

# Resoluções dos exercícios

do **Caderno de Exercícios**

**MAT 11** MATEMÁTICA A  
11.º ANO

**EXCLUSIVO  
para o  
Professor**



  
Texto

# Índice

## Propostas de resolução dos exercícios do Caderno de Exercícios

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Tema 1 - Trigonometria e Funções Trigonométricas..... | 2   |
| Tema 2 - Geometria Analítica.....                     | 54  |
| Tema 3 - Sucessões.....                               | 93  |
| Tema 4 - Funções Reais de Variável Real.....          | 138 |
| Tema 5 - Estatística.....                             | 219 |

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

## Pág. 4

1.  $\sin \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{\overline{DE}}{10} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{3 \times 10}{5} \Leftrightarrow \overline{DE} = 6$

$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$$
$$\overline{AD}^2 + 36 = 100 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 64 \Leftrightarrow \overline{AD} = 8; \overline{CD} = 8 \text{ e } \overline{BA} = 8$$
$$A = \frac{\overline{CE} + \overline{BA}}{2} \times \overline{AD} = \frac{\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{BA}}{2} \times \overline{AD} = \frac{8 + 6 + 8}{2} \times 8 = 88$$

2.  $\overline{DB}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$

$$\overline{DB}^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \overline{DB}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{DB} = 2$$
$$\sin \alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{2 \times 5}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{10\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \overline{DC} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$$
$$\overline{BC}^2 + 4 = 4 \times 5 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$$
$$A = \frac{\overline{BC} \times \overline{DB}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

## Pág. 5

3. a) O ângulo  $ACB$  é reto, pois é um ângulo inscrito numa semicircunferência.

b)  $\cos \alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{\overline{CA}}{12} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{1 \times 12}{3} \Leftrightarrow \overline{CA} = 4$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$$
$$16 + \overline{CB}^2 = 12^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = 128 \Leftrightarrow \overline{CB} = \sqrt{128} \Leftrightarrow \overline{CB} = 8\sqrt{2}$$
$$P = \overline{CA} + \overline{CB} + \overline{AB} = 4 + 8\sqrt{2} + 12 = 16 + 8\sqrt{2}$$

4. a)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

b) Quando o triângulo retângulo é isósceles,  $b = a$  e  $\beta = \alpha = 45^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{Vem então: } \cos^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ &= 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 45^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2 \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \sin \beta$$

$$A = \frac{a \times b}{2} = \frac{2 \sin \beta \times 2 \sin \alpha}{2} = 2 \sin \alpha \times \sin \beta = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5. \quad \cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{6}{10} = \frac{\overline{AD}}{10} \Leftrightarrow \overline{AD} = 6$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$36 + \overline{DC}^2 = 100 \Leftrightarrow \overline{DC}^2 = 64 \Leftrightarrow \overline{DC} = 8$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \overline{DB} = 4$$

$$A = \frac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{2} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) \times \overline{DC}}{2} = \frac{(6+4) \times 8}{2} = 40$$

6. Designemos por  $D'$  e  $C'$  as projeções ortogonais dos pontos  $D$  e  $C$  sobre o segmento de reta  $[AB]$ .

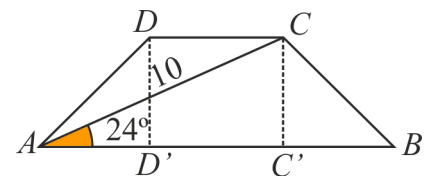
$$\sin 24^\circ = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin 24^\circ = \frac{\overline{CC'}}{10} \Leftrightarrow \overline{CC'} = 10 \sin 24^\circ$$

$$\cos 24^\circ = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 24^\circ = \frac{\overline{AC'}}{10} \Leftrightarrow \overline{AC'} = 10 \cos 24^\circ$$

$$A = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{CC'} = \frac{2 \overline{AD'} + \overline{DC} + \overline{DC}}{2} \times \overline{CC'} =$$

$$= \frac{2 \overline{AD'} + 2 \overline{DC}}{2} \times \overline{CC'} = (\overline{AD'} + \overline{DC}) \times \overline{CC'} = \overline{AC'} \times \overline{CC'} =$$

$$= 10 \cos 24^\circ \times 10 \sin 24^\circ = 100 \times \cos 24^\circ \times \sin 24^\circ \approx 37,16$$



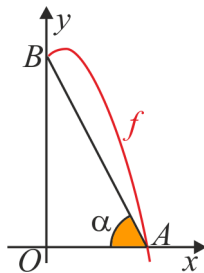
7. Começemos por determinar os zeros de  $f$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

Como  $-2 \notin D_f$ , o único zero é  $x = 3$ . O ponto  $A$  tem então coordenadas  $(3, 0)$ .

$f(0) = 6$ , o ponto  $B$  tem coordenadas  $(0, 6)$ .



$$\sin \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} ; \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

$$\overline{OB} = 6 ; \overline{OA} = 3 ; \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9 + 36 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 45 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{45} \Leftrightarrow \overline{AB} = 3\sqrt{5} \text{ vem então}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{15} = \frac{2\sqrt{5}}{5} ; \cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{3} = 2$$

## Pág. 6

$$\begin{aligned} 8. \quad \sin \alpha &= \frac{\sqrt{6}}{3} ; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{6}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} \cos \alpha + \sqrt{8} \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 + 4 = 6$$

$$9. \quad \frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha - 2 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 5$$

$$10. \quad \sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha = 4 \Leftrightarrow \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha = 4 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = 4 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$11. \quad (\operatorname{tg} \alpha + 1)^2 = \frac{9}{4} + 2 \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = \frac{9}{4} + 2 \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$12. \quad \sqrt[4]{x} \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \left( \frac{4}{\sqrt{2}} \right)^4 \Leftrightarrow x = \frac{(2^2)^4}{2^2} \Leftrightarrow x = 2^{8-2} \Leftrightarrow x = 2^6 \Leftrightarrow x = 64$$

13. a)  $\operatorname{sen} \alpha \times \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{sen} \alpha \times \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

b)  $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

c)  $1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$

d)  $\operatorname{sen} \alpha \times \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha \times \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \operatorname{sen} \alpha \times \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

e)  $\frac{2 - (1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{\cos \alpha} = \frac{2 - (1 - 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos \alpha} =$   
 $= \frac{2 - 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} =$   
 $= \frac{\cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha$

f)  $(1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 = (1 - \cos^2 \alpha)^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)^2 =$   
 $= (\operatorname{sen}^2 \alpha)^2 \frac{1}{\cos^4 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$

## Pág. 7

14. a<sub>1</sub>)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{7}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

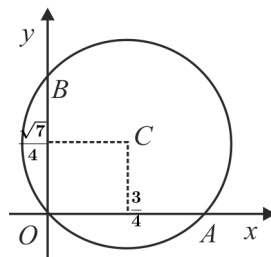
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{9}{16} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Logo  $C\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .

a<sub>2</sub>)  $O(0,0)$ ;  $C\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ , então  $\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{7}{16}} = 1$ .

O raio da circunferência mede 1.



**a<sub>3</sub>)** Equação da circunferência:  $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1^2$

O ponto  $A$  é um ponto da circunferência que tem ordenada 0.

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}.$$

Logo  $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ .

O ponto  $B$  é um ponto da circunferência que tem abscissa 0.

$$\left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(y - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{7}}{4} = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \frac{2\sqrt{7}}{4} \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Logo,  $B\left(0, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ .

**a<sub>4</sub>)**  $\overline{OA} = \frac{3}{2}$  ;  $\overline{OB} = \frac{\sqrt{7}}{2}$  ;  $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$   
 $= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

$$P_{[OAB]} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7+\sqrt{7}}{2}$$

**b)** O raio da circunferência mede 1.  $A$  e  $B$  são pontos da circunferência e  $\overline{AB} = 2$ . Logo os pontos  $A$  e  $B$  são extremos de um diâmetro da circunferência.

**15.**  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{9}{10} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\overline{FB}}{4\sqrt{10}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \frac{4 \times 10}{10} \Leftrightarrow \overline{FB} = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 12$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \frac{9 \times 17}{169} + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = 1 - \frac{153}{169} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{169} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{4}{13}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3\sqrt{17}}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{3\sqrt{17}}{4}. \text{ Sabemos também que } \overline{GC} = \overline{FB} = 4.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{GC}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{17}}{4} = \frac{\overline{AC}}{4} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\sqrt{17}$$

Mas  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ .

$$144 + \overline{BC}^2 = 9 \times 17 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 153 - 144 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{BC} = 3$$

Temos, então, que  $\overline{AB} = 12$  ;  $\overline{BC} = 3$  e  $\overline{GC} = 4$  .

$$V = 12 \times 3 \times 4 = 144$$

16. a)  $6(\cos 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6\left(\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6}\right) = \sqrt{3}$

b)  $\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ - \sqrt{2} \operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-2}{2}} = -\sqrt{3}$

c)  $\frac{\cos^2 45^\circ + \cos 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{4}$

## Pág. 8

17.  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{12}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = 6$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2$$

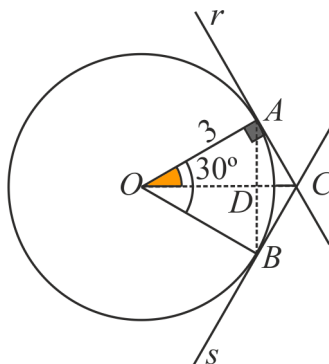
$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 6 - 2 = 4$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 36 + 12 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 48 \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\sqrt{3}$$

$$P_{[ABD]} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} = 4 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$$

18. Se  $\widehat{BOA} = 60^\circ$ , e uma vez que os triângulos retângulos  $[OAC]$  e  $[OBC]$  são geometricamente iguais, vem que  $\widehat{COA} = 30^\circ$  .

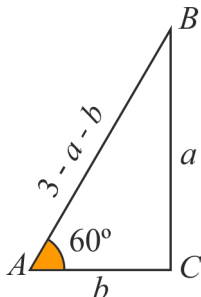


$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{AC}}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{3}$$

$$A_{[OAC]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{[OACB]} = 2 \times A_{[OAC]} = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

19. Designando por  $a$  e  $b$  as medidas dos catetos, uma vez que o perímetro do triângulo é 3, sabemos que a medida da hipotenusa é  $3 - a - b$ .



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}b \quad (1)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{3-a-b} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{3-a-b} \Leftrightarrow 3-a-b = 2b \Leftrightarrow a = 3-3b \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2) vem } \sqrt{3}b = 3-3b \Leftrightarrow \sqrt{3}b + 3b = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 3)b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{3}{\sqrt{3}+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{3(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)} \Leftrightarrow b = \frac{3(\sqrt{3}-3)}{3-9} \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}-3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{De (1) vem } a = \sqrt{3} \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

$$a+b = \frac{3\sqrt{3}-3}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

20.  $\widehat{PRQ} = 90^\circ$  e  $\widehat{MPR} = \widehat{RQM} = 45^\circ$

Designando por  $a$  a medida de um cateto, o outro cateto também mede  $a$  e a medida da hipotenusa é

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a.$$

Vem então:

$$a + a + \sqrt{2}a = \sqrt{12} + \sqrt{24} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})a = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{6})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2(2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \sqrt{12})}{4-2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{12}$$

Como a hipotenusa mede  $\sqrt{2}a$ ,

$$\begin{aligned}\overline{PM} &= \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{12}) = \sqrt{6} + \frac{\sqrt{12}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{2} = \\ &= \sqrt{6} + \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{MPR}) = \frac{\overline{RM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{RM}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{RM}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{RM} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{OM}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{OM} = 1; \overline{OR} = \overline{RM} - \overline{OM} = \sqrt{3} - 1$$

## Pág. 9

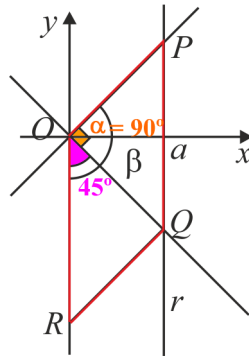
$$\begin{aligned}21. \quad & \frac{\operatorname{sen} 90^\circ + \cos 90^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ \times \cos 150^\circ + (\cos 135^\circ - \operatorname{sen} 150^\circ)^2} = \\ &= \frac{1+0}{\operatorname{sen}(180^\circ-120^\circ) \times (-\cos(180^\circ-150^\circ)) + (-\cos(180^\circ-135^\circ) - \operatorname{sen}(180^\circ-150^\circ))^2} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ \times (-\cos 30^\circ) + (-\cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{-\frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{-\frac{3}{4} + \frac{2+2\sqrt{2}+1}{4}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}22. \quad & \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \\ & \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}6 \cos(180^\circ - \alpha) + 3\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha &= -6 \cos \alpha + 3\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha = -6 \times \frac{1}{3} + 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \\ &= -2 + 12 = 10\end{aligned}$$

23. a)  $\alpha = 90^\circ$  ;  $R\hat{O}Q = 45^\circ$  ;  $\beta = P\hat{O}R = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$



$$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1 ; \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

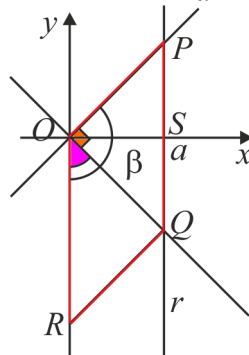
$$\sin \beta = \sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \beta = \cos 135^\circ = -\cos (180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^6 + (\cos \beta - \sin \beta)^6} &= \sqrt{(0 - 1)^6 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6} = \\ &= \sqrt{1 + (-\sqrt{2})^6} = \sqrt{1 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = 3 \end{aligned}$$

- b) Designemos por  $S$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $Ox$ .

$$S\hat{O}P = 45^\circ ; \operatorname{tg} (S\hat{O}P) = \frac{\overline{PS}}{\overline{OS}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{PS}}{a} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{PS}}{a} \Leftrightarrow \overline{PS} = a, \text{ então } \overline{PQ} = 2a.$$



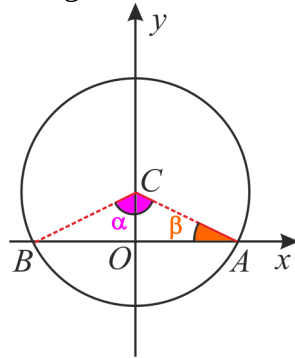
$$A_{[OPQR]} = 50 \Leftrightarrow \overline{PQ} \times \overline{OS} = 50 \Leftrightarrow 2a \times a = 50 \Leftrightarrow 2a^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$$

24. a) Equação da circunferência:  $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ . Os pontos  $A$  e  $B$  são os pontos da circunferência que têm ordenada 0.

$$x^2 + (0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$A(\sqrt{3}, 0) \text{ e } B(-\sqrt{3}, 0)$$

- b) Designemos por  $\beta$  a amplitude do ângulo  $OAC$ .

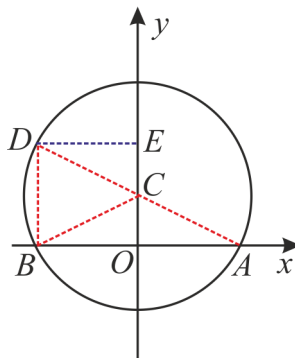


$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Logo, } \beta = 30^\circ.$$

- c)  $\widehat{OCA} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ , logo  $\alpha = 120^\circ$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin 120^\circ + \cos 120^\circ}{\sin 120^\circ - \cos 120^\circ} &= \frac{\sin (180^\circ - 120^\circ) - \cos (180^\circ - 120^\circ)}{\sin (180^\circ - 120^\circ) + \cos (180^\circ - 120^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

- d) Seja  $E$  a projeção ortogonal do ponto  $D$  sobre o eixo  $Oy$ ,  $\overline{CE} = \overline{CO}$ .



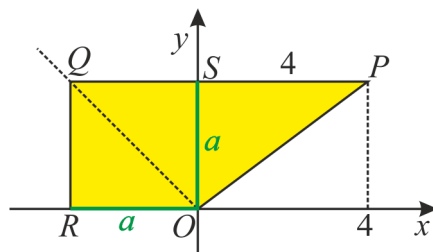
Os triângulos  $[ABD]$  e  $[ABC]$  têm a base comum  $[AB]$ . Relativamente a esta base, a altura do triângulo  $[ABD]$  é o dobro da altura do triângulo  $[ABC]$ , pelo que a área do triângulo  $[ABD]$  é o dobro da área do triângulo  $[ABC]$ .

$$A_{[ABD]} = A_{[ABC]} + A_{[BCD]} \Leftrightarrow 2 A_{[ABC]} = A_{[ABC]} + A_{[BCD]} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = A_{[BCD]}$$

25. a) Designemos por  $S$  o ponto de interseção do segmento  $[QP]$  com o eixo  $Oy$ .

Uma vez que  $Q$  pertence à bissetriz dos quadrantes pares, as suas coordenadas são simétricas.

Designando por  $a$  o comprimento do segmento  $[RO]$ , vem que  $\overline{RO} = \overline{RQ} = \overline{QS} = a$ .



Uma vez que  $\overline{OS} = a$  e  $\overline{SP} = 4$ , pelo teorema de Pitágoras vem que

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + 4^2} = \sqrt{a^2 + 16}$$

$$P_{[OPQR]} = 18 \Leftrightarrow \overline{RO} + \overline{RQ} + \overline{QS} + \overline{SP} + \overline{OP} = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + a + a + 4 + \sqrt{a^2 + 16} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} = 14 - 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 16 = (14 - 3a)^2 \wedge 14 - 3a \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 16 = 196 - 84a + 9a^2 \wedge 3a \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 - 84a + 180 = 0 \wedge a \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow 2a^2 - 21a + 45 = 0 \wedge a \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

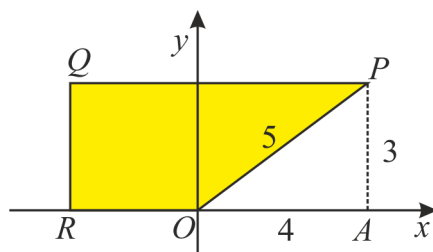
$$\Leftrightarrow a = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \times 2 \times 45}}{2 \times 2} \wedge a \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow \left( a = \frac{15}{2} \vee a = 3 \right) \wedge a \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow a = 3$$

Vem, então, que  $P(4, 3)$ ,  $Q(-3, 3)$  e  $R(-3, 0)$ .

b)  $0^\circ < \widehat{POR} < 180^\circ$ , logo  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  e  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

Designemos por  $A$  o ponto de coordenadas  $(4, 0)$ .

$$\overline{OA} = 4; \overline{PA} = 3 \text{ e } \overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\widehat{AOP}) = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\widehat{AOP}) = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = -\frac{4}{5}$$

c) Equação da reta  $QR$ :  $x = -3$

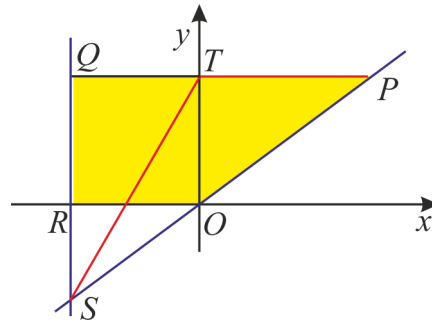
Reta  $OP$ :  $\overrightarrow{OP} = P - O = (4, 3)$ ;  $m_{OP} = \frac{3}{4}$

Equação:  $y = \frac{3}{4}x$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

As coordenadas de  $S$  são  $\left(-3, -\frac{9}{4}\right)$

d)  $T(0, 3)$ ;  $S\left(-3, -\frac{9}{4}\right)$



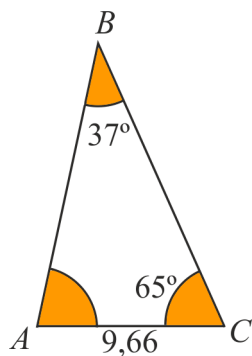
$0^\circ < \beta < 180^\circ$ , logo  $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$  e  $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ .

$$\overline{QT} = 3; \overline{QS} = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4} \text{ e } \overline{ST} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{21}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{65}}{4}$$

$$\sin \beta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\widehat{QTS}) = \frac{\overline{QS}}{\overline{ST}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{3\sqrt{65}}{4}} = \frac{21}{3\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\cos(180^\circ - \beta) = -\cos(\widehat{QTS}) = -\frac{\overline{QT}}{\overline{ST}} = -\frac{3}{\frac{3\sqrt{65}}{4}} = \\ &= -\frac{12}{3\sqrt{65}} = -\frac{4}{\sqrt{65}} = -\frac{4\sqrt{65}}{65} \end{aligned}$$

26.



$$\widehat{CAB} = 180^\circ - 37^\circ - 65^\circ = 78^\circ$$

Pela lei dos senos vem:

$$\frac{\text{sen}(\widehat{CAB})}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen}(\widehat{ABC})}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen}(\widehat{BCA})}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$$

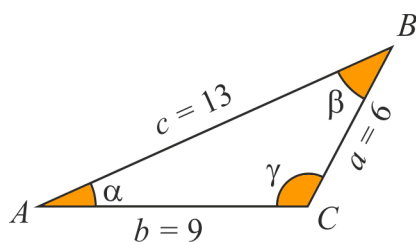
$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } 78^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen } 37^\circ}{9,66} = \frac{\text{sen } 65^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } 78^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen } 37^\circ}{9,66} \wedge \frac{\text{sen } 37^\circ}{9,66} = \frac{\text{sen } 65^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{9,66 \times \text{sen } 78^\circ}{\text{sen } 37^\circ} \wedge \overline{AB} = \frac{9,66 \times \text{sen } 65^\circ}{\text{sen } 37^\circ}$$

$$P_{[ABC]} = \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{AC} = \frac{9,66 \times \text{sen } 78^\circ}{\text{sen } 37^\circ} + \frac{9,66 \times \text{sen } 65^\circ}{\text{sen } 37^\circ} + 9,66 \approx 40$$

27.



Pela lei dos cossenos vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Leftrightarrow 6^2 = 9^2 + 13^2 - 2 \times 9 \times 13 \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{107}{117}$$

$$\alpha \approx 24^\circ$$

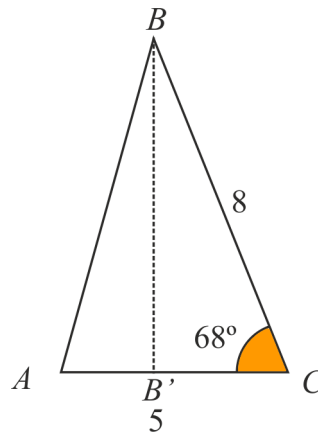
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \Leftrightarrow 9^2 = 13^2 + 6^2 - 2 \times 13 \times 6 \cos \beta \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{31}{39}$$

$$\beta \approx 37^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Leftrightarrow 13^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \cos \gamma \Leftrightarrow \cos \gamma = -\frac{13}{27}$$

$$\gamma \approx 119^\circ$$

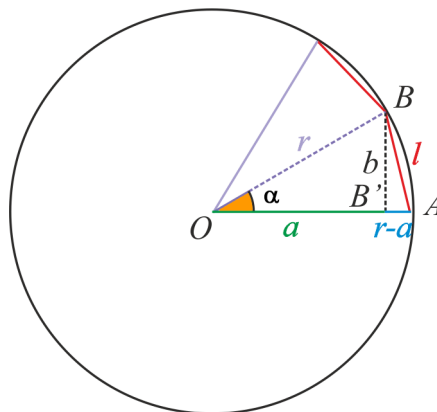
28. Designemos por  $B'$  a projeção ortogonal de  $B$  sobre  $AC$ .



$$\sin 68^\circ = \frac{\overline{BB'}}{8} \Leftrightarrow \overline{BB'} = 8 \sin 68^\circ$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BB'}}{2} = \frac{5 \times 8 \sin 68^\circ}{2} = 20 \sin 68^\circ \approx 19$$

29. Designemos por  $B'$  a projeção ortogonal de  $B$  sobre  $OA$ .



- a) Designemos por  $a$  a medida do segmento  $[OB']$  e por  $b$  a medida do segmento  $[BB']$ . Vem, então, que  $\overline{B'A} = r - a$ .

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r \cos \alpha \text{ e } \sin \alpha = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r \sin \alpha$$

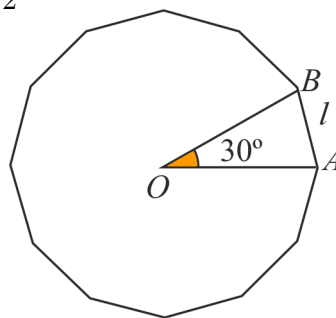
Pelo Teorema de Pitágoras sabemos que  $l^2 = b^2 + (r - a)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow l^2 = (r \sin \alpha)^2 + (r - r \cos \alpha)^2 \Leftrightarrow l^2 = r^2 \sin^2 \alpha + r^2 - 2r^2 \cos \alpha + r^2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = r^2 (\sin^2 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = r^2 (1 + 1 - 2 \cos \alpha) \Leftrightarrow l^2 = r^2 (2 - 2 \cos \alpha) \Leftrightarrow l = r \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$$

- b) O dodecágono tem 12 lados. Seja  $O$  o centro da circunferência em que está inscrito e  $A$  e  $B$  dois vértices consecutivos.  $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$



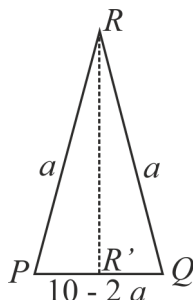
$$l = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - 2 \cos 30^\circ} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 3} = 1$$

$$P = 12 \times 1 = 12$$

## Pág. 11

30. Se o ponto  $R$  pertence à mediatriz do segmento de reta  $[PQ]$ , vem que  $\overline{PR} = \overline{QR} = a$ . Uma vez que o perímetro do triângulo é 10,  $\overline{PQ} = 10 - 2a$  com  $10 - 2a > 0 \Leftrightarrow a < 5$ .



Pela lei dos cossenos, vem que  $(10 - 2a)^2 = a^2 + a^2 - 2aa \cos(\widehat{PRQ}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 100 - 40a + 4a^2 = 2a^2 - 2a^2 \times \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{4}a^2 - 40a + 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15a^2 - 160a + 400 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{160 \pm \sqrt{(-160)^2 - 4 \times 15 \times 400}}{2 \times 15} \Leftrightarrow a = \frac{160 \pm \sqrt{1600}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \vee a = \frac{20}{3}. \text{ Como } \frac{20}{3} \geq 5, \text{ vem que } a = 4. \quad \overline{PQ} = 10 - 2 \times 4 = 2. \quad \overline{PR'} = 1.$$

Pelo teorema de Pitágoras,, vem  $\overline{PR'}^2 + \overline{RR'}^2 = \overline{PR}^2$

$$1^2 + \overline{RR'}^2 = 4^2 \Leftrightarrow \overline{RR'}^2 = 15 \Leftrightarrow \overline{RR'} = \sqrt{15}$$

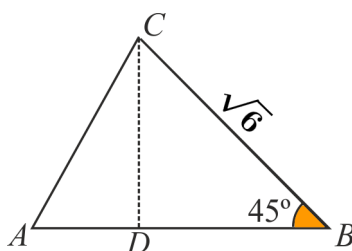
$$A = \frac{\overline{PQ} \times \overline{RR'}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$$

31. a) Pela lei dos senos, vem que  $\frac{\text{sen } 45^\circ}{2} = \frac{\text{sen } \alpha}{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\text{sen } \alpha}{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\text{sen } \alpha}{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) Se  $75^\circ$  é a amplitude do ângulo agudo cujo seno é  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ , então  $\alpha = 75^\circ$ . Vem então que  $\widehat{CAB} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ .

Pela lei dos senos, vem que  $\frac{\text{sen } 45^\circ}{2} = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2\overline{BC}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \times \overline{BC} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{6}$

c<sub>1</sub>)

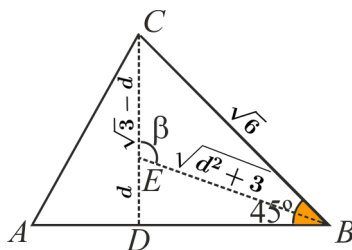


$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{3}$$

c<sub>2</sub>) Como  $\overline{CD} = \sqrt{3}$  e  $\overline{DE} = d$  então  $\overline{CE} = \sqrt{3} - d$ . Como  $\overline{CD} = \sqrt{3}$  e  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ , então  $\overline{DB} = \sqrt{3}$ .

Pelo teorema de Pitágoras, vem  $\overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{EB}^2$ .

$$d^2 + (\sqrt{3})^2 = \overline{EB}^2 \Leftrightarrow \overline{EB}^2 = d^2 + 3 \Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{d^2 + 3}$$



Pela lei dos cossenos, vem que:

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3} - d)^2 + (\sqrt{d^2 + 3})^2 - 2(\sqrt{3} - d)(\sqrt{d^2 + 3}) \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = 3 - 2\sqrt{3}d + d^2 + d^2 + 3 - 2(\sqrt{3} - d)\sqrt{d^2 + 3} \cos \beta \Leftrightarrow$$

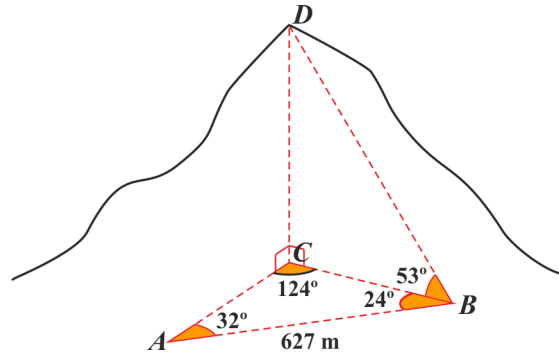
$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3} - d)\sqrt{d^2 + 3} \cos \beta = -2\sqrt{3}d + 2d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - d)\sqrt{d^2 + 3} \cos \beta = -\sqrt{3}d + d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{-d(\sqrt{3} - d)}{(\sqrt{3} - d)\sqrt{d^2 + 3}} \Leftrightarrow \cos \beta = -\frac{d}{\sqrt{d^2 + 3}}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c_3)} \quad \cos 120^\circ &= -\frac{d}{\sqrt{d^2+3}} \Leftrightarrow -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\frac{d}{\sqrt{d^2+3}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{d}{\sqrt{d^2+3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{\sqrt{d^2+3}} \Leftrightarrow \sqrt{d^2+3} = 2d \Leftrightarrow \\
 \text{como } 2d &\geq 0 \quad \Leftrightarrow d^2+3 = 4d^2 \Leftrightarrow 3d^2 = 3 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = 1
 \end{aligned}$$

32. No triângulo em que dois dos vértices são  $A$  e  $B$ , designemos por  $C$  o terceiro vértice.  
 No triângulo retângulo em que dois dos vértices são  $B$  e  $C$ , designemos por  $D$  o terceiro vértice.  
 $\widehat{ACB} = 180^\circ - 32^\circ - 24^\circ = 124^\circ$



Pela lei dos senos, vem que  $\frac{\sin 124^\circ}{627} = \frac{\sin 32^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{627 \sin 32^\circ}{\sin 124^\circ}$

Sabemos ainda que  $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \operatorname{tg} 53^\circ \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{DC} = \operatorname{tg} 53^\circ \times \frac{627 \sin 32^\circ}{\sin 124^\circ} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} \approx 532$$

$$853 + 532 = 1385 \text{ metros.}$$

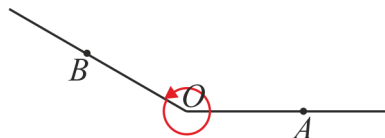
## Pág. 12

33.  $\mathbf{a_1)}$   $\vec{OF}$        $\mathbf{a_2)}$   $\vec{OH}$        $\mathbf{a_3)}$   $\vec{OB}$        $\mathbf{a_4)}$   $\vec{OD}$        $\mathbf{a_5)}$   $\vec{OC}$        $\mathbf{a_6)}$   $\vec{OG}$   
 $\mathbf{b_1)}$   $80^\circ$        $\mathbf{b_2)}$   $160^\circ$        $\mathbf{b_3)}$   $200^\circ$        $\mathbf{b_4)}$   $320^\circ$   
 $\mathbf{c_1)}$   $-40^\circ$        $\mathbf{c_2)}$   $-120^\circ$        $\mathbf{c_3)}$   $-160^\circ$        $\mathbf{c_4)}$   $-280^\circ$
34.  $\mathbf{a)}$   $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$        $\mathbf{b)}$   $\vec{OB}$  e  $\vec{OD}$        $\mathbf{c)}$   $\vec{OE}$  e  $\vec{OB}$  ou  $\vec{OE}$  e  $\vec{OD}$

## Pág. 13

35.  $\mathbf{a_1)}$   $\vec{OB}$        $\mathbf{a_2)}$   $\vec{OC}$        $\mathbf{a_3)}$   $\vec{OE}$        $\mathbf{a_4)}$   $\vec{OH}$        $\mathbf{a_5)}$   $\vec{OE}$        $\mathbf{a_6)}$   $\vec{OA}$   
 $\mathbf{b_1)}$   $680^\circ$        $\mathbf{b_2)}$   $400^\circ$        $\mathbf{b_3)}$   $440^\circ$        $\mathbf{b_4)}$   $560^\circ$   
 $\mathbf{c_1)}$   $-680^\circ$        $\mathbf{c_2)}$   $-440^\circ$        $\mathbf{c_3)}$   $-480^\circ$        $\mathbf{c_4)}$   $-600^\circ$

36.



$$140^\circ = 500^\circ - 360^\circ ; 860^\circ = 500^\circ + 360^\circ ; 1940^\circ = 500^\circ + 4 \times 360^\circ ; \\ -220^\circ = 500^\circ - 2 \times 360^\circ$$

As amplitudes de ângulos generalizados que têm por lado extremidade a semirreta  $\vec{OB}$  são:  $140^\circ$ ;  $860^\circ$ ;  $1940^\circ$  e  $-220^\circ$ .

## Pág. 15

37. a)  $P(-0,6; -0,8)$

b)  $\sin \alpha = -0,8$  e  $\cos \alpha = -0,6$

c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}$

38. a)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

b)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{9}}$   
 Como  $P$  pertence ao primeiro quadrante,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c) A ordenada de  $Q$  é  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ; A ordenada de  $P$  é  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

39. a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-x)^2 = 1 \\ y = -x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ y = -x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y = -x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{Logo } P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

$$\sin \alpha \times \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

d)  $\alpha = 135^\circ$

## Pág. 16

40. a)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,7 = \frac{7}{10}$

b)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{149}{100} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{100}{149} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{100}{149}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{10}{\sqrt{149}}$$

Como  $Q'$  pertence ao terceiro quadrante,  $\cos \alpha = -\frac{10\sqrt{149}}{149}$ .

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{100}{149} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{100}{149} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{49}{149} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{49}{149}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{7}{\sqrt{149}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{7\sqrt{149}}{149}$$

Como  $Q'$  pertence ao terceiro quadrante,  $\sin \alpha = -\frac{7\sqrt{149}}{149}$ .

41. a)  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

b)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{40}{49} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{49} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{7}$$

Como  $P$  pertence ao segundo quadrante,  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

c) A ordenada de  $Q$  é  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$ .

d)  $P(\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ , logo  $R\left(\frac{3}{7}, -\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ .

e)  $\sin \beta = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$  e  $\cos \beta = \frac{3}{7}$ .

42. a)  $P(-1, 0)$
- b)  $\sin 180^\circ = 0$  ;  $\cos 180^\circ = -1$
- c)  $Q(1, 0)$
- d)  $\tan 180^\circ = 0$

**Pág. 17**

43. a)  $P(0, -1)$
- b)  $\sin 270^\circ = -1$  ;  $\cos 270^\circ = 0$
- c) A reta  $OP$  não interseca a reta de equação  $x = 1$ .
- d) Não existe  $\tan 270^\circ$ .
44. a)  $P(0, 1)$
- b)  $\sin(-630^\circ) = 1$  ;  $\cos(-630^\circ) = 0$
- c) A reta  $OP$  não interseca a reta de equação  $x = 1$ .
- d) Não existe  $\tan(-630^\circ)$ .
45. a)  $P(1, 0)$  ;  $\sin 360^\circ = 0$  ;  $\cos 360^\circ = 1$   
A reta suporte do lado extremidade interseca a reta de equação  $x = 1$  no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ ;  $\tan 360^\circ = 0$
- b)  $P(0, 1)$  ;  $\sin 450^\circ = 1$  ;  $\cos 450^\circ = 0$   
A reta suporte do lado extremidade não interseca a reta de equação  $x = 1$  ;  
Não existe  $\tan 450^\circ$ .
- c)  $P(-1, 0)$  ;  $\sin 540^\circ = 0$  ;  $\cos 540^\circ = -1$   
A reta suporte do lado extremidade interseca a reta de equação  $x = 1$  no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ ;  $\tan 540^\circ = 0$
- d)  $P(1, 0)$  ;  $\sin(-720^\circ) = 0$  ;  $\cos(-720^\circ) = 1$   
A reta suporte do lado extremidade interseca a reta de equação  $x = 1$  no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ ;  $\tan(-720^\circ) = 0$
- e)  $P(0, -1)$  ;  $\sin(-810^\circ) = -1$  ;  $\cos(-810^\circ) = 0$   
A reta suporte do lado extremidade não interseca a reta de equação  $x = 1$ . Não existe  $\tan(-810^\circ)$ .
- f)  $P(-1, 0)$  ;  $\sin(-900^\circ) = 0$  ;  $\cos(-900^\circ) = -1$   
A reta suporte do lado extremidade interseca a reta de equação  $x = 1$  no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ ;  $\tan(-900^\circ) = 0$

46. a)  $2280 = 120 + 6 \times 360$ , logo  $a = 120$  e  $n = 6$

b)  $\sin 2280^\circ = \sin (120 + 6 \times 360) = \sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\cos 2280^\circ = \cos (120 + 6 \times 360) = \cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

47. a)  $\sin 390^\circ - \operatorname{tg} 780^\circ \times \cos 750^\circ =$   
 $= \sin (30^\circ + 360^\circ) - \operatorname{tg} (60^\circ + 2 \times 360^\circ) \times \cos (30^\circ + 2 \times 360^\circ) =$   
 $= \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \times \cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

b)  $2 \cos 390^\circ + (\sin 780^\circ - \operatorname{tg} 405^\circ)^2 =$   
 $= 2 \cos (30^\circ + 360^\circ) + (\sin (60^\circ + 2 \times 360^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ + 360^\circ))^2 =$   
 $= 2 \cos 30^\circ + (\sin 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ)^2 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 =$   
 $= \sqrt{3} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1 = \frac{7}{4}$

c)  $1 + \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} 390^\circ}{2(\sin 405^\circ + \cos 780^\circ)} = 1 + \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} (30^\circ + 360^\circ)}{2(\sin (45^\circ + 360^\circ) + \cos (60^\circ + 2 \times 360^\circ))} =$   
 $= 1 + \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ}{2(\sin 45^\circ + \cos 60^\circ)} = 1 + \frac{\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{3}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} =$   
 $= 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

d)  $\frac{\sin 855^\circ}{1 + \cos 855^\circ} - \operatorname{tg} 765^\circ = \frac{\sin (135^\circ + 2 \times 360^\circ)}{1 + \cos (135^\circ + 2 \times 360^\circ)} - \operatorname{tg} (45^\circ + 2 \times 360^\circ) =$   
 $= \frac{\sin 135^\circ}{1 + \cos 135^\circ} - \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin (180^\circ - 135^\circ)}{1 - \cos (180^\circ - 135^\circ)} - \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{1 - \cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 45^\circ =$   
 $= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - 1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2 - \sqrt{2}} =$   
 $= \frac{2(\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2(2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \sqrt{2}$

## Pág. 18

48. a) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{4}{4} = 1$

b) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{20}{4} = 5$

c) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{10}{4} = 2,5$

- d) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{5}{4} = 1,25$
- e) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{3}{4} = 0,75$
- f) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{8,8}{4} = 2,2$
- g) amplitude, em radianos, do ângulo ao centro =  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{0,5}{4} = 0,125$

## Pág. 19

49. a) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $1 \times 12 = 12$
- b) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $3 \times 12 = 36$
- c) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $\frac{1}{2} \times 12 = 6$
- d) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $\frac{1}{3} \times 12 = 4$
- e) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $\frac{1}{6} \times 12 = 2$
- f) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $0,25 \times 12 = 3$
- g) comprimento do arco =  
= amplitude, em radianos, do arco  $\times$  comprimento do raio =  $0,75 \times 12 = 9$

50.  $P = \overline{QS} + \overline{PR} + (\text{Comprimento do arco } QP) +$   
 $+ (\text{Comprimento do arco } SR) = 4 + 4 + 1,5 \times 2 + 1,5 \times 6 = 20$

51. a)  $\pi$                       b)  $\frac{\pi}{2}$                       c)  $2\pi$                       d)  $\frac{3\pi}{2}$                       e)  $-\frac{\pi}{4}$
- f)  $\frac{\pi}{3}$                       g)  $-\frac{\pi}{6}$                       h)  $\frac{2\pi}{3}$                       i)  $-\frac{3\pi}{4}$                       j)  $\frac{5\pi}{6}$
- k)  $-\frac{7\pi}{6}$                       l)  $\frac{5\pi}{3}$                       m)  $-\frac{7\pi}{4}$                       n)  $\frac{5\pi}{2}$

52. a)  $10^\circ$       b)  $-15^\circ$       c)  $18^\circ$       d)  $-30^\circ$       e)  $330^\circ$   
 f)  $-315^\circ$       g)  $420^\circ$       h)  $-540^\circ$       i)  $585^\circ$       j)  $-690^\circ$   
 k)  $900^\circ$       l)  $-450^\circ$       m)  $114,6^\circ$       n)  $19,1^\circ$

53. a) 
$$\frac{\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} - 3 \frac{\sqrt{3}}{3} =$$
  

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

b) 
$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}} + \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{8}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

54. a)  $\sin 0 + \cos 0 = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo 0 é solução.  
 $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\frac{\pi}{2}$  é solução.  
 $\sin \pi + \cos \pi = 1 \Leftrightarrow 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ . Proposição falsa, logo  $\pi$  não é solução.  
 $\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow -1 + 0 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ . Proposição falsa, logo  $\frac{3\pi}{2}$  não é solução.  
 $\sin (2\pi) + \cos (2\pi) = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $2\pi$  é solução.  
 Conjunto-solução:  $\left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$

- b)  $\sin 0 - \cos 0 = 1 \Leftrightarrow 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ . Proposição falsa, logo 0 não é solução.  
 $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\frac{\pi}{2}$  é solução.  
 $\sin \pi - \cos \pi = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\pi$  é solução.  
 $\sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow -1 - 0 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ . Proposição falsa, logo  $\frac{3\pi}{2}$  não é solução.  
 $\sin (2\pi) - \cos (2\pi) = 1 \Leftrightarrow 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ . Proposição falsa, logo  $2\pi$  não é solução.  
 Conjunto-solução:  $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

- c)  $|\sin 0| = \operatorname{tg} (2 \times 0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ . Proposição falsa, logo 0 não é solução.  
 $\left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = \operatorname{tg} \left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\frac{\pi}{2}$  é solução.  
 $|\sin \pi| = \operatorname{tg} (2 \times \pi) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ . Proposição falsa, logo  $\pi$  não é solução.  
 $\left|\sin \frac{3\pi}{2}\right| = \operatorname{tg} \left(2 \times \frac{3\pi}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\frac{3\pi}{2}$  é solução.  
 $|\sin (2\pi)| = \operatorname{tg} (2 \times 2\pi) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ . Proposição falsa, logo  $2\pi$  não é solução.  
 Conjunto-solução:  $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

- d)  $1 - \sin 0 = \sqrt{4 + 3 \cos 0} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{7}$ . Proposição falsa, logo 0 não é solução.  
 $1 - \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{4 + 3 \cos \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 0 = 2$ . Proposição falsa, logo  $\frac{\pi}{2}$  não é solução.  
 $1 - \sin \pi = \sqrt{4 + 3 \cos \pi} \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ . Proposição verdadeira, logo  $\pi$  é solução.  
 $1 - \sin \frac{3\pi}{2} = \sqrt{4 + 3 \cos \frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow 2 = 2$ . Proposição verdadeira, logo  $\frac{3\pi}{2}$  é solução.  
 $1 - \sin (2\pi) = \sqrt{4 + 3 \cos (2\pi)} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{7}$ . Proposição falsa, logo  $2\pi$  não é solução.  
 Conjunto-solução:  $\left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

55. a)  $\sin \alpha > 0$ ,  $\tan \gamma > 0$ , logo  $\sin \alpha \times \tan \gamma > 0$  - Proposição verdadeira.
- b)  $\sin \beta > 0$ ,  $\cos \theta > 0$ , logo  $\sin \beta \times \cos \theta > 0$  - Proposição falsa.
- c)  $\sin \gamma < 0$ ,  $\cos \beta < 0$ , logo  $\sin \gamma + \cos \beta < 0$  - Proposição falsa.
- d)  $\sin \theta < 0$ ,  $\tan \alpha > 0$ , logo  $\sin \theta - \tan \alpha < 0$  - Proposição verdadeira.
- e)  $\cos \gamma < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ ,  $\tan \beta < 0$ ,  $\tan \theta < 0$ , logo  $\cos \gamma - \cos \alpha < 0$  e  $\tan \beta + \tan \theta < 0$ , pelo que  $(\cos \gamma - \cos \alpha) \times (\tan \beta + \tan \theta) > 0$  - Proposição verdadeira.

56. a)  $\sin(\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha) + \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha) =$   
 $= \sin \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = 2 \sin \alpha$
- b)  $\tan(\pi - \alpha) - \tan(2\pi - \alpha) - 3 \sin(-\alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha) =$   
 $= -\tan \alpha + \tan \alpha + 3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha = \sin \alpha$
- c)  $\sin(-\alpha) \times \sin(\pi + \alpha) - \cos(-\alpha) \times \cos(\pi - \alpha) =$   
 $= -\sin \alpha \times (-\sin \alpha) - \cos \alpha \times (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- d)  $5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) =$   
 $= 5 \cos \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha - 3 \cos \alpha = 2 \cos \alpha$
- e)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha) - \tan(-\alpha) \times \cos(2\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$   
 $= -\cos \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha \times \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$
- f)  $\sin(\alpha - \pi) - \tan(\alpha + \pi) - \tan(2\pi - \alpha) - 5 \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) =$   
 $= -\sin \alpha - \tan \alpha + \tan \alpha + 5 \sin \alpha = 4 \sin \alpha$
- g)  $\sin(\alpha - 5\pi) \times \tan(-\alpha - 4\pi) - 3 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(7\pi - \alpha) =$   
 $= -\sin \alpha \times (-\tan \alpha) + 3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha =$   
 $= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$
- h)  $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) - \cos(7\pi - \alpha) + 2 \sin(\alpha + 4\pi) =$   
 $= -\sin \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha + 2 \sin \alpha = \sin \alpha$

57. a)  $\cos(180^\circ + x) - \sin(x - 90^\circ) - \tan(360^\circ - x) + \tan(-x) =$   
 $= -\cos x + \cos x + \tan x - \tan x = 0$
- b)  $\tan(x - 540^\circ) - \sin(x - 270^\circ) + 2 \cos(720^\circ - x) + \cos(900^\circ + x) =$   
 $= \tan(x - 180^\circ) - \sin(x - 270^\circ) + 2 \cos(-x) + \cos(180^\circ + x) =$   
 $= \tan x - \cos x + 2 \cos x + -\cos x = \tan x$

$$\begin{aligned}
 58. \quad \text{a)} \quad & 1 - \frac{\cos(2\pi + x)}{\operatorname{tg}(2\pi + x) \times \operatorname{sen} x + \cos(2\pi - x)} = 1 - \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x \times \operatorname{sen} x + \cos x} = \\
 & = 1 - \frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}} = 1 - \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + x \right) - \cos(2\pi) = 2 \cos x \cos x - \cos(2\pi) = 2 \cos^2 x - 1 = \\
 & = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 1 = 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left( \sqrt{2} \operatorname{sen} x \right)^2 = \\
 & = (1 - \sqrt{2} \operatorname{sen} x)(1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} x) = (1 - \sqrt{2} \operatorname{sen}(2\pi + x))(1 - \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi + x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 59. \quad \text{a)} \quad & \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{6} \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \\
 & = -\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) + \left( -\sqrt{6} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\
 & = -\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{6} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \\
 & = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) + \frac{\operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \\
 & = \frac{1}{2} - 1 + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \operatorname{sen} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) - \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{5 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{3} \right)} = \\
 & = -\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{5 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} \right)} = \\
 & = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\sqrt{2} + \sqrt{8} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} + \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right)}{2 + \cos(-\pi) + \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) - \operatorname{sen} \left( -\frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4}}{2 - 1 - \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \\
 & = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = \\
 & = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad & \operatorname{sen} \frac{13\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{25\pi}{4} = \\
 & = \operatorname{sen} \left( \frac{13\pi}{6} - 2\pi \right) + \cos \left( \frac{13\pi}{3} - 2 \times 2\pi \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{25\pi}{4} - 3 \times 2\pi \right) = \\
 & = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \left( \operatorname{sen} \frac{7\pi}{3} + \cos \frac{25\pi}{6} \right) \times \operatorname{tg} \frac{19\pi}{3} =$$

$$= \left( \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{3} - 2\pi \right) + \cos \left( \frac{25\pi}{6} - 4\pi \right) \right) \times \operatorname{tg} \left( \frac{19\pi}{3} - 6\pi \right) =$$

$$= \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \times \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$\text{g)} \quad \sqrt{8} \operatorname{sen} \left( -\frac{7\pi}{4} \right) + \sqrt{12} \left[ \cos \left( -\frac{11\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left( -\frac{23\pi}{6} \right) \right] =$$

$$= 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( -\frac{7\pi}{4} + 2\pi \right) + 2\sqrt{3} \left[ \cos \left( -\frac{11\pi}{6} + 2\pi \right) + \operatorname{tg} \left( -\frac{23\pi}{6} + 4\pi \right) \right] =$$

$$= 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{6} = 2 + 5 = 7$$

$$\text{h)} \quad \frac{\operatorname{sen} \left( -\frac{17\pi}{3} \right)}{\cos \frac{17\pi}{4}} + \sqrt{6} \operatorname{sen} \frac{37\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen} \left( -\frac{17\pi}{3} + 6\pi \right)}{\cos \left( \frac{17\pi}{4} - 4\pi \right)} + \sqrt{6} \operatorname{sen} \left( \frac{37\pi}{6} - 6\pi \right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{4}} + \sqrt{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{6} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$$60. \quad \frac{[1 + \cos(\pi - \alpha)][1 + \cos(-\alpha)]}{2 \operatorname{sen} \alpha - 1} = 1 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha - 1} = 1 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha - 1} = 1 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha - 1} = 1 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha - 1 \wedge 2 \operatorname{sen} \alpha - 1 \neq 0 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha + 1 = 0 \wedge \operatorname{sen} \alpha \neq \frac{1}{2} \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} \alpha - 1)^2 = 0 \wedge \operatorname{sen} \alpha \neq \frac{1}{2} \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha - 1 = 0 \wedge \operatorname{sen} \alpha \neq \frac{1}{2} \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = 1 \wedge \alpha \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$61. \quad \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) - \operatorname{sen}(\pi + \beta) - \cos(\pi - \beta) - \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{2} + \beta \right) = \sqrt{3} \wedge \beta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta + \cos \beta + \cos \beta = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \cos \beta = \sqrt{3} \wedge \beta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \beta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$

**62. a)**  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \operatorname{tg}(\pi + x) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \times \operatorname{tg} x + \cos x = 2 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x = 2 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = 2 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 \cos x \wedge \cos x \neq 0 \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

**b)**  $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\pi + \frac{5\pi}{3}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) =$

$$= \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 2 \cos \frac{8\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} =$$

$$= \sqrt{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} = -1$$

## Pág. 22

**63.**  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \operatorname{tg}(2\pi - \theta) = -\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta - \operatorname{tg} \theta = -2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{tg} \theta$

Sabemos que  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  e que  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ .

$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{5}{25} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$ , mas como  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  vem que

$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ . Logo  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -2$ .

Então,  $-2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{tg} \theta = -2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}$ .

