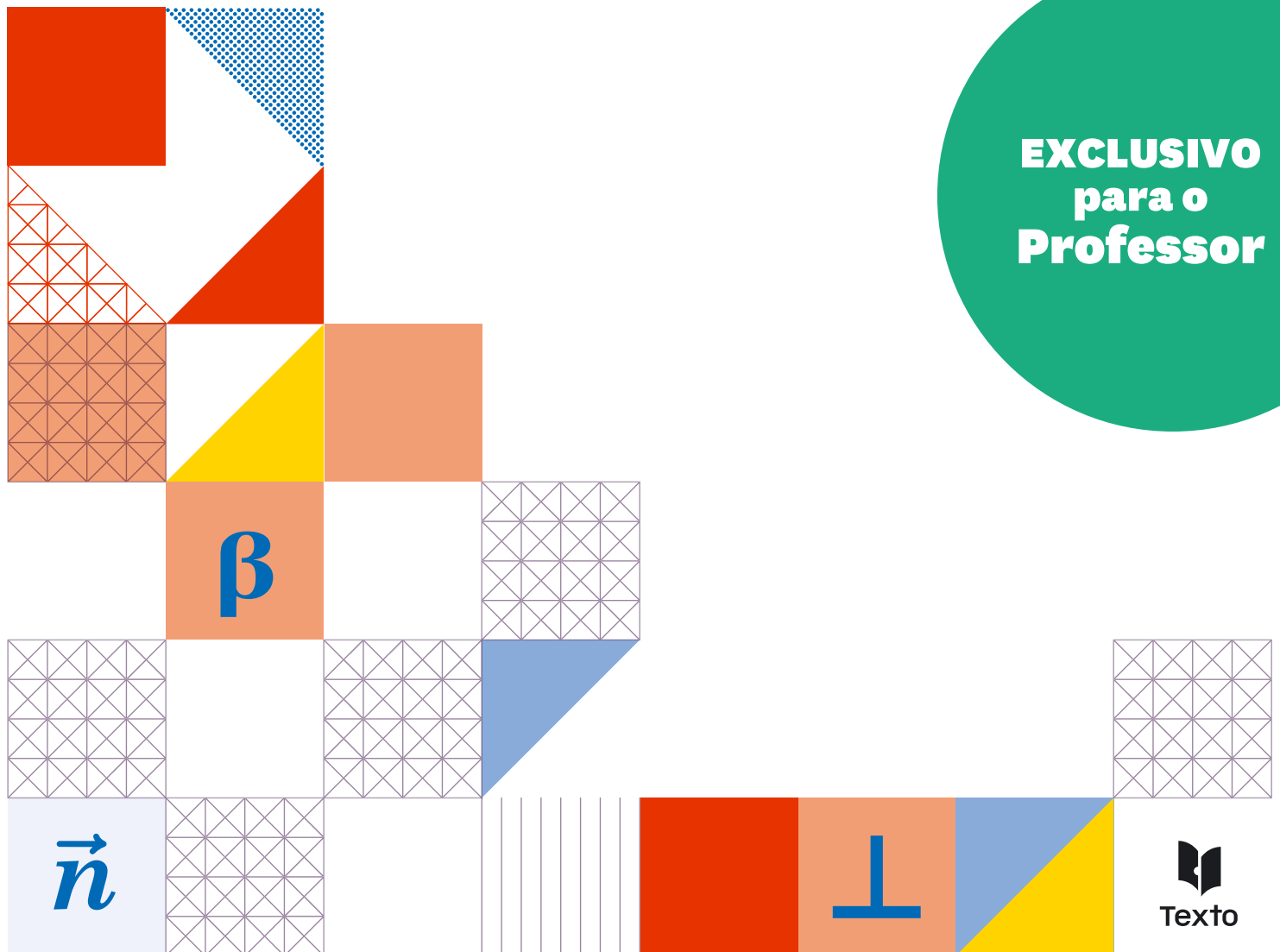


Resoluções dos exercícios

do Manual

MAT 11 MATEMÁTICA A
11.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**




Texto

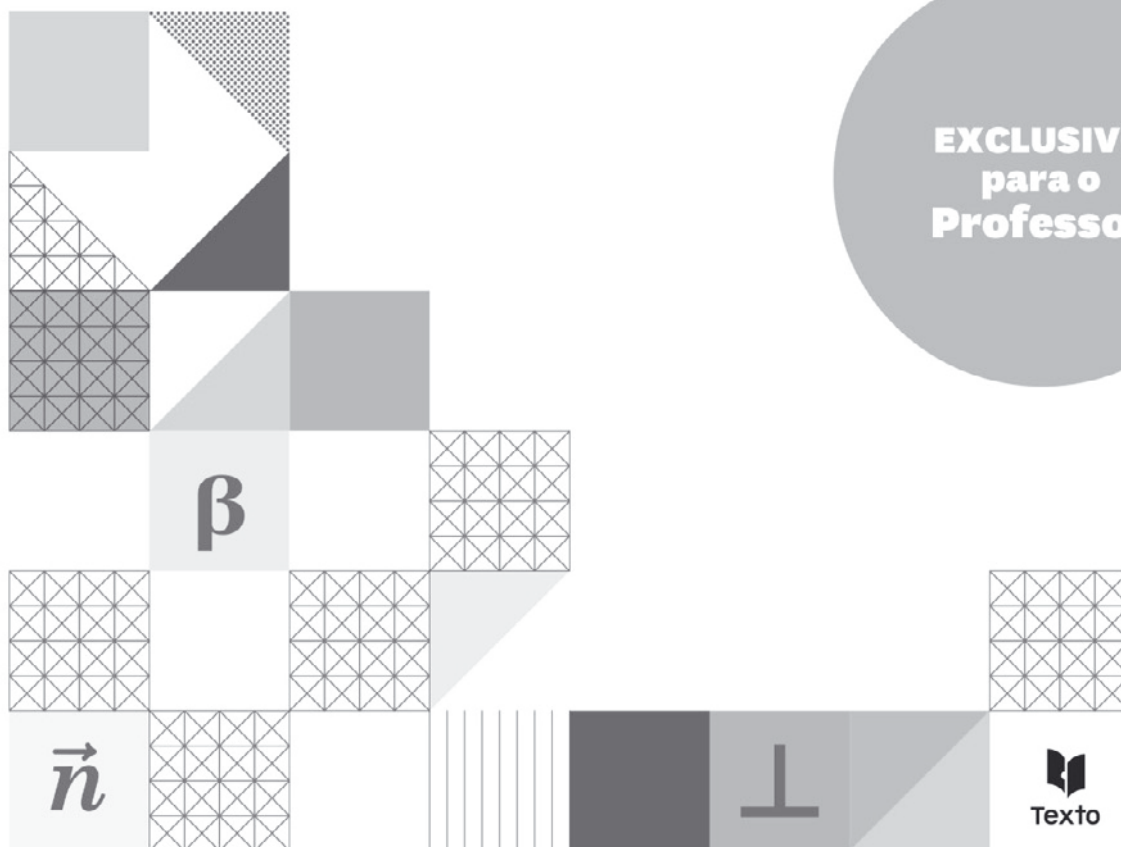
Resoluções dos exercícios

do **Manual**

MAT 11

MATEMÁTICA A
11.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**




Texto

Propostas de resolução dos exercícios do MANUAL**Tema 1 – Trigonometria e Funções Trigonométricas**

Atividades «Será que...?»	3
Exercícios propostos	4
+Exercícios propostos	56

Tema 2 – Geometria Analítica

Atividades «Será que...?»	70
Exercícios propostos	74
+Exercícios propostos	102

Tema 3 – Sucessões

Atividades «Será que...?»	118
Exercícios propostos	125
+Exercícios propostos	202

Tema 4 – Funções Reais de Variável Real

Atividades «Será que...?»	221
Exercícios propostos	234
+Exercícios propostos	361

Tema 5 – Estatística

Exercícios propostos	387
----------------------------	-----

Tema 1 | Trigonometria e Funções Trigonométricas

Atividades «Será que...?»

Pág. 11

SERÁ QUE..?

Propriedades fundamentais

$$\text{a) } \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}; \quad \text{tg } \beta = \frac{4}{3}$$

$$\text{Portanto, } \text{tg } \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}.$$

$$\text{b) } (\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\text{Portanto, } (\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1.$$

De um modo geral, tem-se, para qualquer ângulo agudo α :

- $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Pág. 14

SERÁ QUE..?

Estabelece uma conjectura

Considera, por exemplo, o seguinte triângulo:

Tem-se:

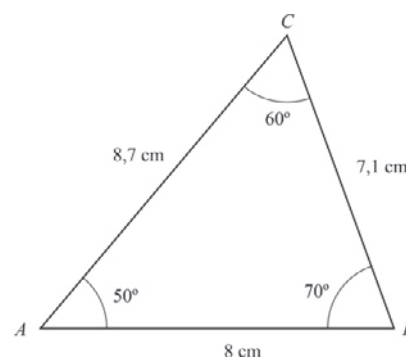
$$\frac{\sin A}{a} \approx \frac{\sin 50^\circ}{7,1} \approx 0,108$$

$$\frac{\sin B}{b} \approx \frac{\sin 70^\circ}{8,7} \approx 0,108$$

$$\frac{\sin C}{c} \approx \frac{\sin 60^\circ}{8} \approx 0,108$$

Somos naturalmente conduzidos a conjecturar que:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Exercícios propostos

Capítulo 1 | Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

Pág. 10

1.

a) O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C por ser um triângulo inscrito numa semicircunferência e o lado $[AB]$ ser um diâmetro dessa semicircunferência.

b) Tem-se:

$$\bullet \cos \alpha = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{26} = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \overline{AC} = 24$$

$$\bullet \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 24^2 + \overline{BC}^2 = 26^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 26^2 - 24^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100 \Leftrightarrow \overline{BC} = 10$$

Então, vem:

Área pedida = área do semicírculo – área do triângulo $[ABC]$ =

$$= \frac{\pi \times 13^2}{2} - \frac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{2} = \frac{169\pi}{2} - \frac{240}{2} = \frac{169\pi}{2} - 120 \text{ unidades de área}$$

Pág. 11

$$2. \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Pág. 12

3.

a) Tem-se:

$$\bullet \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \operatorname{sen} x$$

$$\bullet \cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

$$\bullet \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (1 + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2\cos x + 1 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 + 2\cos x \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2 + 2\cos x}$$

Então, vem:

$$\text{Perímetro do triângulo } [ABC] = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 1 + \cos x + \operatorname{sen} x + \sqrt{2 + 2\cos x}$$

b) Tem-se:

$$\bullet \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}; \text{ portanto, } \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \sin^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25}; \text{ portanto, } \sin x = \frac{3}{5}$$

Então, vem:

$$\text{Perímetro do triângulo } [ABC] = 1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \sqrt{2 + 2 \times \frac{4}{5}} = \frac{12}{5} + \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{12}{5} + \frac{\sqrt{18 \times 5}}{5} =$$

$$= \frac{12 + \sqrt{90}}{5} = \frac{12 + 3\sqrt{10}}{5} \text{ unidades de comprimento}$$

Pág. 13

$$4. \frac{4 \sin 60^\circ - 2 \cos 30^\circ}{3 \operatorname{tg} 30^\circ} - 2 \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 2 \times \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 1 + 1 = 1$$

5. Tem-se:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\overline{BA}}{1} = 1 \Leftrightarrow \overline{BA} = 1 \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg} 60^\circ \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{3}$$

Então, vem: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \sqrt{3} - 1$.

Pág. 15

6. Tem-se, de acordo com a lei dos senos:

$$\frac{\sin C}{4,2} = \frac{\sin 82^\circ}{5,3} \Leftrightarrow \sin C = \frac{4,2 \sin 82^\circ}{5,3} \Leftrightarrow \sin C \approx 0,785; \text{ portanto, } C \approx 51,7^\circ.$$

$$A \approx 180^\circ - (82^\circ + 51,7^\circ) = 46,3^\circ$$

$$\frac{\sin A}{\overline{BC}} = \frac{\sin 82^\circ}{5,3} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{5,3 \sin 46,3^\circ}{\sin 82^\circ}; \text{ portanto, } \overline{BC} \approx 3,9.$$

Pág. 16

$$7. [\sin 90^\circ + \sin 170^\circ]^2 + \cos^2 10^\circ = [1 + \sin (180^\circ - 10^\circ)]^2 + \cos^2 10^\circ =$$

$$= (1 + \sin 10^\circ)^2 + \cos^2 10^\circ = 1 + 2 \sin 10^\circ + \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1 + 2 \sin 10^\circ + 1 =$$

$$= 2 + 2 \sin 10^\circ = 2(1 + \sin 10^\circ)$$

Pág. 18

8. Seja x a medida do comprimento do lado desconhecido do triângulo.

Tem-se, de acordo com a lei dos cossenos:

$$x^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 20^\circ \Leftrightarrow x^2 = 13 - 12 \cos 20^\circ \Leftrightarrow x = \sqrt{13 - 12 \cos 20^\circ}$$

Portanto, $x \approx 1,3$.

Então, vem:

$$\text{Perímetro do triângulo} \approx 2 + 3 + 1,3 = 6,3 \text{ unidades de comprimento}$$

Pág. 20

$$\begin{aligned} 9. \quad & \sin 150^\circ \times \cos 120^\circ + \sin 90^\circ - \cos 90^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) \times \cos (180^\circ - 60^\circ) + 1 - 0 = \\ & = \sin 30^\circ \times (-\cos 60^\circ) + 1 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

10.

a) Tem-se, de acordo com a lei dos cossenos:

$$4^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos A \Leftrightarrow 16 = 45 - 36 \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{29}{36}; \text{ portanto, } A \approx 36,3^\circ.$$

$$3^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos B \Leftrightarrow 9 = 52 - 48 \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{43}{48}; \text{ portanto, } B \approx 26,4^\circ.$$

$$C \approx 180^\circ - (36,3^\circ + 26,4^\circ) = 117,3^\circ$$

b) Tem-se, de acordo com a lei dos cossenos:

$$\overline{BC}^2 = 9^2 + 6,3^2 - 2 \times 9 \times 6,3 \times \cos 23^\circ \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 120,69 - 113,4 \cos 23^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{120,69 - 113,4 \cos 23^\circ}$$

$$\text{Portanto, } \overline{BC} \approx 4,0.$$

Tem-se, de acordo com a lei dos senos:

$$\frac{\sin B}{9} = \frac{\sin 23^\circ}{4} \Leftrightarrow \sin B = \frac{9 \sin 23^\circ}{4} \Leftrightarrow \sin B \approx 0,879$$

$$\text{Portanto, } B \approx 180^\circ - 61,5^\circ = 118,5^\circ.$$

$$C \approx 180^\circ - (23^\circ + 118,5^\circ) = 38,5^\circ$$

Pág. 21

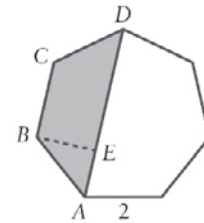
11. A área da região colorida é igual a $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BE}$.

Tem-se, de acordo com a figura:

- amplitude do ângulo $ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7}$;
- amplitude do ângulo $ABE = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7} - 90^\circ = \frac{270^\circ}{7}$;
- $\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \cos\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow \overline{BE} = \overline{BA} \times \cos\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{BE} = 2 \times \cos\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow \overline{BE} \approx 1,564$
- $\frac{\overline{AE}}{\overline{BA}} = \sin\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow \overline{AE} = \overline{BA} \times \sin\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow \overline{AE} = 2 \times \sin\left(\frac{270^\circ}{7}\right) \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 1,267$
- $\overline{AD} = 2 \times \overline{AE} + 2 \approx 4,534$

Então, vem:

$$\text{Área} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BE} \approx \frac{4,543 + 2}{2} \times 1,564 \approx 5,1 \text{ unidades de área}$$



12. De acordo com a figura, tem-se, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $[ABC]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{10}^2 &= \sqrt{3}^2 + \sqrt{12}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{12} \times \cos A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10 &= 3 + 12 - 12 \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Então, vem:

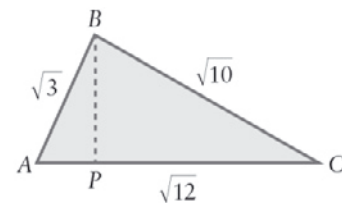
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A + \frac{25}{144} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A = \frac{119}{144}$$

$$\text{Portanto, } \sin A = \frac{\sqrt{119}}{12}.$$

$$\text{Tem-se: } \sin A = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{119}}{12} = \frac{\overline{BP}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{\sqrt{357}}{12}$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} \text{Área do triângulo } [ABC] &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BP}}{2} = \frac{\sqrt{12} \times \frac{\sqrt{357}}{12}}{2} = \frac{\sqrt{12 \times 357}}{24} = \\ &= \frac{\sqrt{4 \times 3 \times 3 \times 119}}{24} = \frac{6\sqrt{119}}{24} = \frac{\sqrt{119}}{4} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$



Pág. 22

13. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $[ABC]$, vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos 50^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2500 + 1225 - 2 \times 50 \times 35 \times \cos 50^\circ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1475,24$$

Portanto, $\overline{AC} \approx 38,41$ m.

Aplicando a lei dos senos no triângulo $[ABC]$, vem:

$$\frac{\sin 50^\circ}{38,41} = \frac{\sin \hat{CAB}}{35} \Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{35 \times \sin 50^\circ}{38,41} \Leftrightarrow \sin \hat{CAB} \approx 0,7$$

Portanto, $\hat{CAB} \approx 44,4^\circ$, pelo que se tem $\hat{DAC} \approx 80^\circ - 44,4^\circ = 35,6^\circ$.

Como o triângulo $[ADC]$ é retângulo, vem:

$$\cos \hat{DAC} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 35,6^\circ = \frac{\overline{AD}}{38,41} \Leftrightarrow \overline{AD} = 38,41 \times \cos 35,6^\circ$$

Portanto, $\overline{AD} \approx 31$ m.

Pág. 23

14. Aplicando a lei dos senos no triângulo $[ABC]$, vem:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin 52^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 81^\circ}{9,4} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{9,4 \times \sin 52^\circ}{\sin 81^\circ}$$

Portanto, $\overline{AC} \approx 7,5$.

O triângulo $[ACD]$ é retângulo em C .

Vem, então:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{AC} \operatorname{tg} 35^\circ$$

Portanto, $\overline{CD} \approx 7,5 \times \operatorname{tg} 35^\circ \approx 5,3$ m.

Pág. 27

15.

$$\text{a) } \sqrt{8} \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ + 2 \sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \sqrt{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{16}}{4} + 1 + 1 = 3$$

$$\text{b) } 9 \operatorname{tg}^2 30^\circ + \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 9 \times \frac{3}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 + 2 = 5$$

16.

$$\text{a)} (\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ o que é verdade para qualquer ângulo } x$$

$$\text{b)} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 + \cos x, \text{ o que é verdade para qualquer$$

ângulo agudo } x

17. Tem-se:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{9 \times 13}{13^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{9}{13} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$$

$$\text{Portanto, } \cos x = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Então, vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{3}{2}$$

18. Tem-se: $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$

$$\text{a)} \operatorname{tg} 52^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{tg} 52^\circ} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{13,2}{\operatorname{tg} 52^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 42^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{tg} 42^\circ} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{13,2}{\operatorname{tg} 42^\circ}$$

Então,

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \frac{13,2}{\operatorname{tg} 52^\circ} + \frac{13,2}{\operatorname{tg} 42^\circ} \approx 24,97 \text{ cm}$$

$$\text{b)} \operatorname{tg} 52^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AD} \times \operatorname{tg} 52^\circ \Leftrightarrow \overline{BD} = 12 \times \operatorname{tg} 52^\circ$$

$$\operatorname{tg} 42^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{tg} 42^\circ} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{12 \times \operatorname{tg} 52^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ}; \text{ portanto } \overline{DC} \approx 17,06 \text{ cm}$$

Então, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \approx 12 + 17,06 = 29,06 \text{ cm}.$

19.

a) Tem-se: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + 0,4^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,16 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 0,84$

Portanto,

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{84}{100}} = \frac{\sqrt{4 \times 3 \times 7}}{10} = \frac{2\sqrt{21}}{10} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Então,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

b) Tem-se:

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{RQ} = \overline{PR} \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{RQ} = 15 \times 0,4 \Leftrightarrow \overline{RQ} = 6 \text{ cm} . \text{ Então, } \overline{PS} = 6 \text{ cm} .$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{PR} \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{PQ} = 15 \times \frac{\sqrt{21}}{5} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 3\sqrt{21} \text{ cm}$$

20. Tem-se:

$$\operatorname{tg} \hat{BAC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{BAC} = \frac{\overline{BC}}{2\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{BAC} = \frac{1}{2} ; \text{ portanto } \hat{BAC} \approx 26,565^\circ .$$

$$\operatorname{tg} \hat{BAM} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{BAM} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{2\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{BAM} = \frac{1}{4} ; \text{ portanto } \hat{BAM} \approx 14,036^\circ .$$

Então, vem:

$$\text{Amplitude do ângulo } \alpha = \hat{BAC} - \hat{BAM} \approx 26,565^\circ - 14,036^\circ \approx 12,5^\circ$$

21.

$$\text{a) Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{ACBH}}{2} = \frac{(1+\overline{HC}) \times \overline{BH}}{2}$$

Tem-se:

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BH} = \overline{BC} \sin 60^\circ \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{HC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{HC} = \overline{BC} \cos 60^\circ \Leftrightarrow \overline{HC} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Então,

$$\text{área do triângulo } [ABC] = \frac{(1+\overline{HC}) \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1+1) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ unidades de área}$$

$$\text{b}_1) \sin \theta = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{HC}}{2} \Leftrightarrow \overline{HC} = 2 \cos \theta$$

$$\overline{AC} = 1 + \overline{HC} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2 \cos \theta$$

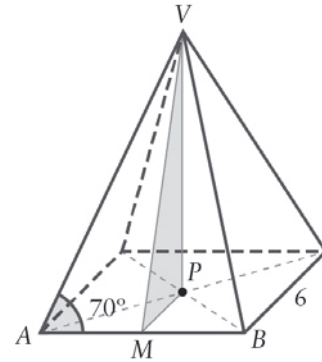
$$\text{b}_2) \text{Área} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1+2 \cos \theta) \times 2 \sin \theta}{2} = (1 + 2 \cos \theta) \cdot \sin \theta$$

22. Tem-se, de acordo com a figura:

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{VP}$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\overline{VM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{VM} = \overline{AM} \operatorname{tg} 70^\circ \Leftrightarrow \overline{VM} = 3 \operatorname{tg} 70^\circ$$

$$\begin{aligned} \overline{VP}^2 + \overline{PM}^2 &= \overline{VM}^2 \Leftrightarrow \overline{VP}^2 + 3^2 = (3 \operatorname{tg} 70^\circ)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{VP}^2 &= 9 \operatorname{tg}^2 70^\circ - 9 \end{aligned}$$



Portanto:

$$\overline{VP} = \sqrt{9 \operatorname{tg}^2 70^\circ - 9} \approx 7,677$$

Então:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{VP} \approx \frac{1}{3} \times 36 \times 7,677 \approx 92 \text{ unidades de volume}$$

Pág. 28

23. Tem-se, de acordo com a figura:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AB} \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \overline{BC} = 10 \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

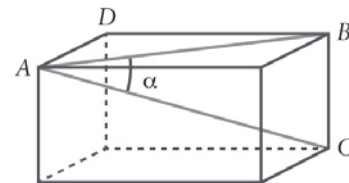
$$\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{DB}^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB}^2 + \frac{300}{9} = 100 \Leftrightarrow \overline{DB}^2 = \frac{600}{9}$$

$$\text{Portanto, } \overline{DB} = \sqrt{\frac{600}{9}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

Então, vem:

$$\text{Volume do prisma} = \overline{BC}^2 \times \overline{DB} = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{300}{9} \times \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{1000\sqrt{6}}{9} \text{ cm}^3 \approx 272,2 \text{ cm}^3$$



24. Tem-se, de acordo com a figura:

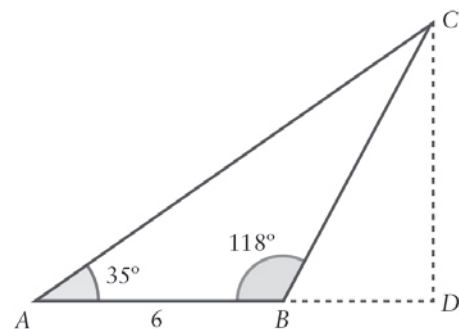
$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (118^\circ + 35^\circ) = 27^\circ$$

$$\widehat{DBC} = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo $[ABC]$, tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen} C}{6} = \frac{\operatorname{sen} A}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 27^\circ}$$

Portanto, $\overline{BC} \approx 7,580$.



$$\text{sen } D\hat{B}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{BC} \text{ sen } D\hat{B}C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 7,580 \text{ sen } 62^\circ$$

Portanto, $\overline{CD} \approx 6,693$.

Então, vem:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} \approx \frac{6 \times 6,693}{2} \approx 20 \text{ unidades de área}$$

25. Tem-se:

$$\text{sen } 32^\circ = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \overline{AB} \text{ sen } 32^\circ \Leftrightarrow \overline{EB} = 10 \text{ sen } 32^\circ$$

$$\text{sen } 58^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \overline{CD} \text{ sen } 58^\circ \Leftrightarrow \overline{CD} = 10 \text{ sen } 58^\circ$$

Então, vem:

$$\overline{CE} = \overline{CB} - \overline{EB} = 10 \text{ sen } 58^\circ - 10 \text{ sen } 32^\circ \approx 3,18$$

26. Tem-se, de acordo com a figura:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BF} = \overline{AB} \text{ sen } 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BF} = 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{BF} = 2$$

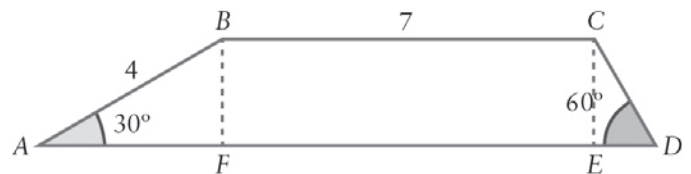
$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AF} = \overline{AB} \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AF} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{\overline{CE}}{\text{tg } 60^\circ} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Então, vem:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BF} = \frac{\left(2\sqrt{3} + 7 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + 7}{2} \times 2 = 14 + 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{42 + 8\sqrt{3}}{3} \text{ unidades de área}$$



27.

a) $P\hat{Q}S = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$ pelo que $T\hat{Q}R = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ e, então, $Q\hat{R}T = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

b) Área de $[PQRTS] = \text{área do triângulo } [PQS] + \text{área do triângulo } [TQR]$

Determinação da área do triângulo $[PQS]$:

$$\text{sen } 32^\circ = \frac{\overline{QS}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \overline{QS} = \overline{PQ} \text{ sen } 32^\circ \Leftrightarrow \overline{QS} = 10 \text{ sen } 32^\circ$$

$$\cos 32^\circ = \frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \overline{PS} = \overline{PQ} \cos 32^\circ \Leftrightarrow \overline{PS} = 10 \cos 32^\circ$$

Então:

$$\text{área do triângulo } [PQS] = \frac{\overline{PS} \times \overline{QS}}{2} = \frac{10 \cos 32^\circ \times 10 \sin 32^\circ}{2} \approx 22,470$$

Determinação da área do triângulo $[TQR]$:

$$\sin 58^\circ = \frac{\overline{QT}}{\overline{QR}} \Leftrightarrow \overline{QT} = \overline{QR} \sin 58^\circ \Leftrightarrow \overline{QT} = 12 \sin 58^\circ$$

$$\cos 58^\circ = \frac{\overline{TR}}{\overline{QR}} \Leftrightarrow \overline{TR} = \overline{QR} \cos 58^\circ \Leftrightarrow \overline{TR} = 12 \cos 58^\circ$$

Então:

$$\text{área do triângulo } [TQR] = \frac{\overline{TR} \times \overline{QT}}{2} = \frac{12 \cos 58^\circ \times 12 \sin 58^\circ}{2} \approx 32,357$$

Então, vem:

$$\text{Área de } [PQRTS] = 22,470 + 32,357 \approx 54,83 \text{ m}^2$$

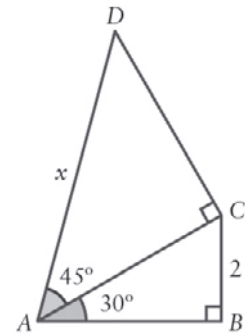
28. Tem-se, de acordo com a figura:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\cos 45^\circ} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Então, tem-se: } x = 4\sqrt{2}$$



Pág. 29

29. Tem-se:

$$U\hat{V}R = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$S\hat{V}U = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 70^\circ$$

$$\sin T\hat{V}S = \frac{\overline{ST}}{\overline{SV}} \Leftrightarrow \overline{SV} = \frac{\overline{ST}}{\sin T\hat{V}S} \Leftrightarrow \overline{SV} = \frac{30}{\sin 40^\circ}$$

$$\cos S\hat{V}U = \frac{\overline{UV}}{\overline{SV}} \Leftrightarrow \overline{UV} = \overline{SV} \cos S\hat{V}U \Leftrightarrow \overline{UV} = \frac{30 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$\text{Portanto, } \overline{UV} \approx 15,96.$$

$$\sin V\hat{R}U = \frac{\overline{UV}}{\overline{RV}} \Leftrightarrow \overline{RV} = \frac{\overline{UV}}{\sin V\hat{R}U} \Leftrightarrow \overline{RV} = \frac{30 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ \sin 20^\circ}$$

$$\text{Portanto, } \overline{RV} \approx 46,67.$$

30. Tem-se:

$$\cos \hat{A}CD = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{AC} \cos \hat{A}CD \Leftrightarrow \overline{CD} = 6 \cos 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} \hat{C}BD = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\overline{CD}}{\operatorname{tg} \hat{C}BD} \Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{6 \cos 40^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}$$

Portanto, $\overline{DB} \approx 12,63$.

31. As bases do prisma são triângulos equiláteros de lado x . Então, a altura de cada um dessas

triângulos é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, pelo que a respetiva área é dada por $\frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}$ ou seja $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Seja h a altura do prisma. Tem-se:

$$\text{Volume} = 48 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \times h = 48 \Leftrightarrow \frac{192}{\sqrt{3}x^2}$$

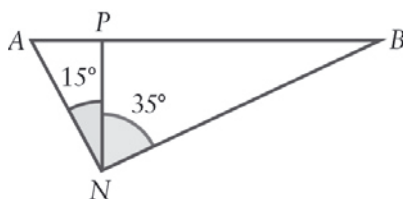
De acordo com a figura, tem-se $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$

Ora,

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{192}{\sqrt{3}x^3} \Leftrightarrow x^3 = \frac{192}{3} \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

32.

a) De acordo com a figura seguinte, seja $d = \overline{PN}$ e seja $x = \overline{PN}$.



Tem-se:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{d} \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{3-x}{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = d \operatorname{tg} 15^\circ \\ d \operatorname{tg} 35^\circ = 3 - d \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{d(\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ) = 3\} \Leftrightarrow \overline{d} = \frac{3}{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ}$$

Portanto, $d \approx 3,1$ km.

$$\text{b) } \overline{AN} = \frac{\overline{PN}}{\cos 15^\circ} \approx \frac{3,1}{\cos 15^\circ} \approx 3,2 \text{ km}$$

33. Tem-se:

$C\hat{B}B' = \frac{103^\circ}{2} = 51,5^\circ$ pelo que $B'\hat{C}B = 90^\circ - 51,5^\circ = 38,5^\circ$ e, portanto (dado que os ângulos $B'CO$ e OCB têm igual amplitude), $B'\hat{C}O = \frac{38,5^\circ}{2} = 19,25^\circ$

Então:

$$\operatorname{tg} 19,25^\circ = \frac{\overline{OB'}}{\overline{CB'}} \Leftrightarrow \overline{OB'} = \overline{CB'} \operatorname{tg} 19,25^\circ \Leftrightarrow \overline{OB'} = 1,4 \operatorname{tg} 19,25^\circ$$

Portanto, $r = \overline{OB'} \approx 0,49$.

Pág. 30

34. Traçando por C uma reta paralela a OB , vem:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b-a}{a+b}$$

Usando a fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (b^2 - 2ab + a^2)}{(a+b)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{4ab}{(a+b)^2} \Leftrightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{4ab}{(a+b)^2}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \end{aligned}$$

35.

$$\text{a) } \frac{\operatorname{tg}^2 \theta + 1}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \\ &= \frac{\cos \theta (1-\cos \theta) - \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \theta + 1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \cdot (1-\cos \theta)} = \\ &= \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \cdot (1-\cos \theta)} = \frac{1 - \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cdot (1-\cos \theta)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cdot (1-\cos \theta)} = \frac{0}{\operatorname{sen} \theta \cdot (1-\cos \theta)} = 0 \end{aligned}$$

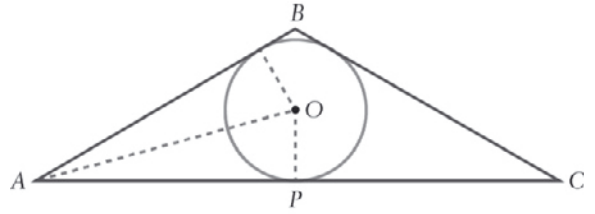
36. Tem-se, de acordo com a figura, $\hat{PAB} = 30^\circ$,

pelo que $\hat{PAO} = 15^\circ$.

Então, vem:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{r}{4} \Leftrightarrow r = 4 \operatorname{tg} 15^\circ$$

Portanto, $r \approx 1,07$.



37.

a) Tem-se:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CS}}{4}, \text{ pelo que } \overline{CS} = 4 \operatorname{sen} x.$$

$$\cos x = \frac{\overline{BS}}{4}, \text{ pelo que } \overline{BS} = 4 \cos x.$$

Portanto, a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{AD} &= \frac{3 + 3 + 4 \cos x}{2} \times 4 \operatorname{sen} x = \\ &= \frac{6 + 4 \cos x}{2} \times 4 \operatorname{sen} x = (3 + 2 \cos x) \times 4 \operatorname{sen} x = 12 \operatorname{sen} x + 8 \operatorname{sen} x \cos x \end{aligned}$$

$$\text{b) } A(90^\circ) = 12 \operatorname{sen} 90^\circ + 8 \operatorname{sen} 90^\circ \cos 90^\circ = 12 \times 1 + 8 \times 1 \times 0 = 12$$

Interpretação: quando $x = 90^\circ$, o ponto C coincide com o ponto Q e o ponto D coincide com o ponto P , pelo que o quadrado $[ABCD]$ coincide com o retângulo $[ABQP]$, cuja área é $3 \times 4 = 12$.

$$38. \sqrt{12} \times \operatorname{sen} 120^\circ - \cos 90^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ = \sqrt{12} \times \operatorname{sen}(180^\circ - 60^\circ) - 0 + \frac{\operatorname{sen} 135^\circ}{\cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{12} \times \operatorname{sen} 60^\circ + \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ)}{\cos(180^\circ - 45^\circ)} = \sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = 3 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

39.

a) Tem-se:

$$\hat{B} = 180^\circ - (51^\circ + 32^\circ) = 97^\circ$$

Aplicando a lei dos senos, vem:

$$\frac{\operatorname{sen} 51^\circ}{3,2} = \frac{\operatorname{sen} 32^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{3,2 \operatorname{sen} 32^\circ}{\operatorname{sen} 51^\circ}$$

Portanto, $\overline{AB} \approx 2,2$.

$$\frac{\operatorname{sen} 51^\circ}{3,2} = \frac{\operatorname{sen} 97^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{3,2 \operatorname{sen} 97^\circ}{\operatorname{sen} 51^\circ}$$

Portanto, $\overline{AC} \approx 4,1$.

b) Aplicando a lei dos cossenos, vem:

$$10^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \hat{A} \Leftrightarrow 60 \cos \hat{A} = -39 \Leftrightarrow \cos \hat{A} = -\frac{13}{20}$$

Portanto, $\hat{A} \approx 130,5^\circ$.

$$5^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos \hat{B} \Leftrightarrow 120 \cos \hat{B} = 111 \Leftrightarrow \cos \hat{B} = \frac{37}{40}$$

Portanto, $\hat{B} \approx 22,3^\circ$.

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 180^\circ - (130,5^\circ + 22,3^\circ)$$

Portanto, $\hat{C} \approx 27,2^\circ$.

Pág. 31

40. Tem-se:

$$\text{Volume do prisma} = \text{área da base} \times \text{altura} = \left(\frac{\overline{EH} + \overline{FG}}{2} \times \overline{HG} \right) \times \overline{FB}$$

Ora,

$$\widehat{EHF} = 180^\circ - (73,3^\circ + 43,3^\circ) = 63,4^\circ$$

$$\widehat{FHG} = 90^\circ - 63,4^\circ = 26,6^\circ$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo $[EFH]$, tem-se:

$$\frac{\sin 43,3^\circ}{4} = \frac{\sin 73,3^\circ}{\overline{FH}} \Leftrightarrow \overline{FH} = \frac{4 \sin 73,3^\circ}{\sin 43,3^\circ}$$

Então:

$$\sin \widehat{FHG} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} \Leftrightarrow \overline{FG} = \overline{FH} \sin 26,6^\circ \Leftrightarrow \overline{FG} = \frac{4 \sin 73,3^\circ \sin 26,6^\circ}{\sin 43,3^\circ}$$

Portanto, $\overline{FG} \approx 2,501$.

$$\cos \widehat{FHG} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \Leftrightarrow \overline{GH} = \overline{FH} \cos 26,6^\circ \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{4 \sin 73,3^\circ \cos 26,6^\circ}{\sin 43,3^\circ}$$

Portanto, $\overline{GH} \approx 4,995$.

Por outro lado, aplicando novamente a lei dos senos no triângulo $[EFH]$, tem-se:

$$\frac{\sin 43,3^\circ}{4} = \frac{\sin 63,4^\circ}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{4 \sin 63,4^\circ}{\sin 43,3^\circ}$$

Portanto, $\overline{EF} \approx 5,215$.

Então:

$$\operatorname{tg} 29,9^\circ = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \overline{AB} \operatorname{tg} 29,9^\circ$$

Portanto, $\overline{FB} \approx 5,215 \operatorname{tg} 29,9^\circ \approx 2,999$.

Então, vem:

$$\text{Volume do prisma} = \left(\frac{\overline{EH} + \overline{FG}}{2} \times \overline{GH} \right) \times \overline{FB} = \left(\frac{4 + 2,501}{2} \times 4,995 \right) \times 2,999 \approx 48,7 \text{ unidades de área}$$

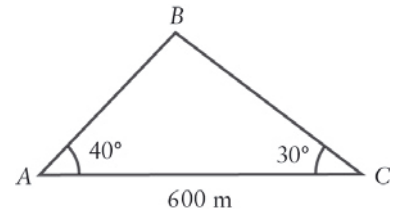
41. Aplicando a lei dos senos, tem-se, de acordo com a figura:

$$\frac{\text{sen } B}{AC} = \frac{\text{sen } A}{BC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } 110^\circ}{600} = \frac{\text{sen } 40^\circ}{BC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{600 \text{ sen } 40^\circ}{\text{sen } 110^\circ}$$

Portanto, $BC \approx 410,42 \text{ m}$.



$$\frac{\text{sen } B}{AC} = \frac{\text{sen } C}{AB} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } 110^\circ}{600} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{600 \text{ sen } 30^\circ}{\text{sen } 110^\circ}$$

Portanto, $AB \approx 319,25 \text{ m}$.

Então, pode concluir-se que o nadador salvador da esquerda demora $\frac{319,25 \text{ m}}{50 \text{ m/min}} = 6,39$ minutos e que o da direita demora $\frac{410,42 \text{ m}}{60 \text{ m/min}} = 6,84$ minutos, pelo que o da esquerda chega primeiro ao banhista.

42. Aplicando a lei dos senos no triângulo $[ABC]$, tem-se:

$$\frac{\text{sen } C}{AB} = \frac{\text{sen } B}{AC} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } 60^\circ}{560} = \frac{\text{sen } 100^\circ}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{560 \text{ sen } 100^\circ}{\text{sen } 60^\circ}$$

Portanto, $AC \approx 636,809 \text{ m}$.

Aplicando a lei dos senos no triângulo $[ACD]$, tem-se:

$$\frac{\text{sen } D}{AC} = \frac{\text{sen } A}{DC} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } 55^\circ}{636,809} = \frac{\text{sen } 50^\circ}{DC} \Leftrightarrow DC = \frac{636,809 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 55^\circ}$$

Portanto, $DC \approx 595,523 \text{ m}$.

Aplicando a lei dos senos no triângulo $[CDE]$, tem-se:

$$\frac{\text{sen } E}{DC} = \frac{\text{sen } C}{DE} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } 60^\circ}{595,523} = \frac{\text{sen } 80^\circ}{DE} \Leftrightarrow DE = \frac{595,523 \text{ sen } 80^\circ}{\text{sen } 60^\circ}$$

Portanto, $DE \approx 677,204 \text{ m}$.

O nadador demora, então $\frac{677,204 \text{ m}}{1,3 \text{ m/seg}} \approx 520,926$ segundos, ou seja, aproximadamente 8,682 minutos, ou seja, ainda, 8 min 41 seg.

Capítulo 2 | Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações. Razões trigonométricas de ângulos generalizados

Pág. 32

43. Começemos por determinar as coordenadas do ponto P :

$$\begin{aligned} x^2 &= 2\sqrt{3}x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}; \text{ como } f(\sqrt{3}) = 3, \text{ o ponto } P \text{ tem} \\ &\text{coordenadas } (\sqrt{3}, 3). \end{aligned}$$

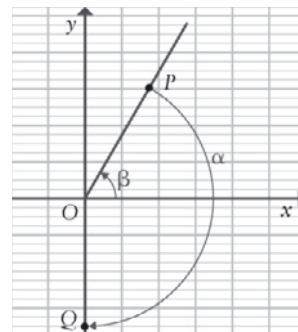
Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. xOy , a semirreta $\vec{OP}$.

Seja β a inclinação da reta OP .

$$\text{Tem-se } \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ pelo que } \beta = 60^\circ.$$

Então, tal como ilustrado na figura, Q é o ponto do semieixo negativo das ordenadas tal que $\overline{OQ} = \overline{OP}$.

$$\text{Ora, } \overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12}, \text{ pelo que } Q \text{ é o ponto de coordenadas } (0, -\sqrt{12}).$$



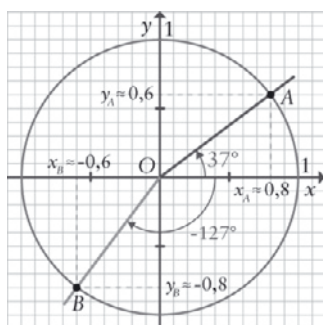
Pág. 35

44.

- a) Coincide com o semieixo positivo das abcissas.
- b) $585^\circ - 360^\circ = 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$; coincide com a bissetriz do terceiro quadrante.
- c) $-315^\circ + 360^\circ = 45^\circ$; coincide com a bissetriz do primeiro quadrante.
- d) $-810^\circ + 3 \times 360^\circ = 270^\circ$; coincide com o semieixo negativo das ordenadas.

Pág. 37

45. Etapas 1. e 2.



Etapa 3.

	Senos	Cossenos
37°	0,6	0,8
-127°	-0,8	-0,6

Pág. 40

46. $\cos(-90^\circ) + \sin 180^\circ + \sin(-270^\circ) = 0 + 0 + 1 = 1$

47. Dado que $\sin \alpha < 0$, o lado extremidade de α está situado no 3.º ou no 4.º quadrantes. Como, por outro lado, $0^\circ < \alpha < 270^\circ$, o lado extremidade de α não pode estar situado no 4.º quadrante. Então, o lado extremidade de α está situado no 3.º quadrante.

48. Tem-se: $\sqrt{18} \cos(180^\circ - \alpha) = \sqrt{18} \times (-\cos \alpha) = -\sqrt{18} \cos \alpha$

Determinemos o valor de $\cos \alpha$:

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

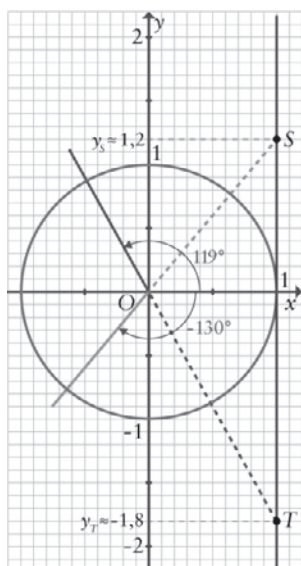
Como $-270^\circ < \alpha < -90^\circ$, tem-se $\cos \alpha < 0$, pelo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Então, $\sqrt{18} \cos(180^\circ - \alpha) = -\sqrt{18} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{36}}{3} = 4$.

49. O lado extremidade do ângulo orientado cuja amplitude é -45° é a bissetriz do 4.º quadrante. O ponto de interseção desta semirreta com a circunferência trigonométrica é o ponto simétrico, relativamente ao eixo Ox , do ponto de interseção da bissetriz do primeiro quadrante com a circunferência trigonométrica. Ora, as coordenadas deste ponto são $(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$, ou seja, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Então, $\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pág. 41

50. Etapas 1. e 2.



Etapas 3.

	Tangente
-130°	1,2
119°	-1,8

Pág. 44

51. Resulta da figura que $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Tem-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

Então, vem:

$$15 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 15 \times \frac{1}{5} + 2 = 5$$

52. $\sin(-810^\circ) + 6 \times \cos 420^\circ + \operatorname{tg} 765^\circ =$

$$= \sin(-90^\circ - 2 \times 360^\circ) + 6 \times \cos(60^\circ + 360^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ + 2 \times 360^\circ) =$$

$$= \sin(-90^\circ) + 6 \times \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = -1 + 6 \times \frac{1}{2} + 1 = 3$$

53. Tem-se: $-630^\circ = -270^\circ - 360^\circ$ e $-450^\circ = -90^\circ - 360^\circ$, pelo que o lado extremidade do ângulo generalizado cuja amplitude é x está situado no 2.º quadrante ou no 3.º quadrante. Como, por outro lado, $\sin x > 0$, o lado extremidade do ângulo generalizado cuja amplitude é x não pode estar situado no 3.º quadrante, pelo que está situado no 2.º quadrante.

