais geralmente quando $b \in \mathbb{R}$ a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^b$ é contínua.
7. Saber que a função definida em $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ tem por limite e em $\pm\infty$ e justificar, dado $x \in \mathbb{R}$, que $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. Designar a função exponencial de base e simplesmente por «função exponencial» e representá-la também por «exp».
9. Saber que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, referindo este limite como um «limite notável».
10. Provar que a função exponencial é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Funções logarítmicas

3. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. Reconhecer, dado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva e designar a respetiva bijeção recíproca, $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, por «logaritmo de base a », representá-la por « $\log_a$ », e justificar que $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$ e $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$.
2. Designar o logaritmo de base 10 por «logaritmo decimal», representando-o também por «log» e designar o logaritmo de base e por «logaritmo neperiano», representando-o também por «ln».
3. Justificar que a função logaritmo de base a é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
4. Justificar que $x = 1$ é o único zero da função logaritmo de base $a > 0$, $a \neq 1$, e que, se $a > 1$ (respetivamente se $0 < a < 1$), $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (respetivamente $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$).
5. Justificar, dado $a > 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
6. Justificar, dado $0 < a < 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
7. #Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, e $x, y \in \mathbb{R}^+$, que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ e $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.
8. #Provar, dados $a, b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, que $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
9. Justificar, dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, que $a^x = e^{x \ln(a)}$.
10. Justificar, dado $a > 0$, que a função exponencial de base a é diferenciável e que a respetiva derivada é dada, em $\mathbb{R}$, pela expressão $\ln(a) a^x$.
11. +Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, que $\log_a$ é diferenciável e que para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.
12. Justificar, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que a função x^α é diferenciável para $x > 0$, de derivada $\alpha x^{\alpha-1}$, estendendo-se assim o caso já conhecido correspondente a α racional.

Limites notáveis

4. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

1. +Provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.
2. Justificar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k , que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f , tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

Primitivas e Cálculo Integral PCI12

Noção de primitiva

1. Definir a noção de primitiva

1. Designar, dada uma função f real definida num intervalo I , uma função F por «primitiva de f em I » quando F é diferenciável em I , e, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ e designar f como «primitivável em I » quando f admite uma primitiva nesse intervalo.
2. Justificar, dada uma função f primitivável num intervalo I e F e G duas primitivas de f nesse intervalo, que a função $F - G$ é constante em I .
3. Justificar que se f é primitivável num intervalo I , então as primitivas de f nesse intervalo são as funções definidas pelas expressões $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, onde F é uma qualquer primitiva de f em I , representar esta expressão por « Pf » ou por « $\int f(x)dx$ » e designar as constantes c por «constantes de primitivação».
4. Justificar, dado um intervalo I , um ponto $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ e uma função f primitivável em I , que existe uma única primitiva de F em I tal que $F(a) = b$.
5. Calcular e conhecer de memória as primitivas das funções «de referência para a primitivação»: 1 , x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$), $\frac{1}{x}$, e^x , $\sin x$ e $\cos x$.
6. Justificar, dadas funções f e g primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, que $f + g$ e kf são primitiváveis em I , que a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f + g$ e o produto de uma primitiva de f por k é uma primitiva de kf e representar estes resultados, respetivamente, pelas expressões « $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ » e « $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ », quando estas notações não forem ambíguas e designá-los conjuntamente por «linearidade da primitivação».
7. +Calcular primitivas de funções dadas por expressões da forma $u'(x)f(u(x))$, sendo conhecida uma primitiva de f .

Noção de integral

2. Abordar intuitivamente a noção de integral definido

1. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como a medida, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f .
2. Conhecer a origem histórica da expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », representando o símbolo « $\int$ » uma «soma» e « $f(x)dx$ » a medida da área de um «retângulo» com lados de medida $f(x)$ e « dx », sendo esta última «infinitesimal».
3. Saber que na expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », o símbolo « x » pode ser substituído por qualquer outro e designar, por esta razão, a variável x como «muda».

4. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$, ($a \leq b$), que se para todo o $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, então $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ e designar esta propriedade por «monotonia do integral definido».
5. Reconhecer, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que a função F_a definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ é a primitiva de f no intervalo $[a, b]$ nula em a e designar este resultado por «Teorema fundamental do cálculo (integral)».
6. Provar, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$, onde F é uma qualquer primitiva de f no intervalo $[a, b]$ e $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, e designar este resultado por «Fórmula de Barrow».
7. Saber, dada uma função f contínua não negativa num intervalo I e dois pontos α e β de I tais que $\alpha < \beta$, que, por convenção, $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ e justificar que com esta convenção, dados quaisquer pontos a, b e c de I , se tem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, designando este resultado por «relação de Chasles».
8. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$) tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como o simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f e reconhecer que se tem $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$.
9. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas ou não positivas num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ e que $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ e designar o conjunto destes resultados por «linearidade do integral definido».
10. Identificar, dada uma função f contínua de domínio $[a, b]$ ($a < b$) para a qual existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k+1} = b$, tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos $[c_j, c_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq k$), o integral de f entre a e b , $\int_a^b f(x)dx$, como a soma $\int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$, reconhecendo que este valor não depende da sequência $(c_1, \dots, c_k)$ e saber que se podem estender a esta categoria de funções a propriedade de monotonia do integral, o Teorema fundamental do cálculo, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles (com a mesma convenção relativa à inversão dos extremos de integração) e a propriedade de linearidade.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o cálculo de integrais definidos.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidade, aceleração e a primitivação e integração de funções reais de variável real.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação da medida da área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções.

Números Complexos NC12

Introdução aos números complexos

1. Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção

1. Saber que, em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou uma fórmula, dita «fórmula resolvente para equações do terceiro grau», que permite obter uma solução real de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q .
2. Saber que ao substituir formalmente p e q por certos valores na fórmula de Cardano esta passa a apresentar o símbolo « $\sqrt{-1}$ » e que, operando formalmente com este símbolo, considerando em particular que « $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ », se obtém efetivamente uma solução real da equação $x^3 + px + q = 0$, e que este facto está na origem da motivação para se definir adequadamente um “número” cujo quadrado é igual a -1 .
3. +Reconhecer que se existir um conjunto C contendo $\mathbb{R}$, munido de duas operações « $+$ » e « $\times$ » que estendem respetivamente a operação de adição e de multiplicação de números reais, mantendo os mesmos elementos neutros, que são associativas, comutativas, tais que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ », e tal que C contém um elemento i que satisfaz $i \times i = -1$, então, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se necessariamente em C a equivalência $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ bem como as igualdades $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, notando, em particular, que os resultados das operações « $+$ » e « $\times$ » sobre elementos de C da forma $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) têm essa mesma forma.

2. Definir o corpo dos números complexos

1. Definir em $\mathbb{R}^2$ uma operação aditiva « $+$ » por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e uma operação multiplicativa « $\times$ » por $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ($(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$), designar o conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido destas duas operações, por «corpo dos números complexos» e representá-lo por $\mathbb{C}$.
2. Justificar que as operações « $+$ » e « $\times$ », definidas em $\mathbb{R}^2$, são associativas, comutativas, que $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são respetivamente os elementos neutros de « $+$ » e « $\times$ » e que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ ».
3. Justificar que, dados $a, c \in \mathbb{R}$, $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ e $(a, 0) \times (c, 0) = (ac, 0)$ e, por esta razão, identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$ e representando, portanto, o número complexo $(x, 0)$ por « x ».
4. Representar o número complexo $(0, 1)$ por « i », designá-lo por «unidade imaginária» e provar que $i^2 = -1$.
5. Provar que, dado um número complexo z , existe um único número real a e um único número real b tais que $z = a + bi$, observando que z é, por definição, um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e que $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

6. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), a por «parte real de z » e b por «parte imaginária de z », e representá-las respetivamente por $Re(z)$ e por $Im(z)$.
7. Justificar que um número complexo z é real se e somente se $Im(z) = 0$ e designar por «números imaginários puros» os números complexos não reais tais que $Re(z) = 0$.
8. Justificar, dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, que $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e que $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.
9. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e $a, b \in \mathbb{R}$, o ponto M de coordenadas (a, b) como o «afixo do número complexo $z = a + bi$ » e reconhecer que se podem assim representar os números complexos no plano, designando, neste contexto, o plano por «plano complexo» ou «plano de Argand», o eixo das abscissas por «eixo real» e o eixo das ordenadas por «eixo imaginário».
10. Justificar, dados números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, que o afixo de $z + z_0$ é a imagem pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$ do ponto M , afixo de z .

3. Operar com números complexos

1. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, por «conjugado de z » o número complexo $a - bi$, representando-o por $\bar{z}$, e justificar que o ponto afixo de $\bar{z}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do ponto afixo de z .
2. Justificar, dados números complexos z e w , que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ e $\overline{\bar{z}} = z$.
3. Justificar, dado um número complexo z , que $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e que $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
4. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que z é um número real (respetivamente um número imaginário puro) se e somente se $z = \bar{z}$ (respetivamente $z = -\bar{z}$).
5. Designar, dado um número complexo z , por «módulo de z » a medida da distância, no plano complexo, entre a origem e o ponto afixo de z , representá-lo por « $|z|$ », justificar que se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que o módulo de um número complexo estende a noção de módulo de um número real e que se tem a equivalência $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
6. Provar, dados pontos A e B afijos respetivamente dos números complexos z_1 e z_2 , que $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$.
7. Justificar, dados números complexos z e w , que $|zw| = |z||w|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ e $|z + w| \leq |z| + |w|$, designando esta última propriedade por «desigualdade triangular».
8. Designar, dado um número complexo z não nulo, por «inverso de z » um número z' tal que $zz' = 1$, justificar que existe e é único, representá-lo por « $\frac{1}{z}$ » e provar que o inverso de z é igual a $\frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.
9. Designar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, o «quociente de w por z » como o número complexo pelo qual se tem de multiplicar z para obter w , representá-lo por « $\frac{w}{z}$ » e justificar que $\frac{w}{z} = w \times \frac{1}{z}$.
10. Justificar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, que $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$ e que $\overline{\left(\frac{w}{z} \right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

4. Definir a forma trigonométrica de um número complexo

1. Designar um número complexo z de módulo 1 por «unitário» e justificar, dado um número complexo z , que z é unitário se e somente se existir um número real α tal que $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, designando α , nesse caso, por um «argumento de z » e justificar que dois argumentos de um mesmo número complexo diferem por $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Justificar, dados números complexos unitários $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que $z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ e que $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$, representar, para $\theta \in \mathbb{R}$, o número complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ por « $e^{i\theta}$ », designando esta expressão por «exponencial complexa de $i\theta$ » e motivar esta notação observando que se tem $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ e $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$.
3. +Reconhecer, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único número positivo r e um único número complexo unitário w tais que $z = rw$, que $r = |z|$ e se θ for um argumento de w , designar igualmente θ por um «argumento de z », interpretando geometricamente r e θ .
4. Designar a representação de um número complexo $z \neq 0$ na forma $|z|e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z , por «forma trigonométrica» (ou «forma polar») de z , e justificar, dados números complexos não nulos z e z' de argumentos respetivamente iguais a θ e a θ' , que $z = z'$ se e somente se $|z| = |z'|$ e existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \theta' + 2k\pi$, interpretando geometricamente esta equivalência.
5. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único argumento de z no intervalo $] -\pi, \pi]$, designá-lo por «argumento principal de z » e representá-lo por « $\text{Arg}(z)$ ».
6. Justificar, dado um número real θ , que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $e^{i\theta}z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo generalizado de medida θ .
7. Justificar, dado um número complexo $z_0 \neq 0$, que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $z_0 z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo orientado de medida θ , argumento de z_0 , composta com a homotetia de centro O e razão $|z_0|$.
8. Justificar que θ é um argumento do número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, se e somente se $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e que, nesse caso, se $a \neq 0$, $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
9. Provar, dado $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ e designar este resultado por «Fórmula de De Moivre».

5. Extrair raízes n -ésimas de números complexos

1. +Reconhecer, dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, que a equação $z^n = w$ tem exatamente as n soluções $z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde α é um argumento de w , e designar estes números por «raízes n -ésimas de w » ou «raízes de ordem n de w ».
2. Reconhecer, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$) que se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, as raízes da equação $az^2 + bz + c = 0$, em $\mathbb{C}$, são dadas por $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ e $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo números complexos e as respectivas propriedades algébricas.
2. +Resolver problemas envolvendo a representação, por números complexos, de isometrias do plano (translações, reflexões e rotações) ou outras transformações do plano, como as homotetias.
3. +Resolver problemas envolvendo a representação trigonométrica de números complexos.
4. +Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos.
5. +Resolver problemas envolvendo equações da forma $z^n = w$, ($n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$) e vértices de polígonos regulares enquanto afijos de números complexos.
6. +Resolver problemas envolvendo polinómios de segundo grau.

Apresenta-se, aqui, o número de aulas previstas no Programa (178, no total) para cada domínio (isto é, para cada tema do Manual). Nestes tempos não se incluem as aulas dedicadas a testes, avaliações, visitas de estudo ou outros extras que possam surgir.

Trigonometria e Funções Trigonométricas	38 aulas
Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos	
Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados	
Funções trigonométricas	
Geometria Analítica	32 aulas
Declive e inclinação de uma reta. Produto escalar	
Sucessões	44 aulas
Generalidades sobre sucessões	
Princípio de indução matemática. Progressões aritméticas e progressões geométricas	
Limites de sucessões	
Funções Reais de Variável Real	56 aulas
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	
Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	
Estatística	18 aulas
Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação	
178 aulas	

Disponibiliza-se, em seguida, uma planificação semanal para o 1.º período. As planificações para os restantes períodos serão disponibilizadas aos professores adotantes do projeto MVT 11 em setembro de 2016.

Planificação semanal do 1.º período

1.º Período | 13 a 14 semanas

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Revisão dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Fórmulas fundamentais da trigonometria (ângulos agudos). Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°. Lei dos senos. Seno de um ângulo reto e seno de um ângulo obtuso. Lei dos cossenos. Cosseno de um ângulo reto e cosseno de um ângulo obtuso.	Páginas 10 a 13 Páginas 14 a 16 Páginas 17 a 19	Resolução – Todos os exercícios de «Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos» Simulador – Geogebra: Lei dos senos Simulador – Geogebra: Lei dos cossenos
2. ^a	Resolução de exercícios Teste 5+5 n.º 1 Ângulos orientados. Rotação segundo um ângulo orientado. Ângulos generalizados. Rotação segundo um ângulo generalizado.	Páginas 20 a 23 Páginas 24 e 25 Páginas 32 a 36	Animação – Resolução do exercício 13 (página 22) Resolução – Todos os exercícios de «Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados» Simulador – Geogebra: Representação de um ângulo generalizado
3. ^a	Circunferência trigonométrica. Seno e cosseno de um ângulo orientado. Fórmula fundamental da trigonometria (ângulos orientados). Sinal do seno e do cosseno de um ângulo orientado. Tangente de um ângulo orientado. Sinal da tangente de um ângulo orientado. Seno, cosseno e tangente de um ângulo generalizado. Fórmulas fundamentais (ângulo generalizado). Linhas trigonométricas	Páginas 36 a 40 Páginas 41 e 42 Páginas 43 a 45	

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
4. ^a	O radiano como unidade de amplitude. Graus e radianos. Razões trigonométricas de ângulos cujas amplitudes são expressas em radianos. Redução ao primeiro quadrante. Equações trigonométricas.	Páginas 46 a 51 Páginas 52 e 53 Páginas 54 a 56 Páginas 57 a 65	Simulador – Geogebra: Noção de radiano Simulador – Geogebra: O radiano e o perímetro da circunferência Simulador – Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $180^\circ - \alpha$ Simulador – Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $180^\circ + \alpha$ Simulador – Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $90^\circ + \alpha$ Simulador – Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $-\alpha$ Simulador – Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $90^\circ - \alpha$ Simulador – Geogebra: Equações do tipo $\text{sen}(x) = b$ Animação – Resolução do exercício 100 e) (página 72) Animação – Resolução do exercício 109 (página 73)
5. ^a	Teste 5+5 n.º 2 Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Domínio. Funções periódicas. Período fundamental das funções seno, cosseno e tangente. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente. Estudo das funções seno, cosseno e tangente.	Páginas 66 e 67 Páginas 74 a 76 Páginas 77 a 83	Resolução – Todos os exercícios de «Funções trigonométricas» Simulador – Geogebra: Período da função seno Simulador – Geogebra: Período da função cosseno Simulador – Geogebra: Período da função tangente Simulador – Geogebra: Gráficos das funções seno, cosseno e tangente

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
6. ^a	Resolução de exercícios. Funções trigonométricas inversas. Caça aos erros.	Páginas 84 a 94 Páginas 95 a 106 Página 107	Animação – Resolução do exercício 128 (página 112) Animação – Resolução do exercício 134 (página 114)
7. ^a	Teste 5+5 n.º 3 Consolidação de conceitos. 1.ª Prova de avaliação	Páginas 108 e 109 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 116 a 125)	Resolução – Todos os exercícios de «+ Exercícios propostos» - Tema 1
8. ^a	Declive e inclinação de uma reta. Produto escalar de vetores (definição). Ângulo de vetores. Expressão do produto escalar de vetores em função da norma e do ângulo dos vetores.	Páginas 128 a 131 Páginas 132 e 133 Páginas 134 a 137	Resolução – Todos os exercícios de «Declive e inclinação de uma reta. Produto escalar» Simulador – Geogebra: O declive de uma reta não vertical é a tangente da sua inclinação Simulador – Geogebra: Interpretação geométrica do produto escalar Simulador – Geogebra: Ângulo de vetores no plano
9. ^a	Vetores perpendiculares. Propriedades do produto escalar. Resolução de exercícios e problemas. Teste 5+5 n.º 4	Página 137 Páginas 138 e 139 Páginas 140 e 141 Páginas 142 e 143	Animação – Resolução do exercício 53 (página 174)

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
10. ^a	Produto escalar de vetores a partir das coordenadas em referencial O.n. Relação entre declives de retas perpendiculares. Lugares geométricos. Resolução de exercícios e problemas.	Páginas 144 a 145 Página 146 Páginas 147 a 149 Páginas 150 e 151	Simulador – Geogebra: Relação entre o declive de retas perpendiculares no plano Simulador – Geogebra: O produto escalar na definição da circunferência
11. ^a	Consolidação. Teste 5+5 n.º 5 Vetor normal a um plano. Equações cartesianas de planos.	Páginas 152 e 153 Páginas 154 a 160	Animação – Resolução do exercício 28 (página 158)
12. ^a	Vetor paralelo a um plano. Equações vectoriais e equações paramétricas de planos. Resolução de problemas. Caça aos erros Teste 5+5 n.º 6 Consolidação	Páginas 160 a 162 Páginas 163 a 164 Página 165 Páginas 166 e 167 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 179 a 186)	Animação – Resolução do exercício 38 (página 164) Resolução – Todos os exercícios de «+ Exercícios propostos» – Tema 2 Animação – Resolução do exercício 100 (página 183) Animação – Resolução do exercício 109 (página 186)
13. ^a	2.ª Prova de avaliação Majorantes e minorantes de um conjunto. Generalidades sobre sucessões.		

Fim do 1.º período.

Planificação semanal do 2.º período

2.º Período | 12 semanas

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Revisão das generalidades sobre sucessões. Teste 5+5 n.º 1 Princípio de indução matemática.	Páginas 9 a 17 Páginas 18 e 19 Páginas 24 a 28	Resolução – Todos os exercícios de «Generalidades sobre sucessões» Animação – Resolução do exercício 30 (página 22) Resolução – Todos os exercícios de «Princípio de indução matemática. Progressões aritméticas e progressões geométricas»
2. ^a	Sucessão definida por recorrência. Progressões aritméticas. Conceito. Termo geral. Relação entre dois quaisquer termos.	Páginas 29 a 31 Páginas 32 a 36	Animação – Resolução do exercício 117 (página 56)
3. ^a	Soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética. Progressões geométricas. Conceito. Termo geral. Relação entre dois quaisquer termos. Soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica. Resolução de exercícios e problemas. Teste 5+5 n.º 2	Páginas 37 a 40 Páginas 41 a 45 Páginas 46 a 49 Páginas 50 e 51	Animação – Resolução do exercício 140 (página 58)
4. ^a	Conceito de sucessão convergente. Sucessão divergente. Unicidade do limite. Convergência e limitação. Limites infinitos. Convergência do produto de uma sucessão limitada por uma sucessão convergente para 0.	Páginas 59 a 63 Páginas 64 a 68	Resolução – Todos os exercícios de «Limites de sucessões» Simulador – Geogebra: Limite de uma sucessão convergente Animação – Resolução do exercício 148 (página 61) Simulador – Geogebra: Curva de Von Koch

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
	Limite de sucessões de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($\forall n \in \mathbb{N}, cn+d \neq 0$)	Páginas 69 a 71	
5. ^a	Limite de uma sucessão constante. Limite de sucessões de termo geral $u_n = n^q$. Operações com limites (sucessões convergentes). Teste 5+5 n.º 3 Operações com limites (reais e infinitos).	Páginas 71 a 75 Páginas 76 e 77 Páginas 78 a 82	
6. ^a	Indeterminações. Resolução de exercícios e problemas. Caça aos erros. Teste 5+5 n.º 4	Páginas 83 a 90 Páginas 91 e 93 Página 94 e 95	Simulador – Geogebra: Floco de Von Koch
7. ^a	Consolidação de conceitos. 3.ª Prova de avaliação	O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 103 a 110)	Resolução – Todos os exercícios de «+ Exercícios propostos» - Tema 3 Animação – Resolução do exercício 269 (página 108) Animação – Resolução do exercício 274 (página 109) Animação – Resolução do exercício 277 (página 109)
	Pontos aderentes a um conjunto de números reais.	Páginas 8 a 10	Resolução – Todos os exercícios de «Limites segundo Heine de funções reais de variável real»
8. ^a	Definição de limite segundo Heine. Limites infinitos, limites laterais e limites no infinito. Teste 5+5 n.º 1	Páginas 11 a 17 Páginas 18 a 25 Páginas 26 e 27	Simulador – Geogebra: Limite de uma função segundo Heine

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
9. ^a	Operações com limites. Funções racionais. Simplificação de frações. Operações com frações.	Páginas 28 a 33 Páginas 34 e 35 Páginas 36 e 37	
10. ^a	Indeterminações $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminações $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$. Produto de uma função limitada por uma que tende para 0. Mudança de variável. Consolidação de conceitos. Caça aos erros.	Páginas 37 a 40 Páginas 41 a 46 Página 47	
11. ^a	Teste 5+5 n.º 2 4.ª Prova de avaliação Continuidade de uma função num ponto. Funções contínuas. Teoremas sobre funções contínuas.	Páginas 48 e 49 Páginas 50 a 55	
12. ^a	Conceito de assíntota. Assíntotas verticais. Assíntotas horizontais e assíntotas não verticais. Resolução de exercícios e problemas.	Páginas 56 a 59 Páginas 60 a 67 Páginas 68 e 69	Simulador – Geogebra: Assíntota ou buraco? Simulador – Geogebra: Assíntotas não verticais Animação – Resolução do exercício 152a) (página 101)

Fim do 2.º período.

Planificação semanal do 3.º período

3.º Período | 7 semanas

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Revisões. Teste 5+5 n.º 3 Generalidades sobre funções racionais. Funções definidas por $h(x) = b + \frac{k}{x - c}$	Páginas 70 e 71 Páginas 72 a 77	Simulador – Geogebra: Funções racionais do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$, com $a \neq 0$ Simulador – Geogebra: Funções racionais do tipo $f(x) = b + \frac{a}{x - c}$, com $a \neq 0$ Animação – Resolução do exercício 102c) (página 82)
2. ^a	Resolução de equações e inequações fracionárias. Resolução de exercícios e problemas. Teste 5+5 n.º 4	Páginas 78 a 83 Páginas 84 a 89 Páginas 90 e 91	
3. ^a	Taxa média de variação. Derivada de uma função num ponto. Reta tangente ao gráfico de uma função num ponto. Introdução à cinemática do ponto. Função derivada. Teste 5+5 n.º 5	Páginas 107 a 112 Páginas 113 a 121 Páginas 122 e 123	Resolução – Todos os exercícios de «Derivadas de funções reais de variável real e aplicações» Simulador – Geogebra: Interpretação geométrica da taxa média de variação Simulador – Geogebra: Taxa instantânea de variação Simulador – Geogebra: Interpretação geométrica da taxa de variação Simulador – Geogebra: Função derivada
4. ^a	Diferenciabilidade e continuidade. Regras de derivação. Teste 5+5 n.º 6	Páginas 124 a 137 Páginas 138 e 139	Simulador – Geogebra: Derivabilidade e continuidade Animação – Resolução do exercício 225 (página 137)

Semanas	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
5. ^a	Monotonia, extremos e derivada. Teorema de Lagrange. Aplicações.	Páginas 140 a 145	Simulador – Geogebra: Relação entre a monotonia de f e o sinal da sua derivada Simulador – Geogebra: Relação entre os extremos de f e os zeros da sua derivada Simulador – Geogebra: Primeira derivada Simulador – Geogebra: Quadro de variação de uma função
6. ^a	Resolução de exercícios e problemas. Caça aos erros! Teste 5+5 n.º 7 Consolidação de conceitos. 5.ª Prova de avaliação	Páginas 146 a 149 Páginas 150 e 151 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 161 a 171)	Resolução – Todos os exercícios de «+ Exercícios propostos» - Tema 4 Animação – Resolução do exercício 323c) (página 165) Animação – Resolução do exercício 327 (página 166)
7. ^a	Variável explicativa e variável resposta. Amostras bivariadas. Representação gráfica. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação linear.	Páginas 174 a 176 Páginas 177 a 189	Resolução – Todos os exercícios de «Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação» Simulador – Geogebra: Diagrama de dispersão e centro de gravidade Simulador – Geogebra: Variação da correlação e do coeficiente de correlação em função dos dados Simulador – Geogebra: Variação da reta de regressão linear em função dos dados. <i>Outliers</i> Animação – Resolução do exercício 13 (página 194) Animação – Resolução do exercício 15 (página 195) Animação – Resolução do exercício 18 (página 196)
	Teste 5+5 n.º 8 6.ª Prova de avaliação (Estatística) Avaliação do trabalho desenvolvido.	Páginas 190 e 191	

Fim do 3.º período.