**64. a)**  $3 + 4 \operatorname{sen} x = 5 \Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**b)**  $2 + \sqrt{8} \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-2}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \sqrt{3} + 2 \operatorname{sen}(4x) &= \sqrt{12} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(4x) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 1 - \operatorname{sen}(-x) &= 2 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}(-x) = 2 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{1 - 5 \operatorname{sen}(3x)}{3} &= 2 \Leftrightarrow 1 - 5 \operatorname{sen}(3x) = 6 \Leftrightarrow -5 \operatorname{sen}(3x) = 5 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 1 + \operatorname{sen}(4x) &= \frac{3 + \operatorname{sen}(-4x)}{3} \Leftrightarrow 3 + 3 \operatorname{sen}(4x) = 3 + \operatorname{sen}(-4x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(-4x) \Leftrightarrow 3 \operatorname{sen}(4x) = -\operatorname{sen}(4x) \Leftrightarrow 4 \operatorname{sen}(4x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \left(1 - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)(1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} x) &= 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0 \vee 1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad 2 \operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x &= 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee 2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad 5 + 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{4}\right) &= 7 \Leftrightarrow 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{x}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{x}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi \vee x = -\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\textbf{j)} \quad 2 \operatorname{sen}^2(6x) + 3 \operatorname{sen}(6x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(6x) = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(6x) = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(6x) = \frac{-3+1}{4} \vee \operatorname{sen}(6x) = \frac{-3-1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(6x) = -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen}(6x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 6x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee 6x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textbf{k)} \quad \operatorname{sen}^2(2x) - 4 \operatorname{sen}(2x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 3 \text{ (condição impossível)} \vee \operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textbf{l)} \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{x}{3} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{x}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = x + 6k\pi \vee 3x = 3\pi - x + 6k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6k\pi \vee 4x = 3\pi + 6k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textbf{m)} \quad \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(3x - \frac{3\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3x - \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(3x - \frac{3\pi}{8}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee 2x = \pi - 3x + \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee 5x = \frac{11\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{40} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
\text{n)} \quad & \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5} + x\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{15} = -\frac{\pi}{5} + x + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{15} = \pi - \left(-\frac{\pi}{5} + x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{\pi}{15} = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{15} = \pi + \frac{\pi}{5} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{4\pi}{15} = 2k\pi \text{ (condição impossível)} \vee 2x = \frac{17\pi}{15} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{30} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{o)} \quad & \sin(\pi - 4x) + \sin(\pi + 4x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right) + \sin(2\pi - 4x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin(4x) - \sin(4x) - \sin(4x) - \sin(4x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow -2\sin(4x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
65. \text{ a)} \quad & \sqrt{8}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = k\pi \quad & k = 0 \rightarrow x = 0 \in [-\pi, 2\pi[ \\
& k = 1 \rightarrow x = \pi \in [-\pi, 2\pi[ \\
& k = 2 \rightarrow x = 2\pi \notin [-\pi, 2\pi[ \\
& k = -1 \rightarrow x = -\pi \in [-\pi, 2\pi[ \\
& k = -2 \rightarrow x = -2\pi \notin [-\pi, 2\pi[ \\
x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad & k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in [-\pi, 2\pi[ \\
& k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \in [-\pi, 2\pi[ \\
& k = 2 \rightarrow x = \frac{13\pi}{6} \notin [-\pi, 2\pi[
\end{aligned}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$\text{Soluções: } x = 0 \vee x = \pi \vee x = -\pi \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{b) } \frac{\sin x}{x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 0$$

$$x = k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = 0 \notin [-\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \pi \in [-\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$$

$$k = 2 \rightarrow x = 2\pi \notin [-\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\pi \in [-\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$$

$$k = -2 \rightarrow x = -2\pi \notin [-\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$$

$$\text{Soluções: } x = \pi \vee x = -\pi$$

$$\text{c) } 2\sin^2(2x) - 3\sin(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{4} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{4} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{13\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{25\pi}{12} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{23\pi}{12} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{17\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{29\pi}{12} \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{12} \in [-\pi, 2\pi[$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{19\pi}{12} \notin [-\pi, 2\pi[$$

Soluções:  $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \vee x = -\frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee$   
 $\vee x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{17\pi}{12} \vee x = -\frac{7\pi}{12}$

### Pág. 23

66. a)  $-\sqrt{3} + 6 \cos x = \sqrt{12} \Leftrightarrow 6 \cos x = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)  $5 + 4 \cos x = 3 \Leftrightarrow 4 \cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c)  $\sqrt{8} + 5 \cos \frac{x}{2} = 3 \left( \sqrt{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 5 \cos \frac{x}{2} = 3\sqrt{2} + 3 \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d)  $2 \cos \left( 3x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos \left( 3x - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3x - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

e)  $\cos^2 x - \cos(\pi + x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{9 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 4 \text{ (condição impossível)} \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad 2 \cos^3 x - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2 &\Leftrightarrow \sin^2 x = 2 - 2 \cos x \wedge 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 2 - 2 \cos x \wedge 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0 \wedge 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow (1 - \cos x)^2 = 0 \wedge 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos x = 0 \wedge 1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \text{Equação impossível} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \cos \left( 5x - \frac{2\pi}{3} \right) &= \cos \left( 3x + \frac{4\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x - \frac{2\pi}{3} = 3x + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee 5x - \frac{2\pi}{3} = -3x - \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = 2\pi + 2k\pi \vee 8x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos (\pi + x) &= 0 \Leftrightarrow \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos (\pi + x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = x + 2k\pi \vee \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + \pi = 4x + 8k\pi \vee 2x + \pi = -4x + 8k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \pi + 8k\pi \vee 6x = -\pi + 8k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k)} \quad \cos(3x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi - x + 2k\pi \vee 3x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + 2k\pi \vee 2x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{l)} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \cos(\pi - 4x) = 1 - 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x) + \cos(4x) = 1 + 4\cos(4x) \Leftrightarrow 2\cos(4x) = -1 \Leftrightarrow \cos(4x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{67. a)} \quad 4\cos(2x) + 5 = 7 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$\text{Soluções: } x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\mathbf{b)} \quad 4 + \sqrt{2}\cos x = 3 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{11\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

Soluções:  $x = \frac{3\pi}{4} \vee x = -\frac{3\pi}{4}$

c)  $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos x}{6} = \frac{\cos x - 3\sin x}{12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6\cos x - 4\cos x + 2\cos x = \cos x - 3\sin x \Leftrightarrow 3\cos x = -3\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (condição impossível)} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

Soluções:  $x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$

d)  $4\cos^2 x - 2\sqrt{12}\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\cos x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 48}}{8} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{13\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

Soluções:  $x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$

$$\text{e)} \quad \cos^3 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

$$k = 0 \rightarrow x = 0 \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \pi \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 3 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\pi \notin ]-\pi, \pi]$$

$$\text{Soluções: } x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{f)} \quad \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 16 \cos x \Leftrightarrow \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = 16 \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \sin^2 x} = 16 \cos x \Leftrightarrow \frac{2}{\cos^2 x} = 16 \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \cos^3 x = 2 \wedge \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8} \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \in ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{Soluções: } x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{g) } \sin(3x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \vee 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{8} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{8} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{4} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{8} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -3 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{8} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$\text{Soluções: } x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8} \vee x = -\frac{3\pi}{8} \vee x = -\frac{7\pi}{8} \vee$$

$$\vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{h) } 2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times 2}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm 5}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 2 \text{ (condição impossível)} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{17\pi}{6} \notin ]-\pi, \pi]$$

$$\text{Soluções: } x = -\frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$$

$$68. \quad \sqrt[3]{2 \cos (\pi x)} = \sqrt[6]{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2 \cos (\pi x)} = \sqrt[3]{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 \cos (\pi x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos (\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} + 2 k \pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{6} + 2 k \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} + 2 k \vee x = -\frac{1}{6} + 2 k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{6} + 2 k \quad k = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \in [-1, 3]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{13}{6} \in [-1, 3]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{25}{6} \notin [-1, 3]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{11}{6} \notin [-1, 3]$$

$$x = -\frac{1}{6} + 2 k \quad k = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{6} \in [-1, 3]$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{11}{6} \in [-1, 3]$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{23}{6} \notin [-1, 3]$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{13}{6} \notin [-1, 3]$$

$$\text{Soluções:} \quad x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{13}{6} \vee x = -\frac{1}{6} \vee x = \frac{11}{6}$$

$$69. \quad \text{a)} \quad 1 + 5 \operatorname{tg} x = 6 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b)} \quad 4 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 7 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + k \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 3 k \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c)} \quad 3 \operatorname{tg} \left( 5 x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{12} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg} \left( 5 x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( 5 x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 5 x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 x = -\frac{5 \pi}{12} + k \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k \pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \operatorname{tg}(3x - \pi) - 2\operatorname{tg}(5\pi - 3x) + 5\operatorname{tg}(6\pi - 3x) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) + 2\operatorname{tg}(3x) - 5\operatorname{tg}(3x) = 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2\operatorname{tg}(3x) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = -1 \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \vee \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \vee \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & \operatorname{tg}^2(2x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(2x) = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & 3\operatorname{tg}^2 x = 3 + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70. \text{ a)} \quad & 1 - 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  vem que  $x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . No intervalo  $] -2\pi, \pi]$  vem  $x \neq \frac{\pi}{3} \wedge x \neq -\frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad k = 0 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{6} \in ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{17\pi}{6} \notin ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{19\pi}{6} \notin ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

Soluções:  $x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

**b)**  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x + \frac{4\pi}{3} = 2x + \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x + \frac{4\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  vem que  $x \neq -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

No intervalo  $] -2\pi, \pi]$  vem  $x \neq -\frac{11\pi}{6} \wedge x \neq -\frac{5\pi}{6} \wedge x \neq \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad k = 0 &\rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \in ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\} \\ k = 1 &\rightarrow x = \frac{19\pi}{12} \notin ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\} \\ k = -1 &\rightarrow x = -\frac{5\pi}{12} \in ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\} \\ k = -2 &\rightarrow x = -\frac{17\pi}{12} \in ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\} \\ k = -3 &\rightarrow x = -\frac{29\pi}{12} \notin ]-2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Soluções:  $x = \frac{7\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12} \vee x = -\frac{17\pi}{12}$

**c)**  $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = \sqrt{3} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2} \vee \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . No intervalo  $] -2\pi, \pi]$  vem  $x \neq -\frac{3\pi}{2} \wedge x \neq -\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$

Designemos por  $A$  o conjunto  $] - 2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in A$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \notin A$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \in A$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{3} \in A$$

$$k = -3 \rightarrow x = -\frac{8\pi}{3} \notin A$$

Soluções:  $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{3\pi}{4} \vee$   
 $\vee x = -\frac{7\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in A$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin A$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \in A$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{4} \in A$$

$$k = -3 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{4} \notin A$$

d)  $\frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{2} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \Leftrightarrow 3 - \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

No intervalo  $] - 2\pi, \pi]$  vem  $x \neq -\frac{3\pi}{2} \wedge x \neq -\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$

Designemos por  $A$  o conjunto  $] - 2\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in A$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \notin A$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \in A$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \in A$$

$$k = -3 \rightarrow x = -\frac{17\pi}{6} \notin A$$

Soluções:  $x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee$   
 $\vee x = -\frac{7\pi}{6}$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in A$$

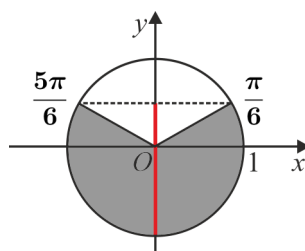
$$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in A$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin A$$

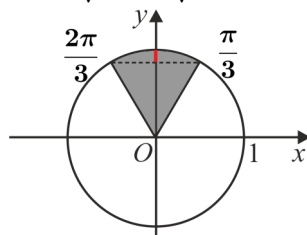
$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{6} \in A$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{6} \notin A$$

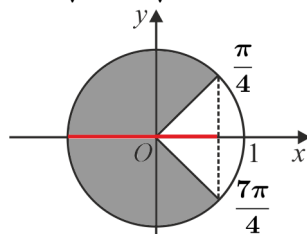
71. a)  $5 + 4 \sin x \leq 7 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$



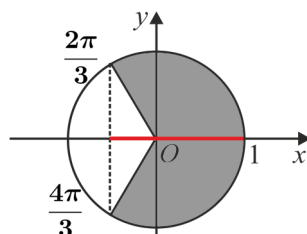
b)  $\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} x \geq \sqrt{12} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \geq 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$



c)  $2 \cos x + \sqrt{2} \leq \sqrt{8} \Leftrightarrow 2 \cos x \leq 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$

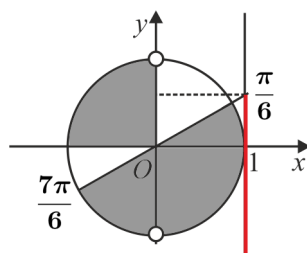


d)  $2 \cos x + 3 > 2 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ 0, \frac{2\pi}{3} \right[ \cup \left] \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right]$



e)  $3 \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Como  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

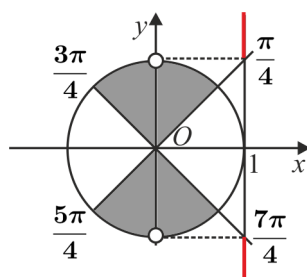
No intervalo  $[0, 2\pi]$  vem  $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$ , logo  $x \in \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6} \right[ \cup \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$



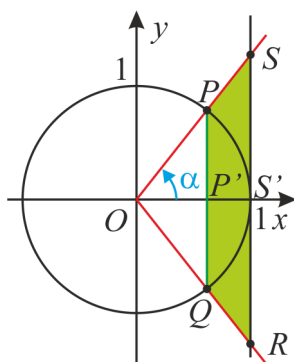
f)  $\operatorname{tg}^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq 1 \vee \operatorname{tg} x \leq -1$ .

Como  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . No intervalo  $[0, 2\pi]$  vem  $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$ , logo

$x \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$



72. a) Designemos por  $P'$  e  $S'$  as projeções ortogonais de  $P$  e  $S$  respetivamente sobre o eixo  $Ox$ .



$$\overline{PP'} = \sin \alpha ; \overline{SS'} = \operatorname{tg} \alpha ; \overline{OP'} = \cos \alpha , \text{ donde vem que } \overline{PQ} = 2 \sin \alpha ; \overline{SR} = 2 \operatorname{tg} \alpha \text{ e } \overline{P'S'} = 1 - \cos \alpha .$$

$$\text{Comprimento da base maior} = \overline{SR}$$

$$\text{Comprimento da base menor} = \overline{PQ}$$

$$\text{Altura} = \overline{P'S'}$$

$$f(\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 2 \sin \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha) = (\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha) \times (1 - \cos \alpha)$$

- b) Se a abcissa do ponto  $P$  é  $\frac{1}{3}$ , significa que  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

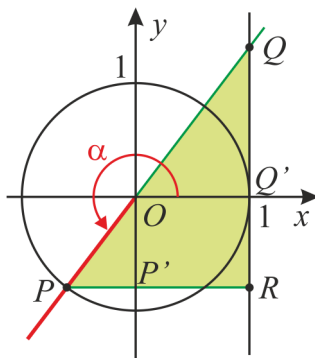
$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{uma vez que } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$f(\alpha) = \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

73. a) Designemos por  $P'$  e  $Q'$  as projeções ortogonais de  $P$  e  $Q$  sobre o eixo  $Oy$  e  $Ox$ , respetivamente.



$$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\overline{PR} = \overline{PP'} + \overline{P'R} = |\cos \alpha| + 1 = 1 - \cos \alpha, \text{ porque } \cos \alpha < 0.$$

$$\overline{QR} = \overline{QQ'} + \overline{Q'R} = |\operatorname{tg} \alpha| + |\sin \alpha| = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha, \text{ porque } \operatorname{tg} \alpha > 0 \text{ e } \sin \alpha < 0.$$

Base:  $[PR]$

Altura:  $[QR]$

$$f(\alpha) = \frac{(1 - \cos \alpha) \times (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)}{2}$$

b)  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  e  $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$  e  $x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ .

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

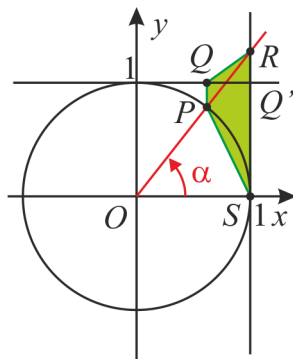
$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x = \cos x \times \operatorname{tg} x$$

$$\sin x = -\frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{5}$$

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{\frac{8}{5} \times \frac{32}{15}}{2} = \frac{128}{75}$$

74. a) Designemos por  $Q'$  a projeção ortogonal de  $Q$  sobre a reta de equação  $x = 1$ .



$$P(\cos \alpha, \sin \alpha); Q(\cos \alpha, 1); R(1, \operatorname{tg} \alpha); S(1, 0); Q'(1, 1)$$

Uma vez que  $0 < \sin \alpha < 1$ ;  $0 < \cos \alpha < 1$  e  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

$$\overline{RS} = \operatorname{tg} \alpha; \overline{PQ} = 1 - \sin \alpha; \overline{QQ'} = 1 - \cos \alpha$$

Base maior:  $[RS]$

Base menor:  $[PQ]$

Altura:  $[QQ']$

$$f(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1 - \sin \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha) = \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\left(1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

75. a) Uma vez que  $P$  tem coordenadas  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  com  $\cos \alpha > 0$  e  $\sin \alpha > 0$ , vem que  $R$  tem coordenadas  $(1, \sin \alpha)$ .

A circunferência  $c$  tem centro no ponto  $Q$  de coordenadas  $(1, 0)$  e passa pelo ponto  $R$ , logo o seu raio é  $\overline{RQ} = \sin \alpha$ .

Uma equação de  $c$  será então  $(x - 1)^2 + y^2 = \sin^2 \alpha$ .

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = \sin^2 \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = \sin^2 \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \sin^2 \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + 1 = \sin^2 \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 - \sin^2 \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sin^2 \alpha}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - (1 - \cos^2 \alpha)}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

A abscissa dos pontos de interseção é  $\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2}$ .

- b)  $\overrightarrow{OP} = P - O = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , o declive da reta  $OP$  é então  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ . A ordenada na origem é zero. Uma equação da reta  $OP$  será  $y = \tan \alpha x + 0$ .  
Vejam que a reta  $OP$  e a circunferência  $c$  se intersectam num e num só ponto.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sin^2 \alpha \\ y = \tan \alpha x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + \tan^2 \alpha x^2 = \sin^2 \alpha \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 - 2x + 1 - \sin^2 \alpha = 0 \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 \alpha} x^2 - 2x + \cos^2 \alpha = 0 \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha}}{\frac{2}{\cos^2 \alpha}} \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\frac{2}{\cos^2 \alpha}} \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \tan \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \tan \alpha \times \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \sin \alpha \times \cos \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, o ponto de interseção da reta  $OP$  com a circunferência  $c$  é único e tem coordenadas  $(\cos^2 \alpha, \sin \alpha \times \cos \alpha)$ , pelo que a reta é tangente à circunferência.

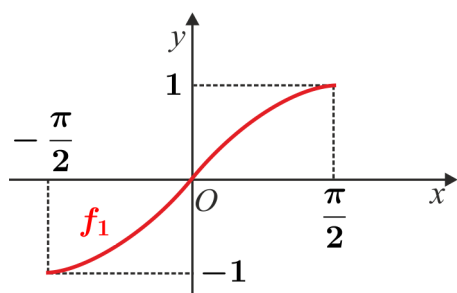
## Pág. 27

76. a)  $f(x) = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$   
 $2 - 4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

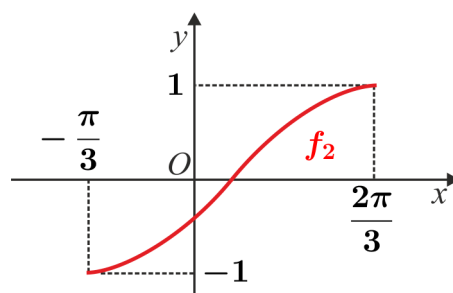
- b) Sejam  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  funções reais de variável real definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_1(x) = \sin x \\ f_2 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_2(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ f_3 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_3(x) = 4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ f_4 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_4(x) = -4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{Seja } f : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 2 - 4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

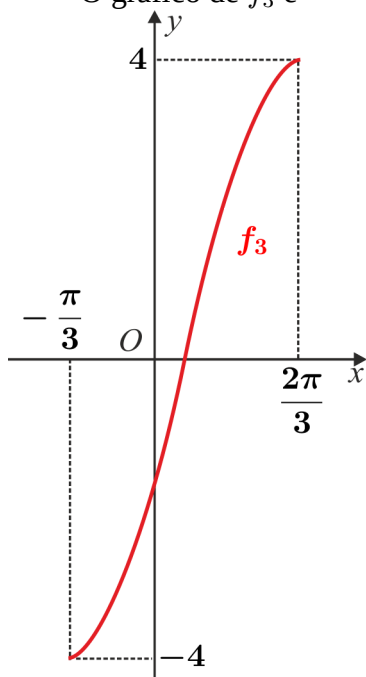
Sabemos que o gráfico de  $f_1$  é



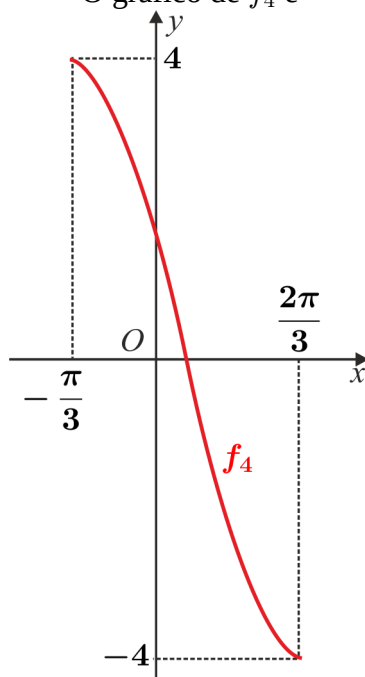
Então o gráfico de  $f_2$  é



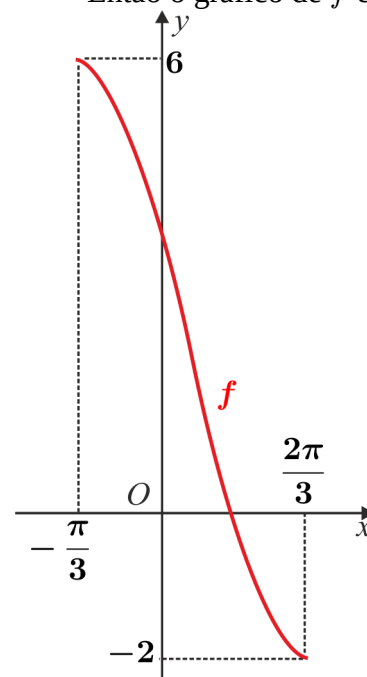
O gráfico de  $f_3$  é



O gráfico de  $f_4$  é



Então o gráfico de  $f$  é

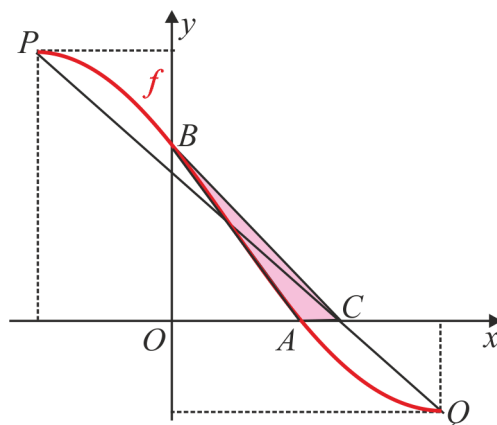


O contradomínio de  $f$  é então o intervalo  $[-2, 6]$

c) Na alínea a) vimos que o zero de  $f$  era  $\frac{\pi}{3}$ , logo  $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ .

$$f(0) = 2 - 4 \sin\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4, \text{ logo } B(0, 4).$$

Como foi visto na alínea b),  $P\left(-\frac{\pi}{3}, 6\right)$  e  $Q\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ .



Base:  $[AC]$

Altura:  $[OB]$

Começemos por escrever uma equação da reta  $PQ$  :

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left( \frac{2\pi}{3}, -2 \right) - \left( -\frac{\pi}{3}, 6 \right) = (\pi, -8), \text{ logo } m = -\frac{8}{\pi}.$$

$$y = -\frac{8}{\pi}x + b$$

Considerando o ponto  $P\left(-\frac{\pi}{3}, 6\right)$  vem:

$$6 = -\frac{8}{\pi}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + b \Leftrightarrow b = 6 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow b = \frac{10}{3}$$

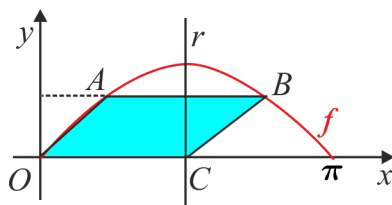
Uma equação da reta será  $y = -\frac{8}{\pi}x + \frac{10}{3}$ .

$$0 = -\frac{8}{\pi}x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{\pi}x = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{\pi}} \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{24} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$$

$C\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ . Então,  $\overline{AC} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$  e  $\overline{OB} = 4$ .

$$A = \frac{\frac{\pi}{12} \times 4}{2} = \frac{\pi}{6}$$

77. Designemos por  $x$  a abscissa do ponto  $A$ , as coordenadas do ponto  $A$  serão  $(x, \sin x)$ . Designemos por  $(b, \sin b)$  com  $x < b < \pi$  as coordenadas do ponto  $B$ . Como os pontos  $A$  e  $B$  têm a mesma ordenada vem que  $\sin x = \sin b$ , pelo que  $b = \pi - x$ , uma vez que  $x < b < \pi$ . Então as coordenadas de  $B$  serão  $(\pi - x, \sin x)$ .



A abscissa do ponto  $C$  será então  $\frac{x + \pi - x}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Assim,  $C$  terá coordenadas  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

Para que o quadrilátero  $[OACB]$  seja um paralelogramo os vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  terão de ser colineares.

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (x, \sin x)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (\pi - x, \sin x) - \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\pi - x - \frac{\pi}{2}, \sin x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x, \sin x\right)$$

Para estes vetores serem colineares  $\frac{\pi}{2} - x = x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ .

Virá então que as coordenadas de  $A$  são  $\left(\frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . A altura do paralelogramo

será  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e o comprimento da base será  $\overline{OC} = \frac{\pi}{2}$ .

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

78. a)  $m(0) - h(0) = (1 + 0,7 \cos 0) - (1 + 0,5 \cos 0) = 0,7 - 0,5 = 0,2$

$0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

b) 15 minutos =  $15 \times 60$  segundos = 900 segundos

raio =  $m(900) = 1 + 0,7 \cos \frac{900\pi}{1800} = 1 + 0,7 \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0,7 \times 0 = 1$ .

diâmetro = 2 metros

c)  $m(t + 3600) = 1 + 0,7 \cos \frac{(t + 3600)\pi}{1800} = 1 + 0,7 \cos \frac{t\pi + 3600\pi}{1800} =$   
 $= 1 + 0,7 \cos \left( \frac{t\pi}{1800} + 2\pi \right) = 1 + 0,7 \cos \left( \frac{t\pi}{1800} \right) = m(t), \forall t \geq 0$

3600 segundos = 60 minutos. O ponteiro dos minutos dá uma volta completa em cada 60 minutos.

d)  $h(t) = m(t) \Leftrightarrow 1 + 0,5 \cos \frac{t\pi}{21600} = 1 + 0,7 \cos \frac{t\pi}{1800}$



$t \approx 3100$  segundos =  $0 \times 3600 + 51 \times 60 + 40$  segundos = 0 horas 51 minutos 40 segundos

## Pág. 29

79. a)  $\arcsen \frac{1}{2} + \arcsen \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} =$   
 $= \arcsen \left( \sin \frac{\pi}{6} \right) + \arcsen \left( \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right) + \arcsen \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) =$   
 $= \frac{\pi}{6} + \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

b)  $\arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2} =$   
 $= \arccos \left( \cos \frac{5\pi}{6} \right) + \arccos \left( \cos \frac{\pi}{4} \right) + \arccos \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$

c)  $\text{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \text{arctg} \left( -\sqrt{3} \right) + \text{arctg} 1 =$   
 $= \text{arctg} \left( \text{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) + \text{arctg} \left( \text{tg} \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right) + \text{arctg} \left( \text{tg} \frac{\pi}{4} \right) =$   
 $= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$$\text{d) } \arccos 0 + \arcsen(-1) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) + \arcsen\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{e) } \arccos(-1) + \operatorname{arctg} 0 = \arccos(\cos \pi) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0) = \pi + 0 = \pi$$

$$80. \text{ a) } \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}; \quad \arcsen \frac{3}{5} \approx 0,64; \quad x \approx 0,64 \vee x \approx \pi - 0,64 \approx 2,50$$

$$\text{b) } 7 \operatorname{sen} x + 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{4}{7}; \quad \arcsen \frac{4}{7} \approx 0,61; \\ x \approx \pi + 0,61 \approx 3,75 \vee x \approx 2\pi - 0,61 \approx 5,67$$

$$\text{c) } 4 \cos x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}; \quad \arccos \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,98; \\ x \approx 0,98 \vee x \approx 2\pi - 0,98 \approx 5,31$$

$$\text{d) } 3 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm 5}{6} \Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{2}{3}$$

$$\forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[, \cos x \neq 1; \quad \arccos \frac{2}{3} \approx 0,84$$

Logo, no intervalo dado,  $x \approx \pi - 0,84 \approx 2,30 \vee x \approx \pi + 0,84 \approx 3,98$ .

$$\text{e) } 2 \operatorname{tg} x - 5 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 4; \quad \operatorname{arctg} 4 \approx 1,33;$$

Logo, no intervalo dado,  $x \approx \pi + 1,33 \approx 4,47$ .

$$\text{f) } \frac{4 + \operatorname{tg}^2 x}{8} = 1 \Leftrightarrow 4 + \operatorname{tg}^2 x = 8 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm 2$$

$$\operatorname{arctg} 2 \approx 1,11$$

Logo, no intervalo dado,  $x \approx \pi - 1,11 \approx 2,03 \vee x \approx \pi + 1,11 \approx 4,25$

81. a) Para  $x \in [-1, 1]$ , designemos por  $b \in [0, \pi]$  a amplitude do ângulo cujo cosseno é  $x$ .  
 $\cos b = x$ , pelo que  $b = \arccos x$ .

$$\text{Se } b \in [0, \pi], \quad 0 \leq b \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \leq -b \leq 0 \Leftrightarrow \pi - \pi \leq \pi - b \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \pi - b \leq \pi$$

$$\cos(\pi - b) = -\cos b = -x$$

Então  $\pi - b \in [0, \pi]$  é a amplitude do ângulo cujo cosseno é  $-x$ , pelo que  $\pi - b = \arccos(-x)$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos x + \arccos(-x) = b + \pi - b = \pi$$

b) Para  $x \in [0, 1]$ , designemos por  $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  a amplitude do ângulo cujo seno é  $x$ .  
 $\sin b = x$ , pelo que  $b = \arcsen x$ .

Mas se  $\sin b = x$  e  $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $\cos b = \sqrt{1 - x^2}$ .

Se  $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -b \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - b \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - b \leq \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b = \sqrt{1 - x^2}$ .

Então  $\frac{\pi}{2} - b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  é a amplitude do ângulo cujo seno é  $\sqrt{1 - x^2}$ , pelo que  
 $\frac{\pi}{2} - b = \arcsen \sqrt{1 - x^2}$ .

$\forall x \in [0, 1]$ ,  $\arcsen x + \arcsen\left(\sqrt{1 - x^2}\right) = b + \frac{\pi}{2} - b = \frac{\pi}{2}$

c) Para  $x \in \mathbb{R}^+$ , designemos por  $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  a amplitude do ângulo cuja tangente é  $x$ .  
 $\operatorname{tg} b = x$ , pelo que  $b = \operatorname{arctg} x$ .

$\operatorname{tg} b = x \Leftrightarrow \frac{\sin b}{\cos b} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\cos b}{\sin b}$

Se  $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $0 < b < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -b < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2}$

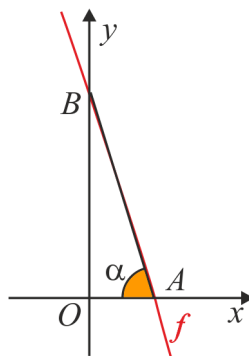
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b$  e  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$ , então  $\frac{1}{x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$

Então  $\frac{\pi}{2} - b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  é a amplitude do ângulo cuja tangente é  $\frac{1}{x}$ , pelo que  
 $\frac{\pi}{2} - b = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = b + \frac{\pi}{2} - b = \frac{\pi}{2}$

## Pág. 30

82.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \arccos x - \pi = 0 \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{3} \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \cos \frac{\pi}{3} \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . Logo  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$   
 $f(0) = 3 \arccos 0 - \pi = 3 \times \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$ . Logo  $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



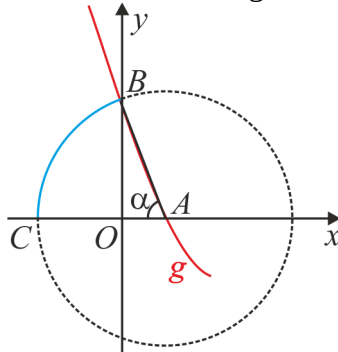
Designemos por  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $OAB$ .

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi$ . Logo,  $\alpha = \operatorname{arctg} \pi \Leftrightarrow \alpha \approx 1,107$ .

83. a)  $g(0) = 2 - 3 \sin 0 = 2$

b)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3 \sin x = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{3} \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \approx 0,73$

c) Designemos por  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $OAB$ .



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{2}{0,73} = 2,74. \quad \text{Logo} \quad \alpha = \operatorname{arctg} 2,74 \Leftrightarrow \alpha \approx 1,22$$

$$r = \overline{AB} = \sqrt{(0,73)^2 + (-2)^2} = 2,13$$

$$\text{Comprimento do arco} = 1,22 \times 2,13 = 2,6$$

d)  $g\left(\arcsen \frac{5}{6}\right) = 2 - 3 \sin\left(\arcsen \frac{5}{6}\right) = 2 - 3 \times \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}$

84.  $f$  e  $g$  são funções inversas e uma vez que a reta  $r$  é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, os pontos  $A$  e  $B$  são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Designando por  $a$  a abscissa do ponto  $A$  vem que as coordenadas de  $A$  serão  $(a, \operatorname{tg} a)$  com  $\operatorname{tg} a > a$  e as coordenadas de  $B$  serão  $(\operatorname{tg} a, a)$ .

Uma vez que  $\overline{OA} = \overline{OB}$ , para que o triângulo seja equilátero terá que acontecer  $\overline{OA} = \overline{AB}$ .

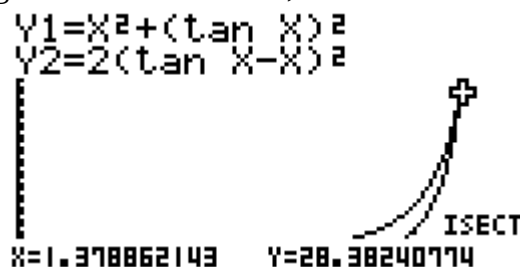
$$\overline{OA} = \sqrt{a^2 + \operatorname{tg}^2 a} \text{ e } \overline{AB} = \sqrt{(\operatorname{tg} a - a)^2 + (a - \operatorname{tg} a)^2}$$

A abscissa do ponto  $A$  será, então, a solução da equação  $\sqrt{a^2 + \operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{(\operatorname{tg} a - a)^2 + (a - \operatorname{tg} a)^2}$ .

$$\sqrt{a^2 + \operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{(\operatorname{tg} a - a)^2 + (a - \operatorname{tg} a)^2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + \operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{2(\operatorname{tg} a - a)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \operatorname{tg}^2 a = 2(\operatorname{tg} a - a)^2$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, temos:



A abscissa de  $A$  será então  $1,378862143 \approx 1,38$ .  $\operatorname{tg} 1,378862143 \approx 5,15$   
 Pelo que as coordenadas do ponto  $A$  serão  $(1,38; 5,15)$ .

# Geometria Analítica

## Pág. 32

1. a)  $45^\circ$   
b)  $135^\circ$   
c)  $90^\circ$   
d)  $0^\circ$
2. a)  $y = \operatorname{tg} 45^\circ x + 3 \Leftrightarrow y = x + 3$   
b)  $y = \operatorname{tg} 150^\circ x - 2 \Leftrightarrow y = -\operatorname{tg} (180^\circ - 150^\circ) x - 2 \Leftrightarrow y = -\operatorname{tg} 30^\circ x - 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3} x - 2$   
c)  $y = \operatorname{tg} 60^\circ x + b \Leftrightarrow y = \sqrt{3} x + b$   
 $4 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 1$

Equação da reta:  $y = \sqrt{3} x + 1$

## Pág. 33

3. a) inclinação =  $\operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ$   
b) Designemos por  $A$  o ponto de coordenadas  $(1, 1)$  e por  $B$  o ponto de coordenadas  $(3, -2)$ .  
 $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão  $(3, -2) - (1, 1) = (2, -3)$ ;  $m_{AB} = -\frac{3}{2}$ ;  
 $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} \approx 56^\circ$ ; inclinação =  $\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2}\right) \approx 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$
4. a)  $4x + 2y = 5 \Leftrightarrow 2y = -4x + 5 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$   
b)  $\operatorname{tg} \alpha = -2 \wedge 90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$   
 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$   
 $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{4}{5}$   
Como  $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ , vem que  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

5.  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão, então,  $(\sqrt{2}, 4) - (2, 0) = (\sqrt{2} - 2, 4)$  ;  
 $m_{AB} = \frac{4}{\sqrt{2}-2} = \operatorname{tg} \alpha$   
 $\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{\sqrt{2}-2} = -\frac{4(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = -\frac{4(\sqrt{2}+2)}{2-4} = 2(\sqrt{2}+2) = 2\sqrt{2}+4$
6. a)  $\overrightarrow{OP} = P - O$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{OP}$  serão, então,  $(1, \sqrt{3}) - (0, 0) = (1, \sqrt{3})$  ;  $m_{OP} = \sqrt{3}$  ;  
 $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$  ; inclinação da reta  $OP = \frac{\pi}{3}$  rad
- b)  $y = -x + b$  ;  $m_r = -1$  ;  $\operatorname{arctg} (-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$  ; inclinação da reta  $r = \frac{3\pi}{4}$  rad
7.  $\operatorname{tg} 120^\circ \times \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} (180^\circ - 120^\circ) \times \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} 60^\circ \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{3} \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$   
Logo,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  .  
 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{4 \times 5}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{5} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
8. Designemos por  $A$  o ponto de coordenadas  $(2, 9)$  e por  $B$  o ponto de coordenadas  $(5, -9)$  .  
 $\overrightarrow{AB} = B - A$  . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão então  $(5, -9) - (2, 9) = (3, -18)$  ;  $m_{AB} = -6$   
 $AB : y = -6x + b$ , como a reta passa por  $A$  vem  $9 = -6 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 21$   
Uma equação da reta  $AB$  será  $y = -6x + 21$ .  
Determinemos agora a abscissa do ponto desta reta cuja ordenada é 3.  
 $3 = -6x + 21 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$  . Então as coordenadas de  $P$  são  $(3, 3)$  .  
 $\overrightarrow{OP} = P - O$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{OP}$  serão, então,  $(3, 3) - (0, 0) = (3, 3)$  ;  $m_{OP} = 1$  ;  $\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$   
inclinação da reta  $OP = 45^\circ$
9. a)  $m_r = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
Um vetor diretor da reta  $r$  será, por exemplo,  $\vec{r} (3, \sqrt{3})$ .  
Equação vetorial da reta  $r : (x, y) = (2\sqrt{3}, 6) + \lambda (3, \sqrt{3})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
Equações paramétricas da reta  $r : \begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 3\lambda \\ y = 6 + \sqrt{3}\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$

**b)** Começemos por escrever uma equação cartesiana da reta  $r$  :

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 3\lambda \\ y = 6 + \sqrt{3}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{3} = 3\lambda \\ y - 6 = \sqrt{3}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 2\sqrt{3}}{3} = \lambda \\ \frac{y - 6}{\sqrt{3}} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{y - 6}{\sqrt{3}}$$

Vejamos agora as coordenadas dos pontos de interseção da reta  $r$  com o conjunto  $C$  :

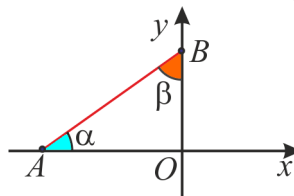
$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 2\sqrt{3})^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ \frac{x - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{y - 6}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{3})^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ x - 2\sqrt{3} = \frac{3(y - 6)}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{3})^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ x - 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}(y - 6)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{3})^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ x - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(y - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}(y - 6))^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(y - 6)^4 + (y - 6)^4 = 10 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 10(y - 6)^4 = 10 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 6)^4 = 1 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 6 = \pm \sqrt[4]{1} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y - 6 = 1 \vee y - 6 = -1 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \vee y = 5 \\ x = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}(y - 6) \end{cases} \end{aligned}$$

Se  $y = 7$ , vem que  $x = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ . Coordenadas do ponto de interseção:  $(3\sqrt{3}, 7)$

Se  $y = 5$ , vem que  $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ . Coordenadas do ponto de interseção:  $(\sqrt{3}, 5)$

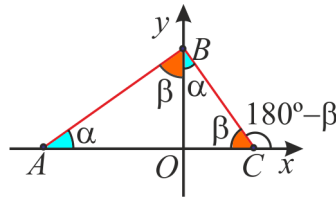
**10. a)** Designemos por  $\beta$  a amplitude do ângulo  $OBA$  e por  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $OAB$ .

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{OB}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\sqrt{2}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ A equação reduzida da reta } AB \text{ será } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}.$$

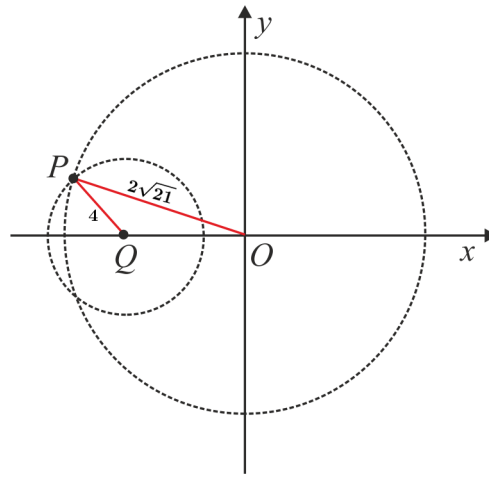
b)



$\beta = 90^\circ - \alpha$ , logo  $\widehat{BCO} = \beta$ , pelo que a inclinação da reta  $BC$  será  $180^\circ - \beta$ .

$$m_{BC} = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{2}$$

11. O ponto  $P$  é a interseção da circunferência de centro em  $O$  e raio  $2\sqrt{21}$  com a circunferência de centro em  $Q$  e raio 4.



$$\begin{cases} (x+6)^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = (2\sqrt{21})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 12x + 36 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 12x = -20 \\ x^2 + y^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 84 + 12x = -20 \\ x^2 + y^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = -104 \\ x^2 + y^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{3} \\ \left(-\frac{26}{3}\right)^2 + y^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{3} \\ y^2 = \frac{80}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{3} \\ y = \pm\sqrt{\frac{80}{9}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{3} \\ y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{3} \end{cases} \text{ Logo } P\left(-\frac{26}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$$

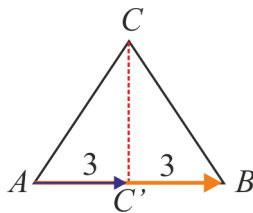
$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PQ}$  serão, então,

$$(-6, 0) - \left(-\frac{26}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right); m_{PQ} = -\frac{4\sqrt{5}}{8} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$PQ: y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + b, \text{ como a reta passa por } Q \text{ vem } 0 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(-6) + b \Leftrightarrow b = -3\sqrt{5}$$

A equação reduzida da reta  $PQ$  será  $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x - 3\sqrt{5}$ .

12. Designemos por  $C'$  a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $AB$ . Uma vez que o triângulo  $[ABC]$  é isósceles,  $C'$  é o ponto médio de  $[AB]$ . Os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC'}$  têm o mesmo sentido.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC'}\| = 6 \times 3 = 18$$

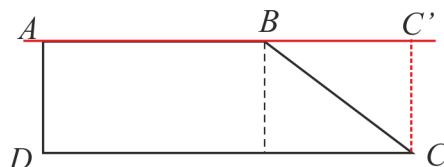
13. Os vetores  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OR'}$  têm sentidos contrários, logo  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = -\|\overrightarrow{OP}\| \times \|\overrightarrow{OR'}\|$ .  
 $\overrightarrow{OR'}^2 = \overrightarrow{OR}^2 - \overrightarrow{RR'}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OR'}^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \overrightarrow{OR'} = 3$   
 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = -5 \times 3 = -15$

14.  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -12 \Leftrightarrow -\|\overrightarrow{OP}\| \times \|\overrightarrow{OQ'}\| = -12 \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{OQ'}\| \times \|\overrightarrow{OQ'}\| = 12 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OQ'}\|^2 = 4 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OQ'}\| = 2$ , logo  $\|\overrightarrow{OP}\| = 3 \times 2 = 6$ , pelo que  $\overrightarrow{Q'P} = 2 + 6 = 8$   
 $\overrightarrow{QQ'}^2 = \overrightarrow{PQ}^2 - \overrightarrow{Q'P}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ'}^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ'}^2 = 36 \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ'} = 6$   
 $\overrightarrow{QQ'}^2 + \overrightarrow{Q'O}^2 = \overrightarrow{QO}^2 \Leftrightarrow 36 + 4 = \overrightarrow{QO}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{QO} = \sqrt{40} \Leftrightarrow \overrightarrow{QO} = 2\sqrt{10}$   
 $P_{[OPQ]} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO} = 6 + 10 + 2\sqrt{10} = 16 + 2\sqrt{10}$

15.  $A_{[ABCD]} = 24 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}}{2} \times \overrightarrow{AD} = 24 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DC} + 6}{2} \times 3 = 24 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 16 - 6 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 10$ . Como  $\overrightarrow{DE} = 6$ , vem que  $\overrightarrow{EC} = 10 - 6 = 4$ .

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| = 36$

- b) Designemos por  $C'$  a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $AB$ .



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| = 6 \times 10 = 60$$

c)  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = -\|\overrightarrow{ED}\| \times \|\overrightarrow{EC}\| = -6 \times 4 = -24$

16. a<sub>1</sub>)  $\frac{\pi}{2}$

a<sub>2</sub>)  $\pi$

a<sub>3</sub>) 0

a<sub>4</sub>)  $\frac{3\pi}{4}$

b<sub>1</sub>) 0

b<sub>2</sub>)  $\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  ;  $\vec{r} \cdot \vec{s} = -\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = -10$

b<sub>3</sub>)  $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  ;  $\|\vec{y}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$  ;  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$

b<sub>4</sub>)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \times 3 = -9$

17. a<sub>1</sub>)  $60^\circ$

a<sub>2</sub>)  $0^\circ$

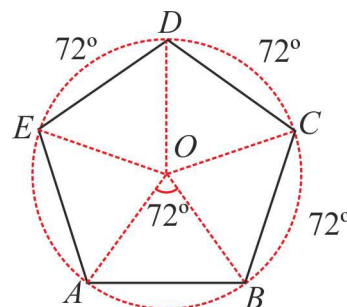
a<sub>3</sub>)  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

b<sub>1</sub>)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{\vec{AB} \vec{AC}}) = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 36 \times \frac{1}{2} = 18$

b<sub>2</sub>)  $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\widehat{\vec{AB} \vec{AB}}) = 6 \times 6 \times \cos 0^\circ = 36$

b<sub>3</sub>)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\widehat{\vec{AB} \vec{BC}}) = 6 \times 6 \times \cos 120^\circ =$   
 $= 36 \times [-\cos(180^\circ - 120^\circ)] = -36 \times \cos 60^\circ = -36 \times \frac{1}{2} = -18$

18. Se o perímetro é 40 o lado do pentágono mede  $\frac{40}{5} = 8$ .  $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$



a<sub>1</sub>)  $\widehat{BAE} = \frac{3 \times 72^\circ}{2} = 108^\circ$   
 (o ângulo  $\widehat{BAE}$  é um ângulo inscrito num arco de amplitude  $3 \times 72^\circ$ )  
 $(\widehat{\vec{AB} \vec{AE}}) = 108^\circ$

$$\mathbf{a_2)} \quad \widehat{BAC} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

(o ângulo  $BAC$  é um ângulo inscrito num arco de amplitude  $72^\circ$ )

$$\left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AC} \right) = 36^\circ$$

$$\mathbf{a_3)} \quad \widehat{BAD} = \frac{2 \times 72^\circ}{2} = 72^\circ$$

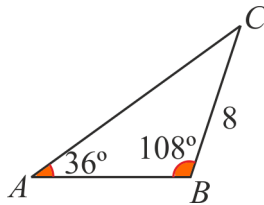
(o ângulo  $BAD$  é um ângulo inscrito num arco de amplitude  $2 \times 72^\circ$ )

$$\left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AD} \right) = 72^\circ$$

$$\mathbf{b_1)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos \left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AE} \right) = 8 \times 8 \times \cos 108^\circ = -19,8$$

$$\mathbf{b_2)} \quad \text{Pela Lei dos senos, temos que } \frac{\sin \widehat{BAC}}{BC} = \frac{\sin \widehat{CBA}}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 108^\circ}{AC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{8 \sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AC} \right) = 8 \times \frac{8 \sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} \times \cos 36^\circ = 83,8$$

$$\mathbf{b_3)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos \left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AD} \right) =$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \left( \overrightarrow{AB} \widehat{\phantom{AB}} \overrightarrow{AD} \right) = 8 \times \frac{8 \sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} \times \cos 72^\circ = 32$$

$$\mathbf{19. \quad a_1)} \quad 90^\circ$$

$$\mathbf{a_2)} \quad 0^\circ$$

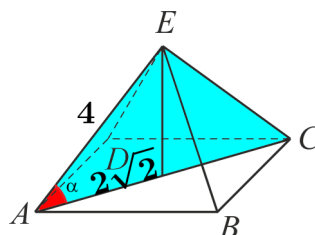
$$\mathbf{a_3)} \quad 180^\circ$$

$$\mathbf{a_4)} \quad 45^\circ$$

$$\mathbf{a_5)} \quad 60^\circ \text{ (o triângulo } [ABE] \text{ é equilátero)}$$

$$\mathbf{a_6)} \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{32} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{2}.$$

Designemos por  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $CAE$ .  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Então,  $\alpha = 45^\circ$ .

$$\mathbf{b_1)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD}}) = 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\mathbf{b_2)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{DC}}) = 4 \times 4 \times \cos 0^\circ = 16$$

$$\mathbf{b_3)} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{AD} \overrightarrow{CB}}) = 4 \times 4 \times \cos 180^\circ = -16$$

$$\mathbf{b_4)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC}}) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

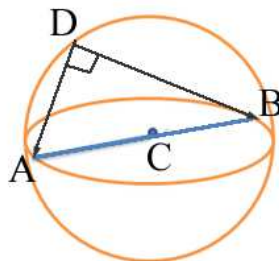
$$\mathbf{b_5)} \quad \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \|\overrightarrow{EA}\| \times \|\overrightarrow{EB}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{EA} \overrightarrow{EB}}) = 4 \times 4 \times \cos 60^\circ = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

$$\mathbf{b_6)} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos (\widehat{\overrightarrow{AC} \overrightarrow{AE}}) = 4\sqrt{2} \times 4 \times \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

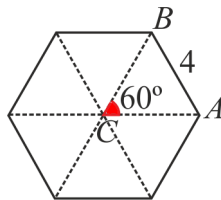
### Pág. 37

20. a) Os vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  têm norma 5 e são simétricos, logo,  
 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 \times 5 \times \cos 180^\circ = -25$ .

b) Os vetores  $\overrightarrow{DA}$  e  $\overrightarrow{DB}$  são perpendiculares logo o seu produto interno é 0.



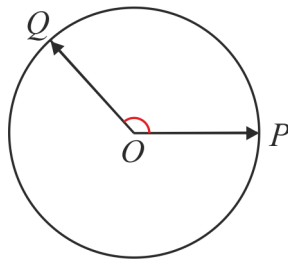
21. Se o perímetro do hexágono é 24 o seu lado mede 4. O triângulo  $[ABC]$  é equilátero de lado 4.



$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos 60^\circ = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

22. Designemos por  $r$  o raio da circunferência.  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OP}\| \times \|\overrightarrow{OQ}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OP} \overrightarrow{OQ}}) = -24 \Leftrightarrow r \times r \times -\frac{2}{3} = -24 \Leftrightarrow r^2 = 36 \Leftrightarrow r = 6$$

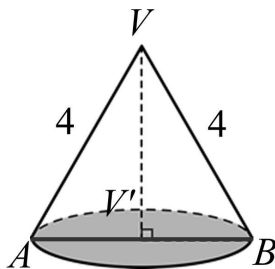


23.  $\vec{p} \cdot \vec{q} = -9 \Leftrightarrow \|\vec{p}\| \times \|\vec{q}\| \times \cos(\widehat{\vec{p} \vec{q}}) = -9 \Leftrightarrow 3 \times 3 \times \cos(\widehat{\vec{p} \vec{q}}) = -9 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{p} \vec{q}}) = -1$ . Os vetores são simétricos logo  $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$ .

24.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AD} \overrightarrow{AE}}) = 12 \times 15 \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$

25. a)  $\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VB} = 10 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{VA}\| \times \|\overrightarrow{VB}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{VA} \overrightarrow{VB}}) = 10 \Leftrightarrow 4 \times 4 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{VA} \overrightarrow{VB}}) = 10 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{VA} \overrightarrow{VB}}) = \frac{10}{16} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{VA} \overrightarrow{VB}}) = \frac{5}{8}$   
 $\widehat{AVB} = \arccos \frac{5}{8} \approx 51,3^\circ$

b) Designemos por  $V'$  a projeção ortogonal de  $V$  sobre  $AB$ .

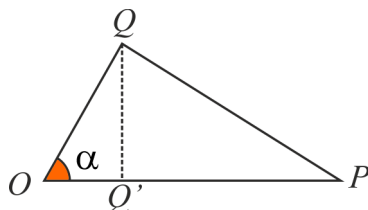


Pela lei dos cossenos, vem que  $\overline{AB}^2 = \overline{VB}^2 + \overline{VA}^2 - 2 \times \overline{VB} \times \overline{VA} \cos(\widehat{\overrightarrow{VA} \overrightarrow{VB}}) =$   
 $= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{5}{8} = 12$ ;  $\overline{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  então  $\overline{V'B} = \sqrt{3}$   
 $\overline{VV'}^2 + \overline{V'B}^2 = \overline{VB}^2 \Leftrightarrow \overline{VV'}^2 + 3 = 16 \Leftrightarrow \overline{VV'} = \sqrt{13}$   
 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{13} = \sqrt{13} \pi$

26. 
$$\frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \times \cos^2 \alpha}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$$
  

$$= \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha)}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sqrt{\sin^2 \alpha}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \sin \alpha$$

27. Designemos por  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $POQ$  e designemos por  $Q'$  a projeção ortogonal de  $Q$  sobre  $OP$ . Sabemos que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , uma vez que  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} > 0$ .



$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OP}\| \times \|\overrightarrow{OQ}\| \times \cos \alpha = \sqrt{8}$$

Por outro lado  $\sin \alpha = \frac{QQ'}{OQ} \Leftrightarrow OQ = \frac{QQ'}{\sin \alpha}$

$$\begin{aligned} \text{Vem, então, } \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \times \cos \alpha &= \sqrt{8} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \times \frac{QQ'}{\sin \alpha} \times \cos \alpha = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \times QQ' \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \times QQ' \times \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Mas se o triângulo tem área  $\sqrt{6}$ , então,  $\frac{\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}}{2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = 2\sqrt{6}$

$$\text{Então, } \overrightarrow{OP} \times QQ' \times \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

Logo,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

### Pág. 38

28. a)  $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = 2\left(3 \times 4 \times \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -12$
- b)  $\vec{u} \cdot (5\vec{v}) = (5\vec{v}) \cdot \vec{u} = 5(\vec{v} \cdot \vec{u}) = 5(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 5(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = 5\left(3 \times 4 \times \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 60 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -30$
- c)  $(-2\vec{u}) \cdot (5\vec{v}) = -2(\vec{u} \cdot 5\vec{v}) = -2(5\vec{v} \cdot \vec{u}) = -10(\vec{v} \cdot \vec{u}) = -10(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -10(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = -10\left(3 \times 4 \times \cos \frac{2\pi}{3}\right) = -120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 60$
- d)  $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 4\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (4\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + (4\vec{v}) \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + 4(\vec{v} \cdot \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 + 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 9 + 4(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = 9 + 4\left(3 \times 4 \times \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 9 + 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 9 - 24 = -15$
29. a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 10 \times 6 \times \cos 60^\circ = 60 \times \frac{1}{2} = 30$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 100 + 30 = 130$
30. a)  $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) - (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{u}) - (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v}) - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|) \end{aligned}$$

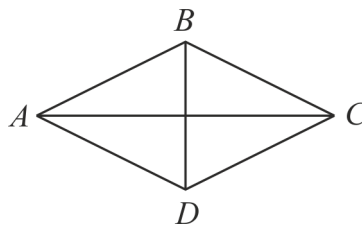
$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

d) Tendo em conta a igualdade da alínea anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31. \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BN} = \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BN} = \\ &= 0 + \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{BN}\| \times \cos 0^\circ + \|\overrightarrow{DM}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos 0^\circ + 0 = \\ &= \|\overrightarrow{AD}\| \times \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AD}\| + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AD}\|^2 + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{DC}\|^2) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \frac{1}{2} \times 8^2 = 32 \end{aligned}$$

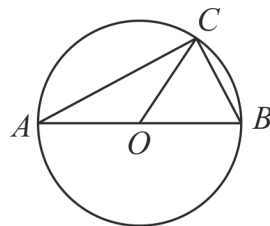
32. Na figura está representado um losango  $[ABCD]$  cujas diagonais são  $[AC]$  e  $[BD]$ .



Para mostrar que as diagonais são perpendiculares, vamos provar que  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \vec{0} = 0 \end{aligned}$$

33. Na figura está representada uma circunferência de centro  $O$ .



Para mostrar que o ângulo  $ACB$  é reto, vamos provar que  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \cdot (-\overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \|\overrightarrow{AO}\|^2 - \|\overrightarrow{OC}\|^2 + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{0} = 0 \end{aligned}$$

### Pág. 39

34. a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 4 = -2 + 12 = 10$

b)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$  e  $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

c)  $\cos(\widehat{\vec{u} \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{10}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{221}}$

d)  $(\widehat{\vec{u} \vec{v}}) = \arccos \frac{10}{\sqrt{221}} \approx 48^\circ$

35. a)  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$   
 $\overrightarrow{BA} = A - B = (2, -1) - (-1, 3) = (3, -4)$   
 $\overrightarrow{BC} = C - B = (2, 4) - (-1, 3) = (3, 1)$   
 $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$  e  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 3 - 4 \times 1 = 5$   
 $\|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5^2 + 2 \times 5 = 35$

b)  $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA} \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{5}{5 \times \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$   
 $\widehat{ABC} = (\widehat{\overrightarrow{BA} \overrightarrow{BC}}) = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 72^\circ$

$$36. \text{ a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow 2(x-4) + \sqrt{3} \times \sqrt{3}x = 12 \Leftrightarrow 2x - 8 + 3x = 12 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2(x-4) + \sqrt{3} \times \sqrt{3}x = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + 3x = 0 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$\text{c) } \exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k \vec{u} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (x-4, \sqrt{3}x) = k(2, \sqrt{3}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2k \\ \sqrt{3}x = \sqrt{3}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2k \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2x \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = k \end{cases}$$

$$\text{d) } \cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{5x-8}{\sqrt{4+3} \times \sqrt{(x-4)^2+3x^2}} = \frac{5x-8}{\sqrt{7[(x-4)^2+3x^2]}}$$

$$\frac{5x-8}{\sqrt{7[(x-4)^2+3x^2]}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{7[(x-4)^2+3x^2]} = 10x-16 \wedge 7[(x-4)^2+3x^2] \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7[(x-4)^2+3x^2] = (10x-16)^2 \wedge 7[(x-4)^2+3x^2] > 0 \wedge 10x-16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7(x^2-8x+16+3x^2) = 100x^2-320x+256 \wedge 7(x^2-8x+16+3x^2) > 0 \wedge x > \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28x^2-56x+112 = 100x^2-320x+256 \wedge 28x^2-56x+112 > 0 \wedge x > \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -72x^2+264x-144 = 0 \wedge 28x^2-56x+112 > 0 \wedge x > \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-11x+6 = 0 \wedge x^2-2x+4 > 0 \wedge x > \frac{8}{5}$$

$$3x^2-11x+6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2-4 \times 3 \times 6}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 7}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{2}{3}$$

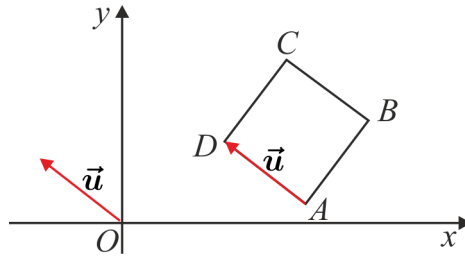
$$x^2-2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \text{ Equação impossível}$$

$x^2-2x+4$  nunca se anula, ou é sempre positivo ou sempre negativo. Como o gráfico de  $y = x^2-2x+4$  é uma parábola voltada para cima, sabemos que  $x^2-2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$3x^2-11x+6 = 0 \wedge x^2-2x+4 > 0 \wedge x > \frac{8}{5} \Leftrightarrow \left(x = 3 \vee x = \frac{2}{3}\right) \wedge x > \frac{8}{5} \Leftrightarrow x = 3$$

37. O vetor de coordenadas  $(3, 2)$  é perpendicular a  $\vec{u}$ , tem ambas as coordenadas positivas, e tem norma igual à norma de  $\vec{u}$ . O vetor  $\vec{v}$  terá que ser o triplo deste, logo as coordenadas de  $\vec{v}$  serão  $3 \times (3, 2) = (9, 6)$ .