Tem-se:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Como o lado extremidade do ângulo generalizado cuja amplitude é x está situado no 2.º quadrante,

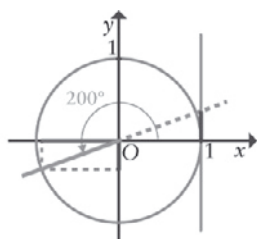
tem-se $\cos \alpha < 0$, pelo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Então, vem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Pág. 45

54.



Pág. 48**55.**

a) Tem-se: $\frac{1,8}{1,2} = 1,5$; o comprimento do arco AB é 1,5 vezes o raio. Por isso, a amplitude do arco AB é 1,5 radianos e, portanto, a amplitude do ângulo ADB é $\frac{1,5}{2} = 0,75$ radianos.

b) Como a amplitude do ângulo BOC é 0,4 radianos, a amplitude do arco BC é 0,4 radianos, pelo que o comprimento do arco BC é 0,4 vezes o raio, ou seja, $0,4 \times 1,2 = 0,48$ cm.

c) O comprimento do arco CD é $\frac{1}{4}$ do comprimento da circunferência, ou seja, $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 1,2 = 0,6\pi$. Como $\frac{0,6\pi}{1,2} = \frac{\pi}{2}$, o comprimento do arco CD é $\frac{\pi}{2}$ vezes o raio. Por isso, a amplitude do arco CD é $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Pág. 50

56. a) Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $x - 10^\circ$

Daqui vem: $x = \frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$

b) Como a amplitude do ângulo AOB é $\frac{\pi}{18}$ radianos, a amplitude do arco AB é $\frac{\pi}{18}$ radianos, pelo que o comprimento do arco AB é $\frac{\pi}{18}$ vezes o raio, ou seja, $\frac{\pi}{18} \times 5 = \frac{5\pi}{18}$ cm.

c) A área do círculo é igual a $\pi \times 5^2 = 25\pi$.

Tem-se: $2\pi - 25\pi$
 $\frac{\pi}{18} - x$

Daqui vem: $x = \frac{\frac{\pi}{18} \times 25\pi}{2\pi} = \frac{25\pi}{36} \text{ cm}^2$

57.

a) Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $x - 18^\circ$

Daqui vem: $x = \frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$

b) Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $x - 54^\circ$

Daqui vem: $x = \frac{54\pi}{180} = \frac{3\pi}{10}$

c) Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $x - 306^\circ$

Daqui vem: $x = \frac{306\pi}{180} = \frac{17\pi}{10}$

Pág. 51

58. Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $2 - x$

Daqui vem: $x = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 114,59155903$ graus

Ora,

$0,59155903$ graus = $0,59155903 \times 60$ minutos = $35,4935418$ minutos

e $0,4935418$ minutos = $0,4935418 \times 60$ segundos = $29,612508$ segundos ≈ 30 segundos

Então, $\frac{360^\circ}{\pi} \approx 114^\circ 35' 30''$.

59. 16 segundos = $\frac{16}{60}$ minutos = $0,2(6)$ minutos

53 minutos + 16 segundos = $53,2(6)$ minutos = $\frac{53,2(6)}{60}$ graus = $0,88(7)$ graus

$25^\circ 53' 16'' = 25,88(7)$ graus

Tem-se: $\pi - 180^\circ$
 $x - 25,88(7)^\circ$

Daqui vem, $x = \frac{25,88(7) \times \pi}{180} \approx 0,452$ radianos.

Pág. 53

60. $\sin \frac{19\pi}{3} + \cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right) - \operatorname{tg} \frac{25\pi}{3} = \sin \left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(-\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg} \left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \sin \left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg} \left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$

61. $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Pág. 55

62. $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times \cos (2\pi - x) + \sin (\pi + x) \times \operatorname{tg} (-x) \times \cos x =$
 $= \cos x \times \cos x - \sin x \times (-\operatorname{tg} x) \times \cos x = \cos x \times \cos x + \sin x \times \operatorname{tg} x \times \cos x =$
 $= \cos^2 x + \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x = \cos^2 x + \sin x \times \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Pág. 56

63. Tem-se: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 5 \cos(-x) = -\cos x + 5 \cos x = 4 \cos x$
e $\operatorname{tg}(\pi + x) = \sqrt{15} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{15}$

Então, queremos determinar o valor de $4 \cos x$, sabendo que $\operatorname{tg} x = \sqrt{15}$.

Tem-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + 15 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 16 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{16}$$

Como $x \in [\pi, 2\pi]$, x pertence ao terceiro ou ao quarto quadrante; como, por outro lado, $\operatorname{tg} x$ é positivo, x não pode pertencer ao quarto quadrante, pelo que x pertence ao terceiro quadrante.

Então, como $\cos x < 0$, $\cos x = -\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$, pelo que $4 \cos x = -1$.

$$\begin{aligned} 64. 2 \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) &= 2 \cos\left(-\frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(-2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \\ &= 2 \cos \frac{5\pi}{6} = 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{6} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Pág. 57

$$65. \operatorname{tg}(-4,3\pi) = \operatorname{tg}(-4\pi - 0,3\pi) = \operatorname{tg}(-0,3\pi) = -\operatorname{tg}(0,3\pi)$$

Pág. 58

$$\begin{aligned} 66. 10 \sin x = 5\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sin x = \frac{5\sqrt{3}}{10} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 67. \sqrt{2} + 2 \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68. \sqrt{27} + 6 \sin(2x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{27}}{6} \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{3\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 69. \sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) &\Leftrightarrow 2x = x - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{5}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = x - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 2x = \pi - x + \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 3x = \frac{6\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pág. 59

$$\begin{aligned}
70. (2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2})(2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3}) &= 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2} = 0 \vee 2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
71. \operatorname{sen} x + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (\pi - x)\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\quad \underbrace{\quad}_{\substack{\text{prop. falsa para} \\ \text{todo o } k \in \mathbb{Z}}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para vermos quais são as soluções da equação que pertencem ao intervalo $[0, 3\pi]$, podemos atribuir valores a k :

$$\begin{aligned}
k = 0 &\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ (pertence ao intervalo } [0, 3\pi]) \\
k = -1 &\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4} \text{ (não pertence ao intervalo } [0, 3\pi]) \\
k = 1 &\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \text{ (pertence ao intervalo } [0, 3\pi]) \\
k = 2 &\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \text{ (pertence ao intervalo } [0, 3\pi]) \\
k = 3 &\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi = \frac{15\pi}{4} \text{ (não pertence ao intervalo } [0, 3\pi]) \\
\text{Conjunto-solução} &= \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right\}
\end{aligned}$$

Pág. 61

$$\begin{aligned}
72. \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x + 1) &= 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
\operatorname{sen} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\
\text{No intervalo } [-\pi, \pi], &\text{ a equação } \operatorname{sen} x = -1 \text{ tem uma única solução: } -\frac{\pi}{2}. \\
\text{No intervalo } [-\pi, \pi], &\text{ a equação } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \text{ tem duas soluções: } \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{5\pi}{6}. \\
\text{Conjunto-solução} &= \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}
\end{aligned}$$

Pág. 62

$$\begin{aligned}
73. 3 + 6 \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
74. \left[\sqrt{3} - 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \right] \times (1 + \sin x) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \vee 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Pág. 63

$$\begin{aligned}
75. \cos(2x) + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \vee 2x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
76. 4 \cos(5x) + 14 &= 12 \Leftrightarrow \cos(5x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(5x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos(5x) = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 5x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = -\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Procuramos as soluções que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
k = 0 &\rightarrow x = \frac{2\pi}{15} \vee x = -\frac{2\pi}{15} \text{ (ambas pertencem ao intervalo } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
k = -1 &\rightarrow x = -\frac{4\pi}{15} \vee x = -\frac{8\pi}{15} \text{ (só } -\frac{4\pi}{15} \text{ pertence ao intervalo } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
k = -2 &\rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee - \text{ (não pertence ao intervalo } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
k = 1 &\rightarrow x = \frac{8\pi}{15} \vee x = \frac{4\pi}{15} \text{ (só } \frac{4\pi}{15} \text{ pertence ao intervalo } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
k = 2 &\rightarrow - \vee x = \frac{2\pi}{3} \text{ (não pertence ao intervalo } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
\text{Conjunto-solução} &= \left\{ -\frac{4\pi}{15}, -\frac{2\pi}{15}, \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15} \right\}
\end{aligned}$$

Pág. 64

$$\begin{aligned}
77. 6 \cos(\pi x) + 10 &= 4 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = -1 \Leftrightarrow \pi x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\
\text{Procuramos as soluções que pertencem ao intervalo } &[0, 3].
\end{aligned}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
k = 0 &\rightarrow x = 1 \text{ (pertence ao intervalo } [0, 3]) \\
k = -1 &\rightarrow x = -1 \text{ (não pertence ao intervalo } [0, 3]) \\
k = 1 &\rightarrow x = 3 \text{ (pertence ao intervalo } [0, 3]) \\
\text{Conjunto-solução} &= \{1, 3\}
\end{aligned}$$

Pág. 65

78. Começemos por notar que os valores de x para os quais $\cos x = 0$, ou seja, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, não são solução da equação (pois, para esses valores, $\sin x \neq 0$).

Para os valores de x para os quais $\cos x \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \times \cos x = \sin x &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = x + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{79.} \quad \frac{1}{\cos^2(\pi x)} + \operatorname{tg}(\pi x) = 1 &\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi x) [\operatorname{tg}(\pi x) + 1] = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi x) = 0 \vee \operatorname{tg}(\pi x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi x) = 0 \vee \operatorname{tg}(\pi x) = -1 \Leftrightarrow \pi x = k\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = k \vee x = -\frac{1}{4} + k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Procuramos as soluções que pertencem ao intervalo $[-1, 1]$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{4} \quad (\text{ambas pertencem ao intervalo } [-1, 1]) \\ k = -1 &\rightarrow x = -1 \vee x = -\frac{5}{4} \quad (\text{só } -1 \text{ pertence ao intervalo } [-1, 1]) \\ k = -2 &\rightarrow x = -2 \vee \text{ — } \quad (\text{não pertence ao intervalo } [-1, 1]) \\ k = 1 &\rightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{4} \quad (\text{ambas pertencem ao intervalo } [-1, 1]) \\ k = 2 &\rightarrow x = 2 \vee x = \frac{7}{4} \quad (\text{não pertencem ao intervalo } [-1, 1]) \end{aligned}$$

$$\text{Conjunto-solução} = \left\{-1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

Pág. 70

80. Tem-se que $1 \text{ radiano} \approx 57,3^\circ$, pelo que:

$$-0,3 \text{ rad} \approx -17,2^\circ \rightarrow \text{corresponde a } \theta$$

$$4,5 \text{ rad} \approx 257,85^\circ \rightarrow \text{corresponde a } \gamma$$

$$2,6 \text{ rad} \approx 149^\circ \rightarrow \text{corresponde a } \beta$$

$$-5 \text{ rad} \approx -286,5^\circ \rightarrow \text{corresponde a } \alpha$$

81.

$$-\frac{3\pi}{2} \text{ rad} < -2 \text{ rad} < -0,6\pi \text{ rad} < 1,5 \text{ rad} < 0,7\pi \text{ rad}$$

82.

a) Seja α a latitude, em radianos, do local da escola.

A distância a que esse local se encontra do equador é o comprimento do arco de meridiano cujos extremos são o local e o ponto do meridiano que está sobre o equador. O comprimento desse arco é igual a $\alpha \times r = 6367\alpha \text{ km}$.

b) Estão à distância de $6367 \times 0,2 = 1273,4$ km .

c) Como $\frac{3000}{6367} \approx 0,47$, tem-se que o comprimento do arco é 0,47 vezes o comprimento do raio pelo que a amplitude do arco é igual a 0,47 radianos.
 $0,47 \text{ rad} \approx 0,47 \times 57,3^\circ \approx 27^\circ \text{ N}$

83. A área do círculo é igual a $\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$.

Tem-se: $2\pi - 25\pi$
 $0,6 - x$

Daqui vem:

$$x = \frac{0,6 \times 25\pi}{2\pi} = 0,3 \times 25 = 7,5 \text{ cm}^2$$

84. O perímetro da roda da bicicleta é, nestas condições, igual a 2,5 m.

Tem-se:

$$2,5 = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{2,5}{2\pi}$$

Então, vem $r \approx 0,398 \text{ m} \approx 40 \text{ cm}$.

85.

Funchal

A latitude do lugar é, aproximadamente, 32° N .

Ora, $32^\circ = \frac{32\pi}{180} = \frac{8\pi}{45} \text{ rad}$, pelo que o comprimento do arco do meridiano que é igual à distância do lugar até ao equador é igual a $\frac{8\pi}{45} \times 6367 \approx 3556 \text{ km}$.

Ponta Delgada

A latitude do lugar é, aproximadamente, 38° N .

Ora, $38^\circ = \frac{38\pi}{180} = \frac{19\pi}{90} \text{ rad}$, pelo que o comprimento do arco do meridiano que é igual à distância do lugar até ao equador é igual a $\frac{19\pi}{90} \times 6367 \approx 4223 \text{ km}$.

86. Tal como ilustrado na figura ao lado, a amplitude do ângulo formado pelos ponteiros às 9 h 30 min é igual a $90^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 105^\circ$ e é igual a $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi/6}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$.



87.

a) $1470^\circ = 30^\circ + 4 \times 360^\circ \rightarrow$ o ângulo pertence ao 1.º quadrante

b) $-3210^\circ = -330^\circ - 8 \times 360^\circ \rightarrow$ o ângulo pertence ao 1.º quadrante

c) $-500^\circ = -140^\circ - 360^\circ \rightarrow$ o ângulo pertence ao 3.º quadrante

d) $20 \text{ rad} = \frac{20 \times 180^\circ}{\pi} \approx 1146^\circ = 66^\circ + 3 \times 360^\circ \rightarrow$ o ângulo pertence ao 1.º quadrante

e) $\frac{121}{3} \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} + \frac{120}{3} \pi = \frac{\pi}{3} + 40\pi \rightarrow$ o ângulo pertence ao 1.º quadrante

f) $-\frac{313}{6} \pi \text{ rad} = -\frac{\pi}{6} - \frac{312}{6} \pi = -\frac{\pi}{6} - 52\pi \rightarrow$ o ângulo pertence ao 4.º quadrante

88.

a) $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0$

b) $\text{tg}(\pi + \alpha) + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \text{tg} \alpha + \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg} \alpha - \text{tg} \alpha = 0$

c) $\sin^2 \theta + \cos^2(\pi + \theta) = \sin^2 \theta + (-\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

d) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha - 540^\circ) = \cos \alpha + \cos(\alpha - 180^\circ) = \cos \alpha - \cos \alpha = 0$

89.

a) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) - 2 \cos \frac{5\pi}{6} + \sin^2\left(\frac{11}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

b) $\frac{1}{2} \text{tg} \frac{29\pi}{3} + 2 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \text{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + 9\pi\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \text{tg} \frac{2\pi}{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} =$
 $= \frac{1}{2} \times (-\sqrt{3}) - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$

c) $\cos 210^\circ - \sin 330^\circ + \text{tg} 225^\circ = \cos(30^\circ + 180^\circ) - \sin(360^\circ - 30^\circ) + \text{tg}(180^\circ + 45^\circ) =$
 $= -\cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \text{tg} 45^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

d) Tem-se:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \text{ e } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{2}{3}$$

Então, queremos determinar o valor de $-\sin x$, sabendo que $\cos x = -\frac{2}{3}$

Tem-se:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9} + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{5}{9}$$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\sin x > 0$, pelo que se tem $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Então, vem: $-\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e) Tem-se: $\cos(3\pi - x) - 2 \text{tg}(\pi + x) = -\cos x - 2 \text{tg} x$

e $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Leftrightarrow \text{tg} x = -2$

Então, queremos determinar o valor de $-\cos x - 2 \text{tg} x$, sabendo que $\text{tg} x = -2$.

Tem-se:

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\cos x > 0$, pelo que $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Então, vem:

$$-\cos x - 2 \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} - 2 \times (-2) = 4 - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{20 - \sqrt{5}}{5}$$

Pág. 71

90.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0 \wedge \operatorname{tg}(\pi + \alpha) > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \wedge \operatorname{tg} \alpha > 0 \rightarrow \alpha$ pertence ao 3.º quadrante

b) $\cos(7\pi + \alpha) < 0 \wedge \sin(-\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\cos \alpha < 0 \wedge -\sin \alpha > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \wedge \sin \alpha < 0 \rightarrow \alpha$ pertence ao 4.º quadrante

91. Tem-se: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)} = \frac{\cos a}{-\sin a} = -\frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{1}{\operatorname{tg} a}$

Ora,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{25} + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{21}{25}$$

Então, como a é um ângulo do segundo quadrante, $\cos a < 0$, pelo que se tem $\cos a = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Então, tem-se:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\frac{\sqrt{21}}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} a} = -\frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

92.

a) $\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{2} - \cos^2 \frac{5\pi}{6} = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) $\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] - \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2 \frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos^2\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$

93.

a) Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$

Como x é um ângulo do segundo ou do terceiro quadrante, tem-se que $\cos x < 0$, pelo que

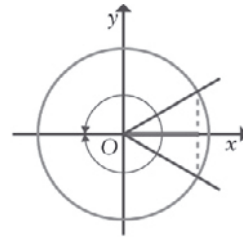
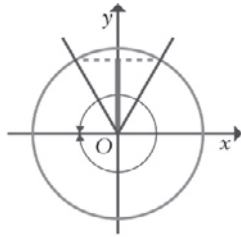
$$\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) Tem-se: $\sin(-9\pi + x) - \cos\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin x = 0$, qualquer que seja o valor real de x e, portanto, em particular para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

94. Na figura de cada alínea está representada a circunferência trigonométrica, está ilustrado o intervalo de amplitudes $] - \pi, \pi[$, a linha trigonométrica relevante para a resolução da equação e os lados extremidade dos ângulos cujas amplitudes são solução da equação.

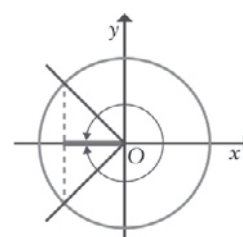
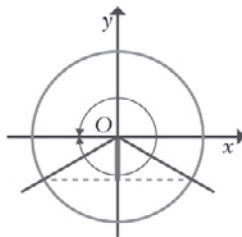
a) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$

b) $\cos x = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$



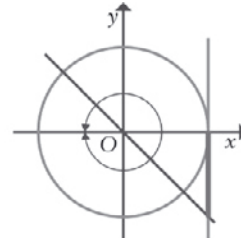
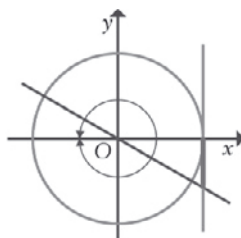
c) $\sin x = \sin \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$

d) $\cos x = \cos \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

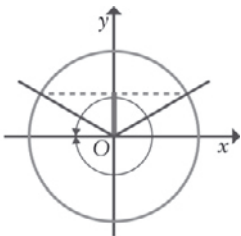


e) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

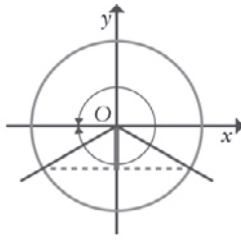
f) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$



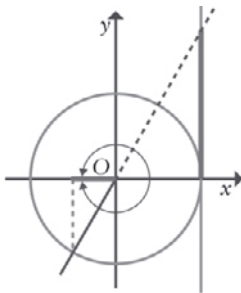
g) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$



$$h) \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$$



$$i) \tan x = \sqrt{3} \wedge \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$$



95.

$$\begin{aligned} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 &\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Procuramos as soluções que pertencem ao intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \text{ (pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6} \text{ (pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$k = -2 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi \text{ (não pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$k = 1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \text{ (pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$k = 2 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \text{ (pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$k = 3 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{5\pi}{6} \text{ (não pertence ao intervalo } [-2\pi, 2\pi] \text{)}$$

$$\text{Conjunto solução} = \left\{-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

96. Tem-se:

$$\sin^2\left[5\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)\right] = \sin^2\left(\frac{5\pi}{3} + 5k\pi\right) \stackrel{(1)}{=} \frac{3}{4}$$

$$(1) \rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 5k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 5k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ pelo que } \sin^2\left(\frac{5\pi}{3} + 5k\pi\right) = \frac{3}{4}$$

97.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin^2(2x) = 1 &\Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \vee \sin(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{tg}(2x) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 2 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \operatorname{tg}(2x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = 2x + k\pi \Leftrightarrow -3x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

98.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \text{ a maior solução negativa é } -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow 2\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee a - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \pi + 2k\pi \vee a = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \text{ a maior solução negativa é } -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

c) Os lados extremidade dos ângulos cujo seno é igual ao cosseno coincidem com as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Então, tem-se: $\sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; a maior solução negativa é $-\frac{3\pi}{4}$

$$\text{d) } \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ora, os lados extremidade dos ângulos cujo cosseno é igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ coincidem com as bissetrizes dos quatro quadrantes.

Então, tem-se: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; a maior solução negativa é $-\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 8 \sin \theta + 4 &= 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \theta = -\sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin \theta = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \theta &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \theta &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \text{ a maior solução negativa é } -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 2 \cos \left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1 &= 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{6}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi t}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{t}{6} = \frac{2}{3} + 2k \vee \frac{t}{6} = -\frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t &= 4 + 12k \vee t = -4 + 12k, k \in \mathbb{Z}; \text{ a maior solução negativa é } -4 \end{aligned}$$

g) Os lados extremidade dos ângulos cujo seno é positivo e simétrico do cosseno coincidem com a bissetriz do segundo quadrante.

$$\text{Então, tem-se: } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \text{ a maior solução negativa é } -\frac{5\pi}{4}.$$

99.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos (2x) \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee -x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sin^2 x - \sin x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \underbrace{\sin x = \cos x}_{(\text{exerc. 98c})} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \sin(3x) + \sin x &= 0 \Leftrightarrow \sin (3x) = -\sin x \Leftrightarrow \sin (3x) = \sin (-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= -x + 2k\pi \vee 3x = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4x = 2k\pi \vee 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \cos (3x) + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos (3x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos (3x) = \cos (\pi - x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= \pi - x + 2k\pi \vee 3x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x &= \pi + 2k\pi \vee 2x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 2 \cos^2 x - 1 &= \sin x \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 1 = \sin x \Leftrightarrow 2 - 2 \sin^2 x - 1 = \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \sin x = \cos \frac{\pi}{5} &\Leftrightarrow \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0,3\pi + 2k\pi \vee x = 0,7\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Pág. 72

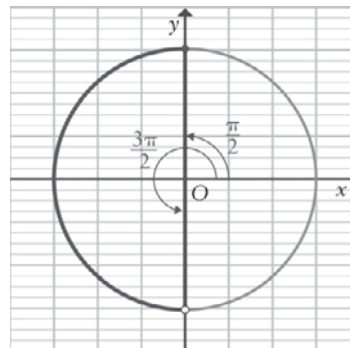
100.

a) Tal como ilustrado na figura, quando

x toma todos os valores do intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$,
 $\sin x$ toma todos os valores do intervalo $[-1, 1]$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \sin x > -1 \\ \sin x \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \frac{t}{3} > -1 \\ 2 - \frac{t}{3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{t}{3} > -3 \\ -\frac{t}{3} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} \frac{t}{3} < 3 \\ \frac{t}{3} \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t < 9 \\ t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [3, 9[
 \end{aligned}$$

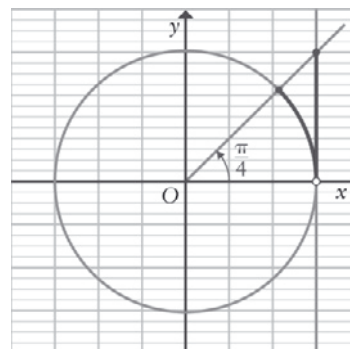


b) Tal como ilustrado na figura, quando

x toma todos os valores do intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{4} \right]$,
 $\tan x$ toma todos os valores do intervalo $]0, 1]$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \tan x > 0 \\ \tan x \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 > 0 \\ t^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t \in [-1, 1] \setminus \{0\}
 \end{aligned}$$

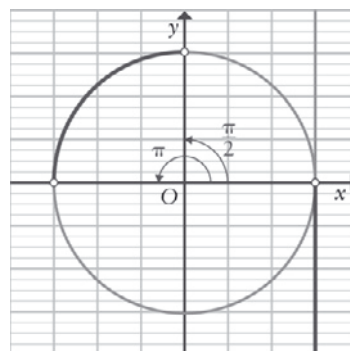


c) Tal como ilustrado na figura, quando

x toma todos os valores do intervalo $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$,
 $\tan x$ toma todos os valores do intervalo $]-\infty, 0]$.

Tem-se:

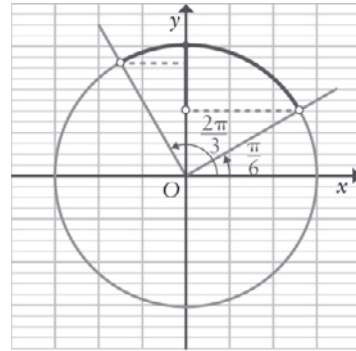
$$\tan x < 0 \Leftrightarrow -2t < 0 \Leftrightarrow t > 0 \Leftrightarrow t \in]0, +\infty[$$



d) Tal como ilustrado na figura, quando x toma todos os valores do intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\sin x$ toma todos os valores do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Tem-se:

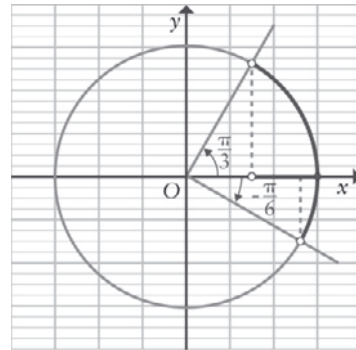
$$\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t+3}{2} > \frac{1}{2} \\ \frac{t+3}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+3 > 1 \\ t+3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t > -2 \\ t \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t \in]-2, -1] \quad \text{[Note: The original text has a typo here, it should be } t \in [-1, -2] \text{ based on the diagram and logic.]}$$



e) Tal como ilustrado na figura, quando x toma todos os valores do intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos x$ toma todos os valores do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Tem-se:

$$\begin{cases} \cos x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2t}{3} > \frac{1}{2} \\ \frac{1-2t}{3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t > \frac{3}{2} \\ 1-2t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -2t > \frac{1}{2} \\ -2t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{4} \\ t \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right[$$



f) Quando x toma todos os valores reais, $\sin x$ toma todos os valores do intervalo $[-1, 1]$.

Tem-se:

$$\begin{cases} \sin x \geq -1 \\ \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t^2 \geq -1 \\ 3-t^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 \geq -4 \\ -t^2 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 \leq 4 \\ t^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ t \leq -\sqrt{2} \vee t \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2] \quad \text{[Note: The original text has a typo here, it should be } t \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2] \text{ based on the logic.]}$$

101.

a) A condição é possível para os valores de k para os quais se tenha $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Tem-se:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1+2k+k^2}{4} + \frac{k^2-2k+1}{4} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2k^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$$

b) A condição é possível para os valores de k para os quais se tenha $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Tem-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + k^2 = \frac{1}{\frac{1}{4k^2}} \Leftrightarrow 1 + k^2 = 4k^2 \Leftrightarrow 1 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee k = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

102.

$$\text{a) } \sin\left(\frac{t}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = 270^\circ + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 540^\circ + k 720^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \cos^2(3y) = 1 \Leftrightarrow \cos(3y) = -1 \vee \cos(3y) = 1 \Leftrightarrow 3y = k 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = k 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } 2 \sin^2(3\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(3\theta) = 0 \Leftrightarrow 3\theta = k 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = k 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } \sin(3x) = \sin(x + 60^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = x + 60^\circ + k 360^\circ \vee 3x = 180^\circ - (x + 60^\circ) + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 60^\circ + k 360^\circ \vee 4x = 120^\circ + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k 180^\circ \vee x = 30^\circ + k 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 30^\circ + k 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } 2 \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 90^\circ + k 180^\circ \vee \cos x = \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 90^\circ + k 180^\circ \vee x = 60^\circ + k 360^\circ \vee x = -60^\circ + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } \sin(2x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(90^\circ - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 90^\circ - x + k 360^\circ \vee 2x = 180^\circ - 90^\circ + x + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 90^\circ + k 360^\circ \vee x = 90^\circ + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k 120^\circ \vee x = 90^\circ + k 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{g) } 3 \operatorname{tg}(x + 45^\circ) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + 45^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \operatorname{tg}(150^\circ) \Leftrightarrow x + 45^\circ = 150^\circ + k 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 105^\circ + k 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

103.

$$\text{a) } 2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \theta = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin \theta = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } \cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 4x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \vee \cos x = \sin x$$

Ora, os lados extremidade dos ângulos cujo cosseno é simétrico do seno ou cujo cosseno é igual ao seno coincidem com as bissetrizes dos quatro quadrantes.

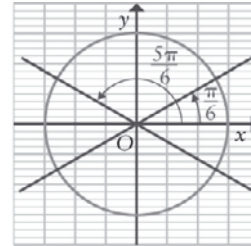
$$\text{Então, tem-se: } \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Na figura estão representados os lados extremidade dos ângulos que são as soluções da equação.

Tal como se pode observar, essas soluções podem ser dadas pela condição

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



g) Tem-se:

- para $\cos \theta = 0$, θ não é solução da equação;
- para $\cos \theta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta &= 0 \Leftrightarrow \cos \theta \left(\sqrt{3} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta (\sqrt{3} \operatorname{tg} \theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \cos x &= -\frac{1}{2} \wedge \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \wedge \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \vee \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

104.

a) $\sin x - \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 2 + \cos x$ e, como $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, a equação só seria possível se $\sin x = 1$ e $\cos x = -1$, o que é impossível.

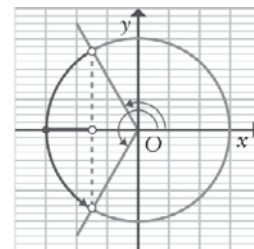
b) $\sin a + \cos b = 3$ é impossível; o maior valor que $\sin a + \cos b$ pode tomar é 2.

105.

a) Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[0, 2\pi]$ que são solução da inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Tem-se:

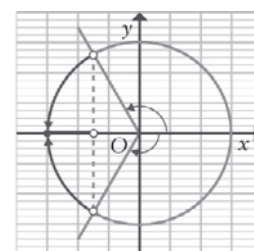
$$\text{Conjunto-solução} = \left] \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right[$$



Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[-\pi, \pi]$ que são solução da inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{2\pi}{3}, \pi \right]$$

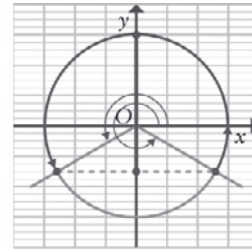


b) Tem-se: $2 \sin x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[0, 2\pi]$ que são solução da inequação $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Tem-se:

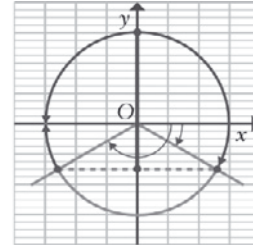
$$\text{Conjunto-solução} = \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$



Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[-\pi, \pi]$ que são solução da inequação $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \pi\right]$$



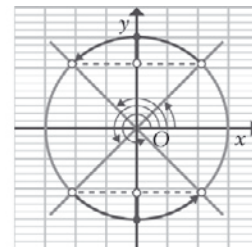
c) Tem-se: $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[0, 2\pi]$ que são solução da condição

$$\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[$$



106.

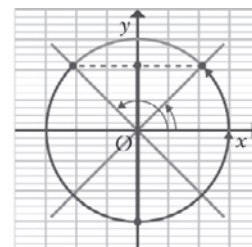
a) Tem-se: $2 \sin x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[0^\circ, 360^\circ]$

que são solução da condição $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tem-se:

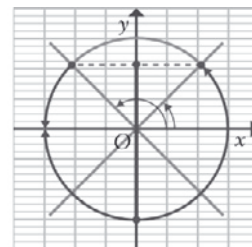
$$\text{Conjunto-solução} = [0^\circ, 45^\circ] \cup [135^\circ, 360^\circ[$$



Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $]-\pi, \pi]$ que são solução da condição $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = \left]-\pi, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$$



b) Tem-se: $|\cos x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $[0, 2\pi[$ que são solução da condição $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

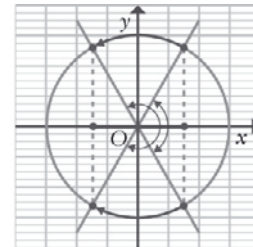
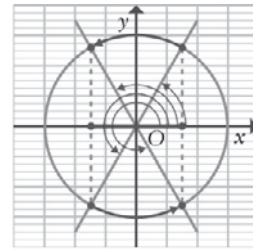
Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Na figura ao lado está ilustrado, sobre a circunferência trigonométrica, o intervalo de valores das amplitudes pertencentes a $] -180^\circ, 180^\circ[$ que são solução da condição $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

Tem-se:

$$\text{Conjunto-solução} = [-120^\circ, -60^\circ] \cup [60^\circ, 120^\circ]$$



107.

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x$

b) Tem-se: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - \hat{A}$, pelo que vem:

$$\cos \hat{A} + \cos (\hat{B} + \hat{C}) = \cos \hat{A} + \cos (\pi - \hat{A}) = \cos \hat{A} + (-\cos \hat{A}) = 0$$

c) $\frac{1}{\sin y} - \sin y = \frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \cos y \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} y}$

d) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\cos x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2\sin x$

108.

a) Área = $\frac{\overline{OA} \times h}{2}$ e $\sin(\pi - \theta) = \frac{h}{5} \Leftrightarrow h = 5\sin(\pi - \theta) \Leftrightarrow h = 5\sin \theta$

Logo, Área = $\frac{5 \times 5 \sin \theta}{2} = 12,5 \sin \theta$.

b) $A(\theta) > 6,25 \Leftrightarrow 12,5 \sin \theta > 6,25 \Leftrightarrow \sin \theta > \frac{6,25}{12,5} \Leftrightarrow \sin \theta > \frac{1}{2}$

Ora, nas condições do problema, tem-se $0 \leq \theta \leq \pi$, pelo que $\sin \theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[$.

109.

a) Seja O o ponto de interseção das diagonais do quadrado.

Como $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, vem $\overline{AC} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, pelo que $\overline{AO} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Tem-se: $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \overline{AF} = \frac{2\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{6}}$, pelo que $4 \times \overline{AF} = \frac{8\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{6}}$.

Portanto, o perímetro do losango, com aproximação ao mm, é igual a 13,1 cm.

b) Tem-se: $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \overline{AF} = \frac{2\sqrt{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$, pelo que:

$$\text{Perímetro do losango} = 4 \times \overline{AF} = \frac{8\sqrt{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

c₁) Perímetro = 13 $\Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = 13 \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{13}$; portanto $\frac{\theta}{2} \approx 0,515$ pelo que $\theta \approx 1,03 \text{ rad}$

c₂) Perímetro = 16 $\Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = 16 \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{16} \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, pelo que $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Interpretação:

No caso em que o perímetro do losango é igual a 16 cm, o losango coincide com o quadrado, pelo que a amplitude do ângulo EAF é igual à amplitude do ângulo BAD , ou seja, $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

110. Seja $a < 0$ a abcissa do ponto P .

Tem-se: $a^2 + 1,2^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 4 - 1,44 \Leftrightarrow a^2 = 2,56$; portanto, $a = -\sqrt{2,56} = -1,6$.

Então: $\sin \alpha = \frac{1,2}{2} = 0,6$, $\cos \alpha = -\frac{1,6}{2} = -0,8$ e $\text{tg } \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4}$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = 0,8 = \frac{4}{5}$$

111.

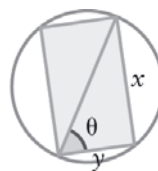
a) Tem-se, de acordo com a figura ao lado:

$$\sin \theta = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{y}{10} \Leftrightarrow y = 10 \cos \theta$$

$$A = x \times y = 10 \sin \theta \times 10 \cos \theta$$

$$\text{Logo, } A = 10 \sin \frac{\pi}{6} \times 10 \cos \frac{\pi}{6} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



b) $A(\theta) = 10 \sin \theta \times 10 \cos \theta = 100 \sin \theta \cos \theta$

Sim, a área pode ser dada por $100 \sin \theta \cos \theta$.

112. Tem-se:

$$\text{Área}_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = \overline{AB}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = \frac{2}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2}{\text{tg } \theta}$$

$$\text{Logo, } \text{Área}_{\Delta[ABC]} = \frac{2}{\text{tg } \theta}.$$

$$\text{Área}_{\Delta[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times h}{2} = \frac{4 \times h}{2} = 2h$$

$$\cos \theta = \frac{h}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \cos \theta$$

$$\text{Logo, } \text{Área}_{\Delta[PQR]} = 2 \times 2 \cos \theta = 4 \cos \theta.$$

Os dois triângulos têm a mesma área se e só se $\frac{2}{\text{tg } \theta} = 4 \cos \theta$.

Tem-se:

$$\frac{2}{\text{tg } \theta} = 4 \cos \theta \Leftrightarrow \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = 4 \cos \theta \Leftrightarrow \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} - 4 \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta \left(\frac{2}{\sin \theta} - 4 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \frac{2}{\sin \theta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \sin \theta = \frac{1}{2}$$

Como, nas condições do problema, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, tem-se: $\cos \theta = 0 \vee \sin \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

Tem-se, para $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 2$.. e $\overline{PQ} = 4$; $\overline{RQ} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{PR} = 2$.

Logo, os triângulos são iguais porque têm os lados iguais.

113. Tem-se:

a₁) $\angle OAC$ é um ângulo inscrito numa circunferência e $\widehat{BC} = \theta$.

$$\text{a}_2) \sin \theta = \frac{\overline{CD}}{1} \Leftrightarrow \overline{CD} = \sin \theta; \cos \theta = \frac{\overline{OD}}{1} \Leftrightarrow \overline{OD} = \cos \theta$$

$$\text{a}_3) \text{tg } \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{b) } \text{tg } \frac{\pi}{8} = \text{tg } \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

114.

$$\text{a}_1) \text{ Tem-se: } \sin \frac{\pi}{4} = n \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = n \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \sqrt{2}$$

$$\text{a}_2) \text{ Tem-se: } \sin \frac{\pi}{3} = n \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = n \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} = n\sqrt{2} \Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) Tem-se:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin r \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin r \Leftrightarrow \sin r = \frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como, nas condições do problema, $0 \leq r < \frac{\pi}{2}$, tem-se: $\sin r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\pi}{3}$.

Capítulo 3 | Funções trigonométricas

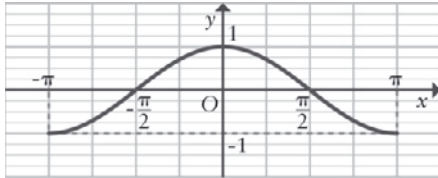
Pág. 85

115.

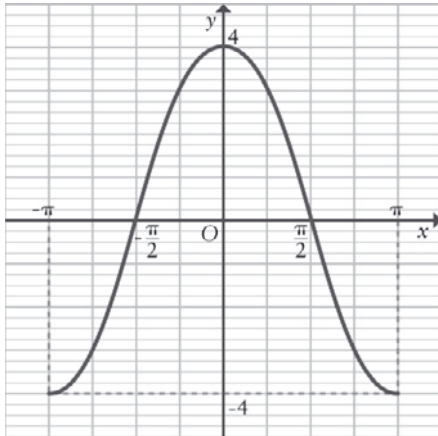
a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

Em $[-\pi, \pi]$, tem-se $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

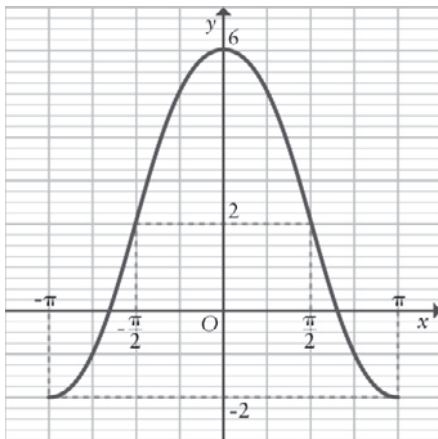
b) Em $[-\pi, \pi]$, o gráfico da função definida por $y = \cos x$ é:



Portanto, em $[-\pi, \pi]$, o gráfico da função definida por $y = 4 \cos x$ é:



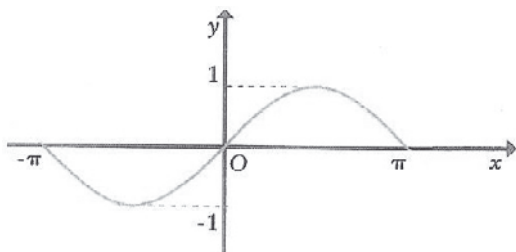
Logo, em $[-\pi, \pi]$, o gráfico da função definida por $g(x) = 2 + 4 \cos x$ é:



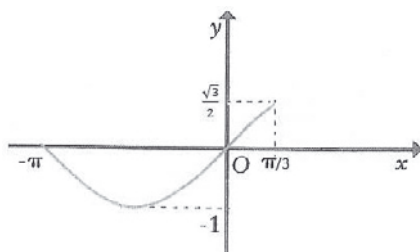
c) Por análise do gráfico, conclui-se que o contradomínio da função g é $[-2, 6]$.

d) Por análise do gráfico, conclui-se que o valor de x para o qual a função g toma o valor máximo é 0.

116. Em $[-\pi, \pi]$, o gráfico da função definida por $y = \sin x$ é:



Portanto, o gráfico da função h é:



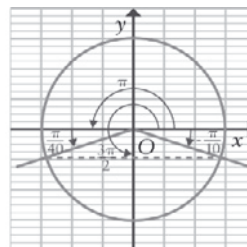
Assim, o contradomínio de h é $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Pág. 86

117. Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar:

$$\operatorname{sen} \frac{19\pi}{10} = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{10} \right) = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{10} \right) = \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10}$$

Portanto, $k = \frac{11\pi}{10}$.



Pág. 90

118.

$$\text{a) } f(x + \pi) = \cos [2(x + \pi)] + \operatorname{sen} [4(x + \pi)] = \cos(2x + 2\pi) + \operatorname{sen} (4x + 4\pi) = \\ = \cos (2x) + \operatorname{sen} (4x) = f(x)$$

b) Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f e os pontos A , B e C referidos no enunciado.

Tem-se:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2}$$

Determinemos a ordenada do ponto A :

$$f(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1 + 0 = 1$$

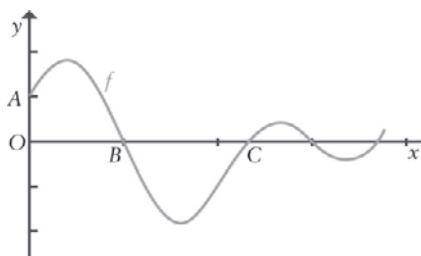
Determinemos as abscissas dos pontos B e C :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) + \sin(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin(4x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(-4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos (2x)=\cos \left(\frac{\pi}{2}+4 x\right) \Leftrightarrow 2 x=\frac{\pi}{2}+4 x+2 k \pi \vee 2 x=-\frac{\pi}{2}-4 x+2 k \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 6x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



Procuramos as duas menores soluções positivas:

Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{12} \text{ (ambas são negativas)}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{12} \vee x = \frac{3\pi}{12}$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{7\pi}{4} = \frac{21\pi}{12} \vee x = \frac{7\pi}{12}$$

As duas menores soluções positivas são $\frac{3\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$, pelo que a abcissa de B é $\frac{3\pi}{12}$ e a abcissa de C é $\frac{7\pi}{12}$.

Então, vem:

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) \times 1}{2} = \frac{\frac{4\pi}{12}}{2} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

Pág. 94

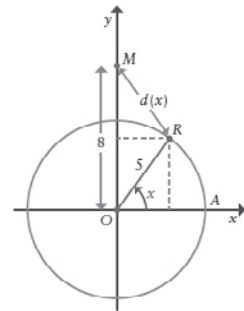
119.

a) Consideremos um referencial o.n., com origem em O , de tal modo que o eixo das abcissas contenha o ponto A e o eixo das ordenadas contenha o ponto M .

O ponto R tem coordenadas $(5 \cos x, 5 \sin x)$ e o ponto M tem coordenadas $(0, 8)$.

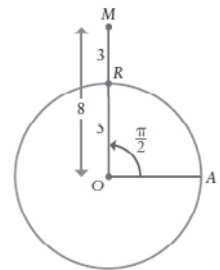
Vem, então:

$$\begin{aligned} d(x) = \overline{RM} &= \sqrt{(5 \cos x - 0)^2 + (5 \sin x - 8)^2} = \\ &= \sqrt{(5 \cos x)^2 + (5 \sin x - 8)^2} = \\ &= \sqrt{25 \cos^2 x + 25 \sin^2 x - 80 \sin x + 64} = \\ &= \sqrt{25 (\cos^2 x + \sin^2 x) - 80 \sin x + 64} = \\ &= \sqrt{25 \times 1 - 80 \sin x + 64} = \\ &= \sqrt{89 - 80 \sin x} \end{aligned}$$



$$\text{b) } d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80 \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt{89 - 80 \times 1} = \sqrt{9} = 3$$

Interpretação: quando $x = \frac{\pi}{2}$, os pontos O , R e M são colineares, pelo que $\overline{RM} = 3$.