Guia de exploração de recursos multimédia

O **2D AULA DIGITAL** é uma ferramenta inovadora que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto *MVT 11* através das novas tecnologias. Permite o acesso a um vasto conjunto de recursos multimédia associados ao Manual:

- Animações (Resoluções passo a passo de exercícios)
- Simuladores (GeoGebra[®])
- Resoluções projetáveis de exercícios

Apresenta-se aqui uma listagem de todos os recursos multimédia que integram o projeto *MVT 11* em **2D AULA DIGITAL**. Apresentam-se ainda algumas sugestões de exploração dos recursos multimédia.

Listagem geral dos recursos multimédia de MAT 11

Tipo de recurso

Sugestões de exploração

Resoluções projetáveis de exercícios

3. (B) **MAT 11**

A figura seguinte representa um retângulo $[ABCD]$ tal que $\overline{AD} = 3\overline{AB}$.



Designa-se por E o ponto médio de $[AB]$ e por F o ponto de interseção das diagonais do retângulo.

Seja $x = \widehat{AE}$. Então, $\widehat{EF} = 3x$.

Tenhamos $\frac{\alpha}{2} = \frac{\widehat{AE}}{\widehat{EF}} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$.

Portanto, $\frac{\alpha}{2} = 18,433^\circ$.

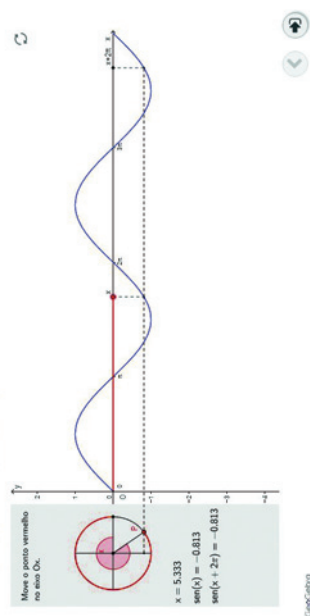
Logo, $\alpha = 37^\circ$.

INÍCIO **FINIS**

Resoluções projetáveis de **todos os exercícios do Manual e Caderno de Exercícios**, agrupadas por capítulo.

Simuladores (GeoGebra®)

Período da função seno



Recursos interativos que permitem uma **exploração dinâmica** de conteúdos trabalhados em todos os temas.

* Ver a listagem dos simuladores existentes em **20 AULA DIGITAL**, nas páginas 78 e 79.

Opção 1

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, em sala de aula.
- Projetar a resolução do exercício.

Opção 2

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, como trabalho para casa.
- Projetar a resolução do exercício na aula seguinte.

Opção 3

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, como trabalho para casa.
- Enviar a resolução do exercício aos alunos por email, para que possam verificar se o resolveram bem.

Opção 1

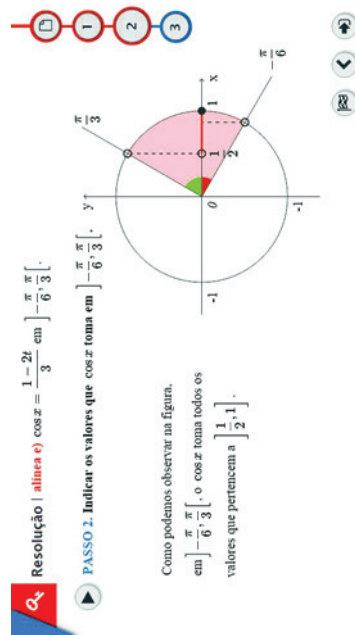
- Explorar o simulador com os alunos, propondo que o manipulem mediante um objetivo proposto pelo professor.

Opção 2

- Propor aos alunos um determinado objetivo como trabalho para casa, solicitando o envio de um print por email a comprovar a correta execução do objetivo proposto.

Exemplo: No simulador «GeoGebra: Período da função seno», solicitar ao aluno que mova o ponto vermelho no eixo Ox e que compare o valor da ordenada do ponto de abscissa x com o valor da ordenada do ponto de abscissa $x + 2\pi$, e concluir acerca do resultado obtido.

Animações (Resoluções passo a passo de exercícios)



Recursos que apresentam **as resoluções, passo a passo, de alguns exercícios do Manual**. São compostos por diversas seções. A primeira apresenta o enunciado do exercício e as restantes as diferentes etapas da resolução. Estes recursos permitem uma exploração interativa dos exercícios, rentabilizando o tempo em sala de aula.

* Apresenta-se nas páginas 80 e 81 uma lista das animações existentes em

20 AULA DIGITAL

Opção 1

- Propor que os alunos resolvam o exercício no caderno.
- Apresentar a resolução do exercício, explorando cada um dos passos que compõem a animação.

Opção 2

- Apresentar o enunciado.
- Apresentar cada um dos passos, propondo que o aluno vá executando a respetiva tarefa. O professor só passa para o passo seguinte quando a turma terminar o passo anterior.

Opção 3

- Apresentar o enunciado.
- Explorar cada um dos passos com os alunos. Para assegurar a máxima concentração dos alunos, estes devem focar-se em cada um dos passos, debatendo-o oralmente.
- Apresentar a resolução do passo.

LISTAGEM DOS SIMULADORES EXISTENTES EM **20** AULA DIGITAL

Volume 1	
• Geogebra: Lei dos cossenos (pág. 17)	• Geogebra: Período da função seno (pág. 75)
• Geogebra: Representação de um ângulo generalizado (pág. 34)	• Geogebra: Período da função cosseno (pág. 75)
• Geogebra: Noção de radiano (pág. 46)	• Geogebra: Período da função tangente (pág. 75)
• Geogebra: O radiano e o perímetro da circunferência (pág. 49)	• Geogebra: Gráficos das funções seno, cosseno e tangente (pág. 76)
• Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $180^\circ - \alpha$ (pág. 54)	• Geogebra: O declive de uma reta não vertical é a tangente da sua inclinação (pág. 131)
• Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $180^\circ + \alpha$ (pág. 54)	• Geogebra: Interpretação geométrica do produto escalar (pág. 133)
• Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $90^\circ + \alpha$ (pág. 54)	• Geogebra: Ângulo de vetores no plano (pág. 134)
• Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $- \alpha$ (pág. 55)	• Geogebra: Relação entre o declive de retas perpendiculares no plano (pág. 146)
• Geogebra: Razões trigonométricas de α e de $90^\circ - \alpha$ (pág. 55)	• Geogebra: O produto escalar na definição da circunferência (pág. 149)
• Geogebra: Equações do tipo $\sin x = k$ (pág. 57)	
	Volume 2
	• Geogebra: Limite de uma sucessão convergente (pág. 59)

LISTAGEM DOS SIMULADORES EXISTENTES EM 20 AULA DIGITAL

Geogebra: Curva de Von Koch (pág. 66)	Geogebra: Função derivada (pág. 119)
Geogebra: Floco de Von Koch (pág. 87)	Geogebra: Derivabilidade e continuidade (pág. 124)
Volume 3	
Geogebra: Limite de uma função segundo Heine (pág. 13)	Geogebra: Relação entre a monotonia de f e o sinal da sua derivada (pág. 141)
Geogebra: Assíntota ou buraco? (pág. 56)	Geogebra: Relação entre os extremos de f e os zeros da sua derivada (pág. 142)
Geogebra: Assíntotas não verticais (pág. 60)	Geogebra: Primeira derivada (pág. 144)
Geogebra: Funções racionais do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$, com $a \neq 0$ (pág. 74)	Geogebra: Quadro de variação de uma função (pág. 144)
Geogebra: Funções racionais do tipo $f(x) = b + \frac{a}{x-c}$, com $a \neq 0$ (pág. 75)	Geogebra: Diagrama de dispersão e centro de gravidade (pág. 179)
Geogebra: Interpretação geométrica da taxa média de variação (pág. 109)	Geogebra: Variação da correlação e do coeficiente de correlação em função dos dados (pág. 184)
Geogebra: Taxa de variação instantânea (pág. 112)	Geogebra: Variação da reta de regressão linear em função dos dados. <i>Outliers</i> (pág. 187)
Geogebra: Interpretação geométrica da taxa de variação (pág. 112)	

Volume 1	Volume 2
Resolução do exercício 13 (página 22)	Resolução do exercício 30 (página 22)
Resolução do exercício 100 e) (página 72)	Resolução do exercício 117 (página 56)
Resolução do exercício 109 (página 73)	Resolução do exercício 140 (página 58)
Resolução do exercício 128 (página 112)	Resolução do exercício 148 (página 61)
Resolução do exercício 134 (página 114)	Resolução do exercício 269 (página 108)
Resolução do exercício 28 (página 158)	Resolução do exercício 274 (página 109)
Resolução do exercício 38 (página 164)	Resolução do exercício 277 (página 109)
Volume 3	
Resolução do exercício 53 (página 174)	
Resolução do exercício 100 (página 183)	Resolução do exercício 102 c) (página 82)
Resolução do exercício 109 (página 186)	Resolução do exercício 152 a) (página 101)

- | |
|--|
| • Resolução do exercício 225 (página 137) |
| • Resolução do exercício 323 c) (página 165) |
| • Resolução do exercício 327 (página 166) |
| • Resolução do exercício 13 (página 194) |
| • Resolução do exercício 15 (página 195) |
| • Resolução do exercício 18 (página 196) |

Teste de Avaliação 1

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data ____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

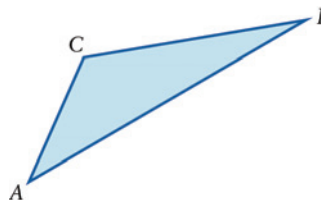
Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Considera o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que :

- $\overline{AB} = 5$
- $\overline{BC} = 3,5$
- $\hat{ACB} = 125^\circ$



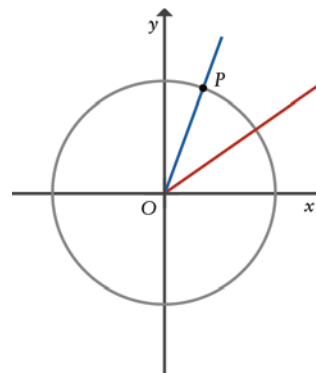
Qual é o valor da amplitude do ângulo ABC , em graus, arredondada às unidades?

- (A) 18° (B) 20° (C) 22° (D) 24°
2. De um certo ângulo agudo de amplitude x sabe-se que $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{sen} x = \sqrt{5}$.
- Qual é o valor de $\operatorname{tg} x$?
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
3. Em que quadrante está o lado extremidade do ângulo generalizado de amplitude -10 radianos, supondo que, como habitualmente, o lado origem coincide com o semieixo positivo Ox ?
- (A) $1.^\circ$ (B) $2.^\circ$ (C) $3.^\circ$ (D) $4.^\circ$
4. Seja α um número real. Sabe-se que $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) > 0$ e $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) > 0$.
A que quadrante pertence o ângulo de amplitude α radianos?
- (A) $1.^\circ$ (B) $2.^\circ$ (C) $3.^\circ$ (D) $4.^\circ$
5. Qual das equações seguintes é equivalente, em $\mathbb{R}$, à equação $\operatorname{sen} x = 0$?
- (A) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (B) $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (D) $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Na figura está representada a circunferência trigonométrica, o lado extremidade do ângulo generalizado de amplitude 395° e um ponto P tal que $\vec{OP}$ é o lado extremidade de um ângulo orientado de amplitude α .



- Determina, em graus, as amplitudes dos ângulos orientados que têm seno igual ao seno de 395° .
- Determina as amplitudes dos ângulos orientados cujo cosseno é menor do que o cosseno de 395° .
- Seja Q o ponto do eixo das abcissas com abcissa -2 . Mostra que $\overline{PQ} = \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$.

2. Mostra que, para qualquer amplitude α , em radianos, se tem:

$$\cos(\pi + \alpha) - 2 \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - 3\pi) + \cos(-\alpha) = \sin \alpha$$

3. Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = 10 - 2 \cos\left(\frac{2x+5\pi}{3}\right)$.

Resolve os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- Determina $f(\pi)$.
 - Determina as soluções da equação $f(x) = 11$ que pertencem ao intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.
 - Mostra que 3π é período da função f .
4. Seja a um número real. Considera a função real de variável real g definida por $g(x) = 2 \arcsen(x + a) + \frac{\pi}{3}$.
- Resolve os itens seguintes sem recorrer à calculadora.
- Determina o domínio e o contradomínio da função g , sendo $a = 1$.
 - Determina $g\left(\sin \frac{7\pi}{5} - a\right)$.
 - Determina o valor de a para o qual 2 é zero da função g .

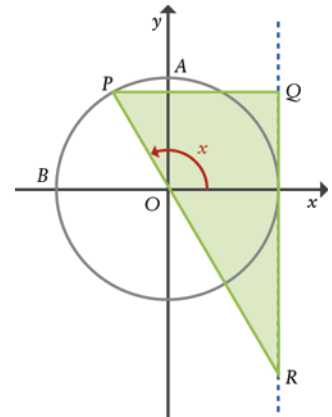
5. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro na origem e raio 1.

O ponto A tem coordenadas $(0, 1)$ e o ponto B tem coordenadas $(-1, 0)$.

O ponto P desloca-se no arco AB , nunca coincidindo com A nem com B .

Para cada posição do ponto P , sabe-se que:

- o ponto Q pertence à reta de equação $x = 1$ e a reta PQ é paralela ao eixo Ox ;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$;
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade é a semirreta $\vec{OP}$.



a) Mostra que a área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α , por $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2}$.

b) Identifica, justificando, o valor de α para o qual o triângulo $[PQR]$ é isósceles e, para esse valor de α , determina o valor exato da área do triângulo $[PQR]$, sem recorrer à calculadora.

Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	1.a)	1.b)	1.c)	2.	3.a)	3.b)	3.c)	4.a)	4.b)	4.c)	5.a)	5.b)
10	10	10	10	10	16	10	14	15	10	15	10	10	10	10	15	15

Teste de Avaliação 2

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data ____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Num referencial o.n. xOy , considera os pontos $A(-1,3)$ e $B(4,0)$.

Qual é o valor da inclinação da reta AB , em radianos, arredondado às centésimas?

(A) $-0,64$ (B) $-0,54$ (C) $2,21$ (D) $2,60$

2. Num referencial o.n. xOy , considera a circunferência de equação $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Qual das equações seguintes define a reta tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(-2,0)$?

(A) $y = -2x - \frac{1}{2}$ (B) $y = -2x - 4$ (C) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ (D) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

3. Considera dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 1$.

Qual é o valor de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?

(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 12

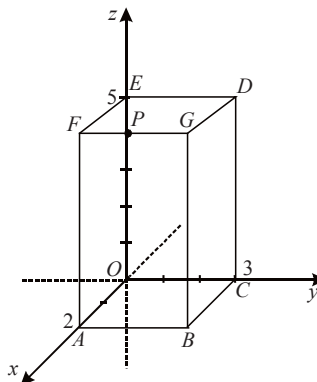
4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo retângulo $[OABCDEFG]$ e um ponto P que pertence à aresta $[FG]$ do paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 2;
- o vértice C pertence ao eixo Oy e tem ordenada 3;
- o vértice E pertence ao eixo Oz e tem cota 5;
- os vetores $\vec{OP}$ e $\vec{AC}$ são perpendiculares.

Qual é a ordenada do ponto P ?

(A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 2



5. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x - 4z - 1 = 0$ e o ponto $A(1,0,2)$.

Qual das equações seguintes define um plano β a que pertence o ponto A e é perpendicular ao plano α ?

(A) $4x - 2z = 0$ (B) $4x + 2z = 0$ (C) $2x + y - z = 0$ (D) $2x - y + z - 4 = 0$

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

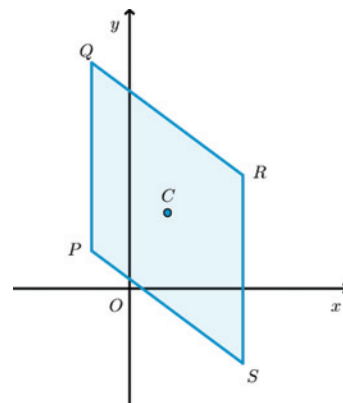
1. Considera, num referencial o.n. xOy , o losango $[PQRS]$, que tem centro no ponto C .

Sabe-se que:

- o ponto Q tem coordenadas $(-1, 6)$;
- o ponto S tem coordenadas $(3, -2)$;
- a reta PQ é paralela ao eixo das ordenadas.

Determina:

- $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QC}$;
- a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[QS]$;
- as coordenadas dos pontos P e R .



2. Considera, num referencial o.n. xOy , um triângulo $[ABC]$, retângulo em A .

Seja L o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

- Justifica que o ponto A pertence a L .
- Identifica o lugar geométrico L .
- Admite, agora, que o ponto A tem coordenadas $(0, 2)$ e o ponto B tem coordenadas $(5, 0)$.

Determina as coordenadas do ponto C , sabendo que pertence ao primeiro quadrante e que o triângulo $[ABC]$ tem área 29.

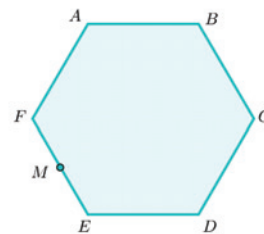
3. Num espaço em que está fixado um referencial o.n. $Oxyz$, considera uma pirâmide quadrangular regular de base $[ABCD]$ e vértice V . Seja I o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

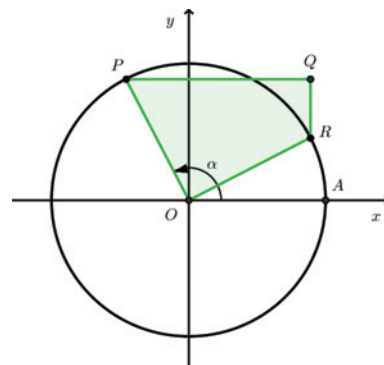
- o vetor $\overrightarrow{AI}$ tem coordenadas $(-2, 1, 1)$;
- o vetor $\overrightarrow{AV}$ tem coordenadas $(-3, 3, 6)$;
- o ponto I tem coordenadas $(1, 2, -3)$.

- Determina $\widehat{VAI}$. Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.
- Mostra que o plano que contém a base da pirâmide é definido pela equação $x - 2y - 5z - 12 = 0$.
- Determina o volume da pirâmide.

4. O hexágono representado na figura é regular. Seja a a medida do comprimento do seu lado e seja M o ponto médio do lado $[EF]$.
Mostra que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}a^2$.



5. Na figura está representada a circunferência trigonométrica num referencial o.n. xOy . O ponto A tem coordenadas $(1, 0)$ e o ponto P pertence à circunferência e ao segundo quadrante.
Para cada posição do ponto P , seja:



- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$ a amplitude do ângulo AOP ;
- R o ponto da circunferência do primeiro quadrante tal que ROP é um ângulo reto;
- Q o ponto que tem ordenada igual à do ponto P e abscissa igual à do ponto R ;
- f a função que faz corresponder a cada valor de α o perímetro do quadrilátero $[OPQR]$.

a) Mostra que $f(\alpha) = 2 + 2 \sin \alpha$.

b) Determina o valor de α para o qual o perímetro do quadrilátero $[OPQR]$ é igual a $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, sem recorrer à calculadora.

Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	1.a)	1.b)	1.c)	2.a)	2.b)	2.c)	3.a)	3.b)	3.c)	4.	5.a)	5.b)
10	10	10	10	10	10	15	10	10	10	15	15	15	10	15	15	10

Teste de Avaliação 3

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data ____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Acerca de uma sucessão (a_n) sabe-se que é decrescente e que o 3.º termo é igual a -1 .

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (a_n) ?

(A) $\frac{n-5}{2}$ (B) $\frac{2}{3n-11}$ (C) $\frac{(-1)^n - 3n}{2}$ (D) $\frac{1-n}{2}$

2. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão r . Sabe-se que $u_{n+1} = 8 + u_{n+5}$.

Qual é o valor de r ?

(A) -8 (B) -2 (C) 2 (D) 8

3. De uma progressão geométrica (v_n) , monótona, sabe-se que $v_4 = 32$ e que $v_8 = 8192$.

Qual é o quinto termo da sucessão?

(A) 64 (B) 128 (C) 256 (D) 512

4. Considera as sucessões (a_n) , (b_n) , (c_n) e (d_n) definidas por:

$$a_n = \frac{1-6n}{3} \quad b_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \leq 100 \\ \frac{2n + (-1)^n}{n} & \text{se } n > 100 \end{cases} \quad d_n = \frac{6n+1}{3n+2}$$

Qual destas sucessões **não** é convergente para 2?

(A) (a_n) (B) (b_n) (C) (c_n) (D) (d_n)

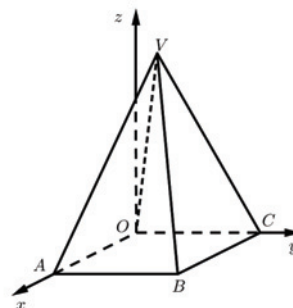
5. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[OABCV]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 4;
- o vértice C pertence ao eixo Oy e tem ordenada 4;
- o vértice V tem cota positiva.

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto dos valores que a cota do ponto V pode tomar de modo que o ângulo AVC seja obtuso?

(A) $]0, 4[$ (B) $]4, +\infty[$ (C) $]0, \sqrt{8}[$ (D) $] \sqrt{8}, +\infty[$



Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{1-3n}{n+1}$.
- a) Mostra que a sucessão (u_n) é decrescente.
- b) Prova, usando a definição, que $\lim u_n = -3$.
- c) Determina o número de termos da sucessão (u_n) que não pertencem ao intervalo $] -3,001; -2,999[$.
- d) Justifica que a sucessão é limitada e indica o conjunto dos seus minorantes e o conjunto dos seus majorantes.

2. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definida por $u_n = \frac{1-2n}{3}$ e $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{3}$.

a) Prova que a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

b) Mostra que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{n^2}{3}$.

3. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} \right)$.

Prova, usando o método de indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{2n+4}$ e determina $\lim u_n$.

4. Sejam (u_n) , (v_n) e (w_n) as sucessões definidas por:

$$u_n = n + 3 \qquad v_n = (\sqrt{n} - n)(\sqrt{n} + n) \qquad \begin{cases} w_1 = -\frac{4}{9} \\ w_{n+1} = \frac{2w_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Determina $\lim \frac{v_n}{(u_n + n)^2}$ e $\lim (\sqrt{-v_n} - u_n)$.

b) Justifica que (w_n) é uma progressão geométrica e mostra que $w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

c) Define uma sucessão (a_n) tal que $\lim \frac{w_n}{a_n} = -\infty$.

5. Considera, em $\mathbb{R}$, a equação $\sin^4 x - \cos^4 x = 2(\sin x + 1)^2 + 1$.

a) Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

b) Determina as soluções da equação $\sin^4 x - \cos^4 x = 2(\sin x + 1)^2 + 1$ que pertencem ao intervalo $\left[-2\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, sem recorrer à calculadora.

Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	1.a)	1.b)	1.c)	1.d)	2.a)	2.b)	3.	4.a)	4.b)	4.c)	5.a)	5.b)
10	10	10	10	10	15	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	15

Teste de Avaliação 4

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data ____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Considera, em $\mathbb{R}$, o conjunto $S = \left\{ \frac{2n \times (-1)^n - n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$.

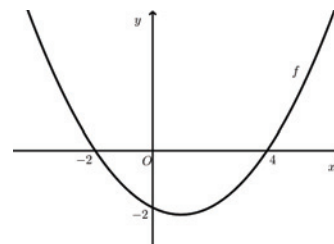
Qual dos seguintes números **não** é ponto aderente a S ?

- (A) -3 (B) 1 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. Seja f a função polinomial de grau 2 representada graficamente e seja (u_n) uma sucessão. Sabe-se que $\lim f(u_n) = -2$.

Qual das expressões seguintes pode ser termo geral da sucessão (u_n) ?

- (A) $\frac{1}{n} - 2$ (B) $-\frac{1}{n} - 2$ (C) $\frac{1}{n+2}$ (D) $\frac{n-2}{2}$



3. Seja (v_n) uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$ e primeiro termo diferente de zero e seja g a função definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

Qual é o limite da sucessão $(g(v_n))$?

- (A) 0 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $+\infty$

4. Seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = \frac{n\pi + 2}{2n}$ e seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Qual é o limite da sucessão $(f(x_n))$?

- (A) $-\infty$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 1 (D) $+\infty$

5. Na figura está representado um tabuleiro com 16 casas. Esse tabuleiro vai ser decorado do seguinte modo: na casa 1 é desenhado um círculo, na casa 2 são desenhados dois círculos, na casa 3 são desenhados quatro círculos, na casa 4 são desenhados oito círculos e assim sucessivamente, desenhando em cada casa o dobro dos círculos desenhados na casa anterior.

Quantos círculos vão ser desenhados, ao todo, no tabuleiro?

- (A) 32768 (B) 32769 (C) 65535 (D) 65536

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{2n-3}{5}$.