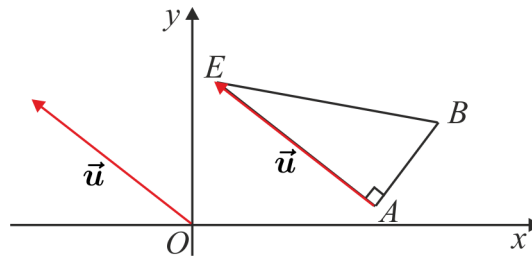
38. a)  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão, então,  $(12, 5) - (9, 1) = (3, 4)$ .



Vamos designar por  $\vec{u}$  o vetor que é perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$ , tem a mesma norma que  $\overrightarrow{AB}$ , e que tem primeira coordenada negativa e segunda positiva.

$\vec{u}(-4, 3)$ ;  $C = B + \vec{u}$  e  $D = A + \vec{u}$ . As coordenadas de  $C$  serão  $(12, 5) + (-4, 3) = (8, 8)$  e as coordenadas de  $D$  serão  $(9, 1) + (-4, 3) = (5, 4)$ .

b)  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ ;  $A = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AE}\|}{2} \Leftrightarrow 25 = \frac{5 \times \|\overrightarrow{AE}\|}{2} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\| = 10$



Vamos designar por  $\vec{u}$  o vetor que é perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$ , cuja norma é o dobro da norma de  $\overrightarrow{AB}$ , e que tem primeira coordenada negativa e segunda positiva.

As coordenadas de  $\vec{u}$  serão  $2(-4, 3) = (-8, 6)$ ;  $E = A + \vec{u}$ ;

As coordenadas de  $E$  serão  $(9, 1) + (-8, 6) = (1, 7)$ .

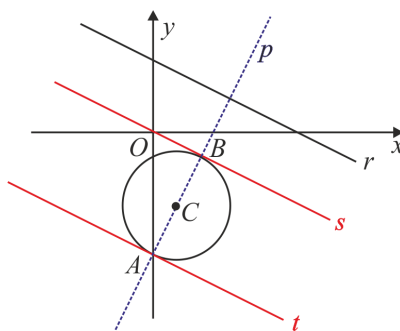
39. a)  $\overrightarrow{PA} = A - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PA}$  serão então  $(-1, 3) - (x, y) = (-1 - x, 3 - y)$   
 $\overrightarrow{PB} = B - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PB}$  serão então  $(5, 11) - (x, y) = (5 - x, 11 - y)$   
 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (-1 - x) \times (5 - x) + (3 - y) \times (11 - y) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -5 + x - 5x + x^2 + 33 - 3y - 11y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 14y + 28 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 = -28 + 4 + 49 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 25$

- b)  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão, então,  $(5, 11) - (-1, 3) = (6, 8)$ .  
 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-1 - x) \times 6 + (3 - y) \times 8 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -6 - 6x + 24 - 8y = 0 \Leftrightarrow 8y = -6x + 18 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

## Pág. 40

40. As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, pois  $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ .

41.  $y = \frac{4}{3}x + b$ . Como passa no ponto  $A(3, 5)$ , vem que  $5 = \frac{4}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 1$ .  
Equação reduzida:  $y = \frac{4}{3}x + 1$
42.  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão, então,  $(-7, 5) - (3, -1) = (-10, 6)$ ;  
 $m_{AB} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$   
Determinemos as coordenadas do ponto médio de  $[AB]$  que vamos designar por  $M$ .  
 $\left(\frac{3-7}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = \left(\frac{3-7}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (-2, 2)$ . As coordenadas de  $M$  são  $(-2, 2)$ .  
A equação reduzida da mediatriz será da forma  $y = \frac{5}{3}x + b$ , como passa por  $M$  virá  
 $2 = \frac{5}{3}(-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{16}{3}$ . A equação reduzida da mediatriz é, então,  $y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$ .
43. a) Tem-se  $4^2 + 2 \times 4 + (-1)^2 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$ , o que é verdade, pelo que o ponto  $A$  pertence à circunferência.
- b)  $x^2 + 2x + y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 25 + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 26$   
A circunferência tem centro no ponto  $C$  de coordenadas  $(-1, 0)$  e raio  $\sqrt{26}$ .  
 $\overrightarrow{CA} = A - C$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{CA}$  serão, então,  $(4, -1) - (-1, 0) = (5, -1)$ .  
 $m_{CA} = -\frac{1}{5}$ , logo o declive da reta tangente à circunferência no ponto  $A$  será  $5$ .  
A equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto  $A$  será da forma  $y = 5x + b$ .  
Como a reta passa no ponto  $A$  vem  $-1 = 5 \times 4 + b \Leftrightarrow b = -21$   
Então a sua equação reduzida será  $y = 5x - 21$ .
44. Designemos por  $C$  o centro da circunferência  $C(1, -3)$ . O raio da circunferência é  $\sqrt{5}$ .



Designemos por  $r$  a reta de equação  $x + 2y = 6$ . A equação reduzida de  $r$  será  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .  
Designemos por  $s$  e  $t$  as retas paralelas a  $r$  e que são tangentes à circunferência.  
Tanto a reta  $s$  como a reta  $t$  terão declive  $-\frac{1}{2}$ . Precisamos, então, de determinar as coordenadas dos pontos de tangência, designemos esses pontos por  $A$  e  $B$ .  
Os pontos  $A$  e  $B$  são os pontos de interseção da circunferência com a reta perpendicular a  $r$  e que passa em  $C$ . Designemos essa reta por  $p$ .  
 $p$ :  $y = 2x + b$ . Como as coordenadas de  $C$  são  $(1, -3)$ , vem  $-3 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -5$ .  
A equação reduzida de  $p$  é  $y = 2x - 5$ .  
Vamos então determinar as coordenadas de  $A$  e de  $B$ .  
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2x-5+3)^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2x-2)^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2(x-1))^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 4(x-1)^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1)^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Se  $x = 0$  vem  $y = -5$ . As coordenadas de  $A$  serão  $(0, -5)$ .

Se  $x = 2$  vem  $y = 2 \times 2 - 5 = -1$ . As coordenadas de  $B$  serão  $(2, -1)$ .

$$t: y = -\frac{1}{2}x - 5$$

$$s: y = -\frac{1}{2}x + b. \text{ Como as coordenadas de } B \text{ são } (2, -1), \text{ vem } -1 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Uma equação da reta  $s$  será  $y = -\frac{1}{2}x$  e uma equação da reta  $t$  será  $y = -\frac{1}{2}x - 5$ .

**45. a)** A reta  $AB$  tem declive  $\frac{1}{2}$ , então a sua equação reduzida será da forma  $y = \frac{1}{2}x + b$ .

Uma vez que passa no ponto  $A$  de coordenadas  $(-5, 0)$  vem que  $0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$ .

A sua equação reduzida será  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

**b)** O ponto  $B$  é um dos pontos de interseção da reta  $AB$  com a circunferência.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 = 25 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 25 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + x^2 + 10x + 25 = 100 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x - 75 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm 8}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm 4 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \vee x = 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Uma vez que a abcissa de  $A$  é  $-5$ , a abcissa de  $B$  será  $3$ . A sua ordenada virá  $\frac{1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = 4$

As coordenadas de  $B$  são  $(3, 4)$ .

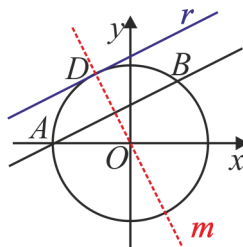
**c)**  $\overrightarrow{BA} = A - B$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{BA}$  são  $(-5, 0) - (3, 4) = (-8, -4)$ .

$\overrightarrow{BC} = C - B$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são  $(-3, 16) - (3, 4) = (-6, 12)$ .

Tem-se  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-8, -4) \cdot (-6, 12) = 48 - 48 = 0$ , pelo que  $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ .

Portanto, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ .

**d)** Designemos por  $m$  a mediatriz do segmento de reta  $[AB]$  e por  $r$  a reta tangente à circunferência no ponto  $D$ .



Relativamente à reta  $r$  sabemos que o seu declive é igual ao declive da reta  $AB$  e portanto  $\frac{1}{2}$ .

Precisamos então de determinar as coordenadas de  $D$ .

$D$  é um dos pontos de interseção da reta  $m$  com a circunferência.

A reta  $m$  passa pelo centro da circunferência (uma vez que o centro da circunferência é equidistante de quaisquer dois dos seus pontos) e, por ser perpendicular a  $AB$ , tem declive  $-2$ .

$$m: y = -2x + 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-2x)^2 = 25 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 25 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 25 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \\ y = -2x \end{cases}$$

Como  $D$  pertence ao segundo quadrante a sua abcissa é  $-\sqrt{5}$ , a sua ordenada é  $2\sqrt{5}$ .

$$D(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}).$$

$$r: y = \frac{1}{2}x + b \text{ e } 2\sqrt{5} = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}) + b \Leftrightarrow b = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Equação reduzida da reta } r: y = \frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

## Pág. 41

46. a) Os pontos  $C$  e  $D$  têm coordenadas  $(10, 0)$  e  $(0, -10)$ , respetivamente. A inclinação da reta  $CD$  é  $45^\circ$ , pelo que o seu declive é 1. Uma equação da reta  $CD$  é então  $y = x - 10$ .  $B$  é o ponto da reta  $CD$  que tem ordenada 10.  $10 = x - 10 \Leftrightarrow x = 20$   $B(20, 10)$

- b) Designemos por  $M$  o ponto médio de  $[BC]$ .

$$\text{As coordenadas de } M \text{ serão } \left( \frac{20+10}{2}, \frac{10+0}{2} \right) = (15, 5).$$

O declive da mediatriz é  $-1$ , pelo que uma equação da mediatriz será do tipo  $y = -x + b$ .

$$5 = -15 + b \Leftrightarrow b = 20. \text{ A equação da mediatriz é } y = -x + 20.$$

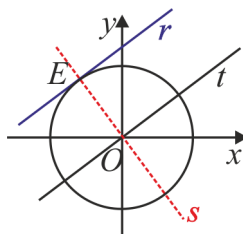
- c)  $y \leq x - 10 \wedge x^2 + y^2 \leq 100$

$$d) A_{[OABC]} = \frac{\overline{AB} + \overline{OC}}{2} \times \overline{OA} = \frac{20+10}{2} \times 10 = 150.$$

$$\text{Área de um quarto de círculo} = \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 = 25\pi$$

$$\text{Área da região colorida a azul} = 150 - 25\pi$$

- e) Designemos por  $t$  a reta de equação  $y = \frac{3}{4}x$  e por  $s$  a reta perpendicular a  $t$  e que passa no centro da circunferência.



$$s: y = -\frac{4}{3}x$$

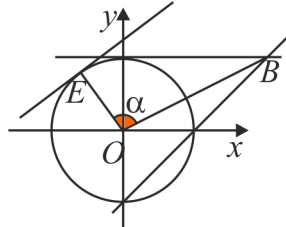
$E$  é um dos pontos de interseção da reta  $s$  com a circunferência (é o que tem ordenada positiva).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{9}x^2 = 100 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 36 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases}$$

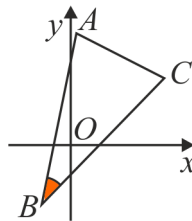
O ponto  $E$  tem abscissa negativa e ordenada positiva, pelo que  $x = -6$  e  $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$ .  
As coordenadas de  $E$  são  $(-6, 8)$ .

- f)  $\overrightarrow{OB} = B - O$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{OB}$  são  $(20, 10)$ .  
 $\overrightarrow{OE} = E - O$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{OE}$  são  $(-6, 8)$ .  
 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} = (20, 10) \cdot (-6, 8) = 20 \times (-6) + 10 \times 8 = -40$



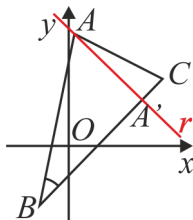
$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OB}\| &= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}; \quad \|\overrightarrow{OE}\| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \\ \cos \alpha &= \cos(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}}{\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OE}\|} = \frac{-40}{10\sqrt{5} \times 10} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5 \times 5} = -\frac{2\sqrt{5}}{25} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{4 \times 5}{625}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{625}{20} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{121}{4} \\ \text{Como } 90^\circ < \alpha < 180^\circ, \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

47. a)  $\overrightarrow{BA} = A - B$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{BA}$  são  $(1, 20) - (-5, -10) = (6, 30)$ .  
 $\overrightarrow{BC} = C - B$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são  $(17, 12) - (-5, -10) = (22, 22)$ .  
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (6, 30) \cdot (22, 22) = 6 \times 22 + 30 \times 22 = 792$



$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{BA}\| &= \sqrt{6^2 + 30^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}; \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{22^2 + 22^2} = \sqrt{968} = 22\sqrt{2} \\ \cos(\widehat{ABC}) &= \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{792}{6\sqrt{26} \times 22\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \\ &= \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{26} = \frac{3\sqrt{13}}{13}; \quad \widehat{ABC} = \arccos \frac{3\sqrt{13}}{13} \approx 33,7^\circ \end{aligned}$$

- b) Designemos por  $r$  a reta perpendicular a  $BC$  e que passa em  $A$  e por  $A'$  o ponto de interseção de  $r$  com  $BC$ .



As coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são  $(22, 22)$ . O declive de  $BC$  é 1. O declive da reta  $r$  é  $-1$ .

Uma equação da reta  $r$  é do tipo  $y = -x + b$ .

$20 = -1 + b \Leftrightarrow b = 21$ . A equação reduzida da reta  $r$  é  $y = -x + 21$ .

Uma equação da reta  $BC$  é do tipo  $y = x + b'$ .

$-10 = -5 + b' \Leftrightarrow b' = -5$ . A equação reduzida da reta  $BC$  é  $y = x - 5$ .

$$\begin{cases} y = -x + 21 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -x + 21 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 26 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 13 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 8 \end{cases}$$

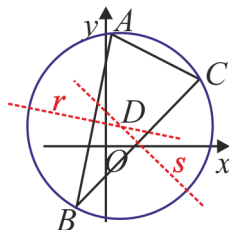
As coordenadas de  $A'$  são  $(13, 8)$ .

A altura do triângulo  $[ABC]$  relativa à base  $[BC]$  é igual à distância entre  $A$  e  $A'$ .

$$AA' = \sqrt{(13 - 1)^2 + (8 - 20)^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

c)  $A = \frac{\overline{BC} \times \overline{AA'}}{2} = \frac{22\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}}{2} = 22 \times 12 = 264$

- d) Designemos por  $r$  e  $s$  as mediatrizes dos segmentos  $[AB]$  e  $[BC]$ , respetivamente. O centro da circunferência, que designaremos por  $D$ , será o ponto de interseção dessas mediatrizes.



As coordenadas do ponto médio de  $[AB]$  serão  $\left(\frac{1-5}{2}, \frac{20-10}{2}\right) = (-2, 5)$ .

As coordenadas de  $\overrightarrow{BA}$  são  $(6, 30)$ , logo o vetor de coordenadas  $(-30, 6)$  será vetor diretor de  $r$ .

$$r: y = \frac{6}{-30}x + b \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + b$$

$$5 = -\frac{1}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{23}{5}. \text{ Uma equação da reta } r \text{ será } y = -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5}.$$

As coordenadas do ponto médio de  $[BC]$  serão  $\left(\frac{-5+17}{2}, \frac{-10+12}{2}\right) = (6, 1)$ .

As coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são  $(22, 22)$ , logo o vetor de coordenadas  $(-22, 22)$  será vetor diretor de  $s$ .

$$s: y = -x + b$$

$$1 = -6 + b \Leftrightarrow b = 7. \text{ Uma equação da reta } s \text{ será } y = -x + 7.$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5} \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5} = -x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 23 = -5x + 35 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Logo,  $D(3, 4)$ .

O raio da circunferência será a distância de  $D$  a um dos pontos da circunferência.

$$\text{raio} = \overline{AD} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-20)^2} = \sqrt{260}$$

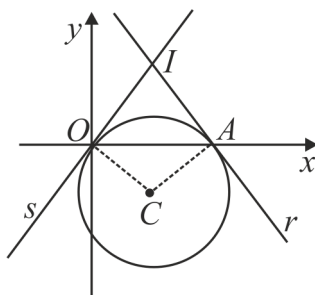
A equação reduzida da circunferência circunscrita ao triângulo é  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 260$ .

e)  $\overrightarrow{DC} = C - D$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{DC}$  são  $(17, 12) - (3, 4) = (14, 8)$ ;  $m_{DC} = \frac{4}{7}$ ;  
 $m_t = -\frac{7}{4}$ .  
 $t: y = -\frac{7}{4}x + b$ ;  $12 = -\frac{7}{4} \times 17 + b \Leftrightarrow b = \frac{167}{4}$ .  
A equação reduzida da reta  $t$  é  $y = -\frac{7}{4}x + \frac{167}{4}$ .

f)  $m_t = -\frac{7}{4}$ .  $\arctg \frac{7}{4} \approx 60,3^\circ$ ; inclinação da reta  $t \approx 180^\circ - 60,3^\circ = 119,7^\circ$

48. a) Tem-se que são verdadeiras as igualdades  $(8-4)^2 + (0+3)^2 = 25$  e  $(0-4)^2 + (0+3)^2 = 25$ , pelo que o ponto  $A$  e o ponto  $O$  pertencem à circunferência  $c$ .

b) Designemos por  $C$  o centro da circunferência e por  $I$  o ponto de interseção das duas retas  $r$  e  $s$ .  
 $C(4, -3)$



$$\overrightarrow{CA} = A - C. \text{ As coordenadas de } \overrightarrow{CA} \text{ são } (8, 0) - (4, -3) = (4, 3); m_{CA} = \frac{3}{4}; m_r = -\frac{4}{3}.$$

$$r: y = -\frac{4}{3}x + b; \quad 0 = -\frac{4}{3} \times 8 + b \Leftrightarrow b = \frac{32}{3}.$$

$$\text{A equação reduzida da reta } r \text{ é } y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}.$$

$$\overrightarrow{CO} = O - C. \text{ As coordenadas de } \overrightarrow{CO} \text{ são } (0, 0) - (4, -3) = (-4, 3); m_{CO} = -\frac{3}{4};$$

$$m_s = \frac{4}{3}.$$

$$s: y = \frac{4}{3}x; \text{ A equação reduzida da reta } s \text{ é } y = \frac{4}{3}x.$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3} \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3} \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -4x + 32 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 32 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{4}{3} \times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Logo,  $I\left(4, \frac{16}{3}\right)$ .

c)  $(\widehat{r\vec{O}s}) = (\widehat{\vec{IO}\vec{IA}}) \vee (\widehat{r\vec{O}s}) = 180^\circ - (\widehat{\vec{IO}\vec{IA}})$   
 $\vec{IO} = O - I$ . As coordenadas de  $\vec{IO}$  são  $(0, 0) - \left(4, \frac{16}{3}\right) = \left(-4, -\frac{16}{3}\right)$   
 $\vec{IA} = A - I$ . As coordenadas de  $\vec{IA}$  são  $(8, 0) - \left(4, \frac{16}{3}\right) = \left(4, -\frac{16}{3}\right)$   
 $\vec{IO} \cdot \vec{IA} = \left(-4, -\frac{16}{3}\right) \cdot \left(4, -\frac{16}{3}\right) = -16 + \frac{256}{9} = \frac{112}{9}$   
 $\|\vec{IO}\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$   
 $\|\vec{IA}\| = \sqrt{4^2 + \left(-\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$

$$\cos(\widehat{\vec{IO}\vec{IA}}) = \frac{\vec{IO} \cdot \vec{IA}}{\|\vec{IO}\| \times \|\vec{IA}\|} = \frac{\frac{112}{9}}{\frac{20}{3} \times \frac{20}{3}} = \frac{112}{400} = \frac{7}{25} > 0$$

Logo,  $(\widehat{r\vec{O}s}) = (\widehat{\vec{IO}\vec{IA}})$ .

$$(\widehat{r\vec{O}s}) = \arccos \frac{7}{25} \approx 74^\circ$$

## Pág. 42

49. a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1, 4) \cdot (3, 0, -5) = 2 \times 3 - 1 \times 0 + 4 \times (-5) = 6 - 20 = -14$

b)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$ ;  $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

c)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-14}{\sqrt{21} \times \sqrt{34}} = -\frac{14}{\sqrt{714}}$

d)  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180^\circ - \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{714}}\right) \approx 122^\circ$

50. a)  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(0, 5, -1) - (1, 3, -2) = (-1, 2, 1)$ .  
 $\overrightarrow{AC} = C - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são  $(3, -2, 4) - (1, 3, -2) = (2, -5, 6)$ .  
 $\overrightarrow{AB} \cdot (3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (-1, 2, 1) \cdot [(-3, 6, 3) + (2, -5, 6)] = (-1, 2, 1) \cdot (-1, 1, 9) =$   
 $= 1 + 2 + 9 = 12$

b)  $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-2 - 10 + 6}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \times \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 6^2}} = -\frac{6}{\sqrt{390}}$   
 $B\hat{A}C = (\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC}}) = \arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{390}}\right) \approx 108^\circ$

51. Tem-se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 3 \times 4 + (-1) \times 6 = 0$ , pelo que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

52. a) Por exemplo:  $\vec{v}_1(0, 2, 5)$ ;  $\vec{v}_2(2, 0, 3)$ ;  $\vec{v}_3(5, -3, 0)$

b)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (-2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow -2a + b - 3c = 0$

c1)  $\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, 5, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 5b - 2c = 0 \\ -2a + b - 3c = 0 \end{cases}$

c2)  $\begin{cases} 3a + 5b - 2c = 0 \\ -2a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 5b - 2c = 0 \\ b = 2a + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 5(2a + 3c) - 2c = 0 \\ b = 2a + 3c \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 13a + 13c = 0 \\ b = 2a + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 2a + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 2a - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = -a \end{cases}$

Portanto,  $(a, b, c) = (a, -a, -a) = a(1, -1, -1)$ .

53.  $\vec{w}(a, b, c)$   
 $\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 1, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ -3a + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - c \\ -3a + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - c \\ -3a + 2a - c - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - c \\ -a - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - c \\ a = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(-3c) - c \\ a = -3c \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -7c \\ a = -3c \end{cases} \quad (a, b, c) = (-3c, -7c, c) = c(-3, -7, 1)$   
Logo,  $\vec{w}(-3, -7, 1)$ .

## Pág. 43

54. a)  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(13, 2, 8) - (11, -1, 2) = (2, 3, 6)$ .  
 $\overrightarrow{AE} = E - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AE}$  são  $(8, 5, 0) - (11, -1, 2) = (-3, 6, -2)$ .

b)  $\overrightarrow{AD}(a, b, c)$  e  $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 6, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ -3a + 6b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ 2c = -3a + 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ c = -\frac{3}{2}a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6\left(-\frac{3}{2}a + 3b\right) = 0 \\ c = -\frac{3}{2}a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - 9a + 18b = 0 \\ c = -\frac{3}{2}a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21b = 7a \\ c = -\frac{3}{2}a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = -\frac{3}{2}a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = -\frac{3}{2}a + 3 \times \frac{1}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = -\frac{3}{2}a + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$(a, b, c) = \left(a, \frac{1}{3}a, -\frac{1}{2}a\right) \text{ e } a < 0 \text{ e } \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}a\right)^2} = 7$$

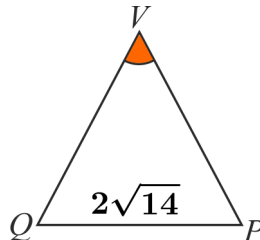
$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}a\right)^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{49}{36}a^2} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{6}a = 7 \Leftrightarrow a = -6 ; (a, b, c) = \left(-6, \frac{1}{3} \times (-6), -\frac{1}{2} \times (-6)\right) = (-6, -2, 3)$$

Logo,  $\overrightarrow{AD}(-6, -2, 3)$ .

c)  $D = A + \overrightarrow{AD}$ . As coordenadas de  $D$  são  $(11, -1, 2) + (-6, -2, 3) = (5, -3, 5)$ .

55. a)  $\overrightarrow{VP} \cdot \overrightarrow{VQ} = 36 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{VP}\| \times \|\overrightarrow{VQ}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{VP} \overrightarrow{VQ}}) = 36 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{VP}\|^2 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{VP} \overrightarrow{VQ}}) = 36 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{VP} \overrightarrow{VQ}}) = \frac{36}{\|\overrightarrow{VP}\|^2}$



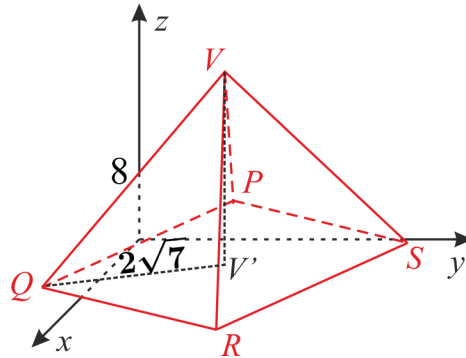
Pela lei dos cossenos sabemos que

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{VQ}\|^2 + \|\overrightarrow{VP}\|^2 - 2\|\overrightarrow{VQ}\| \times \|\overrightarrow{VP}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{VP} \overrightarrow{VQ}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{14})^2 = \|\overrightarrow{VP}\|^2 + \|\overrightarrow{VP}\|^2 - 2\|\overrightarrow{VP}\| \times \|\overrightarrow{VP}\| \times \frac{36}{\|\overrightarrow{VP}\|^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 14 = 2\|\overrightarrow{VP}\|^2 - 2 \times 36 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{VP}\|^2 = 64 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{VP}\| = 8$$

- b) A base da pirâmide é um quadrado de lado  $2\sqrt{14}$ . Determinemos a medida da sua diagonal.  
 $\overline{QS}^2 = (2\sqrt{14})^2 + (2\sqrt{14})^2 = 2 \times 4 \times 14 = 112$ , pelo que  $\overline{QS} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ .  
 Designemos por  $V'$  o centro da base da pirâmide.  $\overline{QV'} = 2\sqrt{7}$ .



$$\overline{VV'}^2 = 8^2 - (2\sqrt{7})^2 = 36, \text{ pelo que } \overline{VV'} = 6.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \overline{PQ}^2 \times \overline{VV'} = \frac{1}{3} \times 4 \times 14 \times 6 = 112$$

- c) Sabemos que  $\overline{PV'} = 2\sqrt{7}$ . Sabemos também que a abcissa de  $V'$  é igual à abcissa de  $V$ , que é 2. Sabemos ainda que a cota de  $V'$  é 0. Designemos por  $a$  a ordenada de  $V'$ , com  $a > 0$ .

$$P(-3, \sqrt{3}, 0), V'(2, a, 0).$$

$$\overline{PV'} = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{(2+3)^2 + (a-\sqrt{3})^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{25 + (a-\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + (a-\sqrt{3})^2 = 28 \Leftrightarrow (a-\sqrt{3})^2 = 3 \Leftrightarrow a-\sqrt{3} = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \pm \sqrt{3}$$

Como  $a > 0$ , vem que  $a = 2\sqrt{3}$ . As coordenadas de  $V'$  são  $(2, 2\sqrt{3}, 0)$ .

Como a altura da pirâmide é 6 vem que  $V(2, 2\sqrt{3}, 6)$ .

Sabemos que  $\|\overrightarrow{V'Q}\| = 2\sqrt{7}$ . Sabemos também que  $\overrightarrow{V'P} \perp \overrightarrow{V'Q}$ .

A cota de  $Q$  é 0. Designemos por  $b$  ( $b > 0$ ) e  $c$  ( $c < 0$ ) respetivamente a abcissa e a ordenada de  $Q$ .

$\overrightarrow{V'Q} = Q - V'$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{V'Q}$  são  $(b, c, 0) - (2, 2\sqrt{3}, 0) = (b-2, c-2\sqrt{3}, 0)$ .

$\overrightarrow{V'P} = P - V'$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{V'P}$  são  $(-3, \sqrt{3}, 0) - (2, 2\sqrt{3}, 0) = (-5, -\sqrt{3}, 0)$ .

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{V'Q}\| = 2\sqrt{7} \\ \overrightarrow{V'P} \cdot \overrightarrow{V'Q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(b-2)^2 + (c-2\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2\sqrt{7} \\ (-5, -\sqrt{3}, 0) \cdot (b-2, c-2\sqrt{3}, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(b-2)^2 + (c-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} \\ -5b + 10 - \sqrt{3}c + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)^2 + (c-2\sqrt{3})^2 = 28 \\ 5b = 16 - \sqrt{3}c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)^2 + (c-2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} - 2\right)^2 + (c-2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{6}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5}\right)^2 + (c-2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left( -\frac{\sqrt{3}}{5} (c - 2\sqrt{3}) \right)^2 + (c - 2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{25} (c - 2\sqrt{3})^2 + (c - 2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{28}{25} (c - 2\sqrt{3})^2 = 28 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c - 2\sqrt{3})^2 = 25 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2\sqrt{3} = \pm 5 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

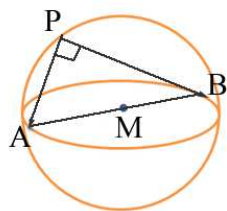
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3} \pm 5 \\ b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}c}{5} \end{cases}$$

Como  $c < 0$ , vem  $c = 2\sqrt{3} - 5$  e

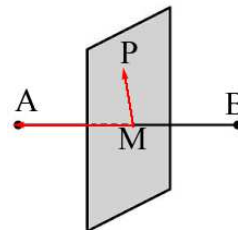
$$b = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-5)}{5} = \frac{16}{5} - \frac{6-5\sqrt{3}}{5} = 2 + \sqrt{3}$$

Então  $Q(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 5, 0)$

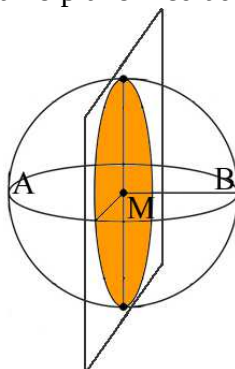
56. a) Superfície esférica de diâmetro  $[AB]$



b) Plano mediador do segmento de reta  $[AB]$



c) Circunferência de centro  $M$ , contida no plano mediador de  $[AB]$  e de raio  $\overline{MA}$



**Pág. 44**

57.  $\left(2, 1, -\frac{1}{3}\right)$

58. Uma equação do plano será da forma  $4x + 2y - z + d = 0$ .

$4 \times 1 + 2 \times (-3) - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$ . Uma equação do plano será  $4x + 2y - z + 6 = 0$ .

59. Um vetor diretor da reta definida por  $x = 5 \wedge z = -1$  terá coordenadas, por exemplo,  $(0, 1, 0)$ .  
 Uma equação do plano  $\beta$  será da forma  $0x + 1y + 0z + d = 0$ .  
 $0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$   
 Uma equação do plano  $\beta$  será  $0x + 1y + 0z - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ .
60.  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(3, 5, -2) - (1, -3, 4) = (2, 8, -6)$ .  
 As coordenadas do ponto médio do segmento  $[AB]$  são  $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2, 1, 1)$ .  
 O vetor  $\overrightarrow{AB}$  é normal ao plano, logo uma equação do plano será da forma  $2x + 8y - 6z + d = 0$ .  
 $2 \times 2 + 8 \times 1 - 6 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$   
 Uma equação do plano será  $2x + 8y - 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 3z - 3 = 0$ .
61. a)  $(3, -2, 7)$   
 b) Tem-se  $3 \times 4 - 2 \times 5 + 7 \times 1 = 9$ , pelo que  $P \in \alpha$ .  
 c) Designemos por  $a$  a ordenada de  $Q$ . As coordenadas de  $Q$  são  $(2, a, 3)$ .  
 Como  $Q$  pertence a  $\alpha$  tem-se  $3 \times 2 - 2 \times a + 7 \times 3 = 9 \Leftrightarrow 2a = 27 \Leftrightarrow a = \frac{27}{2}$ .  
 d) O vetor de coordenadas  $(3, -2, 7)$  é normal ao plano, logo uma equação do plano será da forma  $3x - 2y + 7z + d = 0$ .  
 $3 \times (-3) - 2 \times (-1) + 7 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -28$   
 Uma equação do plano será  $3x - 2y + 7z - 28 = 0$ .  
 e) O vetor de coordenadas  $(3, -2, 7)$  é normal ao plano  $\alpha$ , logo é vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano  $\alpha$ . Assim uma equação vetorial da reta pedida será  
 $(x, y, z) = (6, -2, 1) + k(3, -2, 7), k \in \mathbb{R}$

## Pág. 45

62. a) Um vetor normal a  $\alpha$  é  $\overrightarrow{v_\alpha}(2, -1, 3)$ . Um vetor normal a  $\beta$  é  $\overrightarrow{v_\beta}(-4, 2, -6)$ .  
 Como  $\overrightarrow{v_\beta} = -2\overrightarrow{v_\alpha}$ , os vetores  $\overrightarrow{v_\alpha}$  e  $\overrightarrow{v_\beta}$  são colineares, pelo que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos.  
 Como as equações  $2x - y + 3z = 5$  e  $-4x + 2y - 6z = 0$  não são equivalentes, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não são coincidentes, pelo que são estritamente paralelos.  
 Nota: outra maneira de ver que os planos não são coincidentes é verificar que um ponto pertencente a  $\alpha$  não pertence a  $\beta$ ; por exemplo, o ponto  $P(0, -5, 0)$  pertencente a  $\alpha$  mas não pertence a  $\beta$ .
- b) Um vetor normal a  $\alpha$  é  $\overrightarrow{v_\alpha}(2, -1, 3)$ . Um vetor normal a  $\gamma$  é  $\overrightarrow{v_\gamma}(1, -4, -2)$ .  
 Como  $\overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{v_\gamma} = 2 + 4 - 6 = 0$ , os vetores  $\overrightarrow{v_\alpha}$  e  $\overrightarrow{v_\gamma}$  são perpendiculares, pelo que os planos  $\alpha$  e  $\gamma$  são perpendiculares.

c) Um vetor normal a  $\alpha$  é  $\vec{v}_\alpha (2, -1, 3)$ .

Um vetor normal a  $\delta$  é  $\vec{v}_\delta (0, 1, -1)$ .

Como  $\vec{v}_\alpha$  e  $\vec{v}_\delta$  não são colineares, os planos  $\alpha$  e  $\delta$  não são paralelos, ou seja, são concorrentes.

Como  $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\delta = -1 - 3 = -4$ , que é diferente de zero, os vetores  $\vec{v}_\alpha$  e  $\vec{v}_\delta$  não são perpendiculares, pelo que os planos  $\alpha$  e  $\delta$  não são perpendiculares.

63. a) Equação vetorial:  $(x, y, z) = (-2, 3, 1) + \lambda(2, -2, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Sistema de equações paramétricas:

$$x = -2 + 2\lambda \wedge y = 3 - 2\lambda \wedge z = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) O vetor de coordenadas  $(2, -2, -1)$  é normal ao plano  $\alpha$ , logo uma equação do plano  $\alpha$  será da forma  $2x - 2y - z + d = 0$ .

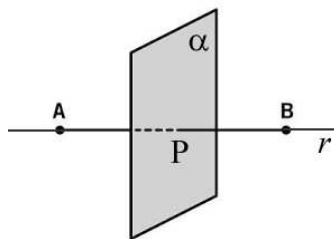
$$2 \times 1 - 2 \times (-2) + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

Uma equação do plano  $\alpha$  será  $2x - 2y - z - 7 = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ 2x - 2y - z - 7 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ 2(-2 + 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) - (1 - \lambda) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ -4 + 4\lambda - 6 + 4\lambda - 1 + \lambda - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ 9\lambda = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4 \\ y = 3 - 4 \\ z = 1 - 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Pelo que  $P(2, -1, -1)$ .

d)  $B = A + 2 \overrightarrow{AP}$



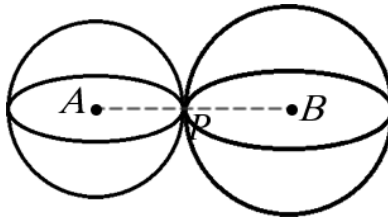
$\overrightarrow{AP} = P - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AP}$  são  $(2, -1, -1) - (-2, 3, 1) = (4, -4, -2)$ .  
As coordenadas de  $B$  virão  $(-2, 3, 1) + 2 \times (4, -4, -2) = (6, -5, -3)$ .

64. a)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 7)^2 \leq 36$

b) Começemos por determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  e a sua norma.

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(1, 8, -1) - (2, 4, 7) = (-1, 4, -8)$ .

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{81} = 9$$



O vetor  $\overrightarrow{AP}$  será colinear com o vetor  $\overrightarrow{AB}$  e terá norma 6. As coordenadas de  $\overrightarrow{AP}$  serão  $\frac{6}{9} \times \overrightarrow{AB} =$

$$= \frac{2}{3} \times (-1, 4, -8) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

$$P = A + \overrightarrow{AP}. \text{ As coordenadas de } P \text{ serão } (2, 4, 7) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{20}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

c) O vetor  $\overrightarrow{AB}$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , logo uma equação do plano  $\alpha$  será da forma  $-x + 4y - 8z + d = 0$ .

$$-\frac{4}{3} + 4 \times \frac{20}{3} - 8 \times \frac{5}{3} + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Uma equação do plano  $\alpha$  será  $-x + 4y - 8z - 12 = 0$ .

65. a)  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PQ}$  são  $(2, 2, 3) - (1, 1, 0) = (1, 1, 3)$ .

$\overrightarrow{PR} = R - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PR}$  são  $(3, 3, 1) - (1, 1, 0) = (2, 2, 1)$ .

Designemos por  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$  e a  $\overrightarrow{PR}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 3(-2a - 2b) = 0 \\ c = -2a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 6a - 6b = 0 \\ c = -2a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a - 5b = 0 \\ c = -2a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -2(-b) - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor  $\vec{u}(-b, b, 0)$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , é um vetor perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$  e a  $\overrightarrow{PR}$ . Substituindo, por exemplo,  $b$  por 1, obtemos o vetor de coordenadas  $(-1, 1, 0)$ .

b) O vetor de coordenadas  $(-1, 1, 0)$  é perpendicular ao plano  $PQR$ , logo uma equação do plano  $PQR$  será da forma  $-x + y + 0z + d = 0$ .

Considerando, por exemplo, o ponto  $P$  vem  $-1 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$ .

Uma equação do plano  $\alpha$  será  $-x + y = 0 \Leftrightarrow y = x$ .

66. a) O ponto  $A(1, 2, 5)$  pertence à reta  $r$  se e só se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$(1, 2, 5) = (2, -3, 3) + \lambda(1, -2, 1)$ , ou seja,

o ponto  $A(1, 2, 5)$  pertence à reta  $r$  se e só se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$1 = 2 + \lambda \wedge 2 = -3 - 2\lambda \wedge 5 = 3 + \lambda.$$

Como não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  que verifique estas três equações, o ponto  $A$  não pertence à reta  $r$ .

- b) Se conhecermos as coordenadas de um vetor normal a um plano e as coordenadas de um ponto desse plano, facilmente escrevemos uma equação desse plano.

Mas para que um vetor seja normal a um plano ele precisa de ser normal a dois vetores não colineares, paralelos a esse plano.

Se designarmos por  $B$  o ponto da reta  $r$  de coordenadas  $(2, -3, 3)$ . Esse ponto pertence ao plano do qual queremos escrever a equação. Assim o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é paralelo a esse plano.

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(2, -3, 3) - (1, 2, 5) = (1, -5, -2)$ .

Por outro lado um vetor diretor da reta  $r$  é paralelo ao plano que contém a reta  $r$ . Assim o vetor de coordenadas  $(1, -2, 1)$ , que designaremos por vetor  $\vec{r}$ , é paralelo ao nosso plano.

Uma vez que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\vec{r}$  não são colineares, vamos determinar as coordenadas de um vetor não nulo  $\vec{u}(a, b, c)$  que seja perpendicular a ambos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -5, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5b - 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b + 2c \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b + 2c \\ 5b + 2c - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b + 2c \\ 3b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c + 2c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor  $\vec{u}(-3c, -c, c)$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , é um vetor perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  e a  $\vec{r}$ .

Substituindo, por exemplo,  $c$  por 1, obtemos o vetor de coordenadas  $(-3, -1, 1)$ .

A equação do nosso plano será da forma  $-3x - y + z + d = 0$ .

Substituindo, por exemplo, pelas coordenadas do ponto  $A$  vem

$$-3 \times 1 - 2 + 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0.$$

$-3x - y + z = 0$  é então uma equação do plano.

67. a) O ponto de coordenadas  $(3, -1, 4)$  pertence às duas retas. Por outro lado, os vetores de coordenadas  $(2, 3, -1)$  e  $(-1, 4, 2)$  não são colineares, pelo que as retas não são paralelas. Portanto, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes.

- b) O vetor de coordenadas  $(2, 3, -1)$ , que designaremos por vetor  $\vec{r}$ , é paralelo ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ . De igual forma o vetor de coordenadas  $(-1, 4, 2)$ , que designaremos por vetor  $\vec{s}$ , é paralelo ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ .

Uma vez que  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  não são colineares, vamos determinar as coordenadas de um vetor não nulo  $\vec{u}(a, b, c)$  que seja perpendicular a ambos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 4, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ -a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ a = 4b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(4b + 2c) + 3b - c = 0 \\ a = 4b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 4c + 3b - c = 0 \\ a = 4b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b + 3c = 0 \\ a = 4b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{11}{3}b \\ a = 4b + 2\left(-\frac{11}{3}b\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{11}{3}b \\ a = 4b - \frac{22}{3}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{11}{3}b \\ a = -\frac{10}{3}b \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor  $\vec{u}\left(-\frac{10}{3}b, b, -\frac{11}{3}b\right)$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , é um vetor perpendicular a  $\vec{r}$  e a  $\vec{s}$ .

Substituindo, por exemplo,  $b$  por  $-3$ , obtemos o vetor de coordenadas  $(10, -3, 11)$ .

A equação do nosso plano será da forma  $10x - 3y + 11z + d = 0$ .

Substituindo, por exemplo, pelas coordenadas do ponto conhecido da reta  $r$  vem

$$10 \times 3 - 3 \times (-1) + 11 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -77.$$

$10x - 3y + 11z - 77 = 0$  é então uma equação do plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ .

- c) Os vetores de coordenadas  $(-1, 4, 2)$  e  $(2, -8, -4)$  são colineares, pelo que as retas são paralelas.  
Como o ponto  $(3, -1, 4)$  pertence à reta  $s$  mas não pertence à reta  $t$ , as retas  $s$  e  $t$  são estritamente paralelas.
- d) O vetor de coordenadas  $(-1, 4, 2)$ , que designaremos por vetor  $\vec{s}$ , é paralelo ao plano definido pelas retas  $s$  e  $t$ . O vetor de coordenadas  $(2, -8, -4)$  que é um vetor diretor da reta  $t$  é colinear com o vetor  $\vec{s}$  razão pela qual precisamos de um outro vetor que seja paralelo ao referido plano, mas que não seja colinear com o vetor  $\vec{s}$ .

Da equação vetorial da reta  $s$  tiramos que o ponto de coordenadas  $(3, -1, 4)$ , que passaremos a designar por ponto  $A$ , é um ponto do plano do qual pretendemos escrever uma equação.

De igual forma, da equação vetorial da reta  $t$  tiramos que o ponto de coordenadas  $(2, 5, 3)$ , que passaremos a designar por ponto  $B$ , é um ponto do plano do qual pretendemos escrever uma equação.

Assim o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é paralelo ao plano definido pelas retas  $s$  e  $t$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(2, 5, 3) - (3, -1, 4) = (-1, 6, -1)$ .

Uma vez que  $\vec{s}$  e  $\overrightarrow{AB}$  não são colineares, vamos determinar as coordenadas de um vetor não nulo  $\vec{u}(a, b, c)$  que seja perpendicular a ambos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 4, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 6, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 4b + 2c = 0 \\ -a + 6b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b + 2c \\ -4b - 2c + 6b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b + 2c \\ 2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \times \frac{3}{2}c + 2c \\ b = \frac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8c \\ b = \frac{3}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor  $\vec{u}\left(8c, \frac{3}{2}c, c\right)$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , é um vetor perpendicular a  $\vec{s}$  e a  $\overrightarrow{AB}$ .

Substituindo, por exemplo,  $c$  por 2, obtemos o vetor de coordenadas  $(16, 3, 2)$ .

Uma equação do nosso plano será da forma  $16x + 3y + 2z + d = 0$ .

Substituindo, por exemplo, pelas coordenadas do ponto  $A$  vem

$$16 \times 3 + 3 \times (-1) + 2 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -53.$$

$16x + 3y + 2z - 53 = 0$  é então uma equação do plano definido pelas retas  $s$  e  $t$ .

## Pág. 46

68. a) O vetor de coordenadas  $(2, 3, 1)$ , que passaremos a designar por  $\vec{r}$ , é vetor diretor da reta  $r$ . Este vetor é normal ao plano  $\alpha$ .
- b) O vetor  $\vec{r}$  é perpendicular ao vetor de coordenadas  $(1, 0, -2)$ , que é normal ao plano  $\beta$ .  
Repare-se que  $(2, 3, 1) \cdot (1, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$
- c) O vetor  $\vec{r}$  não é colinear nem perpendicular ao vetor de coordenadas  $(0, 1, 0)$ , que é normal ao plano  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \begin{cases} (x, y, z) = (3, 1, 5) + \lambda(2, 3, 1) \\ y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, 4, z) = (3, 1, 5) + \lambda(2, 3, 1) \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ 4 = 1 + 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \lambda = 1 \\ z = 6 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

O ponto de interseção tem coordenadas  $(5, 4, 6)$ .

- e) Um vetor normal a  $\alpha$  é  $\vec{v}_\alpha(2, 3, 1)$ . Um vetor normal a  $\beta$  é  $\vec{v}_\beta(1, 0, -2)$ .  
Como  $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0$ , os vetores  $\vec{v}_\alpha$  e  $\vec{v}_\beta$  são perpendiculares, pelo que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares.

$$\text{f)} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z + 3y + z = 5 \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z + 3y = 5 \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5-5z}{3} \\ x = 2z \end{cases}$$

Então as coordenadas dos pontos da reta  $s$  são da forma  $(2z, \frac{5-5z}{3}, z)$ , com  $z \in \mathbb{R}$ .

Para escrever uma equação de uma reta basta conhecer as coordenadas de dois dos seus pontos. Designemos por  $A$  e  $B$  os pontos da reta  $s$  de cota 1 e  $-1$ , respetivamente.

As coordenadas de  $A$  serão  $(2 \times 1, \frac{5-5 \times 1}{3}, 1) = (2, 0, 1)$ .

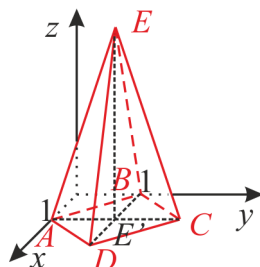
As coordenadas de  $B$  serão  $(2 \times (-1), \frac{5-5 \times (-1)}{3}, -1) = (-2, \frac{10}{3}, -1)$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(-2, \frac{10}{3}, -1) - (2, 0, 1) = (-4, \frac{10}{3}, -2)$ .

Uma equação vetorial da reta  $s$  será por exemplo:

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + \lambda(-4, \frac{10}{3}, -2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 0, 1) + \lambda(2, -\frac{5}{3}, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

69. Designemos por  $a$  e  $b$  a abcissa de  $A$  e ordenada de  $B$ , respetivamente.  $A(a, 0, 0)$  e  $B(0, b, 0)$ .  
O ponto  $A$  pertence ao plano  $ABE$ , pelo que  $3 \times a + 3 \times 0 - 0 = 3 \Leftrightarrow a = 1$ .  
O ponto  $B$  pertence ao plano  $ABE$ , pelo que  $3 \times 0 + 3 \times b - 0 = 3 \Leftrightarrow b = 1$ .  
Vem que  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  e  $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ .  
Designemos por  $E'$  a projeção ortogonal de  $E$  sobre o plano  $xOy$ .



$E'(1, 1, 0)$ . Designemos por  $c$  a cota de  $E$ .  $E(1, 1, c)$

O ponto  $E$  pertence ao plano  $ABE$ , pelo que  $3 \times 1 + 3 \times 1 - c = 3 \Leftrightarrow c = 3$ .

$$V = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{EE'} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$$

70. a) Designemos por  $a$  a abcissa do ponto  $A(a, -7, 4)$ .  
O ponto  $A$  pertence ao plano  $ABF$  pelo que  $6 \times a + 2 \times (-7) - 3 \times 4 = 58 \Leftrightarrow a = 14$

- b) Designemos por  $b$  e  $c$  a ordenada e a cota do ponto  $P$ , respetivamente.  $P(4, b, c)$ .  
 O ponto  $P$  pertence ao plano  $ABF$ , pelo que  $6 \times 4 + 2 \times b - 3 \times c = 58 \Leftrightarrow 2b - 3c = 34$ .  
 O ponto  $P$  pertence ao plano  $BGF$ , pelo que  $2 \times 4 + 3 \times b + 6 \times c = 80 \Leftrightarrow 3b + 6c = 72$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2b - 3c = 34 \\ 3b + 6c = 72 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 3c = 34 \\ b + 2c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(24 - 2c) - 3c = 34 \\ b = 24 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48 - 4c - 3c = 34 \\ b = 24 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7c = 14 \\ b = 24 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 24 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,  $P(4, 20, 2)$ .

Designemos por  $d$  e  $e$  a ordenada e a cota do ponto  $Q$  respetivamente.  $Q(7, d, e)$ .

O ponto  $Q$  pertence ao plano  $ABF$ , pelo que  $6 \times 7 + 2 \times d - 3 \times e = 58 \Leftrightarrow 2d - 3e = 16$ .

O ponto  $Q$  pertence ao plano  $BGF$ , pelo que  $2 \times 7 + 3 \times d + 6 \times e = 80 \Leftrightarrow 3d + 6e = 66$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2d - 3e = 16 \\ 3d + 6e = 66 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2d - 3e = 16 \\ d + 2e = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(22 - 2e) - 3e = 16 \\ d = 22 - 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 44 - 4e - 3e = 16 \\ d = 22 - 2e \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7e = 28 \\ d = 22 - 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 4 \\ d = 22 - 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 4 \\ d = 14 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,  $Q(7, 14, 4)$ .

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{PQ}$  são  $(7, 14, 4) - (4, 20, 2) = (3, -6, 2)$ .

- c)  $(x, y, z) = (4, 20, 2) + \lambda(3, -6, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
- d) O vetor  $\overrightarrow{PQ}$  é normal ao plano  $ABC$ , logo uma equação do plano  $ABC$  será da forma  $3x - 6y + 2z + d = 0$ .  
 Como o ponto  $A(14, -7, 4)$  pertence ao plano  $ABC$  vem  
 $3 \times 14 - 6 \times (-7) + 2 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -92$ .  
 Uma equação do plano  $ABC$  será  $3x - 6y + 2z - 92 = 0$ .

- e) O ponto  $B$  é a interseção do plano  $ABC$  com a reta  $BF$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 6y + 2z - 92 = 0 \\ (x, y, z) = (4, 20, 2) + \lambda(3, -6, 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y + 2z - 92 = 0 \\ x = 4 + 3\lambda \\ y = 20 - 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(4 + 3\lambda) - 6(20 - 6\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - 92 = 0 \\ x = 4 + 3\lambda \\ y = 20 - 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 9\lambda - 120 + 36\lambda + 4 + 4\lambda - 92 = 0 \\ x = 4 + 3\lambda \\ y = 20 - 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49\lambda = 196 \\ x = 4 + 3\lambda \\ y = 20 - 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ x = 4 + 12 \\ y = 20 - 24 \\ z = 2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ x = 16 \\ y = -4 \\ z = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,  $B(16, -4, 10)$ .

f)  $(x, y, z) = (14, -7, 4) + \lambda(3, -6, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , uma vez que  $\overrightarrow{PQ}$  é um vetor diretor da reta  $BF$  e esta é paralela à reta  $AE$ .

g) O ponto  $E$  é o ponto da reta  $AE$  que tem cota 0.

$$(x, y, 0) = (14, -7, 4) + \lambda(3, -6, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 14 + 3\lambda \\ y = -7 - 6\lambda \\ 0 = 4 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 14 - 6 \\ y = -7 + 12 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 8 \\ y = 5 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Logo,  $E(8, 5, 0)$ .

h)  $A(14, -7, 4)$ ,  $B(16, -4, 10)$  e  $E(8, 5, 0)$ .

$$\overline{AB} = \sqrt{(14-16)^2 + (-7+4)^2 + (4-10)^2} = 7$$

$$\overline{AE} = \sqrt{(14-8)^2 + (-7-5)^2 + (4-0)^2} = 14$$

$$V = \overline{AB}^2 \times \overline{AE} = 7^2 \times 14 = 686$$

i)  $F = E + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(16, -4, 10) - (14, -7, 4) = (2, 3, 6)$ .

As coordenadas de  $F$  são  $(8, 5, 0) + (2, 3, 6) = (10, 8, 6)$ .

j) Designemos por  $f$ ,  $g$  e  $h$  as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{BC}$ . Logo  $\overrightarrow{BC}(f, g, h)$  com  $h > 0$ . Sabemos que  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA}$ , que  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{PQ}$  e que  $\|\overrightarrow{BC}\| = 7$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \|\overrightarrow{BC}\| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f, g, h) \cdot (-2, -3, -6) = 0 \\ (f, g, h) \cdot (3, -6, 2) = 0 \\ \sqrt{f^2 + g^2 + h^2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2f - 3g - 6h = 0 \\ 3f - 6g + 2h = 0 \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f + 3g + 6h = 0 \\ 3f - 6g + 2h = 0 \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = -\frac{3}{2}g - 3h \\ 3\left(-\frac{3}{2}g - 3h\right) - 6g + 2h = 0 \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = -\frac{3}{2}g - 3h \\ -\frac{9}{2}g - 9h - 6g + 2h = 0 \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = -\frac{3}{2}g - 3h \\ h = -\frac{3}{2}g \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = -\frac{3}{2}g - 3\left(-\frac{3}{2}g\right) \\ h = -\frac{3}{2}g \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = -\frac{3}{2}g + \frac{9}{2}g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ f^2 + g^2 + h^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 3g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ (3g)^2 + g^2 + \left(-\frac{3}{2}g\right)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 3g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ 9g^2 + g^2 + \frac{9}{4}g^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = 3g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ \frac{49}{4}g^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 3g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ g^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 3g \\ h = -\frac{3}{2}g \\ g = \pm 2 \end{cases}$$

Como  $h > 0$  e  $h = -\frac{3}{2}g$ , vem que  $g < 0$ . Então,  $g = -2$ ,  $f = -6$  e  $h = 3$ .

Pelo que,  $\overrightarrow{BC}(-6, -2, 3)$ .

k)  $C = B + \overrightarrow{BC}$

As coordenadas de  $C$  são  $(16, -4, 10) + (-6, -2, 3) = (10, -6, 13)$ .