Pág. 102

$$120. \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \arctg(-1) = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \pi = 0$$

121.

a) Seja $x \in [-1, 1]$ e seja $\alpha = \arccos x$. Então, $\alpha \in [0, \pi]$ e $\cos \alpha = x$.

Portanto, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - x^2$.

Como $\alpha \in [0, \pi]$, tem-se $\sin \alpha \geq 0$, pelo que $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$.

Logo, $\sin(\arccos x) = \sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$.

b) Tem-se, de acordo com a igualdade da alínea anterior:

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right] = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Então, vem:

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) + \operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Pág. 104

122.

a) O domínio da função arco-cosseno é $[-1, 1]$, pelo que o domínio de f é

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x+3}{2} \leq 1\}.$$

$$\text{Tem-se: } -1 \leq \frac{x+3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x+3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -1$$

Portanto, o domínio de f é $[-5, -1]$.

b) O valor procurado é a solução da condição $6 \arccos\left(\frac{x+3}{2}\right) = 4\pi$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} 6 \arccos\left(\frac{x+3}{2}\right) = 4\pi &\Leftrightarrow \arccos\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+3 = -1 \Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

Pág. 105

123. Tem-se: $2 - 5 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$

Para $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \alpha \approx 0,412$.

Pretende-se $x \in \left[\frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$.

Tem-se:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\pi - \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, pelo que vem:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \vee x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

Procuremos $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se tem $x \in \left[\frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$:

Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \vee x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$k = 1 \rightarrow x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \vee x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$k = 2 \rightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \vee x \in \left[\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right]$$

$$k = 3 \rightarrow x \in \left[\frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right] \vee x \in \left[\frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$$

Então, $x = \pi - \alpha + 2 \times 3 \times \pi \approx \pi - 0,412 + 6\pi \approx 21,58$

124. Tem-se:

O mínimo valor de $\cos x$ é -1 , o máximo valor de $\cos x$ é 1 e

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3 \leq \cos x + 3 \leq 1 + 3 \Leftrightarrow 2 \leq \cos x \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{\cos x + 3}{2} \leq \frac{4}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\cos x + 3}{2} \leq 2$$

pelo que o mínimo valor de $\frac{\cos x + 3}{2}$ é 1 e o máximo valor de $\frac{\cos x + 3}{2}$ é 2 .

Tem-se:

$\frac{\cos x + 3}{2} = 2 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pelo que $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é uma expressão geral dos maximizantes de $\frac{\cos x + 3}{2}$.

$\frac{\cos x + 3}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pelo que $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é uma expressão geral dos minimizantes de $\frac{\cos x + 3}{2}$.

125.

a) O cosseno é positivo e decrescente somente no 1.º quadrante; neste quadrante, o seno é positivo.

b) A tangente é negativa e, simultaneamente, o cosseno é crescente somente no 4.º quadrante; neste quadrante, o cosseno é positivo.

126.

a) Para $x < 0$:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow 3x+3=1 \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Então, para $x < 0$, os gráficos de g e de h interseam-se num único ponto.

Para $x > 0$:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{3}$$

Ora, em qualquer intervalo da forma $]2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, a equação $\sin x = \frac{2}{3}$ admite exatamente duas soluções.

Então, no intervalo $]0, 1000\pi]$ a equação $\sin x = \frac{2}{3}$ admite exatamente 500×2 , ou seja, 1000 soluções.

Dizendo de outro modo: em cada volta inteira na circunferência trigonométrica, há exatamente dois ângulos cujo seno é igual a $\frac{2}{3}$; como o intervalo $]0, 1000\pi]$ corresponde, na circunferência trigonométrica, a quinhentas voltas inteiras, neste intervalo há exatamente mil ângulos cujo seno é igual a $\frac{2}{3}$.

Logo, no intervalo $[-1, 1000\pi]$, os gráficos de g e de h interseam-se em 1001 pontos.

b) Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tem-se: $\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \approx 0,73$

$$h(0,73) = \frac{1}{3 \times 0,73} \approx 0,46$$

Então, as coordenadas do ponto A , arredondadas às décimas, são $(0,7; 0,5)$.

127. Tem-se:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{\overline{DA} + \overline{CB}}{2} \times \overline{OB}$$

Determinemos a abscissa do ponto A :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como a abscissa do ponto A é o menor zero positivo de f , A é o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Determinemos a ordenada do ponto C :

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Então, C é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{6}, 2\right)$.

Tem-se, então:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{\overline{DA} + \overline{CB}}{2} \times \overline{OB} = \frac{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}}{2} \times 2 = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \text{ unidades de área}$$

128.

a) Tem-se:

- $\cos x = \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OG}}{2} \Leftrightarrow \overline{OG} = 2 \cos x$
- $\sin x = \frac{\overline{BG}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{BG}}{2} \Leftrightarrow \overline{BG} = 2 \sin x$
- $\overline{CG} = \overline{CO} + \overline{OG} = 2 + 2 \cos x$
- $\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = (2 \sin x)^2 + (2 + 2 \cos x)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 \sin^2 x + 4 + 8 \cos x + 4 \cos^2 x \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4 + 8 \cos x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 \times 1 + 4 + 8 \cos x \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 8 + 8 \cos x \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{8 + 8 \cos x}$

Então, vem:

$$A(x) = \frac{\overline{AB} \times \overline{CG}}{2} = \frac{2 \overline{BG} \times \overline{CG}}{2} = \overline{BG} \times \overline{CG} = 2 \sin x (2 + 2 \cos x) = 4 \sin x + 4 \sin x \cos x \quad \text{e}$$

$$P(x) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2 \overline{BG} + 2 \overline{BC} = 2(2 \sin x) + 2\sqrt{8 + 8 \cos x} = 4 \sin x + 2\sqrt{8 + 8 \cos x}$$

$$\text{b) } A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 4 \times 1 + 4 \times 1 \times 0 = 4$$

Interpretação:

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto B coincide com o ponto D e o ponto A coincide com o ponto F , pelo que o triângulo $[ABC]$ coincide com o triângulo $[FDC]$ cuja área é igual a $\frac{\overline{FD} \times \overline{OC}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$.

$$\text{c) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{63}{64}, \text{ pelo que } \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}.$$

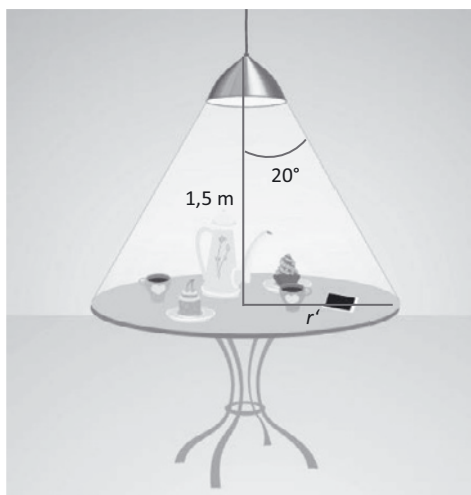
$$\text{Então, } P(\alpha) = 4 \sin \alpha + 2\sqrt{8 + 8 \cos \alpha} = 4 \times \frac{\sqrt{63}}{8} + 2\sqrt{8 + 8 \times \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{63}}{2} + 6 = \frac{3\sqrt{7} + 12}{2}.$$

129.

a) Tem-se, de acordo com a figura:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 20^\circ &= \frac{r'}{1,5} \Leftrightarrow r' = 1,5 \operatorname{tg} 20^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r' \approx 0,546 \text{ m} \end{aligned}$$

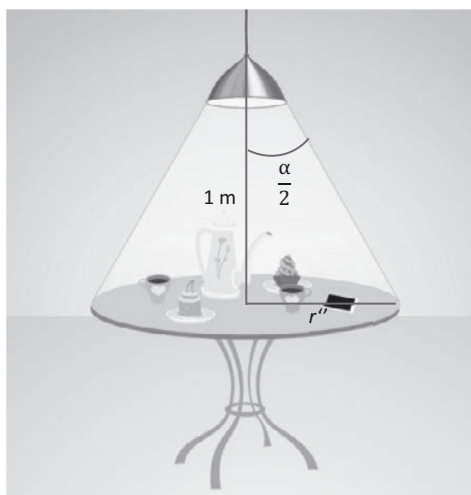
Portanto o raio do círculo de luz é, aproximadamente, 54,6 cm.



b) Tem-se, de acordo com a figura:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r''}{1} \Leftrightarrow r'' = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Portanto, a área do círculo de luz é dada, em função de α , por $\pi \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

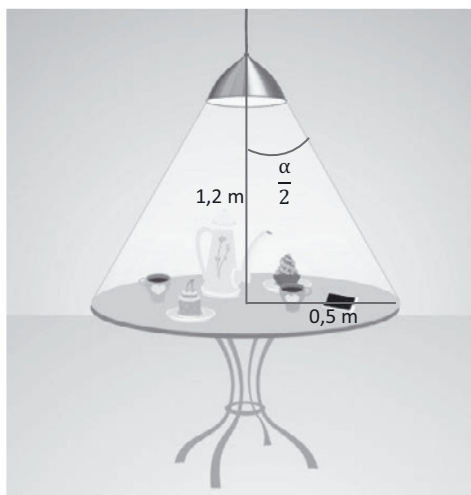


c) Como a área do tampo da mesa é igual a $\frac{\pi}{4} \text{ m}^2$, conclui-se que o raio do tampo é igual a 0,5 m. Então, tem-se, de acordo com a figura:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{0,5}{1,2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Como } \frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ tem-se } \frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{5}{12}.$$

$$\text{Portanto, } \alpha = 2 \times \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{12} \approx 45^\circ 14'.$$



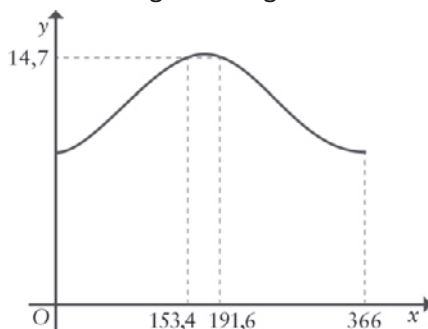
130. a) No ano 2000, o dia 24 de março foi o $84.^\circ$ dia do ano, pois $31 + 29 + 24 = 84$.

Ora $f(84) = 12,2 + 2,64 \operatorname{sen} \frac{\pi(84-81)}{183} \approx 12,336$; tem-se $12,336 \text{ horas} \approx 12 \text{ h } 20 \text{ min}$.

Como o Sol nasceu às 6 h 30 min e desde este instante até ao pôr do Sol decorreram 12 h 20 min, o pôr do Sol ocorreu às 18 h 50 min.

b) Queremos saber quantas são as soluções da condição $f(n) > 14,7$ para n pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 366\}$.

Com recurso à calculadora podemos obter o gráfico seguinte:



Portanto: $f(n) > 14,7 \Leftrightarrow n \in \{154, 155, \dots, 191\}$, pelo que o número pedido é igual a $191 - 153 = 38$.

131. No instante 0 ocorre uma maré baixa, pelo que a imagem de 0 terá de ser igual a 7

Esta condição permite eliminar a opção (D), pois a imagem de 0 por meio da função definida pela expressão da opção (D) é igual a 11.

No instante 12 ocorre igualmente uma maré baixa, pelo que a imagem de 12 terá de ser igual a 7.

Esta condição permite eliminar a opção (C), pois a imagem de 12 por meio da função definida pela expressão da opção (C) é igual a 15.

No instante 6 ocorre uma maré alta, pelo que a imagem de 6 terá de ser igual a 11.

Esta condição permite eliminar a opção (B) pois a imagem de 6 por meio da função definida pela expressão da opção (B) é igual a 9.

Portanto, a resposta correta é a opção (A).

Pág. 114

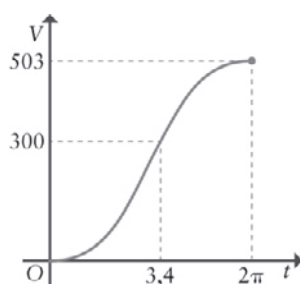
132.

a) $V(2\pi) = 80(2\pi - \sin 2\pi) \approx 503$

A capacidade total do depósito é, aproximadamente, 503 m^3 .

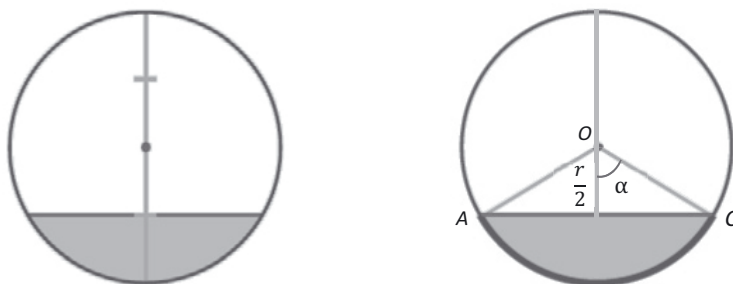
b) Trata-se de saber o valor de x para o qual se tem $V(x) = 300$.

Na figura está representado o gráfico da função V , bem como o ponto de interseção deste gráfico com a reta de equação $y = 300$.



Portanto, a amplitude do arco ABC terá de ser, aproximadamente, de 3,4 radianos.

c) O volume de combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\frac{1}{4}$ da altura máxima, é a imagem, por meio da função V , da amplitude do arco AC (ou seja, da amplitude do ângulo ao centro correspondente AOC).



Tem-se $\widehat{AOC} = 2\alpha$. Tem-se também $\cos \alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$, pelo que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, $\widehat{AOC} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Como $V\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$, o volume de combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\frac{1}{4}$ da altura máxima, é, assim, aproximadamente igual a 98 m^3 .

133.

$$\text{a) } 12 \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + 16 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 12 \times \frac{\pi}{6} + 16 \times \frac{3\pi}{4} - 3 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi + 12\pi + \pi = 15\pi$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \arcsen\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) + \arccos\left(\sin \frac{11\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3} \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \\ & = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \\ & = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ & = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi \end{aligned}$$

134. Seja $\alpha = \operatorname{arctg} x$; então, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\operatorname{tg} \alpha = x$.

Provar a igualdade enunciada equivale, assim, a provar que $\arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \alpha$.

Tem-se:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}} \quad \left(\text{para } \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ tem-se } \cos \alpha > 0\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha = \sin \alpha$$

pelo que, como $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsen(\sin \alpha) = \alpha$

135.

a) Tem-se $\arccos 0,6 \approx 0,9$, pelo que, como $0,9 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\alpha \approx 0,9$.

b) Para $t \in [0, \pi]$, tem-se $\cos t = -0,2 \Leftrightarrow t \approx 1,77$.

Pretende-se determinar $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ tal que $\cos \theta = \cos t$.

Tem-se:

$$\cos \theta = \cos t \Leftrightarrow \theta = t + 2k\pi \vee \theta = -t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, \pi]$, vem $-t \in [-\pi, 0]$, pelo que se tem:

$$\theta \in [2k\pi, \pi + 2k\pi] \vee \theta \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$$

Procuramos $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se tem $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$. Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow \theta \in [0, \pi] \vee \theta \in [-\pi, 0]$$

$$k = 1 \rightarrow \theta \in [2\pi, 3\pi] \vee \theta \in [\pi, 2\pi]$$

$$k = 2 \rightarrow \theta \in [4\pi, 5\pi] \vee -$$

$$\text{Então } \theta = -t + 2 \times 1 \times \pi = -t + 2\pi \approx -1,77 + 2\pi \approx 4,5$$

c) Para $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, tem-se $\operatorname{tg} t = -2 \Leftrightarrow t \approx -1,11$.

Pretende-se determinar $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, tal que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$.

Tem-se:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = t + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ tem-se } x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

Procuramos $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se tem $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$k = 1 \rightarrow x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$\text{Então, } x = t + 1 \times \pi = t + \pi \approx -1,11 + \pi \approx 2,0$$

d) Para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, tem-se $\operatorname{sen} t = -0,6 \Leftrightarrow t \approx -0,64$.

Pretende-se determinar $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ tal que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} t$.

Tem-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \alpha = t + 2k\pi \vee \alpha = \pi - t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, vem $\pi - t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$, pelo que se tem:

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \vee \alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

Procuramos $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se tem $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$. Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \vee \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$k = 1 \rightarrow \alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right] \vee -$$

$$\text{Então, } \alpha = \pi - t + 2 \times 0 \times \pi = \pi - t \approx \pi - (-0,64) \approx 3,8.$$

136.

a) $3 \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3}$

Seja $\alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 1,23$.

Tem-se:

$$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Então, vem $x \approx 1,23 + 2k\pi \vee x \approx -1,23 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Seja $\alpha = \arcsen \frac{3}{4} \approx 0,848$.

Tem-se:

$$\sin(2x) = \sin \alpha \Leftrightarrow 2x = \alpha + 2k\pi \vee 2x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Então, vem $x \approx \frac{0,848}{2} + k\pi \vee x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{0,848}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja,
 $x \approx 0,42 + k\pi \vee x \approx 1,15 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Seja $\alpha = \arctg 2 \approx 1,11$.

Tem-se:

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x+1 = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

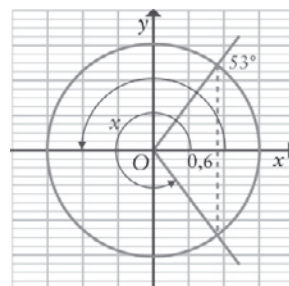
Então, vem $x \approx 1,11 - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x \approx 0,11 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

137.

a) Tem-se $\arccos 0,6 \approx 53^\circ$ e pretende-se, então, encontrar $x \in]270^\circ, 360^\circ[$ tal que $\cos x = \cos 53^\circ$.

Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se

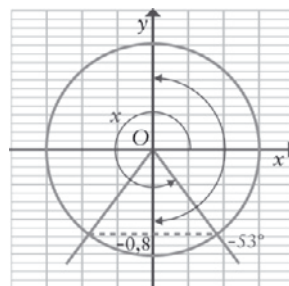
$$x = 360^\circ - 53^\circ = 307^\circ.$$



b) Tem-se $\arcsen(-0,8) \approx -53^\circ$ e pretende-se, então, encontrar $x \in]180^\circ, 270^\circ[$ tal que $\sin x = \sin(-53^\circ)$.

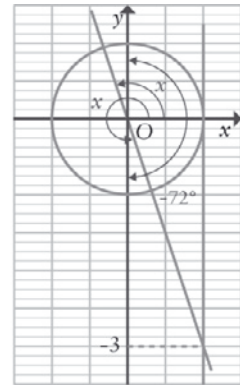
Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se

$$x = 180^\circ + 53^\circ = 233^\circ.$$



c) Tem-se $\arctg(-3) \approx -72^\circ$ e pretende-se, então, encontrar $x \in]0^\circ, 360^\circ[$ tal que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-72^\circ)$.

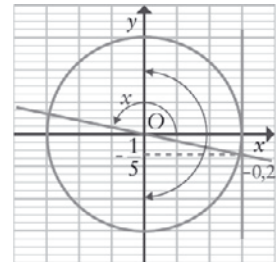
Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se $x = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ou $x = 360^\circ - 72^\circ = 288^\circ$.



138.

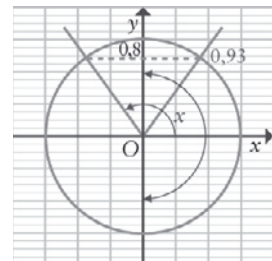
a) Tem-se $\arctg\left(-\frac{1}{5}\right) \approx -0,20$ e pretende-se, então, encontrar $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-0,20)$.

Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se $x = \pi - 0,20 \approx 2,94$.



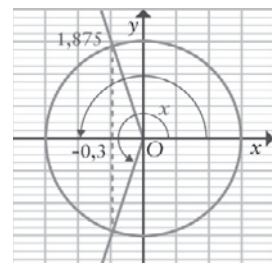
b) Tem-se $\arcsen 0,8 \approx 0,93$ e pretende-se, então, encontrar $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(0,93)$.

Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se $x = \pi - 0,93 \approx 2,21$.



c) Tem-se $\arccos(-0,3) \approx 1,875$ e pretende-se, então, encontrar $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $\cos x = \cos 1,875$.

Tal como a figura pretende ilustrar, tem-se $x = 2\pi - 1,875 \approx 4,41$.



139.

a) $2\operatorname{sen} x - 0,8 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0,4$

Seja $\alpha = \arcsen 0,4 \approx 0,41$.

Tem-se:

$$\operatorname{sen} x = 0,4 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Então, vem $x \approx 0,41 + 2k\pi \vee x \approx \pi - 0,41 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$x \approx 0,41 + 2k\pi \vee x \approx 2,73 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b)} 1 = 3 \cos x + 1,8 \Leftrightarrow 3 \cos x = -0,8 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{4}{15}$$

$$\text{Seja } \alpha = \arccos\left(-\frac{4}{15}\right) \approx 1,84.$$

$$\text{Tem-se: } \cos x = -0,8 \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Então, vem } x \approx 1,84 + 2k\pi \vee x \approx -1,84 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{c)} \text{ Seja } \alpha = \arctg(-10) \approx -1,47.$$

Tem-se:

$$\text{tg}(x - 3) = -10 \Leftrightarrow \text{tg}(x - 3) = \text{tg} \alpha \Leftrightarrow x - 3 = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha + 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Então, vem } x \approx -1,47 + 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja, } x \approx 1,53 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

140. Trata-se de resolver, para $t \in [0, 10]$, a equação $V(t) = 2,4$.

$$V(t) = 2,4 \Leftrightarrow 2,5 - 0,3 \cos(1,5t) = 2,4 \Leftrightarrow \cos(1,5t) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Seja } \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,23.$$

Tem-se:

$$\cos(1,5t) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(1,5t) = \cos \alpha \Leftrightarrow 1,5t = \alpha + 2k\pi \vee 1,5t = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{1,5} + \frac{2}{1,5}k\pi \vee t = -\frac{\alpha}{1,5} + \frac{2}{1,5}k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{1,5} + \frac{4}{3}k\pi \vee t = -\frac{\alpha}{1,5} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Então, vem } t \approx \frac{1,23}{1,5} + \frac{4}{3}k\pi \vee t \approx -\frac{1,23}{1,5} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja,}$$

$$t \approx 0,82 + \frac{4}{3}k\pi \vee t \approx -0,82 + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Procuramos $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se tem $t \in [0, 10]$.

Tem-se:

$$k = 0 \rightarrow t \approx 0,8 \vee t \approx -0,8 \text{ (somente } 0,8 \text{ pertence ao intervalo } [0, 10])$$

$$k = -1 \rightarrow t \approx -0,5 \vee - \text{ (não pertence ao intervalo } [0, 10])$$

$$k = 1 \rightarrow t \approx 5,0 \vee t \approx 3,4 \text{ (pertencem ao intervalo } [0, 10])$$

$$k = 2 \rightarrow t \approx 9,2 \vee t \approx 7,6 \text{ (pertencem ao intervalo } [0, 10])$$

$$k = 3 \rightarrow t \approx 13,4 \vee t \approx 11,7 \text{ (não pertencem ao intervalo } [0, 10])$$

Os instantes procurados são, em segundos: 0,8 ; 3,4 ; 5,0 ; 7,6 e 9,2

141.

a) Tem-se a seguinte relação de proporcionalidade direta:

Amplitude do arco descrito, em radianos		Tempo gasto a descrevê-lo, em segundos
2π	—	24
x	—	9

Tem-se $x = \frac{9 \times 2\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$, pelo que, ao fim de 9 segundos, a partícula descreveu um arco de $\frac{3\pi}{4}$ radianos.

1 min 4 s = 64 s, pelo que vem:

2π	—	24
x	—	64

Tem-se $x = \frac{64 \times 2\pi}{24} = \frac{16\pi}{3}$, pelo que, ao fim de 1 min 4 s, a partícula descreveu um arco de $\frac{16\pi}{3}$ radianos.

b) Tem-se a seguinte relação de proporcionalidade direta:

Comprimento do arco descrito, em cm		Tempo gasto a descrevê-lo, em segundos
10π	—	24
x	—	15

Tem-se $x = \frac{15 \times 10\pi}{24} = \frac{25\pi}{4} = 6,25\pi$, pelo que, ao fim de 15 segundos, a partícula descreveu um arco com comprimento igual a $6,25\pi$ centímetros.

+ Exercícios propostos

Pág. 116

142. Opção (C)

Tem-se, de acordo com a figura:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 2,4 \\ \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = 30 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = 2,4\overline{AC} \\ \frac{\overline{AC} \times 2,4\overline{AC}}{2} = 30 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = 2,4\overline{AC} \\ 2,4\overline{AC}^2 = 60 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC}^2 = 25 \\ \overline{AC} = 5 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = 2,4 \times 5 \\ \overline{BC} = 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = 12 \\ \overline{AC} = 5 \end{array} \right. \\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 25 + 144 \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 169 \Leftrightarrow \overline{AB} = 13, \text{ pelo que o perímetro do triângulo é igual a } 13 + 12 + 5 = 30.$$

143. Opção (B)

Seja x a medida do comprimento do menor lado do triângulo.

Tem-se $x + (x + 1) + (x + 2) = 24$, pelo que $x = 7$ e, então, as medidas dos lados do triângulo são 7, 8 e 9.

Seja α a amplitude do maior ângulo do triângulo.

$$\text{Tem-se } 9^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 81 = 113 - 112 \times \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{7}; \text{ portanto } \alpha \approx 73,4^\circ.$$

144. Opção (A)

$36^\circ + 42^\circ = 78^\circ$, pelo que o terceiro ângulo do triângulo tem $180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$ de amplitude.

Sejam x e y as medidas dos comprimentos dos restantes lados do triângulo.

$$\text{Tem-se: } \frac{\sin 102^\circ}{6} = \frac{\sin 36^\circ}{x} = \frac{\sin 42^\circ}{y}, \text{ pelo que } x = \frac{6 \times \sin 36^\circ}{\sin 102^\circ} \text{ e } y = \frac{6 \times \sin 42^\circ}{\sin 102^\circ}$$

Portanto $x \approx 3,61$ e $y \approx 4,10$.

Então, perímetro do triângulo $= x + y + 6 \approx 3,61 + 4,10 + 6 \approx 13,7$.

145. Opção (D)

$$\text{Perímetro do triângulo } [OAB] = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = 1 + 1 + 2 \sin \alpha = 2 + 2 \sin \alpha$$

Pág. 117

146. Opção (A)

$$\text{Perímetro do retângulo } [ABCD] = 2 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{BC} = 4 \times \overline{OC} + 2 \times \overline{BC} = 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$$

147. Opção (C)

$$\text{Tem-se, de acordo com a figura } \cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ e } \overline{AB} = \tan \alpha.$$

Perímetro da região colorida $= \overline{CO} + \overline{OA} + \overline{AB} + \text{comprimento do arco } BC =$

$$= 1 + \frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 1 = 1 + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pi + 2}{2} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

148. Opção (B)

Tem-se, de acordo com a figura

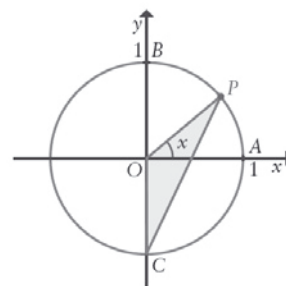
$$\overline{PC}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OP}^2 - 2 \times \overline{CO} \times \overline{OP} \times \cos(\widehat{COP}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 2 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 2 - 2(-\sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 2 + 2 \sin x \Leftrightarrow \overline{PC} = \sqrt{2 + 2 \sin x}$$

$$\text{Perímetro do triângulo } [OPC] = \overline{CO} + \overline{OP} + \overline{PC} = 1 + 1 + \sqrt{2 + 2 \sin x} = 2 + \sqrt{2 + 2 \sin x}$$

**Pág. 118****149. Opção (A)**

Tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -4 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha - \sin \alpha$$

Pretende-se, então, determinar o valor de $\cos \alpha - \sin \alpha$ sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = -4$ e que $\alpha \in]0, \pi[$.
Ora,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 16 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{17}; \text{ como } \alpha \in]0, \pi[\text{ e } \operatorname{tg} \alpha < 0, \text{ pode-se}$$

$$\text{concluir que } \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \text{ pelo que vem } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{17} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{17}; \text{ como } \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \text{ vem } \sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Então, } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} - \frac{4\sqrt{17}}{17} = -\frac{5\sqrt{17}}{17}.$$

150. Opção (B)

Tem-se

$$\frac{2\pi}{3} < \pi, \text{ o que exclui a opção (A)}$$

$$4 + 4\operatorname{tg}^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4 + 4 \times (\sqrt{3})^2 = 4 + 4 \times 3 = 16, \text{ pelo que } \frac{4\pi}{3} \text{ é solução da equação.}$$

$$4 + 4\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4 + 4 \times (-\sqrt{3})^2 = 4 + 4 \times 3 = 16, \text{ pelo que } \frac{5\pi}{3} \text{ é solução da equação.}$$

Dado que tanto $\frac{4\pi}{3}$ como $\frac{5\pi}{3}$ pertencem ao intervalo $[\pi, 2\pi]$, a opção correta é a opção (B).

151. Opção (D)

$$\text{Tem-se } 4 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{4}.$$

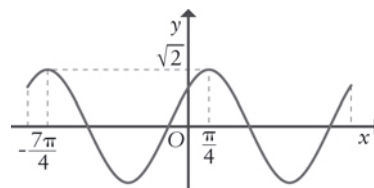
A equação $\sin x = \frac{1}{4}$ tem duas soluções em todos os intervalos da forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$,

pelo que, no intervalo $[0, 5\pi]$ tem seis soluções: duas no intervalo $[0, \pi]$, duas no intervalo $[2\pi, 3\pi]$ e duas no intervalo $[4\pi, 5\pi]$

152. Opção (C)

Dado que $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, tem-se que $\frac{\pi}{4}$ e $-2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$ são soluções da equação.

Tal como a figura pretende ilustrar, esboçando, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, o gráfico da função definida por $y = \sin x + \cos x$, verifica-se que, neste intervalo, não há mais soluções daquela equação.

**153. Opção (D)**

Tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ e $\sin(2\pi - x) = -\sin x$, pelo que $f(x) = -\cos x - \cos x + \sin x + \sin x = 2\sin x - 2\cos x$

154. Opção (B)

Tem-se:

$1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$, o que exclui a opção (A).

$2\sin\left(5 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, pelo que a opção correta é a opção (B).

155. Opção (B)

O facto de o domínio da função f ser o conjunto $\mathbb{R}$, permite excluir as opções (C) e (D).

Determinemos o contradomínio da função definida pela expressão $3 + 4\sin x$.

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4\sin x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq 3 + 4\sin x \leq 7$; isto exclui a opção (A).

Pág. 119**156. Opção (C)**

O domínio da função definida por $3 + \operatorname{tg}^2 x$ não é $\mathbb{R}$, o que exclui a opção (A).

A função definida por $\cos^2 x$ admite zeros (por exemplo $\frac{\pi}{2}$), o que exclui a opção (B).

$2 + \cos(-x) = 2 + \cos x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ pelo que a função definida por $2 + \cos x$ é par.

Tem-se, então, que a função definida por $2 + \cos x$ é par, tem domínio $\mathbb{R}$ e não admite zeros, pois $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$.

157. Opção (C)

Tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq -5\sin x \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 1 - 5\sin x \leq 6$

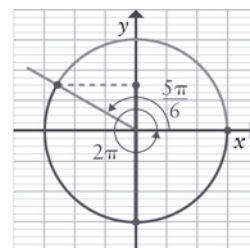
Ora, $\frac{7\pi}{2} \in [3\pi, 5\pi]$ e $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 6$, pelo que $\frac{7\pi}{2}$ é o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

158. Opção (A)

Tal como ilustrado na figura, quando x toma todos os valores do intervalo

$\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, $\sin x$ toma todos os valores do intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, pelo que

$1 + \sin x$ toma todos os valores do intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.



159. Opção (C)

Os instantes em que ocorre a maré baixa são aqueles em que h toma o seu valor mínimo, ou seja, 8
Tem-se:

$$h(3) = 10 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{6} \right) = 10 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 10 + 2 \times 1 = 12, \text{ o que exclui a opção (A).}$$

$$h(6) = 10 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{6\pi}{6} \right) = 10 + 2 \operatorname{sen} \pi = 10 + 2 \times 0 = 10, \text{ o que exclui a opção (B).}$$

$$h(9) = 10 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{6} \right) = 10 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 10 + 2 \times (-1) = 8, \text{ pelo que a opção correta é a opção (C).}$$

160. Opção (D)

$$\text{Tem-se } 1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Então, para $x \in \mathbb{R}$, o domínio de f é o conjunto dos valores de x tais que

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

As opções (A) e (B) estão excluídas porque $\frac{\pi}{2}$ não pode pertencer ao domínio de f .

A opção (C) está excluída porque $\frac{3\pi}{4}$ não pode pertencer ao domínio de f .

161. Opção (A)

$$3 \arcsen(2x + 1) + \pi = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 3 \arcsen(2x + 1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsen(2x + 1) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Pág. 120**162.**

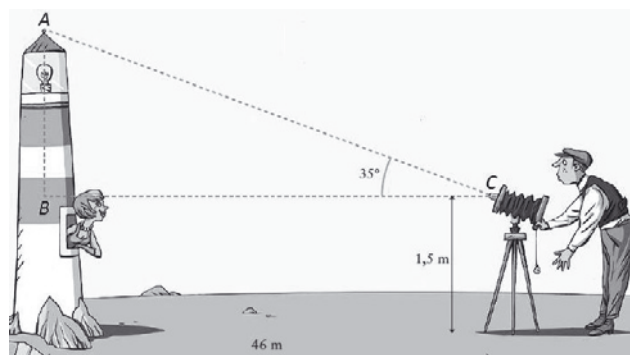
Tem-se, de acordo com a figura:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC} \times \operatorname{tg} 35^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 46 \times \operatorname{tg} 35^\circ$$

Portanto, $a \approx 32,210$ m.

Então, a altura do farol é aproximadamente igual a 33,7 m.

**163.**

a) Tem-se:

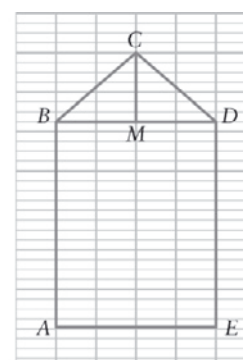
$$\operatorname{tg} 17^\circ = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 5 \times \operatorname{tg} 17^\circ; \text{ portanto } a \approx 1,5 \text{ m.}$$

b) Na figura ao lado, o pentágono $[ABCDE]$ é a base do prisma pentagonal apresentado no esquema que representa o espigueiro. O ponto M é o ponto médio do segmento $[BD]$.

Tem-se:

$$\overline{CM}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 + 0,4^2 = 0,5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CM}^2 + 0,16 = 0,25 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = 0,09 \Leftrightarrow \overline{CM} = 0,3 \text{ m}$$



$$\text{Área da base} = \overline{AE} \times \overline{ED} + \frac{\overline{BD} \times \overline{CM}}{2} = 0,8 \times 3,7 + \frac{0,8 \times 0,3}{2} = 3,08 \text{ m}^2$$

Então, vem:

$$\text{Volume do espigreiro} = 3,08 \times 5 = 15,4 \text{ m}^3$$

Pág. 121

164.

a) O triângulo $[AOB]$ é isósceles pois $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois os segmentos $[OA]$ e $[OB]$ são raios da mesma circunferência.

$$\text{b) } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Como o triângulo $[AOB]$ é isósceles e $\overline{OA} = \overline{OB}$, tem-se $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

$$\text{Então, } \widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ.$$

c) Seja M o ponto médio do segmento $[AB]$.

Tem-se:

$$\cos 54^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{OA} \times \cos 54^\circ \Leftrightarrow \overline{AM} = 12 \cos 54^\circ \text{ pelo que } \overline{AB} = 24 \cos 54^\circ \text{ e, portanto, } \overline{AB} \approx 14,107 \text{ cm.}$$

$$\sin 54^\circ = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OM} = \overline{OA} \times \sin 54^\circ \Leftrightarrow \overline{OM} = 12 \sin 54^\circ; \text{ portanto, } \overline{OM} \approx 9,708 \text{ cm.}$$

$$\text{Área do pentágono } [ABCDE] = 5 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} = 5 \times \frac{14,107 \times 9,708}{2} \approx 342,377 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área pedida} \approx \pi \times 12^2 - 342,377 \approx 110 \text{ cm}^2$$

165. Seja $[AB]$ um dos lados do polígono regular de n lados.

$$\text{Tem-se } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}, \text{ pelo que } \alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{Vem: } \sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{1}, \text{ pelo que } \overline{AC} = \sin \alpha = \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ pelo que } \overline{AB} = 2 \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

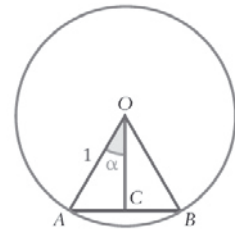
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{1}, \text{ pelo que } \overline{OC} = \cos \alpha = \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

A área dos triângulo $[OAB]$ é igual a:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \times \cos \frac{180^\circ}{n}}{2} = \cos \frac{180^\circ}{n} \times \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Portanto, a área do polígono é dada por:

$$n \cos \frac{180^\circ}{n} \times \sin \frac{180^\circ}{n}$$



166.

$$\text{a) Tem-se: } \sin 53^\circ = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x = 25 \times \sin 53^\circ; \text{ portanto, } x \approx 20 \text{ m.}$$

b) Seja c_1 o comprimento do troço do tabuleiro à esquerda do pilar e seja c_2 o comprimento do troço do tabuleiro à direita do pilar.

$$\text{Tem-se: } \operatorname{tg} 53^\circ = \frac{20}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = \frac{20}{\operatorname{tg} 53^\circ} \text{ e } \operatorname{tg} 14^\circ = \frac{20}{c_2} \Leftrightarrow c_2 = \frac{20}{\operatorname{tg} 14^\circ}$$

Então, o comprimento total do tabuleiro é igual a $c_1 + c_2 = \frac{20}{\operatorname{tg} 53^\circ} + \frac{20}{\operatorname{tg} 14^\circ} \approx 95 \text{ m}$.

c) Seja h a altura do pilar.

Tem-se: $\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{h}{c_2} \Leftrightarrow h = c_2 \times \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{20 \times \operatorname{tg} 32^\circ}{\operatorname{tg} 14^\circ}$; portanto, $h \approx 50 \text{ m}$, pelo que a distância do tabuleiro ao topo do pilar é aproximadamente igual a 30 m.

167.

a) $\hat{C} = 180^\circ - (73^\circ + 28^\circ) = 79^\circ$

$$\frac{\operatorname{sen} 73^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 28^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 79^\circ}{42}, \text{ pelo que se tem:}$$

- $\frac{\operatorname{sen} 73^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 79^\circ}{42} \Leftrightarrow a = \frac{42 \times \operatorname{sen} 73^\circ}{\operatorname{sen} 79^\circ}$; portanto, $a \approx 41$.
- $\frac{\operatorname{sen} 28^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 79^\circ}{42} \Leftrightarrow b = \frac{42 \times \operatorname{sen} 28^\circ}{\operatorname{sen} 79^\circ}$; portanto, $b \approx 20$.

b) $\hat{A} = 180^\circ - (112^\circ + 19^\circ) = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$

$$\frac{\operatorname{sen} 49^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 112^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 19^\circ}{23}, \text{ pelo que se tem:}$$

- $\frac{\operatorname{sen} 49^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 19^\circ}{23} \Leftrightarrow a = \frac{23 \times \operatorname{sen} 49^\circ}{\operatorname{sen} 19^\circ}$; portanto, $a \approx 53$.
- $\frac{\operatorname{sen} 112^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 19^\circ}{23} \Leftrightarrow b = \frac{23 \times \operatorname{sen} 112^\circ}{\operatorname{sen} 19^\circ}$; portanto, $b \approx 66$.

c) $a^2 = 5,32^2 + 5,03^2 - 2 \times 5,32 \times 5,03 \times \cos 71,2 \Leftrightarrow a^2 = 53,6033 - 53,5192 \times \cos 71,2$; portanto, $a \approx 6,03$.

$$5,32^2 = 6,03^2 + 5,03^2 - 2 \times 6,03 \times 5,03 \times \cos B \Leftrightarrow 28,3024 = 61,6618 - 60,6618 \times \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{33,3594}{60,6618}; \text{ portanto, } \cos B \approx 0,55, \text{ pelo que se tem } B \approx 56,6^\circ.$$

$$\hat{C} \approx 180^\circ - (71,2^\circ + 56,6^\circ) = 52,2^\circ$$

d) $32,9^2 = 42,4^2 + 20,4^2 - 2 \times 42,4 \times 20,4 \times \cos A \Leftrightarrow 1082,41 = 2213,92 - 1729,92 \times \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{1131,51}{1729,92}$; portanto, $\cos A \approx 0,6541$, pelo que se tem $A \approx 49,1^\circ$.

$$42,4^2 = 32,9^2 + 20,4^2 - 2 \times 32,9 \times 20,4 \times \cos B \Leftrightarrow 1797,76 = 1498,57 - 1342,32 \times \cos B \Leftrightarrow \cos B = -\frac{299,19}{1342,32}; \text{ portanto } \cos B \approx -0,223, \text{ pelo que se tem } B \approx 102,9^\circ.$$

$$\hat{C} \approx 180^\circ - (49,1^\circ + 102,9^\circ) = 28,0^\circ$$

Pág. 122

168.

a) De acordo com a lei dos cossenos:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2bc \cos A}{2abc} + \frac{2ac \cos B}{2abc} + \frac{2ab \cos C}{2abc} =$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

b) De acordo com a lei dos cossenos:

$$b \cos C + c \cos B = \frac{2a(b \cos C + c \cos B)}{2a} = \frac{2ab \cos C + 2ac \cos B}{2a} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

169.

a) $\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{1+2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1+\sin x)} =$

$$= \frac{1+2\sin x + 1}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{2+2\sin x}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{2(1+\sin x)}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{2}{\cos x}$$

b)

$$\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \times \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \times \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \times \sin^2 x$$

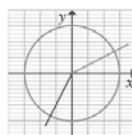
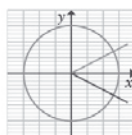
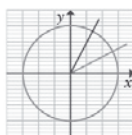
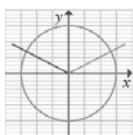
170.

a ₁) $\acute{O}C$	a ₂) $\acute{O}J$	a ₃) $\acute{O}E$	a ₄) $\acute{O}H$	a ₅) $\acute{O}G$	a ₆) $\acute{O}D$
b ₁) 30°	b ₂) 150°	b ₃) 180°	b ₄) 240°	b ₅) 270°	b ₆) 330°
c ₁) -60°	c ₂) -90°	c ₃) -180°	c ₄) -210°	c ₅) -270°	c ₆) -300°
d ₁) $\acute{O}D$	d ₂) $\acute{O}A$	d ₃) $\acute{O}B$	d ₄) $\acute{O}L$	d ₅) $\acute{O}D$	d ₆) $\acute{O}F$

Pág. 123

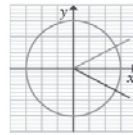
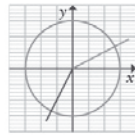
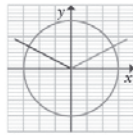
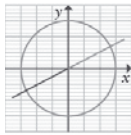
171.

a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha) + 2 \cos(-\alpha) + \sin(270^\circ - \alpha) =$



$$= \sin \alpha + \sin \alpha + 2 \cos \alpha - \cos \alpha = 2 \sin \alpha + \cos \alpha$$

b) $\operatorname{tg}(5\pi + x) - \operatorname{sen}(-3\pi - x) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}(-x) =$



$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$$

172. $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) - 3\operatorname{tg}\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-6\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times (-1) = -1 + 1 + 3 = 3$

173.

a) Tem-se: $\exists x \in \mathbb{R} : 2\operatorname{sen} x = 3 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = \frac{3}{2}$

Ora, esta afirmação é falsa, pois o maior valor que $\operatorname{sen} x$ pode tomar é 1.

b) Tem-se, para todo o valor real de α pertencente a $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$ pelo que a proposição é verdadeira.

174.

a) Tem-se:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{EP}}{1} \Leftrightarrow \overline{EP} = \operatorname{sen} x \text{ e } \cos x = \frac{\overline{AE}}{1} \Leftrightarrow \overline{AE} = \cos x$$

pelo que $\overline{PF} = 1 - \overline{AE} = 1 - \cos x$.

Então, vem:

$$a(x) = A_{\Delta[APB]} + A_{\Delta[BPC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{EP}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{PF}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen} x}{2} + \frac{1 \times (1 - \cos x)}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{2}$$

b) Tem-se:

$$\overline{CF} = 1 - \overline{BF} = 1 - \operatorname{sen} x$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{CF}^2 \Leftrightarrow \overline{PC}^2 = (1 - \cos x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x + 1 - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 2 + (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - 2\cos x - 2\operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 2 + 1 - 2(\cos x + \operatorname{sen} x) \Leftrightarrow \overline{PC} = \sqrt{3 - 2(\cos x + \operatorname{sen} x)}$$

Então, vem:

$$p(x) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AP} + \overline{PC} = 1 + 1 + 1 + \sqrt{3 - 2(\cos x + \operatorname{sen} x)} = 3 + \sqrt{3 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}$$

c) Tem-se: $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

Interpretação:

Quando $x = \frac{\pi}{4}$, o ponto P pertence à diagonal $[AC]$ do quadrado $[ABCD]$, pelo que a região colorida $[ABCP]$ coincide com o triângulo $[ABC]$ cuja área é igual a $\frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Tem-se: $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + \sqrt{3 - 2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)} = 3 + \sqrt{3 - 2(1 + 0)} = 3 + \sqrt{3 - 2} = 4$

Interpretação:

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o vértice D do quadrado $[ABCD]$, pelo que a região colorida $[ABCP]$ coincide com o referido quadrado cujo perímetro é igual a $4 \times 1 = 4$.

d) Tem-se $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{sen} \beta > 0$ e $\operatorname{cos} \beta > 0$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{169}{144} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{144}{169}; \text{ como } \operatorname{cos} \beta > 0, \text{ tem-se } \operatorname{cos} \beta = \frac{12}{13}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \operatorname{cos} \beta \times \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13} \times \frac{5}{12} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{5}{13}$$

Então, vem:

$$a(\beta) = \frac{1 + \frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{2} = \frac{\frac{6}{13}}{2} = \frac{3}{13}$$

175.

a) Para todo o número real x , $\operatorname{sen} x$ toma todos os valores do intervalo $[-1, 1]$.