- a) Existem dois termos consecutivos de (u_n) cuja soma é igual 48. Determina as ordens desses termos.
b) Define a sucessão (u_n) por recorrência.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente

$$\text{e definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2 + 2}{2} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2-x} & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Determina:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

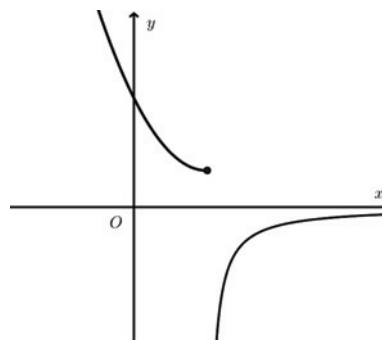
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{1-f(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x \times f(x))$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$



3. Calcula os limites seguintes.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 + x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x-1} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{3 - \sqrt{3-2x}}$

4. Numa certa região implementou-se um programa de recuperação de uma espécie animal em vias de extinção.

De acordo com as previsões, o número, em dezenas de indivíduos dessa espécie que existem na região, t meses depois de se ter dado início ao programa de recuperação, é dado, aproximadamente, por

$f(t) = \frac{4t+k}{10+t}$, em que k designa um número real positivo.

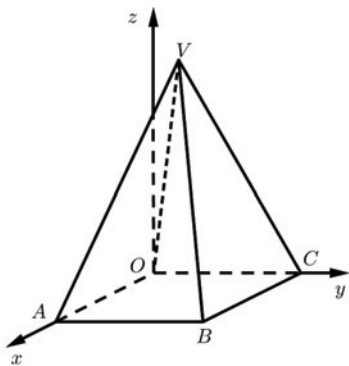
a) Determina $f(0)$ e interpreta o valor de k no contexto descrito.

b) Calcula $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ e interpreta o valor obtido no contexto descrito.

5. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[OABCV]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 4;
- o vértice C pertence ao eixo Oy e tem ordenada 4;
- o vértice V tem cota positiva.



a) Admite que o vértice V tem cota 6.

a₁) Determina a amplitude do ângulo VAB .

Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

a₂) Escreve uma equação cartesiana do plano definido pela reta AC e pelo ponto médio da aresta $[VB]$.

b) Determina a cota do vértice V , sabendo que o plano perpendicular à aresta $[VC]$ que passa no ponto C é definido pela equação $8x - 8y + 11z + 32 = 0$.

Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	3.a)	3.b)	3.c)	4.a)	4.b)	5.a ₁)	5.a ₂)	5.b)
10	10	10	10	10	15	10	9	16	15	15	15	10	10	10	15	10

Teste de Avaliação 5

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data ____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Seja k um número real e seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - (2+k)x + 2k}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Sabe-se que a função f é contínua. Qual é o valor de k ?

- (A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 2

2. Acerca de uma função f , de domínio $D = \mathbb{R}$, sabe-se que:

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 1) = 0$

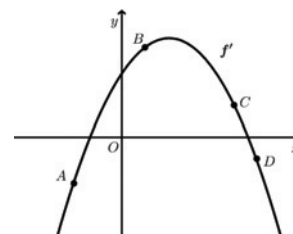
Qual das equações seguintes define uma reta que **não pode** ser assíntota ao gráfico de f ?

- (A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $y = 3$ (D) $y = 3x + 1$

3. Acerca de uma função diferenciável f sabe-se que $f'(0) = 2$. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x^2 + 6x}$?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

4. No referencial da figura está representada parte do gráfico da função f' , função derivada de uma função f . Os pontos A , B , C e D pertencem ao gráfico de f' e têm abscissas, respetivamente, a , b , c e d .
Em qual dos intervalos seguintes é que se pode garantir que a taxa média de variação de f é positiva?



- (A) $[a, b]$ (B) $[b, c]$ (C) $[c, d]$ (D) $[a, d]$

5. Seja f a função definida por $f(x) = x^3 + 1$ e seja g uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$. A reta de equação $y = -4x + 3$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1.

Qual é o valor de $(f \times g)'(1)$?

- (A) -9 (B) -10 (C) -11 (D) -12

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$.

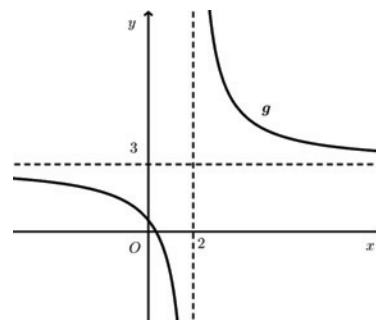
Resolve os itens seguintes por processos analíticos, sem recorrer à calculadora.

- a) Existem duas retas que são assíntotas ao gráfico de f . Determina equações dessas retas.
- b) Estuda a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos e indica o seu contradomínio. Na tua resposta deves apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que f é crescente;
 - o(s) intervalo(s) em que f é decrescente;
 - o(s) extremos que existam;
 - o contradomínio da função.

2. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$.

Por processos analíticos, sem recorrer à calculadora, mostra que o ponto do gráfico de f cujo produto das coordenadas é o menor possível pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

3. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{12x-4}{x^2-4}$ e seja g a função cujo gráfico é a hipérbole representada graficamente, que tem duas assíntotas paralelas aos eixos e interseja o eixo Oy no ponto de ordenada $\frac{1}{2}$.



- a) Escreve uma expressão de $g(x)$ na forma $b + \frac{a}{x-c}$ e mostra, em seguida, que a expressão que obtiveste é equivalente a $\frac{3x-1}{x-2}$.

- b) Identifica o número real k para o qual a equação $g(x) = k$ é impossível.

- c) Seja h a função definida por $h(x) = g(x-s) + t$, sendo s e t números reais.

Determina s e t de modo que a função h seja uma função ímpar.

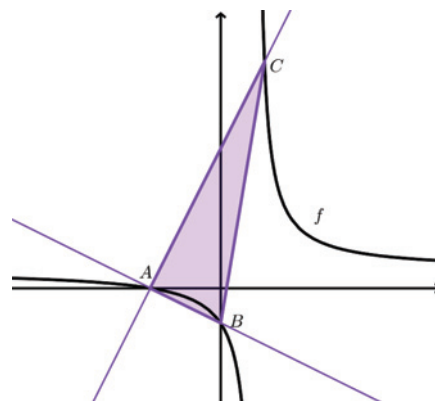
- d) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}$. Representa o conjunto A recorrendo à notação de intervalos de números reais.

4. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$.

Os pontos A e B são os pontos em que o gráfico da função f interseja, respetivamente, o eixo Ox e o eixo Oy e a reta r é a reta que passa em A e é perpendicular à reta AB .

Seja C o ponto de abscissa positiva que pertence à reta r e ao gráfico da função f .

Determina a área do triângulo $[ABC]$.



5. Seja f a função definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$. Recorrendo à calculadora, obtém e reproduz na tua folha de teste uma representação gráfica da função que te permita identificar os seus três zeros.
- Seja M o ponto do gráfico cuja abcissa é a média aritmética dos dois zeros negativos.
- Traça, recorrendo à calculadora, a reta tangente ao gráfico de f no ponto M e verifica que essa reta interseca o eixo Ox no outro zero da função.
- Seja agora N o ponto do gráfico cuja abcissa é a média aritmética de outros dois zeros da função. Mostra, por **processos analíticos**, que a reta tangente ao gráfico de f no ponto N interseca o eixo Ox no zero não considerado.

Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	1.a)	1.b)	2.	3.a)	3.b)	3.c)	3.d)	4.	5.
10	10	10	10	10	20	20	20	15	5	10	20	20	20

Teste de Avaliação 6

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Na resposta a cada um dos itens seguintes, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Na tabela seguinte estão registados dados relativos à idade (em meses) e à altura (em centímetros) de sete crianças de um infantário.

Idade	18	19	20	21	22	23	24
Altura	74,9	76,3	77,0	78,4	78,1	79,3	79,9

Considera a variável «idade» como explicativa e a variável «altura» como resposta e responde aos itens seguintes recorrendo apenas à calculadora para fazer cálculos.

- a) Determina a média das idades e a média das alturas da amostra.
- b) Representa num referencial cartesiano a nuvem de pontos $P_i(x_i, y_i)$.
- c) Tendo em consideração a alínea anterior, será razoável admitir a existência de uma associação linear forte entre estas duas variáveis? Justifica.
- d) Determina o coeficiente de correlação linear (arredondamento às centésimas). Confirma a resposta dada na alínea anterior? Justifica.
- e) Determina a equação reduzida da reta de mínimos quadrados. Apresenta os parâmetros da equação arredondados às décimas.
- f) Representa a reta de mínimos quadrados no referencial em que representaste a nuvem de pontos.

2. O Dr. Valente aquece a sua casa com gás natural e tem registado as temperaturas exteriores médias e os consumos de gás em alguns meses, para tentar estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela seguinte, reproduzem-se os registos das temperaturas (em graus Celsius) e dos volumes de gás consumido (em metros cúbicos).

Meses	Outubro	Novembro	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Temperatura	16,1	12,4	8,9	10,1	12,8	13,2
Volume de gás	0,01	0,10	0,26	0,19	0,09	0,05

- a) De acordo com o objetivo do Dr. Valente, qual deve ser a variável explicativa? Justifica.
- b) Determina a média das temperaturas médias e a média dos volumes de gás consumidos.
- c) Recorrendo a uma calculadora, obtém a nuvem de pontos correspondente a estes dados e a equação reduzida da reta de mínimos quadrados. Apresenta os parâmetros da equação com quatro casas decimais.
- d) Seja C o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$. Qual é o desvio vertical de C em relação à reta de mínimos quadrados?
- e) Seja P o ponto de coordenadas $(8,9; 0,26)$. Determina o desvio vertical deste ponto em relação à reta de mínimos quadrados e determina a soma dos desvios dos restantes pontos da nuvem em relação a essa reta.
- f) O Dr. Valente perdeu o registo do consumo em dezembro, mas sabe que a temperatura média exterior nesse mês foi $10,3^\circ\text{C}$. Recorrendo à equação da reta de mínimos quadrados, determina qual deve ter sido o consumo nesse mês.

Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

Apresenta o valor em m^3 arredondado às centésimas.

Cotações

1.a)	1.b)	1.c)	1.d)	1.e)	1.f)	2.a)	2.b)	2.c)	2.d)	2.e)	2.f)
15	20	10	20	20	15	10	15	20	15	20	20

Teste de Avaliação 1

Grupo I

1. (B)

$$\text{Tem-se: } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{3,5} = \frac{\sin 125^\circ}{5} \Leftrightarrow \sin A = \frac{3,5 \times \sin 125^\circ}{5}$$

Portanto, $\widehat{BAC} \approx 35^\circ$, donde vem $\widehat{ABC} \approx 180^\circ - (125^\circ + 35^\circ) = 20^\circ$.

2. (D)

$$\text{Tem-se: } \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} + \sin x = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sin x = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Daqui vem: } \frac{1}{5} + \cos^2 x = 1, \text{ pelo que } \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Portanto, } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}.$$

3. (B)

Como $3\pi \approx 9,42$, vem que $10 \approx 3\pi + 0,58$, pelo que $-10 \approx -3\pi - 0,58$.

Assim, -10 radianos corresponde a uma volta e meia, em sentido negativo, acrescida de uma rotação de amplitude inferior a $\frac{\pi}{2}$ radianos, também em sentido negativo.

Portanto, o lado extremidade do ângulo de amplitude -10 radianos está no segundo quadrante.

4. (B)

Tem-se:

$$\sin(\pi - \alpha) > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha > 0 \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) > 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$$

Portanto, o ângulo de amplitude α radianos pertence ao segundo quadrante.

5. (C)

$$\text{Tem-se } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Grupo II

1.

- a) A amplitude, em graus, de um ângulo orientado é um valor diferente de zero e compreendido entre -360° e 360° .

Portanto, um ângulo orientado que tem seno igual ao seno de 395° é o ângulo de amplitude 35° ($395^\circ - 360^\circ$).

Tem-se: $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$, $35^\circ - 360^\circ = -325^\circ$ e $145^\circ - 360^\circ = -215^\circ$.

Assim, os ângulos orientados que tem seno igual ao seno de 395° são os ângulos de amplitudes 35° , 145° , -215° e -325° .

- b) Os ângulos orientados cujo cosseno é menor do que o cosseno de 395° são os ângulos cuja amplitude está estritamente compreendida entre 35° e 325° e os ângulos cuja amplitude está estritamente compreendida entre -325° e -35° .

- c) Tem-se $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $Q(-2, 0)$.

$$\begin{aligned}\text{Portanto, } \overline{PQ} &= \sqrt{(\cos \alpha + 2)^2 + (\sin \alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 4 + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{1 + 2 \cos \alpha + 4} = \sqrt{5 + 2 \cos \alpha}\end{aligned}$$

2. $\cos(\pi + \alpha) - 2 \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - 3\pi) + \cos(-\alpha) =$

$$= -\cos \alpha - 2 \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2} + 4\pi\right) + \sin(\alpha - 3\pi + 4\pi) + \cos \alpha =$$

$$= -2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha + \pi) = 2 \sin \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha$$

3.

a) $f(\pi) = 10 - 2 \cos\left(\frac{2\pi + 5\pi}{3}\right) = 10 - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 10 - 2 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 10 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 10 - 2 \times \frac{1}{2} = 9$

b) $f(x) = 11 \Leftrightarrow 10 - 2 \cos\left(\frac{2x + 5\pi}{3}\right) = 11 \Leftrightarrow -2 \cos\left(\frac{2x + 5\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2x + 5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2x + 5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2x + 5\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5\pi = 2\pi + 6k\pi \vee 2x + 5\pi = -2\pi + 6k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -3\pi + 6k\pi \vee 2x = -7\pi + 6k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + 3k\pi \vee x = -\frac{7\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{7\pi}{2} \quad \left(-\frac{7\pi}{2} \notin [-2\pi, 2\pi]\right)$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2}$$

Não existem mais soluções em $[-2\pi, 2\pi]$.

Resposta: $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

c) Tem-se, para qualquer número real x :

$$\begin{aligned} f(x+3\pi) &= 10 - 2\cos\left(\frac{2(x+3\pi)+5\pi}{3}\right) = 10 - 2\cos\left(\frac{2x+6\pi+5\pi}{3}\right) = \\ &= 10 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2x+5\pi}{3}\right) = 10 - 2\cos\left(2\pi + \frac{2x+5\pi}{3}\right) = 10 - 2\cos\left(\frac{2x+5\pi}{3}\right) = f(x) \end{aligned}$$

Portanto, 3π é período da função f .

4.

a) Para $a = 1$, vem $g(x) = 2 \arcsen(x+1) + \frac{\pi}{3}$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \quad -1 \leq x+1 \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0, \text{ pelo que } D_g = [-2, 0] \\ \bullet \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsen(x+1) \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\pi \leq 2 \arcsen(x+1) \leq \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq 2 \arcsen(x+1) + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3} \quad \text{pelo que } D'_g = \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g\left(\sin\frac{7\pi}{5} - a\right) &= 2 \arcsen\left(\sin\frac{7\pi}{5} - a + a\right) + \frac{\pi}{3} = 2 \arcsen\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{3} = \\ &= 2 \arcsen\left(\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)\right) + \frac{\pi}{3} = 2 \arcsen\left(-\sin\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{3} = -2 \arcsen\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{3} = \\ &= -2 \times \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\text{c) } g(2) = 0 \Leftrightarrow 2 \arcsen(2+a) + \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \arcsen(2+a) = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2+a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$$

5.

a) A área do triângulo é dada por $\frac{\overline{PQ} \times \overline{QR}}{2}$.

$$\overline{PQ} = 1 + (-\cos \alpha) = 1 - \cos \alpha \text{ e } \overline{QR} = \sin \alpha + (-\operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PQ} \times \overline{QR}}{2} &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times (\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{2} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{2} \end{aligned}$$

b) O triângulo é isósceles se e só se $\widehat{QPR} = \widehat{PRQ} = \frac{\pi}{4}$. Nesse caso, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ e a área é

igual a $\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}$ ou, recorrendo à expressão da alínea anterior, é igual a

$$\frac{2 \sin \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4}}{2}.$$

Portanto, o valor exato da área é $\frac{2\sqrt{2}+3}{4}$ (u.a)

Cálculos:

$$\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1^2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 1}{4} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{4}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4}}{2} &= \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}}{2} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2 + 1}{4} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{4} \end{aligned}$$

Teste de Avaliação 2

Grupo I

1. (D)

Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0) - (-1, 3) = (5, -3)$.

Portanto, o declive da reta AB é $-\frac{3}{5}$.

Seja α a inclinação da reta AB . Tem-se $\alpha \in [0, \pi[$ e $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$.

Vem $\alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 2,60$.

2. (D)

O centro da circunferência é o ponto $C(-1, 2)$.

Designando por A o ponto de coordenadas $(-2, 0)$, tem-se:

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (-2, 0) - (-1, 2) = (-1, -2)$$

A reta tangente é perpendicular ao raio $[CA]$, pelo que um seu vetor diretor é o vetor de coordenadas $(2, -1)$. Assim, o declive da reta é $-\frac{1}{2}$.

A equação reduzida da reta é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como a reta passa no ponto $A(-2, 0)$, tem-se $0 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b$,
donde $b = -1$.

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

3. (A)

$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\sqrt{3})^2 = \\ &= 6 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Como $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 1$, vem $\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, pelo que
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - \vec{u} \cdot \vec{u} = 1 - 3 = -2$.

Vem, então: $6 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 2 \times (-2) = 2$

4. (B)

Tem-se: $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $P(2, y, 5)$.

Portanto, $\overrightarrow{OP} = (2, y, 5)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 3, 0)$.

Vem, então: $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -4 + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$

5. (D)

Como o ponto A pertence ao plano, as coordenadas de A têm de satisfazer a equação do plano. Tal permite excluir a opção (B).

Como os planos são perpendiculares, um vetor normal a um dos planos tem de ser perpendicular a um vetor normal ao outro.

Um vetor normal ao plano α é o vetor de coordenadas $(2, 0, -4)$.

Um vetor normal ao plano definido na opção (A) é o vetor de coordenadas $(4, 0, -2)$.

Tem-se $(2, 0, -4) \cdot (4, 0, -2) = 16$.

Um vetor normal ao plano definido na opção (C) é o vetor de coordenadas $(2, 1, -1)$.

Tem-se $(2, 0, -4) \cdot (2, 1, -1) = 8$.

Um vetor normal ao plano definido na opção (D) é o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$.

Tem-se $(2, 0, -4) \cdot (2, -1, 1) = 0$.

Portanto, só neste último caso é que os vetores são perpendiculares.

Grupo II

1.

- a) Tem-se $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QC}$.

Como as diagonais de um losango são perpendiculares, a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta QC é o ponto C , pelo que se tem:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{QC} \times \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{QC}^2$$

C é o ponto médio de $[QS]$, pelo que se tem $C\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$, ou seja, $C(1, 2)$.

Portanto, $\overrightarrow{QC} = C - Q = (1, 2) - (-1, 6) = (2, -4)$, pelo que

$$\overrightarrow{QC}^2 = \|\overrightarrow{QC}\|^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20.$$

Vem, então: $-\|\overrightarrow{QC}\|^2 = -20$

- b) A mediatriz do segmento de reta $[QS]$ passa pelo ponto C e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{QC}$.

Como o vetor $\overrightarrow{QC}$ tem coordenadas $(2, -4)$, vem que o vetor de coordenadas $(4, 2)$ é um vetor diretor da referida mediatriz, pelo que esta reta tem declive $\frac{2}{4}$, ou seja, $\frac{1}{2}$.

Assim, a equação reduzida desta reta é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$.

Como a reta passa por $C(1, 2)$, vem $2 = \frac{1}{2} \times 1 + b$, donde vem $b = \frac{3}{2}$.

Assim, a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[QS]$ é $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

- c) Como a reta PQ é paralela ao eixo das ordenadas, os pontos P e Q têm a mesma abcissa. Portanto, a abcissa do ponto P é -1 . Assim, o ponto P é o ponto de abcissa -1 que pertence à mediatriz do segmento de reta $[QS]$.

Seja y a ordenada do ponto P . Tem-se $y = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{3}{2} = 1$.

Portanto, o ponto P tem coordenadas $(-1, 1)$.

$$\text{Tem-se: } R = C + \overrightarrow{CR} = C + \overrightarrow{PC}$$

Dado que $\overrightarrow{PC} = C - P = (1, 2) - (-1, 1) = (2, 1)$, tem-se $R = (1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$.

Portanto, o ponto R tem coordenadas $(3, 3)$.

2.

- a) L é o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.
Logo, o ponto A pertence a L se e só se $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ou seja, o ponto A pertence a L se e só se $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$. Tem-se, efetivamente, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, pois o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .
- b) L é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{PB}$.
Portanto, L é a circunferência de diâmetro $[CB]$.
- c) Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 0) - (0, 2) = (5, -2)$. Tem-se $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.
 $[AB]$ é um dos catetos do triângulo. O outro cateto é $[AC]$. Seja x o seu comprimento.

$$\text{Tem-se } \frac{\sqrt{29} x}{2} = 29 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{29}.$$

Portanto, o vetor $\overrightarrow{AC}$:

- tem norma igual ao dobro da norma do vetor $\overrightarrow{AB}$;
- é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

Tem-se, assim, $\overrightarrow{AC} = 2(2, 5)$ ou $\overrightarrow{AC} = -2(2, 5)$, ou seja, $\overrightarrow{AC} = (4, 10)$ ou $\overrightarrow{AC} = (-4, -10)$.

Se $\overrightarrow{AC} = (4, 10)$, então $C = A + \overrightarrow{AC} = (0, 2) + (4, 10) = (4, 12)$.

Se $\overrightarrow{AC} = (-4, -10)$, então $C = A + \overrightarrow{AC} = (0, 2) + (-4, -10) = (-4, -8)$.

Como o ponto C pertence ao primeiro quadrante, tem-se $C(4, 12)$.

3.

- a) Tem-se que o ângulo $\widehat{VAI}$ é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AV}(-3, 3, 6)$ e $\overrightarrow{AI}(-2, 1, 1)$.

$$\text{Tem-se: } \cos(\widehat{VAI}) = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AI}}{\|\overrightarrow{AV}\| \times \|\overrightarrow{AI}\|} = \frac{6 + 3 + 6}{\sqrt{9 + 9 + 36} \times \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{324}}$$

Portanto, $\widehat{VAI} \approx 34^\circ$.

- b) O plano que contém a base da pirâmide é perpendicular ao segmento de reta $[IV]$, correspondente à altura da pirâmide. Assim, o plano que contém a base da pirâmide é o plano que passa por I e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{IV}$.

$$\text{Tem-se: } \overrightarrow{IV} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AV} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AV} = (2, -1, -1) + (-3, 3, 6) = (-1, 2, 5)$$

Assim, o referido plano tem equação da forma $-x + 2y + 5z + d = 0$.

Como o plano passa no ponto $I(1, 2, -3)$, vem: $-1 + 4 - 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$.

Assim, a equação do plano é $-x + 2y + 5z + 12 = 0$.

- c) A diagonal da base é igual à norma do vetor $2\vec{AI}$.

Tem-se $2\vec{AI} = (-4, 2, 2)$. A norma deste vetor é $\sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$.

A base da pirâmide é um quadrado. Um quadrado é um caso particular de um losango.

Portanto, a área da base é $\frac{\sqrt{24} \times \sqrt{24}}{2} = 12$.

A altura da pirâmide é a norma do vetor $\vec{IV}$. Portanto, a altura da pirâmide é $\sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$.

Assim, o volume da pirâmide é $\frac{12 \times \sqrt{30}}{3} = 4\sqrt{30}$.

4. Tem-se $\vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FM} = \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{FE}$.

Portanto, $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \left(\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{FE}\right) = \vec{AB} \cdot \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{FE} =$

$$= \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AF}\| \times \cos(\widehat{\vec{AB} \vec{AF}}) + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{FE}\| \times \cos(\widehat{\vec{AB} \vec{FE}}) =$$

$$= a \times a \times \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \times a \times a \times \cos 60^\circ = a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}a^2$$

5.

- a) Tem-se $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, pelo que $\vec{OP}(\cos \alpha, \sin \alpha)$, donde $\vec{OR}(\sin \alpha, -\cos \alpha)$, pelo que $R(\sin \alpha, -\cos \alpha)$.

Portanto, $Q(\sin \alpha, \sin \alpha)$.

Tem-se: $\vec{OP} = \vec{OR} = 1$, $\vec{PQ} = \sin \alpha - \cos \alpha$, $\vec{QR} = \sin \alpha - (-\cos \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$

Assim, $f(\alpha) = 1 + 1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = 2 + 2 \sin \alpha$.

- b) $2 + 2 \sin \alpha = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 + 2 \sin \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \Leftrightarrow 2 + 2 \sin \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \sin \alpha = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Teste de Avaliação 3

Grupo I

1. (D)

A sucessão de termo geral $\frac{n-5}{2}$ é crescente. Tal exclui a opção (A).

A sucessão de termo geral $\frac{2}{3n-11}$ não é monótona. De facto, tem-se $u_1 > u_2 > u_3$, mas $u_3 < u_4$.

Assim, a opção (B) também está excluída.

O terceiro termo da sucessão de termo geral $\frac{(-1)^n - 3n}{2}$ é -2 . Portanto, a opção (C) também está excluída.

A sucessão de termo geral $\frac{1-n}{2}$ é decrescente e o seu terceiro termo é -1 .

2. (B)

Tem-se $u_{n+5} = u_{n+1} + 4r$, donde vem que:

$$u_{n+1} = 8 + u_{n+5} \Leftrightarrow u_{n+1} = 8 + u_{n+1} + 4r \Leftrightarrow -4r = 8 \Leftrightarrow r = -2$$

3. (B)

Tem-se $v_8 = v_4 \times r^4$, donde vem que $8192 = 32 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = 4$ (como (v_n) é monótona, tem-se $r > 0$).