## Pág. 47

l)  $A(14, -7, 4)$ ,  $F(10, 8, 6)$  e  $C(10, -6, 13)$ .

$\overrightarrow{FA} = A - F$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{FA}$  são  $(14, -7, 4) - (10, 8, 6) = (4, -15, -2)$ .

$\overrightarrow{FC} = C - F$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{FC}$  são  $(10, -6, 13) - (10, 8, 6) = (0, -14, 7)$ .

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = 4 \times 0 - 15 \times (-14) - 2 \times 7 = 196$$

$$\|\overrightarrow{FA}\| = \sqrt{4^2 + (-15)^2 + (-2)^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \text{ e } \|\overrightarrow{FC}\| = 7\sqrt{5}$$

$$\cos(\widehat{FA\overrightarrow{FC}}) = \frac{\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC}}{\|\overrightarrow{FA}\| \times \|\overrightarrow{FC}\|} = \frac{196}{7\sqrt{5} \times 7\sqrt{5}} = \frac{196}{245} = \frac{4}{5}$$

$$\widehat{AFC} = (\widehat{FA\overrightarrow{FC}}) = \arccos \frac{4}{5} \approx 37^\circ$$

m)  $A(14, -7, 4)$  e  $C(10, -6, 13)$ .

$\overrightarrow{CA} = A - C$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{CA}$  são  $(14, -7, 4) - (10, -6, 13) = (4, -1, -9)$ .

Designemos por  $M$  o ponto médio do segmento  $[CA]$ .

As coordenadas de  $M$  são  $\left(\frac{14+10}{2}, \frac{-7-6}{2}, \frac{4+13}{2}\right) = \left(12, -\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$ .

O vetor  $\overrightarrow{CA}$  é normal ao plano medidor, pelo que uma equação do plano será da forma

$$4x - y - 9z + d = 0. \text{ Como } M \text{ pertence ao plano vem } 4 \times 12 - \frac{13}{2} - 9 \times \frac{17}{2} + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 22. \text{ Uma equação do plano medidor será } 4x - y - 9z + 22 = 0.$$

n) A secção é o retângulo  $[DBFH]$ .  $\overline{DB}$  é a medida da diagonal do quadrado de lado 7.

$$\overline{DB} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}; \overline{BF} = \overline{AE} = 14$$

$$A = \overline{DB} \times \overline{BF} = 7\sqrt{2} \times 14 = 98\sqrt{2}$$

o) Designemos por  $N$  o centro da superfície esférica.  $N$  é o ponto médio do segmento  $[CE]$ .

Como  $C(10, -6, 13)$  e  $E(8, 5, 0)$ , as coordenadas de  $N$  serão  $\left(\frac{18}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{13}{2}\right) =$

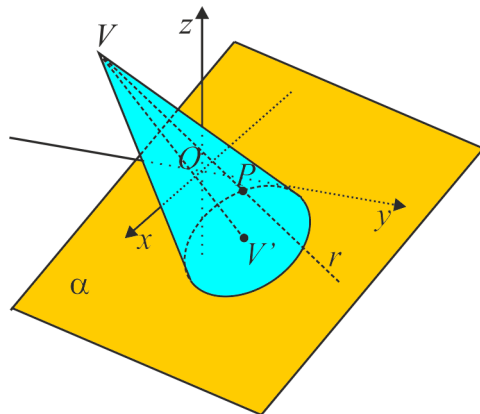
$$= \left(9, -\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

$$\overline{CE} = \sqrt{(10-8)^2 + (-6-5)^2 + (13-0)^2} = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$$

$$\text{Uma equação da superfície esférica será } (x-9)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-9)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{147}{2}$$

71. Designemos por  $\alpha$  o plano de equação  $2x - y + 3z = 0$ , por  $r$  a reta de equação  $(x, y, z) = (9, 0, 8) + \lambda(4, -1, 4)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por  $V'$  a projeção ortogonal do ponto  $V$  sobre o plano  $\alpha$  e por  $P$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ .



Comecemos por determinar as coordenadas do ponto  $P$ .

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x = 9 + 4\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(9 + 4\lambda) + \lambda + 3(8 + 4\lambda) = 0 \\ x = 9 + 4\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 + 8\lambda + \lambda + 24 + 12\lambda = 0 \\ x = 9 + 4\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21\lambda = -42 \\ x = 9 + 4\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 9 - 8 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo,  $P(1, 2, 0)$ .

Vejam agora quais são as coordenadas do ponto  $V'$ .  $V'$  será o ponto de interseção da reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que passa em  $V$ , com o plano  $\alpha$ .

Comecemos por escrever uma equação da reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que passa em  $V$ .

$(2, -1, 3)$  são as coordenadas de um vetor diretor dessa reta, então  $(x, y, z) = (9, 0, 8) + \lambda(2, -1, 3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é uma equação da reta.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x = 9 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(9 + 2\lambda) + \lambda + 3(8 + 3\lambda) = 0 \\ x = 9 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 + 4\lambda + \lambda + 24 + 9\lambda = 0 \\ x = 9 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14\lambda = -42 \\ x = 9 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 8 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ x = 9 - 6 \\ y = 3 \\ z = 8 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ x = 3 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Logo,  $V'(3, 3, -1)$ .

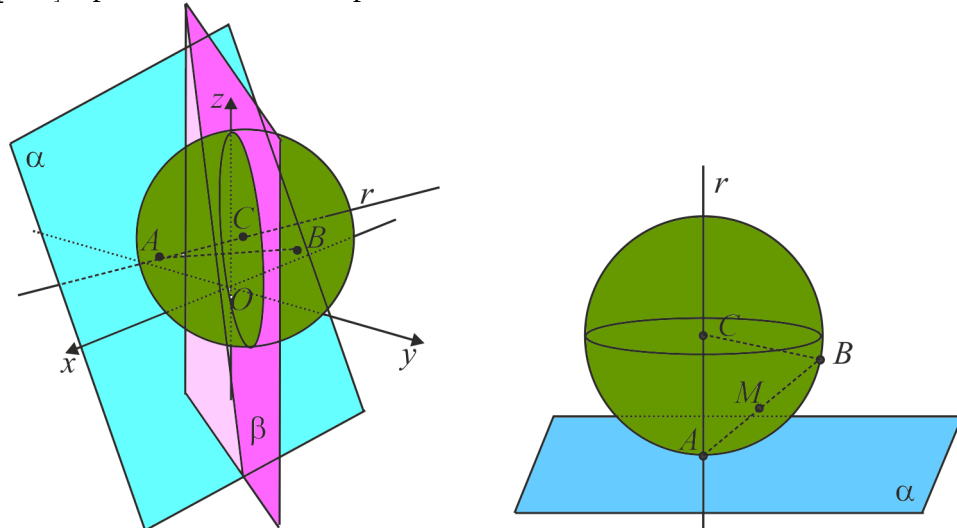
$$\overline{PV'} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\overline{VV'} = \sqrt{(9-3)^2 + (0-3)^2 + (8+1)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times \overline{PV'}^2 \times \overline{VV'} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 3\sqrt{14} = 6\sqrt{14}\pi$$

72. a) É verdadeira a igualdade  $3 - 7 \times (-4) - 3 \times 2 - 25 = 0$ , pelo que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ .

- b) Designemos por  $r$  a reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que passa em  $A$ , por  $M$  o ponto médio do segmento  $[AB]$  e por  $C$  o centro da superfície esférica.



Começemos por escrever uma equação da reta  $r$ .

$(1, -7, -3)$  são as coordenadas de um vetor diretor da reta  $r$ , então

$(x, y, z) = (3, -4, 2) + \lambda(1, -7, -3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é uma equação da reta.

O ponto  $C$  é o ponto da reta  $r$  equidistante de  $A$  e de  $B$ . Significa então que o ponto  $C$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano medidor do segmento  $[AB]$ .

Vamos então escrever uma equação desse plano medidor, que designaremos por plano  $\beta$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(-5, 2, 2) - (3, -4, 2) = (-8, 6, 0)$ .

$M$  é o ponto médio do segmento  $[AB]$ .

As coordenadas de  $M$  são  $\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (-1, -1, 2)$ .

O vetor  $\overrightarrow{AB}$  é normal ao plano medidor, pelo que uma equação do plano será da forma

$-8x + 6y + d = 0$ . Como  $M$  pertence ao plano vem  $-8 \times (-1) + 6 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = -2$ . Uma equação do plano medidor será  $-8x + 6y - 2 = 0$ .

Vejam agora as coordenadas do ponto  $C$ .

$$\begin{cases} -8x + 6y - 2 = 0 \\ x = 3 + \lambda \\ y = -4 - 7\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8(3 + \lambda) + 6(-4 - 7\lambda) - 2 = 0 \\ x = 3 + \lambda \\ y = -4 - 7\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -24 - 8\lambda - 24 - 42\lambda - 2 = 0 \\ x = 3 + \lambda \\ y = -4 - 7\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -50\lambda = 50 \\ x = 3 + \lambda \\ y = -4 - 7\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$C(2, 3, 5); \overline{CA} = \sqrt{(2-3)^2 + (3+4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{59}$$

$$\text{Equação reduzida da superfície esférica: } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 59$$

73. a)  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 7, -1)$  e  $C(4, -1, 5)$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(3, 7, -1) - (1, 2, 3) = (2, 5, -4)$ .

$\overrightarrow{AC} = C - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são  $(4, -1, 5) - (1, 2, 3) = (3, -3, 2)$ .

Equação vetorial:  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, 5, -4) + t(3, -3, 2)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x = 1 + 2s + 3t \\ y = 2 + 5s - 3t \\ z = 3 - 4s + 2t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \begin{cases} x = 1 + 2s + 3t \\ y = 2 + 5s - 3t \\ z = 3 - 4s + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1-2s}{3} \\ y = 2 + 5s - 3 \times \frac{x-1-2s}{3} \\ z = 3 - 4s + 2 \times \frac{x-1-2s}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1-2s}{3} \\ y = 2 + 5s - x + 1 + 2s \\ z = 3 - 4s + \frac{2x-2-4s}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1-2s}{3} \\ 7s = x + y - 3 \\ 3z = 9 - 12s + 2x - 2 - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1-2s}{3} \\ s = \frac{x+y-3}{7} \\ 16s = 2x - 3z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1-2s}{3} \\ s = \frac{x+y-3}{7} \\ s = \frac{2x-3z+7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x+y-3}{7} = \frac{2x-3z+7}{16} \Leftrightarrow 16x + 16y - 48 = 14x - 21z + 49 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2x + 16y + 21z - 97 = 0 \end{aligned}$$

## Pág. 48

74. a)  $A(-2, -2, 2)$ ;  $C(-2, 4, -4)$  e  $E(-3, 3, 1)$

$F$  é o ponto médio do segmento  $[AC]$ .

As coordenadas de  $F$  são  $\left(\frac{-2-2}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (-2, 1, -1)$ .

b)  $\overrightarrow{FE} = E - F$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{FE}$  são  $(-3, 3, 1) - (-2, 1, -1) = (-1, 2, 2)$ .  
 $\overrightarrow{FA} = A - F$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{FA}$  são  $(-2, -2, 2) - (-2, 1, -1) = (0, -3, 3)$ .

c)  $\overrightarrow{FB} \perp \overrightarrow{FA}$  e  $\overrightarrow{FB} \perp \overrightarrow{FE}$  e  $\|\overrightarrow{FB}\| = \|\overrightarrow{FA}\|$ .

Designemos por  $(a, b, c)$  as coordenadas de  $\overrightarrow{FB}$  com  $a > 0$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \\ \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \\ \|\overrightarrow{FB}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 3^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -3, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 0 \\ -a + 2b + 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ -a + 2b + 2b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 4b \\ 16b^2 + b^2 + b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 4b \\ 18b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 4b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 4b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

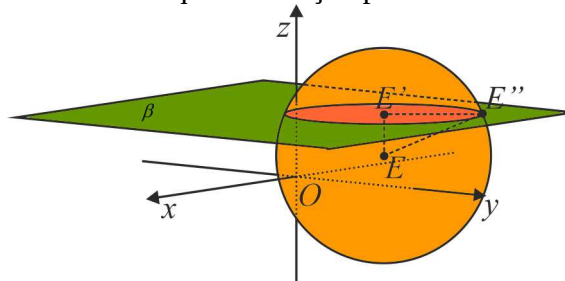
Como  $a = 4b$  e  $a > 0$ , vem que  $b > 0$ , logo  $b = 1$  e  $a = 4$  e  $c = 1$ .  $\overrightarrow{FB}(4, 1, 1)$

d)  $B = F + \overrightarrow{FB}$  e  $D = F - \overrightarrow{FB}$

As coordenadas de  $B$  são  $(-2, 1, -1) + (4, 1, 1) = (2, 2, 0)$ .

As coordenadas de  $D$  são  $(-2, 1, -1) - (4, 1, 1) = (-6, 0, -2)$ .

- e)  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(2, 2, 0) - (-2, -2, 2) = (4, 4, -2)$ .  
 $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$   
 $\overrightarrow{FE}(-1, 2, 2)$ ;  $\|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$   
 $V = \frac{1}{3} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \|\overrightarrow{FE}\| = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$
- f) Designemos por  $M$  o ponto médio do segmento  $[AB]$ .  
 As coordenadas de  $M$  são  $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (0, 0, 1)$   
 $\overrightarrow{ME} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$   
 $A_{[ABE]} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{ME}}{2} = \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$
- g) As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(4, 4, -2)$ .  
 As coordenadas de  $\overrightarrow{FA}$  são  $(0, -3, 3)$ .  
 Como os vetores não são colineares, uma equação vetorial do plano  $ABC$  será  
 $(x, y, z) = (-2, -2, 2) + s(4, 4, -2) + t(0, -3, 3), s, t \in \mathbb{R}$
- h) O vetor  $\overrightarrow{FB}(4, 1, 1)$  é perpendicular ao plano  $ACE$ , pelo que uma equação do plano será da forma  
 $4x + y + z + d = 0$ . Como  $A$  pertence ao plano vem  $4 \times (-2) - 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow d = 8$ . Uma equação do plano  $ACE$  será  $4x + y + z + 8 = 0$ .
- i)  $B(2, 2, 0)$  e  $E(-3, 3, 1)$  pelo que  $\overrightarrow{BE} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{27}$   
 Uma equação da superfície esférica será  $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 27$ .
- j) Designemos por  $\beta$  o plano de equação  $z = 3$ , por  $E'$  a projeção ortogonal de  $E$  sobre o plano  $\beta$  e por  $E''$  um ponto da circunferência que é a secção produzida na superfície esférica pelo plano  $\beta$ .



$$E(-3, 3, 1), E'(-3, 3, 3); \quad \overline{EE'} = 2; \quad \overline{EE''} = \sqrt{27}; \quad \overline{E'E''}^2 = \overline{EE''}^2 - \overline{EE'}^2$$

$$\overline{E'E''}^2 = (\sqrt{27})^2 - 2^2 \Leftrightarrow \overline{E'E''} = \sqrt{23}$$

$$A = \pi \times (\sqrt{23})^2 = 23\pi$$

**outro processo:**

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 27 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-3)^2 + (3-1)^2 = 27 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-3)^2 = 23 \\ z = 3 \end{cases} \quad A = \pi \times (\sqrt{23})^2 = 23\pi$$

- k)**  $\overrightarrow{EA} = A - E$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{EA}$  são  $(-2, -2, 2) - (-3, 3, 1) = (1, -5, 1)$ .  
O vetor  $\overrightarrow{EA}$  é perpendicular ao plano, pelo que uma equação do plano será da forma  $x - 5y + z + d = 0$ . Como  $A$  pertence ao plano vem  $-2 - 5 \times (-2) + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$ . Uma equação do plano  $\alpha$  será  $x - 5y + z - 10 = 0$ .

- l)**  $B(2, 2, 0)$  e  $E(-3, 3, 1)$ .

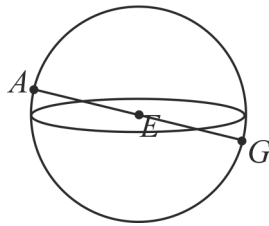
$\overrightarrow{EB} = B - E$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{EB}$  são  $(2, 2, 0) - (-3, 3, 1) = (5, -1, -1)$ .

$(x, y, z) = (-3, 3, 1) + \lambda(5, -1, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é uma equação da reta  $EB$ .

$$\begin{cases} x - 5y + z - 10 = 0 \\ x = -3 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 5\lambda - 5(3 - \lambda) + 1 - \lambda - 10 = 0 \\ x = -3 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 5\lambda - 15 + 5\lambda + 1 - \lambda - 10 = 0 \\ x = -3 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda = 27 \\ x = -3 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ x = -3 + 15 \\ y = 3 - 3 \\ z = 1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ x = 12 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto são  $(12, 0, -2)$ .

- m)**  $A(-2, -2, 2)$  e  $E(-3, 3, 1)$ .  $G = A + 2 \times \overrightarrow{AE}$



$\overrightarrow{EA}(1, -5, 1)$  logo  $\overrightarrow{AE}(-1, 5, -1)$

As coordenadas do ponto  $G$  são  $(-2, -2, 2) + (-2, 10, -2) = (-4, 8, 0)$ .

- n)**  $\overrightarrow{EA}(1, -5, 1)$  ;  $\overrightarrow{EB}(5, -1, -1)$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{EA} \overrightarrow{EB}}) = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}}{\|\overrightarrow{EA}\| \times \|\overrightarrow{EB}\|} = \frac{1 \times 5 - 5 \times (-1) + 1 \times (-1)}{(\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2})^2} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$A\hat{E}B = (\widehat{\overrightarrow{EA} \overrightarrow{EB}}) = \arccos \frac{1}{3} \approx 71^\circ$$

# Sucessões

Pág. 51

1.    **a)**    12  
      **b)**    1  
      **c)**    6 (por exemplo)  
      **d)**    2 (por exemplo)

2.    **a)**     $[\sqrt{8}, +\infty[$   
      **b)**     $[6, +\infty[$   
      **c)**     $[1, +\infty[$   
      **d)**     $[9, +\infty[$   
      **e)**     $[3\pi, +\infty[$   
      **f)**     $\left[ \frac{14}{3}, +\infty[$

3.    **a)**     $] -\infty, -1]$   
      **b)**     $] -\infty, -\sqrt{3}]$   
      **c)**     $] -\infty, 2]$   
      **d)**     $] -\infty, -5]$   
      **e)**     $] -\infty, 6]$   
      **f)**     $] -\infty, -6]$

4.    **a<sub>1</sub>)**     $A$   
      **a<sub>2</sub>)**     $A$   
      **a<sub>3</sub>)**     $A$  e  $B$   
      **a<sub>4</sub>)**     $B$   
      **a<sub>5</sub>)**     $B$   
      **a<sub>6</sub>)**     $B$  e  $C$

$$\mathbf{b_1)} \quad n \in \mathbb{N} \wedge n - 3 \geq \frac{7}{2} \wedge n - 3 < 5 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n \geq \frac{13}{2} \wedge n < 8 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\mathbf{b_2)} \quad n \in \mathbb{N} \wedge n^2 - 4n + 1 \leq -3 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n^2 - 4n + 4 \leq 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge (n - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow n = 2$$

5. **a)**  $5 - 3x < 2 \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1$   
 $]1, +\infty[$ ; não é majorado; é minorado; 1 é minorante (por exemplo).
- b)**  $(x - 1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1 + x)(x - 1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (2x - 1)(-1) \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$   
 $[\frac{1}{2}, +\infty[$ ; não é majorado; é minorado;  $\frac{1}{2}$  é minorante (por exemplo).
- c)**  $x^2(2 - x) > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x < 2 \wedge x \neq 0$   
 $] -\infty, 0[ \cup ]0, 2[$ ; é majorado; 2 é majorante (por exemplo); não é minorado.
- d)**  $\sqrt[3]{3 - x} \geq 2 \Leftrightarrow 3 - x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \leq -5$   
 $] -\infty, -5]$ ; é majorado; -5 é majorante (por exemplo); não é minorado.
6. **a)** É limitado; o máximo é  $\frac{7}{3}$ ; o mínimo é  $\sqrt{3}$ .
- b)** É limitado; o máximo é 3; o mínimo é 3.
- c)** É limitado; não tem máximo; o mínimo é -3.
- d)** É limitado; o máximo é  $\sqrt{6}$ ; não tem mínimo.
- e)** É limitado; não tem máximo nem mínimo.
- f)** É limitado; o máximo é 5; o mínimo é 3.
- g)** Não é limitado; não tem máximo; o mínimo é 1.
- h)** Não é limitado; não tem máximo nem mínimo.
- i)** Não é limitado; não tem máximo nem mínimo.
- j)** Não é limitado; o máximo é  $\sqrt{5}$ ; não tem mínimo.
- k)** Não é limitado; não tem máximo; o mínimo é -2.
- l)** Não é limitado; o máximo é 0; não tem mínimo.

7. a) Consideremos a função quadrática definida pela expressão  $2x^2 + 3x + 1$ .  
Calculemos os seus zeros.

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -1.$$

Como o gráfico tem a concavidade voltada para cima, a função é positiva para

$$x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[.$$

$$\text{Logo } \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 3x + 1 > 0\} = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

É um conjunto majorado; o conjunto dos majorantes é  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ ; o máximo é  $-\frac{1}{2}$ .

É um conjunto minorado; o conjunto dos minorantes é  $]-\infty, -1]$ ; o mínimo é  $-1$ .

- b)  $|2x - 7| \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 7 \geq 1 \vee 2x - 7 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 4 \vee x \leq 3$   
 $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 7| \geq 1\} \cap ]0, 5] = (]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[) \cap ]0, 5] = ]0, 3] \cup [4, 5]$   
 É um conjunto majorado; o conjunto dos majorantes é  $[5, +\infty[$ ; o máximo é  $5$ .  
 É um conjunto minorado; o conjunto dos minorantes é  $]-\infty, 0]$ ; não tem mínimo.

- c)  $2 \operatorname{tg} x + 1 \geq 3 \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq 1 \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$   
 $\{x \in [0, \pi] : 2 \operatorname{tg} x + 1 \geq 3\} \cup ]1, 3[ = \left[\frac{\pi}{4}, 3\right[$   
 É um conjunto majorado; o conjunto dos majorantes é  $[3, +\infty[$ ; não tem máximo.  
 É um conjunto minorado; o conjunto dos minorantes é  $]-\infty, \frac{\pi}{4}]$ ; o mínimo é  $\frac{\pi}{4}$ .

8. a)  $V$   
 b)  $F$ ; contraexemplo:  $[0, 1]$   
 c)  $V$   
 d)  $F$ ; contraexemplo:  $]0, 1[$   
 e)  $V$   
 f)  $F$ ; contraexemplo:  $] - \infty, 1] \cap [0, +\infty[$

9. Tem-se, para qualquer  $x$  pertencente a  $[a, b]$ ,  $a \leq x \leq b$ .  
 Como  $f$  é crescente, vem  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$   
 Portanto,  $f(a)$  é um minorante do contradomínio e  $f(b)$  é um majorante.  
 Logo, o contradomínio da função  $f$  é um conjunto limitado.

10. a)  $u_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$ ;  $u_2 = 4 \times 2 - 1 = 7$ ;  $u_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$   
 b)  $u_{10} = 4 \times 10 - 1 = 39$ ;  $u_{100} = 4 \times 100 - 1 = 399$   
 c)  $4n - 1 = 303 \Leftrightarrow n = 76$ ;  $u_{76} = 303$ ; 303 é o termo de ordem 76 da sucessão.

- d)  $u_n + u_{n+1} = 490 \Leftrightarrow 4n - 1 + 4(n+1) - 1 = 490 \Leftrightarrow 4n - 1 + 4n + 4 - 1 = 490 \Leftrightarrow 8n = 488 \Leftrightarrow n = 61$ . São os termos de ordem 61 e 62.

11. a)  $v_1 = \frac{3 \times 1 + 2}{5} = 1$  ;  $v_2 = \frac{3 \times 2 + 2}{5} = \frac{8}{5}$

b)  $v_{16} = \frac{3 \times 16 + 2}{5} = 10$

c)  $\frac{3n+2}{5} = 16 \Leftrightarrow 3n + 2 = 80 \Leftrightarrow 3n = 78 \Leftrightarrow n = 26$  ; 16 é o termo de ordem 26 da sucessão.

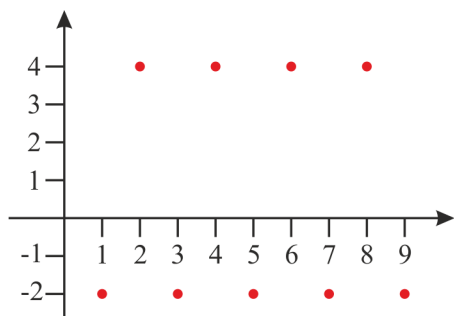
d)  $\frac{3n+2}{5} = 3p - 2 \Leftrightarrow 3n + 2 = 15p - 10 \Leftrightarrow 3n = 15p - 12 \Leftrightarrow n = 5p - 4$

Portanto, para cada  $p$  natural,  $3p - 2$  é o termo de ordem  $5p - 4$ .

12. a) Para  $n$  par,  $w_n = 1 + 3 \times 1 = 4$  ; Para  $n$  ímpar,  $w_n = 1 + 3 \times (-1) = -2$  . Logo o conjunto dos termos da sucessão é  $\{-2, 4\}$  .

b)  $w_{10} - (w_9 + 1) = 4 - (-2 + 1) = 5$

c)



13. a)  $\frac{2n+4}{3n-2} = \frac{7}{10} \Leftrightarrow 20n + 40 = 21n - 14 \Leftrightarrow n = 54$  ;  $\frac{7}{10}$  é o termo de ordem 54 da sucessão.

b)  $\frac{2n+4}{3n-2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2n+4}{3n-2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2n+4-3n+2}{3n-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{6-n}{3n-2} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, 3n - 2 > 0$

Para que a fração seja positiva, uma vez que o denominador é positivo, o numerador também terá que o ser, portanto vem que  $6 - n > 0 \Leftrightarrow n < 6$  .

São apenas os cinco primeiros termos da sucessão que são maiores do que 1.

## Pág. 54

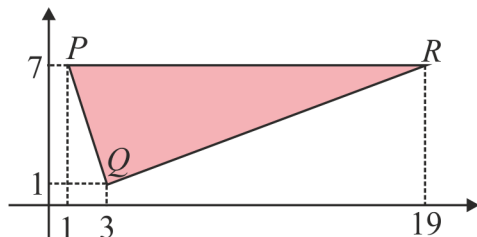
14. a)  $v_{n+1} - v_n = 579 \Leftrightarrow ((n+1)^2 + a) - (n^2 + a) = 579 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 - n^2 = 579 \Leftrightarrow 2n = 578 \Leftrightarrow n = 289$

b)  $v_1 + v_3 + v_5 = v_6 \Leftrightarrow 1^2 + a + 3^2 + a + 5^2 + a = 6^2 + a \Leftrightarrow 2a = 36 - 1 - 9 - 25 \Leftrightarrow 2a = 36 - 1 - 9 - 25 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

15. a)  $a_1 = 10 - 3 \times 1 = 7$ ;  $a_2 = 10 - 3 \times 2 = 4$ ;  $a_3 = 10 - 3 \times 3 = 1$ ;  $a_4 = \frac{4+2}{3} = 2$ ;  
 $a_5 = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$

b)  $a_1 = 7$ ;  $a_3 = 1$ ;  $a_{19} = \frac{19+2}{3} = 7$ ;  $P(1, 7)$ ;  $Q(3, 1)$  e  $R(19, 7)$

$$A = \frac{18 \times 6}{2} = 54$$



c) Dos 3 primeiros termos apenas dois pertencem ao intervalo  $[4, 20]$ .

Para  $n > 3$ :  $\frac{n+2}{3} \geq 4 \wedge \frac{n+2}{3} \leq 20 \Leftrightarrow n+2 \geq 12 \wedge n+2 \leq 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \geq 10 \wedge n \leq 58 \Leftrightarrow 10 \leq n \leq 58$  são  $58 - 10 + 1 = 49$  termos.

No total temos  $49 + 2 = 51$  termos da sucessão que pertencem ao intervalo  $[4, 20]$ .

O número de elementos do conjunto  $A$  é 51.

16. a)  $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 3n = 3n + 3 - 3n = 3$   
 $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é crescente.

b)  $b_{n+1} - b_n = 5 - 2(n+1) - 5 + 2n = -2n - 2 + 2n = -2$   
 $b_{n+1} - b_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é decrescente.

c)  $c_{n+1} - c_n = 2(n+1) - (n+1)^2 - 2n + n^2 = 2n + 2 - n^2 - 2n - 1 - 2n + n^2 =$   
 $= -2n + 1$   
 $-2n + 1 < 0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{2}$  é uma condição universal em  $\mathbb{N}$ .  
 $c_{n+1} - c_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é decrescente.

d)  $d_{n+1} - d_n = \frac{3}{2(n+1)} - \frac{3}{2n} = \frac{3n - 3(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{3n - 3n - 3}{2n(n+1)} = -\frac{3}{2n(n+1)}$   
 $d_{n+1} - d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é decrescente

e)  $e_{n+1} - e_n = \frac{n+1}{n+1+3} - \frac{n}{n+3} = \frac{n+1}{n+4} - \frac{n}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{n(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$   
 $= \frac{n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 4n}{(n+4)(n+3)} = \frac{3}{(n+4)(n+3)}$

$e_{n+1} - e_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é crescente.

f)  $f_{n+1} - f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - \sqrt{n} + \sqrt{2} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$   
 $= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$f_{n+1} - f_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é crescente.

17.  $v_1 = 1 - 4 = -3$ ;  $v_2 = 4 - 8 = -4$ ;  $v_3 = 9 - 12 = -3$   
 Como  $v_2 < v_1$  e  $v_3 > v_2$ , a sucessão não é monótona.

## Pág. 55

18. a) Se  $n$  é par,  $n + 1$  é ímpar, pelo que  $t_n = 2n - 1$  e  $t_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$   
 $t_{n+1} - t_n = 2n + 3 - 2n + 1 = 4$ . Pelo que  $t_{n+1} - t_n > 0$ .  
 Se  $n$  é ímpar,  $n + 1$  é par, pelo que  $t_n = 2n + 1$  e  $t_{n+1} = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ .  
 $t_{n+1} - t_n = 2n + 1 - 2n - 1 = 0$ . Pelo que  $t_{n+1} - t_n = 0$ .  
 Vem então que  $t_{n+1} - t_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é crescente em sentido lato.
- b)  $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - (n + 1)^2 - 3n + n^2 = 3n + 3 - n^2 - 2n - 1 - 3n + n^2 = -2n + 2$   
 Para  $n = 1$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0$ . Para  $n > 1$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$ .  
 Então  $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é decrescente em sentido lato.
- c)  $v_{n+1} - v_n = 2^{n+1} - (n + 1)^2 - 2^n + n^2 = 2 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 1 - 2^n + n^2 = 2^n - 2n - 1$   
 Para  $n = 1$ ,  $v_{n+1} - v_n = 2^1 - 2 - 1 = -1$ .  
 Para  $n = 3$ ,  $v_{n+1} - v_n = 2^3 - 6 - 1 = 1$ .  
 A sucessão não é monótona em sentido lato.
- d)  $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}-1} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2 \times 2^{n-1}} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n+1-2n}{2 \times 2^{n-1}} = \frac{1-n}{2^n}$   
 Para  $n = 1$ ,  $x_{n+1} - x_n = 0$ .  
 Para  $n > 1$ ,  $x_{n+1} - x_n < 0$ .  
 Vem então que  $x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . A sucessão é decrescente em sentido lato.
- e)  $y_2 = 10 - 3 \times 2 = 4$ ;  $y_3 = 10 - 3 \times 3 = 1$ ;  $y_4 = 4 - 3 = 1$ ;  $y_5 = 5 - 3 = 2$   
 $y_3 - y_2 < 0$ ;  $y_4 - y_3 = 0$ ;  $y_5 - y_4 > 0$ . A sucessão não é monótona em sentido lato.

19.  $u_p = -\sqrt{10} \approx -3,2$ ;  $u_r = -\frac{32}{7} \approx -4,6$   
 $p < r$  e como  $u_r < u_p$  a sucessão é monótona decrescente.  
 $p < q < r$  logo  $u_r < u_q < u_p$  e uma vez que  $u_q$  é um número inteiro relativo vem que  
 $-\frac{32}{7} < -4 < -\sqrt{10}$ , pelo que  $u_q = -4$ .

20. a) Tem-se  $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{n+1}{n+2}$  pelo que  
 $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} - s_n > 0$ . Assim, a sucessão  $(s_n)$  é crescente.
- b) Sendo a sucessão crescente, o mínimo do conjunto dos seus termos é o primeiro termo.  
 $s_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

21. Como  $(u_n)$  é uma sucessão decrescente, tem-se, para qualquer  $n$  natural,  $u_{n+1} < u_n$ .  
 Como  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , vem:  $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow w_{n+1} > w_n$   
 Portanto  $(w_n)$  é uma sucessão crescente.

22.  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1 \geq 2$ , 2 será então um minorante da sucessão.

23.  $\forall n \in \mathbb{N}, -3n \leq -3$ ,  $-3$  será então um majorante da sucessão.

## Pág. 56

24. a) Se  $n$  é par,  $u_n = 4$ .

Se  $n$  é ímpar,  $u_n = -4$ .

O conjunto dos termos da sucessão é  $\{-4, 4\}$ .

b) A sucessão é majorada, por exemplo, 4 é um majorante. A sucessão é minorada, por exemplo,  $-4$  é um minorante. Logo a sucessão é limitada.

25. a) Se a sucessão  $(u_n)$  é decrescente e de termos positivos, sabemos que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq u_1$  pelo que existem números reais, 0 e  $u_1$ , tais que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_1$ .  
 $(u_n)$  é limitada.

b) Se a sucessão  $(u_n)$  é crescente e de termos negativos, sabemos que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n < 0$  pelo que existem números reais,  $u_1$  e 0, tais que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n \leq 0$ .  
 $(u_n)$  é limitada.

26. a) Tem-se, para qualquer  $n$  natural,  $u_{n+1} - u_n = \frac{4(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{4n+5}{2n+1} =$

$$= \frac{4n+9}{2n+3} - \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{8n^2+4n+18n+9-8n^2-10n-12n-15}{(2n+3)(2n+1)} =$$
$$= -\frac{6}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

Portanto, a sucessão é decrescente.

b) Cada termo é o quociente de dois números positivos.

c) Qualquer sucessão decrescente de termos positivos é limitada.

d) O máximo do conjunto dos termos da sucessão é o primeiro termo, que é  $u_1 = \frac{4+5}{2+1} = 3$ .

27. a)  $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \geq 1$

A sucessão é minorada (minorante, por exemplo, 1) mas não é majorada.

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{3} \geq 1$

A sucessão é minorada (minorante, por exemplo, 1) mas não é majorada.

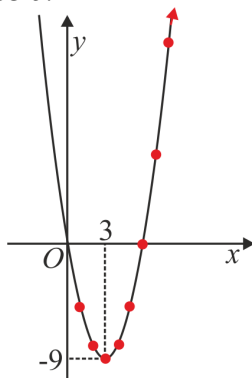
c)  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{4}{n} \leq 4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -2 < \frac{4}{n} - 2 \leq 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq \frac{4}{n} - 2 \leq 2$

A sucessão é limitada (minorante, por exemplo,  $-2$ ; majorante, por exemplo, 2).

d)  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \geq 2 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{n+1} < 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq -\frac{2}{n+1} < 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - \frac{2}{n+1} < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1$

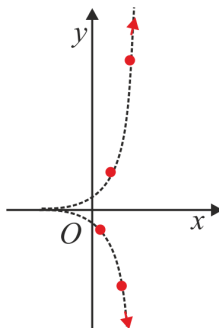
A sucessão é limitada (minorante, por exemplo, 0 ; majorante, por exemplo, 1)

- e) A função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 6x$  é uma função quadrática. O seu gráfico é a parábola de vértice  $(3, -9)$ . A sucessão de termo geral  $e_n = n^2 - 6n$  é a restrição ao conjunto  $\mathbb{N}$  daquela função. O seu gráfico será:



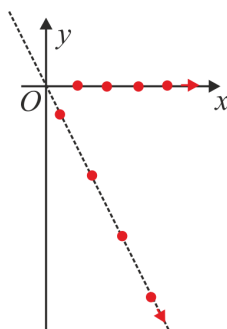
$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 6n \geq -9$ . A sucessão é minorada (minorante, por exemplo,  $-9$ ) mas não é majorada.

- f)  $f_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ é par} \\ -2^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$   
 O gráfico da sucessão será:



A sucessão não é majorada nem minorada.

- g)  $g_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$   
 O gráfico da sucessão será:



Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq 0$ .

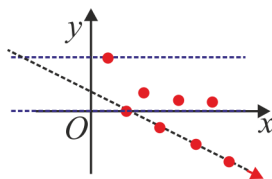
A sucessão é majorada (majorante, por exemplo, 0) mas não é minorada.

h) Se  $n$  é ímpar,  $h_n = \frac{3}{n}$ .

Se  $n$  é ímpar,  $n \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n} \leq 3$ .

Se  $n$  é par,  $h_n = 1 - \frac{n}{2}$ .

O seu gráfico será:



Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq 3$ .

A sucessão é majorada (majorante, por exemplo, 3) mas não é minorada.

28. 2 é um majorante e  $-2$  é um minorante (nota que  $|u_n| < 2 \Leftrightarrow -2 < u_n < 2$ ).

29. a)  $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq u_n \leq 3$

A sucessão é limitada. 3 é um majorante e  $-2$  é um minorante.

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq u_n \leq 3 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -6 \leq 3u_n \leq 9 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -4 \leq 3u_n + 2 \leq 11$

A sucessão é limitada. 11 é um majorante e  $-4$  é um minorante.

30.



$$T \subset ]1, 2[$$

A sucessão é limitada. 2 é um majorante e 1 é um minorante.

## Pág. 57

31. a) Seja  $P(n)$  a propriedade « $3n^2 - n + 1$  é ímpar».

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3$  e 3 é ímpar.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $3n^2 - n + 1$  é ímpar

Tese de indução:  $3(n+1)^2 - (n+1) + 1$  é ímpar.

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 - (n+1) + 1 &= 3(n^2 + 2n + 1) - n - 1 + 1 = \mathbf{3n^2} + 6n + 3 - \mathbf{n} - 1 + \mathbf{1} = \\ &= (3n^2 - n + 1) + (6n + 2) = \underbrace{(3n^2 - n + 1)}_{\text{ímpar por hipótese}} + \underbrace{2(3n + 1)}_{\text{par (múltiplo de 2)}} \end{aligned}$$

soma de um número ímpar com um par é ímpar.

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $3n^2 - n + 1$  é ímpar.

- b) Seja  $P(n)$  a propriedade « $5^n + 3$  é múltiplo de 4».

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $5^1 + 3$  é múltiplo de 4  $\Leftrightarrow 8$  é múltiplo de 4, o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $5^n + 3$  é múltiplo de 4

Tese de indução:  $5^{n+1} + 3$  é múltiplo de 4.

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ .

$$5^{n+1} + 3 = 5^n \times 5 + 3 = 5^n \times (4 + 1) + 3 = \underbrace{5^n \times 4}_{\text{múltiplo de 4}} + \underbrace{5^n + 3}_{\text{múltiplo de 4, por hipótese}}$$

de 4 porque a soma de dois múltiplos de 4, é múltiplo de 4.

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $5^n + 3$  é múltiplo de 4.

- c) Seja  $P(n)$  a propriedade « $3 \times 9^n + 2 \times 4^n$  é múltiplo de 5»

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $3 \times 9^1 + 2 \times 4^1$  é múltiplo de 5  $\Leftrightarrow 35$  é múltiplo de 5, o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $3 \times 9^n + 2 \times 4^n$  é múltiplo de 5

Tese de indução:  $3 \times 9^{n+1} + 2 \times 4^{n+1}$  é múltiplo de 5

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 3 \times 9^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} &= 3 \times 9^n \times 9 + 2 \times 4^n \times 4 = 3 \times 9^n \times (5 + 4) + 2 \times 4^n \times 4 = \\ &= 3 \times 9^n \times 5 + 3 \times 9^n \times 4 + 2 \times 4^n \times 4 = \underbrace{3 \times 9^n \times 5}_{\text{múltiplo de 5}} + 4 \times \underbrace{(3 \times 9^n + 2 \times 4^n)}_{\text{múltiplo de 5, por hipótese}} \end{aligned}$$

é múltiplo de 5 porque o produto de um múltiplo de 5 por outro número é um múltiplo de 5 e a soma de dois múltiplos de 5, é múltiplo de 5.

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $3 \times 9^n + 2 \times 4^n$  é múltiplo de 5.

- d) Seja  $P(n)$  a propriedade « $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ »

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $\frac{a^1}{b^1} = \left(\frac{a}{b}\right)^1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ , o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Tese de indução:  $\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} = \frac{a^n \times a}{b^n \times b} = \frac{a^n}{b^n} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ .

- e) Seja  $P(n)$  a propriedade «  $\sum_{k=1}^n (4k - 1) = 2n^2 + n$  ».

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $\sum_{k=1}^1 (4k - 1) = 2 \times 1^2 + 1 \Leftrightarrow 3 = 3$ , o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $\sum_{k=1}^n (4k - 1) = 2n^2 + n$

Tese de indução:  $\sum_{k=1}^{n+1} (4k - 1) = 2(n + 1)^2 + n + 1$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (4k - 1) &= \sum_{k=1}^n (4k - 1) + 4(n + 1) - 1 = \sum_{k=1}^n (4k - 1) + 4n + 3 = 2n^2 + n + 4n + 3 = \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 = 2(n^2 + 2n + 1) + n + 1 = 2(n + 1)^2 + n + 1 \end{aligned}$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $\sum_{k=1}^n (4k - 1) = 2n^2 + n$ .

- f) Seja  $P(n)$  a propriedade «  $\sum_{k=1}^n (-1)^k (2k - 1) = (-1)^n \times n$  »

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $\sum_{k=1}^1 (-1)^k (2k - 1) = (-1)^1 \times 1 \Leftrightarrow -1 = -1$ , o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $\sum_{k=1}^n (-1)^k (2k - 1) = (-1)^n \times n$

Tese de indução:  $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (2k - 1) = (-1)^{n+1} \times (n + 1)$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (2k - 1) + (-1)^{n+1} \times (2n + 1) = \\ &= (-1)^n \times n + (-1)^n \times (-1) \times (2n + 1) = \\ &= (-1)^n \times [n + (-1) \times (2n + 1)] = (-1)^n (-n - 1) = \\ &= (-1)^n \times (-1) \times (n + 1) = (-1)^{n+1} \times (n + 1) \end{aligned}$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $\sum_{k=1}^n (-1)^k (2k - 1) = (-1)^n \times n$ .

- g)** Seja  $P(n)$  a propriedade «  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$  ».

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , o que é verdade.

Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Tese de indução:  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

- h)** Seja  $P(n)$  a propriedade «  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n}$  ».

$P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n} \Leftrightarrow 1 = 1$ , o que é verdade. Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.

Hipótese de indução:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n}$

Tese de indução:  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n+1}$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \\ &= \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n}$ .

- i) Seja  $P(n)$  a propriedade «  $2^n \geq 2n$  ».  
 $P(1)$  é uma proposição verdadeira, pois  $2^1 \geq 2 \times 1 \Leftrightarrow 2 \geq 2$ , o que é verdade.  
 Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural qualquer.  
 Hipótese de indução:  $2^n \geq 2n$                       Tese de indução:  $2^{n+1} \geq 2(n+1)$

Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$2^n \geq 2n \Rightarrow 2^n \times 2 \geq 2n \times 2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2n \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2(n+1)$   
 De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural,  $2^n \geq 2n$ .

## Pág. 58

32. Seja  $P(n)$  a propriedade «  $n^2 - 5n$  é um número natural par,  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 6$  ».  
 $P(6)$  é uma proposição verdadeira, pois  $6^2 - 5 \times 6$  é um número natural par  $\Leftrightarrow 6$  é um número natural par, o que é verdade.  
 Provemos agora a hereditariedade. Seja  $n$  um número natural maior ou igual a 6.  
 Hipótese de indução:  $n^2 - 5n$  é um número natural par  
 Tese de indução:  $(n+1)^2 - 5(n+1)$  é um número natural par  
 Vamos provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$   

$$(n+1)^2 - 5(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 = \underbrace{n^2 - 5n}_{\text{número natural par, por hipótese}} + \underbrace{2n - 4}_{\text{número natural par, se } n \geq 6}$$
  
 é par porque a soma de dois números pares é par.

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer  $n$  natural com  $n \geq 6$ ,  $n^2 - 5n$  é um número natural par.

33. a) Tem-se  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$  pelo que  
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ . Assim, a sucessão  $(u_n)$  é crescente.
- b) Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ,  
 o que é verdade.  
 Hipótese de indução:  $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$   
 Tese de indução:  $u_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$   

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$
  

$$= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$
- c) Tem-se  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{2^n} > 0$ , pelo que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2$ , ou seja,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$ .
- d) Como a sucessão é crescente, o primeiro termo é um minorante da sucessão.  
 Como  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$ , tem-se que 2 é um majorante da sucessão.  
 Assim, a sucessão é limitada.

**34. a)**  $u_2 = 4 \times u_1 - 1 = 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1$  ;  $u_3 = 4 \times u_2 - 1 = 4 \times 1 - 1 = 3$   
 $u_4 = 4 \times u_3 - 1 = 4 \times 3 - 1 = 11$

**b)**  $v_2 = \frac{1+v_1}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$  ;  $v_3 = \frac{1+v_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$   
 $v_4 = \frac{1+v_3}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

**35. a)**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$   
 Então  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ . A sucessão é crescente.

**b)**  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{3}$   
 Então  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n < 0$ . A sucessão é decrescente.

**36. a)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 > -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 3 > -\frac{6}{5}$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n > -\frac{6}{5}$

Tese de indução:  $u_{n+1} > -\frac{6}{5}$

$$u_n > -\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{u_n}{6} > \frac{-1}{5} \Rightarrow \frac{u_n}{6} - 1 > -\frac{1}{5} - 1 \Rightarrow u_{n+1} > -\frac{6}{5}$$

**b)**  $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{6} - 1 < u_n \Leftrightarrow u_n - 6 < 6u_n \Leftrightarrow 5u_n > -6 \Leftrightarrow u_n > -\frac{6}{5}$  que é verdade para todo o  $n$  natural como foi visto na alínea anterior. Logo a sucessão é decrescente.

**c)** Se a sucessão é decrescente,  $u_1$  é um majorante do conjunto dos seus termos. Por outro lado, sabemos que  $u_n > -\frac{6}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$ , pelo que  $-\frac{6}{5}$  é um minorante do conjunto dos seus termos. Logo a sucessão é limitada.

## Pág. 59

**37. a)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $x_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $x_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

Tese de indução:  $x_{n+1} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2} = \frac{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 + 1}{2} = \frac{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}{2} =$$

$$= \frac{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} + \frac{2}{2} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} + 1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1$$

**b)** Tem-se:  $x_{n+1} - x_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - \left[3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] =$   
 $= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n =$   
 $= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) =$   
 $= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} - x_n < 0$ , vem que  $(x_n)$  é decrescente.

**c)** Como a sucessão é decrescente, o primeiro termo é um majorante da sucessão.

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$ , vem  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n > 1$ , pelo que 1 é um minorante da sucessão. Assim, a sucessão é limitada.

**38. a)**  $u_2 = \frac{1 + \sqrt{u_1}}{3} = \frac{1+2}{3} = 1$ ;  $u_3 = \frac{1 + \sqrt{u_2}}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$

**b)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 > \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4 > \frac{4}{9}$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n > \frac{4}{9}$

Tese de indução:  $u_{n+1} > \frac{4}{9}$

$$u_n > \frac{4}{9} \Rightarrow \sqrt{u_n} > \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \sqrt{u_n} > \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{u_n}}{3} > \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{5}{9} \Rightarrow u_{n+1} > \frac{4}{9}$$

**c)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_2 < u_1 \Leftrightarrow 1 < 4$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_{n+1} < u_n$

Tese de indução:  $u_{n+2} < u_{n+1}$

$$u_{n+1} < u_n \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n} \Rightarrow 1 + \sqrt{u_{n+1}} < 1 + \sqrt{u_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{u_{n+1}}}{3} < \frac{1 + \sqrt{u_n}}{3} \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

**d)** Como a sucessão é decrescente, o primeiro termo é um majorante da sucessão.

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \frac{4}{9}$ , tem-se que  $\frac{4}{9}$  é um minorante da sucessão.

Assim, a sucessão é limitada.

**39. a)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 < \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow c < \frac{b}{1-a}$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n < \frac{b}{1-a}$

Tese de indução:  $u_{n+1} < \frac{b}{1-a}$

$$u_n < \frac{b}{1-a} \Rightarrow a u_n < \frac{a b}{1-a} \Rightarrow a u_n + b < \frac{a b}{1-a} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{a b + b - a b}{1-a} \Rightarrow u_{n+1} < \frac{b}{1-a}$$

- b)** Tem-se, para qualquer  $n$  natural:  $u_n < \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow u_n(1-a) < b$  (porque  $1-a > 0$ ).  
 $\Leftrightarrow u_n - a u_n < b \Leftrightarrow u_n < a u_n + b \Leftrightarrow u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ .  
 Logo, a sucessão é crescente.

- c)** Como a sucessão é crescente, o primeiro termo é um minorante da sucessão.  
 Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < \frac{b}{1-a}$ , tem-se que  $\frac{b}{1-a}$  é um majorante da sucessão.  
 Assim, a sucessão é limitada.

- 40. a)** Tem-se, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_n^2}{u_n - 1} > u_n$ .

Como, por hipótese,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < 0$ , vem  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - 1 < 0$ .

Portanto,  $\frac{u_n^2}{u_n - 1} > u_n \Leftrightarrow u_n^2 < u_n(u_n - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u_n^2 < u_n^2 - u_n \Leftrightarrow u_n < 0, \text{ o que é verdade.}$$

- b)** Como a sucessão é crescente, o primeiro termo é um minorante da sucessão.  
 Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < 0$ , tem-se que  $0$  é um majorante da sucessão.  
 Assim, a sucessão é limitada.
- c)** Como o maior dos minorante da sucessão é o primeiro termo, sabemos que o primeiro termo é o mínimo da sucessão.  
 $u_2 = \frac{u_1^2}{u_1 - 1} \Leftrightarrow -2 = \frac{u_1^2}{u_1 - 1} \Leftrightarrow -2u_1 + 2 = u_1^2$  (porque  $u_1 \neq 1$ , uma vez que todos os termos são negativos)  $\Leftrightarrow u_1^2 + 2u_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow u_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow u_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow u_1 = -1 \pm \sqrt{3}$   
 Como todos os termos da sucessão são negativos  $u_1 = -1 - \sqrt{3}$ .

## Pág. 60

- 41. a)** Designemos por  $r$  a razão da progressão.  $a_2 = a_1 + r$ , logo  $r = 7 - 2 = 5$ .
- b)**  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , pelo que  $a_n = 2 + (n - 1) \times 5 = 5n - 3$ .
- c)**  $a_{16} = 5 \times 16 - 3 = 77$
- d)**  $5n - 3 = 122 \Leftrightarrow n = 25$   
 122 é o termo de ordem 25.

- 42.**  $u_n = u_1 + (n - 1)r$ , pelo que  $u_{13} = u_1 + 12r$ .  
 $45 = u_1 + 12 \times 4 \Leftrightarrow u_1 = -3$ . O termo geral é  $u_n = -3 + 4(n - 1) = 4n - 7$ .

$$43. \begin{cases} v_{29} = -4 \\ v_{64} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 28r = -4 \\ v_1 + 63r = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 63r + 28r = -4 \\ v_1 = 1 - 63r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35r = 5 \\ v_1 = 1 - 63r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{7} \\ v_1 = 1 - 63 \times \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{7} \\ v_1 = -8 \end{cases}$$

O termo geral é então  $v_n = -8 + \frac{1}{7}(n-1) = \frac{1}{7}n - \frac{57}{7}$ .

$$44. u_{p+15} - u_p = u_p + 15r - u_p = 15r = 15 \times 4 = 60$$

$$45. \text{ a) } u_{n+1} - u_n = \frac{7(n+1)+5}{2} - \frac{7n+5}{2} = \frac{7n+7+5-7n-5}{2} = \frac{7}{2}$$

Como, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}$ ,  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $\frac{7}{2}$ .

$$\text{ b) } \frac{u_{3n}-u_n}{n} = \frac{\frac{7 \times 3n+5}{2} - \frac{7n+5}{2}}{n} = \frac{\frac{21n-7n}{2}}{n} = \frac{14n}{2n} = 7$$

$$46. \text{ a) } q = p + 11; u_p = 71; u_{p+11} = 104$$

$$\begin{cases} u_p = 71 \\ u_{p+11} = 104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_p = 71 \\ u_p + 11r = 104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_p = 71 \\ 71 + 11r = 104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_p = 71 \\ r = 3 \end{cases}$$

A razão é 3.

$$\text{ b) } \begin{cases} u_p = 71 \\ u_{2p} = 140 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (p-1) \times 3 = 71 \\ u_1 + (2p-1) \times 3 = 140 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 71 - 3p + 3 \\ u_1 + 6p - 3 = 140 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 74 - 3p \\ u_1 + 6p = 143 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 74 - 3p \\ 74 - 3p + 6p = 143 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 74 - 3p \\ 3p = 69 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 74 - 3 \times 23 \\ p = 23 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ p = 23 \\ r = 3 \end{cases}$$

O termo geral é então  $u_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$ .

$$47. \text{ a) } \begin{cases} u_8 = u_6 + 8 \\ u_{10} = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_6 + 2r = u_6 + 8 \\ u_1 + 9r = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ u_1 + 9 \times 4 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

O termo geral é então  $u_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$ .

b)  $u_n = 4n + 1$   $(u_n)^2 - u_{n^2} = 1044$   
 $(4n + 1)^2 - (4n^2 + 1) = 1044 \Leftrightarrow 16n^2 + 8n + 1 - 4n^2 - 1 = 1044 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 12n^2 + 8n - 1044 = 0 \Leftrightarrow 3n^2 + 2n - 261 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 3 \times (-261)}}{6} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 56}{6} \Leftrightarrow n = 9 \vee n = -\frac{29}{3} \notin \mathbb{N}$ . O valor de  $n$  é 9.

48. a)  $u_p = 4x + 2 \wedge u_{p+1} = x^2 - 1 \wedge u_{p+2} = 3x$   
Pelo que  $x^2 - 1 - (4x + 2) = 3x - (x^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 - 4x - 2 = 3x - x^2 + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 2 \times (-4)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 9}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -\frac{1}{2}$   
Como  $x$  é negativo, vem  $x = -\frac{1}{2}$

Os termos são  $u_p = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0$  ;  $u_{p+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$   
 $u_{p+2} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

b)  $u_{p+1} = u_p + r$  logo  $r = -\frac{3}{4} - 0 = -\frac{3}{4}$   
 $u_8 = 9 \Leftrightarrow u_1 + 7r = 9 \Leftrightarrow u_1 + 7 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 9 \Leftrightarrow u_1 = \frac{57}{4}$   
O termo geral é então  $u_n = \frac{57}{4} + (n - 1) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}n + 15$ .

c)  $u_p = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}p + 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}p = 15 \Leftrightarrow p = 20$   
Então as ordens dos três termos são 20, 21 e 22.