Tem-se:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(cx) \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq b \operatorname{sen}(cx) \leq b \Leftrightarrow a - b \leq a + b \operatorname{sen}(cx) \leq a + b$$

Então, a função f toma todos os valores do intervalo $[a - b, a + b]$, pelo que o seu contradomínio é este intervalo.

b) Seja P o período fundamental da função f . Tem-se $f(x + P) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x + P) = f(x) \Leftrightarrow a + b \operatorname{sen}[c(x + P)] = a + b \operatorname{sen}(cx) \Leftrightarrow \operatorname{sen}[c(x + P)] = \operatorname{sen}(cx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(cx + cP) = \operatorname{sen}(cx)$$

Como $c > 0$ e o período fundamental da função seno é 2π , P é o valor para o qual $cP = 2\pi$, ou seja $\frac{2\pi}{c}$.

Pág. 124

176. De acordo com o gráfico, o contradomínio de f é o intervalo $[-2, 4]$, pelo que se tem, de

$$\text{acordo com o exercício 175, } \begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

De acordo com o gráfico, o período positivo mínimo de f é igual a 8, pelo que se tem, de acordo com o exercício 175, $\frac{2\pi}{c} = 8 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{8} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{4}$.

177.

a) O contradomínio de f é o intervalo $[-6, 2]$, pelo que se tem

$$\begin{cases} a - b = -6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -4 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

O gráfico da função f pode ser obtido a partir do gráfico da função g definida por $g(x) = a + b \operatorname{sen}(cx)$ por meio de uma translação horizontal, pelo que o seu período positivo mínimo é igual ao período positivo mínimo de g , ou seja, $\frac{2\pi}{c}$.

De acordo com o gráfico, o período positivo mínimo de f é igual a 16, pelo que se tem

$$\frac{2\pi}{c} = 16 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{16} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{8}$$

b) Seja d_0 um possível valor de d (a sua existência está garantida no enunciado).

Então, dado que o período positivo mínimo de f é igual a 16, para qualquer valor real d da forma $d_0 + k \times 16$, com $k \in \mathbb{Z}$, o gráfico da função definida por $a + b \sin[c(x - d)]$ é igual ao do enunciado.

Logo, existe uma infinidade de valores para d .

De outro modo:

Tem-se, de acordo com o gráfico, $f(6) = 2$.

$$f(6) = 2 \Leftrightarrow -2 + 4 \sin\left[\frac{\pi}{8}(6 - d)\right] = 2 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{8}(6 - d)\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}(6 - d) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 - d = 4 + 16k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -d = -2 + 16k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow d = 2 - 16k, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, existe uma infinidade de valores para d .

c) O menor valor positivo possível para d pode ser obtido na expressão $2 + 16k$, quando $k = 0$.
Obtém-se $d = 2$.

178. Como o contradomínio de f é o intervalo $[10, 16]$, tem-se $\begin{cases} a - b = 10 \\ a + b = 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} a - b = 10 \\ a + b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 26 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 3 \end{cases}$$

O gráfico da função f pode ser obtido a partir do gráfico da função g definida por

Como o período positivo mínimo de f é igual a 12, tem-se $\frac{2\pi}{c} = 12 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{6}$.

Como f tem máximo para $x = 8$, tem-se $f(8) = 16$.

$$f(8) = 16 \Leftrightarrow 13 + 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(8 - d)\right] = 16 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{6}(8 - d)\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}(8 - d) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 8 - d = 3 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -d = -5 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow d = 5 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Um possível valor para d é 5.

179.

a) A distância do ponto A à reta r é igual a $d(0)$.

$$d(0) = 5 + 4 \sin\left[\frac{\pi}{6}(0 - 3)\right] = 5 + 4 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5 + 4 \times (-1) = 1 \text{ m}$$

b) O contradomínio de f é o intervalo $[5 - 4, 5 + 4]$, ou seja, $[-1, 9]$.

Então, a distância do ponto B à reta r é igual a 9 m.

Como a distância do ponto A à reta r é igual a 1 m, o diâmetro da circunferência é igual a 8 m, pelo que o raio é 4 m.

c) O tempo que o ponto demora a descrever uma volta completa coincide com o período positivo mínimo da função d , ou seja, $\frac{2\pi}{c}$.

$$\text{Tem-se } \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = 12 \text{ segundos.}$$

d) Tem-se, para $x > 0$:

$$\begin{aligned} d(x) = 3 &\Leftrightarrow 5 + 4 \sin \left[\frac{\pi}{6}(x-3) \right] = 3 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{6}(x-3) \right] = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{6}(x-3) \right] = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}(x-3) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}(x-3) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-3 = -1 + 12k \vee x-3 = 7 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2 + 12k \vee x = 10 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Os dois instantes que ocorrem durante a primeira volta são os que correspondem aos dois menores valores positivos de x : 2 segundos e 10 segundos.

180.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Tem-se, $\forall x \in D_f$, $f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{\cos(-x)} = \frac{1+\cos x}{\cos x} = f(x)$.

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) - f(2\pi) = \frac{1+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)} - \frac{1+\cos(2\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1+1}{1} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$

e) 2π é período de f porque se tem, $\forall x \in D_f$:

$$f(x + 2\pi) = \frac{1+\cos(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{1+\cos x}{\cos x} = f(x)$$

f) $f(x) = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3 + 3\cos x = 3\cos x - 2\sqrt{3}\cos x \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos x = -3 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Procuramos $k \in \mathbb{Z}$ para os quais se tem $x \in [4\pi, 6\pi]$:

Tem-se:

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6} && \text{(não pertencem ao intervalo } [4\pi, 6\pi]) \\ k = 1 &\rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi && \text{(não pertencem ao intervalo } [4\pi, 6\pi]) \\ k = 2 &\rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi && \text{(somente } \frac{5\pi}{6} + 4\pi \text{ pertence ao intervalo } [4\pi, 6\pi]) \\ k = 3 &\rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 6\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 6\pi && \text{(somente } -\frac{5\pi}{6} + 6\pi \text{ pertence ao intervalo } [4\pi, 6\pi]) \\ k = 4 &\rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 8\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 8\pi && \text{(não pertencem ao intervalo } [4\pi, 6\pi]) \end{aligned}$$

As soluções que pertencem ao intervalo $[4\pi, 6\pi]$ são $\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6}$ e $-\frac{5\pi}{6} + 6\pi = \frac{31\pi}{6}$

g) A figura ilustra a situação descrita.

O ponto M é o ponto médio do lado $[BC]$ do triângulo.

$$\text{Tem-se: área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2}$$

$$\text{Ora, } \frac{1+\cos x}{\cos x} = 3 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 3 \cos x \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$$

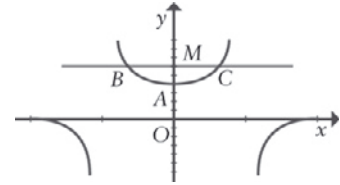
$$\Leftrightarrow 2 \cos x = 1 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \text{ pelo que se conclui que a abcissa do ponto } C \text{ é } \frac{\pi}{3} \text{ e que a abcissa do ponto } B \text{ é } -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Então, } \overline{BC} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$f(0) = \frac{1+\cos 0}{\cos 0} = \frac{1+1}{1} = 2. \text{ Então, } \overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = 3 - 2 = 1.$$

$$\text{Então, vem: área do triângulo } [ABC] = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3} \times 1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ unidades de área}$$



181.

$$\text{a) } D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \right\}$$

$$\text{Tem-se: } -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3, \text{ pelo que } D_f = [-1, 3].$$

b) $\arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right)$ toma todos os valores do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Tem-se:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq 3 \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi + 3 \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Então, tem-se: } D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

c) Seja a a abcissa do ponto P . Tem-se:

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow \pi + 3 \arcsen\left(\frac{a-1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \arcsen\left(\frac{a-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{a-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a-1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 - \sqrt{3}. \text{ Então, como } a < 0, \text{ tem-se } \overline{OP} = -a = \sqrt{3} - 1.$$

$$\text{Seja } b \text{ a abcissa do ponto } Q. \text{ Tem-se } b = f(0) = \pi + 3 \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + 3 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Então, vem: área do triângulo } [OPQ] = \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1) \times \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{4} \text{ unidades de área}$$

***182.** Na figura ao lado está representada a figura do enunciado a que se acrescentou o segmento de reta $[BE]$.

P é o ponto de interseção dos segmentos $[BE]$ e $[AF]$.

O triângulo $[BCE]$ é o transformado do triângulo $[ABF]$ por meio da rotação de centro no centro do quadrado e de amplitude 90° pelo que $[BE]$ é perpendicular a $[AF]$.

Então, $[BP]$ é a altura do triângulo $[ABF]$ relativa à hipotenusa pelo que se tem

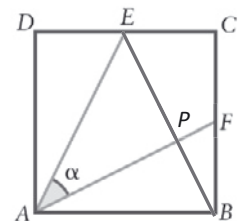
$$\text{que os triângulos } [ABF] \text{ e } [APB] \text{ são semelhantes, pelo que } \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}.$$

$$\text{Seja } x = \overline{BF}.$$

$$\text{Ora, } \overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = (2x)^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = 5x^2 \Leftrightarrow \overline{AF} = \sqrt{5}x. \text{ pelo que}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AP}}{2x} = \frac{2x}{\sqrt{5}x} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4}{\sqrt{5}}x$$

$$\text{Então, } \cos \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}x}{\sqrt{5}x} = \frac{4}{5} = 0,8.$$



Tema 2 | Geometria Analítica

Atividades «Será que...?»

Pág. 128

SERÁ QUE..?

Declives de retas no plano

a) Quanto mais «inclinada» é uma reta, maior é o valor absoluto do declive.

As retas r e s têm declive positivo. Como a reta s é mais inclinada do que a reta r , o declive da reta s é maior do que o da reta r . Portanto, $m_r < m_s$.

As retas t e u têm declive negativo. Como a reta t é mais inclinada do que a reta u , o valor absoluto do seu declive é maior. Ora, em números negativos, quanto maior é o valor absoluto, menor é o número. Portanto, $m_t < m_u$.

Logo, tem-se $m_t < m_u < m_r < m_s$.

$$\text{b}_1) \overrightarrow{OT}(-1, 3); \overrightarrow{OU}(-3, 2); \overrightarrow{OR}(4, 1); \overrightarrow{OS}(1, 2)$$

$$\text{b}_2) m_t = \frac{3}{-1} = -3; m_u = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}; m_r = \frac{1}{4}; m_s = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Tem-se } -3 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{4} < 2.$$

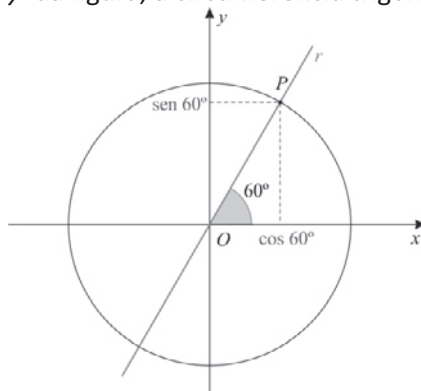
Pág. 130

SERÁ QUE..?

Inclinação e declive

Começemos por obter o declive da reta r .

Consideremos, no referencial xOy da figura, a circunferência trigonométrica.



Seja P o ponto de interseção da reta t com a circunferência trigonométrica.

As coordenadas do ponto P são $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$, pelo que se tem $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Um vetor diretor da reta r é o vetor $\overrightarrow{OP}$, cujas coordenadas são as do ponto P .

Tema 2 | Geometria Analítica

Atividades «Será que...?»

Pág. 128

SERÁ QUE..?

Declives de retas no plano

a) Quanto mais «inclinada» é uma reta, maior é o valor absoluto do declive.

As retas r e s têm declive positivo. Como a reta s é mais inclinada do que a reta r , o declive da reta s é maior do que o da reta r . Portanto, $m_r < m_s$.

As retas t e u têm declive negativo. Como a reta t é mais inclinada do que a reta u , o valor absoluto do seu declive é maior. Ora, em números negativos, quanto maior é o valor absoluto, menor é o número. Portanto, $m_t < m_u$.

Logo, tem-se $m_t < m_u < m_r < m_s$.

b₁) $\overrightarrow{OT}(-1, 3)$; $\overrightarrow{OU}(-3, 2)$; $\overrightarrow{OR}(4, 1)$; $\overrightarrow{OS}(1, 2)$

b₂) $m_t = \frac{3}{-1} = -3$; $m_u = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$; $m_r = \frac{1}{4}$; $m_s = \frac{2}{1} = 2$

Tem-se $-3 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{4} < 2$.

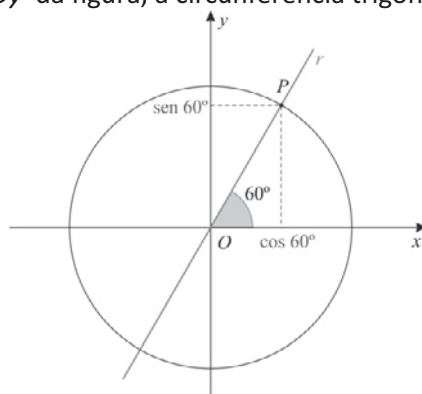
Pág. 130

SERÁ QUE..?

Inclinação e declive

Começemos por obter o declive da reta r .

Consideremos, no referencial xOy da figura, a circunferência trigonométrica.



Seja P o ponto de interseção da reta t com a circunferência trigonométrica.

As coordenadas do ponto P são $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$, pelo que se tem $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Um vetor diretor da reta r é o vetor $\overrightarrow{OP}$, cujas coordenadas são as do ponto P .

Portanto, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

O declive da reta r é, portanto, $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

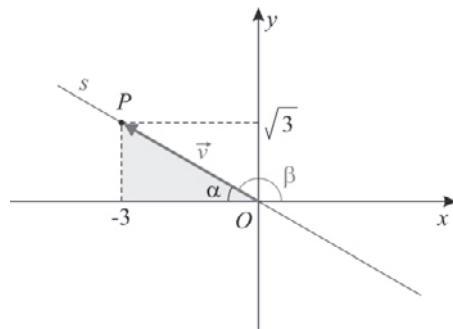
Vejamos agora a inclinação da reta s .

Como o declive da reta s é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, um vetor diretor da reta s é o vetor de coordenadas $(-3, \sqrt{3})$.

Como a reta s passa na origem do referencial, estas coordenadas são também as de um ponto P da reta (ver figura).

Tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que $\alpha = 30^\circ$.

A inclinação da reta r é $\beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

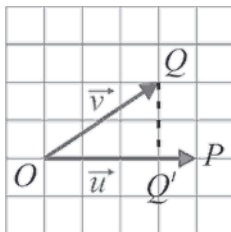


Pág. 133

SERÁ QUE..?

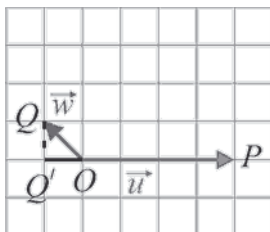
Aplicação da definição de produto escalar

a)



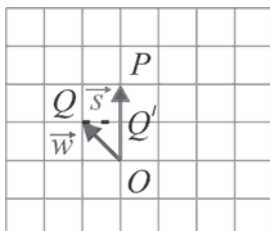
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP} \times \overline{OQ'} = 4 \times 3 = 12$$

b)



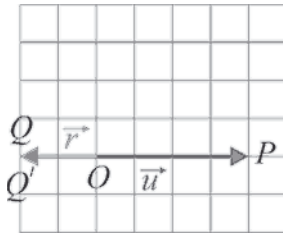
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'} = -4 \times 1 = -4$$

c)



$$\vec{s} \cdot \vec{w} = \overline{OP} \times \overline{OQ'} = 2 \times 1 = 2$$

d)



Q' coincide com Q

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'} = -4 \times 2 = -8$$

Pág. 146

SERÁ QUE..?

Declives de retas perpendiculares

a) $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-5, 2) \cdot (2, 5) = -10 + 10 = 0$

b) $m_r = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$; $m_s = \frac{5}{2}$
 $m_r \times m_s = -\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = -1$

Pág. 149

SERÁ QUE..?

Identificar um lugar geométrico

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 2) - (2, 3) = (-5, -1)$
 $\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (-3, 2) = (x + 3, y - 2)$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (-5, -1) \cdot (x + 3, y - 2) = 0 \Leftrightarrow -5(x + 3) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -5x - 15 - y + 2 = 0 \Leftrightarrow -5x - y = 13 \Leftrightarrow 5x + y = -13$

b) Determinemos os pontos de interseção da reta de equação $5x + y = -13$ com os eixos coordenados.

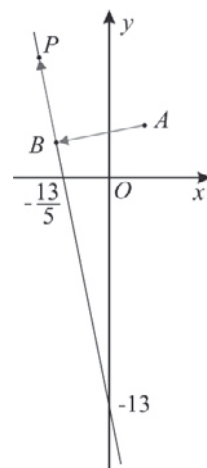
Para $x = 0$, vem $y = -13$. A reta intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -13)$.

Para $y = 0$, vem $x = -\frac{13}{5}$. A reta intersesta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-\frac{13}{5}, 0)$.

A reta é perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ no ponto B .

Poderíamos ter previsto este resultado, pois a condição $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ traduz o seguinte problema: qual é o conjunto de pontos P tais que o vetor $\overrightarrow{BP}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$?

Ora, tal como a figura sugere, esse conjunto de pontos é a reta perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ no ponto B .



a) Um vetor normal ao plano ABC é, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{CH}$.

Um vetor normal ao plano ADG é, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{BF}$.

b) Dois planos que admitem o vetor $\overrightarrow{BC}$ como vetor normal são o plano ABG e o plano DCH .
Estes dois planos são paralelos.

c) Um vetor perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ é, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{BC}$.

Um plano que admite o vetor $\overrightarrow{BC}$ como vetor normal é, por exemplo, o plano ABG .

Os planos BCH e ABG são perpendiculares.

Qualquer plano que admita o vetor $\overrightarrow{AB}$ como vetor normal é paralelo a qualquer plano que admita o vetor $\overrightarrow{HE}$ como vetor normal. Por isso, não é possível identificar dois planos concorrentes que admitam como vetores normais estes dois vetores.

Qualquer plano que admita o vetor $\overrightarrow{AB}$ como vetor normal é perpendicular a qualquer plano que admita o vetor $\overrightarrow{BH}$ como vetor normal. Por isso, não é possível identificar dois planos paralelos que admitam como vetores normais estes dois vetores.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Declive e inclinação de uma reta. Produto escalar

Pág. 128

1.

a) Como a reta tem declive -2 , a sua equação é da forma $y = -2x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, 3)$, vem $3 = -2 \times (-1) + b$, pelo que $b = 1$.

Então, a equação reduzida da reta é $y = -2x + 1$.

b) Um vetor diretor da reta é o vetor $\overrightarrow{AB}$; tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(-1, -5)$.

Então, o declive da reta é igual a $\frac{-5}{-1} = 5$, pelo que a sua equação é da forma $y = 5x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -3)$, a sua ordenada na origem é -3 .

Então, a equação reduzida da reta é $y = 5x - 3$.

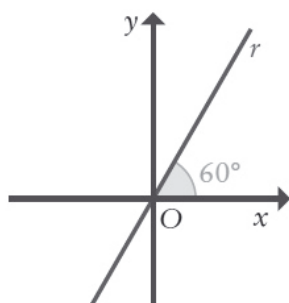
Pág. 129

2. Compara a tua estimativa com os valores que deves ter obtido no transferidor e que são os seguintes:

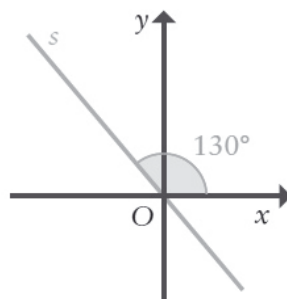
Reta	r	s	t	u
Inclinação	14°	63°	108°	145°

3.

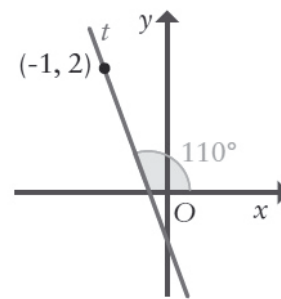
a)



b)



c)



4. Tem-se:

$\widehat{DOC} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, pelo que a inclinação da reta OC é igual a 45° .

$\widehat{DOB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, pelo que a inclinação da reta OB é igual a 120° .

$\widehat{AOB} = 60^\circ$, pelo que a inclinação da reta AB é igual a 60° .

Seja E' o ponto simétrico do ponto E relativamente a O .

Tem-se:

$D\hat{O}E' = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, pelo que a inclinação da reta OE é igual a 135° .

A reta ED é paralela à reta OC , pelo que a sua inclinação é igual a 45° .

A reta CD é paralela à reta OE , pelo que a sua inclinação é igual a 135° .

Pág. 130

5. Como a inclinação da reta r é 135° , o seu declive é -1 e, então, o declive da reta s é 1 , pelo que a sua inclinação é igual a 45° .

Pág. 131

6.

a) Como o declive da reta é $2,5$, é positivo, pelo que a inclinação é igual a $\text{tg}^{-1}(2,5)$; portanto, a inclinação é, aproximadamente, 68° .

b) Como o declive da reta é $-1,2$, é negativo, pelo que a inclinação é igual a $\text{tg}^{-1}(-1,2) + 180^\circ$; portanto, a inclinação é, aproximadamente, 130° .

7. Como a inclinação da reta r é $\frac{2\pi}{3}$, o seu declive é igual a $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, ou seja, $-\sqrt{3}$.

Então, a sua equação é da forma $y = -\sqrt{3}x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-3, 2)$, vem $2 = -\sqrt{3} \times (-3) + b$, pelo que $b = 2 - 3\sqrt{3}$.

Então, a equação reduzida da reta é $y = -\sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$.

8. Como a inclinação é 30° , o declive da reta é $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que um vetor diretor da reta é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(3, \sqrt{3})$.

Então, uma equação vetorial da reta é $(x, y) = (1, 5) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$.

Pág. 132

9. Seja α a inclinação da reta r e seja β a inclinação da reta s ; tem-se $A\hat{O}B = \beta - \alpha$.

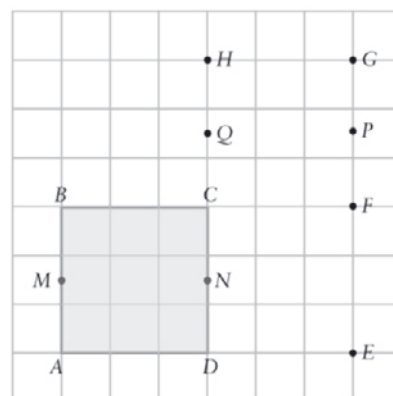
Como o declive da reta r é $\frac{1}{3}$, é positivo, pelo que a inclinação é igual a $\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Como o declive da reta s é -4 , é negativo, pelo que a inclinação é igual a $\text{tg}^{-1}(-4) + 180^\circ$.

Então, $A\hat{O}B = \text{tg}^{-1}(-4) + 180^\circ - \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 85,6^\circ$; portanto $A\hat{O}B \approx 85^\circ 36'$.

Pág. 133

10. Para a aplicação da definição de produto escalar para a resolução das alíneas seguintes, representou-se, em cada caso, o par de vetores, utilizando representantes de ambos com a mesma origem, de acordo com os pontos apresentados na figura.



a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AD} = 9$

b) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{CB} = -9$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

d) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{AD} = -9$

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CH} \times \overrightarrow{CD} = -9$

f) $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AD} = 9$

g) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CD} = -1,5 \times 3 = -4,5$

h) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CD} = -1,5 \times 3 = -4,5$

Pág. 134

11.

a) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \widehat{BAC} = 60^\circ$

b) Seja A' o ponto simétrico de A relativamente a C .

Tem-se: $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'} \wedge \overrightarrow{CB} = \widehat{BCA'} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

c) Seja B' o ponto simétrico de B relativamente a C .

Tem-se: $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB'} \wedge \overrightarrow{CM} = \widehat{MCB'} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

d) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AM} = 0^\circ$

Pág. 136

12.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 120^\circ = 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20 \Leftrightarrow \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{20}{12} \Leftrightarrow \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{5}{3}$; como nenhum ângulo tem cosseno maior do que 1, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ não pode ser igual a 20.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad -1 \leq \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) \leq 1 &\Leftrightarrow -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -12 \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) \leq 12 \Leftrightarrow -12 \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 12 \end{aligned}$$

Pág. 137

13.

a) Como $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$, os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são perpendiculares, pelo que o ângulo QPR é reto. O triângulo é retângulo.

b) Como $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} < 0$, o ângulo dos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ é obtuso, pelo que também é obtuso o ângulo QPR . O triângulo é obtusângulo.

c) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RQ} < 0 \Leftrightarrow (-\overrightarrow{QP}) \cdot (-\overrightarrow{QR}) < 0 \Leftrightarrow (-1) \times (-1) \times (\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}) < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} < 0$,
Como $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} < 0$, o ângulo dos vetores $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$ é obtuso, pelo que também é obtuso o ângulo RQP . O triângulo é obtusângulo.

Pág. 139

14.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (-3\vec{v}) &= \vec{u} \cdot (-3\vec{v}) + \vec{w} \cdot (-3\vec{v}) = (-3\vec{v}) \cdot \vec{u} + (-3\vec{v}) \cdot \vec{w} = \\ &= -3(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 3(\vec{w} \cdot \vec{v}) = -3 \times 5 - 3 \times 7 = -36 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 2\vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) = 2[\vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u})] = 2[(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{v}] = 2(\vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(7 - 5) = 4$$

15. Tem-se, igualmente, a seguinte propriedade: $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$.

$$\text{a)} \quad (3\vec{e} - 2\vec{f}) \cdot \vec{f} = (3\vec{e}) \cdot \vec{f} - (2\vec{f}) \cdot \vec{f} = 3 \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{f})}_{=0} - 2(\vec{f} \cdot \vec{f}) = 0 - 2 \times \|\vec{f}\|^2 = -2$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (\vec{e} - \vec{f}) \cdot (-2\vec{f}) &= (-2\vec{f}) \cdot (\vec{e} - \vec{f}) = -2[\vec{f} \cdot (\vec{e} - \vec{f})] = -2[(\vec{e} - \vec{f}) \cdot \vec{f}] = \\ &= -2 \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{f} \cdot \vec{f})}_{=0} = -2(-\|\vec{f}\|^2) = -2 \times (-1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (\vec{e} + \vec{f}) \cdot (\vec{e} - 2\vec{f}) &= \vec{e} \cdot (\vec{e} - 2\vec{f}) + \vec{f} \cdot (\vec{e} - 2\vec{f}) = (\vec{e} - 2\vec{f}) \cdot \vec{e} + (\vec{e} - 2\vec{f}) \cdot \vec{f} = \\ &= \vec{e} \cdot \vec{e} - (2\vec{f}) \cdot \vec{e} + \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{f})}_{=0} - (2\vec{f}) \cdot \vec{f} = \vec{e} \cdot \vec{e} - 2 \underbrace{(\vec{f} \cdot \vec{e})}_{=0} - 2(\vec{f} \cdot \vec{f}) = \|\vec{e}\|^2 - 2 \times \|\vec{f}\|^2 = \\ &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (2\vec{e} + 3\vec{f}) \cdot (3\vec{e} - 2\vec{f}) &= 2\vec{e} \cdot (3\vec{e} - 2\vec{f}) + 3\vec{f} \cdot (3\vec{e} - 2\vec{f}) = \\ &= 2[\vec{e} \cdot (3\vec{e} - 2\vec{f})] + 3[\vec{f} \cdot (3\vec{e} - 2\vec{f})] = \\ &= 2[(3\vec{e} - 2\vec{f}) \cdot \vec{e}] + 3[(3\vec{e} - 2\vec{f}) \cdot \vec{f}] = \\ &= 2[(3\vec{e}) \cdot \vec{e} - (2\vec{f}) \cdot \vec{e}] + 3[(3\vec{e}) \cdot \vec{f} - (2\vec{f}) \cdot \vec{f}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2[3(\vec{e} \cdot \vec{e}) - 2 \underbrace{(\vec{f} \cdot \vec{e})}_{=0}] + 3[3 \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{f})}_{=0} - 2(\vec{f} \cdot \vec{f})] = \\
&= 2(3 \times \|\vec{e}\|^2) + 3(-2 \times \|\vec{f}\|^2) = \\
&= 2(3 \times 1) + 3(-2 \times 1) = 2 \times 3 - 3 \times 2 = 0
\end{aligned}$$

Pág. 141

16. Seja $[ABCD]$ um losango.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \\
&= -\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{0} = 0
\end{aligned}$$

Como o produto escalar é igual a 0, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são perpendiculares.

Pág. 144

17.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 3) \cdot (2, 4) = -2 + 12 = 10$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, -3) \cdot (1, -2) = 0 + 6 = 6$

18.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1, 4) \cdot (-2, 0, 1) = -4 + 0 + 4 = 0$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -3, 3) \cdot \left(2, -2, \frac{1}{3}\right) = 2 + 6 + 1 = 9$

19.

a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P$; portanto $\overrightarrow{PQ}$ é o vetor de coordenadas $(-2, 2, 0)$.

$\overrightarrow{PR} = R - P$; portanto $\overrightarrow{PR}$ é o vetor de coordenadas $(-1, 6, -1)$.

Tem-se:

$$\cos(\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{PR}\|} = \frac{(-2, 2, 0) \cdot (-1, 6, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + 12}{\sqrt{8} \times \sqrt{38}} = \frac{14}{\sqrt{304}}$$

Portanto, $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \arccos \frac{14}{\sqrt{304}} \approx 0,6$ radianos.

b) $P\hat{R}Q = \overrightarrow{RP} \wedge \overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$; portanto $\overrightarrow{RP}$ é o vetor de coordenadas $(1, -6, 1)$.

$\overrightarrow{RQ} = Q - R$; portanto $\overrightarrow{RQ}$ é o vetor de coordenadas $(-1, -4, 1)$.

Tem-se:

$$\cos(\overrightarrow{RP} \wedge \overrightarrow{RQ}) = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}}{\|\overrightarrow{RP}\| \times \|\overrightarrow{RQ}\|} = \frac{(1, -6, 1) \cdot (-1, -4, 1)}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 1^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{-1 + 24 + 1}{\sqrt{38} \times \sqrt{18}} = \frac{24}{\sqrt{684}}$$

Portanto, $P\hat{R}Q = \arccos \frac{24}{\sqrt{684}} \approx 0,4$ radianos.

Pág. 146

20. Seja $\vec{x}(a, b, c)$ um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$; tem-se $\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3b + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ c = -4b \end{cases}$$

Então, uma expressão geral dos vetores perpendiculares a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ é $(3b, b, -4b)$, com $b \in \mathbb{R}$.

Pág. 147

21. Tem-se $2x + 3y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, pelo que o declive da reta r é $-\frac{2}{3}$; então, o declive de uma reta perpendicular a r é igual a $-\frac{1}{-\frac{2}{3}}$, ou seja, $\frac{3}{2}$.

22. Designemos por m_r o declive da reta r .

$$\text{Tem-se } m_r - \frac{1}{m_r} = 2 \Leftrightarrow m_r^2 - 2m_r - 1 = 0 \Leftrightarrow m_r = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Leftrightarrow m_r = 1 - \sqrt{2} \vee m_r = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Se } m_r = 1 - \sqrt{2}, \text{ vem } m_s = -\frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -\frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = 1 + \sqrt{2} \text{ e, então,}$$

$$\text{se } m_r = 1 + \sqrt{2}, \text{ vem } m_s = 1 - \sqrt{2}.$$

Pág. 148

23.

a) O declive da reta AB é $m_{AB} = \frac{1-(-1)}{6-2} = \frac{1}{2}$, pelo que o declive da mediatriz é -2 .

Então, a equação reduzida da mediatriz é da forma $y = -2x + b$.

O ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é o ponto de coordenadas $(4, 0)$.

Como a mediatriz passa no ponto de coordenadas $(4, 0)$, tem-se $0 = -2 \times 4 + b$, pelo que $b = 8$.

Então, a equação reduzida da mediatriz é $y = -2x + 8$.

b) De um modo diferente do utilizado na alínea anterior:

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz.

Tem-se, sendo M o ponto médio de $[AB]$: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

As coordenadas de M são $(-\frac{1}{2}, -2)$, as coordenadas de $\overrightarrow{MP}$ são $(x + \frac{1}{2}, y + 2)$ e as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(1, 2)$.

Então:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}, y + 2) \cdot (1, 2) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$$

Então, a equação reduzida da mediatriz é $y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$.

Pág. 149**24.**

a) Reunião de duas retas paralelas à reta r à distância de 3 unidades de r .

b) É a reta perpendicular à reta r no ponto A .

Pág. 151

25. Seja P o ponto de interseção da reta r com a reta perpendicular a r e que passa por A . A distância do ponto A à reta r é igual a $\overline{AP}$.

Determinemos as coordenadas de P .

O declive da reta r é igual a $\frac{1}{2}$, pelo que o declive da reta perpendicular a r e que passa por A é -2 ; como esta reta passa por A , a sua ordenada na origem é -4 , pelo que a sua equação reduzida é $y = -2x + 4$.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \frac{5}{2}x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Então, P é o ponto de coordenadas $(-2, -1)$ e, portanto,

$$\overline{AP} = \sqrt{(0 + 2)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Pág. 156**26.**

a) Uma condição que define o plano é $3(x - 1) - (y - 0) + 2(z + 3) = 0$, ou, o que é equivalente, $3x - y + 2z + 3 = 0$.

b) Uma condição que define o plano é $1(x - 3) + 0 \times (y + 4) - 2(z - 1) = 0$, ou, o que é equivalente, $x - 2z - 1 = 0$.

Pág. 157**27.**

a) Por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 3, -1)$.

b) Tem-se: $2y - x = z + 1 \Leftrightarrow -x + 2y - z - 1 = 0$, pelo que um vetor normal ao plano é o vetor de coordenadas $(-1, 2, -1)$.

c) Tem-se: $2x - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 0y - 3z + 1 = 0$, pelo que um vetor normal ao plano é o vetor de coordenadas $(2, 0, -3)$.

Pág. 158

28. Tem-se: $\overrightarrow{n_\alpha}(2, -1, 3)$.

Ora, $\overrightarrow{n_\alpha}$ é um vetor normal a qualquer plano paralelo a α .

a) Uma equação que define o plano é $2(x - 0) - (y - 0) + 3(z - 0) = 0$, ou, o que é equivalente, $2x - y + 3z = 0$.

b) Uma equação que define o plano é $2(x + 1) - (y - 3) + 3(z - 0) = 0$, ou, o que é equivalente, $2x - y + 3z + 5 = 0$.

29.

a) Determinação do ponto de interseção do plano α com o eixo Ox :

Como o ponto de interseção pertence ao eixo Ox , a sua ordenada e a sua cota são nulas.

Tem-se: $4x - 3 \times 0 + 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Então, o ponto de interseção do plano α com o eixo Ox é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.

Dado que a reta é perpendicular ao plano α , um vetor diretor da reta é $\overrightarrow{n_\alpha}(4, -3, 1)$.

Então, a reta é definida, por exemplo, pela condição $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right) + k(4, -3, 1), k \in \mathbb{R}$.

b) A reta r é a interseção dos planos definidos pelas equações $x = 1$ e $y = 0$, pelo que se trata de uma reta paralela ao eixo coordenado das cotas.

Qualquer plano perpendicular ao eixo das cotas tem equação da forma $z = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Como o plano passa na origem do referencial, uma sua equação cartesiana é $z = 0$.

De outro modo:

Dado que o plano é perpendicular à reta r , um vetor normal ao plano é qualquer vetor diretor da reta. Um vetor diretor da reta é o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$.

Então, tem-se: $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow z = 0$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $z = 0$.

Pág. 159

30.

a) O plano passa no ponto médio de $[AB]$ e um vetor normal ao plano é o vetor $\overrightarrow{AB}$.

Seja M o ponto médio de $[AB]$; M é o ponto de coordenadas $(2, -1, 0)$.

Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(4, 2, -2)$.

Então, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é $4(x - 2) + 2(y + 1) - 2(z - 0) = 0$.

Tem-se $4(x - 2) + 2(y + 1) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 3 = 0$.

Então, uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$ é $2x + y - z - 3 = 0$.

b) A superfície esférica de diâmetro $[AM]$.

31. Seja T o ponto de tangência. Como o ponto pertence ao eixo Oz , a sua abscissa e a sua ordenada são nulas.

Tem-se:

$$(0 - 1)^2 + 0^2 + (z + 2)^2 = 10 \Leftrightarrow (z + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow z + 2 = -3 \vee z + 2 = 3 \Leftrightarrow z = -5 \vee z = 1$$

Então, o ponto T , com cota negativa, em que a superfície esférica intersesta o eixo Oz , é o ponto de coordenadas $(0, 0, -5)$.

Seja C o centro da superfície esférica. Um vetor normal ao plano é o vetor $\overrightarrow{CT}$.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{CT}$ são $(0 - 1, 0 - 0, -5 + 2)$, ou seja, $(-1, 0, -3)$.

Então, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto T é

$$-1(x - 0) + 0(y - 0) - 3(z + 5) = 0.$$

Tem-se $-1(x - 0) + 0(y - 0) - 3(z + 5) = 0 \Leftrightarrow -x - 3z - 15 = 0 \Leftrightarrow x + 3z + 15 = 0$,

pelo que uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica no ponto T é

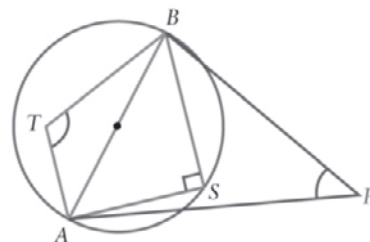
$$x + 3z + 15 = 0.$$

Pág. 160

32. O lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas tangentes ao plano ABC no ponto A é o conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{PA}$ é perpendicular a ABC , ou seja, a reta perpendicular a ABC e que passa por A .

Ora, $\overrightarrow{PA}$ é perpendicular a ABC se e só se $\overrightarrow{PA}$ é perpendicular aos vetores diretores de duas quaisquer retas não paralelas do plano, ou seja, se e só se $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

33. A figura ao lado pretende ilustrar a situação. Tem-se que, para qualquer ponto S da superfície esférica de diâmetro $[AB]$, o ângulo ASB é reto, para qualquer ponto P , exterior à superfície esférica, o ângulo APB é agudo e, para qualquer ponto T pertencente ao interior da superfície esférica, o ângulo ATB é obtuso ou raso, pelo que se tem $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$ e $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} < 0$.



Então, o conjunto dos pontos P , tais que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$, é o exterior da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Pág. 161

34.

a) O vetor $\vec{v}$, paralelo a α , é perpendicular a qualquer vetor normal a α .

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha(1, 1, -3)$.

Então, tem-se: $\vec{v} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (2, -1, k) \cdot (1, 1, -3) = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

b) Queremos determinar as coordenadas de dois vetores não colineares com $\vec{v}(2, -1, \frac{1}{3})$ nem colineares entre si e que sejam perpendiculares a $\vec{n}_\alpha(1, 1, -3)$.

«Inspirados» na nota lateral da página 145 do manual, podemos obter os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ perpendiculares a $\vec{n}_\alpha$:

$$\begin{array}{ccc} \vec{n}_\alpha(1, 1, -3) & & \vec{n}_\alpha(1, 1, -3) \\ \swarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \swarrow \\ \vec{a}(-1, 1, 0) & & \vec{b}(0, 3, 1) \end{array}$$

Ora, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares entre si e nenhum é colinear com $\vec{v}$.

Pág. 162

35. Procuremos as coordenadas de um ponto do plano e as de dois vetores não colineares e paralelos ao plano.

Tem-se $2 \times 3 + 3 \times 0 - 4 \times 0 = 6$, pelo que o ponto de coordenadas $(3, 0, 0)$ pertence ao plano.

Um vetor normal ao plano é o vetor $\vec{n}_\alpha(2, 3, -4)$ e, portanto, os vetores de coordenadas $(-3, 2, 0)$ e $(4, 0, 2)$, sendo perpendiculares a $\vec{n}_\alpha$, são paralelos ao plano.

Então, uma equação vetorial do plano é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 2, 0) + \lambda(4, 0, 2), \quad k, \lambda \in \mathbb{R}$$

36. Procuremos as coordenadas de um vetor, $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$, normal ao plano.

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

Portanto, qualquer vetor da forma $\vec{n}_\alpha(c, -\frac{3}{2}c, c)$ é normal ao plano. Para $c = 2$, tem-se $\vec{n}_\alpha(2, -3, 2)$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$ pertence ao plano, tem-se que o plano é definido pela condição $2(x - 0) - 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0$.

Tem-se $2(x - 0) - 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 2z + 1 = 0$, pelo que uma equação cartesiana do plano definido pela condição $(x, y, z) = (0, 0, 1) + s(2, 2, 1) + t(-1, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$ é $2x - 3y + 2z + 1 = 0$.

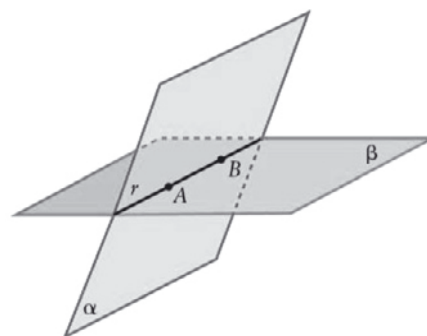
Pág. 163

37.

a) Tal como ilustrado na figura, se dois pontos A e B pertencem simultaneamente a dois planos concorrentes, α e β , então a interseção dos planos α e β é a reta AB .

Tem-se $\vec{n}_\alpha(1, -2, -3)$ e $\vec{n}_\beta(0, 2, 1)$, pelo que, como os vetores normais aos planos não são colineares, os planos são concorrentes.

Dois pontos da reta r são, por exemplo, os pontos de coordenadas $(5, 0, 1)$ e $(5, 0, 1) + (4, -1, 2) = (9, -1, 3)$.



Basta, então, mostrar que estes dois pontos pertencem a ambos os planos:

O ponto de coordenadas $(5, 0, 1)$ pertence a α , pois $5 - 2 \times 0 - 3 \times 1 = 2$.

O ponto de coordenadas $(5, 0, 1)$ pertence a β , pois $2 \times 0 + 1 = 1$.

O ponto de coordenadas $(9, -1, 3)$ pertence a α , pois $9 - 2 \times (-1) - 3 \times 3 = 2$.

O ponto de coordenadas $(9, -1, 3)$ pertence a β , pois $2 \times (-1) + 3 = 1$.

b) Seja γ o plano cuja equação cartesiana pretendemos determinar. Tem-se $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ e $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\beta = 0$, pelo que $\vec{n}_\gamma$ é qualquer vetor diretor da reta r como, por exemplo, $(4, -1, 2)$.

Como o ponto de coordenadas $(3, 0, 4)$ pertence ao plano γ , tem-se que γ é definido pela condição $4(x - 3) + 0(y + 1) + 4(z - 2) = 0$.

Tem-se $4(x - 3) + 0(y + 1) + 4(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4z - 20 = 0$, pelo que uma equação cartesiana do plano γ é $4x + 4z - 20 = 0$.

Pág. 164

38.

a) Tem-se que $\overline{DC} = 2\sqrt{2}$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(2\sqrt{2}, 0, 2)$ e B é o ponto de coordenadas $(2\sqrt{2}, 2, 0)$.

b) Um vetor, $\vec{u}(a, b, c)$, é um vetor diretor da reta EV se e só se for perpendicular ao plano que contem a base da pirâmide. Ora, $\vec{u}$ é perpendicular ao plano ABC se e só se for perpendicular a $\overline{AB}$ e perpendicular a $\overline{AD}$, ou seja, se e só se $\vec{u} \cdot \overline{AB} = 0$ e $\vec{u} \cdot \overline{AD} = 0$.

Tem-se:

$\overline{AB} = B - A$, pelo que $\overline{AB}$ é o vetor de coordenadas $(0, 2, -2)$ e

$\overline{AD} = D - A$, pelo que $\overline{AD}$ é o vetor de coordenadas $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$.

$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overline{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2\sqrt{2}, 0, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ -2\sqrt{2}a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = 0 \end{cases}$; portanto, um vetor diretor da reta EV é, por exemplo, $(0, 1, 1)$.

O ponto E é o ponto médio de segmento $[BD]$, pelo que as suas coordenadas são

$$\left(\frac{2\sqrt{2}+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (\sqrt{2}, 1, 1).$$

Então, uma equação vetorial da reta EV é $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1\right) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$.

c) Tem-se $V = E + \overline{EV}$ em que $\overline{EV}$ é o vetor de norma $3\sqrt{2}$, colinear e com o mesmo sentido do vetor $(0, 1, 1)$.

Como a norma do vetor $(0, 1, 1)$ é igual a $\sqrt{2}$, tem-se que $\overline{EV}$ é o vetor de coordenadas $(0, 3, 3)$.

Então, $V = E + \overline{EV} = (\sqrt{2}, 1, 1) + (0, 3, 3) = (\sqrt{2}, 4, 4)$.