Portanto, $v_5 = v_4 \times r = 32 \times 4 = 128$

4. (A)

Tem-se que $a_n \rightarrow -\infty$, pelo que a sucessão (a_n) não converge para 2.

5. (C)

Nas condições do enunciado, o ângulo AVC é obtuso se e só se o produto escalar $\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VC}$ for negativo.

Tem-se $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ e $V(2, 2, z)$, com $z > 0$.

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (2, -2, -z) \quad \overrightarrow{VC} = C - V = (-2, 2, -z)$$

$$\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VC} < 0 \Leftrightarrow -4 - 4 + z^2 < 0 \Leftrightarrow z^2 < 8$$

Como $z > 0$, vem $0 < z < \sqrt{8}$.

Grupo II

1.

a) Tem-se: $u_{n+1} - u_n = \frac{1-3(n+1)}{n+1+1} - \frac{1-3n}{n+1} = \frac{-3n-2}{n+2} - \frac{1-3n}{n+1} =$

$$= \frac{(-3n-2)(n+1) - (1-3n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-3n^2-3n-2n-2-n-2+3n^2+6n}{(n+2)(n+1)} =$$
$$= \frac{-4}{(n+2)(n+1)}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Portanto, (u_n) é decrescente.

b) Tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{n+1} = -3$ se, para qualquer número real $\delta > 0$, existir uma ordem p tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} - (-3) \right| < \delta.$$

Ora, para qualquer número natural n e para qualquer número real $\delta > 0$, tem-se:

$$\left| \frac{1-3n}{n+1} - (-3) \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} + 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n+3n+3}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{4}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \delta \Leftrightarrow 4 < (n+1)\delta \Leftrightarrow 4 < n\delta + \delta \Leftrightarrow n\delta > 4 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{4-\delta}{\delta}$$

Portanto, $n > \frac{4-\delta}{\delta} \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} - (-3) \right| < \delta$, pelo que $n > \frac{4-\delta}{\delta} \Rightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} - (-3) \right| < \delta$.

Seja p um número natural maior que $\frac{4-\delta}{\delta}$. Tem-se $n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} - (-3) \right| < \delta$.

Está confirmado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{n+1} = -3$.

c) Tem-se que u_n pertence a $] - 3,001; - 2,999[$ se e só se $|u_n - (-3)| < 0,001$.

Vimos na alínea anterior que $|u_n - (-3)| < \delta \Leftrightarrow n > \frac{4-\delta}{\delta}$.

Portanto, u_n pertence a $] - 3,001; - 2,999[\Leftrightarrow n > \frac{4-0,001}{0,001} \Leftrightarrow n > 3999$.

Logo, u_n não pertence a $] - 3,001; - 2,999[\Leftrightarrow n \leq 3999$.

Existem portanto 3999 termos da sucessão que não pertencem a $] - 3,001; - 2,999[$.

d) Como (u_n) é convergente, podemos concluir que (u_n) é limitada, uma vez que toda a sucessão convergente é limitada.

Como (u_n) é decrescente, o primeiro termo é majorante da sucessão. Tem-se $u_1 = \frac{1-3 \times 1}{1+1} = -1$.

Como (u_n) é decrescente e tende para -3 , podemos concluir que -3 é minorante da sucessão.

O conjunto dos majorantes é $[-1, +\infty[$ e o conjunto dos minorantes é $] - \infty, -3]$.

2.

a) Tem-se: $u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{3} - \frac{1-2n}{3} = \frac{1-2n-2}{3} - \frac{1-2n}{3} = \frac{-1-2n}{3} - \frac{1-2n}{3} =$
 $= \frac{-1-2n-1+2n}{3} = -\frac{2}{3}$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ é constante.

Portanto, (u_n) é uma progressão aritmética.

b) Tem-se: $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{3} = \sum_{i=1}^n u_i$. Como (u_n) é uma progressão aritmética, tem-se:

$$v_n = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1-2n}{3}}{2} \times n = \frac{-\frac{2n}{3}}{2} \times n = -\frac{n}{3} \times n = -\frac{n^2}{3}$$

3. Pretende-se provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2n+4}$.

Comecemos por verificar que esta igualdade é verdadeira para $n = 1$.

Tem-se: $u_1 = \frac{1}{2 \times 1 + 4} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^1 \left(\frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} \right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1+1}{1+2} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \text{ o que é verdade.}$$

Provemos agora a hereditariedade.

Hipótese de indução: $u_n = \frac{n}{2n+4}$

Tese de indução: $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+6}$

Demonstração: $u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} \right) + \left(\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \right) =$
 $= u_n + \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n}{2n+4} + \frac{n^2+4n+4-n^2-3n-n-3}{(n+2)(n+3)} =$
 $= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{2(n+3)} = \frac{n+1}{2n+6}$

Tem-se $\lim u_n = \lim \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}$.

4.

a) Tem-se: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{(u_n + n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - n)(\sqrt{n} + n)}{(n + 3 + n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n})^2 - n^2}{(2n + 3)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^2}{4n^2 + 12n + 9} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{n^2 \left(4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2}} = \frac{0 - 1}{4 + 0 + 0} = -\frac{1}{4}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - (n + 3)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - n} - (n + 3))(\sqrt{n^2 - n} + (n + 3))}{\sqrt{n^2 - n} + (n + 3)} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - n})^2 - (n + 3)^2}{\sqrt{n^2 - n} + n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - (n^2 + 6n + 9)}{\sqrt{n^2 - n} + n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - n^2 - 6n - 9}{\sqrt{n^2 - n} + n + 3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n - 9}{\sqrt{n^2 - n} + n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{9}{n}}{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 - n} + 1 + \frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{9}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1 + \frac{3}{n}} = \frac{-7 - 0}{\sqrt{1} + 1 + 0} = -\frac{7}{2}$$

b) Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{2}{3} w_n$, conclui-se que (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

Portanto, $w_n = w_1 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = -\frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.

c) Tem-se: $\frac{w_n}{a_n} = \frac{-\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{a_n} = -\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{a_n}$

Pretende-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{a_n} = -\infty$, ou seja, pretende-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{a_n} = +\infty$.

Uma possibilidade é $a_n = a^{n+1}$, com $a < \frac{2}{3}$, como, por exemplo, $a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}$.

5.

a) Tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) Tem-se: $\sin^4 x - \cos^4 x = 2(\sin x + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + 2\sin x + 1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x + 4\sin x + 2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 2\sin^2 x + 4\sin x + 3 \Leftrightarrow -1 = 4\sin x + 3 \Leftrightarrow -4 = 4\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1$$

Tem-se: $\sin x = -1 \wedge x \in \left[-2\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

Assim, as soluções da equação que pertencem a $\left[-2\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Teste de Avaliação 4

Grupo I

1. (D)

Para n par, tem-se $\frac{2n \times (-1)^n - n}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, que tende para 1.

Para n ímpar, tem-se $\frac{2n \times (-1)^n - n}{n+1} = \frac{-3n}{n+1}$, que tende para -3 .

Logo, -1 e 3 são pontos aderentes ao conjunto S .

Para além destes dois pontos, os únicos pontos aderentes a S são os próprios elementos de S .

Tem-se:

- $\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow n = 2$, pelo que $\frac{2}{3} \in S$.
- $\frac{n}{n+1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow n = 3$, que é um número ímpar.
- $\frac{-3n}{n+1} = \frac{3}{4}$ é uma equação impossível.

Portanto, $\frac{3}{4} \notin S$.

2. (C)

Para $u_n = \frac{1}{n} - 2$, tem-se $\lim u_n = -2$, pelo que $\lim f(u_n) = 0$.

Para $u_n = -\frac{1}{n} - 2$, tem-se $\lim u_n = -2$, pelo que $\lim f(u_n) = 0$.

Para $u_n = \frac{n-2}{2}$, tem-se $\lim u_n = +\infty$, pelo que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Para $u_n = \frac{1}{n+2}$, tem-se $\lim u_n = 0$, pelo que $\lim f(u_n) = -2$.

3. (A)

Sendo (v_n) uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$, tem-se $\lim v_n = -\infty$ (se $v_1 < 0$) ou $\lim v_n = +\infty$ (se $v_1 > 0$).

Em qualquer dos casos, tem-se $\lim g(v_n) = \lim \frac{1}{v_n} = 0$.

4. (A)

Tem-se $x_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$, pelo que $x_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, por valores superiores a $\frac{\pi}{2}$.

Logo, $f(x_n)$ tende para $-\infty$.

5. (C)

Tem-se $S_{16} = 1 \times \frac{1-2^{16}}{1-2} = 2^{16} - 1 = 65535$.

Grupo II

1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u_n + u_{n+1} = 48 &\Leftrightarrow \frac{2n-3}{5} + \frac{2(n+1)-3}{5} = 48 \Leftrightarrow \frac{2n-3}{5} + \frac{2n-1}{5} = 48 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4n-4}{5} = 48 \Leftrightarrow 4n-4 = 240 \Leftrightarrow n = 61 \end{aligned}$$

As ordens são 61 e 62.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{2n-3}{5} &\text{ é o termo geral de uma progressão aritmética de razão } \frac{2}{5} \text{ e primeiro termo } -\frac{1}{5}. \\ \text{Portanto, tem-se: } u_1 &= -\frac{1}{5} \wedge \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2 + 2}{2} = \frac{(2-2)^2 + 2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{1-f(x)} = \frac{2}{1-1^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x \times f(x)) = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

3.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 + x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2-x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x-1} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x-1} - \frac{x^3 + 1}{x(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x(x-1)} - \frac{x^3 + 1}{x(x-1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{3 - \sqrt{3-2x}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 3x)(3 + \sqrt{3-2x})}{(3 + \sqrt{3-2x})(3 - \sqrt{3-2x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(3 + \sqrt{3-2x})}{9 - (3-2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(3 + \sqrt{3-2x})}{2x+6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(3 + \sqrt{3-2x})}{2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(3 + \sqrt{3-2x})}{2} = -9 \end{aligned}$$

4.

a) $f(0) = \frac{4 \times 0 + k}{10 + 0} = \frac{k}{10}$

Portanto, $\frac{k}{10}$ é o número, em dezenas de indivíduos, da espécie em causa, que existiam na região, quando se deu início ao programa de recuperação.

Logo, k é o número de indivíduos, da espécie em causa, que existiam na região, quando se deu início ao programa de recuperação.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4t + k}{10 + t} = 4$

Isto significa que, com o passar do tempo, o número de indivíduos da espécie em causa que vão existir na região tende para 40.

5.

a1) O ângulo VAB é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{AB}$.

Tem-se $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$ e $V(2, 2, 6)$.

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (-2, 2, 6)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, 0)$$

$$\cos(\widehat{VAB}) = \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AB}) \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AV}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{8}{\sqrt{4+4+36} \times 4} = \frac{2}{\sqrt{44}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Portanto, $\widehat{VAB} \approx 72^\circ$.

a2) Seja M o ponto médio de $[VB]$.

Tem-se $V(2, 2, 6)$ e $B(4, 4, 0)$, pelo que se tem $M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, ou seja, $M(3, 3, 3)$.

Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AM}$ são dois vetores do plano ACM , não colineares.

$$\text{Tem-se } \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 4, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 4, 0) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (3, 3, 3) - (4, 0, 0) = (-1, 3, 3)$$

Um vetor $\vec{n}(x, y, z)$ é normal ao plano ACM se e só se $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ e $\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$.

Tem-se:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (-4, 4, 0) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 3, 3) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 3z$$

Ora, $x = y \wedge x = 3y + 3z \Leftrightarrow y = x \wedge x = 3x + 3z \Leftrightarrow y = x \wedge z = -\frac{2x}{3}$

Portanto, um vetor $\vec{n}$ normal ao plano ACM tem coordenadas da forma $(x, x, -\frac{2x}{3})$.

Fazendo $x = 3$, vem $\vec{n} (3, 3, -2)$.

Portanto, uma equação do plano é da forma $3x + 3y - 2z = d$.

Como o ponto $A(4, 0, 0)$ pertence ao plano, vem $3 \times 4 + 3 \times 0 - 2 \times 0 = d \Leftrightarrow d = 12$.

Assim, uma equação do plano é $3x + 3y - 2z = 12$.

- b)** Tem-se $C(0, 4, 0)$ e $V(2, 2, z)$, com $z > 0$, pelo que $\overrightarrow{CV} = V - C = (2, -2, z)$.

Este vetor terá de ser colinear com o vetor de coordenadas $(8, -8, 11)$, pelo que $4z = 11$, ou seja, $z = \frac{11}{4}$.

Teste de Avaliação 5

Grupo I

1. (B)

A função f é contínua em todo o seu domínio. Portanto, f é contínua, em particular, no ponto 2. Assim, tem-se $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (2+k)x + 2k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-k)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-k) = 2-k$$

$$\text{Vem, então: } \frac{2}{3} = 2-k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

2. (D)

Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty, \text{ pelo que a reta de equação } x = 1 \text{ é assíntota ao gráfico de } f.$$

$$\bullet \text{ Nada é referido sobre } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \text{ pelo que este limite pode ser infinito.}$$

Assim, a reta de equação $x = 2$ pode ser assíntota ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)] = 0, \text{ pelo que as retas de equações}$$

$$y = 3 \text{ e } y = 3x - 1 \text{ são assíntotas não verticais ao gráfico de } f.$$

Como o gráfico de uma função nunca tem mais de duas assíntotas não verticais,

a reta de equação $y = 3x + 1$ não pode ser assíntota ao gráfico de f .

3. (B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x(2x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \times \frac{1}{2x + 6} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x + 6} = f'(0) \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. (B)

No intervalo $[b, c]$ a função f' é positiva, pelo que f é estritamente crescente neste intervalo. Assim, tem-se $f(c) > f(b)$, donde vem que $\frac{f(c) - f(b)}{c - b} > 0$.

5. (C)

$$(f \times g)'(1) = f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1)$$

Como $f(x) = x^3 + 1$ tem-se $f'(x) = 3x^2$, pelo que $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$.

Como a reta de equação $y = -4x + 3$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1, tem-se $g'(1) = -4$ e $g(1) = -1$ (o ponto de tangência é comum ao gráfico de g e à reta tangente).

$$\text{Portanto, } f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1) = 3 \times (-1) + 2 \times (-4) = -11.$$

Grupo II

1.

- a) O domínio da função f é $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Como a função f é contínua em todo o seu domínio, apenas a reta de equação $x = -2$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{x+2} = \frac{8}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x+2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Procuramos assíntotas não verticais:

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x - 4$ é a única assíntota não vertical ao gráfico de f .

Assim, o gráfico de f tem duas e só duas assíntotas, cujas equações são $x = -2$ e $y = 2x - 4$.

- b) Tem-se $f'(x) = \left(\frac{2x^2}{x+2} \right)' = \frac{(2x^2)'(x+2) - 2x^2(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x}{(x+2)^2}$.

Em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, tem-se: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

x	$-\infty$	-4		-2		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	máx	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	mín	$\nearrow$

n.d. - não definida

Portanto,

- f é crescente em $] -\infty, -4[$ e em $[0, +\infty[$;
- f é decrescente em $[-4, -2[$ e em $] -2, 0]$;
- f atinge um máximo relativo quando $x = -4$, tendo-se $f(-4) = -16$;
- f atinge um mínimo relativo quando $x = 0$, tendo-se $f(0) = 0$.

Do estudo efetuado, podemos concluir que o contradomínio de f é $] -\infty, -16] \cup [0, +\infty[$.

2. Seja $P(x, y)$ um ponto do gráfico de f . O produto das suas coordenadas é xy .

Tem-se:

$$xy = x f(x) = x \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = x + \frac{2x}{x-1}$$

Seja $g(x) = x + \frac{2x}{x-1}$.

Pretende-se determinar o valor de x para o qual a função g atinge um mínimo.

$$\text{Tem-se} \quad g'(x) = 1 + \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Em }]1, +\infty[, \text{ tem-se: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

Vem, então:

x	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
g'	—	0	+
g	$\searrow$	mín	$\nearrow$

Portanto, sendo P um ponto do gráfico de f , o valor da abscissa para o qual o produto das coordenadas de P é mínimo é $1 + \sqrt{2}$. Determinemos a ordenada correspondente.

$$\text{Tem-se } f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Assim, tem-se $P(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, pelo que, efetivamente, o ponto P pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

3.

- a) Tem-se $g(x) = 3 + \frac{a}{x-2}$. Como $g(0) = \frac{1}{2}$, vem $3 + \frac{a}{-2} = \frac{1}{2}$, donde vem que $a = 5$.

$$\text{Portanto, } g(x) = 3 + \frac{5}{x-2} = \frac{3x-6+5}{x-2} = \frac{3x-1}{x-2}.$$

- b) Como 3 não pertence ao contradomínio de g , conclui-se que a equação $g(x) = 3$ é impossível. Assim, $k = 3$.

- c) O gráfico de h é o resultado da translação do gráfico de g associada ao vetor $\vec{v}(s, t)$. Para a função h ser ímpar, as assíntotas do seu gráfico têm de ser os eixos coordenados. Portanto, o ponto de interseção das assíntotas do gráfico de h tem de ser a origem do referencial. Assim, na referida translação, a imagem do ponto $(2, 3)$ tem de ser a origem do referencial. Logo, o vetor associado a essa translação é o vetor $\vec{v}(-2, -3)$. Portanto, $s = -2$ e $t = -3$.

- d) Tem-se: $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{12x-4}{x^2-4} \leq \frac{3x-1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{12x-4}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{12x-4}{x^2-4} - \frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{12x-4}{x^2-4} - \frac{3x^2+5x-2}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+7x-2}{x^2-4} \leq 0 \quad \text{Tem-se: } -3x^2+7x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Portanto, } \frac{-3x^2+7x-2}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \underset{x \neq 2}{\Leftrightarrow} \frac{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x+2} \leq 0$$

Tem-se:

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-3x+1$	+	+	+	0	—
$x+2$	—	0	+	+	+
Quociente	—	n.d.	+	0	—

Como x não pode tomar o valor 2, tem-se $A =]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{3}, 2 \right[\cup]2, +\infty[$.

4. Tem-se $f(0) = \frac{0+4}{0-2} = -2$. Portanto, a ordenada do ponto B é -2 .

Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -4$. Portanto, a abscissa do ponto A é -4 .

Assim, tem-se $A(-4, 0)$ e $B(0, -2)$, pelo que $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$.

Portanto, $\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$.

O declive da reta AB é $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, pelo que o declive da reta AC é igual a 2 .

Assim, a equação reduzida da reta AC é da forma $y = 2x + b$.

Como esta reta passa no ponto $A(-4, 0)$ tem-se $0 = 2 \times (-4) + b$, donde vem $b = 8$.

C é um dos pontos de interseção do gráfico de f com esta reta.

$$\text{Em } \mathbb{R} \setminus \{2\}, \text{ tem-se: } \begin{cases} y = \frac{x+4}{x-2} \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 8 = \frac{x+4}{x-2} \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+8)(x-2) = x+4 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+4)(x-2) - (x+4) = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)[2(x-2) - 1] = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

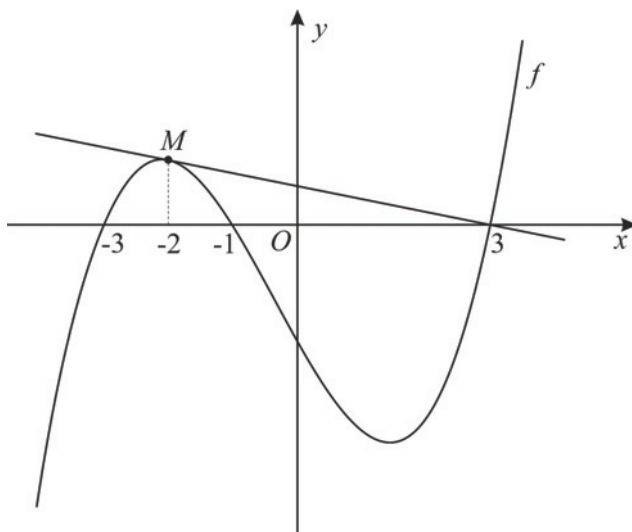
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(2x-5) = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \vee x = \frac{5}{2} \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

Portanto, tem-se $C\left(\frac{5}{2}, 13\right)$.

Vem, então, $\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 4\right)^2 + (13 - 0)^2} = \frac{13}{2}\sqrt{5}$.

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\frac{13}{2}\sqrt{5} \times \sqrt{20}}{2} = \frac{\frac{13}{2} \times 10}{2} = \frac{65}{2}$.

5. Tal como se pode observar, os zeros negativos de f são -3 e -1 , pelo que o ponto M tem abcissa -2 . A reta tangente ao gráfico de f no ponto M intersesta o eixo Ox no ponto de abcissa 3 , que é o outro zero da função.



Seja agora N o ponto do gráfico de f cuja abcissa é 1 (média aritmética de -1 e 3). Provemos analiticamente que a reta tangente ao gráfico de f no ponto N intersesta o eixo Ox no ponto de abcissa -3 , que é o outro zero da função.

Tem-se $f'(x) = 3x^2 + 2x - 9$, pelo que $f'(1) = -4$. Como $f(1) = -16$, tem-se $N(1, -16)$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto N é da forma $y = -4x + b$.

Como a reta passa no ponto $N(1, -16)$, tem-se $-16 = -4 + b$, pelo que $b = -12$.

A equação reduzida da reta é, assim, $y = -4x - 12$.

Vejamos qual é a abcissa do ponto de interseção desta reta com o eixo Ox .

Tem-se $0 = -4x - 12 \Leftrightarrow 4x = -12 \Leftrightarrow x = -3$.

Confirma-se assim que a reta tangente ao gráfico de f no ponto N intersesta o eixo Ox no ponto de abcissa -3 , tal como se pretendia demonstrar.

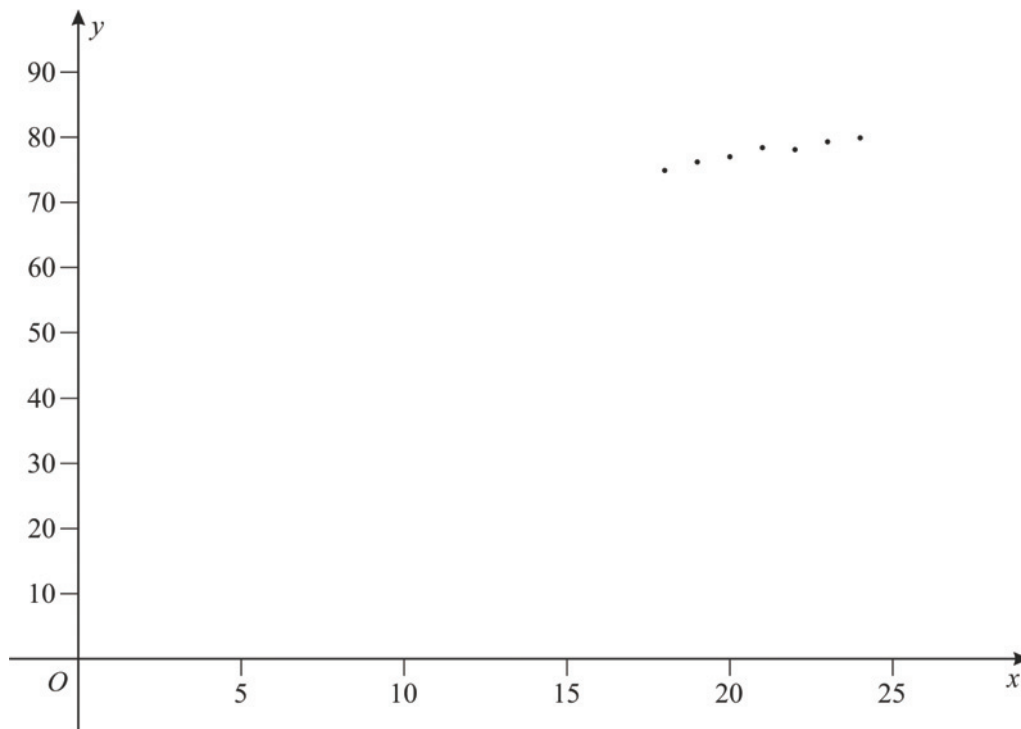
Teste de Avaliação 6

1.

a) Seja x a variável «idade» e seja y a variável «altura». Tem-se:

$$\bar{x} = \frac{18+19+20+21+22+23+24}{7} = 21 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{74,9+76,3+77+78,4+78,1+79,3+79,9}{7} = 77,7$$

b)



c) Uma vez que os pontos estão da nuvem estão aproximadamente alinhados, é de admitir uma associação linear forte entre as variáveis x e y .

d) Tem-se
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}} .$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 18 \times 74,9 + 19 \times 76,3 + 20 \times 77 + 21 \times 78,4 + 22 \times 78,1 + 23 \times 79,3 + 24 \times 79,9 =$$

$$= 11444$$

$$n \bar{x} \bar{y} = 7 \times 21 \times 77,7 = 11421,9$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 = 3115 - 7 \times 21^2 = 28 \quad SS_y = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 = 42279,37 - 7 \times 77,7^2 = 18,34$$

$$\text{Portanto, } r = \frac{11444 - 11421,9}{\sqrt{28 \times 18,34}} \approx 0,98 .$$

O facto de o valor de r ser próximo de 1 confirma a existência de uma associação linear forte entre as variáveis x e y .