## Pág. 61

49. a) Trata-se de uma progressão aritmética de primeiro termo 250 e razão 20.  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ .  
 $a_n = 250 + (n - 1) \times 20 = 20n + 230$

b)  $a_{30} = 20 \times 30 + 230 = 830$ . 830 animais

c)  $20n + 230 = 450 \Leftrightarrow n = 11$  11 anos

50. a)  $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{5 + 43}{2} \times 20 = 480$

b)  $S_{10} = \frac{b_1 + b_{10}}{2} \times 10 = \frac{-5 - 59}{2} \times 10 = -320$

c)  $S_9 = \frac{c_1 + c_9}{2} \times 9 = \frac{2 + 38}{2} \times 9 = 180$

51.  $a_n = -3 + (n - 1) \times 5 = 5n - 8$   
 $\sum_{n=1}^{26} a_n = \frac{a_1 + a_{26}}{2} \times 26 = \frac{-3 + 122}{2} \times 26 = 1547$

$$52. \quad \begin{cases} u_3 = 7 \\ u_9 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = 7 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ 7 - 2r + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ 6r = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -1 \\ r = 4 \end{cases}$$

$$u_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5$$

$$\sum_{n=4}^{20} u_n = \frac{u_4 + u_{20}}{2} \times (20 - 4 + 1) = \frac{11 + 75}{2} \times 17 = 731$$

$$53. \quad \text{a)} \quad u_1 = 9 ; r > 0 ; u_9 \times u_{10} = 2646$$

$$u_9 \times u_{10} = 2646 \Leftrightarrow (u_1 + 8r) \times (u_1 + 9r) = 2646 \Leftrightarrow (9 + 8r) \times (9 + 9r) = 2646 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81 + 81r + 72r + 72r^2 = 2646 \Leftrightarrow 72r^2 + 153r - 2565 = 0 \Leftrightarrow 8r^2 + 17r - 285 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 4 \times 8 \times (-285)}}{16} \Leftrightarrow r = \frac{-17 \pm 97}{16} \Leftrightarrow r = 5 \vee r = -\frac{57}{8}$$

Como  $r$  é positivo, vem que  $r = 5$ .

$$u_n = 9 + (n-1) \times 5 = 5n + 4$$

$$\text{b)} \quad S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = \frac{9 + 54}{2} \times 10 = 315$$

$$54. \quad \text{a)} \quad \sum_{k=1}^n a_k = 126 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = 126 \Leftrightarrow \frac{-2 + 4n - 6}{2} \times n = 126 \Leftrightarrow (2n - 4) \times n = 126 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 126 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2 \times (-126)}}{4} \Leftrightarrow n = \frac{4 \pm 32}{4} \Leftrightarrow n = 9 \vee n = -7$$

Como  $n \geq 1$  vem  $n = 9$ .

$$\text{b)} \quad \sum_{k=1}^n b_k = n + 154 \Leftrightarrow \frac{b_1 + b_n}{2} \times n = n + 154 \Leftrightarrow \frac{5 + 2n + 3}{2} \times n = n + 154 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n + 4) \times n = n + 154 \Leftrightarrow n^2 + 4n - n - 154 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 154 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-154)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 25}{2} \Leftrightarrow n = 11 \vee n = -14$$

Como  $n \geq 1$  vem  $n = 11$ .

$$\text{c)} \quad \sum_{k=1}^n c_k = \frac{n^2 - n}{3} \Leftrightarrow \frac{c_1 + c_n}{2} \times n = \frac{n^2 - n}{3} \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{n+1}{2}}{2} \times n = \frac{n^2 - n}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+3}{4} \times n = \frac{n^2 - n}{3} \Leftrightarrow \frac{n^2 + 3n}{4} = \frac{n^2 - n}{3} \Leftrightarrow 3n^2 + 9n = 4n^2 - 4n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 13n = 0 \Leftrightarrow n(n - 13) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 13$$

Como  $n \geq 1$  vem  $n = 13$ .

$$55. \quad u_n = 4n - 4 \quad 4n - 4 = 224 \Leftrightarrow n = 57 ; 4n - 4 = 376 \Leftrightarrow n = 95$$

$$S_{57,95} = \frac{u_{57} + u_{95}}{2} \times (95 - 57 + 1) = \frac{224 + 376}{2} \times 39 = 11700$$

$$56. \quad \text{a)} \quad u_1 + u_p = 2 \times u_m \text{ logo } u_1 = 2 \times (-104) - (-200) = -8$$

$$\text{b)} \quad \text{O termo geral é então } u_n = -8 + (n-1) \times (-12) = -12n + 4.$$

$$\text{c)} \quad u_p = -200 \Leftrightarrow -12p + 4 = -200 \Leftrightarrow p = 17 \text{ e } m = 9$$

57. O termo mediano da sequência  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  é também termo mediano da sequência  $(u_2, \dots, u_{p-1})$ .

Logo,  $\sum_{k=2}^{p-1} u_k = (\text{termo mediano}) \times (\text{número de parcelas}) = u_m \times (p - 1 - 2 + 1) = u_m \times (p - 2)$ .

Assim,  $\sum_{k=2}^{p-1} u_k = u_m \times (p - 2)$ , pelo que  $u_m = \frac{\sum_{k=2}^{p-1} u_k}{p - 2}$ .

58. Designemos por  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  a sequência das medidas de amplitude, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com  $p$  lados, com  $p$  ímpar.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_p = (p - 2) \times 180 \quad \wedge \quad u_1 + u_p = 2 \times u_m$$

Donde vem que  $\frac{u_1 + u_p}{2} \times p = (p - 2) \times 180 \quad \wedge \quad u_1 + u_p = 2 \times 156$ .

Pelo que  $\frac{2 \times 156}{2} \times p = (p - 2) \times 180 \Leftrightarrow 156p = 180p - 360 \Leftrightarrow p = 15$

O polígono tem 15 lados.

59. Designemos por  $(u_n)$  a quantia colocada pela Joana no mealheiro na semana  $n$ . Trata-se de uma progressão aritmética de primeiro termo 0,1 e razão 0,1.

$$u_n = 0,1 + (n - 1) \times 0,1 = 0,1n$$

$$S_n = 52,8 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 52,8 \Leftrightarrow \frac{0,1 + 0,1n}{2} \times n = 52,8 \Leftrightarrow 0,1n + 0,1n^2 = 105,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,1n^2 + 0,1n - 105,6 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 1056 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1056)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 65}{2} \Leftrightarrow n = 32 \vee n = -33$$

O número de semanas é 32.

## Pág. 63

60. a)  $(v_n)$  é uma progressão aritmética de primeiro termo 1 e razão 1, logo  $v_n = 1 + (n - 1) \times 1 = n$ .  
 $(b_n)$  é uma progressão aritmética de primeiro termo 4 e razão 3, logo  $b_n = 4 + (n - 1) \times 3 = 3n + 1$ .  
 $(t_n)$  é uma progressão aritmética de primeiro termo 5 e razão 4, logo  $t_n = 5 + (n - 1) \times 4 = 4n + 1$ .

b)  $4n + 1 = 629 \Leftrightarrow n = 157$ ;  $b_{157} = 3 \times 157 + 1 = 472$

c)  $S_{100} = \frac{t_1 + t_{100}}{2} \times 100 = \frac{5 + 401}{2} \times 100 = 20300$

d)  $S_k = 186965 \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_k}{2} \times k = 186965 \Leftrightarrow \frac{5 + 4k + 1}{2} \times k = 186965 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{6k + 4k^2}{2} = 186965 \Leftrightarrow 2k^2 + 3k - 186965 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-186965)}}{4} \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 1223}{4} \Leftrightarrow k = 305 \vee k = -\frac{613}{2}$

Logo,  $k = 305$ .

61. a)  $u_1 = 4 ; u_2 = 12 ; r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{4} = 3$

b)  $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 4 \times 3^{n-1}$

c)  $u_6 = 4 \times 3^5 = 972$

62. a)  $v_6 = \frac{3}{16} ; v_8 = \frac{3}{64} ; r > 0$

$v_8 = v_6 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{3}{64} = \frac{3}{16} \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{4}$  e como  $r > 0$  vem  $r = \frac{1}{2}$ .

$v_6 = v_1 \times r^5 \Leftrightarrow \frac{3}{16} = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow \frac{3}{16} = v_1 \times \frac{1}{32} \Leftrightarrow v_1 = 6$

O termo geral é  $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 6 \times \frac{1}{2^{n-1}} = 6 \times \frac{2}{2^n} = \frac{12}{2^n}$ .

b)  $v_{10} = \frac{12}{2^{10}} = \frac{3}{256}$

c)  $v_{n+1} - v_n = \frac{12}{2^{n+1}} - \frac{12}{2^n} = \frac{12}{2 \times 2^n} - \frac{12}{2^n} = \frac{6}{2^n} - \frac{12}{2^n} = -\frac{6}{2^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$   
A sucessão é decrescente.

d) Tem-se, para qualquer  $n$  natural:  $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{1}{v_{n+1}}}{\frac{1}{v_n}} = \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Portanto,  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão 2.

## Pág. 64

63. a)  $a_1 = 5 ; r = 2$

b)  $b_1 = \frac{2}{5} ; r = 3$

c)  $c_1 = 4 \times 3^2 = 36 ; r = \frac{c_2}{c_1} = \frac{4 \times 3^4}{4 \times 3^2} = 9$

d)  $d_1 = -6 \times 2^2 = -24 ; r = \frac{d_2}{d_1} = \frac{-6 \times 2^3}{-6 \times 2^2} = 2$

e)  $e_1 = 5 \times 4^3 = 320 ; r = \frac{e_2}{e_1} = \frac{5 \times 4^5}{5 \times 4^3} = 4^2 = 16$

f)  $f_1 = 3 \times 6^1 = 18 ; r = \frac{f_2}{f_1} = \frac{3 \times 6^{-1}}{3 \times 6} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$

g)  $g_1 = 4 \times 5^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{5} ; r = \frac{g_2}{g_1} = \frac{4 \times 5^1}{4 \times 5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$$\text{h)} \quad h_1 = \frac{9 \times 2^1}{3^2} = 2; \quad r = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{9 \times 2^2}{3^3}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$64. \quad \text{a)} \quad u_{p+3} = u_p \times r^3 \Leftrightarrow 120,687845 = 24,565 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 4,913 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{4,913} \Leftrightarrow r = 1,7$$

$$\text{b)} \quad u_p = 24,565 \Leftrightarrow 5 \times 1,7^{p-1} = 24,565 \Leftrightarrow 1,7^{p-1} = 4,913 \Leftrightarrow 1,7^{p-1} = 1,7^3 \Leftrightarrow p-1 = 3 \Leftrightarrow p = 4$$

$$65. \quad \text{Tem-se, para qualquer } n \text{ natural:} \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a x_{n+1}^k}{a x_n^k} = \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^k = r^k$$

Portanto,  $(y_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $r^k$ .

$$66. \quad \text{Tem-se, para qualquer } n \text{ natural:} \quad \frac{u_{n+1}^2}{u_2} = \frac{(u_1 \times r^n)^2}{u_1 \times r} = \frac{(u_1)^2 \times r^{2n}}{u_1 \times r} = u_1 \times r^{2n-1} = u_{2n}$$

$$67. \quad \text{Tem-se, para quaisquer } m \text{ e } p \text{ naturais, com } m > p:$$

$$u_{m-p} \times u_{m+p} = u_1 \times r^{m-p-1} \times u_1 \times r^{m+p-1} = u_1^2 \times r^{2m-2} = u_1^2 \times r^{2(m-1)} = (u_1 \times r^{m-1})^2 = u_m^2$$

$$68. \quad \text{Sendo } k \text{ um número ímpar, o termo mediano da sequência } (u_1, u_2, \dots, u_k) \text{ é o termo de ordem } \frac{k+1}{2}, \text{ isto é, tem-se } m = \frac{k+1}{2}. \text{ Ora, para qualquer } k \text{ ímpar maior do que 1, tem-se:}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{u_1 \times u_k} &= \sqrt{u_1 \times u_1 \times r^{k-1}} = \sqrt{u_1^2 \times r^{k-1}} = u_1 \times \sqrt{r^{k-1}} = u_1 \times r^{\frac{k-1}{2}} = u_1 \times r^{\frac{k+1-2}{2}} = \\ &= u_1 \times r^{\frac{k+1}{2} - 1} = u_1 \times r^{m-1} = u_m \end{aligned}$$

$$69. \quad \text{Tem-se, para qualquer } k \text{ ímpar maior do que 1:}$$

$$u_m = u_{\frac{k+1}{2}} = u_1 \times (r^2)^{\frac{k+1}{2}-1} = a \times (r^2)^{\frac{k-1}{2}} = a \times r^{k-1} = v_k$$

$$70. \quad \text{Uma quantia } q, \text{ depositada num banco a uma taxa de juro anual } i, \text{ vale, passados } n \text{ anos, } v_n = q(1+i)^n. \text{ Neste caso } q = 1400 \text{ e } i = 0,02.$$

$$v_5 = 1400 \times 1,02^5 = 1545,71\text{€}$$

## Pág. 65

$$71. \quad \text{a)} \quad S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = 10 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 2550$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=4}^{10} u_k = u_4 \times \frac{1-r^7}{1-r} = u_1 \times r^3 \times \frac{1-r^7}{1-r} = 10 \times 2^3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 10160$$

72. Tem-se:  $v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = v_1 \times \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}} =$   
 $= 2 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = 3 \times (1 - 3^{-10}) = 3 - 3 \times 3^{-10} = 3 - 3^{-9}$

73. a) Tem-se, para qualquer  $n$  natural:  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$   
 Portanto,  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

b) Como  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ , cada termo (a partir do segundo) é metade do anterior, pelo que, sendo os termos todos positivos, a sucessão é decrescente.

c)  $\sum_{k=4}^9 u_k = u_4 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = u_1 \times r^3 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{315}{512}$

d)  $\sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{5}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} =$   
 $= \frac{5}{2} \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 5 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 5 - \frac{5}{2^n} = 5 - u_n$

74. a)  $u_3 = 18 \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = 18 \Leftrightarrow u_1 \times 3^2 = 18 \Leftrightarrow u_1 = 2$   
 $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

b)  $2 \times 3^{n-1} = 1458 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 729 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^6 \Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$ . É o termo de ordem 7.

c)  $S_{10} = u_1 \times \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = 2 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = 59048$

## Pág. 66

75. a)  $u_{p+3} = -8u_p \Leftrightarrow u_p \times r^3 = -8u_p \Leftrightarrow u_p \times r^3 + 8u_p = 0 \Leftrightarrow u_p(r^3 + 8) = 0$ .  
 Como  $u_p \neq 0$  vem  $r^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow r^3 = -8 \Leftrightarrow r = -2$ .

b)  $u_7 = -8 \Leftrightarrow u_1 \times r^6 = -8 \Leftrightarrow u_1 \times (-2)^6 = -8 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{1}{8}$   
 Termo geral:  $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -\frac{1}{8} \times (-2)^{n-1} = \frac{1}{-8} \times (-2)^{n-1} =$   
 $= \frac{1}{(-2)^3} \times (-2)^{n-1} = (-2)^{-3} \times (-2)^{n-1} = (-2)^{n-4}$

c)  $\sum_{k=1}^7 u_k = u_1 \times \frac{1 - r^7}{1 - r} = -\frac{1}{8} \times \frac{1 - (-2)^7}{1 + 2} = -\frac{43}{8}$

76. a)  $v_3 = 4v_1 \Leftrightarrow v_1 \times r^2 = 4v_1 \Leftrightarrow v_1(r^2 - 4) = 0$   
 Como  $v_1 \neq 0$  vem  $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 4$  e como a progressão é não monótona,  $r$  terá de ser negativo, pelo que  $r = -2$ .

b)  $v_5 = 48 \Leftrightarrow v_1 \times r^4 = 48 \Leftrightarrow v_1 \times (-2)^4 = 48 \Leftrightarrow v_1 = 3$   
 Termo geral:  $v_n = v_1 \times r^{n-1} = 3 \times (-2)^{n-1}$

c)  $1 - \sum_{k=1}^n v_k = -2048 \Leftrightarrow 1 - v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = -2048 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 1 - 3 \times \frac{1-(-2)^n}{1+2} = -2048 \Leftrightarrow 1 - 1 + (-2)^n = -2048 \Leftrightarrow (-2)^n = -2048 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (-2)^n = (-2)^{11} \Leftrightarrow n = 11$

77. a)  $x_n = x_1 \times r^{n-1} = \sqrt{5} \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^n$

b)  $x_p = 625 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^p = 625 \Leftrightarrow (5^{\frac{1}{2}})^p = 5^4 \Leftrightarrow 5^{\frac{p}{2}} = 5^4 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 x_k &= x_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = \sqrt{5} \times \frac{1-(\sqrt{5})^8}{1-\sqrt{5}} = \sqrt{5} \times \frac{1-5^4}{1-\sqrt{5}} = \\ &= \sqrt{5} \times \frac{-624}{1-\sqrt{5}} = \frac{-624\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-624\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{-624\sqrt{5}-624 \times 5}{1-5} = \\ &= \frac{-3120-624\sqrt{5}}{-4} = 780 + 156\sqrt{5} \end{aligned}$$

78. a) Tem-se, para qualquer  $n$  natural:  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{a_{n+1}}}{4^{a_n}} = 4^{a_{n+1}-a_n} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$   
 Portanto,  $(b_n)$  é uma progressão geométrica de razão 2.

b)  $\sum_{k=1}^{10} b_k = 16368 \Leftrightarrow b_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 16368 \Leftrightarrow b_1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 16368 \Leftrightarrow b_1 = 16$   
 Mas  $b_1 = 4^{a_1}$  pelo que  $4^{a_1} = 16 \Leftrightarrow 4^{a_1} = 4^2 \Leftrightarrow a_1 = 2$ .

$$\begin{aligned} 79. \quad &\begin{cases} \frac{u_p}{u_q} = 243 \\ \sum_{k=p}^q u_k = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_p}{u_p \times r^{q-p}} = 243 \\ u_p \times \frac{1-r^{q-p+1}}{1-r} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^{q-p}} = 243 \\ u_p \times \frac{1-r^{q-p} \times r}{1-r} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^{q-p} = \frac{1}{243} \\ u_p \times \frac{1-\frac{1}{243} \times \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^{q-p}} = 243 \\ u_p \times \frac{364}{243} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^{q-p}} = 243 \\ u_p = \frac{243}{4} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

- 80.** No final do primeiro ano o Diogo tem  $1000 + 0,025 \times 1000 = 1,025 \times 1000$  euros.  
 Como, no início do segundo ano, depositou mais 1000 euros, no final do segundo ano tem  
 $1,025 \times (1,025 \times 1000 + 1000) = 1,025^2 \times 1000 + 1,025 \times 1000 = (1,025^2 + 1,025) \times 1000$  euros.  
 Como, no início do terceiro ano, depositou mais 1000 euros, no final do terceiro ano tem  
 $1,025 \times ((1,025^2 + 1,025) \times 1000 + 1000) = 1,025 \times ((1,025^2 + 1,025 + 1) \times 1000) =$   
 $= (1,025^3 + 1,025^2 + 1,025) \times 1000$  euros.

.....

No final do décimo ano o Diogo tem  $(1,025^{10} + 1,025^9 + \dots + 1,025) \times 1000$  euros.

$$(1,025^{10} + 1,025^9 + \dots + 1,025) \times 1000 = 1,025 \times \frac{1 - 1,025^{10}}{1 - 1,025} \times 1000 = 11483,47 \text{ euros.}$$

## Pág. 68

**81. a)**  $u_{10} = \frac{4 \times 10}{2 \times 10 + 7} = \frac{40}{27} \approx 1,481$

$$u_{100} = \frac{4 \times 100}{2 \times 100 + 7} = \frac{400}{207} \approx 1,932$$

$$u_{1000} = \frac{4 \times 1000}{2 \times 1000 + 7} = \frac{4000}{2007} \approx 1,993$$

$$u_{10000} = \frac{4 \times 10000}{2 \times 10000 + 7} = \frac{40000}{20007} \approx 1,999$$

**b)** Para 2.

**c)** 2 é limite de  $(u_n)$  se, para qualquer número real  $\delta > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $\delta > 0$ , tem-se:

$$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{4n}{2n+7} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{4n}{2n+7} - \frac{4n+14}{2n+7} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{4n-4n-14}{2n+7} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-14}{2n+7} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{14}{2n+7} < \delta \Leftrightarrow 14 < \delta(2n+7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n\delta + 7\delta > 14 \Leftrightarrow n > \frac{14-7\delta}{2\delta}$$

Portanto,  $n > \frac{14-7\delta}{2\delta} \Leftrightarrow |u_n - 2| < \delta$ , pelo que  $n > \frac{14-7\delta}{2\delta} \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{14-7\delta}{2\delta}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

Está confirmado que  $u_n \rightarrow 2$ .

**82.** Tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$  se, para qualquer número real  $\delta > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \delta.$$

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $\delta > 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2n}{3n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1-2n}{3n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3n} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \delta \Leftrightarrow 1 < 3n\delta \Leftrightarrow 3n\delta > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\delta} \end{aligned}$$

Portanto,  $n > \frac{1}{3\delta} \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \delta$ , pelo que  $n > \frac{1}{3\delta} \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \delta$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{1}{3\delta}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \delta$

Está confirmado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ .

**83. a)**  $u_1 = \frac{5 \times 1}{1+1} = \frac{5}{2}$ ;  $u_2 = \frac{5 \times 2}{2+1} = \frac{10}{3}$ ;  $u_3 = \frac{5 \times 3}{3+1} = \frac{15}{4}$

**b)**  $\frac{5n}{n+1} = 4,8 \Leftrightarrow \frac{5n}{n+1} = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 24n + 24 = 25n \Leftrightarrow n = 24$ . 4,8 é o termo de ordem 24.

**c)** 
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{5n}{n+1} = \frac{5n+5}{n+2} - \frac{5n}{n+1} = \frac{5n^2+5n+5n+5-5n^2-10n}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tem-se, portanto, para qualquer  $n$  natural,  $u_{n+1} - u_n > 0$ , pelo que, para qualquer  $n$  natural,  $u_{n+1} > u_n$ . A sucessão é crescente.

**d)** Tem-se, para qualquer  $n$  natural:  $u_n < 5 \Leftrightarrow \frac{5n}{n+1} < 5 \Leftrightarrow 5n < 5n + 5$ , o que é verdade.

**e)** Como a sucessão é crescente, o primeiro termo é um minorante da sucessão.  
Como, para qualquer  $n$  natural,  $u_n < 5$ , 5 é um majorante da sucessão.  
Como a sucessão é minorada e é majorada, podemos concluir que a sucessão é limitada.

- f) 5 é limite de  $(u_n)$  se, para qualquer número real  $\delta > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 5| < \delta$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $\delta > 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |u_n - 5| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{5n}{n+1} - 5 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{5n}{n+1} - \frac{5n+5}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{5n-5n-5}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n+1} < \delta \Leftrightarrow 5 < \delta(n+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n\delta + \delta > 5 \Leftrightarrow n > \frac{5-\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Portanto,  $n > \frac{5-\delta}{\delta} \Leftrightarrow |u_n - 5| < \delta$ , pelo que  $n > \frac{5-\delta}{\delta} \Rightarrow |u_n - 5| < \delta$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{5-\delta}{\delta}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow |u_n - 5| < \delta$ .  
Está confirmado que  $u_n \rightarrow 5$ .

- g) Neste caso  $\delta = 0,01$ , pelo que a partir da ordem  $\frac{5-\delta}{\delta} = \frac{5-0,01}{0,01} = 499$  os termos da sucessão pertencem à vizinhança, ou seja, a partir da ordem 500 (inclusive).

84. a) 3 é limite de  $(u_n)$  se, para qualquer número real  $\delta > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $\delta > 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |u_n - 3| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{6n+5}{2n+1} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{6n+5}{2n+1} - \frac{6n+3}{2n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{6n+5-6n-3}{2n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2}{2n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{2n+1} < \delta \Leftrightarrow 2 < \delta(2n+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2n\delta + \delta > 2 \Leftrightarrow n > \frac{2-\delta}{2\delta} \end{aligned}$$

Portanto,  $n > \frac{2-\delta}{2\delta} \Leftrightarrow |u_n - 3| < \delta$ , pelo que  $n > \frac{2-\delta}{2\delta} \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{2-\delta}{2\delta}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$ .  
Está confirmado que  $u_n \rightarrow 3$ .

- b) Como  $u_n \rightarrow 3$ ,  $(u_n)$  é convergente.  
Logo  $(u_n)$  é limitada, pois toda a sucessão convergente é limitada.

85. a) Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 > 2 \Leftrightarrow 5 > 2$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n > 2$

Tese de indução:  $u_{n+1} > 2$

Demonstração:  $u_n > 2 \Rightarrow 4 + u_n > 6 \Rightarrow \frac{4+u_n}{3} > \frac{6}{3} \Rightarrow u_{n+1} > 2$

- b) Tem-se, para qualquer número natural  $n$ :  $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{4+u_n}{3} < u_n \Leftrightarrow 4 + u_n < 3u_n \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2u_n > 4 \Leftrightarrow u_n > 2$ , o que é verdade.

- c) Como  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ , a sucessão  $(u_n)$  é minorada (2 é minorante da sucessão).  
Como toda a sucessão decrescente e minorada é convergente, a sucessão  $(u_n)$  é convergente.

- 86. a)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $v_1 > \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4 > \frac{4}{9}$ , o que é verdade.  
 Hipótese de indução:  $v_n > \frac{4}{9}$   
 Tese de indução:  $v_{n+1} > \frac{4}{9}$   
 Demonstração:  $v_n > \frac{4}{9} \Rightarrow \sqrt{v_n} > \frac{2}{3} \Rightarrow 3\sqrt{v_n} > 2 \Rightarrow 2 + 3\sqrt{v_n} > 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{2 + 3\sqrt{v_n}}{9} > \frac{4}{9} \Rightarrow v_{n+1} > \frac{4}{9}$
- b)**  $(v_n)$  é decrescente se e só se  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} < v_n$ .  
 Para  $n = 1$ , tem-se:  $v_2 < v_1 \Leftrightarrow \frac{2 + 3\sqrt{4}}{9} < 4 \Leftrightarrow \frac{8}{9} < 4$ , o que é verdade.  
 Hipótese de indução:  $v_{n+1} < v_n$   
 Tese de indução:  $v_{n+2} < v_{n+1}$   
 Demonstração:  $v_{n+1} < v_n \Rightarrow \sqrt{v_{n+1}} < \sqrt{v_n} \Rightarrow 3\sqrt{v_{n+1}} < 3\sqrt{v_n} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 + 3\sqrt{v_{n+1}} < 2 + 3\sqrt{v_n} \Rightarrow \frac{2 + 3\sqrt{v_{n+1}}}{9} < \frac{2 + 3\sqrt{v_n}}{9} \Rightarrow v_{n+2} < v_{n+1}$
- c)** Como  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > \frac{4}{9}$ , a sucessão  $(v_n)$  é minorada  $\left(\frac{4}{9}\right.$  é minorante da sucessão $\left.)\right)$ .  
 Como toda a sucessão decrescente e minorada é convergente, a sucessão  $(v_n)$  é convergente.
- 87. a)** Como a sucessão  $(a_n)$  é crescente, tem-se:  $\forall n \in \mathbb{N}, a_1 \leq a_n$ .  
 Como a sucessão  $(b_n)$  é decrescente, tem-se:  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq b_1$ .  
 Portanto, tem-se:  $\forall n \in \mathbb{N}, a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ .  
 Logo,  $a_1$  é um minorante e  $b_1$  é um majorante de ambas as sucessões, pelo que as duas sucessões são limitadas.
- b)** As sucessões  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são convergentes pois são monótonas e limitadas.
- 88.** Como  $(v_n)$  é uma sucessão convergente, podemos concluir que  $(v_n)$  é uma sucessão limitada, pelo que existem números reais  $a$  e  $b$  tais que  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq v_n \leq b$ .  
 Como  $(u_n)$  é também uma sucessão limitada, existem números reais  $c$  e  $d$  tais que  $\forall n \in \mathbb{N}, c \leq u_n \leq d$ .  
 Portanto,  $\forall n \in \mathbb{N}, a + c \leq u_n + v_n \leq b + d$  pelo que a sucessão  $(w_n)$  é limitada.

- 89. a)**  $(x_n)$  tem limite  $+\infty$  se, para qualquer número real  $L > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow x_n > L$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $L > 0$ , tem-se:

$$x_n > L \Leftrightarrow 2n - 5 > L \Leftrightarrow n > \frac{L+5}{2}$$

$$\text{Portanto, } n > \frac{L+5}{2} \Leftrightarrow x_n > L, \text{ pelo que } n > \frac{L+5}{2} \Rightarrow x_n > L.$$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{L+5}{2}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow x_n > L$ .

Está confirmado que  $x_n \rightarrow +\infty$ .

- b)**  $(y_n)$  tem limite  $+\infty$  se, para qualquer número real  $L > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow y_n > L$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $L > 0$ , tem-se:

$$y_n > L \Leftrightarrow (n+1)^2 > L \Leftrightarrow n+1 > \sqrt{L} \Leftrightarrow n > \sqrt{L} - 1$$

$$\text{Portanto, } n > \sqrt{L} - 1 \Leftrightarrow y_n > L, \text{ pelo que } n > \sqrt{L} - 1 \Rightarrow y_n > L.$$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\sqrt{L} - 1$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow y_n > L$ .

Está confirmado que  $y_n \rightarrow +\infty$ .

- 90. a)**  $(u_n)$  tem limite  $-\infty$  se, para qualquer número real  $L > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $L > 0$ , tem-se:

$$u_n < -L \Leftrightarrow 3 - 4n < -L \Leftrightarrow -4n < -L - 3 \Leftrightarrow 4n > L + 3 \Leftrightarrow n > \frac{L+3}{4}$$

$$\text{Portanto, } n > \frac{L+3}{4} \Leftrightarrow u_n < -L, \text{ pelo que } n > \frac{L+3}{4} \Rightarrow u_n < -L.$$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\frac{L+3}{4}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow u_n < -L$ .

Está confirmado que  $u_n \rightarrow -\infty$ .

- b)**  $(v_n)$  tem limite  $-\infty$  se, para qualquer número real  $L > 0$ , existir uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n < -L$ .

Ora, para qualquer número natural  $n$  e para qualquer número real  $L > 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} v_n < -L &\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-n^3} < -L \Leftrightarrow 1-n^3 < -L^3 \Leftrightarrow -n^3 < -L^3 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^3 > L^3 + 1 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{L^3 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } n > \sqrt[3]{L^3 + 1} \Leftrightarrow v_n < -L, \text{ pelo que } n > \sqrt[3]{L^3 + 1} \Rightarrow v_n < -L$$

Seja  $p$  um número natural maior que  $\sqrt[3]{L^3 + 1}$ . Tem-se  $n \geq p \Rightarrow v_n < -L$ .

Está confirmado que  $v_n \rightarrow -\infty$ .

- 91.** Seja  $L$  um número real positivo (qualquer).

Como  $u_n \rightarrow +\infty$ , existe uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$ .

Uma vez que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$ , tem-se:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n \geq u_n > L$ .

Portanto, existe uma ordem  $p$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n > L$ .

Logo,  $v_n \rightarrow +\infty$ .

92. Se a sucessão  $(u_n)$  fosse limitada, seria majorada, pelo que existiria um número real positivo  $L$  maior que todos os termos da sucessão. Ora, tal não pode acontecer, pois, como  $u_n \rightarrow +\infty$ , existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são superiores a  $L$ .

**Pág. 71**

93. a)  $\lim (3) = 3$
- b)  $\lim (\pi + 1) = \pi + 1$
- c)  $\lim (\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3} - 2$
- d)  $\lim (4n) = +\infty$
- e)  $\lim (-3n) = -\infty$
- f)  $\lim (5n - 1) = +\infty$
- g)  $\lim (-3 + 2n) = +\infty$
- h)  $\lim (3 - 5n) = -\infty$
- i)  $\lim \left( \frac{1}{2}n - \frac{4}{3} \right) = +\infty$
- j)  $\lim \left( 5 - \frac{n}{20} \right) = \lim \left( 5 - \frac{1}{20}n \right) = -\infty$
- k)  $\lim \frac{n+3}{7} = \lim \left( \frac{1}{7}n + \frac{3}{7} \right) = +\infty$
- l)  $\lim \frac{5-2n}{8} = \lim \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{4}n \right) = -\infty$
- m)  $\lim \frac{7}{2n-5} = 0$
- n)  $\lim \frac{4-3n}{2n} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
- o)  $\lim \frac{4n}{1-2n} = \frac{4}{-2} = -2$
- p)  $\lim \frac{n}{8-5n} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$
- q)  $\lim (n^3) = +\infty$
- r)  $\lim (\sqrt[3]{n}) = \lim \left( n^{\frac{1}{3}} \right) = +\infty$
- s)  $\lim (-\sqrt[4]{n}) = \lim \left( -n^{\frac{1}{4}} \right) = -\infty$
- t)  $\lim \frac{1}{n^2} = \lim (n^{-2}) = 0$

$$\text{u)} \quad \lim \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}} = \lim \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim \left( n^{-\frac{5}{6}} \right) = 0$$

$$\text{v)} \quad \lim \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim \left( n^{\frac{1}{2}} \right) = +\infty$$

$$\text{w)} \quad \lim \frac{\sqrt{n^3}}{n} = \lim \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n} = \lim \left( n^{\frac{1}{2}} \right) = +\infty$$

$$\text{x)} \quad \lim \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim [(-1)^n \times n^{-2}] = 0$$

$$\text{y)} \quad \lim \frac{2 + (-1)^n}{n} = \lim [(2 + (-1)^n) \times n^{-1}] = 0$$

$$\text{z)} \quad \lim \frac{\cos(n) \times \sqrt{n}}{n} = \lim [\cos(n) \times n^{\frac{1}{2}-1}] = \lim [\cos(n) \times n^{-\frac{1}{2}}] = 0$$

$$94. \quad \text{a)} \quad \lim (u_n) = \lim \frac{3n+2}{5n} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b)} \quad \lim (v_n) = \lim \frac{5}{8n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} 95. \quad \lim (u_n) = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \lim \frac{an+b}{4n-3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 6 \quad \text{logo} \quad u_n = \frac{6n+b}{4n-3} \\ u_2 - u_1 = 6 &\Leftrightarrow \frac{12+b}{8-3} - \frac{6+b}{4-3} = 6 \Leftrightarrow \frac{12+b}{5} - 6 - b = 6 \Leftrightarrow 12 + b - 30 - 5b = 30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4b = -48 \Leftrightarrow b = -12 \\ \text{Então } a = 6 \text{ e } b = -12. \end{aligned}$$

96. a) Designemos por  $r_a$  a razão da progressão  $(a_n)$  e por  $r_b$  a razão da progressão  $(b_n)$ .

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r_a \quad \text{e} \quad b_n = b_1 + (n-1) \times r_b \quad \text{e} \quad a_n = b_n + 2n - 2$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lim \frac{b_n + 2n - 2}{b_n} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lim \frac{b_1 + (n-1) \times r_b + 2n - 2}{b_1 + (n-1) \times r_b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{b_1 + n r_b - r_b + 2n - 2}{b_1 + n r_b - r_b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lim \frac{(r_b + 2)n + b_1 - r_b - 2}{r_b n + b_1 - r_b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_b + 2}{r_b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3r_b + 6 = 4r_b \Leftrightarrow r_b = 6$$

$$a_n = b_1 + (n-1) \times 6 + 2n - 2 = b_1 + 6n - 6 + 2n - 2 = 8n - 8 + b_1$$

$$r_a = a_{n+1} - a_n = 8(n+1) - 8 + b_1 - 8n + 8 - b_1 = 8$$

As razões das progressões  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são 8 e 6 respetivamente.

$$\text{b)} \quad \frac{\sum_{k=1}^9 a_k}{\sum_{k=1}^8 b_k} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{a_1+a_9}{2} \times 9}{\frac{b_1+b_8}{2} \times 8} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{a_1+a_9}{2} = b_1 + b_8$$

Mas como  $a_1 = b_1 + 2 \times 1 - 2 = b_1$  e

$a_9 = b_9 + 2 \times 9 - 2 = b_9 + 16 = b_1 + 8 \times 6 + 16 = b_1 + 64$  e

$b_8 = b_1 + 7 \times 6 = b_1 + 42$

Vem que  $\frac{a_1+a_9}{2} = b_1 + b_8 \Leftrightarrow \frac{b_1+b_1+64}{2} = b_1 + b_1 + 42 \Leftrightarrow b_1 + 32 = 2b_1 + 42 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b_1 = -10$

$a_1 = b_1 = -10$  e  $r_a = 8$ , logo o termo geral de  $(a_n)$  será  $a_n = -10 + (n-1) \times 8 = 8n - 18$ .

$b_1 = -10$  e  $r_b = 6$ , logo o termo geral de  $(b_n)$  será  $b_n = -10 + (n-1) \times 6 = 6n - 16$ .

**97.** Designemos por  $(u_n)$  a sucessão de termo geral  $u_n = 1 - 2n$ .

Vejamos que se trata de uma progressão aritmética.

$u_{n+1} - u_n = 1 - 2(n+1) - 1 + 2n = -2$ , logo  $(u_n)$  é uma progressão aritmética.

A sucessão  $(s_n)$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de  $(u_n)$ .

$$s_n = \frac{u_1+u_n}{2} \times n = \frac{-1+1-2n}{2} \times n = -n^2$$

$$\text{a)} \quad \lim [(s_n)^3] = \lim [(-n^2)^3] = \lim (-n^6) = -\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim [(s_n)^4] = \lim [(-n^2)^4] = \lim (n^8) = +\infty$$

$$\text{c)} \quad \lim \sqrt[3]{s_n} = \lim \sqrt[3]{-n^2} = \lim \left(-n^{\frac{2}{3}}\right) = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{\sqrt[3]{s_n}}{s_n} = \lim \frac{\sqrt[3]{-n^2}}{-n^2} = \lim \frac{-\sqrt[3]{n^2}}{-n^2} = \lim \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2} = \lim \left(n^{\frac{2}{3}-2}\right) = \lim \left(n^{-\frac{4}{3}}\right) = 0$$

## Pág. 73

$$\text{98. a)} \quad \lim \left(5 + \frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{1}{+\infty} = 5 + 0 = 5$$

$$\text{b)} \quad \lim \left(\frac{4n-3}{2n+7} + \frac{6n}{n+4}\right) = \lim \frac{4n-3}{2n+7} + \lim \frac{6n}{n+4} = 2 + 6 = 8$$

$$\text{c)} \quad \lim \left[\frac{5-3n}{n+1} \times \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = \lim \frac{5-3n}{n+1} \times \lim \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3 \times \left(2 - \frac{1}{+\infty}\right) =$$

$$= -3 \times (2 - 0) = -6$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{8 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{(-1)^n}{n+3}} = \frac{\lim \left(8 + \frac{1}{n}\right)}{\lim \left(2 - \frac{(-1)^n}{n+3}\right)} = \frac{8 + \frac{1}{+\infty}}{\lim \left(2 - (-1)^n \frac{1}{n+3}\right)} =$$

$$= \frac{8+0}{2-0} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \lim \left[ \left( \frac{3n-5}{2n+1} + \frac{1}{2} + n^{-\frac{6}{5}} \right)^2 \right] &= \left( \lim \frac{3n-5}{2n+1} + \lim \frac{1}{2} + \lim \left( n^{-\frac{6}{5}} \right) \right)^2 = \\ &= \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 0 \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \lim \sqrt[3]{\frac{8n-14}{n+23}} = \sqrt[3]{\lim \frac{8n-14}{n+23}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$99. \quad \text{a)} \quad \lim \left( n^5 + \frac{3n}{n+1} \right) = +\infty + 3 = +\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim \left( \frac{6n-7}{3n+9} - \sqrt{n} \right) = 2 - (+\infty) = 2 - \infty = -\infty$$

$$\text{c)} \quad \lim (n^2 + \sqrt[3]{n}) = \lim (n^2 + n^{\frac{1}{3}}) = +\infty + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim (1 - 3n - \sqrt{n}) = 1 - (+\infty) - (+\infty) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$

$$\text{e)} \quad \lim (\sqrt{n} - 3) = \lim \left( n^{\frac{1}{2}} - 3 \right) = +\infty - 3 = +\infty$$

$$\text{f)} \quad \lim (\sqrt{2} - n^3) = \sqrt{2} - (+\infty) = \sqrt{2} - \infty = -\infty$$

$$\text{g)} \quad \lim (n^2 \sqrt[5]{n}) = \lim \left( n^2 n^{\frac{1}{5}} \right) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim [\sqrt{n} (1 - 4n)] = \lim \left[ n^{\frac{1}{2}} (1 - 4n) \right] = +\infty \times (1 - (+\infty)) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{i)} \quad \lim \left[ \frac{\sqrt{2}n-1}{2n+9} \sqrt[3]{n} \right] = \lim \left[ \frac{\sqrt{2}n-1}{2n+9} \times n^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{j)} \quad \lim (8 \sqrt{n}) = \lim \left( 8 \times n^{\frac{1}{2}} \right) = 8 \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{k)} \quad \lim \left[ \frac{2n+5}{n+1} (6-n) \right] = 2 \times (6 - (+\infty)) = 2 \times (6 - \infty) = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{l)} \quad \lim \left[ \frac{\sqrt{2}n-1}{2n+9} \sqrt[3]{n} \right] = \lim \left[ \frac{\sqrt{2}n-1}{2n+9} \times n^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{m)} \quad \lim [(4n-3)^8] = (+\infty)^8 = +\infty$$

$$\text{n)} \quad \lim \left( \sqrt[3]{1-3n} \right) = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$$

$$\text{o)} \quad \lim (2 - \sqrt{n+3})^6 = (2 - \sqrt{+\infty})^6 = (-\infty)^6 = +\infty$$

$$\text{p)} \quad \lim (2n^3 - 3n^2 - 5) = +\infty$$

$$\text{q)} \lim(1 - 9n + 4n^2 - 6n^4) = \lim(-6n^4 + 4n^2 - 9n + 1) = -\infty$$

$$\text{r)} \lim \frac{2n^5 - 3n^3 - 12}{4} = \lim \left( \frac{1}{2}n^5 - \frac{3}{4}n^3 - 3 \right) = +\infty$$

$$100. \text{ a)} \lim \left( 2 + \frac{1}{5-n^2} \right) = 2 + \frac{1}{-\infty} = 2 + 0 = 2$$

$$\text{b)} \lim \left( \frac{6n-5}{1-2n} - \frac{3}{\sqrt{n+4}} \right) = -3 - \frac{3}{\sqrt{+\infty}} = -3 - \frac{3}{+\infty} = -3 - 0 = -3$$

$$\text{c)} \lim \left( \frac{5n}{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{n^3+6n}} \right) = 5 \times \frac{1}{\sqrt{+\infty}} = 5 \times \frac{1}{+\infty} = 5 \times 0 = 0$$

$$101. \text{ a)} \lim \frac{5n^3-2n+1}{3-n^3} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^3 \left( 5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left( \frac{3}{n^3} - 1 \right)} = \lim \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} - 1} = \frac{5 - \frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{\frac{3}{+\infty} - 1} =$$

$$= \frac{5-0+0}{0-1} = -5$$

$$\text{b)} \lim \frac{3+7n}{n^2+2n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n \left( \frac{3}{n} + 7 \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{\frac{3}{n} + 7}{n \left( 1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{\frac{3}{+\infty} + 7}{+\infty \left( 1 + \frac{2}{+\infty} \right)} = \frac{0+7}{+\infty(1+0)} =$$

$$= \frac{7}{+\infty} = 0$$

$$\text{c)} \lim \frac{4n^2+n-9}{3n-2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^2 \left( 4 + \frac{1}{n} - \frac{9}{n^2} \right)}{n \left( 3 - \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{n \left( 4 + \frac{1}{n} - \frac{9}{n^2} \right)}{3 - \frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{+\infty \left( 4 + \frac{1}{+\infty} - \frac{9}{+\infty} \right)}{3 - \frac{2}{+\infty}} = \frac{+\infty(4+0-0)}{3-0} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

$$\text{d)} \lim \frac{6n^3-5n+4}{1-2n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^3 \left( 6 - \frac{5}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)}{n \left( \frac{1}{n} - 2 \right)} = \lim \frac{n^2 \left( 6 - \frac{5}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)}{\frac{1}{n} - 2} =$$

$$= \frac{+\infty \left( 6 - \frac{5}{+\infty} + \frac{4}{+\infty} \right)}{\frac{1}{+\infty} - 2} = \frac{+\infty(6-0+0)}{0-2} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty$$

$$\text{e)} \lim \frac{1+4n-7n^3}{1+8n-9n^4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^3 \left( \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} - 7 \right)}{n^4 \left( \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^3} - 9 \right)} = \lim \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} - 7}{n \left( \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^3} - 9 \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{+\infty} + \frac{4}{+\infty} - 7}{+\infty \left( \frac{1}{+\infty} + \frac{8}{+\infty} - 9 \right)} = \frac{0+0-7}{+\infty(0+0-9)} = \frac{-7}{-\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim \sqrt{\frac{25n^2+n}{9n^2+3}} &\stackrel{\infty}{=} \sqrt{\lim \frac{25n^2+n}{9n^2+3}} = \sqrt{\lim \frac{n^2\left(25+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(9+\frac{3}{n^2}\right)}} = \sqrt{\lim \frac{25+\frac{1}{n}}{9+\frac{3}{n^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{25+\frac{1}{+\infty}}{9+\frac{3}{+\infty}}} = \sqrt{\frac{25+0}{9+0}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim \frac{n}{\sqrt{n}+1} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)} = \lim \frac{n^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \\ &= \frac{+\infty}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim \frac{\sqrt{2n}+1}{2n-1} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{n^{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{+\infty}}{+\infty\left(2-\frac{1}{+\infty}\right)} = \frac{\sqrt{2}+0}{+\infty(2-0)} = \frac{\sqrt{2}}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim \frac{\sqrt{9n^2+n}}{1-3n} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(9+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(\frac{1}{n}-3\right)} = \lim \frac{n\sqrt{9+\frac{1}{n}}}{n\left(\frac{1}{n}-3\right)} = \lim \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-3} = \\ &= \frac{\sqrt{9+\frac{1}{+\infty}}}{\frac{1}{+\infty}-3} = \frac{\sqrt{9+0}}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim \frac{3\sqrt{n}+4}{\sqrt{3n}-5} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{\sqrt{n}\left(3+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3}-\frac{5}{\sqrt{n}}\right)} = \lim \frac{3+\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3}-\frac{5}{\sqrt{n}}} = \frac{3+\frac{4}{+\infty}}{\sqrt{3}-\frac{5}{+\infty}} = \\ &= \frac{3+0}{\sqrt{3}-0} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+n+2}+n} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+n} = \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+n} = \\ &= \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{2+\frac{3}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{2}{+\infty}}+1} = \\ &= \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \lim \frac{n}{\sqrt{1+n^3}} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n}{\sqrt{n^3\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{n\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{+\infty\left(\frac{1}{+\infty}+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{+\infty(0+1)}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$102. \text{ a) } \lim \frac{\frac{4}{3n-5}}{\frac{2}{1-6n}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim \left( \frac{4}{3n-5} \times \frac{1-6n}{2} \right) = \lim \left( \frac{2-12n}{3n-5} \right) = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \frac{\frac{8n-3}{6n+5} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{3n+2}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{\frac{24n-9-24n-20}{18n+15}}{\frac{1}{3n+2}} = \lim \frac{\frac{-29}{18n+15}}{\frac{1}{3n+2}} = \\ &= \lim \frac{-29(3n+2)}{18n+15} = \lim \frac{-87n-58}{18n+15} = \frac{-87}{18} = -\frac{29}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \frac{\frac{4n+1}{n^2-2}}{\frac{3n}{n+1} - 3} &= \lim \frac{\frac{4n+1}{n^2-2}}{\frac{3n-3n-3}{n+1}} = \lim \left( \frac{4n+1}{n^2-2} \times \frac{n+1}{-3} \right) = \\ &= \lim \frac{4n^2+4n+n+1}{-3n^2+6} = \lim \frac{4n^2+5n+1}{-3n^2+6} = \lim \frac{n^2 \left( 4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( -3 + \frac{6}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{-3 + \frac{6}{n^2}} = \frac{4+0+0}{-3+0} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

## Pág. 74

$$103. \text{ a) } \lim[(n^2 + 3n) \times n^{-2}]^{\infty \times 0} \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim \frac{n^2 + 3n}{n^2} = \lim \frac{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} \right)}{n^2} = \lim \left( 1 + \frac{3}{n} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \left[ \left( \frac{8n-5}{4n-3} - 2 \right) \times (5n-4) \right]^{\infty \times 0} &\stackrel{\infty \times 0}{=} \lim \left[ \frac{8n-5-8n+6}{4n-3} \times (5n-4) \right] = \lim \frac{5n-4}{4n-3} = \\ &= \lim \frac{n \left( 5 - \frac{4}{n} \right)}{n \left( 4 - \frac{3}{n} \right)} = \lim \frac{5 - \frac{4}{n}}{4 - \frac{3}{n}} = \lim \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$104. \text{ a) } \lim[n - (n-5)]^{\infty} \stackrel{\infty}{=} \lim(n - n + 5) = \lim(5) = 5$$

$$\text{b) } \lim[(n+3)(n-2) - (n-1)^2]^{\infty} \stackrel{\infty}{=} \lim(n^2 + n - 6 - n^2 + 2n - 1) = \lim(3n - 7) = +\infty$$

$$\text{c) } \lim[4n^2 - (2n+3)^2]^{\infty} \stackrel{\infty}{=} \lim(4n^2 - 4n^2 - 12n - 9) = \lim(-12n - 9) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim(\sqrt{n} - \sqrt{n+5})^{\infty} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+5})(\sqrt{n} + \sqrt{n+5})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+5}} = \lim \frac{n - n - 5}{\sqrt{n} + \sqrt{n+5}} = \\ &= \lim \frac{-5}{\sqrt{n} + \sqrt{n+5}} = \frac{-5}{+\infty + \infty} = \frac{-5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim(\sqrt{n^2+5} - n)^{\infty} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{(\sqrt{n^2+5} - n)(\sqrt{n^2+5} + n)}{\sqrt{n^2+5} + n} = \lim \frac{n^2+5-n^2}{\sqrt{n^2+5} + n} = \\ &= \lim \frac{5}{\sqrt{n^2+5} + n} = \frac{5}{+\infty + \infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } \lim \left( \sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{\left( \sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) \left( \sqrt{4n^2 + 3n} + 2n \right)}{\left( \sqrt{4n^2 + 3n} + 2n \right)} = \lim \frac{4n^2 + 3n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} = \\
&= \lim \frac{3n}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2 \left( 4 + \frac{3}{n} \right)} + 2n} = \lim \frac{3n}{n \sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2n} = \\
&= \lim \frac{3n}{n \left( \sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2 \right)} = \lim \frac{3}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } \lim \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{n + 1} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)}}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = \\
&= \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } \lim \frac{\sqrt{n^2 + 6n} - 7n}{1 - 2n} &\stackrel{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2 \left( 1 + \frac{6}{n} \right)} - 7n}{n \left( \frac{1}{n} - 2 \right)} = \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{6}{n}} - 7n}{n \left( \frac{1}{n} - 2 \right)} = \\
&= \lim \frac{n \left( \sqrt{1 + \frac{6}{n}} - 7 \right)}{n \left( \frac{1}{n} - 2 \right)} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} - 7}{\frac{1}{n} - 2} = \frac{\sqrt{1+0}-7}{0-2} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i) } \lim \frac{\sqrt{n^4 + 3n^2 + 1} - n}{n^2 + 3n + 5} &\stackrel{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{\sqrt{n^4 \left( 1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)} - n}{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \lim \frac{n^2 \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} - n}{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \\
&= \lim \frac{n \left( n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} - 1 \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} - 1}{n \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \\
&= \lim \left[ \frac{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{n \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} - \frac{1}{n \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} \right] = \\
&= \lim \left[ \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - \frac{1}{n \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} \right] = \left[ \frac{\sqrt{1+0+0}}{1+0+0} - \frac{1}{+\infty(1+0+0)} \right] = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

$$\text{105. a) } \lim |5 - n| = |5 - (+\infty)| = |-\infty| = +\infty$$

**b)** Tendo em conta que:

Se  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são sucessões que diferem apenas num número finito de termos, então

- $u_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow v_n \rightarrow -\infty$
- $u_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow v_n \rightarrow +\infty$
- $u_n \rightarrow l \Leftrightarrow v_n \rightarrow l \quad (l \in \mathbb{R})$
- $u_n$  não tem limite  $\Leftrightarrow v_n$  não tem limite

$$|2n - 60| = \begin{cases} 2n - 60 & \text{se } 2n - 60 \geq 0 \\ -2n + 60 & \text{se } 2n - 60 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2n - 60 & \text{se } n \geq 30 \\ -2n + 60 & \text{se } n < 30 \end{cases}$$

$$|10 - n| = \begin{cases} 10 - n & \text{se } 10 - n \geq 0 \\ -10 + n & \text{se } 10 - n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 10 - n & \text{se } n \leq 10 \\ -10 + n & \text{se } n > 10 \end{cases}$$

$$\lim \frac{|2n - 60| + |10 - n|}{3n - 2} = \lim \frac{2n - 60 - 10 + n}{3n - 2} = \lim \frac{3n - 70}{3n - 2} = \frac{3}{3} = 1$$

**c)** Tendo em conta que:

Se  $(u_n)$  é uma sucessão limitada e se  $v_n \rightarrow 0$ , então  $\lim (u_n \times v_n) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^2 + \cos n}{n^2 + 3n} &= \lim \left( \frac{n^2}{n^2 + 3n} + \cos n \times \frac{1}{n^2 + 3n} \right) \\ &= \lim \left( \frac{n^2}{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} \right)} + \cos n \times \frac{1}{n^2 + 3n} \right) = \lim \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} + \cos n \times \frac{1}{n^2 + 3n} \right) = \\ &= \lim \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} + \lim \left( \cos n \times \frac{1}{n^2 + 3n} \right) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{106. a)} \quad \lim_{k=1}^n (2 - 3k) &= \lim \left[ \frac{(2-3 \times 1) + (2-3n)}{2} \times n \right] = \lim \left( \frac{-1+2-3n}{2} \times n \right) = \\ &= \lim \left( \frac{-1+2-3n}{2} \times n \right) = \lim \left( \frac{1-3n}{2} \times n \right) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2-3n} &= \lim \frac{\frac{(2 \times 1 - 1) + (2n-1)}{2} \times n}{n^2-3n} = \lim \frac{n^2}{n^2-3n} = \\ &= \lim \frac{n^2}{n^2 \left( 1 - \frac{3}{n} \right)} = \lim \frac{1}{1 - \frac{3}{n}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \lim \frac{n^2 + \sum_{k=1}^n (3k+4)}{4n^2-5} &= \lim \frac{n^2 + \frac{(3 \times 1 + 4) + (3n+4)}{2} \times n}{4n^2-5} = \\ &= \lim \frac{n^2 + \frac{3n^2+11n}{2}}{4n^2-5} = \lim \frac{\frac{5}{2}n^2 + \frac{11}{2}n}{4n^2-5} = \lim \frac{n^2 \left( \frac{5}{2} + \frac{11}{2n} \right)}{n^2 \left( 4 - \frac{5}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{\frac{5}{2} + \frac{11}{2n}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\frac{5}{2} + 0}{4 - 0} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

**107. a<sub>1</sub>)**  $\lim(u_n - v_n + u_n \times v_n) = 2 - 3 + 2 \times 3 = 5$

**a<sub>2</sub>)**  $\lim \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

**a<sub>3</sub>)**  $\lim \frac{u_n}{v_n - 3} = \frac{2}{3^+ - 3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

**a<sub>4</sub>)**  $\lim \frac{u_n}{n + v_n} = \frac{2}{\lim n + 3} = \frac{2}{+\infty} = 0$

**b)**  $\lim w_n = \lim \frac{a n + 4}{2n - 5} = \frac{a}{2}$

$$\lim \frac{u_n + w_n}{v_n} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim u_n + \lim w_n}{\lim v_n} = 4 \Leftrightarrow \frac{2 + \frac{a}{2}}{3} = 4 \Leftrightarrow 2 + \frac{a}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 10 \Leftrightarrow a = 20$$

**108. a)**  $\frac{1}{n}$  (por exemplo)

**b)**  $-\frac{1}{n}$  (por exemplo)

**c)**  $3 + \frac{1}{n}$  (por exemplo)

**d)**  $3 - \frac{1}{n}$  (por exemplo)

**e)**  $1 + \frac{(-1)^n}{n}$  (por exemplo)

**f)**  $n + (-1)^n$  (por exemplo)

**109. a)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n > 0$

Tese de indução:  $u_{n+1} > 0$

Demonstração:  $u_n > 0 \Rightarrow u_n + 1 > 0$ .

Como  $u_n > 0$  e  $u_n + 1 > 0$ , vem  $\frac{u_n}{u_n + 1} > 0$ , pelo que  $u_{n+1} > 0$ .

**b)** Tem-se, para qualquer número natural  $n$ :

$$u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_n + 1} < u_n \Leftrightarrow u_n < u_n(u_n + 1) \Leftrightarrow 1 < u_n + 1 \Leftrightarrow u_n > 0, \text{ o que verdade.}$$

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} < u_n$ , a sucessão  $(u_n)$  é decrescente.

**c)** Como, para qualquer  $n$  natural,  $u_n > 0$ , a sucessão é minorada. Como a sucessão é decrescente e minorada, a sucessão é convergente.