Pág. 173

39. $\widehat{OAB} = 20^\circ$, pelo que $\widehat{BOA} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$.

a) $\widehat{BOA} = 80^\circ$, pelo que a inclinação da reta AO é 80° .

a₂) $O\hat{B}A = 80^\circ$, pelo que a inclinação da reta BA é igual a $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

a₃) $B\hat{C}O = 90^\circ$, pelo que $B\hat{O}C = 180^\circ - (90^\circ + 80^\circ) = 10^\circ$ e, então, a inclinação da reta OC é 10° .

a₄) $O\hat{B}D = 40^\circ$, pelo que a inclinação da reta BD é igual a $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

b) $B\hat{O}A = O\hat{B}A = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

A dedução das amplitudes dos ângulos e, portanto, das inclinações das retas, é idêntica à das alíneas anteriores.

b₁) $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

b₂) $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

b₃) $\frac{\alpha}{2}$

b₄) $\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}$

40.

a₁) $m_r = \frac{2}{5}$ e $b_r = -2$; $m_s = -3$ e $b_s = 1$.

a₂) Seja $\vec{u}(u_1, u_2)$ um vetor diretor da reta r e seja $\vec{v}(v_1, v_2)$ um vetor diretor da reta s .

$m_r = \frac{2}{5} = \frac{u_2}{u_1}$, pelo que $\vec{u}$ é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(5, 2)$.

$m_s = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{v_2}{v_1}$, pelo que $\vec{v}$ é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, -3)$.

a₃) Os pontos de coordenadas $(0, -2)$ e $(5, 0)$ pertencem à reta r e os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(1, -2)$ pertencem à reta s .

b) $m_r = \frac{2}{5}$, pelo que a inclinação da reta r é $\text{tg}^{-1} \frac{2}{5}$, ou seja, aproximadamente, 22° .

$m_s = -3$, pelo que a inclinação da reta r é igual a $180^\circ + \text{tg}^{-1}(-3)$, ou seja, aproximadamente, 108° .

41.

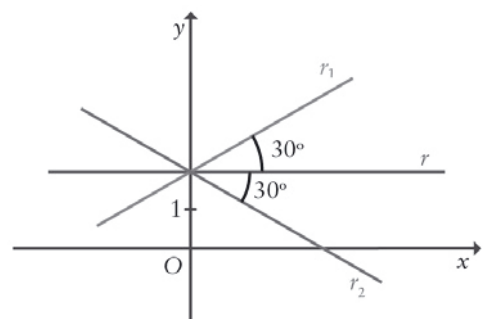
a) Na figura ao lado, estão representadas as retas r_1 e r_2 que passam no ponto de coordenadas $(0, 2)$ e que fazem com a reta r de equação $y = 2$ um ângulo de 30° .

A inclinação de r_1 é 30° e a inclinação de r_2 é 150° .

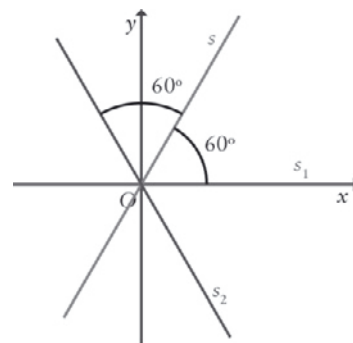
O declive de r_1 é $\text{tg } 30^\circ$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a ordenada na origem é 2, pelo que a equação reduzida de r_1 é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

O declive de r_2 é $\text{tg } 150^\circ$, ou seja, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a ordenada na

origem é 2, pelo que a equação reduzida de r_2 é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.



b) Na figura ao lado, estão representadas as retas s_1 e s_2 que passam na origem do referencial e que fazem com a reta s de equação $y = \sqrt{3}x$ um ângulo de 60° .
A inclinação de s_1 é 0° e a inclinação de s_2 é 120° .
A reta s_1 é o eixo coordenado das abscissas, pelo que a sua equação reduzida é $y = 0$.
O declive de s_2 é $\tan 120^\circ$, ou seja, $-\sqrt{3}$ e a ordenada na origem é 0, pelo que a equação reduzida de s_2 é $y = -\sqrt{3}x$.



42.

a) A amplitude de um ângulo interno de um hexágono regular é 120° , pelo que, de acordo com a figura, se tem:

$\widehat{FAB} = 120^\circ$, donde, dado que o triângulo $[ABF]$ é isósceles,

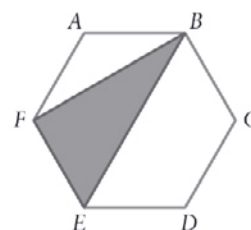
$$\widehat{BFA} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ \text{ e, então,}$$

$$\widehat{EFB} = \widehat{EFA} - \widehat{BFA} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

pelo que o triângulo $[EBF]$ é retângulo.

Como $[EB]$ é o diâmetro da circunferência circunscrita a um hexágono regular e o raio desta circunferência é igual ao lado do hexágono, tem-se $\overline{BE} = 4$.

Então, $\overline{BE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{FB}^2 = 12$, pelo que $\overline{FB} = \sqrt{12}$.



$$\mathbf{b)} \quad \vec{FC} \cdot \vec{FA} = \|\vec{FC}\| \times \|\vec{FA}\| \times \cos(\widehat{CFA}) = 4 \times 2 \times \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CF} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{CF}\| \times \cos 180^\circ = 2 \times 4 \times (-1) = -8$$

$$\begin{aligned} \vec{ED} \cdot \vec{DC} &= (-\vec{DE}) \cdot \vec{DC} = -(\vec{DE} \cdot \vec{DC}) = -(\|\vec{DE}\| \times \|\vec{DC}\| \times \cos(\widehat{CDE})) = -(2 \times 2 \times \cos 120^\circ) = \\ &= -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{FB} \cdot \vec{FD} &= \|\vec{FB}\| \times \|\vec{FD}\| \times \cos(\widehat{DFB}) = \\ &= \sqrt{12} \times \sqrt{12} \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$

O triângulo $[DFB]$ é equilátero pelo que $\widehat{DFB} = 60^\circ$.

43.

$$\mathbf{a)} \quad \vec{AB} \cdot \vec{HG} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = 3^2 = 9$$

$$\mathbf{b)} \quad \vec{DB} \cdot \vec{EG} = \vec{DB} \cdot \vec{AC} = 0, \text{ pois as diagonais de um quadrado são perpendiculares.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad \vec{AC} \cdot \vec{CF} &= (-\vec{CA}) \cdot \vec{CF} = -(\vec{CA} \cdot \vec{CF}) = -\|\vec{CA}\| \times \|\vec{CF}\| \times \cos(\widehat{ACF}) = \\ &= -3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos 60^\circ = -18 \times \frac{1}{2} = -9 \end{aligned}$$

44. Seja α a amplitude do ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

a) Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se e só se $\alpha = 90^\circ$.

$$\mathbf{b)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\mathbf{c)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ$$

$$\text{d)} \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = -\frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ$$

Pág. 174

45. Como o quadrado tem 8 unidades de área, o lado do quadrado tem $\sqrt{8}$ unidades de comprimento, pelo que a diagonal tem $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$, ou seja, 4 unidades de comprimento.

$$\text{a)} \vec{OA} \cdot \vec{AB} = \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{OA} \cdot \vec{BO} &= \vec{CB} \cdot \vec{BO} = (-\vec{BC}) \cdot \vec{BO} = -(\vec{BC} \cdot \vec{BO}) = -\|\vec{BC}\| \times \|\vec{BO}\| \times \cos(\angle CBO) = \\ &= -\sqrt{8} \times 4 \times \cos 45^\circ = -\sqrt{8} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -8 \end{aligned}$$

c) Se $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = -10$, então $90^\circ < \angle AOP \leq 180^\circ$, pelo que P pertence ao semieixo negativo das abcissas e, então, $\angle AOP = 135^\circ$.

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OP} &= -10 \Leftrightarrow \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OP}\| \times \cos 135^\circ = -10 \Leftrightarrow \sqrt{8} \times \|\vec{OP}\| \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\|\vec{OP}\| = -10 \Leftrightarrow \|\vec{OP}\| = 5 \end{aligned}$$

Portanto, a abscissa do ponto P é -5 .

46.

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{ Tem-se } \quad & -1 \leq \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) \leq 1 \quad \text{pelo que} \\ & -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad \text{ou seja} \\ & -18 \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 12,5 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 12,5 \Leftrightarrow 3 \times 6 \times \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 12,5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{12,5}{18}; \text{ portanto } \vec{u} \wedge \vec{v} \approx 46^\circ. \end{aligned}$$

47. Como cada triângulo tem 6 unidades de perímetro, os lados dos triângulos têm 2 unidades de comprimento.

$$\text{a)} \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{CA} = (-\vec{CA}) \cdot \vec{CA} = -(\vec{CA} \cdot \vec{CA}) = -\|\vec{CA}\|^2 = -2^2 = -4$$

$$\text{b)} \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AC}\| \times \|\vec{AD}\| \times \cos(\angle DAC) = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \vec{AC} \cdot \vec{CD} &= (-\vec{CA}) \cdot \vec{CD} = -(\vec{CA} \cdot \vec{CD}) = \\ &= -\|\vec{CA}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos(\angle ACD) = \quad \text{Tem-se: } \vec{CD} = 2 \times \text{altura do triângulo } [ABC] = \\ &= -2 \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = -4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -6 \quad = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\right) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$48. W = \vec{F} \cdot \vec{d} \Leftrightarrow W = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos(\vec{F} \wedge \vec{d}) \Leftrightarrow 550 = 20 \times 30 \times \cos(\vec{F} \wedge \vec{d}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos(\vec{F} \wedge \vec{d}) = \frac{11}{12}.$$

Portanto, $\vec{F} \wedge \vec{d} \approx 24^\circ$

49.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC}) =$
 $= -5 \times 5\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = -25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -25$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}_{\text{alínea b)}} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -25 + (-\overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BA} = -25 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} =$
 $= -25 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 = -25 - 5^2 = -50$

50.

a) $2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - k\vec{v}) = -2 \Leftrightarrow 6(\vec{v} \cdot \vec{u}) - 2k(\vec{v} \cdot \vec{v}) = -2 \Leftrightarrow 6(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 2k\|\vec{v}\|^2 = -2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6 \times (-4) - 2k \times 9 = -2 \Leftrightarrow -24 - 18k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{11}{9}$

b) Os vetores $\vec{u}$ e $k\vec{u} - \vec{v}$ são perpendiculares se e só se $\vec{u} \cdot (k\vec{u} - \vec{v}) = 0$.

Tem-se: $\vec{u} \cdot (k\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (k\vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k\|\vec{u}\|^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

c) $(\vec{u} + k\vec{v})^2 = 4 \Leftrightarrow (\vec{u} + k\vec{v}) \cdot (\vec{u} + k\vec{v}) = 4 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (k\vec{v}) + (k\vec{v}) \cdot \vec{u} + (k\vec{v}) \cdot (k\vec{v}) = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + 2k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + k^2\|\vec{v}\|^2 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2k \times (-4) + 9k^2 = 4 \Leftrightarrow 9k^2 - 8k + 4 = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9k^2 - 8k = 0 \Leftrightarrow k(9k - 8) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{8}{9}$

51. Tem-se:

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{e}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

Então, vem:

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v})^2 = 25 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = 25 \\ \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 25 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 9 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 25 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ 25 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 9 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 25 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \end{cases}$$

52. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}$

Ora, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DE}$ são perpendiculares, pois $\widehat{EDB} = \widehat{EDC} + \widehat{CDB} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, pelo que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.

53. Os vetores $\overrightarrow{NB}$ e $\overrightarrow{MC}$ são perpendiculares se e só se $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

Seja a a medida do comprimento do lado do quadrado.

Tem-se:

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = \underbrace{\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{MB}}_{=0} + \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}_{=0} =$$

$$= \frac{a}{2} \times a \times \cos 180^\circ + a \times \frac{a}{2} \times \cos 0^\circ = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0, \text{ pelo que } \overrightarrow{NB} \text{ e } \overrightarrow{MC} \text{ são perpendiculares.}$$

Pág. 175

54.

a) O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B se e só se $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{BA} = A - B$, pelo que $\overrightarrow{BA}$ é o vetor de coordenadas $(a - 6, -9)$.

$\overrightarrow{BC} = C - B$, pelo que $\overrightarrow{BC}$ é o vetor de coordenadas $(-6, -8)$.

Então:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (a - 6, -9) \cdot (-6, -8) = 0 \Leftrightarrow -6a + 36 + 72 = 0 \Leftrightarrow a = 18$$

b) O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A se e só se $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(6 - a, 9)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(-a, 1)$.

Então:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (6 - a, 9) \cdot (-a, 1) = 0 \Leftrightarrow -6a + a^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

55.

a) $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{1 \times 2 - \sqrt{3} \times \sqrt{12}}{\sqrt{1+3} \times \sqrt{4+12}} = \frac{2-6}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}$, pelo que $\vec{u} \wedge \vec{v} = 120^\circ$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

b) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares se e só se $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{w} = \lambda \vec{v}$.

Tem-se:

$$\vec{w} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (k, \sqrt{3}) = \lambda(2, \sqrt{12}) \Leftrightarrow (k, \sqrt{3}) = (2\lambda, \sqrt{12}\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\lambda \\ \sqrt{3} = \sqrt{12}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\lambda \\ \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\lambda \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares se e só se $k = 1$.

c) O ângulo dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é agudo se e só se $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não forem colineares, ou seja, tendo em conta a alínea anterior, se e só se $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ e $k \neq 1$.

Tem-se:

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2, \sqrt{12}) \cdot (k, \sqrt{3}) > 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 6 > 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -3 \\ k \neq 1 \end{cases}$$

O ângulo dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é agudo se e só se $k \in]-3, +\infty[\setminus \{1\}$.

56. Um vetor diretor da reta de equação $y = -\frac{2}{5}x - 2$ é o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(5, -2)$ e um vetor diretor da outra reta é o vetor $\vec{v}$ de coordenadas $(2, 3)$.

Dois dos ângulos determinados pelas duas retas têm amplitude igual à do ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{5 \times 2 - 2 \times 3}{\sqrt{25+4} \times \sqrt{4+9}} = \frac{4}{\sqrt{377}} \text{ e, portanto, } \vec{u} \wedge \vec{v} \approx 1,4 \text{ rad}$$

Os outros dois ângulos definidos pelas duas retas são suplementares dos anteriores pelo que as suas amplitudes são, aproximadamente, iguais a $\pi - 1,4 \approx 1,8 \text{ rad}$

57.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b₁) Tem-se que um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e com norma 5 é o vetor $\vec{v}$ de coordenadas $(3, -4)$.

Então, os vetores $\vec{t}_1 = 2\vec{v}$ e $\vec{t}_2 = -2\vec{v}$ são perpendiculares a $\vec{u}$ e têm norma 10.

Tem-se: $\vec{t}_1$ é o vetor de coordenadas $(6, -8)$ e $\vec{t}_2$ é o vetor de coordenadas $(-6, 8)$.

b₂) Os vetores $\vec{w}_1 = \frac{1}{5}\vec{v}$ e $\vec{w}_2 = -\frac{1}{5}\vec{v}$ são perpendiculares a $\vec{u}$ e têm norma 1.

Tem-se: $\vec{w}_1$ é o vetor de coordenadas $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $\vec{w}_2$ é o vetor de coordenadas $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

b₃) Os vetores $\vec{z}_1 = 12\vec{w}_1$ e $\vec{z}_2 = -12\vec{w}_1$ são perpendiculares a $\vec{u}$ e têm norma 12.

Tem-se: $\vec{z}_1$ é o vetor de coordenadas $(\frac{36}{5}, -\frac{48}{5})$ e $\vec{z}_2$ é o vetor de coordenadas $(-\frac{36}{5}, \frac{48}{5})$.

58. Por exemplo:

a) $(1, 2, 0)$ e $(2, -2, -2)$

b) $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 0)$

c) $(0, 1, 0)$ e $(2, 1, 6)$

59.

a) $O(0, 0, 0)$; $A(0, 0, 6)$; $B(-2, 2, 6)$; $D(2, 2, 6)$; $E(-2, 2, 0)$; $F(0, 4, 0)$; $G(2, 2, 0)$

b) $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overrightarrow{DG}$, pelo que se tem $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$.

$\overrightarrow{BF} = F - B$, pelo que $\overrightarrow{BF}$ é o vetor de coordenadas $(2, 2, -6)$.

$\overrightarrow{AE} = E - A$, pelo que $\overrightarrow{AE}$ é o vetor de coordenadas $(-2, 2, -6)$.

Então, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AE} = (2, 2, -6) \cdot (-2, 2, -6) = -4 + 4 + 36 = 36$.

c) Tem-se:

- $A\hat{G}C = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GC}$

- $\overrightarrow{GA} = A - G$, pelo que $\overrightarrow{GA}$ é o vetor de coordenadas $(-2, -2, 6)$.

- $\overrightarrow{GC} = C - G$, pelo que $\overrightarrow{GC}$ é o vetor de coordenadas $(-2, 2, 6)$.

Então: $\cos(A\hat{G}C) = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC}}{\|\overrightarrow{GA}\| \times \|\overrightarrow{GC}\|} = \frac{4 - 4 + 36}{\sqrt{4+4+36} \times \sqrt{4+4+36}} = \frac{36}{44}$ e, portanto, $A\hat{G}C \approx 35^\circ$.

60.

a) $\vec{x}$ é perpendicular, quer a $\vec{u}$, quer a $\vec{v}$, se e só se $\vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{x} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6 = 0 \\ -3a + 2b + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

b) Seja $\vec{z}(a, b, c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ um vetor perpendicular, quer a $\vec{u}$, quer a $\vec{v}$.

$$\begin{cases} \vec{z} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{z} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3c = 0 \\ -3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}c \\ \frac{9}{2}c + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}c \\ 2b + \frac{17}{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}c \\ b = -\frac{17}{4}c \end{cases}$$

Então, a expressão geral das coordenadas dos vetores perpendiculares, quer a $\vec{u}$, quer a $\vec{v}$, é:

$$\left(-\frac{3}{2}c, -\frac{17}{4}c, c\right), c \in \mathbb{R}$$

61.

a) Tem-se $m_{AC} = \frac{0-2}{5-(-7)} = -\frac{1}{6}$, pelo que a equação reduzida de AC é da forma

$$y = -\frac{1}{6}x + b.$$

Como a reta passa por C , tem-se $0 = -\frac{1}{6} \times 5 + b$, pelo que $b = \frac{5}{6}$.

Então, a equação reduzida de AC é:

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}.$$

b) A reta que contém a altura do triângulo relativa à base $[AC]$ é a reta perpendicular a $[AC]$ e que passa por B .

Como a reta é perpendicular a $[AC]$, o seu declive é 6, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = 6x + b$.

Como a reta passa por B , tem-se $5 = 6 \times 2 + b$, pelo que $b = -7$.

Então, a equação reduzida da reta é $y = 6x - 7$.

c) O lugar geométrico é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto do plano que pertence à mediatriz de $[AB]$, ou seja, um ponto do plano que satisfaz a condição $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Tem-se:

- M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{-7+2}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$;
- $\overrightarrow{MP} = P - M$, pelo que $\overrightarrow{MP}$ é o vetor de coordenadas $\left(x + \frac{5}{2}, y - \frac{7}{2}\right)$;
- $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(9, 3)$.

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}, y - \frac{7}{2}\right) \cdot (9, 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x + \frac{45}{2} + 3y - \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow 9x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 4 \end{aligned}$$

A equação reduzida da mediatriz de $[AB]$ é, então, $y = -3x - 4$.

62.

a) Tem-se $(2 + 1)^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 1$.

Como A pertence ao quarto quadrante, a sua ordenada é negativa, pelo que A é o ponto de coordenadas $(2, -1)$ e B é o ponto de coordenadas $(2, 1)$.

b) Sabemos que a reta tangente a uma circunferência num ponto é perpendicular ao raio que passa no ponto de tangência.

O centro da circunferência é o ponto $C(-1, 0)$ e, como $\overrightarrow{AC} = C - A$, $\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 1)$.

O declive da reta AC é $-\frac{1}{3}$ e, portanto, o declive da reta tangente é 3, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = 3x + b$.

Como a reta passa por A , tem-se $-1 = 3 \times 2 + b$, pelo que $b = -7$.

Então, a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto A é $y = 3x - 7$.

c) O lugar geométrico é a reta tangente à circunferência no ponto B .

Seja $P(x, y)$ um ponto do plano que pertence a esta reta, ou seja, um ponto do plano que satisfaz a condição $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Tem-se:

- $\overrightarrow{PB} = B - P$, pelo que $\overrightarrow{PB}$ é o vetor de coordenadas $(2 - x, 1 - y)$;
- $\overrightarrow{CB} = B - C$, pelo que $\overrightarrow{CB}$ é o vetor de coordenadas $(2 + 1, 1 - 0) = (3, 1)$.

Então, tem-se:

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (2 - x, 1 - y) \cdot (3, 1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x + 1 - y = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 7 = 0$$

Uma equação cartesiana da reta tangente à circunferência no ponto B é, então, $3x + y - 7 = 0$.

63. O conjunto dos pontos P do espaço tais que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, é a superfície esférica de diâmetro $[AB]$; o centro desta superfície esférica é o ponto médio de $[AB]$, ou seja, o ponto C de coordenadas $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (1, -3, 0)$.

O raio desta superfície esférica é igual a $\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (0+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{11}$.

A equação reduzida desta superfície esférica é, então, $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 11$.

64. Como a equação reduzida da reta AB é $y = \frac{x}{2} + 3$, podemos concluir que B é o ponto de coordenadas $(0, 3)$.

Como o triângulo é retângulo em B , a reta BC é perpendicular à reta AB , pelo que o seu declive é -2 .

Então, a equação reduzida da reta AC é $y = -2x + 3$.

O lado $[AC]$ está contido na reta de equação $y = 0$.

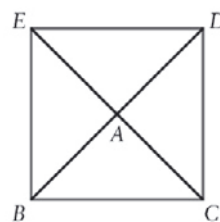
Então, o triângulo $[ABC]$ é definido analiticamente pela condição
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \frac{x}{2} + 3 \\ y \leq -2x + 3 \end{cases}$$

65. Tem-se, de acordo com o ilustrado na figura:

- $\overrightarrow{BA} = A - B$, pelo que $\overrightarrow{BA}$ é o vetor de coordenadas $(-3, -4)$;
- $D = A + \overrightarrow{BA}$, pelo que D é o ponto de coordenadas $(-2, -2)$;
- o vetor $\vec{u}(4, -3)$ é um vetor perpendicular a $\overrightarrow{BA}$ e com a mesma norma do que $\overrightarrow{BA}$ sendo, portanto, igual a $\overrightarrow{AC}$ ou igual a $\overrightarrow{AE}$.

Então, um dos vértices E ou C é igual a $A + \vec{u}$ e o outro é igual a $A - \vec{u}$.
 $A + \vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(1, 2) + (4, -3) = (5, -1)$ e $A - \vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(1, 2) - (4, -3) = (-3, 5)$.

Os restantes três vértices do quadrado são, então, os pontos de coordenadas $(-2, -2)$, $(5, -1)$ e $(-3, 5)$.



66. Na figura ao lado, os pontos R_1 e R_2 representam as possíveis posições do ponto R nas condições do enunciado.

M é o ponto médio do segmento $[PQ]$, ou seja, o ponto de coordenadas

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (2, -1).$$

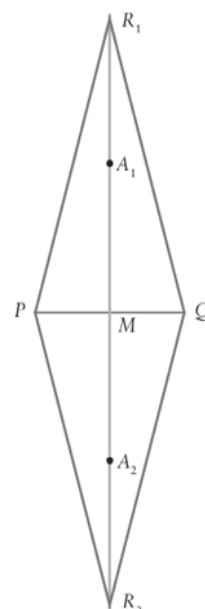
$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{MR_1} = \overrightarrow{MR_2} = 2\overrightarrow{PQ}$$

Tem-se:

- $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, pelo que $\overrightarrow{PQ}$ é o vetor de coordenadas $(-6, 2)$;
 - o vetor $\vec{u}(2, 6)$ é um vetor perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ e com a mesma norma do que $\overrightarrow{PQ}$ sendo, portanto, igual a $\overrightarrow{MA_1}$ ou igual a $\overrightarrow{MA_2}$.
- Então, um dos pontos R_1 ou R_2 é igual a $M + 2\vec{u}$ e o outro é igual a $M - 2\vec{u}$.
 $M + 2\vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(2, -1) + (4, 12) = (6, 11)$ e $M - 2\vec{u}$ é o ponto de coordenadas $(2, -1) - (4, 12) = (-2, -13)$.

As coordenadas do ponto R podem ser $(6, 11)$ ou $(-2, -13)$.

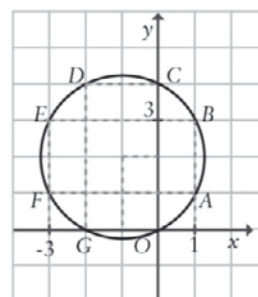


67.

a) Na figura está representada a circunferência definida pela equação $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Os pontos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-2, 4)$, $E(-3, 3)$, $F(-3, 1)$ e $G(-2, 0)$, assinalados na figura, pertencem à circunferência.

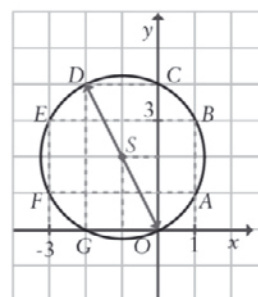
Tem-se: $\overline{OC} = \overline{DG} = \overline{EB} = \overline{FA} = 4$, pelo que a reta r pode ser definida, por exemplo, pelas equações $x = 0$, $y = 3$ e $y = 1$.



b) Por observação da figura, e pelo facto de uma reta tangente ao círculo, com a direção do vetor de coordenadas $(2, 1)$, ser perpendicular aos vetores de coordenadas $(1, -2)$ e $(-1, 2)$, podemos concluir que os pontos de tangência são os pontos O e D .

O declive das retas é igual a $\frac{1}{2}$, pelo que as suas equações reduzidas são da forma $y = \frac{1}{2}x + b$.

A reta tangente ao círculo no ponto O tem ordenada na origem 0, pelo que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x$ e a reta tangente ao círculo no ponto D tem ordenada na origem 5, pelo que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x + 5$.



Outro processo:

Uma reta tangente ao círculo com a direção do vetor de coordenadas $(2, 1)$ tem declive igual a $\frac{1}{2}$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$.

Vamos procurar os valores de b para os quais a reta e a circunferência que define o círculo têm um e só um ponto comum.

Esses valores são aqueles para os quais o sistema $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases}$ tem uma só solução.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x + b\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}x + b\right) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 - 2x - 4b = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 + bx + b^2 - 4b = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times \left(\frac{5}{4}\right)(b^2 - 4b)}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 5(b^2 - 4b)}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 5(b^2 - 4b)}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{-4b^2 + 20b}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \end{aligned}$$

Este sistema tem uma só solução se e só se $-4b^2 + 20b = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } -4b^2 + 20b = 0 &\Leftrightarrow -b^2 + 5b = 0 \Leftrightarrow b(-b + 5) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = 0 \vee -b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = 5 \end{aligned}$$

Então, a equação reduzida da reta tangente ao círculo no ponto O é $y = \frac{1}{2}x$ e a equação reduzida da reta tangente ao círculo no ponto D é $y = \frac{1}{2}x + 5$.

68. O ponto A pertence à reta s e o ponto B pertence à reta r .

A reta AC é perpendicular à reta s , pelo que o seu declive é igual a $-\frac{1}{m_s}$, ou seja, é igual a $-\frac{1}{-1/7} = 7$, pelo que AC é definida por uma equação da forma $y = 7x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(1, 1)$, tem-se $1 = 7 \times 1 + b$, pelo que $b = -6$.

Então, a equação reduzida da reta AC é $y = 7x - 6$.

A reta BC é perpendicular à reta r , pelo que o seu declive é igual a $-\frac{1}{m_r}$, ou seja, é igual a $-\frac{1}{-1} = 1$, pelo que BC é definida por uma equação da forma $y = x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(2, 3)$, tem-se $3 = 1 \times 2 + b$, pelo que $b = 1$.

Então, a equação reduzida da reta AC é $y = x + 1$.

O ponto C é o ponto de interseção das retas AC e BC . Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 7x - 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = 7x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{6} \\ x = \frac{7}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

pelo que C é o ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$.

69.

a) Como os planos α e β são paralelos, tem-se que qualquer vetor normal a α é também normal a β . Então, tem-se $\vec{n}_\beta(2, -3, 1)$, pelo que β é definido pela condição cartesiana

$$2(x - 2) - 3(y - 1) + (z + 5) = 0, \text{ ou, o que é equivalente, pela condição } 2x - 3y + z + 4 = 0.$$

Outro processo:

Tem-se $\vec{n}_\beta(2, -3, 1)$, pelo que β é definido pela condição da forma $2x - 3y + z + d = 0$.

Como o plano passa no ponto de coordenadas $(2, 1, -5)$, tem-se $2 \times 2 - 3 \times 1 - 5 + d = 0$, pelo que $d = 4$.

Então, β é definido pela condição cartesiana $2x - 3y + z + 4 = 0$.

b) Os planos α e γ são perpendiculares se e só se forem perpendiculares os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\gamma$.

Tem-se $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma = (2, -3, 1) \cdot (1, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$, pelo que os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\gamma$ são perpendiculares e, portanto, os planos α e γ são perpendiculares.

c) O vetor $\vec{n}_\alpha(2, -3, 1)$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular a α .

Então, a reta perpendicular a α e que passa no ponto de coordenadas $(4, -1, 0)$ pode ser definida

$$\text{por } \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

d) Como o plano é perpendicular à reta r , qualquer vetor diretor da reta é normal ao plano. Então, o vetor de coordenadas $(3, 1, -4)$ é normal ao plano. Como o plano passa no ponto de coordenadas $(1, 3, -2)$, uma condição cartesiana do plano é:

$$3(x - 1) + (y - 3) - 4(z + 2) = 0$$

ou, o que é equivalente, $3x + y - 4z - 14 = 0$.

70.

a) Tem-se $k \times 2 + 2 \times (-1) - 3 = 4 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$, pelo que uma equação do plano que passa no ponto A é $\frac{9}{2}x + 2y - z = 4$ ou, o que é equivalente, $9x + 4y - 2z = 8$.

b) O eixo Oy é definido pela condição $x = 0 \wedge z = 0$, pelo que a sua interseção com os planos da família de planos definidos por $kx + 2y - z = 4$, $k \in \mathbb{R}$ é definida por $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ kx + 2y - z = 4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Tem-se: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ kx + 2y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 0 + 2y - 0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, pelo que, para todo o valor real de k , o ponto de interseção tem coordenadas $(0, 2, 0)$.

c) Um vetor normal ao plano é perpendicular à reta se e só se for perpendicular ao vetor $(1, 1, 4)$.

Tem-se $(k, 2, -1) \cdot (1, 1, 4) = 0 \Leftrightarrow k + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

71.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 6y - 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + z^2 = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + z^2 = -1 + 1 + 9 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$, pelo
 que o centro da superfície esférica é o ponto C de coordenadas $(1, -3, 0)$ e o raio é 3.

b) Tem-se $(2 - 1)^2 + (-1 + 3)^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$, pelo que o ponto A
 pertence à superfície esférica.

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano tangente à superfície esférica no ponto A se e só se

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\Leftrightarrow (x - 2, y + 1, z - 2) \cdot (-1, -2, -2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + 2 - 2y - 2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow -x - 2y - 2z = -4 \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 4 \end{aligned}$$

72.

a) Determinação de uma equação cartesiana de β :

Um vetor $\vec{n}_\beta(a, b, c)$, normal a β , é tal que $\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, 2) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, 2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ c + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 2b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}, \text{ pelo que um vetor é normal a } \beta \text{ se e só se as suas coordenadas são da forma} \\ &\left(c, -\frac{3}{2}c, c\right), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então, o vetor de coordenadas $(2, -3, 2)$ é perpendicular a β .

Como o ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$ pertence a β , este plano pode ser definido pela condição
 $2(x - 0) - 3(y - 1) + 2(z - 2) = 0$, ou, o que é equivalente, $2x - 3y + 2z = 1$.

Determinação de uma equação vetorial de α :

Os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(1, -1, -1)$ e $C(0, 3, 2)$ são três pontos não colineares pertencentes ao
 plano α .

Então, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores não colineares paralelos a α .

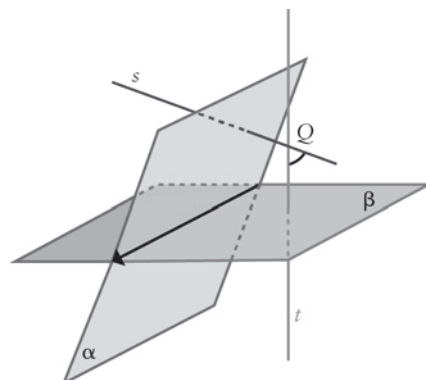
Tem-se:

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ é o
 vetor de coordenadas $(0, 3, 2)$.

Então, uma equação vetorial do plano α é $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 3, 2) + \lambda(1, -1, -1), k, \lambda \in \mathbb{R}$.

b) A figura ao lado pretende ilustrar o seguinte facto: a
 amplitude do ângulo de dois planos, α e β , é igual à amplitude
 do ângulo de duas retas concorrentes, uma perpendicular a α e
 outra perpendicular a β .

Na figura, a amplitude do ângulo dos planos α e β é igual à
 amplitude do ângulo das retas s e t , concorrentes em Q ,
 sendo s perpendicular a α e t perpendicular a β .



Então, o cosseno do ângulo dos planos α e β é igual ao cosseno do ângulo das retas s e t , sendo, como tal, igual a $|\cos(\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta)|$.

Tem-se $\vec{n}_\alpha(1, -2, 3)$ e $\vec{n}_\beta(2, -3, 2)$, pelo que:

$$|\cos(\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta)| = \left| \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \times \|\vec{n}_\beta\|} \right| = \left| \frac{(1, -2, 3) \cdot (2, -3, 2)}{\sqrt{1+4+9} \times \sqrt{4+9+4}} \right| =$$

$$= \frac{14}{\sqrt{14} \times \sqrt{17}} = \frac{14\sqrt{14}}{14\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{14}{17}}$$

73.

a) Uma reta e um ponto definem um plano se e só se o ponto não pertencer à reta.

$$\text{Tem-se } (2, 0, -1) = (1, 1, 0) + k(0, 2, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + k \times 0 \\ 0 = 1 + k \times 2 \\ -1 = 0 + k \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ pelo que o}$$

ponto A não pertence à reta r . Logo, o ponto A e a reta r definem um plano.

b) Seja α o plano definido pelo ponto A e pela reta r .

Seja B o ponto de coordenadas $(1, 1, 0)$; como B pertence à reta r , também pertence ao plano α , pelo que o vetor $\overrightarrow{BA}$ é paralelo a α .

$\overrightarrow{BA} = A - B$, pelo que $\overrightarrow{BA}$ é o vetor de coordenadas $(1, -1, -1)$.

Então, uma equação vetorial do plano α é:

$$(x, y, z) = (2, 0, -1) + k(0, 2, -3) + \lambda(1, -1, -1), k, \lambda \in \mathbb{R}$$

Determinação de uma equação cartesiana de α :

Um vetor $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$, normal a α , é tal que $\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 3c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}c \\ a - \frac{3}{2}c - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}c \\ a = \frac{5}{2}c \end{cases}, \text{ pelo que um}$$

vetor é normal a α se e só se as suas coordenadas são da forma $(\frac{5}{2}c, \frac{3}{2}c, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Então, o vetor de coordenadas $(5, 3, 2)$ é perpendicular a α .

Como o ponto de coordenadas $(2, 0, -1)$ pertence a α , este plano pode ser definido pela condição cartesiana $5(x - 2) + 3(y - 0) + 2(z + 1) = 0$, ou, o que é equivalente, $5x + 3y + 2z = 8$.

74.

a) O vetor de coordenadas $(1, 2, -2)$ é perpendicular ao plano α , pelo que também é perpendicular ao plano δ .

Assim, o plano δ pode ser definido por uma equação do tipo $x + 2y - 2z + d = 0$.

Como o vértice do cone, que tem coordenadas $(1, 2, 6)$, pertence ao plano δ , tem-se que $1 + 2 \times 2 - 2 \times 6 + d = 0$, donde resulta que $d = 7$.

Portanto, um equação do plano γ é $x + 2y - 2z + 7 = 0$.

b) O vetor de coordenadas $(1, 2, -2)$ é perpendicular ao plano α .

O vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é perpendicular ao plano β .

Os planos α e β são perpendiculares se e só se os vetores de coordenadas $(1, 2, -2)$ e $(2, -1, 1)$ forem perpendiculares, ou seja, se e só se o produto escalar $(1, 2, -2) \cdot (2, -1, 1)$ for igual a zero.

Ora, $(1, 2, -2) \cdot (2, -1, 1) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 1 = -2$. portanto, os planos α e β não são perpendiculares.

c) Tem-se que o ponto W tem coordenadas $(1, 2, -6)$.

A reta VW pode ser definida pela condição $x = 1 \wedge y = 2$. Assim, a condição que define o segmento de reta $[VW]$ é $x = 1 \wedge y = 2 \wedge -6 \leq z \leq 6$.

d) O volume de um cone é igual a $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$.

Relativamente ao cone em causa, tem-se:

- a área da base é igual a $\pi \times 3^2 = 9\pi$;
- a altura é igual a $\|\vec{VC}\|$.

Para determinarmos $\|\vec{VC}\|$, precisamos de saber as coordenadas do ponto C . O ponto C é o ponto de interseção do plano α com a reta perpendicular a este plano e que passa por V .

Tem-se:

- uma condição que define o plano α é $x + 2y - 2z = 11$;
- uma condição que define a reta perpendicular a este plano e que passa por V é $(x, y, z) = (1, 2, 6) + \lambda(1, 2, -2), \lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, as coordenadas de C satisfazem a condição:

$(x, y, z) = (1, 2, 6) + \lambda(1, 2, -2) \wedge x + 2y - 2z = 11$, que é equivalente a

$(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 6 - 2\lambda) \wedge x + 2y - 2z = 11$

Tem-se: $1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) = 11 \Leftrightarrow 1 + \lambda + 4\lambda - 12 + 4\lambda = 11 \Leftrightarrow 9\lambda = 18 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Portanto, o ponto C tem coordenadas $(1 + 2, 2 + 2 \times 2, 6 - 2 \times 2) = (3, 6, 2)$.

Vem, então:

$$\|\vec{VC}\| = \|C - V\| = \|(2, 4, -4)\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Portanto, o volume do cone é igual a $\frac{1}{3} \times 9\pi \times 6 = 18\pi$.

Pág. 178

75.

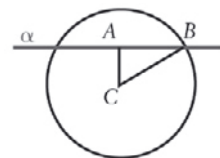
a) O centro da superfície esférica é o ponto C de coordenadas $(1, 2, 0)$ e o raio é 2.

A figura ao lado pretende ilustrar o problema: a interseção do plano α com a superfície esférica é a circunferência (contida em α) de centro A e raio $\overline{AB}$.

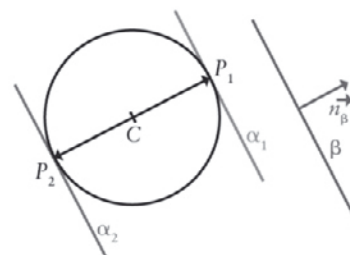
Tem-se:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1, \text{ pelo que } \overline{AC} = 1.$$

Então, qualquer plano que diste uma unidade do centro da superfície esférica intersesta-a segundo uma circunferência de raio $\sqrt{3}$; três exemplos são os planos definidos por $z = 1$, por $z = -1$ e por $x = 0$.



b) A figura ao lado pretende ilustrar o problema: pretendemos determinar equações cartesianas dos planos α_1 e α_2 (planos paralelos a β e tangentes à superfície esférica de centro C e raio 2).



Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos de tangência P_1 e P_2 .

Tem-se $\vec{n}_\beta(1, 1, 0)$ donde $\|\vec{n}_\beta\| = \sqrt{2}$, pelo que

$\vec{CP}_1 = 2 \times \frac{\vec{n}_\beta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \vec{n}_\beta$; portanto $\vec{CP}_1$ é o vetor de coordenadas $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $\vec{CP}_2$ é o vetor de coordenadas $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Como $P_1 = C + \vec{CP}_1$, P_1 é o ponto de coordenadas $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0)$.

Como $P_2 = C + \vec{CP}_2$, P_2 é o ponto de coordenadas $(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 0)$.

Então, tem-se:

- α_1 é definido pela condição cartesiana $1[x - (1 + \sqrt{2})] + 1[y - (2 + \sqrt{2})] + 0(z - 0) = 0$, ou, o que é equivalente, $x + y = 3 + 2\sqrt{2}$;
- α_2 é definido pela condição cartesiana $1[x - (1 - \sqrt{2})] + 1[y - (2 - \sqrt{2})] + 0(z - 0) = 0$, ou, o que é equivalente, $x + y = 3 - 2\sqrt{2}$.

76.

a) $(-2 + 1)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = 6 \Leftrightarrow 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$, pelo que o ponto de coordenadas $(-2, 1, 1)$ pertence à superfície esférica.

b) Seja C o centro da superfície esférica.

α é tangente à superfície esférica no ponto A se e só se A pertencer a α e α for perpendicular a $\vec{CA}$.

Tem-se:

- $-2 + 1 + 2 \times 1 - 1 = -2 + 1 + 2 - 1 = 0$, pelo que A pertence a α ;
- $\vec{CA} = A - C$, pelo que $\vec{CA}$ é o vetor de coordenadas $(-1, -1, -2)$; então, $\vec{CA}$ é perpendicular a α , pois é colinear com $\vec{n}_\alpha(1, 1, 2)$.

c) É o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a α é igual a $\sqrt{6}$, ou seja, a reunião dos dois planos paralelos a α que distam $\sqrt{6}$ unidades de α .

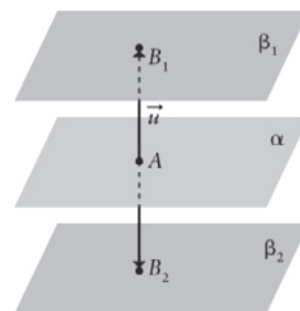
Determinação de uma equação cartesiana de cada um desses planos:

Na figura, que pretende ilustrar o problema, os planos β_1 e β_2 são os planos paralelos a α cuja distância a α é igual a $\sqrt{6}$.

$\vec{u}$ é um vetor normal aos três planos cuja norma é igual a $\sqrt{6}$.

Então, os pontos B_1 e B_2 tais que $B_1 = A + \vec{u}$ e $B_2 = A - \vec{u}$ pertencem, respetivamente, a β_1 e a β_2 .

Ora, o vetor $\vec{n}_\alpha(1, 1, 2)$ é normal aos três planos e, como $\|\vec{n}_\alpha\| = \sqrt{6}$, tem-se $\vec{u} = \vec{n}_\alpha$.



Tem-se:

- $B_1 = A + \vec{n}_\alpha$, pelo que B_1 é o ponto de coordenadas $(-1, 2, 3)$ e, então, o plano β_1 é definido pela condição cartesiana $1(x + 1) + 1(y - 2) + 2(z - 3) = 0$, ou, o que é equivalente, $x + y + 2z - 7 = 0$;
- $B_2 = A - \vec{n}_\alpha$, pelo que B_2 é o ponto de coordenadas $(-3, 0, -1)$ e, então, o plano β_2 é definido pela condição cartesiana $1(x + 3) + 1(y - 0) + 2(z + 1) = 0$, ou, o que é equivalente, $x + y + 2z + 5 = 0$.

77.

a) Seja $P(x, y, z)$ um ponto do espaço. O ponto P pertence à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ se e só se $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 &\Leftrightarrow (x - 2, y + 1, z - 3) \cdot (x - 0, y + 3, z + 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 3y + y + 3 + z^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + z^2 = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + z^2 = 6 + 1 + 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 11 \end{aligned}$$

b) Tem-se $\vec{AB} = B - A$, pelo que $\vec{AB}$ é o vetor de coordenadas $(-2, -2, -6)$, pelo que uma equação vetorial da reta AB é $(x, y, z) = (2, -1, 3) + k(-2, -2, -6), k \in \mathbb{R}$.

Mostremos que o ponto C pertence à reta AB :

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = (2, -1, 3) + k(-2, -2, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = 2 - 2k \\ -\frac{3}{2} = -1 - 2k \\ \frac{3}{2} = 3 - 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ k = \frac{1}{4} \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ pelo que } C \text{ pertence à}$$

reta AB e tem-se $C = A + \frac{1}{4}\vec{AB}$, pelo que C pertence ao segmento de reta $[AB]$.

c) É o conjunto dos pontos da superfície esférica que pertencem ao plano perpendicular a $[AB]$ no ponto C . É, por isso, uma circunferência de centro C .

Determinemos o raio dessa circunferência.

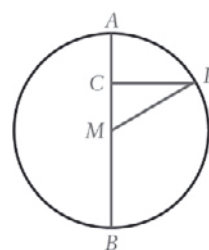
O raio da superfície esférica é igual a $\frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{11}$.

Tem-se, então, de acordo com a figura:

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 + \overline{CM}^2 &= \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{CP}^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 = (\sqrt{11})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{CP}^2 = 11 - \frac{11}{4} \Leftrightarrow \overline{CP}^2 = \frac{33}{4} \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{CP} = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Então, o lugar geométrico referido é a circunferência de centro C e raio $\frac{\sqrt{33}}{2}$ contida no plano perpendicular a $[AB]$ no ponto C .



78.

a) A reta AB é a reta que passa por A e é perpendicular a α , pelo que é definida pela condição $(x, y, z) = (2, 3, -1) + k(1, 1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$.