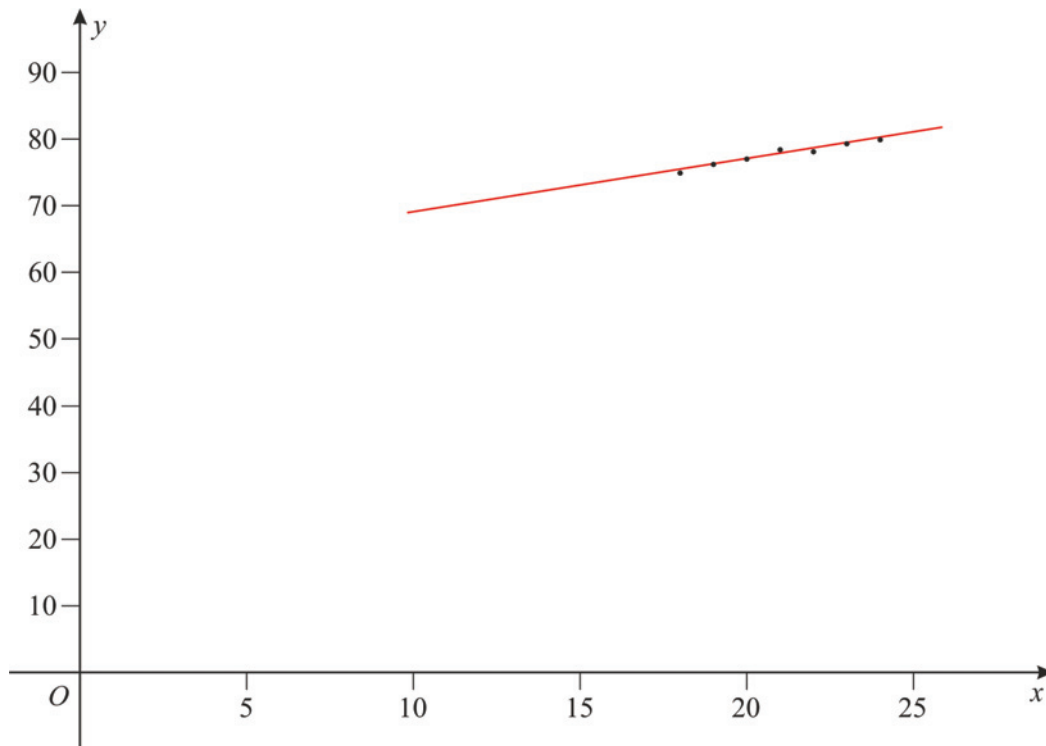
- e) Seja $y = ax + b$ a equação reduzida da reta de mínimos quadrados.

Tem-se:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{11444 - 11421,9}{28} \approx 0,8 \quad b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 61,1$$

Vem, então, que a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = 0,8x + 61,1$.

f)



2.

- a) Uma vez que o Dr. Valente procura estabelecer uma previsão para os gastos **em função da** temperatura exterior, esta deve ser a variável explicativa.
- b) Seja x a variável «temperatura exterior» e seja y a variável «volume de gás consumido».
Tem-se $\bar{x} = 12,25$ e $\bar{y} = \frac{7}{60}$.
- c) A equação reduzida da reta de mínimos quadrados, obtida com a calculadora, é
 $y = -0,0354x + 0,5503$.
- d) A reta de mínimos quadrados passa no ponto $C(\bar{x}, \bar{y})$, pelo que o desvio vertical de C em relação à reta de mínimos quadrados é igual a zero.

- e) Tem-se $P(8,9; 0,26)$.
O desvio vertical deste ponto em relação à reta de mínimos quadrados é igual a $0,26 - (-0,0354 \times 8,9 + 0,5503) \approx 0,02$

Designando por S a soma dos desvios dos restantes pontos da nuvem em relação a essa reta, tem-se $S + 0,02 = 0$, pois a soma dos desvios verticais de todos os pontos da nuvem, em relação à reta de mínimos quadrados, é igual a zero.

Tem-se $S + 0,02 = 0 \Leftrightarrow S = -0,02$.

Portanto, a soma dos desvios verticais dos restantes pontos da nuvem, em relação à reta de mínimos quadrados, é igual a $-0,02$.

- f) Substituindo, na equação reduzida da reta de mínimos quadrados ($y = -0,0354x + 0,5503$), a variável x por 10,3, obtem-se $y \approx 0,19$.
Portanto, no mês de dezembro, o consumo de gás deve ter sido aproximadamente igual a 0,19 metros cúbicos.

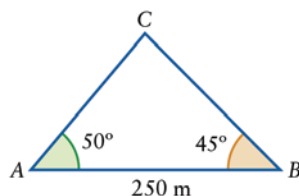
Questão de aula 1

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.
- Fórmulas fundamentais da trigonometria (ângulos agudos).
- Seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° .
- Lei dos senos.
- Seno de um ângulo reto e seno de um ângulo obtuso.
- Lei dos cossenos.
- Cosseno de um ângulo reto e cosseno de um ângulo obtuso.

1. Determina os comprimentos, em cm, dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 5 cm, sabendo que a amplitude de um dos ângulos internos do triângulo é 30° .
2. Os pontos A e B representam dois nadadores salvadores que observam um banhista que se encontra em C . O banhista é considerado em perigo se a distância a algum dos nadadores for superior a 200 metros.



Atendendo aos dados da figura, averigua se o banhista deve ser considerado em perigo.

3. Três localidades, Miar, Nomar e Proar, são representadas num mapa pelos pontos M , N e P .
Sabe-se que $\overline{MN} = 15$ cm, $\overline{NP} = 8$ cm e $\overline{PM} = 12$ cm.
Determina a amplitude, em graus, do ângulo MNP do triângulo $[MNP]$.
Apresenta o valor arredondado às unidades.
4. Seja k um número real tal que $\sin 70^\circ = k$.
 - a) Determina uma amplitude $\alpha \neq 70^\circ$ tal que $\sin \alpha = k$.
 - b) Escreve $\cos 70^\circ$ e $\cos 110^\circ$ em função de k .
 - c) Escreve $\sin 20^\circ$ em função de k .

Questão de aula 2

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- A circunferência trigonométrica.
- Seno, cosseno e tangente de ângulos generalizados.
- O radiano.
- Reduções ao primeiro quadrante.
- Equações trigonométricas.

1. Na figura estão representados a circunferência trigonométrica e o lado extremidade de um ângulo orientado α .

a) Recorrendo a régua e esquadro, representa:

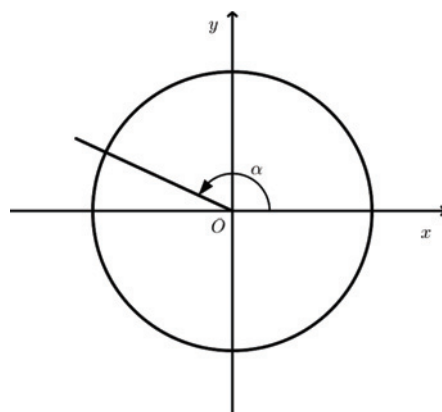
a₁) em azul, o(s) lado(s) extremidade do(s) ângulo(s) cujo seno é igual a $\sin \alpha$;

a₂) em preto, o(s) lado(s) extremidade do(s) ângulo(s) cujo cosseno é igual a $\cos \alpha$;

a₃) em encarnado, o(s) lado(s) extremidade do(s) ângulo(s) cujo seno é simétrico de $\cos \alpha$;

b) Admite que $\alpha = 155^\circ$.

Determina, sem recorrer ao transferidor, as amplitudes dos ângulos generalizados cujos lados extremidade assinalaste em azul, preto e encarnado.



2. Para um certo número real a , $0 < a < 360$, e para um certo número natural n , tem-se $3390 = a + n \times 360$.

a) Determina a e n .

b) Determina o seno, o cosseno e a tangente de 3390° .

3. Numa circunferência de centro no ponto O e raio 5 cm, o arco AB mede 6 cm e numa circunferência de centro O' e raio 4 cm, o arco CD mede 5 cm. Qual dos ângulos, AOB e $CO'D$, tem maior amplitude? Justifica.

4. Determina os números reais que são solução de cada uma das seguintes equações:

a) $2\cos x + 1 = 0$

b) $\sin(2x) = \cos(2x)$

Questão de aula 3

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Funções trigonométricas.
- Funções circulares inversas.

- Sejam a e b números reais e seja f a função definida por $f(x) = a + b\sin(2x)$.
 - Determina a e b sabendo que a e b são números positivos e que o contradomínio de f é $[-2, 4]$.
 - Admite, agora, que $a = 1$ e $b = -1$.
 - Mostra que os zeros da função f coincidem com os seus minimizantes e determina o maior zero negativo.
 - Mostra que π é período da função f .
- Seja g a restrição da função cosseno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, ou seja, g é a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, definida por $g(x) = \cos x$.

Determina o contradomínio da função g .
- Seja h a função definida por $h(x) = \pi - 2\arccos(1 - 3x)$.
 - Determina o domínio e o contradomínio de h .
 - Resolve a inequação $h(x) \leq \frac{\pi}{3}$. Apresenta o conjunto-solução recorrendo à notação de intervalos de números reais.

Questão de aula 4

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Ângulo de vetores. Expressão do produto escalar de vetores em função da norma e do ângulo dos vetores.
- Vetores perpendiculares.
- Propriedades do produto escalar.
- Resolução de problemas.

1. Na figura está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$ de centro no ponto O e lado 2.

a) Determina, em graus:

a₁) $(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD})$

a₂) $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC})$

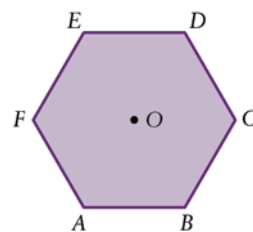
a₃) $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CF})$

b) Determina:

b₁) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

b₂) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE}$

b₃) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{OD}$



2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{12}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$.

Determina:

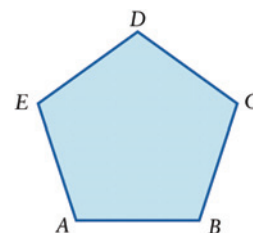
a) $(\vec{u} \wedge \vec{v})$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

3. Na figura está representado um pentágono regular $[ABCDE]$. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$.

Mostra que $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\|\overline{AD}\|} = \sin \frac{\pi}{10}$.



Questão de aula 5

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Produto escalar de vetores a partir das coordenadas.
- Relação entre declives de retas perpendiculares no plano.
- Resolução de problemas envolvendo o produto escalar.

1. Num referencial o.n. do plano, considera os vetores $\vec{u}(3, -2)$ e $\vec{v}(4, 1)$. Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Num referencial o.n. do espaço, considera os pontos $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 2, -1)$ e $C(4, 3, 2)$. Mostra que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares.
3. Considera, num referencial o.n., os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ e a reta r de equação $2x + y = 0$.
Determina $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$, sabendo que as retas AB e r são perpendiculares.
4. Considera, num referencial o.n., os pontos $A(2, -3)$, $B(-6, 3)$ e $C(1, 2)$.
 - a) Determina $\hat{ABC}$. Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.
 - b) Determina as coordenadas de um ponto D , do terceiro quadrante, tal que o triângulo $[ABD]$ é retângulo em B e tem área 75.

Questão de aula 6

25 minutos

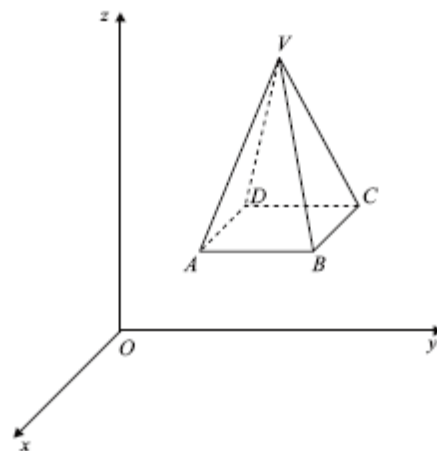
Conteúdos em avaliação

- Equações de retas e planos no espaço.

1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x + 3y - z = 4$ e o ponto $A(0, -1, 3)$.
- a) Escreve uma equação cartesiana do plano que é paralelo ao plano α e passa no ponto A .
- b) Escreve uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α , que passa no ponto A .

2. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$. Sabe-se que:

- o plano que contém a base da pirâmide é paralelo ao plano xOy ;
- o ponto B tem coordenadas $(-1, 3, 1)$;
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$;
- a pirâmide tem 4 unidades cúbicas de volume.



- a) Justifica que o vértice V tem coordenadas $(-2, 2, 4)$.
- b) Determina uma equação vetorial do plano BCV .
- c) Determina uma equação cartesiana do plano medidor da aresta $[VC]$ da pirâmide.
- d) Determina uma equação cartesiana do plano α que pertence ao ponto A e contém a aresta $[VC]$ da pirâmide.

Questão de aula 7

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Generalidades sobre sucessões.

1. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = (n-10)^2 + 2$ e $v_n = 4n + 2(-1)^n$.
 - a) Determina os quatro primeiros termos de cada uma das sucessões.
 - b) Investiga se 38 é termo de cada uma das sucessões (u_n) e (v_n) .
 - c) Mostra que a sucessão (u_n) não é monótona.
 - d) Mostra que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = 4 - 4(-1)^n$ e classifica a sucessão (v_n) quanto à monotonia.
2. Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = \frac{2n-1}{3n+4}$.
 - a) Estuda a sucessão (v_n) quanto à monotonia.
 - b) Indica, justificando, o valor lógico da proposição: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n}{3n+4} < \frac{2n}{3n}$.
 - c) Mostra que a sucessão (v_n) é limitada.
3. Acerca de uma sucessão (u_n) sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{17}{(2n-13)(15-2n)}$.

Mostra que a sucessão (u_n) não é monótona.

Questão de aula 8

20 minutos

Conteúdos em avaliação

- Método de indução matemática.
- Sucessões definidas por recorrência.

1. Mostra, recorrendo ao método de indução matemática, que para qualquer número natural n , $n^2 + 3n$ é um número par.

2. Seja a um número real e seja (v_n) a sucessão definida, por recorrência, por
$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = 2v_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

a) Determina, em função de a , v_2 e v_3 .

b) Mostra que existe um valor de a para o qual a sucessão (v_n) é constante.

3. Seja (u_n) a sucessão definida por:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Prova, recorrendo ao método de indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{(-1)^n}$.

Questão de aula 9

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Progressões aritméticas.
- Progressões geométricas.

1. Sejam (u_n) e (v_n) as sucessões que a seguir se definem, uma pelo termo geral e a outra por recorrência.

$$u_n = \frac{4n-3}{2} \quad \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = -\frac{v_n}{2} \end{cases}$$

- a) Mostra que (u_n) é uma progressão aritmética e que (v_n) é uma progressão geométrica.
- b) Uma destas sucessões não é monótona. Qual? Justifica.
- c) Mostra que a sucessão (v_n) é definida por $v_n = (-2)^{3-n}$.
- d) Determina a soma dos vinte termos consecutivos da sucessão (u_n) a partir do terceiro, inclusive.
2. Seja (a_n) uma progressão aritmética de razão -1 e seja (b_n) a sucessão definida por $b_n = 2^{\frac{a_n}{2}}$. Prova que (b_n) é uma progressão geométrica e indica o valor da razão.
3. A Maria começou no dia 1 de junho a preparar-se para o verão e fez, nesse dia, 10 flexões. Tenciona treinar de três em três dias e, em cada treino, vai fazer mais duas flexões do que no treino anterior.
- a) Se treinar, de acordo com o seu plano, durante todo o mês de junho, quantas flexões vai fazer no último treino desse mês?
- b) No fim de um certo treino, a Maria concluiu que tinha feito, desde o dia 1 de junho, 360 flexões. Admitindo que cumpriu sempre o que tinha previsto, em que dia é que a Maria fez o referido treino?

Questão de aula 10

20 minutos

Conteúdos em avaliação

- Conceito de limite de uma sucessão convergente.
- Produto de uma sucessão limitada por outra que é convergente para 0.
- Operações com limites reais.

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{1-2n}{3n+2}$.

Prova, recorrendo à definição, que $-\frac{2}{3}$ é limite da sucessão e determina quantos termos da sucessão não pertencem a $V_{0,001}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

2. Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = \frac{\cos n}{n}$.

Justifica que $\lim v_n = 0$.

3. Sejam a, b, c e d números reais.

Considera a família de sucessões (u_n) de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, cn+d \neq 0$.

a) Dá um exemplo de uma sucessão (u_n) desta família, tal que:

a₁) $\lim u_n = -\frac{1}{3}$

a₂) $\lim u_n = 0$

a₃) $\lim u_n = -\infty$

b) Seja $u_n = \frac{-2n+3}{n+1}$.

Determina:

b₁) $\lim u_n$

b₂) $\lim \frac{3}{u_n}$

b₃) $\lim (u_n)^3$

Questão de aula 11

15 minutos

Conteúdos em avaliação

- Limites de sucessões.
- Levantamento algébrico de indeterminações.

1. Determina o limite de cada uma das sucessões que se definem, em seguida, pelo seu termo geral .

a) $u_n = \frac{1}{n+1}$

b) $v_n = \frac{2n+1}{3-5n}$

c) $w_n = \begin{cases} \frac{n+1}{3} & \text{se } n \leq 1000 \\ \sqrt[n]{3} & \text{se } n > 1000 \end{cases}$

2. Determina o limite das sucessões cujo termo geral se indica, depois de identificares o tipo de indeterminação.

a) $u_n = 10n^2 - n^3 + 1000$

b) $v_n = \frac{2n^2+1}{n(1-3n)}$

c) $w_n = n - \sqrt{n^2 + 2} + 1$

3. Seja a um número real e seja (a_n) a sucessão definida por $a_n = (1 - 2a)^n$.

Determina o conjunto dos valores de a para os quais a sucessão (a_n) é convergente.

Questão de aula 12

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Limite segundo Heine.
- Operações com limites.

1. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$.

a) Usa a definição de limite segundo Heine para provar que:

a₁) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3}$

a₂) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Determina os limites seguintes.

b₁) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$

b₂) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)-1}$

b₃) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3-x}{2} - \frac{1}{f^2(x)} \right)$

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x < 0 \\ 1-2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Define duas sucessões, (u_n) e (v_n) , que permitam concluir que não existe limite de $f(x)$ quando x tende para 0. Explica o teu raciocínio.

Questão de aula 13

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Domínio de funções racionais.
- Simplificação de frações.
- Operações com frações racionais.

1. Determina o domínio das funções definidas por cada uma das expressões.

a) $\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{2x+1}{x^2+1}$

c) $\frac{x+2}{x(x-1)^3}$

2. Simplifica cada uma das frações seguintes e indica o domínio em que a simplificação é válida.

a) $\frac{x^2-2x}{4-x^2}$

b) $\frac{x^2+6x+9}{x^3+3x^2}$

c) $\frac{x^3+1}{2x^2+3x+1}$

3. Efetua as operações indicadas, simplifica, se possível, as frações obtidas e indica o domínio em que as simplificações são válidas.

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{x^2-3}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2-4x}{x^2+x} \times \frac{x+1}{16-x^2}$

c) $\frac{\frac{2x-1}{x-2} - 1}{x+1}$

Questão de aula 14

20 minutos

Conteúdos em avaliação

- Indeterminações.

Em todas as situações seguintes há indeterminações. Identifica, em cada caso, o tipo de indeterminação e calcula o valor do limite.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)^2}{x^2 + x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)^2 - 8}{3x^3 + x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 1} - 2x \right)$

Questão de aula 15

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Assíntotas ao gráfico de uma função.

1. Sejam f a função definida por $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Estuda a existência de assíntotas ao gráfico da função f e escreve equações das assíntotas que identificares.

2. Acerca de uma função f , sabe-se que:

- tem domínio $\mathbb{R} \setminus [-1, 2]$;
- é contínua;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x + 3) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

Identifica as assíntotas ao gráfico de f e define-as por equações.

3. Acerca de uma função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota ao seu gráfico.

Seja h a função definida por $h(x) = x + g(x)$.

Mostra que existe uma reta que é assíntota não vertical ao gráfico de h e escreve a sua equação reduzida.

Questão de aula 16

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Funções definidas por expressões da forma $f(x) = b + \frac{k}{x-c}$.
- Equações e inequações fracionárias.

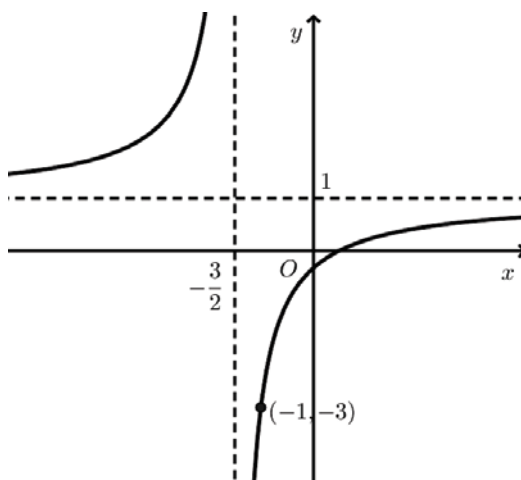
1. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$.

- Escreve $f(x)$ na forma $f(x) = b + \frac{k}{x-c}$ e escreve equações das assíntotas ao gráfico de f .
- Sabe-se que a equação $f(x) = a$ é impossível. Qual é o valor de a ?
- Resolve a condição $f(x) \leq 2$. Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

2. A função g , representada graficamente, pode ser definida por uma expressão da forma $\frac{ax+b}{x+c}$ (a , b e c são números reais).

As retas de equações $x = -\frac{3}{2}$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de g , que passa no ponto de coordenadas $(-1, -3)$.

- Define a função g por uma expressão algébrica.
- Determina as coordenadas dos pontos em que o gráfico de g interseja os eixos coordenados.



3. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$ e $g(x) = \frac{3}{x^2-9}$.

Resolve a inequação $f(x) \geq g(x)$, sem recorrer à calculadora.

Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

Conteúdos em avaliação

- Taxa média de variação. Reta secante ao gráfico de uma função.
- Definição de derivada de uma função num ponto.
- Reta tangente ao gráfico de uma função num ponto.

1. Seja f a função definida por $f(x) = 5x - x^2$.

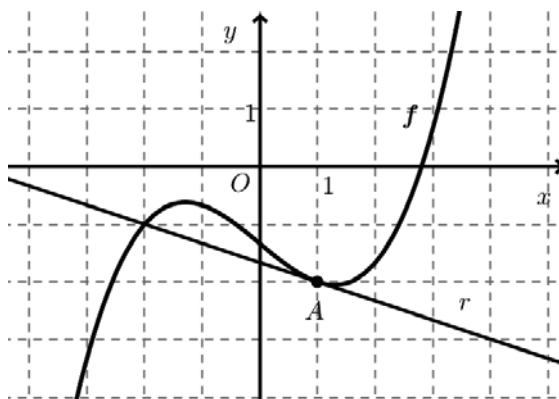
a) Determina a taxa média de variação de f entre -2 e 1 .

b) Uma reta r intersesta o gráfico de f em dois pontos A e B . Sabe-se que o ponto A tem abcissa 1 e que a reta r tem declive $\frac{1}{2}$. Determina a abcissa do ponto B .

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$. Determina $g'(-2)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

3. Seja f a função representada graficamente. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A .



Identifica, justificando, o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 2}{h}$.

Questão de aula 18

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Regras de derivação e derivadas das funções de referência.
- Reta tangente ao gráfico de uma função num ponto.

1. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

a) Caracteriza a função f' (função derivada da função f).

b) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 .

2. Considera a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

a) Caracteriza a função g' (função derivada da função g).

b) Determina a abscissa do ponto do gráfico de g em que a reta tangente ao gráfico é paralela ao eixo das abscissas.

3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente, e seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, definida por $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$. A reta de equação $y = 2x + 3$ é tangente ao gráfico de g no ponto A de abscissa -2 .

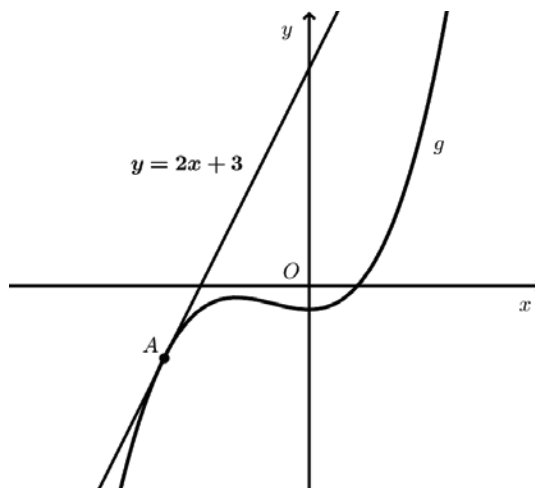
Determina:

a) $(f \times g)'(-2)$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)'(-2)$

c) $(g^2)'(-2)$

d) $(f \circ g)'(-2)$



Questão de aula 19

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Aplicação do cálculo diferencial à determinação dos extremos relativos e intervalos de monotonia de uma função.

1. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

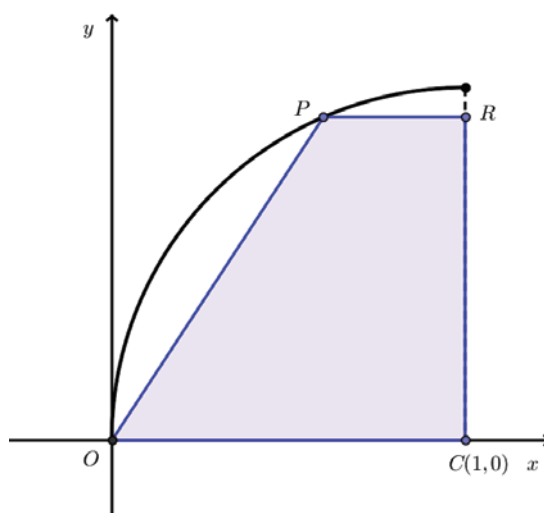
Recorrendo a processos analíticos, determina, para cada uma das funções, os intervalos de monotonia e extremos relativos, caso existam.