- d) Uma vez que a sucessão é convergente, designemos por  $a$  o seu limite.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} = a$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ pelo que } \lim u_{n+1} = \frac{\lim u_n}{\lim u_n + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a}{a+1} \Leftrightarrow a^2 + a = a \Leftrightarrow a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0. \text{ Portanto } \lim u_n = 0$$

- e)  $\lim u_n = 0$ . Como a sucessão é decrescente vem que  $\lim u_n = 0^+$ .

$$\lim v_n = \lim \left( 2 + \frac{1}{u_n} \right) = 2 + \frac{1}{0^+} = 2 + (+\infty) = +\infty$$

## Pág. 75

110. a) Para  $n = 1$ , tem-se:  $u_1 < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$ , o que é verdade.

Hipótese de indução:  $u_n < 0$

Tese de indução:  $u_{n+1} < 0$

$$\text{Demonstração: } u_n < 0 \Rightarrow \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 0$$

- b) Tem-se, para qualquer número natural  $n$ :

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}} > u_n \Leftrightarrow u_n > u_n \sqrt{1+(u_n)^2} \Leftrightarrow (*) \text{ pois } u_n < 0$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad 1 < \sqrt{1+(u_n)^2} \Leftrightarrow 1 < 1+(u_n)^2 \Leftrightarrow (u_n)^2 > 0, \text{ o que verdade.}$$

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} > u_n$ , a sucessão  $(u_n)$  é crescente.

- c) Como, para qualquer  $n$  natural,  $u_n < 0$ , a sucessão é majorada.  
Como a sucessão é crescente e majorada, a sucessão é convergente.

- d) Uma vez que a sucessão é convergente, designemos por  $a$  o seu limite.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} = a$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}} \text{ pelo que } \lim u_{n+1} = \frac{\lim u_n}{\sqrt{1+(\lim u_n)^2}} \Leftrightarrow a = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a^2} = 1 \Leftrightarrow 1+a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0. \text{ Portanto } \lim u_n = 0.$$

- e)  $\lim u_n = 0$ . Como a sucessão é crescente vem que  $\lim u_n = 0^-$ .

$$\lim v_n = \lim \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1+0}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- 111. a)**  $(w_n)$  é crescente se e só  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} > w_n$ .  
 Para  $n = 1$ , tem-se:  $w_2 > w_1 \Leftrightarrow 3 > 2$ , o que é verdade.  
 Hipótese de indução:  $w_{n+1} > w_n$   
 Tese de indução:  $w_{n+2} > w_{n+1}$

$$\text{Demonstração: } w_{n+1} > w_n \Rightarrow \frac{4}{w_{n+1}} < \frac{4}{w_n} \Rightarrow 5 - \frac{4}{w_{n+1}} > 5 - \frac{4}{w_n} \Rightarrow w_{n+2} > w_{n+1}$$

- b)** Para  $n = 1$ , tem-se:  $w_1 < 4 \Leftrightarrow 2 < 4$ , o que é verdade.  
 Hipótese de indução:  $w_n < 4$   
 Tese de indução:  $w_{n+1} < 4$

$$\text{Demonstração: } w_n < 4 \Rightarrow \frac{4}{w_n} > 1 \Rightarrow -\frac{4}{w_n} < -1 \Rightarrow 5 - \frac{4}{w_n} < 4 \Rightarrow w_{n+1} < 4$$

- c)** Como, para qualquer  $n$  natural,  $w_n < 4$ , a sucessão é majorada.  
 Como a sucessão é crescente e majorada, a sucessão é convergente.  
**d)** Uma vez que a sucessão é convergente, designemos por  $a$  o seu limite.

$$\lim w_n = \lim w_{n+1} = a$$

$$w_{n+1} = 5 - \frac{4}{w_n} \text{ pelo que } \lim w_{n+1} = 5 - \frac{4}{\lim w_n} \Leftrightarrow a = 5 - \frac{4}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{a} = 5 - a \Leftrightarrow 5a - a^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow a = 4 \vee a = 1.$$

Como a sucessão é crescente e o seu primeiro termo é 2, vem que  $\lim w_n = 4$ .

$$\text{112. } \lim \frac{(u_n)^2 - 9}{u_n - 3} = \lim \frac{(u_n - 3)(u_n + 3)}{u_n - 3} = \lim (u_n + 3) = 3 + 3 = 6$$

- 113.**  $u_n = a_n \times b_n - 3b_n = b_n(a_n - 3)$   
 Como  $a_n - 3 \rightarrow 0$  e como  $(b_n)$  é uma sucessão limitada, vem que  $u_n \rightarrow 0$ .

## Pág. 76

$$\text{114. a) } \lim (3^n) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \left[ \left( \sqrt{2} \right)^n \right] = +\infty$$

$$\text{c) } \lim (7 \times 2^n) = 7 \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim \frac{5}{4^n} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{5^{2n}}{5^n} = \lim (5^n) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim \frac{3 \times 6^{3n}}{6^{2n}} = \lim (3 \times 6^n) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim (3^{2n}) = \lim (9^n) = +\infty$$

- h)**  $\lim \frac{2^{6n+1}}{2^{3n}} = \lim (2^{3n+1}) = \lim (2 \times 2^{3n}) = \lim (2 \times 8^n) = +\infty$
- i)**  $\lim \frac{12^n}{4^n} = \lim (3^n) = +\infty$
- j)**  $\lim \frac{6^{2n}}{3^{n+1}} = \lim \frac{2^{2n} \times 3^{2n}}{3^{n+1}} = \lim (2^{2n} \times 3^{n-1}) = \lim \frac{4^n \times 3^n}{3} = \frac{(+\infty) \times (+\infty)}{3} = +\infty$
- k)**  $\lim (0, 3^n) = 0$
- l)**  $\lim (\pi - 3)^n = 0$
- m)**  $\lim \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^n \right] = 0$
- n)**  $\lim \frac{3^{n+1}}{4^n} = \lim \frac{3 \times 3^n}{4^n} = \lim \left[ 3 \times \left( \frac{3}{4} \right)^n \right] = 0$
- o)**  $\lim \frac{4^n + 3^n}{6^n} = \lim \left( \frac{4^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} \right) = \lim \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] = 0 + 0 = 0$
- p)**  $\lim (4^{-n}) = \lim \left[ \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] = 0$
- q)**  $\lim (1 + 5^{-2n}) = \lim \left[ 1 + \left( \frac{1}{5} \right)^{2n} \right] = \lim \left[ 1 + \left( \frac{1}{25} \right)^n \right] = 1 + 0 = 1$
- r)**  $\lim \frac{3 \times 2^{2n}}{2^{3n}} = \lim (3 \times 2^{-n}) = \lim \left[ 3 \times \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] = 3 \times 0 = 0$
- s)**  $\lim \frac{2^{2n+1}}{2^{3n}} = \lim \frac{2 \times 2^{2n}}{2^{3n}} = \lim (2 \times 2^{-n}) = \lim \left[ 2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] = 2 \times 0 = 0$
- t)**  $\lim \frac{1 + 3^{2n}}{10^n} = \lim \left( \frac{1}{10^n} + \frac{3^{2n}}{10^n} \right) = \lim \left[ \left( \frac{1}{10} \right)^n + \left( \frac{9}{10} \right)^n \right] = 0 + 0 = 0$
- u)**  $\lim \frac{2^{4n} + 5^n}{4^{2n-1}} = \lim \left( \frac{2^{4n}}{4^{2n-1}} + \frac{5^n}{4^{2n-1}} \right) = \lim \left( \frac{4 \times 2^{4n}}{4^{2n}} + \frac{4 \times 5^n}{4^{2n}} \right) =$   
 $= \lim \left( \frac{4 \times 2^{4n}}{2^{4n}} + \frac{4 \times 5^n}{16^n} \right) = \lim \left( 4 + 4 \times \left( \frac{5}{16} \right)^n \right) = 4 + 4 \times 0 = 4$
- v)**  $\lim (3^n - 2^n) = \lim \left[ 3^n \left( 1 - \frac{2^n}{3^n} \right) \right] = \lim \left[ 3^n \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) \right] = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$
- w)**  $\lim (\pi^n \times 3^{-n}) = \lim \frac{\pi^n}{3^n} = \lim \left[ \left( \frac{\pi}{3} \right)^n \right] = +\infty$
- x)**  $\lim \frac{2^{n+3}}{2^n + 3^n} = \lim \frac{8 \times 2^n}{3^n \left( \frac{2^n}{3^n} + 1 \right)} = \lim \left[ 8 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n \times \frac{1}{\left( \frac{2}{3} \right)^n + 1} \right] = 8 \times 0 \times \frac{1}{0+1} = 0$
- y)**  $\lim \frac{5 + 3^{2n}}{9^{n-1} + 4^n} = \lim \frac{5 + 9^n}{9^{n-1} + 4^n} = \lim \frac{9^n \left( \frac{5}{9^n} + 1 \right)}{9^n \left( \frac{1}{9} + \frac{4^n}{9^n} \right)} = \lim \frac{\frac{5}{9^n} + 1}{\frac{1}{9} + \left( \frac{4}{9} \right)^n} = \frac{\frac{5}{+\infty} + 1}{\frac{1}{9} + 0} = 9$

$$115. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+0,3^n}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{4n-5} + \frac{0,3^n}{4n-5} \right) = \frac{2}{4} + \frac{0}{+\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{17+36n^2}}{3n+(\sqrt{2}-1)^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left( \frac{17}{n^2} + 36 \right)}}{n \left[ 3 + \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n} \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\frac{17}{n^2} + 36}}{n \left[ 3 + \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n} \right]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{17}{n^2} + 36}}{3 + \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n}} = \frac{\sqrt{0+36}}{3 + \frac{0}{+\infty}} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + \frac{2^n \times n}{4n-7}}{4n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(5+2^n)}{n(4-\frac{7}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+2^n}{4-\frac{7}{n}} = \frac{+\infty}{4-0} = +\infty$$

116. a) Tem-se, para qualquer número natural  $n$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2 + \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} - \left[ 2 + \left( \frac{3}{4} \right)^n \right] = \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} - \left( \frac{3}{4} \right)^n = \left( \frac{3}{4} \right)^n \left( \frac{3}{4} - 1 \right) = \\ &= \left( \frac{3}{4} \right)^n \left( -\frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Portanto,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} - a_n < 0$ , ou seja,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} < a_n$ , pelo que  $(a_n)$  é decrescente.

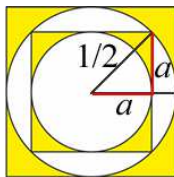
$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1}}{2 + \left( \frac{3}{4} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{4} \times \left( \frac{3}{4} \right)^n}{2 + \left( \frac{3}{4} \right)^n} = \frac{2 + \frac{3}{4} \times 0}{2 + 0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$117. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{3}{4} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{4} \frac{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right] = \frac{3}{4} \times \frac{1-0}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times 4 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ 6 \times \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ 6 \times \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} \right)^k - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ 3 \times \left( \frac{1}{2} \right)^k - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ 2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 \times \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \\ &= 1 \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$118. \text{ a) } A_1 = 1^2 - \pi \times \left( \frac{1}{2} \right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

$$\text{b)} \quad a^2 + a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



$$\begin{aligned} A_2 &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi \times \frac{2}{16}\right) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{12 - 3\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad b^2 + b^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 2b^2 = \frac{2}{16} \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \left(\left(2 \times \frac{1}{4}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{7}{4} - \frac{7\pi}{16} = \frac{28 - 7\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad A_1 &= 1 - \frac{\pi}{4} & A_2 &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = A_1 + \frac{1}{2} A_1 \\ A_3 &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = A_1 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1 \end{aligned}$$

$(A_n)$  é a sucessão que nos dá a soma dos  $n$  primeiros termos da Progressão Geométrica de primeiro termo  $A_1$  e razão  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim A_n &= \lim \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \lim \left[ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \\ &= \lim \left[ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times 2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2} \end{aligned}$$

## Pág. 77

$$119. \text{ a)} \quad \lim \sqrt[n]{3} = 1$$

$$\text{b)} \quad \lim \left[ \left( \sqrt[n]{2} \right)^5 \right] = 1^5 = 1$$

$$\text{c)} \quad \lim (1 + \sqrt[n]{0,1}) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{1}{\sqrt[n]{7} - 1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{e)} \quad \lim \frac{3n}{1-\sqrt[n]{2}} = \frac{+\infty}{1-1^+} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\text{f)} \quad \lim \left( \sqrt[n]{\frac{1}{2}} + 2^{-n} \right) = \lim \left( \sqrt[n]{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \lim \left[ \left( n^{-8} + 8^{-n} - 2 \times \left( \sqrt[n]{8} \right)^{-1} \right)^3 \right] &= \lim \left[ \left( \left( \frac{1}{n} \right)^8 + \left( \frac{1}{8} \right)^n - 2 \times \left( \sqrt[n]{8} \right)^{-1} \right)^3 \right] = \\ &= \left[ (0^8 + 0 - 2 \times (1)^{-1})^3 \right] = (-2)^3 = -8 \end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{6n}{3n - \sqrt[n]{9}} = \lim \frac{6n}{n \left( 3 - \frac{\sqrt[n]{9}}{n} \right)} = \lim \frac{6}{3 - \frac{\sqrt[n]{9}}{n}} = \frac{6}{3 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{6}{3-0} = 2$$

$$\begin{aligned} 120. \quad \lim u_n &= \lim \left( \sqrt[n]{a} + \sum_{k=1}^n a^k \right) = \lim \left( \sqrt[n]{a} + a \times \frac{1-a^n}{1-a} \right) = 1 + a \times \frac{1-0}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a} = \\ &= \frac{1-a+a}{1-a} = \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{\frac{(u_n)^2 - 1}{6 u_n}} = a &\Leftrightarrow \sqrt{\lim \frac{(u_n)^2 - 1}{6 u_n}} = a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\left( \frac{1}{1-a} \right)^2 - 1}{6 \times \frac{1}{1-a}}} = a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\frac{1}{1-2a+a^2} - 1}{\frac{6}{1-a}}} = a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\frac{1-1+2a-a^2}{(1-a)^2}}{\frac{6}{1-a}}} = a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2a-a^2}{(1-a)^2} \times \frac{1-a}{6}} = a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a(2-a)}{6(1-a)}} = a \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \frac{a(2-a)}{6(1-a)} = a^2 \Leftrightarrow \frac{2-a}{6-6a} = a \Leftrightarrow 2-a = 6a-6a^2 \Leftrightarrow 6a^2-7a+2=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49-4 \times 6 \times 2}}{12} \Leftrightarrow a = \frac{7 \pm 1}{12} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \vee a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como  $a \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  vem que  $a = \frac{2}{3}$ .

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{1}{2} < a < 1 &\Leftrightarrow -1 < -a < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-1 < 1-a < 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 1-a < \frac{1}{2} \quad \text{e} \\ \frac{1}{2} < a < 1 &\Leftrightarrow -1 < -a < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-1 < 2-a < 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < 2-a < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pelo que  $\frac{a(2-a)}{6(1-a)} > 0$ .

# Funções Reais de Variável Real

Pág. 79

1. a)  $A \cup \{-1, \sqrt{5}\}$

Nota:  $-1$  não pertence a  $A$  mas é ponto aderente a  $A$  pois, por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -1 + \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $A$  que tende para  $-1$ ; de igual forma a sucessão de termo geral  $v_n = \sqrt{5} - \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $A$  que tende para  $\sqrt{5}$ .

b)  $B$

Nota: como não existe nenhuma sucessão de elementos de  $B$  convergente para um número real que não pertença a  $B$ , a aderência de  $B$  é apenas o próprio  $B$ .

c)  $C \cup \{-2\}$

Nota:  $-2$  não pertence a  $C$  mas é ponto aderente a  $C$  pois, por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -2 + \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $C$  que tende para  $-2$ .

d)  $D \cup \{2\}$

Nota: o conjunto  $D$  é o conjunto de todos os termos da sucessão de termo geral  $u_n = \frac{2n+1}{n}$ ; como esta sucessão é convergente para 2, o 2 é ponto aderente a  $D$  embora não seja termo da sucessão.

e)  $E$

Nota: o conjunto  $E$  é o conjunto de todos os termos da sucessão de termo geral  $u_n = \frac{n^2+1}{n}$ ; como esta sucessão é divergente (tende para  $+\infty$ ) e não existe nenhuma sucessão de elementos de  $E$  convergente para um número real que não pertença a  $E$ , a aderência de  $E$  é apenas o próprio  $E$ .

f)  $\mathbb{R}$

Nota:  $-\frac{3}{2}$  não pertence a  $F$  mas é ponto aderente a  $F$  pois, por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $F$  que tende para  $-\frac{3}{2}$ ; de igual forma a sucessão de termo geral  $v_n = 2\sqrt{6} + \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $F$  que tende para  $2\sqrt{6}$ .

g)  $[1, 4]$

Nota: os números 1, 2, 3 e 4 não pertencem a  $G$  mas são pontos aderentes a  $G$  pois, por exemplo, as sucessões de termos gerais  $u_n = 1 + \frac{1}{2n}$ ,  $v_n = 2 + \frac{1}{2n}$ ,  $w_n = 3 + \frac{1}{2n}$ ,  $x_n = 4 - \frac{1}{2n}$ , são sucessões de elementos de  $G$  que tendem respetivamente para 1, 2, 3 e 4.

h)  $\mathbb{R}$

Nota: os números racionais não pertencem a  $H$  mas são pontos aderentes a  $H$  pois, por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $H$  (números irracionais) que tende para o número racional  $\frac{1}{2}$ .

i)  $\mathbb{Q}$

Nota: os números inteiros não pertencem a  $I$  mas são pontos aderentes a  $I$  pois, por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = 1 + \frac{1}{3n}$  é uma sucessão de elementos de  $I$  que tende para o número inteiro 1.

j)  $J \cup \{-1, 1\}$

Nota: o conjunto  $J$  é o conjunto de todos os termos da sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

$$J = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots \right\} = \\ = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \dots \right\} \cup \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots \right\}$$

A sucessão de termo geral  $v_n = -\frac{2n-1}{2n}$  é uma sucessão de elementos de  $J$  que converge para  $-1$ , pelo que o  $-1$  é ponto aderente a  $J$  embora não seja termo da sucessão  $u_n$ ; de igual forma a sucessão de termo geral  $w_n = \frac{2n}{2n+1}$  é uma sucessão de elementos de  $J$  que converge para 1, pelo que o 1 é ponto aderente a  $J$  embora não seja termo da sucessão  $u_n$ .

2. a) Sim porque 0 é aderente a  $A$ . Termo geral de uma sucessão de elementos de  $A$  que tenha limite 0 :  $u_n = -\frac{1}{n}$
- b) Sim porque  $-1$  é aderente a  $A$ . Termo geral de uma sucessão de elementos de  $A$  que tenha limite  $-1$  :  $v_n = -1 + \frac{1}{n}$
- c) Sim porque  $\frac{1}{2}$  é aderente a  $A$ . Termo geral de uma sucessão de elementos de  $A$  que tenha limite  $\frac{1}{2}$  :  $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}$
- d) Sim porque 1 é aderente a  $A$ . Termo geral de uma sucessão de elementos de  $A$  que tenha limite 1 :  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$
- e) Não porque 2 não é aderente a  $A$ .
- f) Sim porque 3 é aderente a  $A$ . Termo geral de uma sucessão de elementos de  $A$  que tenha limite 3 :  $k_n = 3$
- g) Não porque 1, 1 não é aderente a  $A$ .
- h) Não porque  $A$  é majorado.
3. Falso porque a aderência de  $A$  é  $A \cup \{1\}$  e o conjunto  $A \cup \{1\}$  não é igual a  $[1, 2]$ . Basta ver, por exemplo, que o intervalo  $[1, 2]$  contém números irracionais e o conjunto  $A$  não.
4. Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -1 + \frac{1}{n}$  é uma sucessão de elementos de  $A$  que tende para  $-1$ , portanto,  $-1$  é aderente a  $A$ . 2,01 não é aderente a  $A$  pois, por exemplo, na vizinhança de raio 0,001 de 2,01 não existe qualquer elemento de  $A$ .

5. a)  $\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1} = 1$ ;  $\lim v_n = \lim \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{2} = 1$

b)  $f(u_n) = 3 \times u_n - 1 = 3 \times \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{3n+3-n}{n} = \frac{2n+3}{n}$

$f(v_n) = 3 \times v_n - 1 = 3 \times \frac{2n}{2n+1} - 1 = \frac{6n-2n-1}{2n+1} = \frac{4n-1}{2n+1}$

c)  $\lim f(u_n) = \lim \frac{2n+3}{n} = \frac{2}{1} = 2$ ;  $\lim f(v_n) = \lim \frac{4n-1}{2n+1} = \frac{4}{2} = 2$ .

Se existir limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para 1, ele terá que ser 2.

d) Seja  $(u_n)$  uma qualquer sucessão que tende para 1.

$\lim f(u_n) = \lim (3 \times u_n - 1) = 3 \times \lim u_n - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

Logo  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

6. a) Aderência de  $D_g$  é  $\mathbb{R}$ .

b)  $\lim u_n = \lim \frac{1}{n^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ;  $\lim v_n = \lim \frac{1}{1-2n} = \frac{1}{-\infty} = 0$

c) Como  $u_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  vem que  $g(u_n) = u_n - 1 = \frac{1}{n^2} - 1$

Como  $v_n < 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  vem que  $g(v_n) = 2 \times v_n + 1 = 2 \times \frac{1}{1-2n} + 1 = \frac{2+1-2n}{1-2n} = \frac{3-2n}{1-2n}$

d)  $\lim u_n = 0$ ;  $\lim v_n = 0$  e

$\lim g(u_n) = \lim \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$ ;  $\lim g(v_n) = \lim \frac{3-2n}{1-2n} = \frac{-2}{-2} = 1$

Como existem duas sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de elementos de  $D_g$ , convergentes para 0 e tais que as sucessões  $(g(u_n))$  e  $(g(v_n))$  têm limites diferentes, então não existe limite de  $g(x)$  quando  $x$  tende para 0.

7. a) Por exemplo  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ .

b) Por exemplo  $v_n = 2$ .

c) Por exemplo  $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ .

8. I) Falso, só é necessário que 1 seja ponto aderente ao domínio.

II) Falso, por exemplo, se  $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 1 \\ 4x & \text{se } x > 1 \end{cases}$  e  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  Tem-se que:  $u_n \rightarrow 1$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 3$  e não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (basta ver que, por exemplo, para  $v_n = 1 + \frac{1}{n}$  Tem-se que:  $v_n \rightarrow 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = 4$ )

III) Verdadeiro, pois, por definição, se  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ , então, qualquer que seja a sucessão  $(u_n)$  de elementos do domínio de  $f$  que tende para 1, a sucessão  $(f(u_n))$  tende para 3.

9. Seja  $(u_n)$  uma qualquer sucessão de elementos do domínio de  $f$  que tende para 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(u_n)^2} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Conclui-se, portanto, que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

10. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{n} = \frac{-2}{1} = -2$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n-1}{n} = \frac{-2}{1} = -2$

b)  $g(u_n) = \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{\frac{1-2n}{n}+2} = \frac{1}{\frac{1-2n+2n}{n}} = n$   
 $g(v_n) = \frac{1}{v_n+2} = \frac{1}{\frac{-2n-1}{n}+2} = \frac{1}{\frac{-2n-1+2n}{n}} = -n$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -2$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -2$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

Como existem duas sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de elementos de  $D_g$ , convergentes para  $-2$  e tais que as sucessões  $(g(u_n))$  e  $(g(v_n))$  têm limites diferentes, então não existe limite de  $g(x)$  quando  $x$  tende para  $-2$ .

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = -\infty$  pois :  $u_n \rightarrow -1$  e  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 3 \times 2 - 1 = 5$   
 mas  $2 \in D_f$  e  $f(2) \neq 5$

Mais geralmente, para qualquer sucessão que tenda para 2, por valores diferentes de 2, a respetiva sucessão das imagens tende para 5. No entanto, como  $f(2) = 3$ , a sucessão cujos termos são todos iguais a 2 tende para 2 e a respetiva sucessão das imagens, cujos termos são todos iguais a 3, tende para 3. Portanto, não é verdade que, qualquer que seja a sucessão que tenda para 2, a respetiva sucessão das imagens tenha sempre o mesmo limite.

13.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x}{1+x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x}} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{2}{x+1}\right)} = \sqrt{2}$$

$$(*) \quad \frac{\frac{2x}{-2x-2} - \frac{x+1}{2}}{-2} \quad \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

15. Seja  $(x_n)$  uma qualquer sucessão que tende para  $-\infty$ . Então  $(-x_n)$  tende para  $+\infty$ .

Como  $f$  é par  $f(-x_n) = f(x_n)$  e uma vez que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x_n) = 2$  vem que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_n) = 2$ .

Conclui-se, portanto, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

16. Sejam, por exemplo,  $(u_n)$  e  $(v_n)$  as sucessões definidas respetivamente por  $u_n = 4n\pi$  e  $v_n = \pi + 4n\pi$ . Qualquer destas sucessões tende para  $+\infty$  mas  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{4n\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi + 4n\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ . Logo não existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

17. a)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -0,5$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ ; Como  $-1 \in D_f$  vem que  $f(-1) = 2$ . Como não acontece  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -0,5$

c) Por exemplo  $u_n = -n$ .

d) Por exemplo  $v_n = 1 + \frac{1}{n}$  e  $w_n = n$ .

Nota:  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1^+$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = -0,5$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = -0,5$

18. I) Falso, desde que  $D_f$  não seja majorado é possível que exista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

II) Falso; o facto de ser verdade que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 2$ , para uma sucessão particular  $(u_n)$  que tende para  $+\infty$ , não implica que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  qualquer que seja a sucessão  $x_n$  que tenda para  $+\infty$  (e cujos termos pertencem ao domínio da função  $f$ ).

$$19. a) \lim_{x \rightarrow -1} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 + 3 = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+5)} = \frac{3}{-1+5} = \frac{3}{4}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x) + 2x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + 2x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} (2x)} = \sqrt[3]{2 + (-2)} = 0$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g^2(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \right]^2 = 3^2 = 9$$

$$20. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + x^2 - 4) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 4 = -5$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x}{3x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 1)} = \frac{-2}{13} = -\frac{2}{13}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{8x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{8x}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (8x)}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

21. A função definida por  $g(x) = \sin x - 1$  é limitada e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2] = 0$ , logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sin x - 1) \times (f(x) + 2)] = 0.$$

$$22. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2}{x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{2} = \frac{-2}{2} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{-2} = -1;$$

$$f(-2) = -1$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$ .

## Pág. 85

$$23. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)} = \frac{2}{-\infty} = 0 \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{g}{f} \right)(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)} = \frac{-\infty}{2} = -\infty \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{(x+1)^2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \\ \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g^2(x) &= \left[ \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \right]^2 = (-\infty)^2 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 100) &= 2(+\infty)^2 + 3 \times (+\infty) - 100 = +\infty \\ \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + \sqrt[3]{x}) &= (-\infty)^3 + \sqrt[3]{-\infty} = -\infty + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+1} &= \frac{2}{+\infty} = 0 \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(2-x)^2} &= \frac{1-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

## Pág. 86

$$\begin{aligned} 25. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 5) = -2 + 5 = 3 \\ \text{b)} \quad \text{Não existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &\text{ porque } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 5) = -\infty \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{1-f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} x}{\lim_{x \rightarrow 2^-} [1-f(x)]} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 2^-} 1 - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)} = \frac{2}{1-1^-} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-3}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)-3]}{\lim_{x \rightarrow 2^+} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} 3}{2} = \frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{f(x)-1} &= \frac{2-3}{1^--1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

26. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0 = 2$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2 + \frac{1}{-1^-+1} = 2 + \frac{1}{0^-} = 2 - \infty = -\infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1^-} x} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)-2}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) - 2}{-\infty} = \frac{2-2}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x)}{-x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) - \lim_{x \rightarrow -1^+} 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^+} \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right)}{1-1} = \frac{2 + \frac{1}{-1^++1}}{0^-} = \frac{2 + \frac{1}{0^+}}{0^-} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$
- g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-2} \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0$
- h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(x))^2 = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(x)) \right]^2 = (-\infty + 2)^2 = +\infty$
- i)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^+} x}{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)} = \frac{-1}{+\infty} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^-} x}{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

Como  $-1$  não pertence ao domínio da função  $g$ , também não pertence ao domínio da função  $h$  definida por  $h(x) = \frac{x}{g(x)}$ , portanto, como  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{g(x)} = 0$ , vem que  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{g(x)} = 0$

- j)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1^+} x} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1^-} x} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$
- Como  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x)}{x}$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x}$
- k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{2}{-\infty} = 0$

27. a<sub>1</sub>)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

a<sub>2</sub>)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\mathbf{a_3)} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\mathbf{a_4)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(a)}{0^+} = -\infty \text{ (porque } g(a) < 0 \text{)}$$

$$\mathbf{a_5)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(a)} = 0$$

$$\mathbf{a_6)} \quad \lim_{x \rightarrow b} (f(x) \times g(x)) = 0 \times g(b) = 0$$

$$\mathbf{a_7)} \quad \lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(d)}{g(d)} = 1$$

$$\mathbf{a_8)} \quad \lim_{x \rightarrow d} (f(x) - g(x)) = f(d) - g(d) = 0$$

$$\mathbf{a_9)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\mathbf{a_{10)}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{f(0)} = 0$$

$$\mathbf{a_{11)}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{0^-} = -\infty \text{ (porque } f(0) > 0 \text{)}$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c^-} g(x)} = \frac{f(c)}{0^+} = -\infty \text{ (porque } f(c) < 0 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c^+} g(x)} = \frac{f(c)}{0^-} = +\infty \text{ (porque } f(c) < 0 \text{)}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow c^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} h(x)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ .

## Pág. 89

$$\begin{aligned} \mathbf{28. a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^4 + x^{-6} - 1) &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 - 2x^4 + \frac{1}{x^6} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^4 - 1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) + \frac{1}{(+\infty)^6} = \\ &= -2(+\infty)^4 + \frac{1}{(+\infty)^6} = -\infty + 0 = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^2 - 1)^2 - x^4 + x) &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 1 + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -2(+\infty)^2 = -\infty \end{aligned}$$

$$\mathbf{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-2x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} - \sqrt{3-x})^\infty &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{3-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x})}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x-3+x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x}} = \frac{-2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2+1}}^\infty &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{(2x - \sqrt{4x^2+1})(2x + \sqrt{4x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{4x^2 - 4x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{-1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

$$29. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x+3x^4}{2x^4+x^2+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{2x^4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+x^3)^2}{x^2+3x^6} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4x^4+x^6}{x^2+3x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^2+2x} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x^2(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(1+\frac{2}{x})} = \\ &= \frac{\sqrt{1+0}}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \\ &= \frac{2}{-(1+0)} = -2 \end{aligned}$$

$$30. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2-2x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-8}{2x^3+x^2+12} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2-4)}{2x^3+x^2+12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-2)(x+2)}{2x^3+x^2+12} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x^2-3x+6)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-2)}{2x^2-3x+6} = \frac{-8}{20} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$(*) \quad 2x^3 + x^2 + 12 = (x+2)(2x^2 - 3x + 6)$$

Regra de Ruffini

|    |   |    |   |     |
|----|---|----|---|-----|
|    | 2 | 1  | 0 | 12  |
| -2 |   | -4 | 6 | -12 |
|    | 2 | -3 | 6 | 0   |

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x + 1)}{x - 1} = \frac{3(1 + 1)}{1^- - 1} = \frac{6}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x + 1)}{x - 1} = \frac{3(1 + 1)}{1^+ - 1} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1}$ .

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{2(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3 - 4}{2(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{x^2 + 1 - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{x^2 - 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{x - 1} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{-2} = -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(*) \quad x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x - 2}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5 - 9}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)\sqrt{x - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)\sqrt{x - 2}}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)\sqrt{x - 2}}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{4 \times 0}{6} = 0 \end{aligned}$$

## Pág. 90

$$31. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + 1}{3x^3} \times \frac{x}{2} \right)^{0 \times \infty} \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{6x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3+1}{x+1} \times \frac{3}{(x+1)^2} \right)^{0 \times \frac{\infty}{} = \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+3}{(x+1)^3} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+3}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

$$(*) \quad (x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+2x+1) = x^3+3x^2+3x+1$$

$$32. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+1|+x}{3|x|} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1+x}{-3x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$(*) \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x+1|$  é dado por  $-x-1$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x|$  é dado por  $-x$ .

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{2x-6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{2(x-3)} \stackrel{(*)}{=}$$

$$(*) \quad |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow 3^+$ ,  $|x-3|$  é dado por  $x-3$ , quando  $x \rightarrow 3^-$ ,  $|x-3|$  é dado por  $-x+3$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{2x-6} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+3}{2(-x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{2x-6}$ .

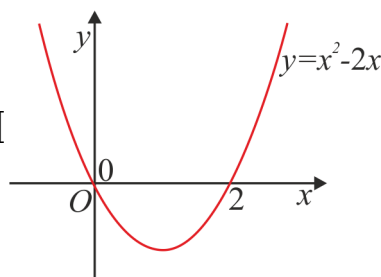
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|2-x|}{|x^2-2x|} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-x)}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-x)}{-x(2-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

$$(*) \quad |2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{se } 2-x \geq 0 \\ -2+x & \text{se } 2-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \leq 2 \\ -2+x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|2-x|$  é dado por  $2-x$ .

$$|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & \text{se } x^2-2x \geq 0 \\ -x^2+2x & \text{se } x^2-2x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2-2x & \text{se } x \in ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[ \\ -x^2+2x & \text{se } x \in ]0, 2[ \end{cases}$$

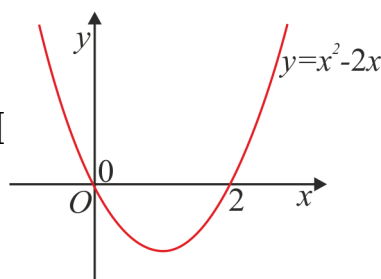


Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x^2-2x|$  é dado por  $x^2-2x$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{|x^2-2x|} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{|x^2-2x|}$$

$$(*) \quad |x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & \text{se } x^2-2x \geq 0 \\ -x^2+2x & \text{se } x^2-2x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2-2x & \text{se } x \in ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[ \\ -x^2+2x & \text{se } x \in ]0, 2[ \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{|x^2-2x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{-x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2-x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{|x^2-2x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}$$

Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{|x^2-2x|}$ .

$$\text{33. a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2-1)(x-x^3)]^\infty \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-x^5-x+x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = -(-\infty)^5 = +\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 6x - 9} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 + 3x + 3} = \frac{3}{9 + 9 + 3} = \frac{1}{7}$$

$$(*) \quad x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$$

Regra de Ruffini

|   |   |   |     |     |
|---|---|---|-----|-----|
|   | 1 | 0 | - 6 | - 9 |
| 3 |   | 3 | 9   | 9   |
|   | 1 | 3 | 3   | 0   |

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)^2}{1 - x^3} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x)^\infty &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2x-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} (*)$$

$$(*) \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -x + 2 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow 2^+$ ,  $|x - 2|$  é dado por  $x - 2$ , quando  $x \rightarrow 2^-$ ,  $|x - 2|$  é dado por  $-x + 2$ .

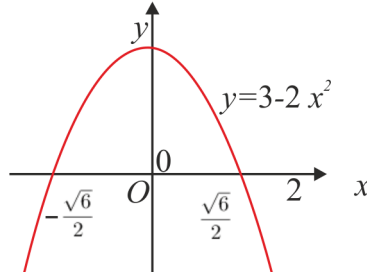
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2x-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{-x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{-x} = -\frac{1}{2}; \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2x-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x(-x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2x-x^2}$ .

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3-2x^2|}{x|x-1|} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3+2x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3+2x^2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$(*) \quad |3-2x^2| = \begin{cases} 3-2x^2 & \text{se } 3-2x^2 \geq 0 \\ -3+2x^2 & \text{se } 3-2x^2 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3-2x^2 & \text{se } x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \\ -3+2x^2 & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{\sqrt{6}}{2}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[ \end{cases}$$



Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|3-2x^2|$  é dado por  $-3+2x^2$ .

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|x-1|$  é dado por  $x-1$ .

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 2x})(x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x + x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = \frac{-2}{1 + \sqrt{1+0}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-9} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{4-x}-1)(\sqrt{4-x}+1)}{(x^2-9)(\sqrt{4-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4-x-1}{(x-3)(x+3)(\sqrt{4-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x+3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{4-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{4-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(\sqrt{4-x}+1)} =$$

$$= \frac{-1}{6(\sqrt{1}+1)} = -\frac{1}{12}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{4-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2+x} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{8x^3-1} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(2x+1)}{8x^2+4x+2} = \frac{2(1+1)}{2+2+2} = \frac{2}{3} \\ (*) \quad 8x^3-1 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2) \end{aligned}$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 8 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left[ (x^3-x) \times \frac{x}{(x+1)^3} \right] &\stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x^3-x)}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x^2-1)}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x+1)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1 \times (-2)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{l)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ (x^3-x) \times \frac{2}{(x+1)^3} \right] \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x^3-x)}{(x+1)^3} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-2x}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$(*) \quad (x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+2x+1) = x^3+3x^2+3x+1$$

$$\text{m)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{4+0}{\sqrt{1+0}} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{n)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+x+1}}{2x} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (*) \quad \sqrt{x^2} &= |x|, \text{ para } x < 0 \text{ vem } |x| = -x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o)} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x-5}+2)}{x-5-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5}+2}{\sqrt{x}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{p)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x-x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -(1-x)(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) \right] = +\infty \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{q)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x^2 - 1} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x(x+1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$34. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = 1$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-3x^2-2x}{1-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{-x^2} = 3$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{5-3x^2-2x}{1-x^2} = \frac{5-3 \times 2 - 2\sqrt{2}}{1-2} = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5-3x^2-2x}{1-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)}{-(x-1)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3\left(x+\frac{5}{3}\right)}{-(1+x)} = \frac{3\left(1+\frac{5}{3}\right)}{1+1} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad -3x^2 - 2x + 5 &= -3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right) \\ -3x^2 - 2x + 5 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3) \times 5}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 8}{-6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0 = f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ logo não existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

## Pág. 91

$$35. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x) = -1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = -1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x) = 1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (g \circ f)(x) = 1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ g)(x) = -1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$$

36. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = -\infty$  porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2^-$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x) = +\infty$  porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2^+$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = -\infty$  porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (g \circ f)(x) = 2$  porque  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (g \circ f)(x) = 2$  porque  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in Df \wedge f(x) \in Dg\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge \frac{1}{x-2} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

2 é ponto aderente a  $D_{g \circ f}$  e  $2 \notin D_{g \circ f}$ , uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (g \circ f)(x) = 2$  vem que  $\lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x) = 2$ .

37. a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \frac{0}{0}$  Seja  $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3$  Se  $x \rightarrow -1$ , vem que  $y \rightarrow -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y+1}{y^3+1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y+1}{(y+1)(y^2-y+1)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{y^2-y+1} = \frac{1}{3}$$

$$(*) \quad y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$$

Regra de Ruffini

|    |    |   |    |
|----|----|---|----|
| 1  | 0  | 0 | 1  |
| -1 | -1 | 1 | -1 |
| 1  | -1 | 1 | 0  |

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} = \frac{0}{0}$  Seja  $y = \sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 3$

Se  $x \rightarrow -2$ , vem que  $y \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^2-3+2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \frac{\infty}{\infty}$  Seja  $y = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = y^6$  Se  $x \rightarrow +\infty$ , vem que  $y \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^6+1}}{\sqrt[3]{(y^6)^2+3}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3+1}{\sqrt[3]{y^{12}+3}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3+1}{y^4+3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt[3]{8x-2}} = \frac{0}{0}$       Seja  $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3$       Se  $x \rightarrow 1$ , vem que  $y \rightarrow 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt[3]{8x-2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{2\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1-y^3}{2y-2} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(-y^2-y-1)}{2(y-1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-y^2-y-1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

(\*)  $-y^3 + 1 = (y-1)(-y^2-y-1)$

Regra de Ruffini

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| 1 | -1 | 0  | 0  | 1  |
|   |    | -1 | -1 | -1 |
|   | -1 | -1 | -1 | 0  |

## Pág. 93

38.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-5x+3}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-3) = -1$

(\*)  $2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1)$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$  e  $g(1) = 1-2 = -1$  logo a função  $g$  é contínua no ponto 1.

39.  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{1-x}-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)}{(\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)}{1-x-4} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)}{-(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left[ -(\sqrt{1-x}+2) \right] = -4$$

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (\sqrt{x+3}+4) = 4$ . Como  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3)$ , a função  $f$  não é contínua no ponto  $-3$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (3x - 2x^2 + 1) = 3a - 2a^2 + 1$

$f(a) = 3a - 2a^2 + 1$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (5 - x - 2x^2) = 5 - a - 2a^2$

Para a função  $f$  ser contínua no ponto  $a$  terá que acontecer  $3a - 2a^2 + 1 = 5 - a - 2a^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$ .

Para  $a = 1$  a função é contínua no ponto  $a$ . Quer para  $x < a$ , quer para  $x > a$  a função é contínua por ser a restrição de funções polinomiais. Logo, para  $a = 1$  a função é contínua em  $\mathbb{R}$ .

41. A função  $f$  é uma função racional, logo contínua em todo o seu domínio.  
 Para  $x \in ]0, 3[$  a função  $g$  é contínua por ser uma restrição de uma função contínua. (Uma função polinomial é contínua e a raiz quadrada de uma função contínua é contínua em todo o seu domínio)  
 Pela mesma razão  $g$  é contínua para  $x > 3$ . Vejamos no ponto 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3x - x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x - 3} = 0 = g(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x).$$

Logo,  $g$  é contínua em todo o seu domínio.

$$42. \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1} = 0 \end{aligned}$$

Consideremos a função afim,  $h$ , tal que  $h(-1) = 2$  e  $h(0) = 0$ .  $h(x) = ax + b$

$$\begin{cases} 2 = a \times (-1) + b \\ 0 = a \times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -a \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \quad h(x) = -2x$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x} & \text{se } x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$D_g = \mathbb{R}$ , para  $x < -1$   $g$  é contínua por ser uma restrição de uma função racional, para  $-1 < x < 0$   $g$  é contínua por ser uma restrição de uma função afim, para  $x > 0$   $g$  é contínua por ser uma restrição de uma função contínua (a raiz quadrada, diferença e quociente de funções polinomiais é contínua).

$g(-1) = 2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$  e  $g(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ , logo  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

43. A função  $f$  é contínua porque é contínua em todo o seu domínio.  $D_f = ]-2, 3[ \setminus \{1\}$ .  
 A função  $g$  não é contínua porque não é contínua em todo o seu domínio. A função  $g$  não é contínua no ponto 1 e  $1 \in D_g$ .  
 A função  $h$  é contínua porque é contínua em todo o seu domínio.  $D_h = ]-2, 3[ \setminus \{1\}$ .

$$\begin{aligned} 44. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{2-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ -\sqrt{2-x} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para a função ser contínua no ponto 2 teria que acontecer  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  o que é impossível seja qual for o valor de  $k$ .

45. a) Por exemplo, sendo  $u_n = \frac{2}{\pi+4n\pi}$  e  $v_n = \frac{2}{3\pi+4n\pi}$ , tem-se que  $\lim u_n = \lim v_n = 0$  e
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi+4n\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{3\pi+4n\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$
- b)  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  pois é produto da função seno pela composta da função seno com uma função afim.
- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \sin x \times \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$
- porque a função  $h$ , definida por  $h(x) = \sin \frac{1}{x}$  é limitada e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$ . De igual forma  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .
- Como  $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  a função  $f$  também é contínua no ponto 0. Logo é contínua em todo o seu domínio que é  $\mathbb{R}$ .

## Pág. 94

46.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ , logo a reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$  (teríamos obtido a mesma conclusão se calculássemos o limite lateral à direita).
- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x+1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0,$$
- $$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x+1}) = 0,$$
- portanto a reta de equação  $x = -1$  não é assíntota ao gráfico de  $g$ .
47. a) Se  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ , podemos concluir que a reta de equação  $x = 2$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .
- b) Nada podemos concluir acerca das assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .
- c) Se  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ , podemos concluir que a reta de equação  $x = -3$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .
- d) Nada podemos concluir acerca das assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .
- e) Nada podemos concluir acerca das assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .
- f) Se  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x-1) = +\infty$ , podemos concluir que a reta de equação  $x = 2$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f(x-1)$ , isto é a reta de equação  $x = 1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

- 48. a)**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  (\*), o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertence é o 3. Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só a reta de equação  $x = 3$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{3^- - 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 3$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$(*) D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

- b)**  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  (\*), os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-2$  e o  $2$ . Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só as retas de equações  $x = -2$  e/ou  $x = 2$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-4^+} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -2$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-4^-} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 2$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$(*) D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

- c)**  $D_h = \mathbb{R}$  (\*), não existem pontos aderentes ao domínio e que não lhe pertençam. Como a função é racional, sabe-se que é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico de  $h$ .

$$(*) D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

$x^2 + 1$  nunca se anula.

- d)**  $D_i = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (\*), os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ . Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $i$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{1+1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $i$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

A reta de equação  $x = 1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $i$ .

$$(*) D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

- e)  $D_j = \mathbb{R}$ , não existem pontos aderentes ao domínio e que não lhe pertençam.

Para  $x < 0$  trata-se de uma restrição de uma função racional, pelo que é contínua. Para  $x > 0$  trata-se de uma restrição de uma função polinomial, pelo que é contínua.

Vejamus a continuidade no ponto 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad j(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

A função  $j$  não é contínua no ponto 0 e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = -\infty$ , logo a reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

- f)  $D_k = ]-\infty - 2[ \cup ]2, +\infty[$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-2$  e o  $2$ .

Quer para  $x < -2$ , quer para  $x > 2$  trata-se de restrições de funções racionais, pelo que a função  $k$  é contínua em todo o seu domínio. Portanto só as retas de equações  $x = -2$  e/ou  $x = 2$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $k$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4-x^2}{x+2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2-x) = 4;$$

A reta de equação  $x = -2$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $k$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(2+x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2-x) = -4;$$

A reta de equação  $x = 2$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $k$ .

- g)  $D_l = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (\*), os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ . A função é dada pela diferença e quociente de funções contínuas (a função módulo e duas funções polinomiais) pelo que é contínua em todo o seu domínio, portanto só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} l(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{|x|-1} = \frac{-2}{1^+-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} l(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x|-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} l(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x|-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

A reta de equação  $x = 1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $l$ .

$$(*) \quad D_l = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$(**) \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad |x| - 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow 1$ ,  $|x| - 1$  é dado por  $x - 1$

- h)**  $D_m = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  (\*), o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertencem é o 1. A função é dada pela composição e quociente de funções contínuas (a função módulo e duas funções polinomiais) pelo que é contínua em todo o seu domínio, portanto só a reta de equação  $x = 1$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $m$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{|x - 1|} \stackrel{\frac{0}{0}}{(**)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(-x+1)}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{|x - 1|} \stackrel{\frac{0}{0}}{(**)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x) = 1$$

A reta de equação  $x = 1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $m$ .

$$(*) \ D_m = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$|x - 1| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$(**) \ |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow 1^-$ ,  $|x - 1|$  é dado por  $-x + 1$ , quando  $x \rightarrow 1^+$ ,  $|x - 1|$  é dado por  $x - 1$

## Pág. 95

- 49. a)** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3) = 0$  podemos garantir que a reta de equação  $y = 3$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .
- b)** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$  podemos garantir que a reta de equação  $y = 2x - 1$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .
- c)** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \sqrt{2}) = 0$  podemos garantir que a reta de equação  $y = -\sqrt{2}$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .
- d)** Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$  podemos garantir que a reta de equação  $y = 2x$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .
- e)** Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-3x + 4)) = 0$  podemos garantir que a reta de equação  $y = -3x + 4$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .
- f)** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$ , podemos garantir que a reta de equação  $y = -x + 2$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{50.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4x+1-4x^2-2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{2x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0, \text{ logo a reta de equação } y = 2 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f. \end{aligned}$$

A mesma conclusão se obtinha calculando o limite em  $+\infty$ .

$$51. \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0, \text{ logo a reta de equação } y = 2x - 1 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

A mesma conclusão se obtinha calculando o limite em  $+\infty$ .

$$52. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Logo, o gráfico da função  $g$  não tem assíntotas horizontais.

$$53. \text{ a) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

A reta de equação  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

$$\text{b) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+3} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+3} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

$$\text{c) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

O gráfico de  $f$  não admite assíntotas horizontais.

$$\text{d) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ a reta de equação } y = 0 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1, \text{ a reta de equação } y = 1 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

$$\text{e) } D_f = \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2, \text{ a reta de equação } y = -2 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2, \text{ a reta de equação } y = 2 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

$$\text{Nota que } |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad |x| + 3 = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x| + 3$  é dado por  $-x + 3$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|x| + 3$  é dado por  $x + 3$ .

$$\text{f) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \wedge x \neq 0\} = ]-\infty, 1] \setminus \{0\}$$

O domínio é um conjunto majorado, logo apenas podemos calcular o limite quando  $x$  tende para  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{1-y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{-y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{y} \right) = 0, \text{ a reta de equação } y = 0 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico de } f.$$

$$(*) \ y = \sqrt{1-x} \Rightarrow y^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-y^2$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , vem que  $y \rightarrow +\infty$ .

54.  $D_f = \mathbb{R}^+$ . Se a reta de equação  $y = -2x + 3$  é assíntota ao gráfico de  $f$ , sabemos que

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{ e que } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 3$$

55. a)  $D_f$  não é majorado nem minorado.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x}{x} = -7 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x - 7$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{x} = -7 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x - 7$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $f$ .

b)  $D_f$  não é majorado nem minorado.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 1 - x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1 - 2x^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 2$  é assíntota ao gráfico de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^3+2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3+2x-1}{x^2+2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x-1-x^3-2x^2}{x^2+2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1-2x^2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 2$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $f$ .

c)  $D_f$  não é majorado nem minorado.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x+3|$  é dado por  $-x-3$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|x+3|$  é dado por  $x+3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{|x+3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{-x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{-x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2-1}{-x-3} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1-x^2-3x}{-x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-3x}{-x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -x + 3$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{|x+3|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x+3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1-x^2-3x}{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1-3x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3) = -3 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 3$  também é assíntota não vertical ao gráfico de  $f$ .

d)  $D_f$  não é majorado nem minorado.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 1$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

e)  $D_f = \mathbb{R}$  não é majorado nem minorado.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 3} = +\infty$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 2 + \frac{3}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{2 + \frac{3}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} \right) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( f(x) + \sqrt{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2}x} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -\sqrt{2}x$  é assíntota ao gráfico de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 3} = +\infty$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 2 + \frac{3}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{2 + \frac{3}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} \right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{2}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2}x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3-2x^2}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2}x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2}x} = \frac{3}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = \sqrt{2}x$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

f)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} = ]-1, +\infty[$  não é majorado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1}} = \\
&= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \sqrt{+\infty} = +\infty \\
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty
\end{aligned}$$

O gráfico de  $f$  não admite assíntotas não verticais.

## Pág. 97

56. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertence é o 1. Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só a reta de equação  $x = 1$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{1-x} = \frac{-1}{1-1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Como  $D_f$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{1-x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2$$

A reta de equação  $y = -2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) = -2$$

A reta de equação  $y = -2$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $f$ .

- b)  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio da função e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ .

Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+3}{x-1} = \\ &= \frac{-2+3}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação  $x = -1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1} = \frac{10}{1^- - 1} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

Como  $D_g$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

A reta de equação  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

A reta de equação  $y = 2$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $g$ .

$$(*) \quad 2x^2 + 5x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+1)$$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = -1$$

- c)  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio da função e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ .

Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2}{(-1)^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 2x + 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{5}{2}$$

A reta de equação  $x = 1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

Como  $D_h$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x - 1 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x$  é assíntota ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x - 1 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $h$ .

$$(*) \quad 2x^3 - x - 1 = (2x^2 + 2x + 1)(x - 1)$$

Regra de Ruffini

|   |   |   |    |    |
|---|---|---|----|----|
|   | 2 | 0 | -1 | -1 |
| 1 | 2 | 2 | 1  |    |
|   | 2 | 2 | 1  | 0  |

- d)**  $Dj = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertence é o 2. Como a função é racional, sabe-se que é contínua, portanto só a reta de equação  $x = 2$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 4}{(x - 2)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x - 2} = \frac{2}{2^- - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 2$  é efetivamente assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

Como  $Dj$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{(x - 2)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $j$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{(x - 2)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $j$ .

- e)  $D_p = ] - \infty - 1[ \cup ]1, + \infty[$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ .

Quer para  $x < -1$ , quer para  $x > 1$  trata-se de restrições de funções racionais, pelo que a função  $p$  é contínua em todo o seu domínio. Portanto só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $p$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{-1+1} = \frac{2}{0} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $p$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} p(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

A reta de equação  $x = 1$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $p$ .

Como  $D_p$  não é majorado nem minorado

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \\ m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (p(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 1$  é assíntota ao gráfico de  $p$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \\ m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2-x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (p(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x-1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x + 1$  é assíntota não vertical ao gráfico de  $h$ .

- f)  $D_a = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-2$  e o  $2$ .

Como a função é a diferença e quociente de funções contínuas (duas polinomiais e uma função módulo), sabe-se que é contínua em todo o seu domínio, portanto só as retas de equações  $x = -2$  e/ou  $x = 2$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $a$ .

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad |x| - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -2$ ,  $|x| - 2$  é dado por  $-x - 2$ .

Quando  $x \rightarrow 2$ ,  $|x| - 2$  é dado por  $x - 2$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x| - 2$  é dado por  $-x - 2$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|x| - 2$  é dado por  $x - 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} a(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x}{-x - 2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -2$  é assíntota vertical ao gráfico de  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x) = 2$$

A reta de equação  $x = 2$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $a$ .

Como  $D_a$  não é majorado nem minorado

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{-x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{-x^2 - 2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (a(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{-x - 2} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 - 2x}{-x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{-x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 = 4 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -x + 4$  é assíntota ao gráfico de  $a$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \\ m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x - 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x$  é assíntota não vertical ao gráfico de  $a$ .

- g)  $Dq = \mathbb{R} (*)$ , não existem pontos que sejam aderentes ao domínio e não lhe pertençam. Como a função é a raiz quadrada de uma função polinomial, é contínua em todo o seu domínio, pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Como  $D_q$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} = +\infty$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{q(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (q(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2+3} + 2x\right) \stackrel{\infty}{=} \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -2x$  é assíntota ao gráfico de  $q$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} = +\infty$$

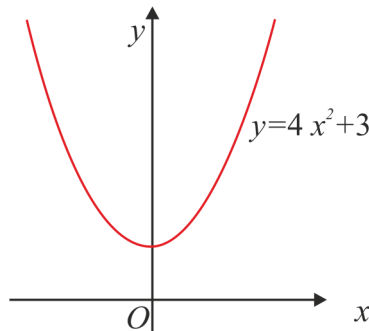
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4+\frac{3}{x^2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (q(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+3} - 2x\right) \stackrel{\infty}{=} \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x$  é assíntota ao gráfico de  $q$ .

$$(*) \quad Dq = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 3 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$4x^2 + 3 = 0$  equação impossível

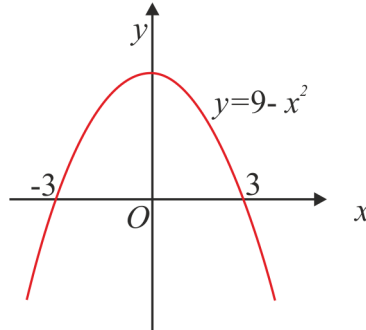


- h)**  $D_r = [-3, 3]$  (\*), não existem pontos que sejam aderentes ao domínio e não lhe pertençam. Como a função é a raiz quadrada de uma função polinomial, é contínua em todo o seu domínio, pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Como  $D_r$  é majorado e minorado o gráfico de  $r$  não admite assíntotas não verticais.

$$(*) D_r = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0\} = [-3, 3]$$

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$



- i)**  $D_s = ]-3, 3[$  (\*), os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-3$  e o  $3$ . Como a função é a raiz quadrada e quociente de funções contínuas (duas funções polinomiais), sabe-se que é contínua em todo o seu domínio, portanto só as retas de equações  $x = -3$  e/ou  $x = 3$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $s$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -3$  é assíntota vertical ao gráfico de  $s$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 3$  é assíntota vertical ao gráfico de  $s$ .