De acordo com a figura, seja S o ponto que é a interseção da reta AB com o plano α .

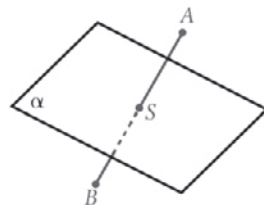
Determinemos as coordenadas de S .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - 2k \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - 2k \\ 2 + k + 3 + k - 2(-1 - 2k) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - 2k \\ 5 + 2k + 2 + 4k - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - 2k \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ k = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, S é o ponto de coordenadas $(1, 2, 1)$.

Tem-se $B = S + \overrightarrow{SB} = S + \overrightarrow{AS}$.

$\overrightarrow{AS} = S - A$, pelo que $\overrightarrow{AS}$ é o vetor de coordenadas $(-1, -1, 2)$ e, portanto, B é o ponto de coordenadas $(1 - 1, 2 - 1, 1 + 2) = (0, 1, 3)$.



b) A esfera de diâmetro $[AB]$.

+ Exercícios Propostos

Pág. 179

79. Opção (B)

A inclinação de r é 60° , pelo que o seu declive, sendo igual a $\operatorname{tg} 60^\circ$, é $\sqrt{3}$; isto exclui as opções (C) e (D).

Seja b ($b < 0$) a ordenada na origem de r . Tem-se $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{-b}{1}$, pelo que $b = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$.

80. Opção (D)

Seja α a inclinação da reta s e seja m o declive da reta. Tem-se $m = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$.

Como $m < 0$, tem-se $\alpha = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}(m)$ e, então, $\alpha = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 146^\circ$.

81. Opção (C)

A inclinação da reta t é igual a 150° , pelo que o declive de t é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Então, a equação reduzida da reta t é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$.

Como a abscissa de P é $\sqrt{12}$, vem $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{12} + 5 = -2 + 5 = 3$; a ordenada de P é 3.

82. Opção (D)

Tem-se $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = 15^\circ$, pelo que $\widehat{ACB} = 150^\circ$.

$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{CB} &= (-\vec{CA}) \cdot \vec{CB} = -(\vec{CA} \cdot \vec{CB}) = -\|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\| \times \cos \widehat{ACB} = -2 \times 2 \times \cos 150^\circ = \\ &= -4 \times (-\cos 30^\circ) = -4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}\end{aligned}$$

83. Opção (C)

Tem-se, como ilustrado na figura:

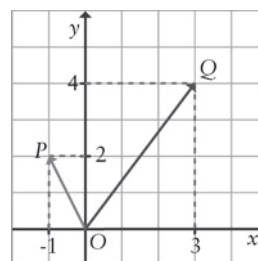
• $\vec{OP}$ é o vetor de coordenadas $(-1, 2)$, pelo que

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

• $\vec{OQ}$ é o vetor de coordenadas $(3, 4)$, pelo que

$$\|\vec{OQ}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Tem-se, então, } \cos \alpha = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\| \times \|\vec{OQ}\|} = \frac{-1 \times 3 + 2 \times 4}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



$$\text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ vem } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4.$$

Como o ângulo POQ é agudo, vem $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

84. Opção (A)

Seja r o raio da esfera. Tem-se $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$.

$$\vec{OA} \cdot \vec{AB} = (-\vec{AO}) \cdot \vec{AB} = -(\vec{AO} \cdot \vec{AB}) = -(3 \times 6 \times \cos 0^\circ) = -18$$

85. Opção (C)

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se e só se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Tem-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -6 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 7$$

86. Opção (C)

Tem-se: $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$

87. Opção (C)

O raio da circunferência é igual a $\overline{OC} = \sqrt{13}$ e o centro é C , pelo que a equação reduzida da circunferência é $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

Tem-se:

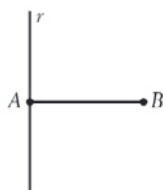
$$(0 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13 \Leftrightarrow 9 + (y - 2)^2 = 13 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 4$$

Então, o ponto T de tangência é o ponto de coordenadas $(0, 4)$. Isto exclui as opções (B) e (D).

O declive da reta CT é igual a $\frac{2-4}{3-0} = -\frac{2}{3}$ pelo que o declive de t é $\frac{3}{2}$. Isto exclui a opção (A).

88. Opção (C)

Os pontos P do plano para os quais se tem $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ são os pontos da reta r , reta perpendicular a $[AB]$ no ponto A .



89. Opção (A)

Seja $\vec{r}(-6, 2, a)$ um vetor diretor da reta r e seja $\vec{n}_\alpha(3, -1, 4)$ um vetor normal ao plano α .

$\vec{r}$ é perpendicular a α se e só se $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ forem colineares. Ora $-\frac{6}{3} = \frac{2}{-1} = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = -8$.

90. Opção (B)

Tem-se:

• $\vec{n}_\alpha(2, 1, 6)$ e $\vec{n}_\beta(4, 2, 1)$

• $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 8 + 2 + 6 \neq 0$, pelo que os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ não são perpendiculares e, então, os planos α e β não são perpendiculares. Isto exclui a opção (A).

• $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{1}$, pelo que os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ não são colineares. Isto exclui as opções (C) e (D).

91. Opção (D)

Seja $\vec{r}(1, -2, 0)$ um vetor diretor da reta r e seja $\vec{n}_\alpha(2, 1, 6)$ um vetor normal ao plano α .

Tem-se:

- $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$, pelo que os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ não são colineares. Isto exclui a opção (A).
- $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} = 2 - 2 + 0 = 0$, pelo que os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são perpendiculares. Isto exclui a opção (B).
- $2 \times 1 + 2 + 6 \times 0 = 4$, pelo o ponto de coordenadas $(1, 2, 0)$ pertence ao plano α . Isto exclui a opção (C).

92. Opção (A)

Seja $\vec{r}(1, -2, 0)$ um vetor diretor da reta r e seja $\vec{s}(0, 0, 1)$ um vetor diretor da reta s .

Tem-se: $\vec{r} \cdot \vec{s} = 1 \times 0 + (-2) \times 0 + 0 \times 1 = 0$, pelo que as retas r e s são perpendiculares.

93. Opção (C)

A reta t é a reta perpendicular ao plano coordenado xOz e que passa no ponto de coordenadas $(0, 0, 3)$, pelo que é definida pela condição $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

Determinemos as coordenadas dos pontos de interseção da reta com a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ 0^2 + y^2 + 3^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Então, os extremos do segmento de reta que é a interseção da reta com a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ são os pontos de coordenadas $(0, -4, 3)$ e $(0, 4, 3)$.

A distância entre estes dois pontos é 8.

94.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 4\sqrt{3} \times \cos 150^\circ = 24\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -36$

b) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2 \times (-36) = -72$

c) $\vec{u} \cdot (-3\vec{v}) = (-3\vec{v}) \cdot \vec{u} = -3 \times (\vec{v} \cdot \vec{u}) = -3 \times (-36) = 108$

d) $\vec{u} \cdot \left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 + \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 36 + \frac{1}{2} \times (-36) = 36 - 18 = 18$

95. Como o perímetro do hexágono é igual a 24, o lado é 4, pelo que a semidiagonaal do hexágono também é igual a 4.

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\widehat{AOB}) = 4 \times 4 \times \cos 60^\circ = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OC}\| \times \cos(\widehat{AOC}) = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

$$\text{c) } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| \times \cos (\widehat{AOD}) = 4 \times 4 \times \cos 180^\circ = 16 \times (-1) = -16$$

$$\text{d) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\widehat{DAB}) = 4 \times 8 \times \cos 60^\circ = 32 \times \frac{1}{2} = 16$$

$$\text{e) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{FC} = 4 \times 8 \times \cos 0^\circ = 32$$

$$\text{f) } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = (2\overrightarrow{OD}) \cdot (2\overrightarrow{OB}) = 4(\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}) = 4 \times (4 \times 4 \times \cos 120^\circ) = 64 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -32$$

$$\text{g) } \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$$

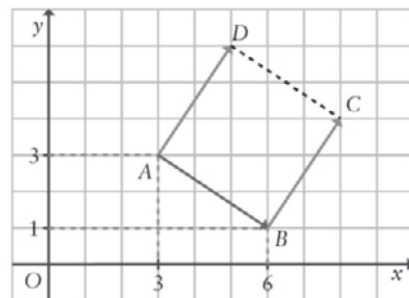
$$\text{h) } \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OD}\|^2 = 16$$

Pág. 182

96. A figura pretende ilustrar a situação descrita.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(3, -2)$; então, um vetor perpendicular e com a mesma norma de $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2, 3)$ ou $(-2, -3)$. Para que os pontos C e D pertençam ao primeiro quadrante, tem que ser $\overrightarrow{AD}(2, 3)$.

Então, como $D = A + \overrightarrow{AD}$, D é o ponto de coordenadas $(3 + 2, 3 + 3) = (5, 6)$ e, como $C = B + \overrightarrow{AD}$, C é o ponto de coordenadas $(6 + 2, 1 + 3) = (8, 4)$.



97. Tem-se:

- $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(6, 8)$.
- $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
- $\frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}}{2} = 100 \Leftrightarrow \frac{10 \times \overrightarrow{BD}}{2} = 100 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = 20$

Seja M o ponto médio das diagonais do losango.

Como $\overrightarrow{BD} = 20$, $\overrightarrow{MB}$ é um vetor de norma igual à norma de $\overrightarrow{AC}$ e é perpendicular a $\overrightarrow{AC}$, pelo que $\overrightarrow{MB}$ é o vetor de coordenadas $(-8, 6)$ ou é o vetor de coordenadas $(8, -6)$.

Tem-se que M é o ponto de coordenadas $(5, 7)$, pelo que $M + \overrightarrow{MB}$ é o ponto de coordenadas $(5 - 8, 7 + 6) = (-3, 13)$ ou $M + \overrightarrow{MB}$ é o ponto de coordenadas $(5 + 8, 7 - 6) = (13, 1)$.

Como B está no segundo quadrante, B é o ponto de coordenadas $(-3, 13)$ e D é o ponto de coordenadas $(13, 1)$.

98. A figura pretende ilustrar a situação descrita:

As retas t e s interseitam-se no ponto B e as retas r e t interseitam-se no ponto O .

Determinação da equação reduzida da reta s :

$m_r = \frac{5}{12}$, pelo que $m_s = -\frac{12}{5}$, pelo que a equação reduzida da reta s é da forma $y = -\frac{12}{5}x + b$; como a reta s passa no ponto A , tem-se $5 = -\frac{12}{5} \times 12 + b$, pelo que $b = \frac{169}{5}$. Então, a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5}$.

Determinação das coordenadas do ponto B :

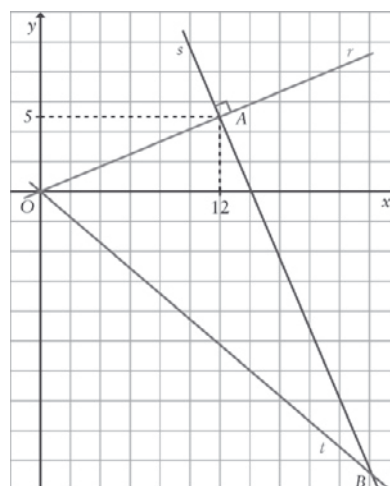
$$\begin{cases} 19x + 22y = 0 \\ y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{19}{22}x \\ -\frac{19}{22}x = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{19}{22}x \\ -\frac{19}{22}x + \frac{12}{5}x = \frac{169}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{19}{22}x \\ \frac{169}{110}x = \frac{169}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{19}{22}x \\ x = \frac{110}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{19}{22}x \\ x = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -19 \\ x = 22 \end{cases}; B \text{ é o ponto de coordenadas } (22, -19).$$

Determinação da área do triângulo $[OAB]$:

$$\overline{AO} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(12 - 22)^2 + (5 + 19)^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$$

$$\text{Área do triângulo } [OAB] = \frac{\overline{AO} \times \overline{AB}}{2} = \frac{13 \times 26}{2} = 169 \text{ unidades de área}$$



99.

a) Seja b a abcissa do ponto B ($b > 0$). Tem-se: $A(-2, 0)$, $C(0, 4)$ e $B(b, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(2, 4)$.

$\overrightarrow{CB} = B - C$, pelo que $\overrightarrow{CB}$ é o vetor de coordenadas $(b, -4)$.

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow 2b - 16 = 0 \Leftrightarrow b = 8$, pelo que a abcissa do ponto B é 8.

b) O domínio de f , conjunto de valores que a pode tomar, é $]0, 8[$.

Tem-se: Área do retângulo $[PQRS] = \overline{RS} \times \overline{PS}$

Ora, $m_{CB} = \frac{4-0}{0-8} = -\frac{1}{2}$, pelo que a equação reduzida da reta CB é $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

$\overline{PS}$ é igual à ordenada do ponto P , pelo que se tem $\overline{PS} = -\frac{1}{2}a + 4$.

Tem-se, também, $m_{AB} = 2$, pelo que a equação reduzida da reta AB é $y = 2x + 4$.

A ordenada do ponto Q é igual à ordenada do ponto P , ou seja, é igual a $-\frac{1}{2}a + 4$.

Seja q a abcissa do ponto Q ($q < 0$). Tem-se: $-\frac{1}{2}a + 4 = 2q + 4$, pelo que $q = -\frac{1}{4}a$.

A abcissa do ponto R é igual à abcissa do ponto Q , pelo que $\overline{RO} = -q = \frac{1}{4}a$.

Então:

$$\begin{aligned} f(a) &= \overline{RS} \times \overline{PS} = (\overline{RO} + \overline{OS}) \times \overline{PS} = \left(\frac{1}{4}a + a\right) \times \left(-\frac{1}{2}a + 4\right) = \frac{5}{4}a \times \left(-\frac{1}{2}a + 4\right) = \\ &= -\frac{5}{8}a^2 + 5a \end{aligned}$$

c) O gráfico de f é um troço de uma parábola cuja concavidade está voltada para baixo e que interseja o eixo coordenado Ox nos pontos cujas abscissas são 0 e 8. Então, a abscissa do vértice da parábola é 4. Como $4 \in D_f$, 4 é o maximizante de f e, portanto, $f(4)$ é o máximo de f . Ora, $f(4) = 10$.

Pág. 183

100. Seja T o centro da circunferência c .

a) O ponto T é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[OA]$ e $[OB]$. O ponto A pertence ao eixo coordenado das abscissas. A mediatriz de $[OA]$ é a reta perpendicular a este eixo no ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, a reta definida pela equação $x = 2$.

Determinação da mediatriz de $[OB]$:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x - 5)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y = -10x + 26 \Leftrightarrow y = -5x + 13$$

Determinação do ponto de interseção das duas retas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -5x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \times 2 + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; T \text{ é o ponto de coordenadas } (2, 3)$$

O raio da circunferência é igual a $\overline{OT}$. Tem-se: $\overline{OT} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$

Uma equação reduzida de c é $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

b) Um ponto $P(x, y)$ pertence à reta tangente a c no ponto A se e só se $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = 0$.

$\overrightarrow{AP} = P - A$, pelo que $\overrightarrow{AP}$ é o vetor de coordenadas $(x - 4, y)$.

$\overrightarrow{AT} = T - A$, pelo que $\overrightarrow{AT}$ é o vetor de coordenadas $(-2, 3)$.

$$\text{Então: } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \Leftrightarrow (x - 4, y) \cdot (-2, 3) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

A equação reduzida de r é $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$.

c) Um vetor diretor da reta OB é o vetor $\overrightarrow{OB}(5, 1)$, pelo que o declive de OB é igual a $\frac{1}{5}$; como a reta OB passa na origem do referencial, a sua ordenada na origem é 0, pelo que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{5}x$.

Determinação do ponto de interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ \frac{1}{5}x = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ -\frac{7}{15}x = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ x = \frac{40}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{7} \\ x = \frac{40}{7} \end{cases}; C \text{ é o ponto de} \\ \text{coordenadas } \left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

101.

a) $m_t = \operatorname{tg} \alpha$

$$\text{Tem-se: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25};$$

como $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$, vem $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, pelo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$. Então, $m_t = \frac{3}{4}$.

b) A equação reduzida de t é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$; como a reta t passa no ponto P , tem-se $4 = \frac{3}{4} \times 4 + b$, pelo que $b = 1$. Então, a equação reduzida da reta t é $y = \frac{3}{4}x + 1$.

c) Um vetor diretor da reta t é $\vec{t}(4, 3)$.

Seja a a abscissa do ponto A .

$\overrightarrow{AP} = P - A$, pelo que $\overrightarrow{AP}$ é o vetor de coordenadas $(4 - a, 4)$.

Tem-se $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{t} = 0$. Ora, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{t} = 0 \Leftrightarrow (4 - a, 4) \cdot (4, 3) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = 7$.

d) O raio da circunferência é igual a $\overline{AP}$. Ora, $\overline{AP} = \sqrt{(7 - 4)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

O centro da circunferência é o ponto $A(7, 0)$.

A equação reduzida da circunferência é $(x - 7)^2 + y^2 = 25$.

e) $m_r = \tan 135^\circ = -1$, pelo que a equação reduzida de r é da forma $y = -x + b$; como a reta r passa no ponto P , tem-se $4 = -4 + b$, pelo que $b = 8$. Então, a equação reduzida da reta r é $y = -x + 8$.

f) B é o ponto de ordenada negativa que pertence simultaneamente à reta r e à circunferência.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x + 8 \\ (x - 7)^2 + y^2 = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ (x - 7)^2 + (-x + 8)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x^2 - 14x + 49 + x^2 - 16x + 64 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ 2x^2 - 30x + 88 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x^2 - 15x + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x = 4 \vee x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 8 \\ x = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x + 8 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -3 \\ x = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

B é o ponto de coordenadas $(11, -3)$.

g) $\overrightarrow{AP} = P - A$, pelo que $\overrightarrow{AP}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 4)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(4, -3)$.

$$\cos \hat{BAP} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(-3, 4) \cdot (4, -3)}{\sqrt{9 + 16} \times \sqrt{16 + 9}} = \frac{-24}{25}$$

Tem-se $\cos^{-1}\left(-\frac{24}{25}\right) \approx 163,75^\circ$; portanto, $\hat{BAP} \approx 164^\circ$.

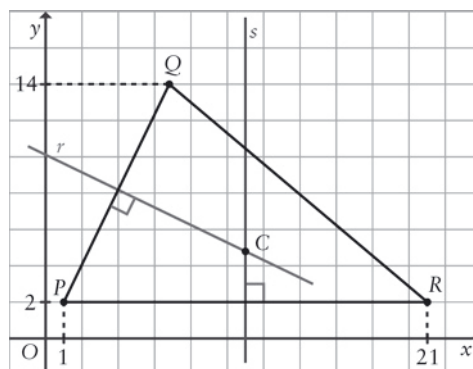
Pág. 184

102.

a) Dado que as três mediatrizes se interseitam num ponto, para determinar as coordenadas desse ponto basta determinar as coordenadas do ponto de interseção de duas delas.

A figura ao lado ilustra a situação descrita.

C é o circuncentro do triângulo.



Equação da mediatriz de $[PQ]$:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 &= (x-7)^2 + (y-14)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 28y + 196 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24y &= -12x + 240 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 10\end{aligned}$$

Equação da mediatriz de $[PR]$:

Como o lado $[PR]$ do triângulo é um segmento de reta paralelo ao eixo coordenado das abscissas, a sua mediatriz é a reta paralela ao eixo coordenado das ordenadas que passa no ponto médio de $[PR]$.

O ponto médio de $[PR]$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1+21}{2}, 2\right) = (11, 2)$.

Então, a mediatriz de $[PR]$ é definida pela equação $x = 11$.

Coordenadas de C :

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -\frac{11}{2} + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

C é o ponto de coordenadas $\left(11, \frac{9}{2}\right)$.

b) Dado que as três medianas se intersectam num ponto, para determinar as coordenadas desse ponto basta determinar as coordenadas do ponto de interseção de duas delas.

A figura ao lado ilustra a situação descrita.

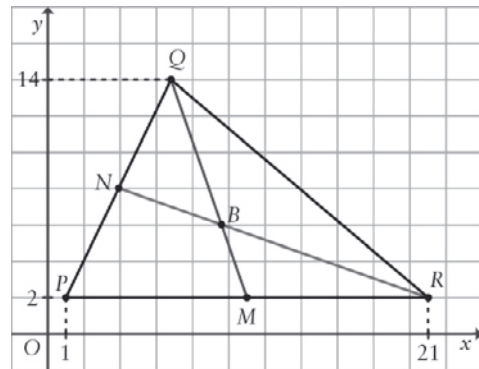
B é o baricentro do triângulo.

$N(4, 8)$ é o ponto médio do lado $[PQ]$.

$M(11, 2)$ é o ponto médio do lado $[PR]$.

Equação da reta QM :

$m_{QM} = \frac{14-2}{7-11} = -3$, pelo que a equação reduzida de QM é da forma $y = -3x + b$; como a reta QM passa no ponto M , tem-se $2 = -3 \times 11 + b$, pelo que $b = 35$. Então, a equação reduzida da reta QM é $y = -3x + 35$.



Equação da reta RN :

$m_{RN} = \frac{8-2}{4-21} = -\frac{6}{17}$, pelo que a equação reduzida de QM é da forma $y = -\frac{6}{17}x + b$; como a reta RN passa no ponto N , tem-se $8 = -\frac{6}{17} \times 4 + b$, pelo que $b = \frac{160}{17}$. Então, a equação reduzida da reta RN é $y = -\frac{6}{17}x + \frac{160}{17}$.

Coordenadas de B :

$$\begin{cases} y = -3x + 35 \\ y = -\frac{6}{17}x + \frac{160}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 35 = -\frac{6}{17}x + \frac{160}{17} \\ y = -3x + 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{45}{17}x = \frac{435}{17} \\ y = -3x + 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{3} \\ y = -29 + 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{3} \\ y = 6 \end{cases}$$

B é o ponto de coordenadas $\left(\frac{29}{3}, 6\right)$.

c) Dado que as retas que contêm as três alturas se intersectam num ponto, para determinar as coordenadas desse ponto basta determinar as coordenadas do ponto de interseção de duas dessas retas.

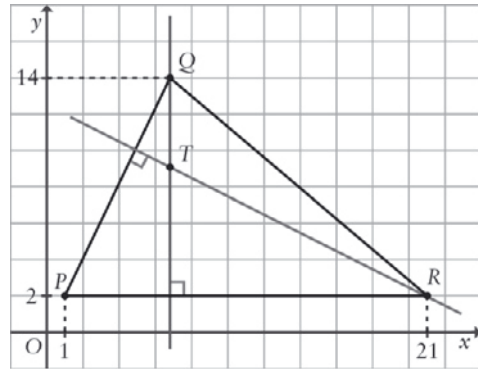
A figura ao lado ilustra a situação descrita.

T é o ortocentro do triângulo.

Equação da reta RT :

Como $m_{PQ} = \frac{14-2}{7-1} = 2$, tem-se $m_{RO} = -\frac{1}{2}$, pelo que a equação reduzida de RT é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$;

como a reta RT passa no ponto R , tem-se $2 = -\frac{1}{2} \times 21 + b$, pelo que $b = \frac{25}{2}$. Então, a equação reduzida da reta RT é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$.



Equação da reta QT :

A reta QT é a reta paralela ao eixo coordenado das ordenadas que passa no ponto Q , pelo que é definida pela equação $x = 7$.

Coordenadas de T :

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases}$$

T é o ponto de coordenadas $(7, 9)$.

d) $\overrightarrow{TC} = C - T$, pelo que $\overrightarrow{TC}$ é o vetor de coordenadas $(4, -\frac{9}{2})$.

$\overrightarrow{TB} = B - T$, pelo que $\overrightarrow{TB}$ é o vetor de coordenadas $(\frac{8}{3}, -3)$.

Tem-se $4 \times (-3) = -\frac{9}{2} \times \frac{8}{3}$, pelo que os vetores $\overrightarrow{TC}$ e $\overrightarrow{TB}$ são colineares sendo, portanto, colineares os pontos C , B e T .

e) Como $\overrightarrow{TB}$ é o vetor de coordenadas $(\frac{8}{3}, -3)$, o declive da reta de Euler é igual a $\frac{-3}{\frac{8}{3}} = -\frac{9}{8}$, pelo

que a equação reduzida desta reta é da forma $y = -\frac{9}{8}x + b$; como a reta passa no ponto T , tem-se $9 = -\frac{9}{8} \times 7 + b$, pelo que $b = \frac{135}{8}$.

Então, a equação reduzida da reta de Euler é $y = -\frac{9}{8}x + \frac{135}{8}$.

103.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(2, 3, 1)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ é o vetor de coordenadas $(4, 5, -4)$.

Portanto, não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, pelo que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares.

Logo, os pontos A , B e C não são colineares.

b) Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo perpendicular ao plano ABC .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2, 3, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (4, 5, -4) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ 4a + 5b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - 3b \\ 4a + 5b - 4(-2a - 3b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - 3b \\ 12a + 17b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - 3b \\ b = -\frac{12}{17}a \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - 3\left(-\frac{12}{17}a\right) \\ b = -\frac{12}{17}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{17}a \\ b = -\frac{12}{17}a \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor $\vec{n}\left(a, -\frac{12}{17}a, \frac{2}{17}a\right)$, com $a \neq 0$, é um vetor não nulo perpendicular ao plano ABC ; para, por exemplo, $a = 17$, vem $\vec{n}(17, -12, 2)$.

Então, uma equação cartesiana do plano ABC é $17(x - 1) - 12(y + 2) + 2(z - 3) = 0$, que é equivalente à equação $17x - 12y + 2z - 47 = 0$.

c) O ponto A pertenceria à reta r se e só se existisse $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, -2, 3) = (0, 1, 2) + \lambda(2, 1, 3).$$

$$\text{Ora, } (1, -2, 3) = (0, 1, 2) + \lambda(2, 1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 + 2\lambda \\ -2 = 1 + \lambda \\ 3 = 2 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -3 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ o que é uma condição impossível.}$$

Logo, o ponto A não pertence à reta r .

d) Designemos por α o plano definido pelo ponto A e pela reta r , designemos por R o ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$ e designemos por $\vec{r}$ o vetor diretor da reta r de coordenadas $(2, 1, 3)$.

$\overrightarrow{AR} = R - A$, pelo que $\overrightarrow{AR}$ é o vetor de coordenadas $(-1, 3, -1)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo perpendicular ao plano α .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1, 3, -1) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (2, 1, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b - c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a + 3b \\ 2a + b + 3(-a + 3b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a + 3b \\ -a + 10b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a + 3b \\ b = \frac{1}{10}a \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a + 3\left(\frac{1}{10}a\right) \\ b = \frac{1}{10}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{7}{10}a \\ b = \frac{1}{10}a \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor $\vec{n}\left(a, \frac{1}{10}a, -\frac{7}{10}a\right)$, com $a \neq 0$, é um vetor não nulo perpendicular ao plano α ; para, por exemplo, $a = 10$, vem $\vec{n}(10, 1, -7)$.

Então, uma equação cartesiana do plano α é $10(x - 1) + (y + 2) - 7(z - 3) = 0$, que é equivalente à equação $10x + y - 7z + 13 = 0$.

e)

As retas r e s têm em comum o ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$.

Logo, ou coincidem, ou são concorrentes.

Para que as retas r e s coincidissessem, os respectivos vetores diretores tinham de ser colineares.

Ora, os vetores de coordenadas $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, -2)$ não são colineares, pois não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k(2, 1, 3) = (3, 1, -2)$.

Portanto, as retas r e s não coincidem, pelo que são concorrentes.

f) Designemos por β o plano definido pelas retas r e s , designemos por $\vec{r}$ o vetor diretor da reta r de coordenadas $(2, 1, 3)$ e designemos por $\vec{s}$ o vetor diretor da reta s de coordenadas $(3, 1, -2)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo perpendicular ao plano β .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2, 1, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (3, 1, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ 3a - 2a - 3c - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ a - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ a = 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -13c \\ a = 5c \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor $\vec{n}(5c, -13c, c)$, com $c \neq 0$, é um vetor não nulo perpendicular ao plano β ; para, por exemplo, $c = 1$, vem $\vec{n}(5, -13, 1)$.

O ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$ pertence ao plano β .

Então, uma equação cartesiana do plano β é $5(x - 0) - 13(y - 1) + (z - 2) = 0$, que é equivalente à equação $5x - 13y + z + 11 = 0$.

g) Como $(4, 2, 6) = 2(2, 1, 3)$, o vetor diretor da reta r é colinear com o vetor diretor da reta t , pelo que as retas r e t são paralelas

h) Designemos por γ o plano definido pelas retas r e t .

O vetor de coordenadas $(2 - 0, 4 - 1, -3 - 2) = (2, 3, -5)$ é a diferença entre um ponto da reta r e um ponto da reta t , pelo que é um vetor paralelo ao plano γ não colinear com o vetor de coordenadas $(2, 1, 3)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo perpendicular ao plano γ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} (2, 1, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (2, 3, -5) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ 2a + 3b - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ 2a + 3(-2a - 3c) - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ -4a - 14c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3c \\ c = -\frac{2}{7}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3\left(-\frac{2}{7}a\right) \\ c = -\frac{2}{7}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{8}{7}a \\ c = -\frac{2}{7}a \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor $\vec{n}\left(a, -\frac{8}{7}a, -\frac{2}{7}a\right)$, com $a \neq 0$, é um vetor não nulo perpendicular ao plano γ ; para, por exemplo, $a = 7$, vem $\vec{n}(7, -8, -2)$.

O ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$ pertence ao plano γ .

Então, uma equação cartesiana do plano γ é $7(x - 0) - 8(y - 1) - 2(z - 2) = 0$, que é equivalente à equação $7x - 8y - 2z + 13 = 0$.

104.

a) Volume do cubo = $\overline{AD}^3$

$$\overline{AD} = \sqrt{(3+3)^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

Volume do cubo = $7^3 = 343$ unidades de volume

b) Tem-se: $H = D + \overrightarrow{DH} = D + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} = E - A$, pelo que $\overrightarrow{AE}$ é o vetor de coordenadas $(-2, -3, -6)$.

Portanto, $H = (-3-2, 3-3, 6-6) = (-5, 0, 0)$.

c) $(x, y, z) = (3, 5, 3) + k(-2, -3, -6), k \in \mathbb{R}$

d) O vetor $\overrightarrow{AE}$ é normal ao plano que contém a face $[ABCD]$, pelo este plano é definido pela condição $-2(x-3) - 3(y-5) - 6(z-3) = 0$, que é equivalente a $2x + 3y + 6z - 39 = 0$.

Determinação da cota de P : $2 \times 0 + 3 \times 0 + 6z - 39 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{13}{2}$

P é o ponto de coordenadas $(0, 0, \frac{13}{2})$.

e) Designemos por (a, b, c) as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ é o vetor que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \|\overrightarrow{AB}\| = 7 \text{ e } b < 5$$

$\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que $\overrightarrow{AD}$ é o vetor de coordenadas $(-6, -2, 3)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-6, -2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, -3, -6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 2b + 3c = 0 \\ -2a - 3b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + \frac{2}{3}b \\ -2a - 3b - 6(2a + \frac{2}{3}b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + \frac{2}{3}b \\ -14a - 7b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + \frac{2}{3}b \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{3}a \\ b = -2a \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas de vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma $(a, -2a, \frac{2}{3}a)$ para um certo número real a .

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (-2a)^2 + (\frac{2}{3}a)^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4a^2 + \frac{4}{9}a^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{49}{9}a^2} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3}|a| = 7 \Leftrightarrow |a| = 3 \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 3; \text{ como tem que ser } b < 5, a \text{ não pode ser igual a}$$

-3 ; portanto, $a = 3$, pelo que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor de coordenadas $(3, -6, 2)$.

f) $B = A + \overrightarrow{AB} = (3, 5, 3) + (3, -6, 2) = (6, -1, 5)$

$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD} = (6, -1, 5) + (-6, -2, 3) = (0, -3, 8)$

$F = E + \overrightarrow{EF} = E + \overrightarrow{AB} = (1, 2, -3) + (3, -6, 2) = (4, -4, -1)$

$G = F + \overrightarrow{FG} = F + \overrightarrow{AD} = (4, -4, -1) + (-6, -2, 3) = (-2, -6, 2)$

g) Designemos por S o centro de s .

S é o ponto médio de qualquer diagonal espacial do cubo.

Determinemos as coordenadas do ponto médio de $[AG]$: $\left(\frac{3-2}{2}, \frac{5-6}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

A medida do comprimento da diagonal espacial do cubo é igual a $\sqrt{3} \times \overline{AB}$, ou seja, $7\sqrt{3}$, pelo que o raio de s é $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

A equação reduzida de s é $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ou, o que é equivalente, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$.

h) Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a α se e só se $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$.

$\overrightarrow{SA} = A - S$, pelo que $\overrightarrow{SA}$ é o vetor de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 &\Leftrightarrow (x - 3, y - 5, z - 3) \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} + \frac{11}{2}y - \frac{55}{2} + \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x - 15 + 11y - 55 + z - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x + 11y + z = 73 \end{aligned}$$

i)

O plano α tem equação $5x + 11y + z = 73$. Portanto, $\vec{a}(5, 11, 1)$ é um vetor normal ao plano α .

O plano β tem equação $x + y + z = 0$. Portanto, $\vec{b}(1, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano β .

Ora, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares, pois não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k(1, 1, 1) = (5, 11, 1)$, nem perpendiculares, pois $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ (de facto, $(1, 1, 1) \cdot (5, 11, 1) = 5 + 11 + 1 = 17$).

Logo, os planos α e β não são paralelos (ou seja, são concorrentes), mas não são perpendiculares.

j) $\overrightarrow{EP} = P - E$, pelo que $\overrightarrow{EP}$ é o vetor de coordenadas $\left(-1, -2, \frac{19}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EB} = B - E$, pelo que $\overrightarrow{EB}$ é o vetor de coordenadas $(5, -3, 8)$.

$$\cos \widehat{BEP} = \frac{\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EB}}{\|\overrightarrow{EP}\| \times \|\overrightarrow{EB}\|} = \frac{\left(-1, -2, \frac{19}{2}\right) \cdot (5, -3, 8)}{\sqrt{1 + 4 + \frac{361}{4}} \times \sqrt{25 + 9 + 64}} = \frac{-5 + 6 + 76}{\sqrt{\frac{381}{4}} \times \sqrt{98}} = \frac{77}{\sqrt{\frac{18669}{2}}} = \frac{77}{\sqrt{9334,5}}$$

Tem-se $\cos^{-1}\left(\frac{77}{\sqrt{9334,5}}\right) \approx 37,16^\circ$; portanto, $\widehat{BEP} \approx 37^\circ$.

Pág. 186

105.

a) Como a reta OT é perpendicular ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$, um vetor diretor da reta OT é o vetor de coordenadas $(2, 3, 1)$. Como, para além disso, a reta OT passa na origem, conclui-se que a reta pode ser definida pela condição $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$.

Determinação das coordenadas de T :

Como a ordenada de T é 6 tem-se $\frac{x}{2} = \frac{6}{3} = z$, pelo que a abcissa de T é 4 e a cota de T é 2.

b) Volume = $\overline{PQ} \times \overline{QR} \times \overline{QT} = 6 \times 4 \times 2 = 48$ unidades de área

c) Como o plano é paralelo ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$, uma sua equação cartesiana é da forma $2x + 3y + z = D$. Como o plano passa no ponto de coordenadas $(4, 6, 0)$ tem-se $2 \times 4 + 3 \times 6 + 0 = D$, pelo que $D = 26$.
Então, uma equação do plano é $2x + 3y + z = 26$.

d) O ponto A tem abcissa igual a 4 e cota igual a 2, pelo que, como pertence ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$ podemos concluir que a sua ordenada satisfaz a condição $8 + 3y + 2 = 22$, pelo que é igual 4; portanto tem-se $A(4, 4, 2)$.

O ponto B tem abcissa igual a 4 e cota igual a 0, pelo que, como pertence ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$ podemos concluir que a sua ordenada satisfaz a condição $8 + 3y + 0 = 22$, pelo que é igual $\frac{14}{3}$; portanto tem-se $B\left(4, \frac{14}{3}, 0\right)$.

O ponto C tem ordenada igual a 6 e cota igual a 0, pelo que, como pertence ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$ podemos concluir que a sua abcissa satisfaz a condição $2x + 18 + 0 = 22$, pelo que é igual 2; portanto tem-se $C(2, 6, 0)$.

O ponto D tem ordenada igual a 6 e cota igual a 2, pelo que, como pertence ao plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$ podemos concluir que a sua abcissa satisfaz a condição $2x + 18 + 2 = 22$ pelo que é igual 1; portanto tem-se $D(1, 6, 2)$.

e) A reta TQ passa no ponto de coordenadas $(4, 6, 0)$ e tem a direção do vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$, pelo que é definida pela condição cartesiana $x = 4 \wedge y = 6$.

f) $\overrightarrow{AD} = D - A$, pelo que $\overrightarrow{AD}$ é o vetor de coordenadas $(-3, 2, 0)$.

A reta AD passa no ponto de coordenadas $(4, 4, 2)$ e tem a direção do vetor de coordenadas $(-3, 2, 0)$, pelo que é definida pela condição cartesiana $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-4}{2} \wedge z = 2$.

Tem-se:

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-4}{2} \wedge z = 2 \Leftrightarrow 2x - 8 = -3y + 12 \wedge z = 2 \Leftrightarrow 2x + 3y = 20 \wedge z = 2$$

Outro processo:

A reta AD é a interseção do plano ABC com plano que contém a face $[VSTU]$, ou seja, é a interseção do plano definido pela equação $2x + 3y + z = 22$ com plano definido pela equação $z = 2$.

Então, uma condição que define a reta é $2x + 3y + z = 22 \wedge z = 2$.

Tem-se:

$$2x + 3y + z = 22 \wedge z = 2 \Leftrightarrow 2x + 3y + 2 = 22 \wedge z = 2 \Leftrightarrow 2x + 3y = 20 \wedge z = 2$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 + z^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -4x + 4y - 4z = 4 + 36 - 36 \Leftrightarrow -4x + 4y - 4z = 4 \Leftrightarrow x - y + z = -1 \end{aligned}$$

106. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})}} = \\
 &= \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{uv}))^2}{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \times \cos^2 \alpha}{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}} = \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}} = \\
 &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha| = \sin \alpha \quad (\text{como } \alpha \in [0, \pi], \text{ tem-se } \sin \alpha \geq 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 107. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = \\
 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \beta = \|\overrightarrow{AB}\| (\|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\| \cos \beta)
 \end{aligned}$$

108. Na figura, que pretende ilustrar a situação descrita, T é o ponto de tangência da reta t com a circunferência.

A reta CT tem declive igual a 1 e passa no ponto de coordenadas $(2, 0)$ pelo que a sua equação reduzida é $y = x - 2$.

Determinação das coordenadas de T :

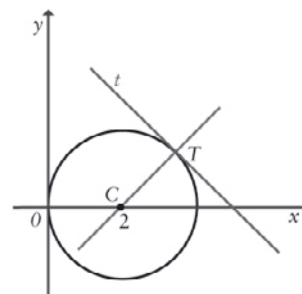
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-2+x)^2 = 4 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)^2 = 4 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 2 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -\sqrt{2} \vee x-2 = \sqrt{2} \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -\sqrt{2} \\ y = x-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 = \sqrt{2} \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Como, de entre os dois pontos da reta CT que pertencem à circunferência, o ponto T é aquele que tem maior abcissa, tem-se que as coordenadas de T são $(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Determinação da equação reduzida da reta t :

O declive da reta t é igual a -1 pelo que a equação reduzida desta reta é da forma $y = -x + b$; como a reta passa no ponto T , tem-se $\sqrt{2} = -(2 + \sqrt{2}) + b$, pelo que $b = 2 + 2\sqrt{2}$.

Então, a equação reduzida da reta t é $y = -x + 2 + 2\sqrt{2}$.



Atividades «Será que...?»

Pág. 9

SERÁ QUE..?

Sequência de figuras

a) Observando os termos da sequência, constata-se que:

- o primeiro termo tem $1 \times 2 + 1$ peças;
- o segundo termo tem $2 \times 3 + 1$ peças;
- o terceiro termo tem $3 \times 4 + 1$ peças.

Mantendo-se esta regra de formação, tem-se que:

- o quarto termo tem $4 \times 5 + 1$ peças;
- o quinto termo tem $5 \times 6 + 1$ peças.

Portanto, o quinto termo tem 31 peças.

b) O termo de ordem n tem $n \times (n + 1) + 1$ peças.

Vejamos se existe algum número natural n tal que $n(n + 1) + 1 = 600$.

Tem-se:

$$n(n + 1) + 1 = 600 \Leftrightarrow n^2 + n - 599 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-599)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{2397}}{2}$$

Como $\sqrt{2397}$ não é um número inteiro, podemos concluir que não existe um número natural n tal que $n(n + 1) + 1 = 600$. Portanto, não existe um termo da sequência com 600 peças.

Pág. 24

SERÁ QUE..?

Quando a primeira cai

A disposição das peças é tal que, se uma delas cai, a que está a seguir também cai,

Assim, se a peça número 1 cai, então a peça número 2 também cai.

Caindo a peça número 2, a peça número 3 também cai.

E assim sucessivamente.

Portanto, se a peça número 1 cai, todas as peças acabam por cair.

Atividades «Será que...?»

Pág. 9

SERÁ QUE..?	Sequência de figuras
-------------	----------------------

a) Observando os termos da sequência, constata-se que:

- o primeiro termo tem $1 \times 2 + 1$ peças;
- o segundo termo tem $2 \times 3 + 1$ peças;
- o terceiro termo tem $3 \times 4 + 1$ peças.

Mantendo-se esta regra de formação, tem-se que:

- o quarto termo tem $4 \times 5 + 1$ peças;
- o quinto termo tem $5 \times 6 + 1$ peças.

Portanto, o quinto termo tem 31 peças.

b) O termo de ordem n tem $n \times (n + 1) + 1$ peças.

Vejamos se existe algum número natural n tal que $n(n + 1) + 1 = 600$.

Tem-se:

$$n(n + 1) + 1 = 600 \Leftrightarrow n^2 + n - 599 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-599)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{2397}}{2}$$

Como $\sqrt{2397}$ não é um número inteiro, podemos concluir que não existe um número natural n tal que $n(n + 1) + 1 = 600$. Portanto, não existe um termo da sequência com 600 peças.

Pág. 24

SERÁ QUE..?	Quando a primeira cai
-------------	-----------------------

A disposição das peças é tal que, se uma delas cai, a que está a seguir também cai,

Assim, se a peça número 1 cai, então a peça número 2 também cai.

Caindo a peça número 2, a peça número 3 também cai.

E assim sucessivamente.

Portanto, se a peça número 1 cai, todas as peças acabam por cair.

SERÁ QUE..?	Relação entre termos consecutivos de uma sucessão
-------------	---

a) $u_2 = 2u_1 + 1$ (pois $7 = 2 \times 3 + 1$)
 $u_3 = 2u_2 + 1$ (pois $15 = 2 \times 7 + 1$)
 $u_4 = 2u_3 + 1$ (pois $31 = 2 \times 15 + 1$)

b) Mantendo-se esta regra, tem-se:
 $u_5 = 2u_4 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63$
 $u_6 = 2u_5 + 1 = 2 \times 63 + 1 = 127$
 $u_7 = 2u_6 + 1 = 2 \times 127 + 1 = 255$

c) $u_{n+1} = 2u_n + 1$

SERÁ QUE..?	O presente da Inês
-------------	--------------------

- a1) $20 + 5 = 25$. Ao fim de uma semana, a Inês tem 25 euros no mealheiro.
a2) $20 + 5 + 5 = 30$. Ao fim de duas semanas, a Inês tem 30 euros no mealheiro.
a3) $20 + 5 + 5 + 5 = 35$. Ao fim de três semanas, a Inês tem 35 euros no mealheiro.

- b) Ao fim de uma semana, a Inês tem $20 + 1 \times 5$ euros no mealheiro.
Ao fim de duas semanas, a Inês tem $20 + 2 \times 5$ euros no mealheiro.
Ao fim de três semanas, a Inês tem $20 + 3 \times 5$ euros no mealheiro.
...
Ao fim de n semanas, a Inês tem $20 + n \times 5$ euros no mealheiro.

Portanto, ao fim de n semanas, a Inês tem $5n + 20$ euros no mealheiro.

SERÁ QUE..?	O livro da Carolina
-------------	---------------------

- a1) $12 \times 2 = 24$. No dia 4, a Carolina lê 24 páginas.
a2) $24 \times 2 = 48$. No dia 5, a Carolina lê 48 páginas.
b) $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$. O livro tem 189 páginas.

- c) No dia 1, a Carolina lê 3 páginas.
 No dia 2, a Carolina lê 3×2 páginas.
 No dia 3, a Carolina lê $3 \times 2 \times 2$ páginas.
 E assim sucessivamente.

Tem-se, portanto:

Dia	Número de páginas lidas
1	$3 = 3 \times 2^0$
2	$3 \times 2 = 3 \times 2^1$
3	$3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2$
4	$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$
5	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^4$
6	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^5$

Assim, no dia n , a Carolina lê $3 \times 2^{n-1}$ páginas ($1 \leq n \leq 6$).