2. No referencial xOy da figura está representado um arco de circunferência de centro no ponto de coordenadas $C(1,0)$ e raio 1.

Um ponto P move-se sobre esse arco, entre os pontos de abscissa 0 e 1. Para cada posição do ponto P , considera o trapézio retângulo $[OPRC]$, de bases $[OC]$ e $[PR]$.

Seja f a função que à abscissa x do ponto P faz corresponder a área do trapézio $[OPRC]$.

Mostra que $f(x) = \frac{2-x}{2} \times \sqrt{2x-x^2}$ e determina, por processos analíticos, as coordenadas do ponto P para as quais o trapézio tem maior área.



Questão de aula 20

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Reta de mínimos quadrados.

Na tabela seguinte estão registados dados relativos ao número de incêndios florestais em cada ano, de 2010 a 2015, e as correspondentes áreas ardidas de povoamento florestal.

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015
N.º de incêndios	3349	2740	4071	3004	997	3067
Área ardida (ha)	45459	12257	46884	51095	8653	22260

Considera a variável «número de incêndios» como explicativa e a variável «área ardida» como resposta.

Considera, num referencial o.n., a nuvem de pontos que corresponde aos dados apresentados.

Nas respostas aos itens seguintes, sempre que obtiveres valores não inteiros, efetua arredondamentos às unidades.

- Determina o centro de gravidade da nuvem.
- Seja $y = ax + b$ a equação reduzida de uma reta que passa no centro de gravidade da nuvem.
 - Escreve b em função de a .
 - Calcula, em função de a , os desvios verticais dos pontos da nuvem em relação à reta r .
 - Determina, em função de a , a soma dos quadrados desses desvios. Apresenta a expressão na forma de um polinómio reduzido.
 - Determina o valor de a para o qual é mínima a soma dos quadrados dos desvios. Apresenta o valor arredondado às unidades.
- Determina a equação reduzida da reta de mínimos quadrados.

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Pergunta 1

Pergunta:

Sendo α um ângulo agudo e $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, o valor de $\cos \alpha$ é:

- (A) $\frac{3}{5}$
- (B) $\frac{21}{25}$
- (C) $\frac{\sqrt{21}}{25}$
- (D) $\frac{\sqrt{21}}{5}$

Resposta:

(D)

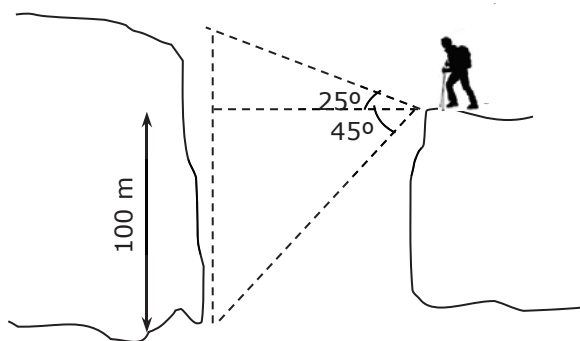
Pergunta 2

Pergunta:

Observe a figura ao lado.

A altura total da falésia do lado esquerdo, aproximada às unidades do metro, é:

- (A) 147 m
- (B) 100 m
- (C) 150 m
- (D) Não é possível calcular a altura da falésia.



Resposta:

(A)

Pergunta 3

Pergunta:

Sendo β um ângulo agudo e sabendo que $\sin \beta = \frac{4}{5}$, o valor de $\cos \beta + 3\operatorname{tg} \beta$ é:

- (A) $\frac{3}{5}$
- (B) $\frac{20}{9}$
- (C) $\frac{23}{5}$
- (D) $\frac{29}{15}$

Resposta:

(C)

Pergunta 4

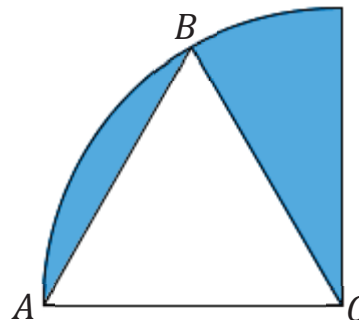
Pergunta:

Na figura está representado um quarto de círculo de 2 cm de raio e um triângulo equilátero $[ABC]$.
A área da parte colorida, aproximada às décimas, é:

- (A) $1,4 \text{ cm}^2$
- (B) $1,5 \text{ cm}^2$
- (C) $1,6 \text{ cm}^2$
- (D) $1,7 \text{ cm}^2$

Resposta:

(A)



Pergunta 5

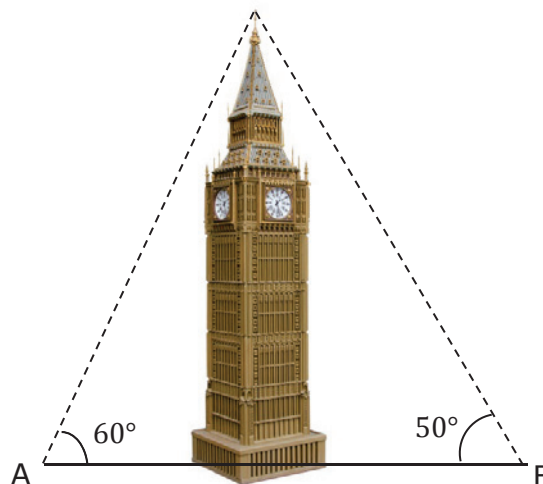
Pergunta:

A Ana e o Bernardo foram a Londres visitar o Big Ben.
Sabendo que a Ana se encontra no ponto A e o Bernardo no ponto B, separados 100 metros um do outro, a distância que separa a Ana do topo da torre, arredondada às décimas, é:

- (A) 81,5 m
- (B) 80,9 m
- (C) 92,6 m
- (D) 91,6 m

Resposta:

(A)



Pergunta 6

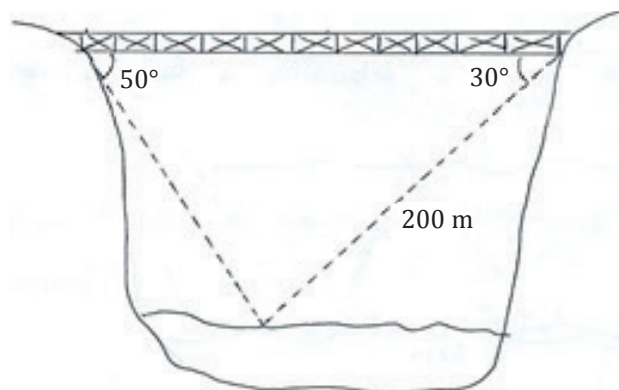
Pergunta:

Observa a figura ao lado.
O comprimento da ponte, arredondado às décimas, é:

- (A) 257,1 m
- (B) 250,8 m
- (C) 157,1 m
- (D) 150,1 m

Resposta:

(A)



Pergunta 7

Pergunta:

Seja α um ângulo obtuso e $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$, o valor de $2\sin \alpha + 3\cos \alpha$ é:

- (A) $\frac{2}{3}$
- (B) $\frac{2}{3} - \sqrt{8}$
- (C) $\frac{10}{3}$
- (D) $\frac{10}{3} + \sqrt{8}$

Resposta:

(B)

Pergunta 8

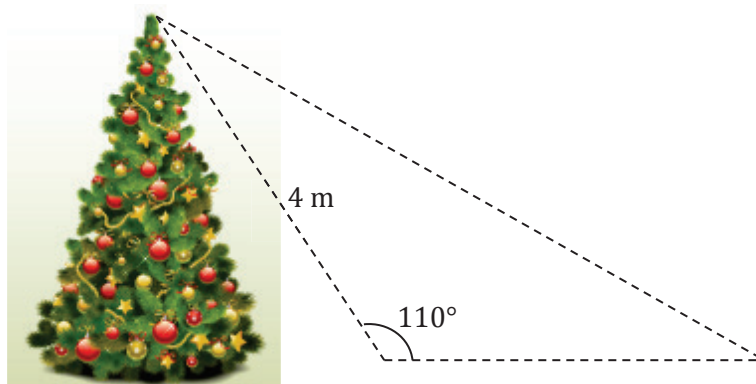
Pergunta:

Qual das seguintes opções corresponde à altura da árvore, aproximada às centésimas?

- (A) 4 m
- (B) 3,22 m
- (C) 3,47 m
- (D) 3,76 m

Resposta:

(D)



Pergunta 9

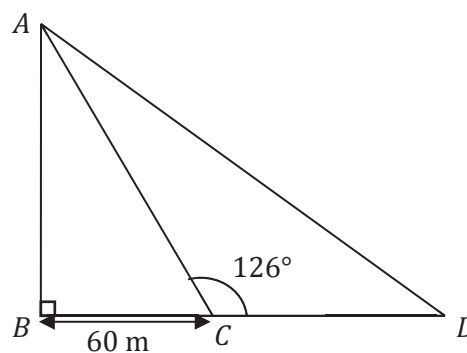
Pergunta:

Considerando a figura ao lado, o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas, é:

- (A) 80,58 m
- (B) 81,58 m
- (C) 82,58 m
- (D) 83,58 m

Resposta:

(C)



Pergunta 10

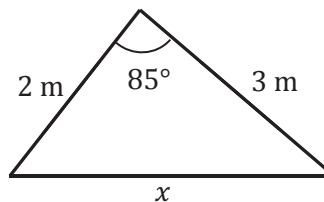
Pergunta:

Considerando a seguinte figura, podemos dizer que o valor x , aproximado às centésimas, é:

- (A) 3,46 m
- (B) 1,05 m
- (C) 11,46 m
- (D) 11,95 m

Resposta:

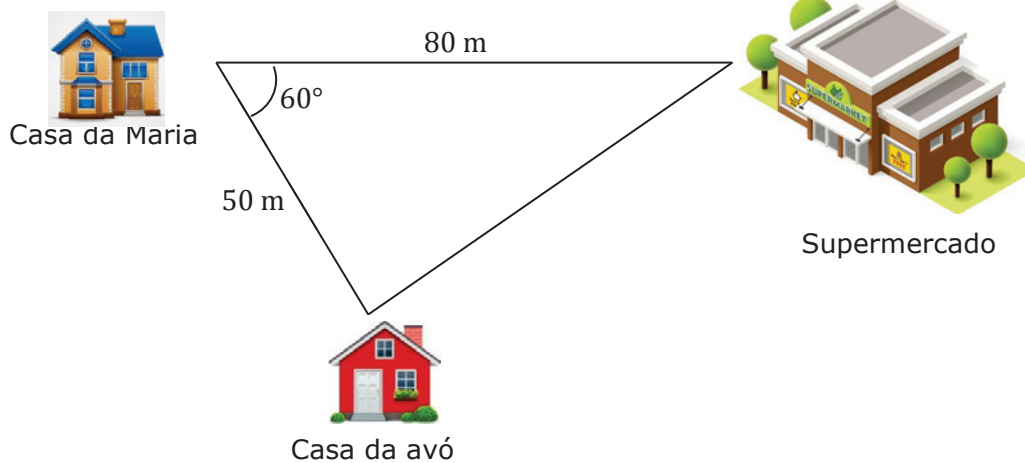
(A)



Pergunta 11

Pergunta:

Qual é a distância total que a Maria terá de percorrer para ir de casa ao supermercado, do supermercado à casa da avó e regressar a sua casa?



- (A) 70 m
- (B) 210 m
- (C) 130 m
- (D) 200 m

Resposta:

(D)

Pergunta 12

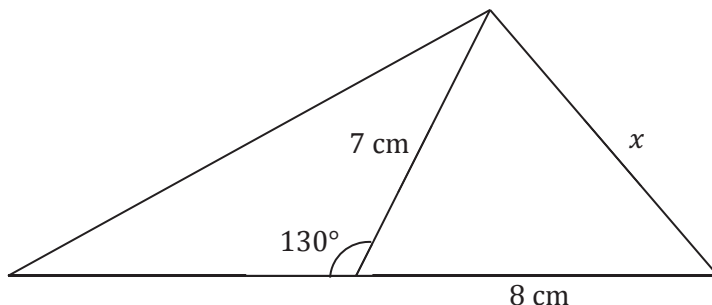
Pergunta:

Considerando a seguinte figura, o valor de x , aproximado às milésimas, é:

- (A) 41,008 cm
- (B) 6,404 cm
- (C) 184,681 cm
- (D) 13,590 cm

Resposta:

(B)



Pergunta 13

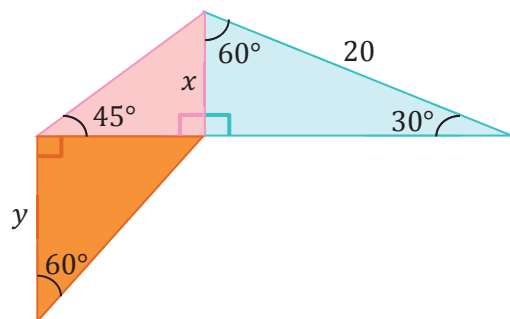
Pergunta:

Qual das seguintes opções corresponde aos valores de x e y , aproximados às centésimas?

- (A) $x = 10$ e $y = 8$
- (B) $x = 6$ e $y = 9$
- (C) $x = 5,77$ e $y = 10$
- (D) $x = 10$ e $y = 5,77$

Resposta:

(D)



Pergunta 14

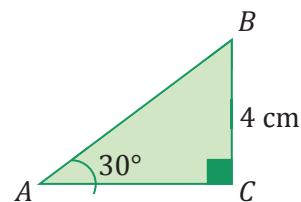
Pergunta:

Considerando a seguinte figura, podemos afirmar que:

- (A) $\overline{AB} = 8$ cm e $\overline{AC} = 4$ cm
- (B) $\overline{AB} = 8$ cm e $\overline{AC} = 3$ cm
- (C) $\overline{AB} = 8$ cm e $\overline{AC} \approx 6,93$ cm
- (D) $\overline{AB} \approx 6,93$ cm e $\overline{AC} = 8$ cm

Resposta:

(C)



Pergunta 15

Pergunta:

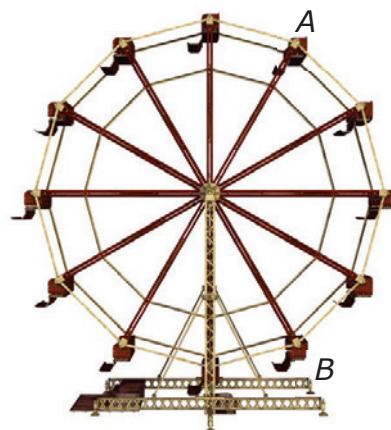
A figura representa a roda gigante num parque de diversões, que se desloca no sentido positivo.

Quantos graus terá a roda de se deslocar para que a Maria, que se encontra no ponto *A*, possa chegar ao ponto *B*?

- (A) 240°
- (B) -240°
- (C) 120°
- (D) -120°

Resposta:

(A)



Pergunta 16

Pergunta:

Se a roda da sorte rodar -800° , a seta indicará o número:

- (A) 9
- (B) 4
- (C) 6
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(A)



Pergunta 17

Pergunta:

A amplitude do ângulo orientado correspondente ao ângulo generalizado 680° é:

- (A) -680°
- (B) 320°
- (C) -320°
- (D) 140°

Resposta:

(B)

Pergunta 18

Pergunta:

O ângulo generalizado de amplitude -1340° é representado pelo par ordenado:

- (A) $(-620, -2)$
- (B) $(620, 2)$
- (C) $(260, -3)$
- (D) $(-260, -3)$

Resposta:

(D)

Pergunta 19

Pergunta:

A amplitude, em graus, do ângulo generalizado $(34, 4)$, é:

- (A) 1474°
- (B) 34°
- (C) -34°
- (D) 136°

Resposta:

(A)

Pergunta 20

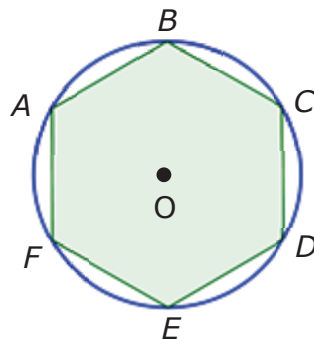
Pergunta:

Considera o hexágono regular inscrito na circunferência de centro O . A imagem do ponto A pela rotação de centro O e ângulo generalizado $(-240^\circ, -2)$, em graus, é o ponto:

- (A) D
- (B) A
- (C) E
- (D) C

Resposta:

(C)



Pergunta 21

Pergunta:

O relógio da figura marca 3 horas.

Que horas marca o relógio, quando o ponteiro dos minutos rodar -570° ?

- (A) 4 horas e 25 minutos
- (B) 4 horas e 35 minutos
- (C) 3 horas e 35 minutos
- (D) 3 horas e 40 minutos

Resposta:

(B)



Pergunta 22

Pergunta:

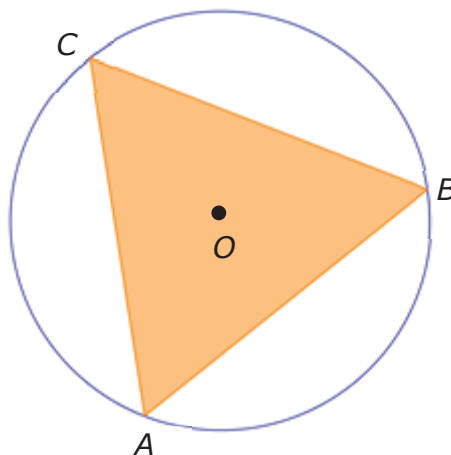
A figura representa um triângulo equilátero inscrito numa circunferência.

A imagem do ponto B , se o triângulo rodar 1560° sobre o ponto O , é:

- (A) O ponto A .
- (B) O ponto B .
- (C) O ponto C .
- (D) Não é possível saber.

Resposta:

(C)



Pergunta 23

Pergunta:

A amplitude do ângulo orientado correspondente a um ângulo generalizado de amplitude 700° é:

- (A) -700°
- (B) 340°
- (C) 160°
- (D) 300°

Resposta:

(B)

Pergunta 24

Pergunta:

A amplitude, em graus, do ângulo generalizado $(-62, -2)$ é:

- (A) -124°
- (B) 124°
- (C) 782°
- (D) -782°

Resposta:

(D)

Pergunta 25

Pergunta:

O ângulo de amplitude 460° pertence ao:

- (A) 1.º quadrante.
- (B) 2.º quadrante.
- (C) 3.º quadrante.
- (D) 4.º quadrante.

Resposta:

(B)

Pergunta 26

Pergunta:

O ângulo de amplitude -3020° pertence ao:

- (A) 1.º quadrante.
- (B) 2.º quadrante.
- (C) 3.º quadrante.
- (D) 4.º quadrante.

Resposta:

(C)

Pergunta 27**Pergunta:**

Considere a circunferência representada na figura.

As coordenadas do ponto A são:

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

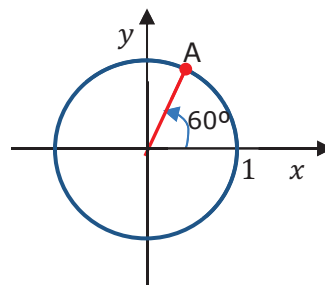
(B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Resposta:

(A)

**Pergunta 28****Pergunta:**

De um ângulo α sabe-se que $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. O valor de $\cos \alpha$ é:

(A) 1

(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(C) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(B)

Pergunta 29**Pergunta:**

O valor máximo que a expressão $2 + 3 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ pode tomar é:

(A) 5

(B) 1

(C) $\frac{7}{2}$

(D) -1

Resposta:

(A)

Pergunta 30

Pergunta:

Selecione a afirmação verdadeira.

- (A) No 1.º quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo.
- (B) Existe um ângulo α no 4.º quadrante tal que $\cos \alpha = \frac{5}{2}$.
- (C) Existe um ângulo β no 3.º quadrante tal que $\sin \beta = -\frac{3}{2}$.
- (D) Se γ pertence ao 3.º quadrante, então $\sin \gamma \times \cos \gamma > 0$.

Resposta:

(D)

Pergunta 31

Pergunta:

Para que a expressão $3 \sin \alpha = m - 1$ tenha sentido, temos que:

- (A) $m \in [-1, 1]$
- (B) $m \in [-2, 4]$
- (C) $m \in [-3, 3]$
- (D) $m \in [-4, 2]$

Resposta:

(B)

Pergunta 32

Pergunta:

Os valores que a expressão $1 + 5 \operatorname{tg}^2 \beta$ pode tomar pertencem ao intervalo:

- (A) $[1, +\infty[$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $[5, +\infty[$
- (D) $[6, +\infty[$

Resposta:

(A)

Pergunta 33

Pergunta:

Sendo α um ângulo agudo, o valor de

$$\cos (360^\circ + \alpha) + \sin (180^\circ - \alpha) - 2\sin (720^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} (270^\circ + \alpha)$$

é:

- (A) $\sin \alpha$
- (B) $\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$
- (C) $\sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$
- (D) $3\sin \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$

Resposta:

(D)

Pergunta 34

Pergunta:

Sendo α um ângulo do 2.º ou 3.º quadrantes e $\operatorname{tg} (540^\circ + \alpha) = \frac{1}{5}$, o valor de $\cos (270^\circ + \alpha)$ é:

- (A) $\frac{\sqrt{26}}{26}$
- (B) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$
- (C) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$
- (D) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

Resposta:

(D)

Pergunta 35

Pergunta:

A amplitude $\frac{4\pi}{5}$ radianos, em graus, é:

- (A) 140°
- (B) 141°
- (C) 143°
- (D) 144°

Resposta:

(D)

Pergunta 36**Pergunta:**

A amplitude 260° , em radianos, é:

(A) $\frac{13\pi}{9}$

(B) $\frac{12\pi}{9}$

(C) $\frac{11\pi}{9}$

(D) $\frac{10\pi}{9}$

Resposta:

(A)

Pergunta 37**Pergunta:**

A amplitude do ângulo com $\frac{5\pi}{11}$ radianos, apresentada em graus, minutos e segundos é, aproximadamente:

(A) $81^\circ 49' 5''$

(B) $81^\circ 47' 4''$

(C) $83^\circ 49' 5''$

(D) $83^\circ 49' 8''$

Resposta:

(A)

Pergunta 38**Pergunta:**

O ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{4}$ radianos pertence ao:

(A) 1.º quadrante.

(B) 2.º quadrante.

(C) 3.º quadrante.

(D) 4.º quadrante.

Resposta:

(C)

Pergunta 39**Pergunta:**

As hélices de um helicóptero medem 6,5 metros.

A distância que percorre a ponta de cada hélice ao dar 5 voltas completas é:

- (A) 10π m
- (B) 13π m
- (C) 60π m
- (D) 65π m

Resposta:

(D)

Pergunta 40**Pergunta:**

A área, arredondada às unidades, de um setor circular de amplitude 1,2 radianos, numa circunferência de 8 metros de raio é:

- (A) 121 m^2
- (B) 64 m^2
- (C) 650 m^2
- (D) 48 m^2

Resposta:

(A)

Pergunta 41**Pergunta:**

A expressão $2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ tem o valor:

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (B) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$
- (D) $-\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Resposta:

(C)

Pergunta 42

Pergunta:

A expressão $\sin(\pi - \alpha) - 2 \sin(2\pi - \alpha)$ é equivalente a:

- (A) $3 \sin \alpha$
- (B) $-3 \sin \alpha$
- (C) $2 \sin \alpha$
- (D) $-2 \sin \alpha$

Resposta:

(A)

Pergunta 43

Pergunta:

A expressão $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(x - \frac{7}{2}\pi\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ é equivalente a:

- (A) $\sin x$
- (B) $3 \sin x$
- (C) $\sin x - \cos x$
- (D) $\sin x + 3 \cos x$

Resposta:

(D)

Pergunta 44

Pergunta:

Se $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\sin\left(-\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{3}$, o valor da expressão $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) - \cos(\alpha - 3\pi)$ é:

- (A) $\frac{1}{3} + \sqrt{2}$
- (B) $\frac{1}{3} - \sqrt{2}$
- (C) $\frac{1}{3} - 2\sqrt{2}$
- (D) $\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}$

Resposta:

(D)

Pergunta 45

Pergunta:

O contradomínio da função f definida por $f(x) = \frac{1}{2} + 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ é:

(A) $[-1, 1]$

(B) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$

(D) $[-3, 3]$

Resposta:

(C)

Pergunta 46

Pergunta:

Os zeros da função g definida por $g(x) = \sin^2 x - 1$ são:

(A) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(B) $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(C) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(D) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta:

(A)

Pergunta 47

Pergunta:

Selecione a opção verdadeira.

(A) A expressão geral dos maximizantes da função definida por $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ é $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) A expressão geral dos minimizantes da função definida por $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ é $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) A expressão geral dos maximizantes da função definida por $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) A expressão geral dos minimizantes da função definida por $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Resposta:

(C)

Pergunta 48**Pergunta:**

Os zeros da função g definida por $g(x) = -3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ são:

- (A) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (B) $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (C) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (D) $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta:

(A)

Pergunta 49**Pergunta:**

O período fundamental da função h definida por $h(x) = 1 + \cos(3x)$ é:

- (A) $\frac{\pi}{2}$
- (B) π
- (C) 2π
- (D) $\frac{2\pi}{3}$

Resposta:

(D)

Pergunta 50**Pergunta:**

Considerando a função g definida por $g(x) = \operatorname{tg}^2(3x)$, temos que:

- (A) O contradomínio da função g é $\mathbb{R}$.
- (B) A função g é uma função ímpar.
- (C) Os zeros da função g são $x = \frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- (D) Nenhuma das opções anteriores é correta.