Como  $D_s$  é majorado e minorado o gráfico de  $s$  não admite assíntotas não verticais.

$$(*) D_s = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 > 0\} = ]-3, 3[$$

- j)**  $D_t = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, -\frac{3}{4}] \cup [0, +\infty[$  (\*), o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertencem é o  $-1$ . Como a função é a raiz quadrada e quociente de funções contínuas (duas funções polinomiais), sabe-se que é contínua em todo o seu domínio, portanto só a reta de equação  $x = -1$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $t$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{4x^2+3x}}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $t$ .

$D_t$  não é majorado nem minorado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x}}{x+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{3}{x})}}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{3}{x}}}{x(1 + \frac{1}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{3}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-2}{1} = -2\end{aligned}$$

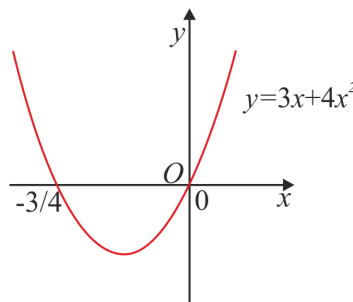
A reta de equação  $y = -2$  é assíntota ao gráfico de  $t$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x}}{x+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{3}{x})}}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4 + \frac{3}{x}}}{x(1 + \frac{1}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2$  é assíntota ao gráfico de  $t$ .

$$(*) D_t = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 3x \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, -\frac{3}{4}] \cup [0, +\infty[$$

$$\begin{aligned}4x^2 + 3x = 0 &\Leftrightarrow x(4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{4} \\ x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = -1\end{aligned}$$



- k)**  $D_v = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-3$  e o  $3$ .

Como a função é a composição e quociente de funções contínuas (duas polinomiais e uma função módulo), sabe-se que é contínua em todo o seu domínio, portanto só as retas de equações  $x = -3$  e/ou  $x = 3$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $v$ .

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 2x - 6 > 0 \\ -2x + 6 & \text{se } 2x - 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x > 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow -3$ ,  $|2x - 6|$  é dado por  $-2x + 6$ .

Quando  $x \rightarrow 3^-$ ,  $|2x - 6|$  é dado por  $-2x + 6$ .

Quando  $x \rightarrow 3^+$ ,  $|2x - 6|$  é dado por  $2x - 6$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|2x - 6|$  é dado por  $-2x + 6$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|2x - 6|$  é dado por  $2x - 6$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} v(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2x+6}{x^2-9} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -3$  é assíntota vertical ao gráfico de  $v$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} v(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x+6}{x^2-9} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A reta de equação  $x = 3$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $v$ .

$D_v$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+6}{x^2-9} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota ao gráfico de  $v$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{x^2-9} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é a única assíntota não vertical ao gráfico de  $v$ .

- 1)**  $D_z = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , o único ponto que é aderente ao domínio e não lhe pertence é o 2.  
Como a função é a composição e quociente de funções contínuas (duas polinomiais e uma função módulo), sabe-se que é contínua em todo o seu domínio, portanto só a reta de equação  $x = 2$  poderá ser assíntota vertical ao gráfico de  $z$ .

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{se } 2-x > 0 \\ -2+x & \text{se } 2-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & \text{se } x < 2 \\ -2+x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Quando  $x \rightarrow 2^-$ ,  $|2-x|$  é dado por  $2-x$ .

Quando  $x \rightarrow 2^+$ ,  $|2-x|$  é dado por  $-2+x$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|2-x|$  é dado por  $2-x$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $|2-x|$  é dado por  $-2+x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} z(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{2-x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(2-x)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} z(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x}{-2+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x) = 2$$

A reta de equação  $x = 2$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $z$ .

$D_z$  não é majorado nem minorado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x}{2-x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{z(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x}{2x-x^2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (z(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2-2x}{2-x} + x \right)^\infty \stackrel{\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x+2x-x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -x$  é assíntota ao gráfico de  $z$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{x-2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{z(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (z(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x - 2} - x \right) \stackrel{\infty}{=} \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

A reta de equação  $y = x$  é assíntota ao gráfico de  $z$ .

57.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $0$ . Como a função é contínua em todo o seu domínio, só as retas de equações  $x = -1$  e/ou  $x = 0$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ , logo podemos afirmar que a reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \stackrel{(*)}{=} f(1) \neq \infty$ , pelo que a reta de equação  $x = 0$  não é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ , pelo que a reta de equação  $y = -3$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = -3$ , pelo que a reta de equação  $y = -x - 3$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .  
(\*) porque  $f$  é contínua em todo o seu domínio, em particular é contínua no ponto  $1$ .

58.  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , os únicos pontos que são aderentes ao domínio e não lhe pertencem são o  $-1$  e o  $1$ . Como a função é contínua em todo o seu domínio, só as retas de equações  $x = -1$  e  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ , logo podemos afirmar que a reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ . Uma vez que a função  $g$  é par, também a reta de equação  $x = 1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (2x - 1)) = 0$ , pelo que a reta de equação  $y = 2x - 1$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ . Pelo facto da função ser par a reta de equação  $y = -2x - 1$  é também assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ , uma vez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 1) = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow -\infty} (g(-z) - 2(-z) + 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow -\infty} (g(z) + 2z + 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow -\infty} (g(z) - (-2z - 1)) = 0$$

(\*) Mudança de variável  $z = -x$ .

59. a) Se a reta de equação  $y = -2x + 5$  é a única assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ , como  $D_g = \mathbb{R}^-$ , sabemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - (-2x + 5)) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Daí vem que } \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - (-2x + 5) + (-2x + 5)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - (-2x + 5)) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 5) = 0 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

- b) Como  $D_g = \mathbb{R}^-$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = a$  (sendo  $a$  um número real diferente de  $0$ ).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g^2(x)}{x} = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = a$  (sendo  $a$  um número real diferente de 0).

Uma vez que a reta de equação  $x = -1$  é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ , sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty, \text{ pelo que } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{g(x)} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{g(x)} = \frac{-1}{-\infty} = 0. \text{ Em qualquer dos casos } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{g(x)} = 0.$$

60. Se a reta de equação  $y = -3x + 2$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ , como  $Dg = \mathbb{R}^+$ , sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -3 \text{ e que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-3x)) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} \times (g(x) + 3x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = -3 \times 2 = -6$$

61. Sem perda de generalidade consideremos que  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (f(x)) = +\infty$  e que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0. \text{ Façamos a mudança de variável } z = x + 1 \Leftrightarrow x = z - 1.$$

Quando  $x \rightarrow -3^-$ ,  $z \rightarrow -2^-$ . Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $z \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow -2^-} (f(z - 1)) = +\infty \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} (f(z - 1) - (2(z - 1) - 1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -2^-} (f(z - 1)) + \lim_{z \rightarrow -2^-} 3 = +\infty + \lim_{z \rightarrow -2^-} 3 \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} (f(z - 1) - 2z + 2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -2^-} (f(z - 1) + 3) = +\infty + 3 \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} (f(z - 1) + 3 - 2z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -2^-} (g(z)) = +\infty \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} (g(z) - 2z) = 0 \end{cases}$$

Se  $\lim_{z \rightarrow -2^-} (g(z)) = +\infty$ , então a reta de equação  $x = -2$  é assíntota ao gráfico de  $g$ .

Se  $\lim_{z \rightarrow +\infty} (g(z) - 2z) = 0$ , então a reta de equação  $y = 2x$  é assíntota ao gráfico de  $g$ .

## Pág. 98

62. I - verdadeira

II - falsa porque o domínio pode ser  $\mathbb{R}$ , mas a função não ser contínua.

III - falsa porque a função pode ser contínua mas ter pontos aderentes ao seu domínio que não lhe pertençam.

IV - verdadeira

63. Se a reta de equação  $y = 2x - 3$  é assíntota ao gráfico de  $f$  de domínio  $\mathbb{R}^+$  então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f^2(x)}{x} - 2f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} (f(x) - 2x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) =$$

$$= 2 \times (-3) = -6$$

64. Se a função  $f$  é par e se a reta de equação  $y = 2x - 1$  é assíntota ao seu gráfico, sabemos que a reta de equação  $y = -2x - 1$  também é assíntota ao gráfico de  $f$ .

Uma vez que  $D'_f = [1, +\infty[$ , vem que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota ao gráfico de  $g$  (pois  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$ ).

Não existem assíntotas verticais pois a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  (dado que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e não tem zeros).

65. Se a reta de equação  $y = -2x + 5$  é assíntota ao gráfico de  $f$  de domínio  $\mathbb{R}^+$  então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{f(x)}{x} \right) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-(f(x) + 2x)) = -5$$

A assíntota não vertical ao gráfico de  $g$  tem por equação  $y = 3x - 5$

66. Começemos por determinar a equação reduzida da reta  $AB$ .  $A(-1, 0)$  e  $B(0, -2)$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  serão então  $(0, -2) - (-1, 0) = (1, -2)$ ;

$$m_{AB} = \frac{-2}{1} = -2 \quad y = -2x - 2$$

Sabemos então que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ , que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -2$ .

Sabemos ainda que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = +\infty$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{f(x)} + \frac{f(x)}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \times \frac{f(x)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{-2} + 0 \times (-2) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(-x)) \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} (-y f(y)) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

(\*) Mudança de variável  $y = -x$ .

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

## Pág. 99

67. a)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{b) } D = \mathbb{R}$$

c)  $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$   
 $x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sim (x^2 + 2x = 0) \Leftrightarrow \sim (x(x+2) = 0) \Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee x + 2 = 0) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee x = -2) \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -2$

e)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$   
 $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \sim (x^2 - 2x - 3 = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}\right) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{2 \pm 4}{2}\right) \Leftrightarrow \sim (x = -1 \vee x = 3) \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 3$

f)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$   
 $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sim \underbrace{(x^2 + 1 = 0)}_{\text{condição impossível}} \rightarrow \text{condição universal}$

g)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$   
 $x^4 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow \sim (x^4 - 16 = 0) \Leftrightarrow \sim ((x^2)^2 - 4^2 = 0) \Leftrightarrow \sim ((x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sim \left( \underbrace{x^2 + 4 = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 - 4 = 0 \right) \Leftrightarrow \sim (x^2 = 4) \Leftrightarrow \sim (x = -2 \vee x = 2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2$

h)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$   
 $x^3 + 8 \neq 0 \Leftrightarrow \sim (x^3 + 8 = 0) \Leftrightarrow \sim (x^3 = -8) \Leftrightarrow \sim \left(x = \sqrt[3]{-8}\right) \Leftrightarrow \sim (x = -2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x \neq -2$

i)  $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 + x^2 - 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 0, 1\right\}$   
 $2x^3 + x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \sim (2x^3 + x^2 - 3x = 0) \Leftrightarrow \sim (x(2x^2 + x - 3) = 0) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee 2x^2 + x - 3 = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}\right) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sim \left(x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm 5}{4}\right) \Leftrightarrow \sim \left(x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = 1\right) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq 1$

j)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x \neq 0 &\Leftrightarrow \sim (x^3 + 2x^2 + x = 0) \Leftrightarrow \sim (x(x^2 + 2x + 1) = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee (x+1)^2 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee x + 1 = 0) \Leftrightarrow \sim (x = 0 \vee x = -1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \end{aligned}$$

k)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 \neq 0 &\Leftrightarrow \sim (x^2 + 2x + 3 = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sim \left(x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}\right)}_{\text{condição impossível}} \rightarrow \text{condição universal} \end{aligned}$$

l)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 \neq 0 &\Leftrightarrow \sim (x^2 + 2x - 1 = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}\right) \Leftrightarrow \sim \left(x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim (x = -1 - \sqrt{2} \vee x = -1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow x \neq -1 - \sqrt{2} \wedge x \neq -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

68. a)  $\frac{x^2+2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x+2$   
A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

b)  $\frac{x}{x^2+2x} = \frac{x}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2}$   
A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ .

c)  $\frac{x^3+1}{x^2-1} \stackrel{(*)}{=} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$   
A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(\*)  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

Regra de Ruffini

|    |    |   |          |
|----|----|---|----------|
| 1  | 0  | 0 | 1        |
| -1 | -1 | 1 | -1       |
| 1  | -1 | 1 | 0        |
| 1  | 0  | 1 | $\neq 0$ |

d)  $\frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2)^2-1^2}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2 - 1$   
A simplificação é válida em  $\mathbb{R}$  ( $x^2 + 1$  nunca se anula).

$$\text{e)} \quad \frac{2x^2-3x-5}{x^3+1} \stackrel{(*)}{=} \frac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2x-5}{x^2-x+1}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  (nota que  $x^2 - x + 1$  nunca se anula)

$$\begin{aligned} (*) \quad 2x^2 - 3x - 5 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{2} \quad ; \quad 2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+1) \end{aligned}$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Regra de Ruffini

|               |   |               |                       |    |
|---------------|---|---------------|-----------------------|----|
|               | 1 | 0             | 0                     | 1  |
| -1            |   | -1            | 1                     | -1 |
|               | 1 | -1            | 1                     | 0  |
| $\frac{5}{2}$ |   | $\frac{5}{2}$ | $\frac{15}{4}$        |    |
|               | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{19}{4} \neq 0$ |    |

$$\text{f)} \quad \frac{x^2+6x+9}{9-x^2} = \frac{(x+3)^2}{(3-x)(3+x)} = \frac{x+3}{3-x}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ .

$$\text{g)} \quad \frac{x^3-6x-4}{2x^2-x-10} \stackrel{(*)}{=} \frac{(x+2)(x^2-2x-2)}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+2)} = \frac{x^2-2x-2}{2x-5}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ .

$$\begin{aligned} (*) \quad 2x^2 - x - 10 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-10)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 9}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{5}{2} \quad ; \quad 2x^2 - x - 10 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) \end{aligned}$$

$$x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x^2 - 2x - 2)$$

Regra de Ruffini

|               |   |               |                       |    |
|---------------|---|---------------|-----------------------|----|
|               | 1 | 0             | -6                    | -4 |
| -2            |   | -2            | 4                     | 4  |
|               | 1 | -2            | -2                    | 0  |
| $\frac{5}{2}$ |   | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{4}$         |    |
|               | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4} \neq 0$ |    |

$$\text{h)} \quad \frac{9x^2-12x+4}{9x^2-4} = \frac{(3x-2)^2}{(3x)^2-2^2} = \frac{(3x-2)^2}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x-2}{3x+2}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ .

$$69. \text{ a) } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{1-x^2} = \frac{1}{\frac{1+x}{(1-x)}} - \frac{1}{\frac{1-x}{(1+x)}} + \frac{3x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x-1-x+3x}{(1-x)(1+x)} = \frac{x}{1-x^2}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x-x^2} &= \frac{2}{\frac{1}{(x-x^2)}} + \frac{3}{\frac{x}{(1-x)}} - \frac{3}{x(1-x)} = \frac{2x-2x^2+3-3x-3}{x(1-x)} = \frac{-2x^2-x}{x(1-x)} = \\ &= \frac{x(-2x-1)}{x(1-x)} = \frac{-2x-1}{1-x} = \frac{2x+1}{x-1} \end{aligned}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{6x-x^2-8} - \frac{1}{5x-x^2-6} &\stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{-(x-2)(x-4)} - \frac{1}{-(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{1}{(x-3)(x-4)} - \frac{1}{(x-2)(x-4)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2-x+3+x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \\ &= \frac{x-3}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x^2-6x+8} \end{aligned}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$ .

$$\begin{aligned} (*) \quad x^2 - 7x + 12 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4 \quad ; \quad x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 8 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4 \times (-1) \times (-8)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4 \quad ; \quad -x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4 \times (-1) \times (-6)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \quad ; \quad -x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x^3-4x}{x-1} \div \frac{x^2+2x}{x^2-1} &= \frac{x(x^2-4)}{x-1} \div \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x-1} \times \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+2)} = \\ &= \frac{x(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)x(x+2)} = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{\frac{8x+9}{(x+3)^2} - 1}{\frac{x}{2x+6}} &= \frac{\frac{8x+9-x^2-6x-9}{(x+3)^2}}{\frac{x}{2(x+3)}} = \frac{2x-x^2}{(x+3)^2} \times \frac{2(x+3)}{x} = \frac{2(x+3)x(2-x)}{x(x+3)^2} = \\ &= \frac{2(2-x)}{x+3} = \frac{4-2x}{x+3} \end{aligned}$$

A simplificação é válida em  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ .

$$70. \quad \text{a)} \quad f(x) = \frac{x}{x+3} \qquad f(-1) = \frac{-1}{-1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\frac{x}{x+3} + \frac{1}{2}}{x+1} = \frac{\frac{2x+x+3}{2(x+3)}}{x+1} = \frac{\frac{3x+3}{2(x+3)}}{x+1} = \frac{3(x+1)}{2(x+3)(x+1)} = \frac{3}{2x+6}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g(1+h) &= 3(1+h)^2 - 2(1+h) = 3(1+2h+h^2) - 2 - 2h = 3 + 6h + 3h^2 - 2 - 2h = \\ &= 3h^2 + 4h + 1 \qquad g(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{3h^2+4h+1-1}{h} = \frac{3h^2+4h}{h} = \frac{h(3h+4)}{h} = 3h+4$$

## Pág. 101

$$71. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

|         |           |      |   |               |   |      |           |
|---------|-----------|------|---|---------------|---|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ |   | $\frac{1}{2}$ |   | $1$  | $+\infty$ |
| $1-2x$  | +         | +    | + | 0             | - | -    | -         |
| $x^2-1$ | +         | 0    | - | -             | - | 0    | +         |
| $f$     | +         | n.d. | - | 0             | + | n.d. | -         |

$f$  é negativa em  $] -1, \frac{1}{2} [ \cup ] 1, +\infty [$  e positiva em  $] -\infty, -1 [ \cup ] \frac{1}{2}, 1 [$ .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x = 3 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \text{ a função } g \text{ não tem zeros.}$$

|           |           |      |   |      |           |
|-----------|-----------|------|---|------|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-3$ |   | $3$  | $+\infty$ |
| $(x-3)^2$ | +         | +    | + | 0    | +         |
| $x^2-9$   | +         | 0    | - | 0    | +         |
| $g$       | +         | n.d. | - | n.d. | +         |

$g$  é negativa em  $] -3, 3 [$  e positiva em  $] -\infty, -3 [ \cup ] 3, +\infty [$ .

$$72. D_f = \{x \in \mathbb{R} : kx^2 - 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{k}\right\}$$

$$kx^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \sim (kx^2 - 3x = 0) \Leftrightarrow \sim (x(kx - 3) = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = 0 \vee x = \frac{3}{k}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{k}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{k}$  para que a função não tenha zeros  $\frac{3}{k}$  terá que ser igual a 2.

$$\frac{3}{k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$73. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + b \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2}\right\}$$

$$2x + b \neq 0 \Leftrightarrow \sim (2x + b = 0) \Leftrightarrow \sim \left(x = -\frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow x \neq -\frac{b}{2}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 = a \wedge x \neq -\frac{b}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a} \wedge a \geq 0 \wedge x \neq -\frac{b}{2}$  para que a função tenha como único zero o  $-2$ , terá que acontecer  $-\sqrt{a} = -2$  e  $\sqrt{a} = -\frac{b}{2}$ .

$$\begin{cases} -\sqrt{a} = -2 \\ \sqrt{a} = -\frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = -\frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 2 = -\frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

### Pág. 103

$$74. f(x) = \frac{3x-2}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$$

Equações das assíntotas:  $y = 3$  ;  $x = 1$

$$\begin{array}{r|l} 3x & -2 \\ -3x & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{4x-7}{1-2x} = -2 - \frac{5}{-2x+1} = -2 + \frac{\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}} \quad \text{Equações das assíntotas: } y = -2 ; x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x & -7 \\ -4x & +2 \\ \hline & -5 \end{array}$$

$$h(x) = x - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-x-x^2}{x-1} = \frac{-x}{x-1} = -1 + \frac{-1}{x-1}$$

Equações das assíntotas:  $y = -1$  ;  $x = 1$

$$\begin{array}{r|l} -x & \\ x & -1 \\ \hline & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \\ -1 \end{array}$$

75.  $f(0) = -3$  Equações das assíntotas:  $y = 1$  ;  $x = -2$   
 $f(x) = 1 + \frac{k}{x+2}$   $f(0) = -3 \Leftrightarrow 1 + \frac{k}{2} = -3 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -4 \Leftrightarrow k = -8$

$$f(x) = 1 + \frac{-8}{x+2} = \frac{x+2-8}{x+2} = \frac{x-6}{x+2}$$

76.  $f(x) = \frac{2-2x}{3x-1} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{4}{9}}{x-\frac{1}{3}}$

Equações das assíntotas ao gráfico de  $f$ :  $y = -\frac{2}{3}$  ;  $x = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} -2x & +2 \\ \hline 2x & -\frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3x & -1 \\ \hline & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\frac{4}{3}$$

Equações das assíntotas ao gráfico de  $g$ :  $y = -\frac{2}{3} - 3 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{3}$  ;  
 $x = \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

77.  $f(0) = 0$  Equações das assíntotas:  $y = -2$  ;  $x = -1$   
 $f(x) = -2 + \frac{k}{x+1}$   $f(0) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{k}{1} = 0 \Leftrightarrow k = 2$

$$f(x) = -2 + \frac{2}{x+1} = \frac{-2x-2+2}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}$$

78. a)  $\frac{x^2+3x}{x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-3x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Conjunto-solução:  $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

b)  $\frac{3-5x}{x^2-9} = \frac{x-1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{3-5x}{(x-3)(x+3)} = \frac{-x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3-5x}{(x-3)(x+3)} - \frac{-x+1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3-5x+x^2-x+3x-3}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Conjunto-solução:  $\{0\}$

c)  $\frac{x}{x-2} = \frac{4}{6x-x^2-8} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x-2} = \frac{4}{-(x-4)(x-2)} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} + \frac{4}{(x-4)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{(x-4)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-4} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x-2=0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x=2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4 \rightarrow \text{equação impossível}$

Conjunto-solução:  $\emptyset$

(\*)  $-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1) \times (-8)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4 \quad ; \quad -x^2 + 6x - 8 = -(x-4)(x-2)$

d)  $x = \frac{3x-2}{x^2} \Leftrightarrow x - \frac{3x-2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \vee x+2=0) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$   
 (\*)  $\Leftrightarrow (x=1 \vee x=-2) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$

Conjunto-solução:  $\{-2, 1\}$

(\*)

|   |   |   |    |    |
|---|---|---|----|----|
| 1 | 1 | 0 | -3 | 2  |
| 1 |   | 1 | 1  | -2 |
|   | 1 | 1 | -2 | 0  |
| 1 |   | 1 | 2  |    |
|   | 1 | 2 | 0  |    |

79. a)  $\frac{1}{x-2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x+6}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7-3x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]2, \frac{7}{3}]$

|                    |           |      |   |               |           |
|--------------------|-----------|------|---|---------------|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | 2    |   | $\frac{7}{3}$ | $+\infty$ |
| $7-3x$             | +         | +    | + | 0             | -         |
| $x-2$              | -         | 0    | + | +             | +         |
| $\frac{7-3x}{x-2}$ | -         | n.d. | + | 0             | -         |

b)  $\frac{2x}{3-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{3-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3+x}{3-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{3-x} < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$

|                    |           |   |   |      |           |
|--------------------|-----------|---|---|------|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | 1 |   | 3    | $+\infty$ |
| $3x-3$             | -         | 0 | + | +    | +         |
| $3-x$              | +         | + | + | 0    | -         |
| $\frac{3x-3}{3-x}$ | -         | 0 | + | n.d. | -         |

$$\text{c)} \quad \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \geq \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{\underset{(x+2)}{x-2}} - \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{\underset{(x-2)}{x+2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-2-x+2}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup [-1, 0] \cup ]2, +\infty[$$

|                       |           |      |   |      |   |     |   |      |           |
|-----------------------|-----------|------|---|------|---|-----|---|------|-----------|
| $x$                   | $-\infty$ | $-2$ |   | $-1$ |   | $0$ |   | $2$  | $+\infty$ |
| $x^2+x$               | +         | +    | + | 0    | - | 0   | + | +    | +         |
| $x^2-4$               | +         | 0    | - | -    | - | -   | - | 0    | +         |
| $\frac{x^2+x}{x^2-4}$ | +         | n.d. | - | 0    | + | 0   | - | n.d. | +         |

$$\text{d)} \quad \frac{1}{3x-x^2} \leq \frac{2x}{(x-3)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{-x(x-3)} - \frac{2x}{(x-3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\underset{(x-3)}{x(x-3)}} - \frac{2x}{\underset{(x)}{(x-3)^2}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3-2x^2}{x(x-3)^2} \leq 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{-2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}{x(x-3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(-2x-3)(x-1)}{x(x-3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, 0[ \cup [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

|                                 |           |                |   |      |   |     |   |      |           |
|---------------------------------|-----------|----------------|---|------|---|-----|---|------|-----------|
| $x$                             | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ |   | $0$  |   | $1$ |   | $3$  | $+\infty$ |
| $-2x-3$                         | +         | 0              | - | -    | - | -   | - | -    | -         |
| $x-1$                           | -         | -              | - | -    | - | 0   | + | +    | +         |
| $x$                             | -         | -              | - | 0    | + | +   | + | +    | +         |
| $(x-3)^2$                       | +         | +              | + | +    | + | +   | + | 0    | +         |
| $\frac{(-2x-3)(x-1)}{x(x-3)^2}$ | +         | 0              | - | n.d. | + | 0   | - | n.d. | -         |

$$(*) \quad -2x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \times (-2) \times 3}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{3}{2}$$

## Pág. 104

80. **a<sub>1</sub>)** 1 dl  $\rightarrow$  5 g

$$2 \text{ dl} \rightarrow 10 \text{ g} \quad N(x) = \frac{10}{0,7x} = \frac{100}{7x}$$

$$\text{a}_2) \quad \frac{100}{7x} \leq 0,18 \Leftrightarrow \frac{100}{7x} \leq \frac{9}{50} \Leftrightarrow \frac{100}{\underset{(50)}{7x}} - \frac{9}{\underset{(7x)}{50}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5000-63x}{350x} \leq 0 \Leftrightarrow 5000-63x \leq 0$$

$$(\text{uma vez que } 350x > 0) \Leftrightarrow x \geq \frac{5000}{63} \approx 79$$

A menor massa corporal que uma pessoa pode ter de modo que o nível de álcool no seu sangue não exceda 0,18, uma hora depois de ter ingerido dois decilitros desse vinho é 79 kg.

b)  $1 \text{ dl} \rightarrow 7 \text{ g}$

$10 \text{ dl} \rightarrow 70 \text{ g} \quad N(x) = \frac{70}{0,7x} = \frac{700}{7x}$

$$\frac{700}{7x} \leq 1,6 \Leftrightarrow \frac{700}{7x} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{700}{7x} - \frac{8}{5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3500-56x}{35x} \leq 0 \Leftrightarrow 3500 - 56x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3500}{56} \Leftrightarrow x \geq 62,5$$

A massa corporal de uma pessoa que, uma hora depois de ter ingerido 1 litro dessa bebida, tem nível de álcool no sangue não superior a 1,6 terá de ser no mínimo 62,5 kg.

81. a)  $\frac{5}{5-d} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{5-d} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{5-25+5d}{5-d} = 0 \Leftrightarrow \frac{5d-20}{5-d} = 0 \Leftrightarrow 5d-20 = 0 \wedge d \neq 5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow d = 4$   
 4 decímetros

b)  $\frac{5}{5-d} > 2 \Leftrightarrow \frac{5}{5-d} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{5-10+2d}{5-d} > 0 \Leftrightarrow \frac{2d-5}{5-d} > 0 \Leftrightarrow x \in ]\frac{5}{2}, 5[$

entre 2,5 e 5 decímetros

|                    |           |               |   |      |           |
|--------------------|-----------|---------------|---|------|-----------|
| $d$                | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ |   | 5    | $+\infty$ |
| $2d-5$             | -         | 0             | + | +    | +         |
| $5-d$              | +         | +             | + | 0    | -         |
| $\frac{2d-5}{5-d}$ | -         | 0             | + | n.d. | -         |

82. a) Quantidade de líquido:  $0,5 + x$

Quantidade de água:  $0,5 \times 0,9 + x$

$$p(x) = \frac{0,5 \times 0,9 + x}{0,5 + x} \times 100 = \frac{\frac{9}{20} + x}{\frac{1}{2} + x} \times 100 = \frac{\frac{9+20x}{20}}{\frac{1+2x}{2}} \times 100 = \frac{\frac{9+20x}{20}}{\frac{10+20x}{20}} \times 100 =$$

$$= \frac{900+2000x}{10+20x} = \frac{200x+90}{2x+1}$$

b)  $\frac{200x+90}{2x+1} \leq 98 \Leftrightarrow \frac{200x+90}{2x+1} - 98 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{200x+90-196x-98}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-8}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 4x-8 \leq 0$  (porque  $2x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$ )  $\Leftrightarrow x \leq 2$

A quantidade máxima de água que a Leonor pode adicionar é 2 litros.

83. a) Conjunto-solução:  $]1, \frac{3}{2}]$

b)  $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Equações das assíntotas:  $y = -2$ ;  $x = 1$

$$f(x) = -2 + \frac{k}{x-1} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{k}{\frac{3}{2}-1} = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{k}{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} = \frac{-2x+2+1}{x-1} = \frac{-2x+3}{x-1} \quad a = -2, b = 3, c = -1$$

$$f(0) = -2 + \frac{1}{0-1} = -3$$

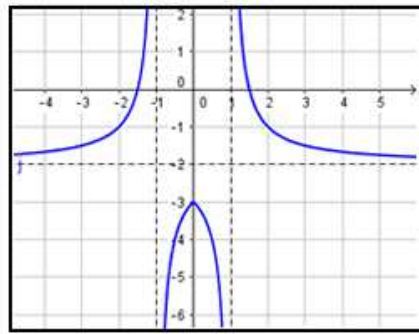
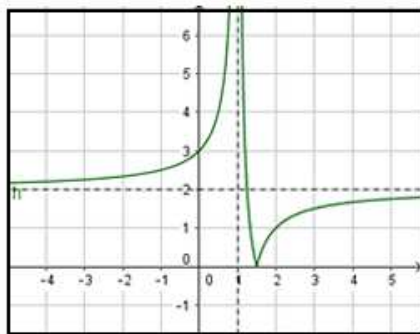
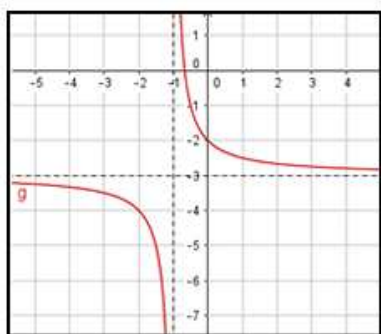
O gráfico intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, -3)$ .

c)  $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , a equação  $f(x) = -2$  é impossível

d) Equações das assíntotas ao gráfico de  $g$ :  $y = -2 - 1 \Leftrightarrow y = -3$ ;  $x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$

Equações das assíntotas ao gráfico de  $h$ :  $y = 2$ ;  $x = 1$

Equações das assíntotas ao gráfico de  $j$ :  $y = -2$ ;  $x = 1$ ;  $x = -1$



## Pág. 105

84. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ;

$f(x) = 1 - \frac{1}{x-0}$ ; Assíntotas ao gráfico de  $f$ :  $x = 0$ ,  $y = 1$

$g(x) = 2 + \frac{4}{x-3}$ ; Assíntotas ao gráfico de  $g$ :  $x = 3$ ,  $y = 2$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ;

**b)**  $\frac{x-1}{x} \geq 2 - \frac{4}{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{(3-x)(x(3-x))} + \frac{4}{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-3-x^2+x-6x+2x^2+4x}{x(3-x)} \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x(3-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x(3-x)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0[ \cup [1, 3[$   
 (\*)

|                             |           |      |     |      |     |     |     |      |           |
|-----------------------------|-----------|------|-----|------|-----|-----|-----|------|-----------|
| $x$                         | $-\infty$ | $-3$ |     | $0$  |     | $1$ |     | $3$  | $+\infty$ |
| $x+3$                       | $-$       | $0$  | $+$ | $+$  | $+$ | $+$ | $+$ | $+$  | $+$       |
| $x-1$                       | $-$       | $-$  | $-$ | $-$  | $-$ | $0$ | $+$ | $+$  | $+$       |
| $x$                         | $-$       | $-$  | $-$ | $0$  | $+$ | $+$ | $+$ | $+$  | $+$       |
| $3-x$                       | $+$       | $+$  | $+$ | $+$  | $+$ | $+$ | $+$ | $0$  | $-$       |
| $\frac{(x-1)(x+3)}{x(3-x)}$ | $-$       | $0$  | $+$ | n.d. | $-$ | $0$ | $+$ | n.d. | $-$       |

(\*)  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

**c)**  $h(x) = 2 + \frac{k}{x-3}$ ;  $h(1) = -1 \Leftrightarrow 2 + \frac{k}{1-3} = -1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 6$

$h(x) = 2 + \frac{6}{x-3} = \frac{2x-6+6}{x-3} = \frac{2x}{x-3}$  ;  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

**85. a)**

|                     |           |      |     |      |     |     |           |
|---------------------|-----------|------|-----|------|-----|-----|-----------|
| $x$                 | $-\infty$ | $0$  |     | $2$  |     | $3$ | $+\infty$ |
| $f(x)$              | $+$       | $0$  | $-$ | n.d. | $+$ | $+$ | $+$       |
| $g(x)$              | $+$       | $+$  | $+$ | $+$  | $+$ | $0$ | $-$       |
| $\frac{g(x)}{f(x)}$ | $+$       | n.d. | $-$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$       |

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 2[ \cup [3, +\infty[$

**b)**  $f(x) = 3 + \frac{k}{x-2}$ ;  $f(0) = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{k}{0-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 6$

$f(x) = 3 + \frac{6}{x-2}$ ;  $a = 3, b = 6$  e  $c = 2$

86. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ;  
 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{k}{x+2}$ ; Assíntotas ao gráfico de  $f$ :  $x = -2$ ,  $y = \frac{1}{2}x - 1$

Porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) - \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x+2} = 0$

$f(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 0 - 1 + \frac{k}{0+2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -\frac{3}{2} + 1 \Leftrightarrow k = -3 + 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow k = -1$

$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+2x-2x-4-2}{2(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}x^2-3}{x+2}$

$a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$ ,  $c = -3$  e  $d = -2$

b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6}{2(x+2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$   
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{6}, -2[ \cup [\sqrt{6}, +\infty[$

## Pág. 106

87. a)  $\frac{2x-3}{1-x} < \frac{1}{x-2} \wedge x > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{1-x} - \frac{1}{x-2} < 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-4x+6-1+x}{(1-x)(x-2)} < 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+5}{(1-x)(x-2)} < 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x \in ]2, +\infty[$

| $x$                            | $-\infty$ | 1    |   | 2    | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|------|---|------|-----------|
| $2x^2 - 6x + 5$                | +         | +    | + | +    | +         |
| $1 - x$                        | +         | 0    | - | -    | -         |
| $x - 2$                        | -         | -    | - | 0    | +         |
| $\frac{2x^2-6x+5}{(1-x)(x-2)}$ | -         | n.d. | + | n.d. | -         |

$2x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4} \rightarrow$  equação impossível

b)  $(g \circ f)(-3) = 6 \Leftrightarrow g[f(-3)] = 6 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} g(-4) = 6 \Leftrightarrow k \times (-4) + 2 = 6 \Leftrightarrow$

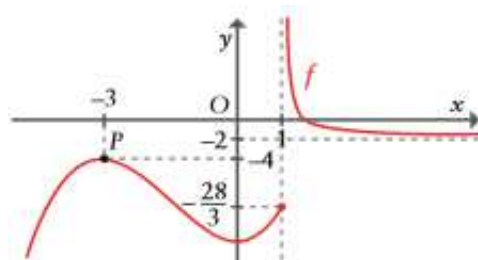
$\Leftrightarrow -4k = 4 \Leftrightarrow k = -1$

(\*)  $f(-3) = \frac{2}{3} \times (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 13 = -4$

c)  $\frac{2x-3}{1-x} = -2 - \frac{1}{1-x} = -2 + \frac{1}{x-1}$   

$$\begin{array}{r|rr} 2x & -3 & -x & +1 \\ -2x & +2 & -2 & \\ \hline & -1 & & \end{array}$$

$D'_f = ]-\infty, -4] \cup ]-2, +\infty[$

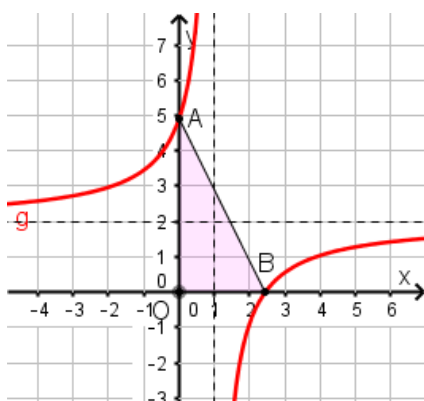


88. a)  $4 - \frac{4}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x \in ] - \infty, -2[ \cup [2, +\infty[$

|                   |           |      |     |     |           |
|-------------------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$               | $-\infty$ | $-2$ |     | $2$ | $+\infty$ |
| $x-2$             | $-$       | $-$  | $-$ | $0$ | $+$       |
| $x+2$             | $-$       | $0$  | $+$ | $+$ | $+$       |
| $\frac{x-2}{x+2}$ | $+$       | n.d. | $-$ | $0$ | $+$       |

b)  $f(0) = 4 - \frac{4}{0+2} = 2 \quad A(0, 2)$   
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+8-4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4x+4 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \quad B(-1, 0)$   
 $r: y = 4 \quad s: x = -2 \quad C(-2, 4) \quad D(0, 4)$   
 $A_{[ABCD]} = A_{[OBCD]} - A_{[OBA]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{BO}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{BO} \times \overline{OA}}{2} = \frac{2+1}{2} \times 4 - \frac{1 \times 2}{2} =$   
 $= 5 \text{ (u.a.)}$

89.  $g(x) = 2 + \frac{k}{x-1}$  com  $k < 0$  Equações das assíntotas:  $y = 2$ ;  $x = 1$



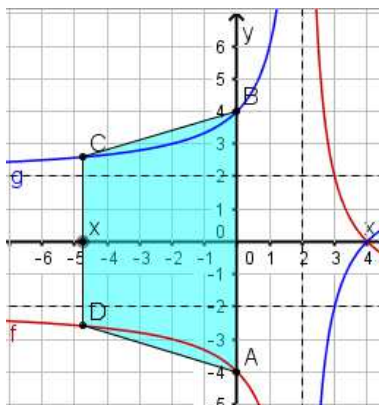
$g(0) = 2 + \frac{k}{0-1} = 2 - k; \quad \overline{OA} = 2 - k$   
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{k}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2+k}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x-2+k = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{2-k}{2}$   
 $\overline{OB} = \frac{2-k}{2}$   
 $A_{[AOB]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\frac{2-k}{2} \times (2-k)}{2} = 6 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{(2-k)^2}{4} = 6 \Leftrightarrow (2-k)^2 = 24 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2-k = \pm\sqrt{24} \Leftrightarrow 2-k = \pm 2\sqrt{6} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow k = 2 \pm 2\sqrt{6}$

Como  $k < 0$  vem  $k = 2 - 2\sqrt{6}$

Logo  $g(x) = 2 + \frac{2-2\sqrt{6}}{x-1} = \frac{2x-2+2-2\sqrt{6}}{x-1} = \frac{2x-2\sqrt{6}}{x-1} \quad a = 2, b = -2\sqrt{6} \text{ e } c = 1$

90.  $f(0) = -2 + \frac{4}{0-2} = -4$ ;  $g(0) = 4$   $A(0, -4)$ ;  $B(0, 4)$ ;  $C(x, -f(x))$  e  $D(x, f(x))$

com  $x < 0$



$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times (-x) = \frac{8 - f(x) - f(x)}{2} \times (-x) = \frac{8 - 2f(x)}{2} \times (-x) = \\ &= \frac{8 - 2\left(-2 + \frac{4}{x-2}\right)}{2} \times (-x) = \frac{8 + 4 - \frac{8}{x-2}}{2} \times (-x) = \frac{12 - \frac{8}{x-2}}{2} \times (-x) = \\ &= \left(6 - \frac{4}{x-2}\right) \times (-x) = -6x + \frac{4x}{x-2} = \frac{-6x^2 + 12x + 4x}{x-2} = \frac{-6x^2 + 16x}{x-2} \\ A_{[ABCD]} < 39 &\Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 16x}{x-2} < 39 \Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 16x}{x-2} - 39 < 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 16x - 39x + 78}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-6x^2 - 23x + 78}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} (*) \\ -6x^2 - 23x + 78 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (**) \\ x \in ]-6, 0[ \end{matrix} \end{aligned}$$

(\*) se  $x < 0$  vem que  $x - 2 < 0$

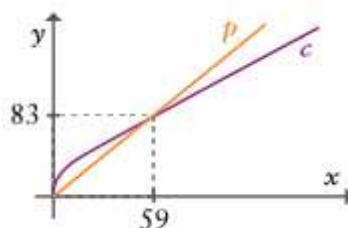
$$\begin{aligned} (**) -6x^2 - 23x + 78 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 4 \times (-6) \times 78}}{2 \times (-6)} \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm 49}{-12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \vee x = -6 \end{aligned}$$

|                    |           |      |     |     |     |                |           |
|--------------------|-----------|------|-----|-----|-----|----------------|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | $-6$ |     | $0$ |     | $\frac{13}{6}$ | $+\infty$ |
| $-6x^2 - 23x + 78$ |           | $0$  | $+$ | $+$ | $+$ | $0$            | $-$       |

91. a) 1 h 15 min = 75 min  $c(75) = \frac{75^2 + 25 \times 75}{75 + 1} = \frac{1875}{19} \approx 98,68421$  min = 1 h 39 min  
12 h + 1 h 39 min = 13 h 39 min

b)  $c(t) = 25 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 25t}{t+1} = 25 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 25t}{t+1} - 25 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 25t - 25t - 25}{t+1} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{t^2 - 25}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 25 = 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = 5$   
 O Manuel chegou com 5 minutos de atraso.

- c) De acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa  $t$  minutos, é dado por  $t + 0,4t$ , ou seja,  $1,4t$ . Consideremos os gráficos das duas funções: a função  $c$ , correspondente ao contrato em vigor, e a função  $p$ , correspondente à proposta do Manuel. Assinalemos o ponto de interseção destes gráficos.



Da análise dos gráficos, concluímos que a proposta do Manuel é favorável ao trabalhador para atrasos inferiores a 59 minutos. Para atrasos superiores a 59 minutos, o contrato em vigor penaliza menos o trabalhador. Quando o atraso é de 59 minutos, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, tempo esse igual a 83 minutos.

## Pág. 108

92. a<sub>1</sub>)  $t.m.v.f,-1,2 = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{0-3}{3} = -1$   
a<sub>2</sub>)  $t.m.v.f,-2,5 = \frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)} = \frac{3-2}{7} = \frac{1}{7}$   
a<sub>3</sub>)  $t.m.v.f,-3,1 = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{-1-2}{4} = -\frac{3}{4}$   
a<sub>4</sub>)  $t.m.v.f,0,4 = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{2-2}{4} = 0$   
a<sub>5</sub>)  $t.m.v.f,-\sqrt{6},-\sqrt{5} = \frac{f(-\sqrt{5})-f(-\sqrt{6})}{-\sqrt{5}-(-\sqrt{6})} = \frac{2-2}{-\sqrt{5}+\sqrt{6}} = 0$   
b) Por exemplo,  $[0, 5]$ .  
c) Por exemplo,  $[-2, 1]$ .
93. a)  $t.m.v.f,-2,3 = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{18+2}{5} = 4$   
 $f(3) = 3^2 + 3 \times 3 = 18$        $f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) = -2$   
 $t.m.v.g,0,2 = \frac{g(2)-g(0)}{2-0} = \frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{7}{15}$   
 $g(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}$        $g(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0+3} = -\frac{1}{3}$
- b) Designemos por  $A$  o ponto de coordenadas  $(-2, f(-2))$  e por  $B$  o ponto de coordenadas  $(3, f(3))$ .  
 $A(-2, -2); B(3, 18); m_{AB} = \frac{18+2}{3+2} = 4;$   
 $AB: y = 4x + b; -2 = 4 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 6$   
 $AB: y = 4x + 6$

$$94. \quad \text{t.m.v.}_{f,-2,3} = 4 \Leftrightarrow \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = 4 \Leftrightarrow \frac{f(3)+6}{5} = 4 \Leftrightarrow f(3) + 6 = 20 \Leftrightarrow f(3) = 14$$

### Pág. 109

$$95. \quad \text{a)} \quad \text{t.m.v.}_{f,a,a+1} = \frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a} = \frac{2(a+1)^2+3-2a^2-3}{1} = \frac{2(a^2+2a+1)-2a^2}{1} = \\ = 2a^2 + 4a + 2 - 2a^2 = 4a + 2$$

$$\text{b)} \quad \text{t.m.v.}_{f,a,2a} = \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = \frac{2(2a)^2-3-2a^2+3}{a} = \frac{8a^2-2a^2}{a} = \frac{6a^2}{a} = 6a$$

$$96. \quad \text{t.m.v.}_{f,a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2b^2+3b-2a^2-3a}{b-a} = \frac{2(b^2-a^2)+3(b-a)}{b-a} = \\ = \frac{2(b-a)(b+a)+3(b-a)}{b-a} = \frac{(b-a)[2(b+a)+3]}{b-a} = 2(b+a) + 3 = 2a + 2b + 3$$

$$97. \quad \text{t.m.v.}_{f,a,b} = -2 \Leftrightarrow m_r = -2; \quad r: \quad \begin{aligned} y &= -2x + b' \\ 0 &= -2 \times 3 + b' \Leftrightarrow b' = 6 \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta  $r$  é  $y = -2x + 6$ .

### Pág. 110

$$98. \quad \text{a)} \quad f'(3)$$

$$\text{b)} \quad g'(1)$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{2} f'(0)$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = f'(-2)$$

$$\text{e)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-h}{d(h-1)-d(-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)}{d(h-1)-d(-1)} \quad (*) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)x}{d(x)-d(-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{(x+1)x}{x+1}}{\frac{d(x)-d(-1)}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\frac{d(x)-d(-1)}{x-(-1)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x}{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{d(x)-d(-1)}{x-(-1)}} = \frac{-1}{d'(-1)} = -\frac{1}{d'(-1)}$$

(\*) Mudança de variável  $x = h - 1 \Leftrightarrow h = x + 1$ . Quando  $h \rightarrow 0$  vem que  $x \rightarrow -1$ .

$$99. \quad \text{a)} \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3x^2+2x-3 \times 1^2-2 \times 1}{x-1} = \frac{3x^2+2x-5}{x-1} \quad (*) \quad \frac{3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-1)}{x-1} = 3x + 5$$

$$(*) \quad 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{3(1+h)^2+2(1+h)-3 \times 1^2-2 \times 1}{h} = \frac{3+6h+3h^2+2+2h-5}{h} = \\ &= \frac{3h^2+8h}{h} = \frac{h(3h+8)}{h} = 3h+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100. \text{ a)} \quad f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1-3x}{2} - \frac{1+3}{2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1-3x-4}{2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{-3x-3}{2}}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)}{2(x+1)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x-1+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x+1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad g'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{x-2} - \frac{3}{1-2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{x-2} + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3+3x-6}{x-2}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-2} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-(-1)^3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x+1) = 3 \end{aligned}$$

$$(*) \quad x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-2}{2x+3} + \frac{2}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x-6+4x+6}{3(2x+3)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x}{3(2x+3)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{6x+9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

- 101.** Designemos por  $r$  a reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $-2$  e por  $s$  a reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $2$ .

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{-2}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x+2}{2x}}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4} \quad m_r = -\frac{1}{4}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$m_s = -\frac{1}{4}$$

As duas retas têm o mesmo declive, logo são paralelas.

$$r: \quad y = -\frac{1}{4}x + b \quad (-2, f(-2)) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \in r$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -1$$

$$\text{Equação reduzida da reta } r: y = -\frac{1}{4}x - 1$$

$$s: \quad y = -\frac{1}{4}x + b' \quad (2, f(2)) = \left(2, \frac{1}{2}\right) \in s$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 2 + b' \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + b' \Leftrightarrow b' = 1$$

$$\text{Equação reduzida da reta } r: y = -\frac{1}{4}x + 1$$

## Pág. 111

- 102. a)**  $d(2) = 2 \times 2^2 + 2 = 10$ ;  $d(0) = 2 \times 0^2 + 0 = 0$ ;  $d(2) - d(0) = 10 - 0 = 10$   
O móvel percorreu 10 metros nos 2 primeiros segundos.

$$\frac{d(2) - d(0)}{2} = 5. \text{ A velocidade média nos 2 primeiros segundos foi 5 m/s.}$$

**b)**  $d(t) = 15 \Leftrightarrow 2t^2 + t = 15 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-15)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm 11}{4} \Leftrightarrow t = -3 \vee t = \frac{5}{2}$

$$\frac{d\left(\frac{5}{2}\right) - d(0)}{\frac{5}{2}} = \frac{15 - 0}{\frac{5}{2}} = 6. \text{ A velocidade média na descida foi de 6 m/s}$$

- 103. a)**  $d(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 40t = 0 \Leftrightarrow -5t(t - 8) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8$   
8 segundos depois de ser lançado o projétil chega ao solo.

**b)**  $d'(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{d(t) - d(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-5t^2 + 40t + 5 \times 3^2 - 40 \times 3}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-5t^2 + 40t - 75}{t - 3} \quad (*)$   
 $= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-5(t-3)(t-5)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} (-5t + 25) = 10$

A velocidade instantânea do projétil 3 segundos depois de ser lançado foi de 10 m/s

$$(*) \quad -5t^2 + 40t - 75 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4 \times (-5) \times (-75)}}{2 \times (-5)} \Leftrightarrow t = \frac{-40 \pm 10}{-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 5$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad d'(4) &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{-5t^2 + 40t + 5 \times 4^2 - 40 \times 4}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{-5t^2 + 40t - 80}{t - 4} \quad (*) \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{-5(t-4)^2}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} (-5t + 20) = 0 \end{aligned}$$

A velocidade instantânea do projétil 4 segundos depois de ser lançado foi de 0 m/s.

$$\begin{aligned} (*) \quad -5t^2 + 40t - 80 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4 \times (-5) \times (-80)}}{2 \times (-5)} \Leftrightarrow t = \frac{-40 \pm 0}{-10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 4 \end{aligned}$$

- 104. a)**  $p(0) = -5$  No instante inicial o ponto  $P$  encontra-se 5 metros à esquerda do ponto  $O$ .  
 $p(10) = 10^3 - 9 \times 10^2 - 5 = 95$   
 Dois segundos antes de terminar o movimento o ponto  $P$  encontra-se 95 metros à direita do ponto  $O$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad p'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(t) - p(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 9t^2 - 5 + 5}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 9t^2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(t-9)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (t(t-9)) = 0 \end{aligned}$$

A velocidade instantânea do ponto  $P$  no instante inicial foi de 0 m/s.

$$\begin{aligned} p'(3) &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{p(t) - p(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 9t^2 - 5 - 3^3 + 9 \times 3^2 + 5}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 9t^2 + 54}{t - 3} \quad (*) \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t^2 - 6t - 18)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} (t^2 - 6t - 18) = 9 - 18 - 18 = -27 \end{aligned}$$

A velocidade instantânea do ponto  $P$  no instante  $t = 3$  foi de  $-27$  m/s.

$$(*) \quad t^3 - 9t^2 + 54 = (t-3)(t^2 - 6t - 18) \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 0 & 54 \\ 3 & & 3 & -18 & -54 \\ \hline & 1 & -6 & -18 & 0 \end{array}$$

## Pág. 112

$$\begin{aligned} \text{105. a)} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)-3}{5} - \frac{2x-3}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+2h-3-2x+3}{5h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-3(x+h)^2 - x+3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3(x^2+2xh+h^2)+3x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3x^2-6xh-3h^2+3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-6xh-3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-6x-3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1-6x-3h) = 1-6x \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1-6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 106. \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3(x+h)^2 - 2(x+h)}{2} - \frac{3x^2 - 2x}{2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h - 3x^2 + 2x}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 2h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h - 2)}{2h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x + 3h - 2}{2} = \frac{6x - 2}{2} = 3x - 1 \\
 f'(x) &= 1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

A reta tem declive 1 e passa pelo ponto de coordenadas  $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ .

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{2} = 0$$

$$y = x + b \quad 0 = \frac{2}{3} + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Equação reduzida: } y = x - \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 107. \quad f'(0) &= 3; \quad m = 3 \quad \text{A reta passa pelo ponto de coordenadas } (0, f(0)) = (0, -1) \\
 &\text{A ordenada na origem é } -1 \\
 &\text{Equação reduzida da reta: } y = 3x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 108. \quad f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \stackrel{(*)}{=} \lim_{j \rightarrow 0} \frac{-f(x+j) + f(x)}{-j} = \\
 &= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{f(x+j) - f(x)}{j} = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x), \text{ logo } f' \text{ é uma função par}
 \end{aligned}$$

(\*) mudança de variável  $j = -h$ .

109. a)  $f$  é a composta de duas funções contínuas, uma função afim e a função módulo, logo é uma função contínua.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 2x - 1 \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{se } 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2x + 1 - 0}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = -2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x - 1 - 0}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2$$

Não existe  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ , portanto  $f$  não é diferenciável em  $\frac{1}{2}$ .

b) É contínua, pois é diferenciável no domínio.

- 110. a)** Falso, veja-se, por exemplo, a função  $f$  do exercício 109.
- b)** Verdadeiro, trata-se do contrarrecíproco do teorema: Se uma função é diferenciável num ponto, então é contínua nesse ponto.
- 111.** A função é diferenciável em  $-1$ , logo é contínua em  $-1$ . Portanto,  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ .
- 112.** A função não é contínua em  $-1$ , logo, não é diferenciável em  $-1$ .
- 113.** A função é contínua em  $-1$ ; não há informação que permita decidir se é diferenciável.

### Pág. 113

- 114. a)**  $f'(x) = (3)' - (2x)' = 0 - 2 = -2$
- b)**  $f'(x) = (3x)' + \left(\frac{1}{2}x^3\right)' + [(\pi + 2)^3]' = 3 + \frac{3}{2}x^2 + 0 = 3 + \frac{3}{2}x^2$
- c)**  $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{1}{3} + \frac{(3)' \times x - 3 \times (x)'}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{0 \times x - 3 \times 1}{x^2} = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{3x^2}$
- d)**  $f'(x) = (\sqrt{2}x)' + (\sqrt{4x})' = \sqrt{2} + (4x)' \times \frac{1}{2\sqrt{4x}} = \sqrt{2} + \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \sqrt{2} + \frac{4}{4\sqrt{x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{x}}{x}$
- e)**  $f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' =$   
 $= \frac{(3x-1)' \times (x+2) - (3x-1) \times (x+2)'}{(x+2)^2} + \frac{(x)' \times (x^2+1) - x \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$   
 $= \frac{3 \times (x+2) - (3x-1) \times 1}{(x+2)^2} + \frac{1 \times (x^2+1) - x \times (2x+0)}{(x^2+1)^2} =$   
 $= \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
- f)**  $f'(x) = (x)' \times (1-2x)^3 + x \times [(1-2x)^3]' =$   
 $= 1 \times (1-2x)^3 + x \times 3 \times (1-2x)^2(1-2x)' = (1-2x)^3 + 3x(1-2x)^2 \times (-2) =$   
 $= (1-2x)^3 - 6x(1-2x)^2 = (1-2x)^2(1-2x-6x) = (1-2x)^2(1-8x)$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad f'(x) &= \left(\frac{1}{2x+3}\right)' - \left(\frac{1}{(2x+3)^2}\right)' = \\
&= \frac{(1)' \times (2x+3) - 1 \times (2x+3)'}{(2x+3)^2} - \frac{(1)' \times (2x+3)^2 - 1 \times [(2x+3)^2]'}{((2x+3)^2)^2} = \\
&= \frac{0 \times (2x+3) - 1 \times 2}{(2x+3)^2} - \frac{0 \times (2x+3)^2 - 1 \times 2 \times (2x+3)(2x+3)'}{(2x+3)^4} = \\
&= \frac{-2}{(2x+3)^2} - \frac{-1 \times 2 \times (2x+3) \times 2}{(2x+3)^4} = \frac{-2}{(2x+3)^2} - \frac{-4(2x+3)}{(2x+3)^4} = \frac{-2}{(2x+3)^2} + \frac{4}{(2x+3)^3} = \\
&= \frac{-4x-6+4}{(2x+3)^3} = -\frac{4x+2}{(2x+3)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad f'(x) &= (x)' \times \sqrt{6-x} + x \times (\sqrt{6-x})' = \sqrt{6-x} + x \times \frac{(6-x)'}{2\sqrt{6-x}} = \\
&= \sqrt{6-x} - \frac{x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{2(6-x)-x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{12-3x}{2\sqrt{6-x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad f'(x) &= (\sqrt[3]{2x+1})' + \left[\left(\frac{x}{1-3x}\right)^3\right]' = \frac{(2x+1)'}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + 3\left(\frac{x}{1-3x}\right)^2 \times \left(\frac{x}{1-3x}\right)' = \\
&= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + 3\left(\frac{x}{1-3x}\right)^2 \times \frac{1 \times (1-3x) - x \times (-3)}{(1-3x)^2} = \\
&= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{3x^2}{(1-3x)^2} \times \frac{1-3x+3x}{(1-3x)^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{3x^2}{(1-3x)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{j)} \quad f'(x) &= \frac{(x)' \times \sqrt{x^2+2} - x(\sqrt{x^2+2})'}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{\sqrt{x^2+2} - x \times \frac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \\
&= \frac{\sqrt{x^2+2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \\
&= \frac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}
\end{aligned}$$

## Pág. 114

115. Começemos por determinar o declive da reta  $r$ .  $A\left(4, -\frac{7}{2}\right)$

Designemos por  $B$  o ponto de coordenadas  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $\left(0, \frac{1}{2}\right) - \left(4, -\frac{7}{2}\right) = (-4, 4)$

$$m = \frac{4}{-4} = -1 = f'(4)$$

Vejam agora a derivada da função  $g$ .