Pág. 59

SERÁ QUE..? Uma sucessão convergente

a) $u_1 = \frac{1+1}{1} = 2$; $u_2 = \frac{2+1}{2} = 1,5$; $u_3 = \frac{3+1}{3} = 1,333\dots$; $u_4 = \frac{4+1}{4} = 1,25$;

$u_5 = \frac{5+1}{5} = 1,2$; $u_{100} = \frac{100+1}{100} = 1,01$; $u_{500} = \frac{500+1}{500} = 1,002$

b) $|u_1 - 1| = 1$ $|u_5 - 1| = 0,2$ $|u_{100} - 1| = 0,01$ $|u_{500} - 1| = 0,002$

c) $|u_n - 1| < 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-n}{n} \right| < 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < 0,0001 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,0001 \Leftrightarrow 1 < 0,0001 n \Leftrightarrow 0,0001 n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,0001} \Leftrightarrow n > 10\,000$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 10\,000 \Leftrightarrow |u_n - 1| < 0,0001$,
 pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 10\,000 \Rightarrow |u_n - 1| < 0,0001$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10\,001 \Rightarrow |u_n - 1| < 0,0001$.

d) $|u_n - 1| < 0,00005 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < 0,00005 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-n}{n} \right| < 0,00005 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < 0,00005 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,00005 \Leftrightarrow 1 < 0,00005 n \Leftrightarrow 0,00005 n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,00005} \Leftrightarrow n > 20\,000$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 20\,000 \Leftrightarrow |u_n - 1| < 0,00005$,
 pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 20\,000 \Rightarrow |u_n - 1| < 0,00005$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 20\,001 \Rightarrow |u_n - 1| < 0,00005$.

Seja δ um qualquer número real positivo.

Tem-se:

$$|u_n - 1| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-n}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow 1 < \delta n \Leftrightarrow \delta n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow |u_n - 1| < \delta$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$.

Seja p um número natural maior do que $\frac{1}{\delta}$. Então $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$.

Pág. 65

SERÁ QUE..?	Quando o limite não é real
--------------------	-----------------------------------

a) Tem-se: $u_n > 1001 \Leftrightarrow \frac{3n}{2} > 1001 \Leftrightarrow 3n > 2002 \Leftrightarrow n > \frac{2002}{3} \Leftrightarrow n > 667,333...$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 667,333... \Leftrightarrow u_n > 1001$,
pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 667,333... \Rightarrow u_n > 1001$.

Assim, a menor ordem p que satisfaz a condição $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > 1001$ é 668.

b) Tem-se: $u_n > 10^{10} \Leftrightarrow \frac{3n}{2} > 10^{10} \Leftrightarrow 3n > 2 \times 10^{10} \Leftrightarrow n > \frac{2 \times 10^{10}}{3} \Leftrightarrow n > 6666666666,666...$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 6666666666,666... \Leftrightarrow u_n > 10^{10}$,
pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 6666666666,666... \Rightarrow u_n > 10^{10}$.

Assim, a menor ordem p que satisfaz a condição $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > 10^{10}$ é 6666666667.

Seja L um qualquer número real.

Tem-se: $u_n > L \Leftrightarrow \frac{3n}{2} > L \Leftrightarrow 3n > 2L \Leftrightarrow n > \frac{2L}{3}$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{2L}{3} \Leftrightarrow u_n > L$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{2L}{3} \Rightarrow u_n > L$.

Tem-se assim que: sendo p um número natural maior do que $\frac{2L}{3}$, a partir da ordem p todos os termos da sucessão são maiores do que L .

Portanto, dado um qualquer número real L , existe sempre uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que L .

Portanto, não é possível encontrar um número L nas condições pretendidas.

SERÁ QUE..?

Limites de sucessões de termo geral n^q

Para $q = 1$ tem-se $u_n = n$. Esta sucessão tem limite $+\infty$.

Para $q = 2$ tem-se $u_n = n^2$. Esta sucessão também tem limite $+\infty$.

Para $q = \frac{1}{2}$ tem-se $u_n = \sqrt{n}$. Esta sucessão também tem limite $+\infty$.

Consideremos agora $q = 0,01$.

Tem-se:

n	1	2	3	...	10	...	1000	...	10^{10}	...	10^{100}	...	10^{400}	...
$n^{0,01}$	1	1,007	1,011	...	1,023	...	1,072	...	1,258	...	10	...	10000	...

Esta sucessão também parece tender para $+\infty$.

Experimentemos agora valores negativos para q .

Para $q = -1$, tem-se $u_n = n^{-1} = \frac{1}{n}$. Esta sucessão tem limite 0.

Para $q = -2$ tem-se $u_n = n^{-2} = \frac{1}{n^2}$. Esta sucessão também tem limite 0.

Vejamos agora $q = -0,3$.

Tem-se:

n	1	2	3	...	10	...	1000	...	10000	...	1000000	...
$n^{-0,3}$	1	0,812	0,719	...	0,501	...	0,126	...	0,063	...	0,016	...

Esta sucessão também parece tender para 0.

É então natural formular a seguinte conjectura:

- $q > 0 \Rightarrow n^q \rightarrow +\infty$
- $q < 0 \Rightarrow n^q \rightarrow 0$

SERÁ QUE..?

Caso $+\infty + (-\infty)$

Tem-se: $u_n \rightarrow +\infty$ $v_n \rightarrow +\infty$ $w_n \rightarrow -\infty$ $z_n \rightarrow -\infty$

a) $u_n + w_n = n + 3 + (-n) = 3 \rightarrow 3$

b) $u_n + z_n = n + 3 + (-3n) = -2n + 3 \rightarrow -\infty$

c) $v_n + w_n = 2n + 1 + (-n) = n + 1 \rightarrow +\infty$

Estes exemplos mostram que não é possível dizer qual é o limite de $a_n + b_n$ apenas com a informação de que $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow -\infty$.

SERÁ QUE..?	Caso $(+\infty) \times 0$
-------------	---------------------------

Tem-se: $u_n \rightarrow +\infty$ $v_n \rightarrow +\infty$ $w_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow 0$

a) $u_n \times w_n = \frac{n+3}{n} = \frac{n}{n} + \frac{3}{n} = 1 + \frac{3}{n} \rightarrow 1 + 0 = 1$

b) $u_n \times z_n = \frac{n+3}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \rightarrow 0 + 0 = 0$

c) $v_n \times w_n = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$

Estes exemplos mostram que não é possível dizer qual é o limite de $a_n \times b_n$ apenas com a informação de que $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow 0$.

SERÁ QUE..?	Caso $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$
-------------	--

1.

a) $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

b) $\frac{v_n}{z_n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$

c) $\frac{u_n}{z_n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

2.

a) $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^2}} = \frac{2n^2}{n} = 2n \rightarrow +\infty$

b) $\frac{v_n}{z_n} = \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{2n^2} = \frac{n}{2n^2} + \frac{2}{2n^2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 + 0 = 0$

c) $\frac{u_n}{z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n} = \frac{n}{n} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \rightarrow 1 + 0 = 1$

Os exemplos do item 1 mostram que não é possível dizer qual é o limite de $\frac{a_n}{b_n}$ apenas com a informação de que $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$.

Os exemplos do item 2 mostram que não é possível dizer qual é o limite de $\frac{a_n}{b_n}$ apenas com a informação de que $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$.

SERÁ QUE..?

Relação entre o grau dos polinómios

Tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{3n^2 - 5n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{3n^2 \left(1 - \frac{5}{3n} + \frac{1}{n^2}\right)}.$

Então,

- uma possibilidade para que se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 6$ é considerar (v_n) definida por $v_n = 18n^2$.
- uma possibilidade para que se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{u_n} = 0$ é considerar (w_n) definida por $w_n = n$.
- uma possibilidade para que se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{u_n} = 0$ é considerar (z_n) definida por $z_n = -n^3$.

Portanto, uma resposta possível é: $P(x) = 18x^2 \quad Q(x) = x \quad S(x) = -x^3$

No primeiro caso, o grau do polinómio do numerador tem de ser igual ao grau do polinómio do denominador.

No segundo caso, o grau do polinómio do numerador tem de ser inferior ao grau do polinómio do denominador.

No terceiro caso, o grau do polinómio do numerador tem de ser superior ao grau do polinómio do denominador.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Generalidades sobre sucessões

Pág. 6

1.

a) É majorado. Conjunto dos majorantes: $[7, +\infty[$.

b) É majorado. Conjunto dos majorantes: $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

c) Não é majorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número inteiro que é maior do que ele.

d) É majorado. Conjunto dos majorantes: $[-5, +\infty[$.

e) É majorado. Conjunto dos majorantes: $[7, +\infty[$.

f) Não é majorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número no conjunto $] -2, +\infty[$ que é maior do que ele.

g) É majorado. Conjunto dos majorantes: $[12, +\infty[$.

h) Não é majorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número primo que é maior do que ele.

i) Não é majorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um múltiplo de 6 que é maior do que ele.

j) O conjunto é $\{1, 2, 3, 6\}$. É majorado. Conjunto dos majorantes: $[6, +\infty[$.

Pág. 7

2.

a) É minorado. Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 0]$.

b) É minorado. Conjunto dos minorantes: $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

c) Não é minorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número inteiro que é menor do que ele.

d) Não é minorado pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número no conjunto $] -\infty, -9]$ que é menor do que ele.

e) É minorado. Conjunto dos minorantes: $] -\infty, -1]$.

f) É minorado. Conjunto dos minorantes: $] - \infty, 0]$.

g) É minorado. Conjunto dos minorantes: $] - \infty, 1]$.

h) É minorado. Conjunto dos minorantes: $] - \infty, 2]$.

3.

a) É limitado. Tem-se: conjunto dos minorantes $=] - \infty, 3]$ e conjunto dos majorantes $= [7, +\infty[$.

b) Não é limitado (não é majorado nem minorado).

c) Não é limitado (não é minorado).

d) É limitado. Tem-se: conjunto dos minorantes $=] - \infty, -23]$ e conjunto dos majorantes $= [76, +\infty[$.

e) Não é limitado (não é majorado).

f) O conjunto é $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. É limitado. Tem-se: conjunto dos minorantes $=] - \infty, 1]$ e conjunto dos majorantes $= [18, +\infty[$.

4. Designemos por A , em cada alínea, o conjunto apresentado.

a) Tem-se: $3 < \pi < \sqrt{10}$, pelo que o conjunto dos majorantes de A é $[\sqrt{10}, +\infty[$. Como $\sqrt{10} \in A$, $\sqrt{10}$ é máximo de A .

b) Tem-se: $-2 < -\sqrt{2} < -\frac{4}{3} < -1$, pelo que o conjunto dos majorantes de A é $[-1, +\infty[$. Como $-1 \in A$, -1 é máximo de A .

c) Tem-se: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, pelo que o conjunto dos majorantes de A é $[60, +\infty[$. Como $60 \in A$, 60 é máximo de A .

d) A não é majorado, logo não tem máximo.

e) O conjunto dos majorantes de A é $[2, +\infty[$. Como $2 \in A$, 2 é máximo de A .

f) O conjunto dos majorantes de A é $[3, +\infty[$. Como nenhum elemento de $[3, +\infty[$ pertence a A , A não tem máximo.

g) A não é majorado, logo não tem máximo.

Pág. 8

5. Designemos por A , em cada alínea, o conjunto apresentado.

a) Tem-se: $3 < \pi < \sqrt{10}$, pelo que o conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, 3]$. Como $3 \in A$, 3 é mínimo de A .

b) Tem-se: $-2 < -\sqrt{2} < -\frac{4}{3} < -1$, pelo que o conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, -2]$. Como $-2 \in A$, -2 é mínimo de A .

c) Tem-se: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, pelo que o conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, 1]$. Como $1 \in A$, 1 é mínimo de A .

d) O conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, 60]$. Como $60 \in A$, 60 é mínimo de A .

e) A não é minorado, logo não tem mínimo.

f) O conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, -5]$. Como $-5 \in A$, -5 é mínimo de A .

g) O conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, -1]$. Como nenhum elemento de $] - \infty, -1]$ pertence a A , A não tem mínimo.

h) O conjunto dos minorantes de A é $] - \infty, -1]$. Como $-1 \in A$, -1 é mínimo de A .

6.

Suponhamos que a e b são mínimos do conjunto A . Então:

- a é minorante de A e a pertence a A ;
- b é minorante de A e b pertence a A .

Logo,

- como a é minorante de A e como b pertence a A , tem-se $a \leq b$;
- como b é minorante de A e como a pertence a A , tem-se $b \leq a$.

Como $a \leq b$ e $b \leq a$, vem $a = b$.

Portanto, se existir mínimo de A , então é único.

Pág. 10

7.

a) $v_1 = \frac{3+1}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $v_2 = \frac{6+1}{2+5} = \frac{7}{7} = 1$; $v_3 = \frac{9+1}{3+5} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b) $v_{95} = \frac{3 \times 95 + 1}{95 + 5} = \frac{286}{100} = 2,86$

8.

a) $a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$

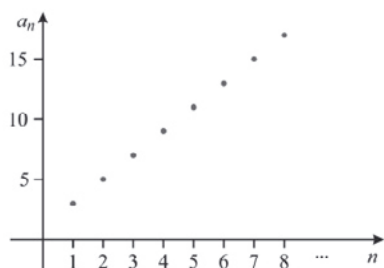
$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$

$a_6 = 2 \times 6 + 1 = 13$

$a_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$

$a_8 = 2 \times 8 + 1 = 17$

Gráfico:



Verifiquemos se 25 é termo da sucessão:

$2n + 1 = 25 \Leftrightarrow 2n = 24 \Leftrightarrow n = 12$; portanto, 25 é o 12.º termo da sucessão.

b) $b_1 = \sqrt{1+1} - 3 = \sqrt{2} - 3 \approx -1,6$

$b_2 = \sqrt{2+1} - 3 = \sqrt{3} - 3 \approx -1,3$

$b_3 = \sqrt{3+1} - 3 = \sqrt{4} - 3 = -1$

$b_4 = \sqrt{4+1} - 3 = \sqrt{5} - 3 \approx -0,8$

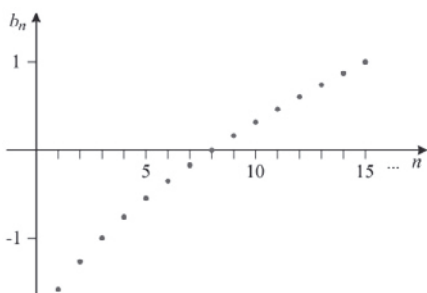
$b_5 = \sqrt{5+1} - 3 = \sqrt{6} - 3 \approx -0,6$

$b_6 = \sqrt{6+1} - 3 = \sqrt{7} - 3 \approx -0,4$

$b_7 = \sqrt{7+1} - 3 = \sqrt{8} - 3 \approx -0,2$

$b_8 = \sqrt{8+1} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 0$

Gráfico:



Verifiquemos se 25 é termo da sucessão:

$\sqrt{n+1} - 3 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} = 28 \Leftrightarrow n+1 = 784 \Leftrightarrow n = 783$; portanto, 25 é o 783.º termo da sucessão.

$$c) c_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$c_2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$c_3 = \frac{18}{4} = 4,5$$

$$c_4 = \frac{24}{5} = 4,8$$

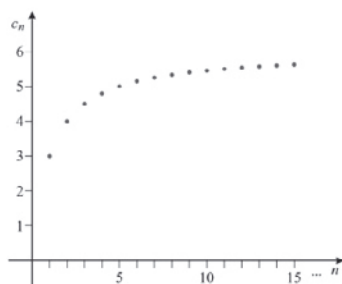
$$c_5 = \frac{30}{6} = 5$$

$$c_6 = \frac{36}{7} \approx 5,1$$

$$c_7 = \frac{42}{8} \approx 5,3$$

$$c_8 = \frac{48}{9} \approx 5,3$$

Gráfico:



Verifiquemos se 25 é termo da sucessão:

$\frac{6n}{n+1} = 25 \Leftrightarrow 6n = 25n + 25 \Leftrightarrow -19n = 25 \Leftrightarrow n = -\frac{25}{19}$; como $-\frac{25}{19}$ não é um número natural, 25 não é termo da sucessão.

Pág. 12

9.

a) Uma sucessão é decrescente se $\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m < u_n$

b) Tem-se, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$:

$$m > n \Rightarrow -7m < -7n \Rightarrow 4 - 7m < 4 - 7n \Rightarrow u_m < u_n$$

Pág. 13

10.

$$a) u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 4 - (3n+4) = 3n+7-3n-4 = 3$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$; portanto (u_n) é crescente.

$$b) u_{n+1} - u_n = 2 - 5(n+1) - (2 - 5n) = 2 - 5n - 5 - 2 + 5n = -5$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$; portanto (u_n) é decrescente.

$$c) u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{2(n+1)+3} - \frac{n-1}{2n+3} = \frac{n}{2n+5} - \frac{n-1}{2n+3} = \frac{2n^2+3n-(2n^2-2n+5n-5)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{5}{(2n+5)(2n+3)}$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$; portanto (u_n) é crescente.

$$\text{d)} u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) + 4 - (n^2 + 3n + 4) = \\ = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 4 - n^2 - 3n - 4 = 2n + 4$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$; portanto (u_n) é crescente.

$$\text{e)} u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-n^3-2n^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+3n+1}{(n+2)(n+1)}$$

Tem-se se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$; portanto (u_n) é crescente.

$$\text{f)} u_{n+1} - u_n = 1 - 2^{n+1} - (1 - 2^n) = 1 - 2^{n+1} - 1 + 2^n = -2^{n+1} + 2^n = 2^n(-2 + 1) = -2^n$$

Tem-se se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$; portanto (u_n) é decrescente.

$$\text{g)} u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3^n} \times \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3^{n+1}}$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$; portanto (u_n) é decrescente.

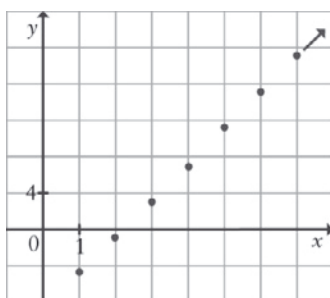
h) (u_n) é a sucessão em que todos os termos de ordem ímpar são -1 e em que todos os termos de ordem par são 1 ; portanto (u_n) não é monótona.

Pág. 17

11.

a) A sucessão (u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 9$.

O gráfico desta sucessão é, portanto:



Concluimos, assim, que a sucessão é minorada mas não é majorada

b) A sucessão (u_n) é crescente, pelo que todos os termos da sucessão são maiores do que u_1 ; portanto a sucessão é minorada.

A sucessão não é majorada pois, para qualquer número real que se considere, existe sempre um número natural p tal que $p^3 + p$ é maior do que ele.

$$\text{c)} u_n = 2n + (-1)^n = \begin{cases} 2n - 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2n + 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Tem-se, portanto:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
u_n	1	5	5	9	9	13	13	17	17	21	...

Esta sucessão é minorada mas não é majorada.

d) Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, 2n - 1 > 0 \wedge n + 1 > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$; portanto 0 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão. Logo, a sucessão é minorada.

Por outro lado, tem-se $\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{2n-1}{-2n-2} \left| \frac{n+1}{2} \right.$$

$$\frac{-3}{-3}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{n+1} > 0$, vem que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{3}{n+1} < 2$; portanto 2 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão. Logo, a sucessão é majorada.

Então, como é minorada e majorada, a sucessão é limitada.

e) Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, 3n > 0 \wedge n^2 + 1 > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$; portanto 0 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão. Logo, a sucessão é minorada.

Por outro lado, tem-se:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+3}{(n+1)^2+1} - \frac{3n}{n^2+1} = \frac{3n+3}{n^2+2n+2} - \frac{3n}{n^2+1} = \frac{3n^3+3n^2+3n+3-(3n^3+6n^2+6n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

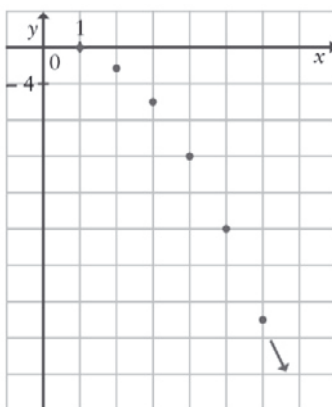
$$= \frac{-3n^2-3n+3}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-3(n^2+n-1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

Tem-se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$; portanto (u_n) é decrescente pelo que todos os termos da sucessão são menores do que u_1 ; portanto a sucessão é majorada.

Então, como é minorada e majorada, a sucessão é limitada.

f) A sucessão (u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - x^2$.

O gráfico desta sucessão é, portanto:



Concluimos, assim, que a sucessão é majorada mas não é minorada.

12.

a) $|x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \leq -2 \vee x + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 1$; portanto

$$A =] - \infty, -3] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{Então } C = A \cap B = (] - \infty, -3] \cup [1, +\infty[) \cap] - 5, 1] =] - 5, -3] \cup \{1\}$$

b) Conjunto dos majorantes de C é $[1, +\infty[$.

c) Conjunto dos minorantes de C é $] - \infty, -5]$.

d) Como 1 é majorante de C e pertence a C , 1 é o máximo de C .

e) Como nenhum dos minorantes de C pertence a C , C não tem mínimo.

13.

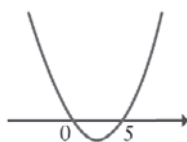
a) Tem-se: $x^2 \geq 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x \geq 0$

Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 5x$.

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty, 0] \cup [5, +\infty[$; portanto $A =] - \infty, 0] \cup [5, +\infty[$.

Então, $A \cap B = (] - \infty, 0] \cup [5, +\infty[) \cap] \pi, \sqrt{37}[= [5, \sqrt{37}[$.

Conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[\sqrt{37}, +\infty[$.

b) $A \cup B = (] - \infty, 0] \cup [5, +\infty[) \cup] \pi, \sqrt{37}[=] - \infty, 0] \cup] \pi, +\infty[$

Então, tem-se $\overline{A \cup B} =]0, \pi]$.

O conjunto dos majorantes de $\overline{A \cup B}$ é $[\pi, +\infty[$; como π é majorante de $\overline{A \cup B}$ e π pertence a $\overline{A \cup B}$, π é o máximo de $\overline{A \cup B}$.

14.

$$\text{a) } P(1) = 1^3 - \frac{5}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{b) } P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \geq 0$$

Tem-se:

	1	-5/2	1/2	1
1	1	-3/2	-1	0 = R

Então, $P(x) = (x - 1) \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right)$, pelo que

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal de $P(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - \frac{3}{2}x - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \cup [2, +\infty[, \text{ pelo que } A = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \cup [2, +\infty[.$$

$$\text{c) } A \cap B = \left(\left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \cup [2, +\infty[\right) \cap \left] -\frac{1}{3}, \sqrt{2} \right[= \left] -\frac{1}{3}, 1 \right]$$

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[1, +\infty[$; como 1 é majorante de $A \cap B$ e 1 pertence a $A \cap B$, 1 é o máximo de $A \cap B$.

15.

$$\text{a) } A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$$

O conjunto A não tem majorantes nem minorantes.

$$\text{b) } B = \{x \in [0, \pi] : \cos x < 0\} = \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Conjunto dos majorantes de B é $[\pi, +\infty[$; conjunto dos minorantes de B é $\left] -\infty, \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\text{c) } A \cap B = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\} \cap \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right] = \{\pi\}$$

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[\pi, +\infty[$; como π é majorante de $A \cap B$ e π pertence a $A \cap B$, π é o máximo de $A \cap B$.

O conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $\left] -\infty, \pi \right]$; como π é minorante de $A \cap B$ e π pertence a $A \cap B$, π é o mínimo de $A \cap B$.

16.

$$\text{a) } u_1 = 2 - 1 = 1; v_1 = (2 - 1)^2 = 1; w_1 = \frac{2 \times 1}{1 + 1} = 1$$

$$u_5 = 2 - 5 = -3; v_5 = (2 - 5)^2 = 9; w_5 = \frac{2 \times 5}{5 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\text{b) } u_p = 2 - p; v_p = (2 - p)^2; w_p = \frac{2p}{p + 1}$$

$$u_{p+2} = 2 - (p + 2) = -p; v_{p+2} = [2 - (p + 2)]^2 = p^2; w_{p+2} = \frac{2(p+2)}{(p+2)+1} = \frac{2p+4}{p+3}$$

$$u_{2p} = 2 - 2p; v_{2p} = (2 - 2p)^2; w_{2p} = \frac{2 \times 2p}{2p+1} = \frac{4p}{2p+1}$$

$$\text{c) } u_{n+1} - u_n = 2 - (n+1) - (2-n) = 2 - n - 1 - 2 + n = -1$$

$$v_{n+1} - v_n = [2 - (n+1)]^2 - (2-n)^2 = (1-n)^2 - (2-n)^2 = 1 - 2n + n^2 - (4 - 4n + n^2) = 1 - 2n + n^2 - 4 + 4n - n^2 = 2n - 3$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

17.

$$\text{a) Para } n = 4, \text{ tem-se } a_{n+1} = a_5 = \frac{2 \times 5 - 1}{5 + 2} = \frac{9}{7} \text{ e } a_n + 1 = a_4 + 1 = \frac{2 \times 4 - 1}{4 + 2} + 1 = \frac{7}{6} + 1 = \frac{13}{6}.$$

$$\text{b) } a_n = 1,875 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+2} = 1,875 \Leftrightarrow 2n-1 = 1,875n + 3,75 \Leftrightarrow 2n - 1,875n = 3,75 + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,125n = 4,75 \Leftrightarrow n = \frac{4,75}{0,125} \Leftrightarrow n = 38; \text{ portanto } 1,875 \text{ é o } 38.^\circ \text{ termo da sucessão.}$$

$$a_n = 1,97 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+2} = 1,97 \Leftrightarrow 2n-1 = 1,97n + 3,94 \Leftrightarrow 2n - 1,97n = 3,94 + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,03n = 4,94 \Leftrightarrow n = \frac{4,94}{0,03}; \text{ como } \frac{4,94}{0,03} = 165, (6) \text{ a condição } a_n = 1,97 \text{ é impossível em } \mathbb{N}, \\ \text{pelo que } 1,97 \text{ não é termo da sucessão.}$$

18.

$$\text{a) } u_n < v_n \Leftrightarrow 20n < (n-20)^2 \Leftrightarrow 20n < n^2 - 40n + 400 \Leftrightarrow n^2 - 60n + 400 > 0$$

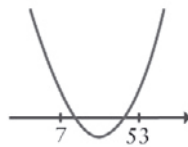
Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 60x + 400$.

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 1600}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{2000}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{60 \pm 10\sqrt{20}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 30 \pm 5\sqrt{20} \Leftrightarrow x = 30 - 5\sqrt{20} \vee x = 30 + 5\sqrt{20}$$

Tem-se $30 - 5\sqrt{20} \approx 7,6$ e $30 + 5\sqrt{20} \approx 52,4$.

Um esboço do gráfico de f é:



$$\text{Então } u_n < v_n \Leftrightarrow n^2 - 60n + 400 > 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge (n \leq 7 \vee n \geq 53).$$

$$\text{19. } a_1 = 3 \times 1 = 3; a_2 = 3 \times 2 = 6; a_3 = \frac{3}{3} = 1; a_4 = 3 \times 4 = 12; a_5 = 3 \times 5 = 15 \text{ e}$$

$$a_6 = \frac{6}{3} = 2$$

20.

a) Vejamos se 5 é termo da sucessão:

$5n = 5 \Leftrightarrow n = 1$; como $1 \leq 10$, tem-se que 5 é o 1.º termo da sucessão.

$\sqrt{n} = 5 \Leftrightarrow n = 25$; como $25 > 10$, tem-se que 5 é o 25.º termo da sucessão.

Vejamos se 100 é termo da sucessão:

$5n = 100 \Leftrightarrow n = 20$; como $20 > 10$, tem-se que 100 não é nenhum dos dez primeiros termos da sucessão.

$\sqrt{n} = 100 \Leftrightarrow n = 10\,000$; como $10\,000 > 10$, tem-se que 100 é o 10 000.º termo da sucessão.

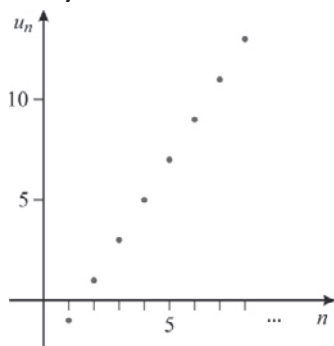
b) $n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10$; como 10 não é um número ímpar, 100 não é igual a qualquer termo de ordem ímpar da sucessão.

$3n + 1 = 100 \Leftrightarrow 3n = 99 \Leftrightarrow n = 33$; como 33 não é um número par, 100 não é igual a qualquer termo de ordem par da sucessão.

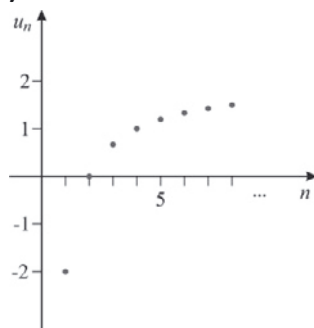
100 não é termo da sucessão.

Pág. 22

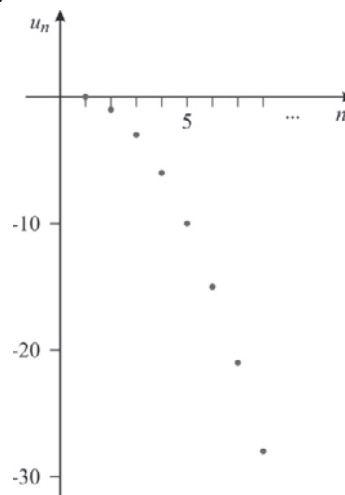
21. a)



b)



c)



22. Designemos por (u_n) cada uma das sucessões.

a) Tem-se:

$$u_1 = 1 \times \frac{\pi}{2}$$

$$u_2 = 2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$u_3 = 3 \times \frac{\pi}{2}$$

$$u_4 = 4 \times \frac{\pi}{2}$$

$$u_5 = 5 \times \frac{\pi}{2}$$

...

$$u_n = n \times \frac{\pi}{2} = \frac{n\pi}{2}$$

b) Tem-se:

$$u_1 = 3 \times 10^{-1}$$

$$u_2 = 3 \times 10^{-2}$$

$$u_3 = 3 \times 10^{-3}$$

$$u_4 = 3 \times 10^{-4}$$

$$u_5 = 3 \times 10^{-5}$$

...

$$u_n = 3 \times 10^{-n} = \frac{3}{10^n}$$

c) Tem-se:

$$u_1 = (-1)^1 \times 2^1$$

$$u_2 = (-1)^2 \times 2^2$$

$$u_3 = (-1)^3 \times 2^3$$

$$u_4 = (-1)^4 \times 2^4$$

$$u_5 = (-1)^5 \times 2^5$$

...

$$u_n = (-1)^n \times 2^n = (-2)^n$$

23. Na figura ao lado está uma sequência de retângulos decompostos em quadrados todos iguais tendo, cada um deles, metade dos seus quadrados pintados de cor de laranja.

O número de bolas em cada figura do enunciado é igual ao número de quadrados pintados em cada retângulo da mesma ordem da figura de bolas.

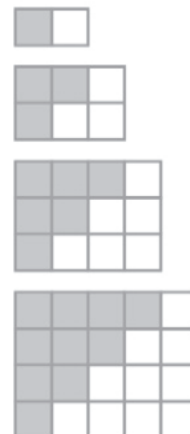
Designemos por u_n o número de bolas na figura de ordem n .

Tem-se:

$$u_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1, \quad u_2 = \frac{2 \times 3}{2} = 3, \quad u_3 = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \quad \text{e} \quad u_4 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

Então, vem:

- O número de bolas da figura seguinte é igual a $u_5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$;
- O número de bolas da 20.ª figura é igual a $u_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$;
- $u_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$



24.

$$\text{a) } u_{n+1} - u_n = \frac{3-(n+1)}{2} - \frac{3-n}{2} = \frac{3-n-1-3+n}{2} = -\frac{1}{2}$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$; portanto, está provado que a sucessão é decrescente.

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = 5 + (n+1) - (n+1)^2 - (5 + n - n^2) = 5 + n + 1 - n^2 - 2n - 1 - 5 - n + n^2 = -2n$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, -2n < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ e, portanto $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Logo, está provado que a sucessão é decrescente.

$$\text{c) } u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} - \frac{2n}{2n-1} = \frac{2n+2}{2n+1} - \frac{2n}{2n-1} = \frac{4n^2+4n-2n-2-4n^2-2n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-2}{(2n+1)(2n-1)}$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-2}{(2n+1)(2n-1)} < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ e, portanto $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Logo, está provado que a sucessão é decrescente.

$$\text{d) } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ e, portanto $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Logo, está provado que a sucessão é decrescente.

25.

$$\text{a) } v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + 1) - (u_n + 1) = u_{n+1} + 1 - u_n - 1 = u_{n+1} - u_n$$

Como (u_n) é uma sucessão crescente, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$; portanto, (v_n) é uma sucessão crescente.

$$\text{b) } w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - 5) - (u_n - 5) = u_{n+1} - 5 - u_n + 5 = u_{n+1} - u_n$$

Como (u_n) é uma sucessão crescente, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n > 0$; portanto, (w_n) é uma sucessão crescente.

c) $x_{n+1} - x_n = -u_{n+1} - (-u_n) = -u_{n+1} + u_n = -(u_{n+1} - u_n)$

Como (u_n) é uma sucessão crescente, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$,
pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n < 0$; portanto, (x_n) é uma sucessão decrescente.

d) $a_{n+1} - a_n = 2u_{n+1} - 2u_n = 2(u_{n+1} - u_n)$

Como (u_n) é uma sucessão crescente, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$,
pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$; portanto, (a_n) é uma sucessão crescente.

26. (u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 9$, pelo que o gráfico de (u_n) é o gráfico apresentado na figura ao lado.

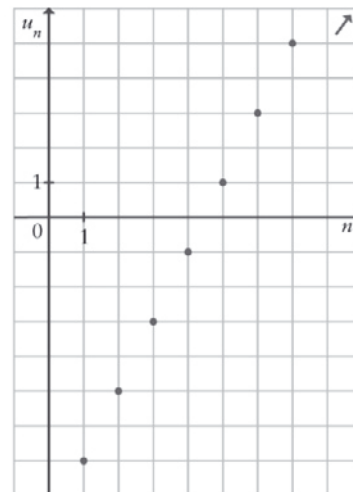
Então, (u_n) é crescente.

Tem-se:

Para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, $v_n < 0$ e, para $n \geq 5$, $v_n > 0$, pelo que (v_n) não é decrescente.

Então, não é verdade que, se uma sucessão (a_n) é crescente, então a sucessão (b_n) definida por $b_n = \frac{1}{a_n}$ seja decrescente.

A afirmação é falsa.



27.

a) Tem-se, para $n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = 5$, pelo que $18 - u_2 = 5$ e, portanto, $u_2 = 13$.
Então, $13 - u_1 = 5$ e, portanto, $u_1 = 8$.

b) Tem-se $u_n - u_{n-1} = 5 \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + 5$

Então, $u_4 = u_3 + 5 = 18 + 5 = 23$ e $u_5 = u_4 + 5 = 23 + 5 = 28$.

c) Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_{n-1} = 5$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_{n-1} > 0$.

Então, a sucessão é crescente pelo que é monótona.

28.

a) $v_{n+1} - v_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+4} - \frac{4n+1}{n+4} = \frac{4n+5}{n+5} - \frac{4n+1}{n+4} = \frac{4n^2+16n+5n+20-4n^2-n-20n-5}{(n+5)(n+4)} = \frac{15}{(n+5)(n+4)}$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$, pelo que a sucessão é crescente.

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_n < 3,5 \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n+4} < 3,5 \Leftrightarrow 4n+1 < 3,5n+14 \Leftrightarrow 0,5n < 13 \Leftrightarrow n < 26$$

Há 25 termos da sucessão que são menores do que 3,5.

b) Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$:

$v_n = 4,5 \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n+4} = 4,5 \Leftrightarrow 4n+1 = 4,5n+18 \Leftrightarrow -0,5n = 17 \Leftrightarrow n = -34$; como -34 não é um número natural, a condição $v_n = 4,5$ é impossível em $\mathbb{N}$, pelo que nenhum termo de (v_n) é igual a 4,5.

29. $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - 500}{n+1} - \frac{n^2 - 500}{n} = \frac{n^2 + 2n - 499}{n+1} - \frac{n^2 - 500}{n} = \frac{n^3 + 2n^2 - 499n - n^3 - n^2 + 500n + 500}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n + 500}{n(n+1)}$; tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que a sucessão é crescente.

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n > 80 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 500}{n} > 80 \Leftrightarrow n^2 - 500 > 80n \Leftrightarrow n^2 - 80n - 500 > 0$$

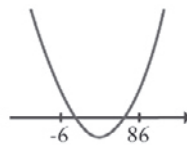
Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 - 80x - 500$.

Determinemos, se existirem, os zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 2000}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{80 \pm \sqrt{8400}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{80 \pm 10\sqrt{84}}{2} \Leftrightarrow x = 40 \pm 5\sqrt{84} \Leftrightarrow x = 40 - 5\sqrt{84} \vee x = 40 + 5\sqrt{84}$$

Tem-se $40 - 5\sqrt{84} \approx -5,8$ e $40 + 5\sqrt{84} \approx 85,8$.

Um esboço do gráfico de f é:



Então, $u_n > 80 \Leftrightarrow n \geq 86$.

$$u_{86} = \frac{86^2 - 500}{86} \approx 80,2$$

30.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se: $a_{n+8} = \cos \frac{(n+8)\pi}{4} = \cos \left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi \right) = \cos \frac{n\pi}{4} = a_n$

b) $\left\{ -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$

c) $[1, +\infty[$

31.

a) Falso, porque 5 é majorante; todos os termos são menores ou iguais a 5.

b) Verdadeiro, $u_n \geq -3, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Verdadeiro; se 5 é majorante, todos os termos da sucessão são menores ou iguais a 5, pelo que são menores do que 6.

d) Não há informação suficiente para concluir se a afirmação é falsa, pois não sabemos se -3 é o maior dos minorantes.

Pág. 23

32. A afirmação é falsa: o contradomínio de uma sucessão nunca é um intervalo. Repara, por exemplo, que $\frac{4}{3} \in]0,2]$, mas $\frac{4}{3}$ não pertence ao contradomínio, pois não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} = \frac{4}{3}$.

33.

a) Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 0,9875 \Leftrightarrow \frac{n-4}{n} = 0,9875 \Leftrightarrow n - 4 = 0,9875n \Leftrightarrow 0,0125n = 4 \Leftrightarrow n = \frac{4}{0,0125} \Leftrightarrow n = 320 ;$$

0,9875 é o 320.º termo de (u_n) .

b) Tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{4}{n(n+1)}$, pelo

que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.

Portanto, a sucessão é crescente.

c) Tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n-4}{n} = 1 - \frac{4}{n}$, pelo
que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$.

Portanto, 1 é majorante da sucessão.

d) Como a sucessão é crescente, a sucessão é minorada (o primeiro termo é um minorante da sucessão). Como 1 é majorante da sucessão, a sucessão é majorada. Sendo minorada e majorada, a sucessão é limitada.

34. Por exemplo:

a) $5 - \frac{1}{n} - \frac{5n-1}{n}$

b) $-n$

c) $(-1)^n \cdot n$

35. A medida da amplitude de um ângulo interno de um polígono de n lados ($n \geq 3$) é dada, em graus, por $180 - \frac{360}{n}$, pelo que se concluiu, de acordo com a observação, que quanto maior é o número de lados, maior é a amplitude do ângulo interno do polígono. A sucessão é crescente. Um minorante do conjunto dos termos da sucessão é, por exemplo, 60. Um majorante do conjunto dos termos da sucessão é, por exemplo, 180.

36.

a) $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 60(n+1) - (n^2 - 60n) = n^2 + 2n + 1 - 60n - 60 - n^2 + 60n = 2n - 59$

Então, para $n < 30$, $u_{n+1} - u_n < 0$ e, para $n \geq 30$, $u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que a sucessão não é monótona.

(u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 60x$.

O gráfico de f , em r.o.n. xOy , é uma parábola com a concavidade voltada para cima cujo vértice é o ponto de coordenadas $(30, -900)$, pelo que se pode concluir que $u_{30} = -900$ é o menor termo da sucessão e que o conjunto dos termos da sucessão não é majorado.

O conjunto dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão é $] -\infty, -900]$.

b) $v_n = n + (-1)^{n+1} = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n-1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Tem-se, portanto:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
v_n	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	...

A sucessão não é monótona.

$v_2 = 1$ é o menor termo da sucessão e a sucessão não é majorada.

O conjunto dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão é $] -\infty, 1]$.

c) $w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)+6}{(n+1)+2} - \frac{2n+6}{n+2} = \frac{2n+8}{n+3} - \frac{2n+6}{n+2} = \frac{2n^2+4n+8n+16-2n^2-6n-6n-18}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)}$

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n < 0$, pelo que a sucessão é decrescente.

Como a sucessão é decrescente, w_1 é o maior termo da sucessão; $w_1 = \frac{8}{3}$, pelo que o conjunto dos majorantes do conjunto dos termos da sucessão é $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right[$.

$w_n = \frac{2n+6}{n+2} = 2 + \frac{2}{n+2}$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n < 2$ e, então, 2 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Por outro lado, como a expressão $\frac{2}{n+2}$ toma valores tão pequenos quanto se queira, nenhum número real superior a 2 é minorante.

O conjunto dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão é $] -\infty, 2]$.

d) $a_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$, pelo que se tem:

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	1	0	-1	0	1	0	-1	...

A sucessão não é monótona.

O conjunto dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão é $] -\infty, -1]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty[$.

Capítulo 2 | Princípio de indução matemática. Progressões aritméticas e progressões geométricas

Pág. 25

37.

Para $n = 1$ obtém-se uma proposição verdadeira, pois $1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$ e 5 é um número ímpar.

Hipótese de indução: $n^2 + 3n + 1$ é um número ímpar.

Tese de indução: $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ é um número ímpar.

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } (n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1 &= \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = \\ &= \underbrace{n^2 + 3n + 1}_{\text{ímpar}} + \underbrace{2n + 4}_{\text{par}} \end{aligned}$$

A soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

Pág. 26

38.

Para $n = 1$ obtém-se uma proposição verdadeira, pois $4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$ e 3 é múltiplo de 3.

Hipótese de indução: $4^n - 1$ é múltiplo de 3

Tese de indução: $4^{n+1} - 1$ é múltiplo de 3

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } 4^{n+1} - 1 &= 4^n \times 4 - 1 = \\ &= 4^n \times (3 + 1) - 1 = \underbrace{4^n \times 3}_{\text{múltiplo de 3}} + \underbrace{4^n - 1}_{\text{múltiplo de 3}} \end{aligned}$$

A soma de dois números múltiplos de 3 é um número múltiplo de 3.

39.

a)

Para $n = 1$ obtém-se uma proposição verdadeira, pois $2^1 \times 3^1 = 6$ e $6 = 6^1$.

Hipótese de indução: $2^n \times 3^n = 6^n$

Tese de indução: $2^{n+1} \times 3^{n+1} = 6^{n+1}$

Demonstração:

$$2^{n+1} \times 3^{n+1} =$$

$$= 2^n \times 2 \times 3^n \times 3 =$$

$$= 2^n \times 3^n \times 2 \times 3 =$$

$$= (2^n \times 3^n) \times 6 =$$

$$= 6^n \times 6 = 6^{n+1}$$

Por hipótese
de indução

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer n natural, $2^n \times 3^n = 6^n$.

b)

Para $n = 1$, vem: $a^1 \times b^1 = (a \times b)^1$, que é equivalente a $a \times b = a \times b$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Tese de indução: $a^{n+1} \times b^{n+1} = (a \times b)^{n+1}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^{n+1} \times b^{n+1} &= a^n \times a \times b^n \times b = \\ &= (a^n \times b^n) \times (a \times b) = (a \times b)^n \times (a \times b) = \\ &= (a \times b)^{n+1} \end{aligned}$$

Pág. 27

40.

Para $n = 1$, vem: $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1^2 + 1}{2}$, que é equivalente a $1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}$

Tese de indução: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \end{aligned}$$

41.

Para $n = 1$, vem: $\sum_{k=0}^2 (3k + 1) = 6 + 5 + 1$, que é equivalente a $1 + 4 + 7 = 12$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $\sum_{k=0}^{2n} (3k + 1) = 6n^2 + 5n + 1$

Tese de indução:

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} (3k + 1) = 6(n+1)^2 + 5(n+1) + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{Demonstração: } \sum_{k=0}^{2(n+1)} (3k+1) &= \sum_{k=0}^{2n+2} (3k+1) = \\
&= \sum_{k=0}^{2n} (3k+1) + 3(2n+1) + 1 + 3(2n+2) + 1 = \\
&= 6n^2 + 5n + 1 + 6n + 3 + 1 + 6n + 6 + 1 = \\
&= 6n^2 + 12n + 6 + 5n + 5 + 1 = \\
&= 6(n^2 + 2n + 1) + 5(n+1) + 1 = \\
&= 6(n+1)^2 + 5(n+1) + 1
\end{aligned}$$

Pág. 28

42.

Para $n = 3$, vem: $3^2 > 2 \times 3 + 1$, que é equivalente a $9 > 7$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $n^2 > 2n + 1$

Tese de indução: $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$

$$\begin{aligned}
\text{Demonstração: } n^2 > 2n + 1 &\Rightarrow \\
\Rightarrow n^2 + 2n + 1 > 2n + 1 + 2n + 1 &\Rightarrow \\
\Rightarrow (n+1)^2 > 2n + 2 + 2n &\Rightarrow \\
\Rightarrow (n+1)^2 > 2(n+1) + 2n &\Rightarrow \\
\Rightarrow (n+1)^2 > 2(n+1) + 1
\end{aligned}$$

Pág. 29

43.

$$u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11$$

$$u_3 = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 11 + 3 = 25$$

$$u_4 = 2 \times u_3 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53$$

Pág. 30

44.

a)

$$u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times 2 = 4$$

$$u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times 4 = 8$$

$$u_4 = 2 \times u_3 = 2 \times 8 = 16$$

b) $u_n = 2^n$

c)

Para $n = 1$, vem: $u_1 = 2^1$, que é uma proposição verdadeira, pois $u_1 = 2$.

Provemos agora a hereditariedade.