Resposta:

(C)

Pergunta 51**Pergunta:**

O valor exato da expressão $\cos\left(\arcsen\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right) - \arctg(1)$ é:

(A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1$

(C) $1 + \frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}$

Resposta:

(A)

Pergunta 52**Pergunta:**

A solução da equação trigonométrica $2 \cos(3x) = 1$ é:

(A) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(B) $x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(C) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(D) $x = \frac{\pi}{9} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta:

(C)

Pergunta 53**Pergunta:**

A solução da equação trigonométrica $1 - \cos^2 x = 2 \sin x$ é:

(A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(B) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta:

(A)

Pergunta 54

Pergunta:

Qual o conjunto-solução da seguinte condição, no intervalo $[0, 2\pi[$?

$$\sin x > \frac{1}{2} \wedge \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(A) $]0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}, 2\pi[$

(B) $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi[$

(C) $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

(D) $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$

Resposta:

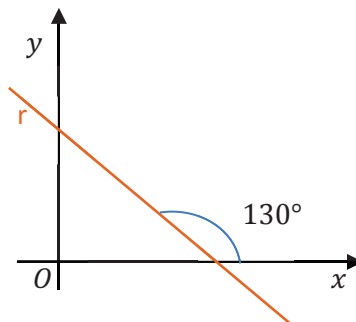
(D)

Geometria Analítica

Pergunta 55

Pergunta:

Considera o referencial ortonormado representado na figura.



O declive da reta r tem o valor aproximado de:

- (A) $-1,192$
- (B) $1,192$
- (C) 130°
- (D) -130°

Resposta:

(A)

Pergunta 56

Pergunta:

O valor da inclinação da reta de equação $y = -x$ é:

- (A) -45°
- (B) 45°
- (C) 135°
- (D) -135°

Resposta:

(C)

Pergunta 57

Pergunta:

A reta que passa no ponto $(2, -2)$ e tem de inclinação $\frac{\pi}{3}$ rad pode ser definida por:

- (A) $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$
- (B) $y = -\sqrt{3}x - 2$
- (C) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$
- (D) $y = \sqrt{3}x - 2 - 2\sqrt{3}$

Resposta:

(D)

Pergunta 58

Pergunta:

Selecione a opção que corresponde à afirmação verdadeira.

- (A) A reta de equação $(x, y) = (2, -1) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$ tem 60° de inclinação.
- (B) A reta $y = 6$ tem inclinação nula.
- (C) Se uma reta tem 55° de inclinação, então o seu declive é 5.
- (D) A reta de equação $y = 2x - 3$ tem 40° de inclinação.

Resposta:

(B)

Pergunta 59

Pergunta:

O produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 45^\circ$ tem o valor:

- (A) $18\sqrt{2}$
- (B) $9\sqrt{2}$
- (C) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$
- (D) 810

Resposta:

(B)

Pergunta 60

Pergunta:

O valor de $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ sabendo que o ponteiro maior tem 8 cm de comprimento e o menor tem 6 cm é:

- (A) 48
- (B) $48\sqrt{3}$
- (C) -24
- (D) 24

Resposta:

(C)



Pergunta 61

Pergunta:

Sendo $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 8$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, então:

- (A) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.
- (B) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.
- (C) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 30^\circ$
- (D) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 60^\circ$

Resposta:

(D)

Pergunta 62

Pergunta:

O valor de $(-3\vec{u}) \cdot (2\vec{v})$, sendo $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 10$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 150^\circ$ é:

- (A) $90\sqrt{3}$
- (B) $-90\sqrt{3}$
- (C) $15\sqrt{3}$
- (D) $-15\sqrt{3}$

Resposta:

(A)

Pergunta 63

Pergunta:

O produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo $\vec{a}(-3, 2)$ e $\vec{b}\left(1, \frac{2}{3}\right)$, tem o valor:

- (A) $-\frac{5}{3}$
- (B) $\frac{5}{3}$
- (C) $-\frac{13}{3}$
- (D) $\frac{13}{3}$

Resposta:

(A)

Pergunta 64

Pergunta:

O valor de $(\overrightarrow{AB} + \vec{u}) \cdot \vec{u}$, sendo $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $\vec{u}(-5, 2)$, é:

- (A) $-6 + \sqrt{29}$
- (B) $14 + \sqrt{29}$
- (C) 23
- (D) 43

Resposta:

(C)

Pergunta 65

Pergunta:

Selecione a opção que corresponde ao par de vetores perpendiculares.

- (A) $\vec{a} \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ e $\vec{b}(0, 3)$
- (B) $\vec{a} \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ e $\vec{b}(3, 0)$
- (C) $\vec{a} \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$ e $\vec{b}(2, 1)$
- (D) $\vec{a} \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$ e $\vec{b}(1, 2)$

Resposta:

(A)

Pergunta 66

Pergunta:

A equação reduzida da reta que passa no ponto $A(-1, 4)$ e é perpendicular à reta $2x - y = 0$ tem a expressão:

- (A) $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- (B) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$
- (C) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- (D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Resposta:

(C)

Pergunta 67

Pergunta:

Selecione a afirmação verdadeira.

- (A) O produto escalar dos vetores $\vec{u}(-1, -2, 3)$ e $\vec{v}(2, 10, 5)$ é 40.
- (B) O ângulo formado pelos vetores $\vec{r}(1, 2, 3)$ e $\vec{s}(0, -1, 5)$ é um ângulo agudo.
- (C) Os vetores $\vec{a}(0, 1, 6)$ e $\vec{b}(-2, 0, 7)$ são perpendiculares.
- (D) Os vetores $\vec{c}(2, 4, 6)$ e $\vec{d}(0, 2, 4)$ são colineares.

Resposta:

(B)

Pergunta 68

Pergunta:

Considera os pontos $A(0, 1)$ e $B(2, 3)$.

Selecione a afirmação verdadeira.

- (A) A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = x + 3$.
- (B) A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{5}{4}$.
- (C) A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.
- (D) A equação da reta tangente à circunferência de centro A , no ponto B , é $y = -x - 5$.

Resposta:

(C)

Pergunta 69

Pergunta:

O plano que contém o ponto $P(1, 0, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v}(1, 2, 3)$ pode ser definido pela equação:

- (A) $x - 2y + 3z - 7 = 0$
- (B) $x + 2y + 3z - 7 = 0$
- (C) $x - 2y - 3z - 7 = 0$
- (D) $x + 2y + 3z + 7 = 0$

Resposta:

(B)

Pergunta 70

Pergunta:

Considera o plano $\alpha : 2x - y + 3z - 10 = 0$.

Selecione a opção que corresponde a um vetor normal ao plano α .

- (A) $\vec{n}_\alpha(2, -1, 3)$
- (B) $\vec{n}_\alpha(-2, 1, 3)$
- (C) $\vec{n}_\alpha(0, -1, 3)$
- (D) $\vec{n}_\alpha(2, -1, -10)$

Resposta:

(A)

Pergunta 71**Pergunta:**

Considera os pontos $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 3)$ e $C(1, 2, 3)$.

O plano ABC pode ser definido pela equação cartesiana:

- (A) $-2x + 3y + z + 5 = 0$
- (B) $x - y + 1 = 0$
- (C) $2x - 3y + z - 5 = 0$
- (D) $-x - y + 1 = 0$

Resposta:

(B)

Pergunta 72**Pergunta:**

Considera as retas concorrentes $r: (x, y, z) = (2, 3, 4) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ e

$s: (x, y, z) = (2, -1, 3) + k'(2, 4, 3), k' \in \mathbb{R}$ contidas no plano α .

O plano α pode ser definido pela equação vetorial:

- (A) $(x, y, z) = (2, 3, 4) + s(1, 0, 1) + t(2, 4, 3), s, t \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (2, 3, 4) + s(1, 0, 1) + t(2, -1, 3), s, t \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y, z) = (2, -1, 3) + s(2, 3, 4) + t(2, 4, 3), s, t \in \mathbb{R}$
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(A)

Pergunta 73**Pergunta:**

Considera as retas paralelas $a: (x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$ e

$b: (x, y, z) = (0, 3, 1) + k'(2, 0, 4), k' \in \mathbb{R}$, contidas no plano β .

O plano β pode ser definido pelo sistema de equações paramétricas:

- (A) $\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s + t \\ z = 3 + 2s + 4t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$
- (B) $\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 - s - t \\ z = 3 + 2s + 4t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$
- (C) $\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2s - 2t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$
- (D) $\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2s + 4t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$

Resposta:

(C)

Pergunta 74

Pergunta:

Considera a reta $r: \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 5k \\ z = -3 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ e o ponto $A(4, -3, -1)$ exterior à reta.

O plano que contém o ponto A e a reta r pode ser definido pela equação cartesiana:

- (A) $x - y - 3z = -10$
- (B) $x + y + 3z = -10$
- (C) $x - y - 3z = 10$
- (D) $x + y - 3z - 10 = 0$

Resposta:

(C)

Pergunta 75

Pergunta:

Selecione a opção que corresponde à equação de um plano paralelo ao plano $\gamma: x + 4y - 2z + 8 = 0$.

- (A) $-3x + 10y + 6z = 26$
- (B) $-3x - 12y + 6z + 18 = 0$
- (C) $-2x + 5y + 6z - 16 = 0$
- (D) $-2x + 8y + z = 17$

Resposta:

(B)

Pergunta 76

Pergunta:

O plano mediador do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(1, -4, 6)$ e $B(7, 0, 2)$ pode ser definido pela equação cartesiana:

- (A) $6x + 4y - 4z - 24 = 0$
- (B) $6x + 4y - 4z = -24$
- (C) $6x + 4y - 4z = 0$
- (D) $6x + 4y + 4z = 0$

Resposta:

(C)

Pergunta 77**Pergunta:**

Considera a superfície esférica de diâmetro $[AB]$, sendo $A(1, 0, 1)$ e $B(2, 5, 0)$.

Selecione a afirmação verdadeira.

- (A) A equação reduzida da superfície esférica é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -2$.
- (B) A equação reduzida da superfície esférica é $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = \frac{27}{4}$.
- (C) A equação do plano tangente à superfície esférica no ponto B é $x + 5y - z = 27$.
- (D) A equação do plano tangente à superfície esférica no ponto B é $x + 5y - z = 0$.

Resposta:

(C)

Pergunta 78**Pergunta:**

Considera a reta $r: (x, y, z) = (2, 2, 3) + k(0, 4, 1), k \in \mathbb{R}$ e o plano $\alpha: x + y - z = 10$.

Selecione a opção que corresponde à interseção da reta r com o plano α .

- (A) A interseção é o ponto $(2, 2, 3)$.
- (B) A interseção é o ponto $(2, 14, 6)$.
- (C) A reta não se intersecta com o plano.
- (D) A reta está contida no plano.

Resposta:

(B)

Sucessões

Pergunta 79

Pergunta:

Considerando que o padrão se repete indefinidamente, pode-se induzir que o termo geral da sucessão

$\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \dots$ é:

(A) $u_n = n$

(B) $u_n = \frac{n}{4}$

(C) $u_n = \frac{n}{n+3}$

(D) $u_n = \frac{n+1}{n+4}$

Resposta:

(C)

Pergunta 80

Pergunta:

Os cinco primeiros termos da sucessão definida por $u_n = \begin{cases} -n & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ são:

(A) $2, -2, 6, -4, 10$

(B) $2, 2, -3, 3, -4$

(C) $2, -2, 6, -6, 10$

(D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(A)

Pergunta 81

Pergunta:

Considera (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{n^2}{1+n}$.

Podemos afirmar que:

(A) o terceiro termo da sucessão é $\frac{3}{4}$.

(B) o décimo termo da sucessão é $\frac{10}{11}$.

(C) os quatro primeiros termos da sucessão são $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, 4$.

(D) $\frac{36}{7}$ é termo da sucessão (u_n) .

Resposta:

(D)

Pergunta 82**Pergunta:**

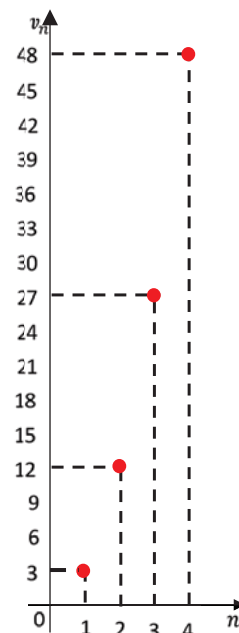
Considera a representação gráfica dos cinco primeiros termos de uma sucessão.

Considerando que o padrão se repete indefinidamente, pode-se induzir que o termo geral da sucessão representada no gráfico é:

- (A) $3n^2$
- (B) n^2
- (C) $3n$
- (D) $(n + 1)^2$

Resposta:

(A)

**Pergunta 83****Pergunta:**

Selecione a opção verdadeira.

- (A) A sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{n+(-1)^n}{3+n}$ é crescente.
- (B) A sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{n+(-1)^n}{3+n}$ é decrescente.
- (C) A sucessão (b_n) definida por $b_n = \frac{1}{n} - 2$ é decrescente.
- (D) A sucessão (b_n) definida por $b_n = \frac{1}{n} - 2$ não é monótona.

Resposta:

(C)

Pergunta 84**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais define uma sucessão monótona crescente?

- (A) $a_n = \frac{1+n}{n}$
- (B) $b_n = \frac{1}{n} - 2$
- (C) $c_n = \frac{1+n}{5}$
- (D) $d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Resposta:

(C)

Pergunta 85

Pergunta:

Relativamente ao conjunto $A =]-1, 3] \cup [4, 10[$, podemos afirmar que:

- (A) O conjunto dos majorantes é $[9, +\infty[$.
- (B) Não tem minorantes.
- (C) O ínfimo do conjunto A é -1 .
- (D) O máximo de A é 10 .

Resposta:

(C)

Pergunta 86

Pergunta:

Qual dos seguintes conjuntos é limitado?

- (A) $] -\infty, -3]$
- (B) $]5, +\infty[$
- (C) $] -10, 20[$
- (D) $] -\infty, 1] \cup \{3\}$

Resposta:

(C)

Pergunta 87

Pergunta:

Qual das seguintes sucessões não é limitada?

- (A) $u_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ par} \\ 2, & n \text{ ímpar} \end{cases}$
- (B) $v_n = 1 - \frac{1}{n}$
- (C) $w_n = -\frac{3}{n+1}$
- (D) $t_n = \frac{3n-1}{n+1}$

Resposta:

(A)

Pergunta 88

Pergunta:

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões de números reais de termo geral $u_n = 1 + 2n$ e $v_n = 3n^2 - 2n$, respetivamente. Podemos afirmar que:

- (A) o conjunto dos majorantes de (u_n) é $[3, +\infty[$.
- (B) a sucessão (u_n) não tem minorantes.
- (C) a sucessão (v_n) não tem majorantes.
- (D) a sucessão (v_n) não tem minorantes.

Resposta:

(C)

Pergunta 89

Pergunta:

Considera (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = n$. Para provarmos por indução que $S_n = \frac{n^2+n}{2}$ devemos considerar a seguinte hipótese de indução:

- (A) $S_1 = 1$
- (B) $S_n = \frac{n^2+n}{2}$
- (C) $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2}$
- (D) $S_n = \frac{n^2+n}{2} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2}$

Resposta:

(B)

Pergunta 90

Pergunta:

Qual das seguintes expressões define uma sucessão por recorrência?

- (A) $a_n = 2n + 9$
- (B) $b_n = \frac{(n+1)^2}{n}$
- (C) $c_n = \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_n = n + 6, \forall n > 1 \end{cases}$
- (D) $d_n = \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_{n+1} = d_n - \frac{1}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Resposta:

(D)

Pergunta 91**Pergunta:**

Os cinco primeiros termos da sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$ são:

- (A) 2, -1, -4, -7, -10
- (B) 5, 5, 2, -1, -4
- (C) 5, 2, -1, -4, -7
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(C)

Pergunta 92**Pergunta:**

Os cinco primeiros termos da sucessão (v_n) são 5, 10, 20, 40, 80.

Considerando que o padrão se repete indefinidamente, pode-se induzir que a sucessão pode ser definida por recorrência pela expressão:

- (A) $v_n = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = 2 \times v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- (B) $v_n = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = 2 + v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- (C) $v_n = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = 5 \times v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- (D) $v_n = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = 5^2 \times v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Resposta:

(A)

Pergunta 93**Pergunta:**

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de números reais definidas pelas expressões

$$a_n = \begin{cases} a_1 = -9 \\ a_{n+1} = a_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ e } b_n = \begin{cases} b_1 = -9 \\ b_{n+1} = b_n + 6, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ respectivamente.}$$

Podemos afirmar que:

- (A) a sucessão (a_n) é monótona decrescente.
- (B) a sucessão (a_n) é monótona crescente.
- (C) a sucessão (b_n) é monótona decrescente.
- (D) a sucessão (b_n) não é monótona.

Resposta:

(A)

Pergunta 94

Pergunta:

Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2}, n \geq 1 \end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A sucessão (v_n) é monótona crescente.
- (B) A sucessão (v_n) não é monótona.
- (C) O terceiro termo da sucessão (v_n) é $\frac{1}{2}$.
- (D) O segundo termo da sucessão (v_n) é $\frac{1}{2}$.

Resposta:

(C)

Pergunta 95

Pergunta:

Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - u_n, n \geq 1 \end{cases}$.

Podemos afirmar que:

- (A) os cinco primeiros termos da sucessão são 1, 0, -1, -2, -3.
- (B) o décimo termo da sucessão é -10.
- (C) a sucessão é monótona crescente.
- (D) a sucessão não é monótona.

Resposta:

(D)

Pergunta 96

Pergunta:

Os quatro primeiros termos da sucessão (a_n) definida por $a_n = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = n^2 \times a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ são:

- (A) 1, 4, 36, 576
- (B) 1, 1, 4, 36
- (C) 1, 2, 6, 24
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(B)

Pergunta 97**Pergunta:**

O quinto termo da sucessão (c_n) definida por $c_n = \begin{cases} c_1 = 1, & c_2 = 2 \\ c_{n+2} = 2c_{n+1} - 3c_n, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ é:

- (A) 2
- (B) -4
- (C) -11
- (D) -10

Resposta:

(C)

Pergunta 98**Pergunta:**

O termo geral da sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, & \forall n > 1 \end{cases}$ pode ser dado por:

- (A) $\frac{n}{2}$
- (B) $2n - 1$
- (C) $\frac{1}{2}n^2$
- (D) $\frac{n}{n+1}$

Resposta:

(D)

Pergunta 99**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais define uma progressão aritmética?

- (A) $a_n = -4n + 7$
- (B) $b_n = \frac{n}{n+1}$
- (C) $c_n = 3^n$
- (D) $d_n = n^2 - 100$

Resposta:

(A)

Pergunta 100**Pergunta:**

A razão da progressão aritmética (u_n) de termo geral $u_n = 2n + 9$ é:

- (A) 3
- (B) 9
- (C) 2
- (D) 7

Resposta:

(C)

Pergunta 101**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais define uma progressão aritmética monótona crescente?

- (A) $a_n = 10 - 3n$
- (B) $b_n = -\frac{2}{3}n$
- (C) $c_n = \frac{n+1}{6}$
- (D) $d_n = -n + 5$

Resposta:

(C)

Pergunta 102**Pergunta:**

A expressão algébrica para o termo geral da progressão aritmética (v_n) cujo terceiro termo é 6 e a razão é -4 pode ser:

- (A) $v_n = -4n + 6$
- (B) $v_n = -4n + 18$
- (C) $v_n = -4n$
- (D) $v_n = 6n$

Resposta:

(B)

Pergunta 103**Pergunta:**

Considera a progressão aritmética (u_n) tal que $u_5 = 20$ e $r = -2$.

O termo de ordem 120 é:

- (A) -210
- (B) -120
- (C) 210
- (D) 120

Resposta:

(A)

Pergunta 104**Pergunta:**

Considera a progressão aritmética (v_n) tal que $v_1 = 50$ e $r = -4$.

A soma dos 15 primeiros termos de (v_n) é:

- (A) 500
- (B) 120
- (C) 330
- (D) 270

Resposta:

(C)

Pergunta 105**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais define uma progressão geométrica?

- (A) $a_n = \frac{2}{3}n - \frac{4}{5}$
- (B) $b_n = \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = b_{n+1} - 3 \end{cases}$
- (C) $c_n = 10n + 2$
- (D) $d_n = 3 \times 2^{n-3}$

Resposta:

(D)

Pergunta 106**Pergunta:**

O termo geral da progressão geométrica (u_n) tal que $u_2 = \frac{3}{2}$ e $u_5 = 12$ pode ser:

- (A) $u_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-2}$
- (B) $u_n = \frac{3}{4} \times 2^{n-1}$
- (C) $u_n = 3 \times 2^{n-1}$
- (D) $u_n = \frac{3}{8} \times 4^{n-1}$

Resposta:

(B)

Pergunta 107**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais define uma progressão geométrica monótona crescente?

(A) $a_n = 0,2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(B) $b_n = (-2)^n$

(C) $c_n = -2^n$

(D) $d_n = 2^n$

Resposta:

(D)

Pergunta 108**Pergunta:**

Considera a progressão geométrica cujos dois primeiros termos são -3 e -2 , respetivamente.

A soma dos 10 primeiros termos da sucessão, arredondada às centésimas, é:

(A) $-8,84$

(B) $-10,84$

(C) -10

(D) -8

Resposta:

(A)

Pergunta 109**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais corresponde a uma sucessão que tem limite 1?

(A) $a_n = -\frac{1}{n+2}$

(B) $b_n = \frac{2n^2+1}{6n}$

(C) $c_n = 3n + 1$

(D) $d_n = \frac{n}{n+3}$

Resposta:

(D)

Pergunta 110**Pergunta:**

Considera as sucessões cujos termos gerais são $u_n = \frac{5n}{n+1}$ e $v_n = 5 - 7n^2$. Podemos afirmar que:

- (A) a sucessão (u_n) é divergente.
- (B) a sucessão (u_n) tende para 5.
- (C) a sucessão (v_n) é convergente.
- (D) a sucessão (v_n) tende para 5.

Resposta:

(B)

Pergunta 111**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais corresponde a uma sucessão que tem limite $+\infty$?

- (A) $a_n = 10 - 3n$
- (B) $b_n = \frac{5}{3n+6}$
- (C) $c_n = 3n^2 + 2n$
- (D) $d_n = \frac{3n^2}{1+n^2}$

Resposta:

(C)

Pergunta 112**Pergunta:**

Considera as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais definidos por $a_n = n^2 + 1$ e $b_n = \frac{n+1}{2n}$.

Os três primeiros termos da sucessão de termo geral $\frac{2a_n}{5b_n}$ são:

- (A) $1, \frac{2}{5}, 5$
- (B) $\frac{4}{5}, \frac{8}{3}, 6$
- (C) $\frac{4}{5}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(B)

Pergunta 113**Pergunta:**

Considera as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais definidos por $u_n = 3n^2 + 2$ e

$$v_n = \frac{8n^2 - 9}{n}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$
- (B) $\lim(u_n + v_n) = 0$
- (C) $\lim(u_n \times v_n) = -\infty$
- (D) $\lim\left(\frac{2}{5}v_n\right) = \frac{2}{5}$

Resposta:

(A)

Pergunta 114**Pergunta:**

Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim(u_n) = 1$ e $\lim(v_n) = 2$.

O valor de $\lim \frac{-3u_n + 2v_n}{(v_n)^2}$ é:

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{4}$
- (C) $-\frac{3}{2}$
- (D) 2

Resposta:

(B)

Pergunta 115**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais corresponde a uma sucessão com limite igual a 0?

- (A) $a_n = \sqrt{\frac{5n^2 - 4}{n^2}}$
- (B) $b_n = n\sqrt{\frac{3}{2}}$
- (C) $c_n = \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2} - \sqrt{n}}$
- (D) $d_n = \frac{-2}{1 - \sqrt{n}}$

Resposta:

(D)

Pergunta 116**Pergunta:**

Qual dos seguintes termos gerais corresponde a uma sucessão com limite igual a 1?

(A) $a_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$

(B) $b_n = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{2}$

(C) $c_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

(D) $d_n = \frac{1}{n} + \sqrt[n]{3}$

Resposta:

(D)

Pergunta 117**Pergunta:**

A soma de todos os termos da progressão geométrica (u_n) , cujos primeiros dois termos são 1 e $\frac{1}{3}$, respetivamente, é:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{9}$

(D) 3

Resposta:

(B)

Pergunta 118**Pergunta:**

A soma de todos os termos da progressão geométrica (u_n) , cujos primeiros dois termos são 4 e 2, respetivamente, é:

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 4

(D) 8

Resposta:

(D)

Funções Reais de Variável Real

Pergunta 119

Pergunta:

O domínio da função f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ é:

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- (B) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (D) $\mathbb{R}$

Resposta:

(A)

Pergunta 120

Pergunta:

Qual a expressão que corresponde a uma simplificação da fração racional $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$?

- (A) $\frac{x-1}{x-3}$
- (B) $\frac{x+1}{x+3}$
- (C) $\frac{x-1}{x+3}$
- (D) $\frac{x+1}{x-3}$

Resposta:

(C)

Pergunta 121

Pergunta:

A fração racional resultante da adição $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} + \frac{3x}{x+1}$ pode ter a expressão:

- (A) $\frac{4x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$
- (B) $\frac{4x^2 + 3x + 5}{x^2 - 1}$
- (C) $\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$
- (D) $\frac{4x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$

Resposta:

(D)

Pergunta 122**Pergunta:**

Considera as funções racionais definidas por $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ e $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$.