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' - (\sqrt{x})' = \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad g'(4) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{a)} \quad (f - g)'(4) = f'(4) - g'(4) = -1 - \frac{7}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$\text{b)} \quad (f \times g)'(4) = f'(4) \times g(4) + f(4) \times g'(4) = -1 \times \left(\frac{4^2}{4} - \sqrt{4}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) \times \frac{7}{4} = -\frac{65}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(4) &= \frac{f'(4) \times g(4) - f(4) \times g'(4)}{(g(4))^2} = \frac{(-1) \times \left(\frac{4^2}{4} - \sqrt{4}\right) - \left(-\frac{7}{2}\right) \times \frac{7}{4}}{\left(\frac{4^2}{4} - \sqrt{4}\right)^2} = \\ &= \frac{(-1) \times 2 - \left(-\frac{7}{2}\right) \times \frac{7}{4}}{2^2} = \frac{33}{32} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad (f^3)'(4) = 3 \times f^2(4) \times f'(4) = 3 \times (f(4))^2 \times f'(4) = 3 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 \times (-1) = -\frac{147}{4}$$

**116.** Começamos por determinar a imagem de 2 por meio da função  $f$ .  $f(2) = -3 \times 2 + 1 = -5$   
 $f'(2) = -3$

Vejamos agora a derivada da função  $g$ .

$$g'(x) = \left[\frac{1}{3}(x^3 + 1)\right]' = \frac{1}{3} \times (x^3 + 1)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2 \quad ; \quad g'(2) = 2^2 = 4$$

$$g(2) = \frac{1}{3}(2^3 + 1) = 3$$

$$\text{a)} \quad (f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -3 + 4 = 1$$

$$\text{b)} \quad (f \times g)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) = -3 \times 3 + (-5) \times 4 = -9 - 20 = -29$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(2) = \frac{(1)' \times g(2) - 1 \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{-4}{9}$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(2) = \frac{(1)' \times f(2) - 1 \times f'(2)}{(f(2))^2} = \frac{3}{25}$$

$$\text{e)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{-3 \times 3 + 5 \times 4}{9} = \frac{11}{9}$$

$$\text{f)} \quad (g \circ f)'(2) = g'[f(2)] \times f'(2) = g'(-5) \times (-3) = (-5)^2 \times (-3) = -75$$

$$\text{g)} \quad (f^3)'(2) = 3 \times f^2(2) \times f'(2) = 3 \times (f(2))^2 \times f'(2) = 3 \times (-5)^2 \times (-3) = -225$$

**117.** Começemos por determinar a derivada da função  $f$ .

$$f'(x) = \left( \frac{2}{x^2+3} \right)' = \frac{(2)' \times (x^2+3) - 2 \times (x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{-2 \times 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad f(-1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Determinemos a equação reduzida da reta  $r$ . Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de coordenadas  $(-3, 0)$  e  $(0, 5)$ , respetivamente.

$\overrightarrow{AB} = B - A$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  são  $(0, 5) - (-3, 0) = (3, 5)$ .

$$m_r = \frac{5}{3} = g'(-1); \quad r: y = \frac{5}{3}x + 5. \quad g(-1) = \frac{5}{3}(-1) + 5 = \frac{10}{3}$$

**a)**  $(f + g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = \frac{1}{4} + \frac{5}{3} = \frac{23}{12}$

**b)**  $(f \times g)'(-1) = f'(-1) \times g(-1) + f(-1) \times g'(-1) = \frac{1}{4} \times \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

**c)**  $\left( \frac{g}{f} \right)'(-1) = \frac{g'(-1) \times f(-1) - g(-1) \times f'(-1)}{(f(-1))^2} = \frac{\frac{5}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{10}{3} \times \frac{1}{4}}{\left( \frac{1}{2} \right)^2} = 0$

**118. a)**  $f'(x) = 2x - 1 \quad f'(0) = -1 \quad f(0) = 2$   
Equação:  $y = -x + 2$

**b)**  $f(x) = 4 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 4 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1$   
 $f'(x) = 2x - 1 \quad f'(-1) = -3 \quad f(-1) = 4$   
 $y = -3x + b \Leftrightarrow 4 = -3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 1$   
Equação:  $y = -3x + 1$

**c)**  $y = -2x + 3 \quad m = -2$   
 $f'(x) = 2x - 1 \quad f'(x) = -2 \Leftrightarrow 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$   
 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{11}{4}$   
 $y = -2x + b \Leftrightarrow \frac{11}{4} = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{4}$   
Equação:  $y = -2x + \frac{7}{4}$

**d)** Para a reta ser perpendicular à reta de equação  $x = 1$  o seu declive terá que ser 0.  
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$   
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$   
A reta tem declive 0 e passa no ponto de coordenadas  $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ .  
Equação:  $y = \frac{7}{4}$

**119. a)**  $f'(x) = \left(\frac{2x}{x+3}\right)' = \frac{2 \times (x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2};$   
 $f'(-1) = \frac{6}{(-1+3)^2} = \frac{3}{2}$        $f(-1) = \frac{-2}{2} = -1$   
 $y = \frac{3}{2}x + b \Leftrightarrow -1 = \frac{3}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$   
 Equação:  $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

**b)**  $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2};$   
 $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{6}{(x+3)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 6 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{6} \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{6}$   
 $f(-3 - \sqrt{6}) = \frac{-6-2\sqrt{6}}{-3-\sqrt{6}+3} = \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}+12}{6} = \sqrt{6} + 2$   
 $f(-3 + \sqrt{6}) = \frac{-6+2\sqrt{6}}{-3+\sqrt{6}+3} = \frac{-6+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{-6\sqrt{6}+12}{6} = -\sqrt{6} + 2$   
 Coordenadas dos pontos:  $(-3 - \sqrt{6}, \sqrt{6} + 2)$  e  $(-3 + \sqrt{6}, -\sqrt{6} + 2)$

- c)** Não há retas tangentes ao gráfico de  $f$  que sejam paralelas às bissetrizes dos quadrantes pares porque:
- retas paralelas têm declive igual;
  - o declive das bissetrizes dos quadrantes pares é  $-1$ ;
  - o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual à derivada da função na abscissa desse ponto;
  - $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$  e  $\forall x \in D_f, f'(x) > 0$

**120.**  $m = \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$   
 $f'(x) = 4 \times (2x-1)^3 \times (2x-1)' = 4 \times (2x-1)^3 \times 2 = 8 \times (2x-1)^3$   
 $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 8 \times (2x-1)^3 = -1 \Leftrightarrow (2x-1)^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 2x-1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(2 \times \frac{1}{4} - 1\right)^4 = \frac{1}{16}$   
 As coordenadas do ponto são  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ .

**121.**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$        $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 $f'(x) = -\frac{(2)' \times \sqrt{x} - 2 \times (\sqrt{x})'}{x} = -\frac{-2 \times \frac{(x)'}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$   
 $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 = 3\sqrt{x} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3x^4 = 9x \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 3) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = 0 \vee x^3 = 3) \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3}) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$   
 $f(\sqrt[3]{3}) = -\frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}} = -\frac{2}{\sqrt[6]{3}} = -\frac{2\sqrt[6]{3^5}}{3}$   
 As coordenadas do ponto são  $\left(\sqrt[3]{3}, -\frac{2\sqrt[6]{3^5}}{3}\right)$ .

122. A inclinação da reta  $r$  é  $120^\circ$ .

$$m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$f'(x) = 2x - 3 \quad f'(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 3 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) &= \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{4} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto são  $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ .

123.  $g'(x) = 3ax^2 + 3 \quad g'(-1) = 2 \Leftrightarrow 3a + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x + 2c$$

O ponto da reta que tem abscissa  $-1$  tem ordenada  $2 \times (-1) - 1 = -3$ , logo  $g(-1) = -3$   
 $-\frac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1) + 2c = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 3 + 2c = -3 \Leftrightarrow 2c = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{6}$

124.  $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$

O ponto da reta que tem abscissa  $1$  tem ordenada  $2 \times 1 - 3 = -1$ , logo  $(f \circ g)(1) = -1$ .

$$(f \circ g)(1) = -1 \Leftrightarrow f(g(1)) = -1 \Leftrightarrow f(a) = -1 \Leftrightarrow a^3 = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(1) &= 2 \Leftrightarrow f'(g(1)) \times g'(1) = 2 \Leftrightarrow f'(a) \times b = 2 \Leftrightarrow 3a^2 \times b = 2 \Leftrightarrow 3(-1)^2 \times b = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

125. a)  $f'(x) = 3x^2 - 2x \quad D_{f'} = \mathbb{R}$   
 $g'(x) = \left(\frac{x^2-5}{x+3}\right)' = \frac{2x \times (x+3) - (x^2-5) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+5}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2};$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$\begin{aligned} j'(x) &= (x)' \times \sqrt{8-2x} + x \left(\sqrt{8-2x}\right)' = \sqrt{8-2x} + x \frac{(8-2x)'}{2\sqrt{8-2x}} = \\ &= \sqrt{8-2x} - \frac{2x}{2\sqrt{8-2x}} = \sqrt{8-2x} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \sqrt{8-2x} - \frac{x\sqrt{8-2x}}{8-2x} = \\ &= \frac{(8-2x)\sqrt{8-2x} - x\sqrt{8-2x}}{8-2x} = \frac{(8-3x)\sqrt{8-2x}}{8-2x} \end{aligned}$$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : 8-2x > 0\} = ]-\infty, 4[$$

b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+6x+5 = 0 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 4}{2} \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1$$

$$\begin{aligned}
 j'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{(8-3x)\sqrt{8-2x}}{8-2x} = 0 \Leftrightarrow (8-3x)\sqrt{8-2x} = 0 \wedge x < 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (8-3x=0 \vee \sqrt{8-2x}=0) \wedge x < 4 \Leftrightarrow \left(x = \frac{8}{3} \vee 8-2x=0\right) \wedge x < 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x = \frac{8}{3} \vee x = 4\right) \wedge x < 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

c)

|      |           |   |   |               |           |
|------|-----------|---|---|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0 |   | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
| $f'$ | +         | 0 | - | 0             | +         |

|                |           |    |   |      |   |    |           |
|----------------|-----------|----|---|------|---|----|-----------|
| $x$            | $-\infty$ | -5 |   | -3   |   | -1 | $+\infty$ |
| $x^2 + 6x + 5$ | +         | 0  | - | -    | - | 0  | +         |
| $(x+3)^2$      | +         | +  | + | 0    | + | +  | +         |
| $g'$           | +         | 0  | - | n.d. | - | 0  | +         |

|               |           |               |   |      |
|---------------|-----------|---------------|---|------|
| $x$           | $-\infty$ | $\frac{8}{3}$ |   | 4    |
| $8-3x$        | +         | 0             | - | -    |
| $\sqrt{8-2x}$ | +         | +             | + | 0    |
| $j'$          | +         | 0             | - | n.d. |

Porque para  $x < 4$  vem que  $8 - 2x > 0$ , pelo que o sinal da fração apenas depende do sinal do numerador.

## Pág. 116

126. Sendo  $f$  uma função polinomial, é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , então, dado que atinge extremos em  $a$  e em  $b$ , conclui-se que  $f'(a) = 0$  e  $f'(b) = 0$ ; portanto,  $a$  e  $b$  são zeros de  $f'$  e não existem outros porque  $f'$  é uma função quadrática.

Sabe-se também que:

- $\forall x \in ]-\infty, a] \cup [b, +\infty[, f'(x) \geq 0$ , dado que  $f$  é crescente em  $]-\infty, a]$  e em  $[b, +\infty[$ ;
- $\forall x \in [a, b], f'(x) \leq 0$ , pois  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .

127. A função  $f$  é contínua e diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, portanto, cumpre as hipóteses do teorema de Lagrange, pois é contínua em  $[-3, 1]$  e é diferenciável em  $] - 3, 1[$ ;

$$\exists c \in ] - 3, 1[ : f'(c) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{0 + 27 - 3}{4} = 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

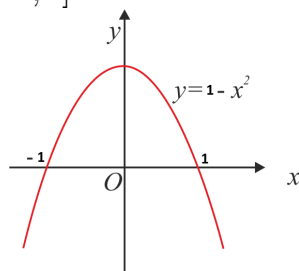
$$f'(c) = 6 \wedge c \in ] - 3, 1[ \Leftrightarrow 3c^2 - 1 = 6 \wedge c \in ] - 3, 1[ \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{3} \wedge c \in ] - 3, 1[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \wedge c \in ] - 3, 1[ \Leftrightarrow c = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3 + \sqrt{\frac{7}{3}} = -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + \sqrt{\frac{7}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

As coordenadas do ponto são  $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ .

128.  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$



A função  $g$  é contínua em  $[-1, 1]$  e diferenciável em  $] - 1, 1[$  e, portanto, é contínua em  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$  e diferenciável em  $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$ ; ou seja cumpre as hipóteses do teorema de Lagrange.

$$\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[: g'(c) = \frac{g(1) - g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{0 - \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} g'(c) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[ &\Leftrightarrow -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3-3c^2} = 3c \wedge c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[ \Leftrightarrow 3-3c^2 = 9c^2 \wedge c \geq 0 \wedge c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = 12c^2 \wedge c \in [0, 1[ \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

129. A função não é diferenciável em 0.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = +\infty$$

## Pág. 117

130. a)  $D_a = \mathbb{R}; a'(x) = 2x - 3x^2 + 8$

Atendendo a que a função  $a$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$\begin{aligned} a'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3) \times 8}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{-6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

|      |           |                |   |     |           |
|------|-----------|----------------|---|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{4}{3}$ |   | 2   | $+\infty$ |
| $a'$ | -         | 0              | + | 0   | -         |
| $a$  |           | Mín            |   | Máx |           |

$$a\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 8\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -\frac{203}{27}$$

$$a(2) = 2^2 - 2^3 + 8 \times 2 - 1 = 11$$

Decrescente em  $\left]-\infty, -\frac{4}{3}\right]$  e em  $[2, +\infty[$  e crescente em  $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ ; atinge um

mínimo relativo igual a  $-\frac{203}{27}$  em  $-\frac{4}{3}$  e atinge um máximo relativo igual a 11 em 2. Não existem extremos absolutos porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

b)  $D_b = \mathbb{R}; \quad b'(x) = x^3 - 4x$

Atendendo a que a função  $b$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

|           |            |      |            |     |            |     |            |
|-----------|------------|------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $x$       | $-\infty$  | $-2$ |            | $0$ |            | $2$ | $+\infty$  |
| $x$       | $-$        | $-$  | $-$        | $0$ | $+$        | $+$ | $+$        |
| $x^2 - 4$ | $+$        | $0$  | $-$        | $-$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $b'$      | $-$        | $0$  | $+$        | $0$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $b$       | $\searrow$ | Mín  | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

$$b(-2) = \frac{1}{4} \times (-2)^4 - 2 \times (-2)^2 + 2 = -2$$

$$b(0) = \frac{1}{4} \times 0^4 - 2 \times 0^2 + 2 = 2$$

$$b(2) = \frac{1}{4} \times 2^4 - 2 \times 2^2 + 2 = -2$$

Decrescente em  $] -\infty, -2]$  e em  $[0, 2]$  e crescente em  $[-2, 0]$  e em  $[2, +\infty[$ ; atinge um mínimo relativo e absoluto igual a  $-2$  em  $-2$  e em  $2$  e atinge um máximo relativo igual a  $2$  em  $0$ . Não existe máximo absoluto porque, por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x^4\right) = +\infty$ .

c)  $D_c = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad c'(x) = 1 - \frac{(1)' \times x - 1 \times (x)'}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

Atendendo a que a função  $c$  é diferenciável e que o domínio é uma reunião de intervalos abertos, sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{equação impossível}}$$

|      |            |      |            |
|------|------------|------|------------|
| $x$  | $-\infty$  | $0$  | $+\infty$  |
| $c'$ | $+$        | n.d. | $+$        |
| $c$  | $\nearrow$ | n.d. | $\nearrow$ |

Crescente em  $] -\infty, 0[$  e em  $]0, +\infty[$ . Não existem extremos relativos nem absolutos.

d)  $D_d = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad d'(x) = 1 + \frac{(1)' \times x - 1 \times (x)'}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

Atendendo a que a função  $d$  é diferenciável e que o domínio é uma reunião de intervalos abertos, sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

|           |            |      |            |      |            |     |            |
|-----------|------------|------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$       | $-\infty$  | $-1$ |            | $0$  |            | $1$ | $+\infty$  |
| $x^2 - 1$ | $+$        | $0$  | $-$        | $-$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $x^2$     | $+$        | $+$  | $+$        | $0$  | $+$        | $+$ | $+$        |
| $d'$      | $+$        | $0$  | $-$        | n.d. | $-$        | $0$ | $+$        |
| $d$       | $\nearrow$ | Máx  | $\searrow$ | n.d. | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

$$d(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2;$$

$$d(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Decrescente em  $[-1, 0[$  e em  $]0, 1]$  e crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$ ; atinge um mínimo relativo igual a  $-2$  em  $1$  e atinge um máximo relativo igual a  $-2$  em  $-1$ . Não existem extremos absolutos porque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} d(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} d(x) = -\infty$ .

e)  $D_e = \mathbb{R}; \quad e'(x) = x^3 - 3x^2$

Atendendo a que a função  $e$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$e'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

|         |           |   |   |     |           |
|---------|-----------|---|---|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 |   | 3   | $+\infty$ |
| $x^2$   | +         | 0 | + | +   | +         |
| $x - 3$ | -         | - | - | 0   | +         |
| $e'$    | -         | 0 | - | 0   | +         |
| $e$     | ↘         |   |   | Mín | ↗         |

$$e(3) = \frac{1}{4} \times 3^4 - 3^3 + \frac{3}{4} = -6$$

Decrescente em  $]-\infty, 3]$  e crescente em  $[3, +\infty[$ ; atinge um mínimo relativo e absoluto igual a  $-6$  em  $3$ . Não existem máximos relativos nem absolutos.

f)  $D_f = \mathbb{R}; \quad f'(x) = \frac{(2x)' \times (x^2+1) - 2x \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \times (x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} =$   
 $= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

Atendendo a que a função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

|               |           |     |   |     |           |
|---------------|-----------|-----|---|-----|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | -1  |   | 1   | $+\infty$ |
| $2 - 2x^2$    | -         | 0   | + | 0   | -         |
| $(x^2 + 1)^2$ | +         | +   | + | +   | +         |
| $f'$          | -         | 0   | + | 0   | -         |
| $f$           | ↘         | Mín | ↗ | Máx | ↘         |

$$f(-1) = \frac{2 \times (-1)}{(-1)^2 + 1} = -1; \quad f(1) = \frac{2 \times 1}{1^2 + 1} = 1$$

Decrescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e crescente em  $[-1, 1]$ ; atinge um mínimo relativo igual a  $-1$  em  $-1$  e atinge um máximo relativo igual a  $1$  em  $1$ . Dado que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$ , estes extremos são absolutos.

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad D_g &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; \quad g'(x) = \frac{(x)' \times (x^2-1) - x \times (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{1 \times (x^2-1) - x \times 2x}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Atendendo a que a função  $g$  é diferenciável e que o domínio é uma reunião de intervalos abertos, sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+1=0}_{\text{equação impossível}}$$

|             |            |      |            |      |            |
|-------------|------------|------|------------|------|------------|
| $x$         | $-\infty$  | $-1$ |            | $1$  | $+\infty$  |
| $-(x^2+1)$  | $-$        | $-$  | $-$        | $-$  | $-$        |
| $(x^2-1)^2$ | $+$        | $0$  | $+$        | $0$  | $+$        |
| $g'$        | $-$        | n.d. | $-$        | n.d. | $-$        |
| $g$         | $\searrow$ | n.d. | $\searrow$ | n.d. | $\searrow$ |

Decrescente em  $] -\infty, -1[$ , em  $] -1, 1[$  e em  $] 1, +\infty[$ ; Não existem extremos relativos nem absolutos.

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad D_h &= \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad h'(x) = \frac{(x^2-4)' \times (x-1)^2 - (x^2-4) \times ((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2} = \\ &= \frac{2x \times (x-1)^2 - (x^2-4) \times 2(x-1) \times 1}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[2x(x-1) - (x^2-4) \times 2]}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{(x-1)^3} = \frac{-2x+8}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Atendendo a que a função  $h$  é diferenciável e que o domínio é uma reunião de intervalos abertos, sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+8}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow -2x+8=0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x=4$$

|           |            |      |            |     |            |
|-----------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$       | $-\infty$  | $1$  |            | $4$ | $+\infty$  |
| $-2x+8$   | $+$        | $+$  | $+$        | $0$ | $-$        |
| $(x-1)^3$ | $-$        | $0$  | $+$        | $+$ | $+$        |
| $h'$      | $-$        | n.d. | $+$        | $0$ | $-$        |
| $h$       | $\searrow$ | n.d. | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

$$h(4) = \frac{4^2-4}{(4-1)^2} = \frac{4}{3}$$

Decrescente em  $] -\infty, 1[$ , e em  $[4, +\infty[$  e crescente em  $] 1, 4[$ ; atinge um máximo relativo igual a  $\frac{4}{3}$  em 4. Dado que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = 1, \text{ este máximo é absoluto.}$$

Não existem mínimos relativos nem absolutos.

i)  $D_i = \mathbb{R}; \quad i'(x) = \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} =$

Atendendo a que a função  $i$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

|                |            |     |            |
|----------------|------------|-----|------------|
| $x$            | $-\infty$  | 0   | $+\infty$  |
| $x$            | $-$        | 0   | $+$        |
| $\sqrt{x^2+4}$ | $+$        | $+$ | $+$        |
| $i'$           | $-$        | 0   | $+$        |
| $i$            | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

$$h(0) = \sqrt{4} = 2$$

Decrescente em  $] -\infty, 0]$ , e crescente em  $[0, +\infty[$ ; atinge um mínimo relativo e absoluto igual a 2 em 0. Não existem máximos relativos nem absolutos.

j)  $D_j = \mathbb{R}; \quad \begin{array}{ll} \text{se } x < 1 & j'(x) = 3x^2; \\ \text{se } x > 1 & j'(x) = 2(x-2) \times 1 = 2x-4 \\ \text{se } x = 1 & j'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{j(x)-j(1)}{x-1} \text{ (caso exista)} \end{array}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{j(x)-j(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2-x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{j(x)-j(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+3}{x-1} \stackrel{(**)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2$$

Não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{j(x)-j(1)}{x-1}$  pelo que a função  $j$  não admite derivada para  $x = 1$ .

$$\text{Então } j'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x-4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{se } x < 1 \quad j'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{se } x > 1 \quad j'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Por outro lado sabemos que  $j$  é contínua em  $\mathbb{R}$  (quer para  $x < 1$ , quer para  $x > 1$  trata-se de restrições de funções contínuas,  $j(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3) = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} j(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x-2)^2) = 1$$

|      |            |   |     |      |            |     |            |
|------|------------|---|-----|------|------------|-----|------------|
| $x$  | $-\infty$  | 0 |     | 1    |            | 2   | $+\infty$  |
| $j'$ | $+$        | 0 | $+$ | n.d. | $-$        | 0   | $+$        |
| $j$  | $\nearrow$ |   |     | Máx  | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

$j(0) = 0$        $j(1) = 1$        $j(2) = 0$   
 Decrescente em  $[1, 2]$ , e crescente em  $] - \infty, 1]$  e em  $[2, +\infty[$ ; atinge um mínimo relativo igual a 0 em 2 e existe um máximo relativo igual a 1 em 1. Não existem extremos absolutos, pois  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-2)^2) = +\infty$

$$(*) \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(**) \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

## Pág. 118

131.  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \geq 0\} = ] - \infty, a]$

132. Falso; dado que  $f'$  é positiva em  $]1, 6[$ , conclui-se que  $f$  é crescente nesse intervalo e, portanto,  $f(4)$  é menor do que  $f(5)$ .

133.

|      |     |   |    |   |     |   |      |
|------|-----|---|----|---|-----|---|------|
| $x$  | -4  |   | -3 |   | 2   |   | 3    |
| $f'$ | +   | + | 0  | + | 0   | - | n.d. |
| $f$  | Mín | ↗ |    |   | Máx | ↘ | n.d. |

Uma vez que  $f$  é diferenciável no seu domínio,  $f$  é contínua.

A função  $f$  é crescente em  $[-4, 2]$  e é decrescente em  $[2, 3]$ ; atinge um máximo relativo e absoluto em 2 e atinge um mínimo relativo em -4. Nada se pode concluir quanto ao mínimo absoluto, sabe-se apenas que a existir será em -4.

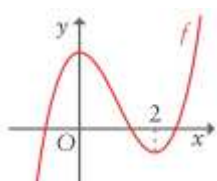
134. a)

|      |           |     |   |     |           |
|------|-----------|-----|---|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0   |   | 2   | $+\infty$ |
| $f'$ | +         | 0   | - | 0   | +         |
| $f$  | ↗         | Máx | ↘ | Mín | ↗         |

Uma vez que  $f$  é diferenciável no seu domínio,  $f$  é contínua.

$f$  é crescente em  $] - \infty, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e é decrescente em  $[0, 2]$ , pois a função é contínua e  $\forall x \in ] - \infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  e  $\forall x \in ]0, 2[$ ,  $f'(x) < 0$ ;  $f$  atinge um máximo relativo em 0 e atinge um mínimo relativo em 2.

b)



135. a)  $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 3 + \frac{6}{x} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{6}{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0[ \cup [3, +\infty[$

|                  |           |      |   |   |           |
|------------------|-----------|------|---|---|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | 0    |   | 3 | $+\infty$ |
| $6-2x$           | +         | +    | + | 0 | -         |
| $x$              | -         | 0    | + | + | +         |
| $\frac{6-2x}{x}$ | -         | n.d. | + | 0 | -         |

b)  $P(2, f(2)) = (2, 6) \quad f'(x) = -\frac{6}{x^2} \quad m_r = f'(2) = -\frac{3}{2}$   
 $r: y = -\frac{3}{2}x + b; \quad 6 = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 9$   
 $y = -\frac{3}{2}x + 9$

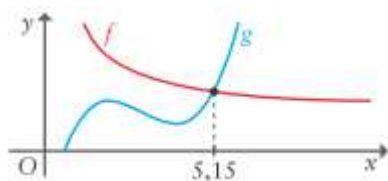
c)  $g'(x) = x^2 - 6x + 8$   
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

|      |            |     |            |     |            |
|------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $x$  | $-\infty$  | 2   |            | 4   | $+\infty$  |
| $g'$ | +          | 0   | -          | 0   | +          |
| $g$  | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

$A(2, g(2)) = \left(2, \frac{11}{3}\right) \quad g(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 \times 2 - 3 = \frac{11}{3}$   
 $C(4, 0) \quad A_{[OAC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times \frac{11}{3}}{2} = \frac{22}{3} \text{ (u.a.)}$

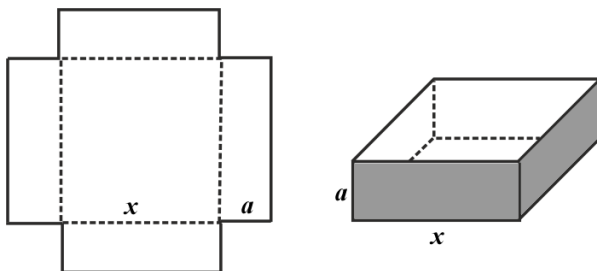
## Pág. 119

d)



As soluções da equação  $f(x) = g(x)$  são as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ . A solução positiva da equação, arredondada às centésimas, é 5,15.

136. a) Designemos por  $a$  a altura, em decímetros, da caixa.



$$V = 500 \text{ dm}^3$$

$$x^2 \times a = 500 \Leftrightarrow a = \frac{500}{x^2}$$

Área da superfície da caixa =

$$= x^2 + 4 \times x \times a = x^2 + 4 \times x \times \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} = \frac{x^3 + 2000}{x} \text{ com } x > 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A(x) &= \frac{x^3 + 2000}{x} & A'(x) &= \frac{(x^3 + 2000)' \times x - (x^3 + 2000) \times (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{3x^2 - x^3 - 2000}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} \end{aligned}$$

Atendendo a que a função  $A$  é diferenciável e que o domínio é um intervalo aberto, sabemos que os extremos só podem ser atingidos nos zeros da derivada.

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$$

|               |      |            |     |            |
|---------------|------|------------|-----|------------|
| $x$           | 0    |            | 10  | $+\infty$  |
| $2x^3 - 2000$ | −    | −          | 0   | +          |
| $x^2$         | 0    | +          | +   | +          |
| $A'$          | n.d. | −          | 0   | +          |
| $A$           | n.d. | $\searrow$ | Mín | $\nearrow$ |

A função tem um mínimo relativo e absoluto para  $x = 10$ . Se  $x = 10$ ,  $a = \frac{500}{10^2} = 5$

As dimensões da caixa que tem menor superfície são 10 dm por 10 dm por 5 dm.

137. a)  $P(x, g(x))$  com  $x \in \mathbb{R}$ .

Designemos por  $s$  a função que a cada ponto do gráfico de  $g$  faz corresponder a soma das suas coordenadas.

$$s(x) = x - x^2 + 4x + 3 = -x^2 + 5x + 3 \quad D_s = \mathbb{R}$$

$$s'(x) = -2x + 5 \quad s'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

|      |            |               |            |
|------|------------|---------------|------------|
| $x$  | $-\infty$  | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$  |
| $s'$ | +          | 0             | −          |
| $s$  | $\nearrow$ | Máx           | $\searrow$ |

$s$  tem um máximo relativo e absoluto para  $x = \frac{5}{2}$ . O ponto do gráfico de  $g$  cuja soma das coordenadas é a maior possível é o ponto de coordenadas  $\left(\frac{5}{2}, g\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{27}{4}\right)$

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{5}{2} + 3 = \frac{27}{4}$$

b)  $P(x, g(x))$  com  $x > 0$  e  $g(x) > 0$

Designemos por  $p$  a função que a cada ponto do gráfico de  $g$  faz corresponder o produto das suas coordenadas.

$$p(x) = x(-x^2 + 4x + 3) = -x^3 + 4x^2 + 3x$$

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge g(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge -x^2 + 4x + 3 > 0\}_{(*)} ]0, 2 + \sqrt{7}[$$

$$p'(x) = -3x^2 + 8x + 3$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 8x + 3 = 0 \wedge x \in ]0, 2 + \sqrt{7}[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-3) \times 3}}{2 \times (-3)} \wedge x \in ]0, 2 + \sqrt{7}[ \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 10}{-6} \wedge x \in ]0, 2 + \sqrt{7}[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \vee x = 3\right) \wedge x \in ]0, 2 + \sqrt{7}[ \Leftrightarrow x = 3$$

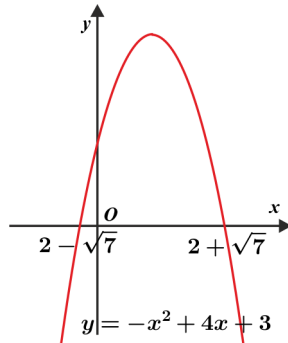
|      |      |            |     |            |                |
|------|------|------------|-----|------------|----------------|
| $x$  | 0    |            | 3   |            | $2 + \sqrt{7}$ |
| $p'$ | n.d. | +          | 0   | -          | n.d.           |
| $p$  | n.d. | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | n.d.           |

$p$  tem um máximo relativo e absoluto para  $x = 3$ . O ponto do gráfico de  $g$  que pertence ao primeiro quadrante e cujo produto das coordenadas é máximo, é o ponto de coordenadas

$$(3, g(3)) = (3, 6); \quad g(3) = -3^2 + 4 \times 3 + 3 = 6$$

$$(*) \quad -x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-2} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{7} \vee x = 2 + \sqrt{7}$$



138. a<sub>1</sub>) A abscissa de  $A$  pertence ao intervalo  $[-4, 1[$ . Para  $x \in [-4, 1]$ ,  $f(x) = \frac{-x^3 - 10x^2 - 17x + 28}{10}$

$$\text{Para } x \in [-4, 1[, f'(x) = \frac{1}{10} \times (-x^3 - 10x^2 - 17x + 28)' =$$

$$= \frac{1}{10} \times (-3x^2 - 20x - 17)$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow \frac{1}{10} \times (-3x^2 - 20x - 17) = 0 \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 20x - 17 = 0 \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \times (-3) \times (-17)}}{2 \times (-3)} \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20 \pm 14}{-6} \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = -\frac{17}{3}\right) \wedge x \in [-4, 1[ \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'(-4) = \frac{1}{10} \times (-3 \times (-4)^2 - 20 \times (-4) - 17) = \frac{3}{2}$$

$$f(-4) = \frac{-(-4)^3 - 10 \times (-4)^2 - 17 \times (-4) + 28}{10} = 0$$

$$f(1) = \frac{-1^3 - 10 \times 1^2 - 17 \times 1 + 28}{10} = 0$$

|      |               |            |      |            |      |
|------|---------------|------------|------|------------|------|
| $x$  | $-4$          |            | $-1$ |            | $1$  |
| $f'$ | $\frac{3}{2}$ | $+$        | $0$  | $-$        | n.d. |
| $f$  | $0$           | $\nearrow$ | Máx  | $\searrow$ | $0$  |

A abscissa de  $A$  é  $-1$ .

**a<sub>2</sub>)**  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^3 - 10x^2 - 17x + 28}{10} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Logo  $f$  é contínua no ponto 1.

**a<sub>3</sub>)**  $D_f$  é um conjunto minorado, logo a existir assíntota horizontal, tal só poderá ocorrer quando  $x$  tende para  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 3$

**b)** Para  $x > 1$ ,  $f'(x) = \frac{[3(x^2 - 2x + 1)]' \times (x^2 - 1) - [3(x^2 - 2x + 1)] \times (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$

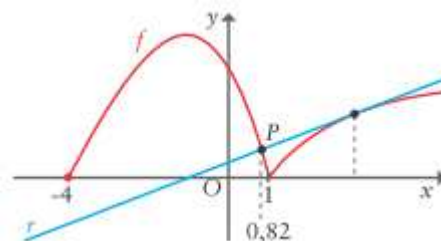
$$= \frac{[3(2x - 2)] \times (x^2 - 1) - [3(x^2 - 2x + 1)] \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6(x-1) \times (x^2 - 1) - 6x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{6(x-1)^2 \times (x+1) - 6x(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{6(x-1)^2 \times [(x+1) - x]}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{6}{(x+1)^2}$$

$$m_r = f'(3) = \frac{6}{(3+1)^2} = \frac{3}{8} \qquad f(3) = \frac{3(3^2 - 2 \times 3 + 1)}{3^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{8}x + b; \qquad \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{8}$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}$$



O ponto tem abscissa 0,82.

139. a)  $f(6) = 0$ ;  $A(6, 0)$ ;

Se a abscissa de  $P$  for 1 vem que as coordenadas de  $P$  serão  $(1, f(1)) = (1, 10)$ .

$$f(1) = -2 \times (-5) = 10$$

As dimensões do retângulo serão 5 (abscissa de  $A$  menos abscissa de  $P$ ) por 10.

Se a abscissa de  $P$  for 2 vem que as coordenadas de  $P$  serão  $(2, f(2)) = (2, 12)$ .

$$f(2) = -3 \times (-4) = 12$$

As dimensões do retângulo serão 4 (abscissa de  $A$  menos abscissa de  $P$ ) por 12.

b)  $f(6) = 0$ ;  $A(6, 0)$ ;  $P(x, f(x)) = (x, -(x+1)(x-6))$   
 $A(x) = (6-x) \times [-(x+1)(x-6)] = (6-x)(x+1)(6-x) = (6-x)^2(x+1) =$   
 $= (36 - 12x + x^2)(x+1) = 36x - 12x^2 + x^3 + 36 - 12x + x^2 = x^3 - 11x^2 + 24x + 36$   
 com  $x \in ]0, 6[$ .

$$A'(x) = 3x^2 - 22x + 24$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 22x + 24 = 0 \wedge x \in ]0, 6[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \times 3 \times 24}}{2 \times 3} \wedge x \in ]0, 6[ \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm 14}{6} \wedge x \in ]0, 6[ \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

|      |      |            |               |            |      |
|------|------|------------|---------------|------------|------|
| $x$  | 0    |            | $\frac{4}{3}$ |            | 6    |
| $A'$ | n.d. | +          | 0             | -          | n.d. |
| $A$  | n.d. | $\nearrow$ | Máx           | $\searrow$ | n.d. |

A área é máxima para  $x = \frac{4}{3}$ .

140. a)  $\overline{FB} = 4 - x$ ;  $\overline{BC}^2 = x^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{x^2 + 4}$  com  $x \in ]0, 4[$   
 $p(x) = 15 \times (4 - x) + 25 \times \sqrt{x^2 + 4} = 60 - 15x + 25\sqrt{x^2 + 4}$

b)  $p'(x) = -15 + 25 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = -15 + \frac{25x}{\sqrt{x^2+4}}$   
 $p'(x) = 0 \Leftrightarrow -15 + \frac{25x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow \frac{25x}{\sqrt{x^2+4}} = 15 \Leftrightarrow 15\sqrt{x^2+4} = 25x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4} = 5x \xrightarrow{(*)} 9(x^2+4) = 25x^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 9x^2 = 36 \Leftrightarrow 16x^2 = 36 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{16} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (*)$  (\*) porque  $x \in ]0, 4[$

|      |      |            |               |            |      |
|------|------|------------|---------------|------------|------|
| $x$  | 0    |            | $\frac{3}{2}$ |            | 4    |
| $p'$ | n.d. | -          | 0             | +          | n.d. |
| $p$  | n.d. | $\searrow$ | Mín           | $\nearrow$ | n.d. |

O preço de colocação da conduta é mínimo para  $x = \frac{3}{2} = 1,5$  isto é se a conduta seguir 2,5 km ao longo do muro.

**141. a)**  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1;$

Comprimento do semieixo maior: 10

Comprimento do semieixo menor: 6

Designemos por  $x$  a abcissa do ponto  $P$ .  $x \in ]0, 10[$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 &\Leftrightarrow 36x^2 + 100y^2 = 3600 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3600 - 36x^2}{100} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3600 - 36x^2}}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{36(100 - x^2)}}{10} \Leftrightarrow y = \pm \frac{6\sqrt{100 - x^2}}{10} \Leftrightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{100 - x^2}}{5} \end{aligned}$$

Como  $P$  pertence ao primeiro quadrante as coordenadas de  $P$  são  $\left(x, \frac{3\sqrt{100 - x^2}}{5}\right)$ .

$$A(x) = 2x \times \frac{6\sqrt{100 - x^2}}{5} = \frac{12x\sqrt{100 - x^2}}{5} = \frac{12}{5} x \sqrt{100 - x^2}$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{12}{5} (x\sqrt{100 - x^2})' = \frac{12}{5} \left( (x)' \times \sqrt{100 - x^2} + x(\sqrt{100 - x^2})' \right) = \\ &= \frac{12}{5} \left( \sqrt{100 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \right) = \frac{12}{5} \left( \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{12}{5} \left( \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow 100 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \quad (\text{porque } x \in ]0, 10[) \end{aligned}$$

|      |      |            |             |            |      |
|------|------|------------|-------------|------------|------|
| $x$  | 0    |            | $5\sqrt{2}$ |            | 10   |
| $A'$ | n.d. | +          | 0           | -          | n.d. |
| $A$  | n.d. | $\nearrow$ | Máx         | $\searrow$ | n.d. |

A área é máxima para  $x = 5\sqrt{2}$  e nesse caso as coordenadas de  $P$  são

$$\left(5\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{100 - 50}}{5}\right) = \left(5\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{2}}{5}\right) = (5\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

**b)**  $p(x) = 4x + \frac{12\sqrt{100 - x^2}}{5} = 4x + \frac{12}{5}\sqrt{100 - x^2}$

$$p'(x) = 4 + \frac{12}{5} \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = 4 - \frac{12x}{5\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} p'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 - \frac{12x}{5\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{12x}{5\sqrt{100 - x^2}} = 4 \Leftrightarrow 20\sqrt{100 - x^2} = 12x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{100 - x^2} = 3x \Leftrightarrow 25(100 - x^2) = 9x^2 \Leftrightarrow 2500 - 25x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \\ &\quad x \in ]0, 10[ \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 34x^2 = 2500 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1250}{17} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1250}}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow x = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow x = \frac{25\sqrt{34}}{17}$$

( porque  $x \in ]0, 10[$  )

|      |      |            |                          |            |      |
|------|------|------------|--------------------------|------------|------|
| $x$  | 0    |            | $\frac{25\sqrt{34}}{17}$ |            | 10   |
| $p'$ | n.d. | +          | 0                        | -          | n.d. |
| $p$  | n.d. | $\nearrow$ | Máx                      | $\searrow$ | n.d. |

O perímetro é máximo para  $x = \frac{25\sqrt{34}}{17}$  e nesse caso as coordenadas de  $P$  são

$$\left( \frac{25\sqrt{34}}{17}, \frac{3\sqrt{100 - \frac{1250}{17}}}{5} \right) = \left( \frac{25\sqrt{34}}{17}, \frac{3\sqrt{\frac{450}{17}}}{5} \right) =$$

$$= \left( \frac{25\sqrt{34}}{17}, \frac{3 \times \frac{15\sqrt{34}}{17}}{5} \right) = \left( \frac{25\sqrt{34}}{17}, \frac{9\sqrt{34}}{17} \right)$$

Logo, o retângulo que tem maior área não é o que tem maior perímetro.

# Estatística

## Pág. 122

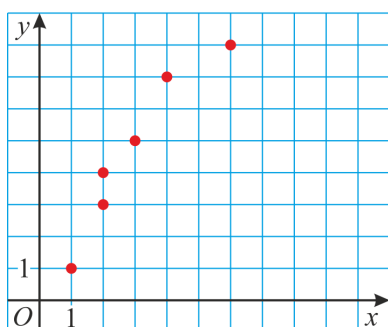
1. a) Funcional
- b) Estatística
- c) Estatística
- d) Funcional
- e) Estatística

## Pág. 123

2. a) Variável explicativa: número de pessoas. Variável resposta: intensidade do ruído.
  - b) Variável explicativa: altura. Variável resposta: melhor marca pessoal
  - c) Variável explicativa: quantidade de açúcar. Variável resposta: aumento da massa gorda.
  - d) Variável explicativa: número médio de horas semanais dedicadas ao estudo. Variável resposta: média das classificações obtidas
  - e) Variável explicativa: massa. Variável resposta: quantidade de vitamina C.
- 
3. a)  $(x, y) = \left( (23, 2), (20, 3), (19, 7), (15, 6), (11, 7), (11, 11), (10, 11), (9, 11), (10, 13), (10, 15), (8, 14), (8, 15), (8, 15), (6, 14), (6, 18), (6, 18) \right)$
  - b)  $(m, s) = \left( (58, 18), (54, 20), (57, 25), (42, 26), (43, 33), (40, 44), (41, 41), (25, 35), (39, 37), (30, 35), (21, 35), (28, 42), (23, 37), (19, 33), (28, 59), (21, 49) \right)$

## Pág. 124

4.



$$\begin{aligned}
5. \quad \text{a)} \quad e_1 &= y_1 - (ax_1 + b) = 10 - (-2 + 12) = 0; \\
e_2 &= y_2 - (ax_2 + b) = 7 - (-4 + 12) = -1; \\
e_3 &= y_3 - (ax_3 + b) = 5 - (-6 + 12) = -1; \\
e_4 &= y_4 - (ax_4 + b) = 5 - (-8 + 12) = 1
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0 - 1 - 1 + 1 = -1$$

## Pág. 125

$$\begin{aligned}
6. \quad \bar{x} = 6 &\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = 6 \Leftrightarrow \frac{4+9+1+6+x_5}{5} = 6 \Leftrightarrow \frac{20+x_5}{5} = 6 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 20+x_5 = 30 \Leftrightarrow x_5 = 10
\end{aligned}$$

$$e_5 = y_5 - (ax_5 + b) \Leftrightarrow -2 = y_5 - (2 \times 10 + 3) \Leftrightarrow y_5 = 21$$

$$\begin{aligned}
7. \quad \text{a)} \quad \bar{x} &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = \frac{3+4+6+7+10}{5} = 6 \\
\bar{y} &= \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5} = \frac{2+2+3+4+4}{5} = 3 \quad C(6, 3)
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Como } 3 = 0,3 \times 6 + 1,2, \text{ a reta passa pelo ponto } C.$$

c) A soma dos desvios verticais é igual a zero se e só se a reta passar pelo centro de gravidade da nuvem de pontos. Como vimos na alínea anterior a reta passa  $r$  pelo ponto  $C$ , logo soma dos desvios verticais dos pontos da nuvem em relação à reta  $r$  é zero.

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad e_1 &= y_1 - (ax_1 + b) = 2 - (0,3 \times 3 + 1,2) = -0,1; \\
e_2 &= y_2 - (ax_2 + b) = 2 - (0,3 \times 4 + 1,2) = -0,4; \\
e_3 &= y_3 - (ax_3 + b) = 3 - (0,3 \times 6 + 1,2) = 0; \\
e_4 &= y_4 - (ax_4 + b) = 4 - (0,3 \times 7 + 1,2) = 0,7; \\
e_5 &= y_5 - (ax_5 + b) = 4 - (0,3 \times 10 + 1,2) = -0,2 \\
e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 &= -0,1 - 0,4 + 0 + 0,7 - 0,2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad \bar{x} = 6 \wedge \bar{y} = 2 \quad r: y &= 0,8x + b \\
C \in r \quad 2 &= 0,8 \times 6 + b \Leftrightarrow b = -2,8 \\
r: y &= 0,8x - 2,8 \\
e_i = y_i - (ax_i + b) &= 7 - (0,8 \times 10 - 2,8) = 1,8
\end{aligned}$$

## pág. 126

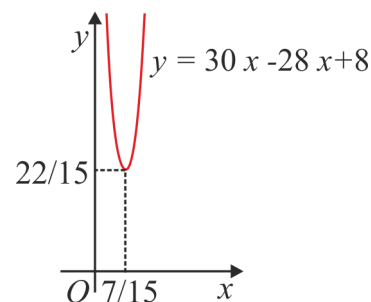
$$\begin{aligned}
9. \quad \text{a)} \quad \bar{x} &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{2+3+6+9}{4} = 5 \\
\bar{y} &= \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} = \frac{2+4+4+6}{4} = 4 \quad C(5, 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad r: y &= ax + b \\
\text{Como a reta } r &\text{ passa pelo ponto } C \text{ vem que } 4 = a \times 5 + b \Leftrightarrow b = 4 - 5a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad e_1 &= y_1 - (ax_1 + b) = 2 - (a \times 2 + 4 - 5a) = 3a - 2; \\ e_2 &= y_2 - (ax_2 + b) = 4 - (a \times 3 + 4 - 5a) = 2a; \\ e_3 &= y_3 - (ax_3 + b) = 4 - (a \times 6 + 4 - 5a) = -a; \\ e_4 &= y_4 - (ax_4 + b) = 6 - (a \times 9 + 4 - 5a) = -4a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad e_1^2 &= (3a - 2)^2 = 9a^2 - 12a + 4; & e_2^2 &= 4a^2; \\ e_3^2 &= a^2; & e_4^2 &= (-4a + 2)^2 = 16a^2 - 16a + 4 \\ e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 &= 9a^2 - 12a + 4 + 4a^2 + a^2 + 16a^2 - 16a + 4 = 30a^2 - 28a + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 &= 30a^2 - 28a + 8 = \\ &= 30\left(a^2 - \frac{28}{30}a + \frac{8}{30}\right) = 30\left(a^2 - \frac{14}{15}a + \frac{4}{15}\right) = \\ &= 30\left(a^2 - \frac{14}{15}a + \left(\frac{14}{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \left(\frac{14}{30}\right)^2\right) = \\ &= 30\left(\left(a - \frac{14}{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \left(\frac{14}{30}\right)^2\right) = \\ &= 30\left(\left(a - \frac{7}{15}\right)^2 + \frac{4}{15} - \left(\frac{7}{15}\right)^2\right) = \\ &= 30\left(\left(a - \frac{7}{15}\right)^2 + \frac{4}{15} - \frac{49}{225}\right) = 30\left(\left(a - \frac{7}{15}\right)^2 + \frac{11}{225}\right) = 30\left(a - \frac{7}{15}\right)^2 + \frac{22}{15} \end{aligned}$$



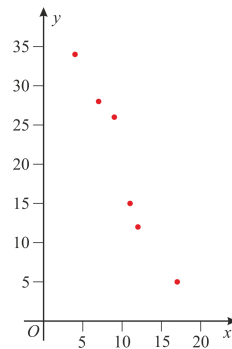
Mínimo para  $a = \frac{7}{15}$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad r: y &= ax + b \\ a &= \frac{7}{15} \quad \text{e} \quad b = 4 - 5a = 4 - 5 \times \frac{7}{15} = \frac{5}{3} \end{aligned} \quad \text{Equação da reta: } y = \frac{7}{15}x + \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = \frac{10 + 12 + 4 + 8 + 19 + 17 + 23 + 3}{8} = 12 \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{8} = \frac{3 + 6 - 2 + 3 + 13 + 10 + 16 - 1}{8} = 6 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 10 \times 3 + 12 \times 6 + 4 \times (-2) + 8 \times 3 + 19 \times 13 + 17 \times 10 + 23 \times 16 + 3 \times (-1) = \\ &= 900 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 10^2 + 12^2 + 4^2 + 8^2 + 19^2 + 17^2 + 23^2 + 3^2 = 1512 \\ SS_x &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = 1512 - 8 \times 12^2 = 360 \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{900 - 8 \times 12 \times 6}{360} = \frac{9}{10} \\ b &= \bar{y} - a\bar{x} = 6 - \frac{9}{10} \times 12 = -\frac{24}{5} \end{aligned}$$

Equação reduzida da reta de mínimos quadrados:  $y = \frac{9}{10}x - \frac{24}{5}$

11. a)



b) O coeficiente de correlação linear associado a esta amostra é um valor próximo de  $-1$ .

c) 
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}}; \quad SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2; \quad SS_y = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2$$

| $i$  | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \times y_i$ |
|------|-------|-------|---------|---------|------------------|
| 1    | 4     | 34    | 16      | 1156    | 136              |
| 2    | 7     | 28    | 49      | 784     | 196              |
| 3    | 9     | 26    | 81      | 676     | 234              |
| 4    | 11    | 15    | 121     | 225     | 165              |
| 5    | 12    | 12    | 144     | 144     | 144              |
| 6    | 17    | 5     | 289     | 25      | 85               |
| soma | 60    | 120   | 700     | 3010    | 960              |

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = \frac{60}{6} = 10; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

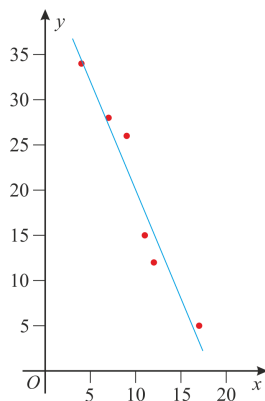
$$SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 = 700 - 6 \times 10^2 = 100; \quad SS_y = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 = 3010 - 6 \times 20^2 = 610$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{960 - 6 \times 10 \times 20}{\sqrt{100 \times 610}} = \frac{-240}{10 \sqrt{610}} \approx -0,97$$

d) 
$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{-240}{100} = -\frac{12}{5}; \quad b = \bar{y} - a \bar{x} = 20 + \frac{12}{5} \times 10 = 44$$

Equação reduzida da reta de mínimos quadrados:  $y = -\frac{12}{5}x + 44$

e)



12.  $A \rightarrow 0,99$

$B \rightarrow -0,96$

$C \rightarrow 0,35$

### Pág. 128

13. a)  $\|\vec{u}\|^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 = SS_x$  (recorda que  $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ )  
 $\|\vec{v}\|^2 = (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + (y_3 - \bar{y})^2 = SS_y$

b)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x} \sqrt{SS_y}} = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = r$

c)  $|r| = 1 \Leftrightarrow |\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = 1 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \vee \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \vee (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi \Leftrightarrow \text{os vetores } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são colineares} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, y_3 - \bar{y}) = \lambda (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y_1 - \bar{y} = \lambda(x_1 - \bar{x}) \wedge y_2 - \bar{y} = \lambda(x_2 - \bar{x}) \wedge y_3 - \bar{y} = \lambda(x_3 - \bar{x}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y_1 - \bar{y} = \lambda x_1 - \lambda \bar{x} \wedge y_2 - \bar{y} = \lambda x_2 - \lambda \bar{x} \wedge y_3 - \bar{y} = \lambda x_3 - \lambda \bar{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y_1 = \lambda x_1 + \bar{y} - \lambda \bar{x} \wedge y_2 = \lambda x_2 + \bar{y} - \lambda \bar{x} \wedge y_3 = \lambda x_3 + \bar{y} - \lambda \bar{x}$

Seja  $t$  a reta de equação  $y = \lambda x + (\bar{y} - \lambda \bar{x})$ .

Tem-se então que:

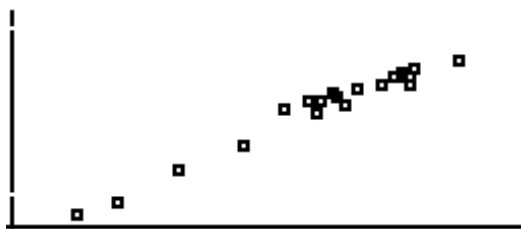
$y_1 = \lambda x_1 + \bar{y} - \lambda \bar{x} \Leftrightarrow P_1(x_1, y_1) \in t$

$y_2 = \lambda x_2 + \bar{y} - \lambda \bar{x} \Leftrightarrow P_2(x_2, y_2) \in t$

$y_3 = \lambda x_3 + \bar{y} - \lambda \bar{x} \Leftrightarrow P_3(x_3, y_3) \in t$

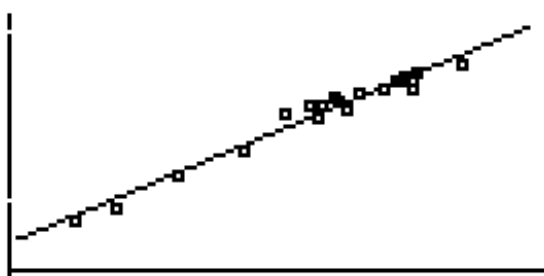
Portanto, os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são colineares, pois pertencem todos a uma mesma reta.

14. a)



- b) Os pontos da nuvem parecem estar mais ou menos alinhados, pelo que parece existir uma associação linear forte entre as variáveis  $m$  e  $f$ .
- c)  $r = 0,984$ . Como o coeficiente de correlação linear é um valor próximo de 1, está confirmada a existência de uma associação linear forte entre as duas variáveis em estudo.

d)  $f = 1,04m + 2,02$



e)  $1,04 \times 76,9 + 2,02 \approx 82,0$

f)  $82,8 - 82,0 = 0,8$