O domínio da função $f - g$ é:

- (A) $\mathbb{R}$
- (B) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (C) $\mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$
- (D) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$

Resposta:

(B)

Pergunta 123**Pergunta:**

Selecione a opção que corresponde a uma simplificação da expressão $\frac{x^2-9}{x^2} \times \frac{3x}{x-3}$.

- (A) $\frac{3x+9}{x}$
- (B) $\frac{3x+1}{x}$
- (C) $\frac{9}{x}$
- (D) Nenhuma das opções anteriores.

Resposta:

(A)

Pergunta 124**Pergunta:**

Considera as funções racionais definidas por $a(x) = \frac{(x-1)^2}{2x}$ e $b(x) = \frac{4(x-1)}{3}$.

O domínio da função $\frac{a}{b}$ é:

- (A) $\mathbb{R}$
- (B) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- (C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resposta:

(B)

Pergunta 125

Pergunta:

O conjunto-solução da equação $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5}{4x^2-4}$ é:

- (A) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
- (B) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
- (C) $\left\{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\}$
- (D) $\left\{-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right\}$

Resposta:

(D)

Pergunta 126

Pergunta:

O conjunto-solução da inequação $\frac{x^2-8x+16}{2x-1} \leq 0$ é:

- (A) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
- (B) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \{4\}$
- (C) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$
- (D) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \{4\}$

Resposta:

(D)

Pergunta 127

Pergunta:

Os zeros da função racional $f(x) = \frac{3x^2-3}{x^2-3x+2}$ são:

- (A) 1 e 2
- (B) -1 e 1
- (C) -1
- (D) -1 e 2

Resposta:

(C)

Pergunta 128

Pergunta:

A função g definida por $g(x) = \frac{3x^2+7}{5x+7}$ é negativa no intervalo:

- (A) $] -\infty, -\frac{7}{5}[$
- (B) $] -\infty, -\frac{7}{5}]$
- (C) $[-\frac{7}{5}, +\infty[$
- (D) $] -\frac{7}{5}, +\infty[$

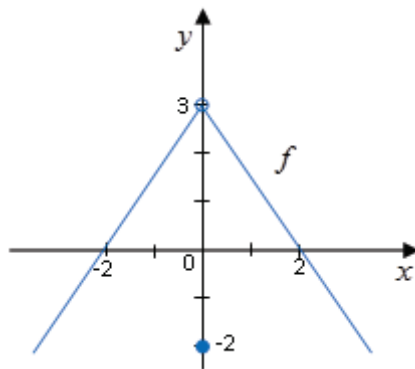
Resposta:

(A)

Pergunta 129

Pergunta:

Considera a função f representada graficamente por:



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

- (A) -2
- (B) 0
- (C) 3
- (D) Não existe.

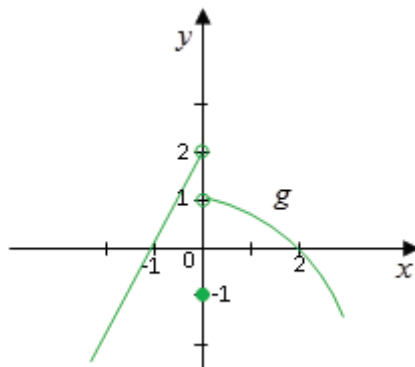
Resposta:

(C)

Pergunta 130

Pergunta:

Considera a função f representada graficamente por:



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$?

- (A) 2
- (B) 1
- (C) -1
- (D) Não existe.

Resposta:

(D)

Pergunta 131

Pergunta:

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$, sendo $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > -1 \\ x + 3 & \text{se } x < -1 \end{cases}$?

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 2
- (D) Não existe.

Resposta:

(D)

Pergunta 132

Pergunta:

Considera a função t definida por $t(x) = -x^2 - x^3$.

O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x)$ é:

- (A) $+\infty$
- (B) $-\infty$
- (C) 0
- (D) -1

Resposta:

(B)

Pergunta 133

Pergunta:

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{5x + 9}$?

- (A) $-\infty$
- (B) 3
- (C) $\frac{3}{5}$
- (D) Não existe.

Resposta:

(C)

Pergunta 134

Pergunta:

Considera as funções definidas por $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$ e $g(x) = \frac{5}{x^2+10}$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x)$?

- (A) $-\infty$
- (B) $+\infty$
- (C) 0
- (D) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

Resposta:

(A)

Pergunta 135

Pergunta:

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{2}$?

- (A) 0
- (B) $-\infty$
- (C) $+\infty$
- (D) Não existe.

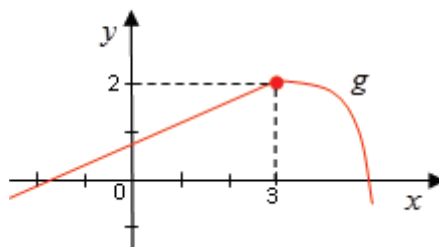
Resposta:

(D)

Pergunta 136

Pergunta:

Considera a função g representada graficamente por:



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} g(x^2 + 2)$?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 0
- (D) $+\infty$

Resposta:

(B)

Pergunta 137

Pergunta:

Considera a função s definida por $s(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{2}$.

O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x)$ é:

- (A) $+\infty$
- (B) $-\infty$
- (C) $\frac{3}{2}$
- (D) 0

Resposta:

(D)

Pergunta 138

Pergunta:

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{4x+4}$?

- (A) Não existe.
- (B) 0
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $-\frac{1}{4}$

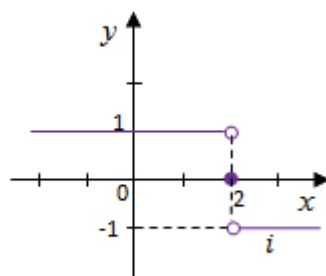
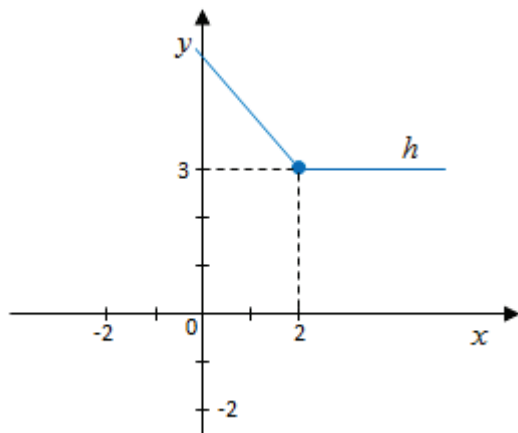
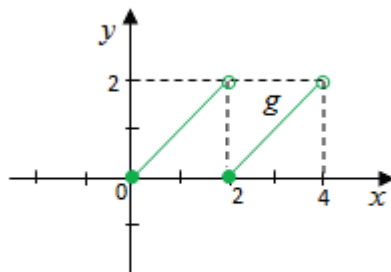
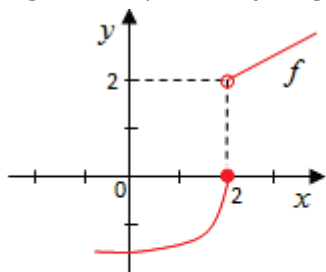
Resposta:

(A)

Pergunta 139

Pergunta:

Considera as seguintes representações gráficas de funções:



A função contínua em $x = 2$ é:

- (A) f
- (B) g
- (C) h
- (D) i

Resposta:

(C)

Pergunta 140

Pergunta:

Considera a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- (A) f é contínua em $x = 3$.
- (B) f não é contínua em $x = 1$.
- (C) f é contínua em $x = 5$.
- (D) nenhuma das opções anteriores está correta.

Resposta:

(C)

Pergunta 141**Pergunta:**

Considera as funções a , b e c definidas por:

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad b(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 2 \\ 3x & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad c(x) = \frac{x^2-3x+1}{2}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função a é contínua em $x = 0$.
- (B) As funções a e b são contínuas em $x = 2$.
- (C) A função b é contínua em $x = 2$.
- (D) A função c é contínua em $x = -2$.

Resposta:

(D)

Pergunta 142**Pergunta:**

Considera a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se } x < 2 \\ 1+p & \text{se } x = 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

Para que a função f seja contínua em todo o seu domínio, p terá de ser igual a:

- (A) 3
- (B) 2
- (C) 1
- (D) 0

Resposta:

(A)

Pergunta 143**Pergunta:**

Considera as funções definidas em seguida.

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-2x-3} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{3 \sin x}{2}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função f é descontínua em $x = 0$.
- (B) A função g é contínua em $\mathbb{R}$ porque é uma função racional.
- (C) A função g é contínua.
- (D) A função h é descontínua em $x = 0$.

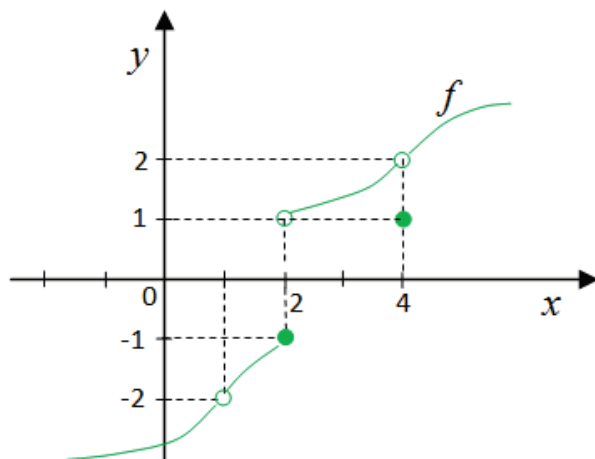
Resposta:

(C)

Pergunta 144

Pergunta:

Considera o gráfico da função f :



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função f é descontínua em $x = 2$ e $x = 4$.
- (B) A função f é contínua em $x = 2$ e descontínua em $x = 4$.
- (C) A função f é contínua em $x = 2$ e $x = 4$.
- (D) A função f é descontínua em $x = 2$ e contínua em $x = 4$.

Resposta:

(A)

Pergunta 145

Pergunta:

Considera as funções definidas por:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \quad g(x) = 3 \cos x + 2 \quad \text{e} \quad h(x) = \sqrt{2x + 1}$$

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) A função contínua em $\mathbb{R}$ é a função f .
- (B) A função contínua em $\mathbb{R}$ é a função g .
- (C) A função contínua em $\mathbb{R}$ é a função h .
- (D) Nenhuma das funções é contínua em $\mathbb{R}$.

Resposta:

(B)

Pergunta 146**Pergunta:**

Sejam m e n duas funções contínuas num ponto a . Das seguintes funções, seleciona aquela que não é necessariamente contínua em a .

- (A) $m + n$
- (B) $\frac{m}{n}$
- (C) $m \times n$
- (D) $\sqrt[3]{m} - \sqrt[5]{n}$

Resposta:

(B)

Pergunta 147**Pergunta:**

Considera as funções definidas por $s(x) = 4 - x^2$ e $t(x) = \sqrt{x}$.

A função $t \circ s$ é contínua em:

- (A) $\mathbb{R}$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
- (D) $[-2, 2]$

Resposta:

(D)

Pergunta 148**Pergunta:**

Considera as funções definidas por $a(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e $b(x) = |x|$.

A função $b \circ a$ é contínua em:

- (A) $\mathbb{R}$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (D) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Resposta:

(A)

Pergunta 149**Pergunta:**

Qual das seguintes expressões define uma função cujo gráfico admite como assíntota vertical a reta de equação $x = 1$?

(A) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2}$

(B) $g(x) = \frac{1}{x}$

(C) $h(x) = \frac{x-5}{x+2}$

(D) $i(x) = \frac{x}{x-1}$

Resposta:

(D)

Pergunta 150**Pergunta:**

As assíntotas verticais ao gráfico da função definida por $f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{4x^2 - 16}$ são:

(A) $x = 0$ e $x = 2$

(B) $x = 1$ e $x = 2$

(C) $x = -2$ e $x = 0$

(D) $x = -2$ e $x = 2$

Resposta:

(D)

Pergunta 151**Pergunta:**

Sabendo que o gráfico da função g definida em $\mathbb{R}^+$ admite como assíntota a reta de equação $y = 2x + 3$, podemos afirmar que:

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 2$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$

Resposta:

(D)

Pergunta 152**Pergunta:**

Considera a função h de domínio $\mathbb{R}^-$, cujo gráfico admite como assíntota oblíqua a reta de equação $y = -5x$.

O valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{h(x)}{x} + (h(x) + 5x) \right]$ é:

- (A) -5
- (B) 5
- (C) -1
- (D) 1

Resposta:

(A)

Pergunta 153**Pergunta:**

Acerca da função d , contínua no seu domínio, sabe-se que:

- $D_d =]-\infty, -3[$
- $\lim_{x \rightarrow -3} d(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (d(x) - 2x + 3) = 0$

As equações das assíntotas ao gráfico de d são:

- (A) $y = -3$
- (B) $x = -3$ e $y = 2x - 3$
- (C) $x = -3$ e $y = 2x$
- (D) O gráfico da função d não admite assíntotas.

Resposta:

(B)

Pergunta 154**Pergunta:**

Considera a função k definida por $k(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O gráfico da função k não admite assíntotas verticais.
- (B) A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de k .
- (C) O gráfico da função k tem uma assíntota oblíqua de equação $y = 3x$.
- (D) O gráfico da função k tem uma assíntota oblíqua de equação $y = -3x$.

Resposta:

(C)

Pergunta 155

Pergunta:

Considera a função t definida por $t(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O gráfico de t não admite assíntotas verticais.
- (B) A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de t .
- (C) O gráfico da função t tem uma assíntota oblíqua de equação $y = x + 2$.
- (D) O gráfico da função t não admite assíntotas oblíquas.

Resposta:

(A)

Pergunta 156

Pergunta:

As assíntotas ao gráfico da função h definida por $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$ têm as equações:

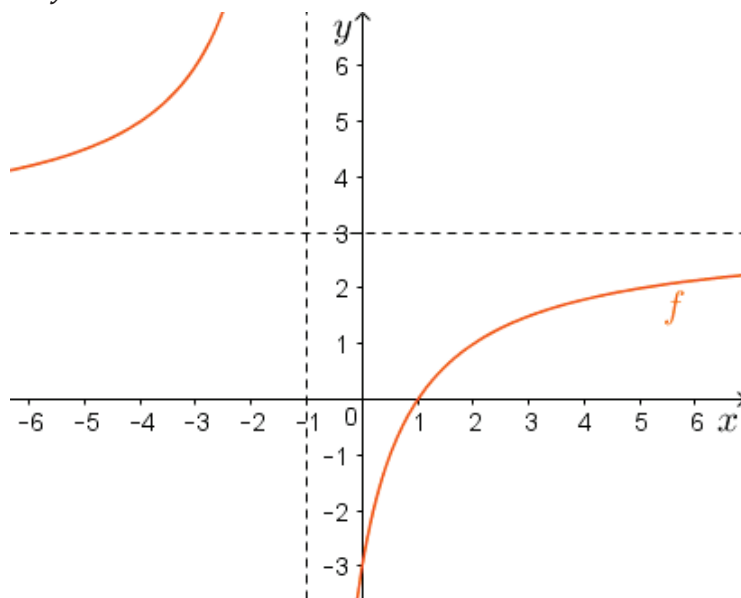
- (A) $x = 0$ e $x = 1$
- (B) $x = 0$ e $y = x$
- (C) $y = 1$ e $y = \sqrt{3}x$
- (D) $y = -\sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$

Resposta:

(D)

Pergunta 157**Pergunta:**

Considera a representação gráfica da função racional f do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ e das suas assíntotas de equações $x = -1$ e $y = 3$.



A função f pode ser definida pela expressão:

- (A) $f(x) = 3 + \frac{6}{x-1}$
- (B) $f(x) = 3 + \frac{6}{x+1}$
- (C) $f(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$
- (D) $f(x) = 3 - \frac{6}{x-1}$

Resposta:

(C)

Pergunta 158**Pergunta:**

Considera a função racional f definida por $f(x) = \frac{2x+5}{3x-6}$.

A assíntota horizontal que o gráfico de f admite tem a equação:

- (A) $y = \frac{2}{3}$
- (B) $y = -\frac{2}{3}$
- (C) $y = \frac{3}{2}$
- (D) $y = -\frac{3}{2}$

Resposta:

(A)

Pergunta 159

Pergunta:

Considera a função f definida por $f(x) = x^2 + 3x$.

A taxa média de variação de f no intervalo $[2, 5]$ é:

- (A) 10
- (B) 20
- (C) 30
- (D) 35

Resposta:

(A)

Pergunta 160

Pergunta:

Considera a função t , definida por $t(x) = \frac{1}{x+2}$. A derivada de t no ponto 3 é:

- (A) $\frac{1}{25}$
- (B) $-\frac{1}{25}$
- (C) $\frac{1}{5}$
- (D) $-\frac{1}{5}$

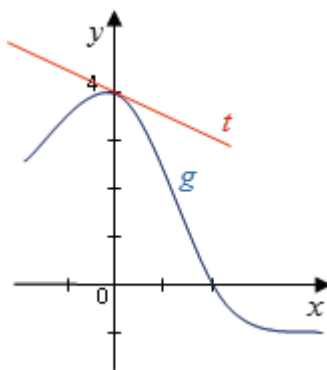
Resposta:

(B)

Pergunta 161

Pergunta:

Considera a representação gráfica da função g e a reta t , tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0.



O valor de $f'(0)$ pode ser igual a:

- (A) 2
- (B) 0
- (C) $-\frac{1}{2}$
- (D) 5

Resposta:

(C)

Pergunta 162**Pergunta:**

Considera a função h definida por $h(x) = x^2 - 6x + 4$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2 é:

- (A) $y = -2x$
- (B) $y = 2x$
- (C) $y = -2x + 4$
- (D) $y = 2x - 4$

Resposta:

(A)

Pergunta 163**Pergunta:**

Considera a função k definida por $k(x) = \begin{cases} 3 + x - x^2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Os valores que a e b podem tomar de modo que a função k seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ são:

- (A) $a = -1$ e $b = 5$
- (B) $a = 3$ e $b = 1$
- (C) $a = 3$ e $b = 5$
- (D) $a = -3$ e $b = 5$

Resposta:

(D)

Pergunta 164**Pergunta:**

Foi lançada uma bola de baixo para cima e a distância, h , em metros, da bola ao solo, t segundos após ter sido lançada, é dada pela expressão:

$$h(t) = 1 + 10t - 2t^2$$

A velocidade da bola dois segundos após o seu lançamento é:

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 13

Resposta:

(C)

Pergunta 165**Pergunta:**

Considera as funções definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 5$.

O valor de $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ é:

- (A) $-\frac{5}{8}$
- (B) $\frac{3}{8}$
- (C) 2
- (D) -1

Resposta:

(A)

Pergunta 166**Pergunta:**

Considera as funções definidas por $a(x) = \sqrt{x+1}$ e $b(x) = 3x^2$.

O valor de $(a \circ b)'(2)$ é:

- (A) $\sqrt{13}$
- (B) $6\sqrt{13}$
- (C) $\frac{6}{\sqrt{13}}$
- (D) $\frac{12}{\sqrt{13}}$

Resposta:

(C)

Pergunta 167**Pergunta:**

Considera a função real de variável real h definida por $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$ e o intervalo $[1, 3]$.

O valor de $c \in]1, 3[$ cuja tangente é paralela à reta secante nos pontos de abcissas 1 e 3 é:

- (A) $c = 1,2$
- (B) $c = 2$
- (C) $c = \sqrt{2}$
- (D) $c = \frac{5}{2}$

Resposta:

(B)

Pergunta 168

Pergunta:

Considera a função f definida por $f(x) = x^3 - 3x$.

Podemos afirmar que:

- (A) f é crescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$.
- (B) f é crescente em $[-1, 1]$.
- (C) A função tem um máximo relativo quando $x = 1$.
- (D) A função não tem mínimos relativos.

Resposta:

(A)

Pergunta 169

Pergunta:

Fez-se uma experiência para estudar a relação entre a velocidade de propagação do som no ar e a temperatura.

Selecione a opção correta.

- (A) A variável explicativa é a velocidade de propagação do som.
- (B) A variável explicativa é a temperatura do ar.
- (C) A variável resposta é a temperatura do ar.
- (D) Não é possível saber qual é a variável explicativa e a variável resposta.

Resposta:

(B)

Pergunta 170

Pergunta:

Para se estudar a associação entre a idade das mulheres e o valor da sua tensão arterial selecionaram-se 20 mulheres com idades compreendidas entre os 30 e os 70 anos de idade e registaram-se os valores.

Nesta situação:

- (A) A variável explicativa é a tensão arterial.
- (B) A variável resposta é a idade.
- (C) A variável explicativa é a idade.
- (D) Não é possível saber qual é a variável explicativa e a variável resposta.

Resposta:

(C)

Pergunta 171

Pergunta:

Considere o ponto $A(2,5; 5)$ e a reta r de equação $y = 3x + 4$.

O desvio vertical do ponto A em relação à reta r é:

- (A) 1
- (B) -1
- (C) -6,5
- (D) 6,5

Resposta:

(C)

Pergunta 172**Pergunta:**

Considera a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((5, 12), (7, 14), (8, 20), (9, 22), (10, 30))$ e a reta $t: y = ax + b$.

Para que t seja a reta dos mínimos quadrados, os valores de a e de b , arredondados às centésimas são:

- (A) 3,49 e $-7,59$
- (B) $-3,49$ e $-7,62$
- (C) $-3,29$ e $7,82$
- (D) $3,29$ e $-7,82$

Resposta:

(A)

Pergunta 173**Pergunta:**

Considera os pontos $P_1(1, 3)$, $P_2(1, 8)$, $P_3(2, 7)$ e a reta t de equação $y = 2x + 3$.

Seleciona a afirmação verdadeira.

- (A) O ponto P_1 situa-se acima da reta t .
- (B) O desvio do ponto P_2 em relação à reta t é negativo.
- (C) O ponto P_3 situa-se acima da reta t .
- (D) O ponto P_3 pertence à reta t .

Resposta:

(D)

Pergunta 174**Pergunta:**

Os dados da tabela dizem respeito aos valores da altura e da massa de onze mulheres portuguesas.

Altura (em cm)	157	160	165	168	172	169	171	168	168	170	166
Massa (em kg)	52	61	62	67	70	72	72	68	66	69	65

A massa, arredondada às unidades, que se prevê, através da reta dos mínimos quadrados, para uma mulher com 175 cm de altura é:

- (A) 71 kg
- (B) 70 kg
- (C) 73 kg
- (D) 76 kg

Resposta:

(D)

Pergunta 175**Pergunta:**

Na tabela estão registadas temperaturas, em graus centígrados, a diversos níveis de profundidade, em metros, captadas numa zona sísmica.

Profundidade (em metros)	0	50	80	100	150
Temperatura (em °C)	15	38	60	78	130

Relativamente a esta situação, o coeficiente de correlação linear, arredondado às centésimas, é:

- (A) $r = 0,98$
- (B) $r = -0,21$
- (C) $r = 0,89$
- (D) $r = -0,82$

Resposta:

(A)

Pergunta 176

Pergunta:

De uma amostra bivariada (x, y) sabe-se que $S_x = 3$, $S_y = 2$ e a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 0,3x + 1$.

O valor do coeficiente de correlação linear, arredondado às centésimas, é:

- (A) 0,33
- (B) 0,45
- (C) -0,21
- (D) -0,31

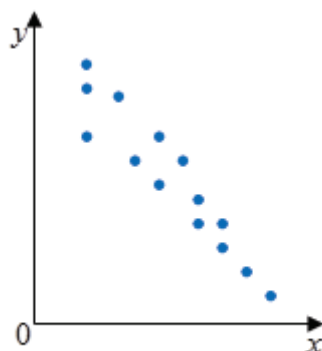
Resposta:

(B)

Pergunta 177

Pergunta:

No gráfico está representada uma nuvem de pontos.



O valor que pode representar o coeficiente de correlação linear do gráfico é:

- (A) 2
- (B) -0,8
- (C) -0,2
- (D) 1

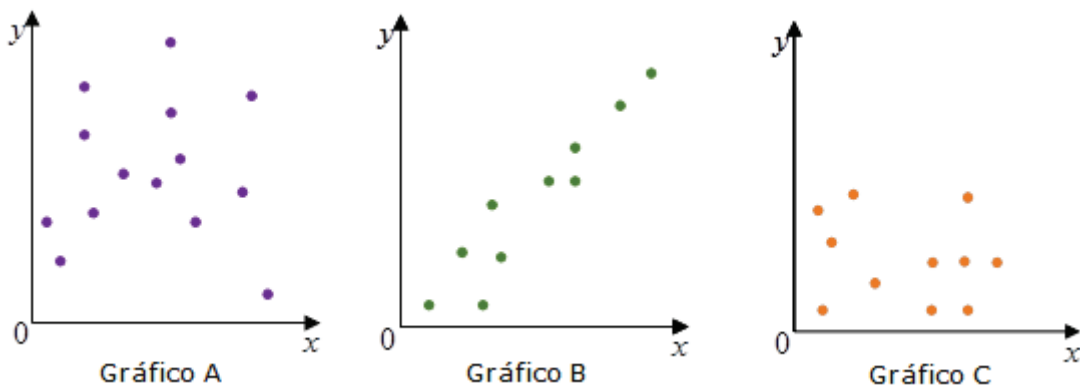
Resposta:

(B)

Pergunta 178

Pergunta:

Nos gráficos seguintes estão representadas três nuvens de pontos.



Selecione a opção verdadeira.

- (A) O gráfico que representa uma associação linear mais forte é o gráfico C.
- (B) O coeficiente de correlação linear correspondente ao gráfico A é superior ao correspondente ao gráfico B.
- (C) O gráfico que representa uma associação linear mais forte é o gráfico B.
- (D) O coeficiente de correlação linear correspondente ao gráfico B pode ser 1.

Resposta:

(C)