Hipótese de indução: $u_n = 2^n$

Tese de indução: $u_{n+1} = 2^{n+1}$

Demonstração:

$$u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Por hipótese de indução

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer n natural, $u_n = 2^n$.

Pág. 31

45.

Para $n = 1$, vem: $u_1 > 3$, que é equivalente a $4 > 3$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $u_n > 3$

Tese de indução: $u_{n+1} > 3$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } u_n > 3 &\Rightarrow u_n - 3 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u_n - 3)^2 > 0 \Rightarrow u_n^2 - 6u_n + 9 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_n^2 + 9 > 6u_n \Rightarrow \frac{u_n^2 + 9}{2u_n} > \frac{6u_n}{2u_n} \Rightarrow u_{n+1} > 3 \end{aligned}$$

46. Tem-se: $u_9 = \frac{1}{u_8+1} = \frac{1}{2}$, pelo que $u_{10} = \frac{1}{u_9+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ e, então,

$$u_{11} = \frac{1}{u_{10}+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}.$$

Pág. 33

47. $u_2 = u_1 + 4 = 3 + 4 = 7$; $u_3 = u_2 + 4 = 7 + 4 = 11$

48. Tem-se $u_6 = u_5 + r \Leftrightarrow 20 = 23 + r \Leftrightarrow r = -3$, pelo que $u_5 = u_4 + r \Leftrightarrow 23 = u_4 - 3 \Leftrightarrow u_4 = 26$.

49. Tem-se:

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1$; portanto (u_n) não é uma progressão aritmética.

$w_{n+1} - w_n = \frac{3-2(n+1)}{5} - \frac{3-2n}{5} = \frac{3-2n-2-3+2n}{5} = -\frac{2}{5}$; portanto (w_n) é uma progressão aritmética.

Pág. 34

50.

a) $r = a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3n+3-1-3n+1 = 3$

b) $r = b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n+1-n}{2} = \frac{1}{2}$

c) $r = c_{n+1} - c_n = 2 - (n+1) - (2-n) = 2-n-1-2+n = -1$

d) $r = w_{n+1} - w_n = \frac{1+6(n+1)}{3} - \frac{1+6n}{3} = \frac{1+6n+6-1-6n}{3} = \frac{6}{3} = 2$

51. Designemos por α a menor das três amplitudes. Então as outras amplitudes são $\alpha + \frac{\pi}{12}$ e $\alpha + \frac{\pi}{6}$

Tem-se: $\alpha + \left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \pi \Leftrightarrow 3\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

As três amplitudes são $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

Pág. 35

52.

Para $n=1$, vem: $u_1 = u_1 + (1-1)r$, que é equivalente a $u_1 = u_1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Tese de indução: $u_{n+1} = u_1 + nr$

Demonstração: $u_{n+1} = u_n + r =$
 $= u_1 + (n-1)r + r = u_1 + nr - r + r = u_1 + nr$

53.

a) Como $u_n = u_1 + (n-1)r$, vem $u_n = 3 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n - 1$.

b) Tem-se $u_8 = u_1 + (8-1)r \Leftrightarrow -9 = 5 + 7r \Leftrightarrow r = -2$, pelo que
 $u_n = 5 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow u_n = 5 - 2n + 2 \Leftrightarrow u_n = 7 - 2n$.

Pág. 36

54. Tem-se $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)r \Leftrightarrow 26 = -4 + 10r \Leftrightarrow r = 3$, pelo que
 $u_n = u_{10} + (n - 10) \times 3 \Leftrightarrow u_n = -4 + 3n - 30 \Leftrightarrow u_n = 3n - 34$.

55. Tem-se $u_9 = u_5 + (9 - 5)r \Leftrightarrow 5 = 3 + 4r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$, pelo que
 $u_{43} = u_9 + (43 - 9) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{43} = 5 + \frac{34}{2} \Leftrightarrow u_{43} = 22$.

56. Designemos a progressão por (u_n) .

Uma condição que traduz o problema é $\begin{cases} u_1 + u_2 = 12 \\ u_5 = 3 \times u_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Tem-se: } \begin{cases} u_1 + u_2 = 12 \\ u_5 = 3 \times u_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + r = 12 \\ u_1 + 4r = 3 \times (u_1 + r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + r = 12 \\ u_1 + 4r = 3u_1 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + r = 12 \\ r = 2u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 = 12 \\ r = 2u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ r = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, como $u_n = u_1 + (n - 1)r$, vem $u_n = 3 + (n - 1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = 3 + 6n - 6 \Leftrightarrow u_n = 6n - 3$.

Pág. 38

57.

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2} \times (n+1) - u_{n+1} = \\ &= \frac{u_1 + u_n + r}{2} \times (n+1) - (u_n + r) = \\ &= \left(\frac{u_1 + u_n}{2} + \frac{r}{2} \right) \times (n+1) - (u_n + r) = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + \frac{u_1 + u_n}{2} + \frac{r}{2} \times n + \frac{r}{2} - \frac{2(u_n + r)}{2} = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + \frac{u_1 + u_n + rn + r - 2u_n - 2r}{2} = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + \frac{u_1 - u_n + rn - r}{2} = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + \frac{u_1 + r(n-1) - u_n}{2} = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + \frac{u_n - u_n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + 0 = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \end{aligned}$$

58.

Para $n = 1$, vem: $\sum_{k=1}^1 u_k = \frac{u_1 + u_1}{2} \times 1$, que é equivalente a $u_1 = u_1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Tese de indução: $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2} \times (n+1)$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } \sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1} = \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n + u_{n+1} = \frac{(u_1 + u_n) \times n + 2u_{n+1}}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_n \times n + 2u_{n+1}}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + (u_{n+1} - r) \times n + 2u_{n+1}}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_{n+1} \times n - r \times n + u_{n+1} + u_{n+1}}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_{n+1} \times n + u_{n+1} + u_{n+1} - r \times n}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_{n+1} \times (n+1) + u_1 + r \times n - r \times n}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_{n+1} \times (n+1) + u_1}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times n + u_1 + u_{n+1} \times (n+1)}{2} = \\ &= \frac{u_1 \times (n+1) + u_{n+1} \times (n+1)}{2} = \\ &= \frac{(u_1 + u_{n+1}) \times (n+1)}{2} = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2} \times (n+1) \end{aligned}$$

Pág. 39

$$59. S_{15} = \frac{u_1 + u_{15}}{2} \times 15 = \frac{(6 \times 1 + 4) + (6 \times 15 + 4)}{2} \times 15 = \frac{10 + 94}{2} \times 15 = 52 \times 15 = 780$$

60. Tem-se $u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow 15 = u_1 + 8 \Leftrightarrow u_1 = 7$, pelo que $u_{30} = u_1 + 29r = 7 + 29 \times 4 = 123$.

$$\text{Então, } S_{30} = \frac{u_1 + u_{30}}{2} \times 30 = \frac{7 + 123}{2} \times 30 = 1950.$$

61. Designemos a progressão por (u_n) .

Uma condição que traduz o problema é $\begin{cases} u_5 = 17 \\ S_{20} = 670 \end{cases}$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_5 = 17 \\ S_{20} = 670 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 17 \\ \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 670 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 17 \\ u_1 + u_{20} = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 17 \\ u_1 + u_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 17 \\ 2u_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 - 4r \\ 2(17 - 4r) + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 - 4r \\ 34 - 8r + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 - 4r \\ 11r = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 - 4r \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ r = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, como $u_n = u_1 + (n - 1)r$, vem $u_n = 5 + (n - 1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = 5 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n + 2$.

62. Designemos a progressão por (u_n) .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_3 = 11 \\ u_9 = 23 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = 11 \\ u_1 + 8r = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 - 2r \\ 11 - 2r + 8r = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 - 2r \\ 6r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 - 2r \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ r = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} S_n = 2800 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 2800 \Leftrightarrow \frac{7 + 7 + (n-1) \times 2}{2} \times n = 2800 \Leftrightarrow \frac{14 + 2n - 2}{2} \times n = 2800 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (6 + n) \times n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 2800 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 11200}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-6 \pm 106}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = -56 \vee n = 50; \text{ como } -56 \notin \mathbb{N}, n = 50 \end{aligned}$$

63. Tem-se:

$$u_{20} = u_8 + (20 - 8) \times r \Leftrightarrow 432 = u_8 + 12 \times 5 \Leftrightarrow u_8 = 372 \quad \text{e}$$

$$u_{35} = u_{20} + (35 - 20) \times r \Leftrightarrow u_{35} = 432 + 15 \times 5 \Leftrightarrow u_{35} = 507$$

Então,

$$\sum_{k=8}^{35} u_k = \frac{u_8 + u_{35}}{2} \times (35 - 8 + 1) = \frac{372 + 507}{2} \times 28 = 12\,306$$

Pág. 40

64. A sucessão (u_n) dos múltiplos de 6 é a progressão aritmética cujo termo geral é $6n$.

Tem-se:

$$6n = 48 \Leftrightarrow n = 8; \text{ portanto } u_8 = 48.$$

$$6n = 360 \Leftrightarrow n = 60; \text{ portanto } u_{60} = 360.$$

Então,

$$\sum_{n=8}^{60} 6n = \frac{48 + 360}{2} \times (60 - 8 + 1) = \frac{408}{2} \times 53 = 10\,812$$

65. $3k - 8$ é uma expressão geral de uma progressão aritmética. Portanto,

$$\sum_{k=7}^{106} (3k - 8) = \frac{(3 \times 7 - 8) + (3 \times 106 - 8)}{2} \times (106 - 7 + 1) = \frac{13 + 310}{2} \times 100 = 16\,150$$

66. Como 25 é ímpar, $S_{25} = (\text{termo mediano}) \times 25$.

Ora, o termo mediano da sequência dos 25 primeiros termos de (u_n) é u_{13}

Então, $1000 = u_{13} \times 25 \Leftrightarrow u_{13} = 40$.

Pág. 42

67. Designemos a progressão por (u_n) . Tem-se:

$$u_2 = u_1 \times r = 3 \times 5 = 15 \quad \text{e} \quad u_3 = u_2 \times r = 15 \times 5 = 75$$

68. Designemos a progressão por (u_n) .

Tem-se $u_4 = u_3 \times r \Leftrightarrow -6 = 12 \times r \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$, pelo que, como $u_5 = u_4 \times r$, se tem

$$u_5 = -6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3.$$

69. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7}{4^{n+1}}}{\frac{7}{4^n}} = \frac{7}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{7} = \frac{1}{4}$; portanto (u_n) é uma progressão geométrica (de razão $1/4$).

70. Tendo em conta que a sucessão de termo geral $u_n = a b^{kn+p}$, com a, b, k e p números reais, é uma progressão geométrica de razão b^k , tem-se...

a) ... (a_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

b) ... (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2; nota que $b_n = \frac{1}{5} \times 2^{n+3}$.

c) ... (c_n) é uma progressão geométrica de razão -2 .

d) ... (d) é uma progressão geométrica de razão 2; nota que $d_n = -1 \times 2^n$.

e) ... (e_n) é uma progressão geométrica de razão 2^{-3} , ou seja, $\frac{1}{8}$; nota que $e_n = \frac{1}{7} \times 2^{-3n+4}$.

f) ... (f_n) é uma progressão geométrica de razão 7^{-2} , ou seja, $\frac{1}{49}$; nota que $f_n = 6 \times 7^{-2n-4}$.

Pág. 43

71. Se $a = 0$ ou $b = 0$, tem-se $w_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que, neste caso (w_n) é uma progressão geométrica.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem-se:

Seja r a razão de (u_n) .

$$\begin{aligned}\text{Vem: } \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{ab^{c+d \cdot u_{n+1}}}{ab^{c+d \cdot u_n}} = \frac{b^{c+d \cdot (u_n+r)}}{b^{c+d \cdot u_n}} = \\ &= b^{c+d \cdot u_n + d \cdot r - c - d \cdot u_n} = b^{dr}\end{aligned}$$

Portanto, (w_n) é uma progressão geométrica de razão b^{dr} .

72.

Para $n = 1$, vem: $u_1 = u_1 \times r^{1-1}$, que é equivalente a $u_1 = u_1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Tese de indução: $u_{n+1} = u_1 \times r^n$

Demonstração:

$$u_{n+1} = u_n \times r = u_1 \times r^{n-1} \times r = u_1 \times r^n$$

73. Designemos cada progressão por (u_n) . Tem-se:

a) $u_{10} = u_1 \times r^{10-1} = -2 \times (-3)^9 = 39\,366$

b) Tem-se $u_2 = u_1 \times r \Leftrightarrow 3 = 6 \times r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$, pelo que $u_{10} = u_1 \times r^9 = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{6}{2^9} = \frac{3}{2^8} = \frac{3}{256}$

c) Tem-se $u_8 = u_1 \times r^7 \Leftrightarrow 128 = r^7 \Leftrightarrow r = 2$, pelo que $u_{10} = u_1 \times r^9 = 1 \times (2)^9 = 2^9 = 512$

Pág. 44

74. Designemos a progressão por (u_n) .

$$\text{Tem-se } u_9 = u_6 \times r^{9-6} \Leftrightarrow 24 = -3 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = -8 \Leftrightarrow r = -2.$$

$$\text{Portanto, tem-se } u_n = u_6 \times r^{n-6} \Leftrightarrow u_n = -3 \times (-2)^{n-6}.$$

75. Como os termos da progressão são alternadamente positivos e negativos, sabemos que a razão é negativa.

$$\text{Tem-se } u_{14} = u_{10} \times r^{14-10} \Leftrightarrow 81 = 1 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 81 \Leftrightarrow r = -3 \vee r = 3, \text{ pelo que, como a razão é negativa, } r = -3.$$

$$\text{Então, tem-se: } u_{10} = u_7 \times r^{10-7} \Leftrightarrow 1 = u_7 \times (-3)^3 \Leftrightarrow u_7 = -\frac{1}{27}$$

76.

Para $n = 1$, vem: $S_1 = u_1 \times \frac{1-r^1}{1-r}$, que é equivalente a $S_1 = u_1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Tese de indução: $S_{n+1} = u_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} + u_1 \times r^n = \\ &= u_1 \times \left(\frac{1-r^n}{1-r} + r^n \right) = \\ &= u_1 \times \left(\frac{1-r^n}{1-r} + \frac{(1-r)r^n}{1-r} \right) = \\ &= u_1 \times \frac{1-r^n + r^n - r^{n+1}}{1-r} = \\ &= u_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

77. Tem-se $u_1 = 3 \times 2 = 6$ e $r = 2$.

Então, $S_{12} = u_1 \times \frac{1-r^{12}}{1-r} = 6 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} = 6 \times (2^{12} - 1) = 24\,570$.

78. Designemos a progressão por (u_n) .

Tem-se:

$$u_4 = u_3 \times r \Leftrightarrow 54 = 18 \times r \Leftrightarrow r = 3$$

$$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow 18 = u_1 \times 3^2 \Leftrightarrow u_1 = 2$$

$$\text{Então, } S_{10} = u_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 2 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 3^{10} - 1 = 59\,048.$$

79. Seja i o número de filas de telhas do telhado e seja u_n o número de telhas da fila de ordem n do telhado. Os termos u_n , $1 \leq n \leq i$, estão em progressão aritmética de razão 2 e $u_1 = 4$, pelo que $u_n = 4 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 2$.

Determinemos o número de filas.

$$2i + 2 = 38 \Leftrightarrow i = 18; \text{ portanto o telhado tem 18 filas.}$$

O total de telhas é, então dado por S_{18} .

$$S_{18} = \frac{u_1 + u_{18}}{2} \times 18 = \frac{4 + 38}{2} \times 18 = 378$$

O telhado tem 378 telhas.

80. Tem-se $u_8 \neq 0$ e $u_{12} \neq 0$, pelo que, como $u_{12} = u_8 \times r^4$ e $u_{12} = u_8 \times \frac{1}{9}$, tem-se $r^4 = \frac{1}{9}$, ou seja, $r = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Como a sucessão é não monótona, tem-se $r = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Então, vem:

$$u_7 = u_4 \times r^{7-4} \Leftrightarrow \sqrt{3} = u_4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{3} = u_4 \times \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow u_4 = \sqrt{3} \times (-3\sqrt{3}) \Leftrightarrow u_4 = -9$$

Pág. 47

81. Designemos a progressão por (u_n) e por r a razão da progressão.

Como $r = 2$, $u_7 = x + 1$ e $u_8 = x^2 - 1$, tem-se $x^2 - 1 = (x + 1) \times 2$.

$$x^2 - 1 = (x + 1) \times 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

Como $x > 0$, concluímos que $x = 3$, pelo que $u_7 = 4$.

$$\text{Tem-se } u_7 = u_1 \times r^6 \Leftrightarrow 4 = u_1 \times 2^6 \Leftrightarrow u_1 = \frac{2^2}{2^6} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2^4} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{16}$$

Pág. 48

82. Seja r_n , $1 \leq n \leq 10$, o comprimento do raio da semicircunferência de ordem n da espiral.

Os termos r_n estão em progressão geométrica de razão $\frac{4}{5}$ e $r_1 = 5$, pelo que $r_n = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Então, o comprimento, c_n , da semicircunferência de ordem n da espiral é dado por πr_n , pelo que se tem $c_n = 5\pi \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Os termos c_n , $1 \leq n \leq 10$, estão em progressão geométrica de razão $\frac{4}{5}$ e $c_1 = 5\pi$.

O comprimento da espiral é igual à soma dos comprimentos das dez semicircunferências, ou seja,

$$5\pi \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{1 - \frac{4}{5}}.$$

$$\text{Tem-se: } 5\pi \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{1 - \frac{4}{5}} = 5\pi \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{\frac{1}{5}} = 25\pi \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right) \approx 70 \text{ unidades de comprimento.}$$

Pág. 49

83. Em 2010 a vila tinha 5000 habitantes.

Em 2011, ou seja, ao fim de um ano, a população era igual a $5000 - 0,12 \times 5000$, ou seja, $(1 - 0,12) \times 5000 = 0,88 \times 5000 = 4400$.

Em 2012, ou seja, ao fim de dois anos, a população era igual a $4400 - 0,12 \times 4400$, ou seja, $(1 - 0,12) \times 4400 = 0,88 \times 4400 = 3872$.

Em cada ano, a população é multiplicada por 0,88.

Estamos, portanto, perante uma progressão geométrica de razão 0,88.

Seja u_n o número de habitantes ao fim de n anos. Tem-se: $u_n = 5000 \times 0,88^n$

Portanto, em 2025, ou seja, ao fim de quinze anos, o número de habitantes será igual a u_{15}

$$u_{15} = 5000 \times 0,88^{15} \approx 735.$$

Em 2025, a vila terá 735 habitantes.

84. Ao fim de um ano, o Tomás tem $500 + 0,035 \times 500$, ou seja, $1,035 \times 500 = 517,5$ euros
 Ao fim de dois anos, o Tomás tem $517,5 + 0,035 \times 517,5$, ou seja, $1,035 \times 517,5 = 535,6125$ euros
 Em cada ano, o dinheiro do Tomás, em euros, é multiplicado por 1,035.
 Estamos, portanto, perante uma progressão geométrica de razão 1,035.
 Seja u_n o valor, em euros, do dinheiro do Tomás ao fim de n anos. Tem-se: $u_n = 500 \times 1,035^n$
 Ao fim de seis anos, o dinheiro vale $u_6 = 500 \times 1,035^6$, ou seja, aproximadamente 614,63 euros.

Pág. 53

85.

Para $n = 1$, obtém-se uma proposição verdadeira, pois $3 \times 1^2 + 1 = 4$ e 4 é um número par.

Hipótese de indução: $3n^2 + n$ é um número par

Tese de indução: $3(n+1)^2 + n + 1$ é um número par

Demonstração:

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 + n + 1 &= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 = \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 = \\ &= \underbrace{3n^2 + n}_{\text{par}} + \underbrace{6n + 4}_{\text{par}} \end{aligned}$$

A soma de dois números pares é um número par.

86.

Para $n = 1$, vem: $\sum_{j=1}^1 \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1+1}$, que é equivalente a $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

Tese de indução: $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

87.

Para $n = 1$, vem: $\sum_{j=1}^1 j(j+1) = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$, que é equivalente a $2 = 2$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução:

$$\sum_{j=1}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Tese de indução:

$$\sum_{j=1}^{n+1} j(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j(j+1) &= \sum_{j=1}^n j(j+1) + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

88.

Para $n = 5$, vem: $2^5 > 5^2$, que é equivalente a $32 > 25$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $2^n > n^2$

Tese de indução: $2^{n+1} > (n+1)^2$

Demonstração:

$$\begin{aligned} 2^n > n^2 &\Rightarrow 2^n \times 2 > 2n^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{n+1} > n^2 + n^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{n+1} > n^2 + 2n + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2 \end{aligned}$$

89.

Para $n = 1$, vem: $u_1 = 2^1 - 1$, que é equivalente a $u_1 = 1$, que é uma proposição verdadeira. Provemos agora a hereditariedade.

Hipótese de indução: $u_n = 2^n - 1$

Tese de indução: $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Demonstração:

Por hipótese
de indução



$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

De acordo com o princípio de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer n natural, $u_n = 2^n - 1$.

90.

Para $n = 1$, vem: $a_1 > 1$, que é equivalente a $2 > 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $a_n > 1$

Tese de indução: $a_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > \quad (\text{Nota 1})$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \quad (\text{Nota 2})$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Nota 1: Como, por hipótese de indução, $a_n > 1$, tem-se $\frac{a_n}{2} > \frac{1}{2}$

Nota 2: Como (a_n) é decrescente e $a_1 = 2$, tem-se $a_n \leq 2$; como, por hipótese de indução, $a_n > 1$, tem-se $a_n > 0$, pelo que $a_n \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2}$.

91.

Pretende-se provar que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} > b_n$.

Para $n = 1$, vem: $b_2 > b_1$, que é equivalente a $\frac{7}{3} > \frac{3}{2}$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $b_{n+1} > b_n$

Tese de indução: $b_{n+2} > b_{n+1}$

Demonstração:

Como, do enunciado, se sabe que os termos da sucessão são todos positivos, vem:

$$b_{n+1} > b_n \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} < \frac{1}{b_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{b_{n+1}} > -\frac{1}{b_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{1}{b_{n+1}} > 3 - \frac{1}{b_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{n+2} > b_{n+1}$$

92.

$$\text{a) } w_2 = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}; \quad w_3 = \sqrt{w_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$$

b)

Pretende-se provar que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} > w_n$.

Para $n = 1$, vem: $w_2 > w_1$, que é equivalente a $\sqrt{2} > 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $w_{n+1} > w_n$

Tese de indução: $w_{n+2} > w_{n+1}$

Demonstração:

$$w_{n+1} > w_n \Rightarrow w_{n+1} + 1 > w_n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_{n+1} + 1} > \sqrt{w_n + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{n+2} > w_{n+1}$$

c)

Para $n = 1$, vem: $w_1 < 2$, que é equivalente a $1 < 2$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $w_n < 2$

Tese de indução: $w_{n+1} < 2$

Demonstração:

$$w_n < 2 \Rightarrow w_n + 1 < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_n + 1} < \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{n+1} < 2$$

d)

Como a sucessão é crescente, o primeiro termo é minorante da sucessão. Como $w_n < 2$, 2 é majorante da sucessão. Sendo majorada e minorada, a sucessão é limitada.

$$93. u_6 = \frac{12}{\sqrt{6-5}} = 12; \quad u_9 = \frac{12}{\sqrt{9-5}} = \frac{12}{2} = 6$$

94.

• $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{2(n+1)}{3} - \left(1 - \frac{2n}{3}\right) = 1 - \frac{2n+2}{3} - 1 + \frac{2n}{3} = \frac{-2n-2+2n}{3} = -\frac{2}{3}$; portanto, (u_n) é uma progressão aritmética.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{3(n+1)+2}{n+1} - \frac{3n+2}{n} = \frac{3n+5}{n+1} - \frac{3n+2}{n} = \frac{(3n+5)n - (3n+2)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3n^2+5n-3n^2-3n-2n-2}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}$; portanto (v_n) não é uma progressão aritmética.

• $w_{n+1} - w_n = (n+1)(n+3) - n(n+2) = n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 2n = 2n + 3$; portanto, (w_n) não é uma progressão aritmética.

95.

a) $u_1 = 3$; $u_2 = 3 + 4 = 7$; $u_3 = 7 + 4 = 11$; $u_4 = 11 + 4 = 15$; $u_5 = 15 + 4 = 19$ e $u_6 = 19 + 4 = 23$

b) $u_1 = 7$; $u_2 = 7 - 2 = 5$; $u_3 = 5 - 2 = 3$; $u_4 = 3 - 2 = 1$; $u_5 = 1 - 2 = -1$ e $u_6 = -1 - 2 = -3$

c) $u_3 = 2$; $u_2 = 2 - 6 = -4$; $u_1 = -4 - 6 = -10$; $u_4 = 2 + 6 = 8$; $u_5 = 8 + 6 = 14$ e $u_6 = 14 + 6 = 20$

96. Para determinarmos a razão basta calcular a diferença entre dois quaisquer termos consecutivos.

a) $r = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$

b) $r = u_2 - u_1 = -6 - (-10) = -6 + 10 = 4$

c) $r = u_2 - u_1 = 2 - 12 = -10$

d) $r = u_2 - u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

97.

a) $r = u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - (2 - 3n) = 2 - 3n - 3 - 2 + 3n = -3$

b) $r = w_{n+1} - w_n = \frac{2}{3}(n+1) - 1 - \left(\frac{2}{3}n - 1\right) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3}n + 1 = \frac{2}{3}$

c) Tem-se $a_n = \frac{n^2-2n}{n} = \frac{n^2}{n} - \frac{2n}{n} = n - 2$. Então, vem:

$r = a_{n+1} - a_n = (n+1) - 2 - (n-2) = n+1 - 2 - n + 2 = 1$

d) Tem-se, para todo o número natural n , $b_{n+1} = b_n - \pi \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = -\pi$, pelo que a razão da progressão é $-\pi$.

98.

a) $u_{100} - u_{99}$ é a diferença entre um certo número ímpar (o centésimo) e o número ímpar imediatamente anterior. Ora a diferença entre dois quaisquer números nestas condições é 2.

b) $u_{526} - u_{524}$ é a diferença entre um dado número ímpar (o 526.º) e o número ímpar anterior ao imediatamente anterior. Ora a diferença entre dois quaisquer números nestas condições é 4.

c) Analogamente à alínea anterior se conclui que a diferença $u_{n+3} - u_n$ é 6.

Outro processo:

O termo geral da sucessão (u_n) é $2n - 1$.

a) $u_{100} - u_{99} = 2 \times 100 - 1 - (2 \times 99 - 1) = 199 - 197 = 2$

b) $u_{526} - u_{524} = 2 \times 526 - 1 - (2 \times 524 - 1) = 1051 - 1047 = 4$

c) $u_{n+3} - u_n = 2(n+3) - 1 - (2n - 1) = 2n + 6 - 1 - 2n + 1 = 6$

99.

a) Tem-se $u_8 = u_7 + r \Leftrightarrow 1 = 4 + r \Leftrightarrow r = -3$.

b) Tem-se $u_6 = u_4 + 2r \Leftrightarrow 2 = 1 + 2r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$.

c) Tem-se $u_{110} = u_{100} + (110 - 100)r \Leftrightarrow 12 = 10 + 10r \Leftrightarrow r = 0,2$.

d) Tem-se $u_{n+1} - u_{n-1} = 2r$, pelo que $2r = 3$, donde $r = \frac{3}{2}$.

100.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+1}{2} - \frac{3n+1}{2} = \frac{3n+3+1-3n-1}{2} = \frac{3}{2}$; portanto (u_n) é uma progressão aritmética.

b) (u_n) é uma sucessão crescente, pois $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(u_n) não é uma sucessão limitada pois nenhuma progressão aritmética crescente ou decrescente é limitada; sendo crescente não é majorada e sendo decrescente não é minorada.

c) $u_n = 101 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2} = 101 \Leftrightarrow 3n + 1 = 202 \Leftrightarrow 3n = 201 \Leftrightarrow n = 67$; portanto $u_{67} = 101$

d) $\begin{cases} u_n > 1000 \\ u_n < 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3n+1}{2} > 1000 \\ \frac{3n+1}{2} < 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n > 1999 \\ 3n < 2399 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 666, (3) \\ n < 799, (6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 667 \\ n \leq 799 \end{cases}$

Então, há $799 - 667 + 1$, ou seja, 133 termos compreendidos entre 1000 e 1200

101. $u_{30} = u_1 + (30 - 1) \times r = 20 + 29 \times 5 = 165$

102. A sucessão (u_n) cujos termos são os múltiplos de 3 na sua ordem natural, é a sucessão cujo termo geral é $u_n = 3n$. Tem-se:

$$\begin{cases} 3n > 2500 \\ 3n < 2800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 833, (3) \\ n < 933, (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 834 \\ n \leq 933 \end{cases}$$

Então, há $933 - 834 + 1$, ou seja, 100 múltiplos de 3 compreendidos entre 2500 e 2800.

103. Designemos cada progressão por (u_n) .

a) (u_n) é decrescente.

Tem-se $r = u_2 - u_1 = -1 - 10 = -11$, pelo que $u_n = 10 + (n - 1) \times (-11)$; portanto, $u_n = -11n + 21$.

$$u_{10} = -11 \times 10 + 21 = -110 + 21 = -89$$

b) (u_n) é crescente.

Tem-se $r = u_2 - u_1 = -0,6 - (-1) = 0,4$, pelo que $u_n = -1 + (n - 1) \times 0,4$; portanto, $u_n = 0,4n - 1,4$.

$$u_{10} = 0,4 \times 10 - 1,4 = 4 - 1,4 = 2,6$$

c) (u_n) é crescente.

Tem-se $r = u_2 - u_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, pelo que $u_n = \frac{1}{6} + (n - 1) \times \frac{1}{2}$; portanto, $u_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{3}$

$$u_{10} = \frac{1}{2} \times 10 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3} .$$

d) (u_n) é crescente.

Tem-se $u_1 = \sqrt{3}$ e $u_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e, portanto, $r = \sqrt{3}$.

Então, $u_n = \sqrt{3} + (n - 1) \times \sqrt{3}$; portanto, $u_n = \sqrt{3}n$.

$$u_{10} = 10\sqrt{3}$$

104. Cada uma das sucessões é progressão aritmética. Designemos cada progressão por (u_n) .

a) Tem-se $u_1 = 24$ e $r = 2$, pelo que $u_n = 24 + (n - 1) \times 2$; portanto, $u_n = 2n + 22$.

b) Tem-se $u_1 = 35$ e $r = 2$, pelo que $u_n = 35 + (n - 1) \times 2$; portanto, $u_n = 2n + 33$.

c) Tem-se $u_1 = 12$ e $r = 6$, pelo que $u_n = 12 + (n - 1) \times 6$; portanto, $u_n = 6n + 6$.

105. Designemos a progressão por (u_n) .

Tem-se $u_1 = -1$ e $r = -2$ pelo que $u_{100} = -1 + (100 - 1) \times (-2) = -1 + 99 \times (-2) = -199$

106.

a) Tem-se $u_5 = u_3 + (5 - 3)r \Leftrightarrow 22 = 12 + 2r \Leftrightarrow r = 5$, pelo que, como $u_{10} = u_5 + 5r$, se tem $u_{10} = 22 + 5 \times 5 = 47$.

b) Tem-se $u_7 = u_4 + (7 - 4)r \Leftrightarrow 10 = 1 + 3r \Leftrightarrow r = 3$, pelo que, como $u_{10} = u_7 + 3r$, se tem $u_{10} = 10 + 3 \times 3 = 19$.

c) Uma condição que traduz o problema é $\begin{cases} r = 5 \\ u_2 = 3u_1 \end{cases}$

Tem-se: $\begin{cases} r = 5 \\ u_2 = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ u_1 + 5 = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ u_1 + 5 = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ 2u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ u_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$

Então, como $u_{10} = u_1 + 9r$, tem-se $u_{10} = \frac{5}{2} + 9 \times 5 = \frac{95}{2}$.

107.

a) $u_1 + u_{13} = (u_3 - 2r) + (u_{11} + 2r) = u_3 + u_{11} = 18$

b) $u_4 + u_k = 18 \Leftrightarrow u_3 + r + u_k = u_3 + u_{11} \Leftrightarrow u_k = u_{11} - r \Leftrightarrow u_k = u_{10}$; portanto, $k = 10$.

c) $u_3 + u_{11} = 18 \Leftrightarrow (u_7 - 4r) + (u_7 + 4r) = 18 \Leftrightarrow 2u_7 = 18 \Leftrightarrow u_7 = 9$

108.

a) São 16 parcelas.

b) São $17 - 3 + 1$ parcelas, ou seja, 15 parcelas.

c) São $200 - 3 + 1$ parcelas, ou seja, 198 parcelas.

d) São $n - 5 + 1$ parcelas, ou seja, $n - 4$ parcelas.

Pág. 55

109.

a) A 20.^a parcela é u_{20} .

b) A 20.^a parcela é u_{24} (tem-se $24 - 5 + 1 = 20$).

c) A 20.^a parcela é u_{27} (tem-se $27 - 8 + 1 = 20$).

d) A 20.^a parcela é u_{p+19} (tem-se $p + 19 - p + 1 = 20$).

110.

a) Tem-se $u_1 = 5$ e $u_{25} = 3 \times 25 + 2 = 77$, pelo que $S_{25} = \frac{5+77}{2} \times 25 = 1025$.

b) O 12.º termo, a começar no quinto termo inclusive, é u_{16} (tem-se $16 - 5 + 1 = 12$).

Tem-se $u_5 = -2$ e $u_{16} = 3 - 16 = -13$, pelo que a soma referida é igual a $\frac{-2-13}{2} \times 12 = -90$.

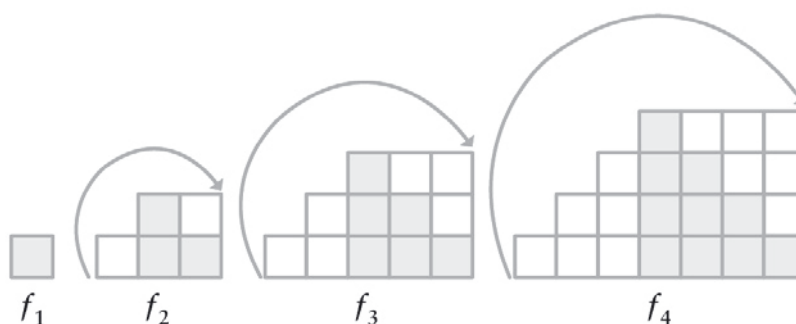
c) O termo geral da progressão dos números naturais ímpares é $2n - 1$; o vigésimo número natural ímpar é, então, 39 e tem-se $S_{20} = \frac{1+39}{2} \times 20 = 400$.

d) O termo geral da progressão dos números pares consecutivos cujo primeiro termo é 204, é $204 + (n - 1) \times 2$, ou seja, $2n + 202$.

O trigésimo termo desta sucessão é, então, 262 e tem-se $S_{30} = \frac{204+262}{2} \times 30 = 6990$.

111.

a) Tal como se pretende mostrar na ilustração abaixo, o número de quadrados da figura de ordem n é igual a n^2 , ou seja, $u_n = n^2$.



b) $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + 3$; $u_3 = 1 + 3 + 5$; $u_4 = 1 + 3 + 5 + 7$

O número de quadrados da figura de ordem n é igual à soma dos n primeiros números naturais ímpares.

O termo geral da progressão dos n primeiros números naturais ímpares é $2n - 1$.

Então, $S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \times n = n \times n = n^2$.

112. $5m + 1$, $m^2 + 1$ e $2(m - 1)$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética se e só se $m^2 + 1 - (5m + 1) = 2(m - 1) - (m^2 + 1)$.

Ora, $m^2 + 1 - (5m + 1) = 2(m - 1) - (m^2 + 1) \Leftrightarrow m^2 + 1 - 5m - 1 = 2m - 2 - m^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \Leftrightarrow m = \frac{7-5}{4} \vee m = \frac{7+5}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \vee m = 3$

113. Seja h a altura, em metros, de cada degrau, à exceção do primeiro.

Seja n o número total de degraus.

A altura, em metros, da escadaria, é dada, então por $(n - 1)h + 0,4$.

A primeira condição do problema pode ser traduzida por $\left(\frac{n}{3} - 1\right)h + 0,4 = (n - 1)h + 0,4 - 66,6$.

A segunda condição do problema pode ser traduzida por $99h + 0,4 = 89h + 0,4 + 3$.

Ora, $99h + 0,4 = 89h + 0,4 + 3 \Leftrightarrow 10h = 3 \Leftrightarrow h = 0,3$, pelo que

$0,3\left(\frac{n}{3} - 1\right) + 0,4 = 0,3(n - 1) + 0,4 - 66,6$ e, portanto, $n = 333$.

Então, a escadaria tem 333 degraus e a sua altura é $332 \times 0,3 + 0,4 = 100$ metros.

114. Seja c_n o número de quilómetros que o Tiago correu no dia de ordem n do treino.

(c_n) é uma progressão aritmética de razão 0,5.

Tem-se $c_{21} = c_2 + (21 - 2) \times 0,5 \Leftrightarrow 12,3 = c_2 + 9,5 \Leftrightarrow c_2 = 2,8$

No segundo dia do treino, o Tiago correu 2,8 quilómetros.

115. O termo geral, a_n , da progressão aritmética dos números naturais múltiplos de 4, é $4n$.

O menor número natural múltiplo de 4, maior do que 79, é 80, ou seja, a_{20} .

O maior número natural múltiplo de 4, menor do que 2005, é 2004, ou seja, a_{501} .

O número de termos compreendidos entre a_{20} , inclusive, e a_{501} , inclusive, é igual a $501 - 20 + 1$, ou seja, 482.

116.

a) $u_n = u_1 + (n - 1)r \Leftrightarrow u_n = -2 + 10(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 10n - 12$

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{-2 + 10n - 12}{2} \times n = (-7 + 5n) \times n = 5n^2 - 7n$$

b) Tem-se $u_5 = u_3 + 2r \Leftrightarrow 20 = 6 + 2r \Leftrightarrow r = 7$

Portanto, $u_n = u_3 + (n - 3)r \Leftrightarrow u_n = 6 + 7(n - 3) \Leftrightarrow u_n = 7n - 15$

Tem-se $u_1 = 7 - 15 = -8$

$$\text{Portanto, } S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{-8 + 7n - 15}{2} \times n = \frac{7n - 23}{2} \times n = \frac{7}{2}n^2 - \frac{23}{2}n$$

Pág. 56

117.

a) $u_1 = 1$

$$u_2 = 1 + 2$$

$$u_3 = 1 + 2 + 3$$

$$u_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

b) u_n é a soma dos n primeiros números naturais, ou seja, $\frac{1+n}{2} \times n$; portanto, $u_n = \frac{n^2+n}{2}$.

118. Seja c_n o número de cadeiras na fila de ordem n da plateia.

(c_n) é uma progressão aritmética de razão 2 e cujo primeiro termo é 25 ; portanto,

$$c_n = 25 + (n - 1) \times 2, \text{ ou seja, } c_n = 2n + 23.$$

Seja p o número de filas da plateia. Tem-se $S_p = 2560$.

$$\text{Ora, } S_p = 2560 \Leftrightarrow \frac{25+(2p+23)}{2} \times p = 2560 \Leftrightarrow (p+24)p = 2560 \Leftrightarrow p^2 + 24p - 2560 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = -64 \vee p = 40$$

Então, a plateia tem 40 filas.

119. Para determinarmos a razão basta calcular o quociente entre dois quaisquer termos

consecutivos. Designemos cada progressão por (u_n) .

a) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$

b) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{0,01}{0,1} = 0,1$

d) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-10}{-5} = 2$

e) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{0,3}{0,1} = 3$

f) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{1} = -2$

120.

a) $\frac{u_{100}}{u_{99}} = \frac{u_{99} \times r}{u_{99}} = r = 2$

b) $\frac{u_{20}}{u_{21}} = \frac{u_{20}}{u_{20} \times r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{u_{400}}{u_{398}} = \frac{u_{398} \times r^2}{u_{398}} = r^2 = 4$

121.

a) (u_n) é definida, por recorrência, do seguinte modo: $u_1 = -1 \wedge u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Tem-se $u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow 2 = u_1 \times (-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow u_1 = 1$, pelo que (u_n) pode ser definida, por recorrência, do seguinte modo: $u_1 = 1 \wedge u_{n+1} = -\sqrt{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

122.

a) $u_1 = 3$; $u_2 = 3 \times 4 = 12$; $u_3 = 12 \times 4 = 48$ e $u_4 = 48 \times 4 = 192$

b) $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3} \times 3 = 1$; $u_3 = 1 \times 3 = 3$ e $u_4 = 3 \times 3 = 9$

c) $u_3 = 24$; $u_2 = \frac{24}{-2} = -12$; $u_1 = \frac{-12}{-2} = 6$ e $u_4 = 24 \times (-2) = -48$

123. Designemos cada progressão por (u_n) .

a) Tem-se $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{4} = 3$ pelo que $u_n = 4 \times 3^{n-1}$ e, portanto $u_8 = 4 \times 3^7 = 8748$

b) Tem-se $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pelo que $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ou seja, $u_n = \frac{6}{2^{n-1}}$ e, portanto $u_8 = \frac{6}{2^7} = \frac{3}{64}$

c) Tem-se $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-3}{1} = -3$ pelo que $u_n = (-3)^{n-1}$ e, portanto $u_8 = (-3)^7 = -2187$

d) Tem-se $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1/10}{-1/5} = -\frac{1}{2}$ pelo que $u_n = -\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ou seja, $u_n = -\frac{1}{5 \times (-2)^{n-1}}$ e, portanto $u_8 = -\frac{1}{5 \times (-2)^7} = \frac{1}{640}$

124.

a) Tem-se $l_1 = 8 \wedge l_{n+1} = \frac{3}{4} l_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão (l_n) é uma progressão geométrica, pelo que, como se tem $l_n = l_1 \times r^{n-1}$, vem $l_n = 8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

b) Tem-se $p_{n+1} = 4 \times l_{n+1} = 4 \times \left(\frac{3}{4} l_n\right) = \frac{3}{4} \times (4 l_n) = \frac{3}{4} p_n$, pelo que a sucessão pode ser definida por recorrência do seguinte modo: $p_1 = 32 \wedge p_{n+1} = \frac{3}{4} p_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão (p_n) é uma progressão geométrica, pelo que, como se tem $p_n = p_1 \times r^{n-1}$, vem $p_n = 32 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

c) Tem-se $a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = \left(\frac{3}{4} l_n\right)^2 = \frac{9}{16} \times (l_n)^2 = \frac{9}{16} a_n$, pelo que a sucessão pode ser definida por recorrência do seguinte modo: $a_1 = 64 \wedge a_{n+1} = \frac{9}{16} a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica, pelo que, como se tem $a_n = a_1 \times r^{n-1}$, vem $a_n = 64 \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$.

125.

a) Os valores, em euros, depositados, são termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 10 e cuja razão é 1,5. O termo geral desta progressão é, por isso $10 \times 1,5^{n-1}$.

O depósito efetuado no décimo aniversário da Marta é o 11.º depósito (o 1.º foi efetuado no dia de nascimento da Marta).

Pode concluir-se, então, que, no décimo aniversário da Marta, o avô depositou $10 \times 1,5^{10}$, ou seja, 576,65 euros.

b) Aos 18 anos, o dinheiro na conta da Marta é a soma do dinheiro depositado todos os anos, ou seja: 44 316,76€

Math Deg Norm1 d/c Real		
n	an	
1	10	
2	15	
3	22.5	
4	33.75	
		1
FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT		
Math Deg Norm1 d/c Real		
n	an	
9	256.28	
10	384.43	
11	576.65	
12	864.97	
		12
FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT		
Math Deg Norm1 d/c Real		
n	an	
16	4378.9	
17	6568.4	
18	9852.6	
19	14778	
		19
FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT		

Math Deg Norm1 d/c Real		
n	an	
5	50.625	
6	75.937	
7	113.9	
8	170.85	
		8
FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT		
Math Deg Norm1 d/c Real		
n	an	
13	1297.4	
14	1946.1	
15	2919.2	
16	4378.9	
		16
FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT		

126.

a) $S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = 5 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 5 \times (2^8 - 1) = 1275$

b) Tem-se $u_2 = u_1 \times r \Leftrightarrow 12 = u_1 \times (-2) \Leftrightarrow u_1 = -6$ e, então,
 $S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = -6 \times \frac{1-(-2)^8}{1-(-2)} = -2 \times (1 - 2^8) = 510$

c) Tem-se $u_2 = u_1 \times r \Leftrightarrow 8 = u_1 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_1 = 16$ e, então,
 $S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = 16 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}} = 32 \times \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) = 32 - \frac{32}{2^8} = 32 - \frac{1}{8} = \frac{255}{8}$

d) Tem-se $u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow -18 = u_1 \times 3^2 \Leftrightarrow u_1 = -2$ e, então,
 $S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = -2 \times \frac{1-3^8}{1-3} = 1 - 3^8 = -6560$

127.

a) Designemos a sucessão por (p_n) .

Se a razão entre as áreas de dois triângulos consecutivos é igual a $\frac{4}{9}$, então a razão entre os respetivos lados (e perímetros) é $\frac{2}{3}$. Então, como o perímetro do primeiro triângulo é igual a 24×3 , ou seja, 72, tem-se $p_n = 72 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b) A altura do primeiro triângulo é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 24$, ou seja, $12\sqrt{3}$, pelo que a área deste triângulo é igual a $\frac{24 \times 12\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $144\sqrt{3}$.

Então, vem

$$S_{10} = 144\sqrt{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{10}}{1 - \frac{4}{9}} = 144\sqrt{3} \times \frac{9}{5} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right] \approx 448,813 \text{ unidades de área}$$

$$\text{c) } S_n = 144\sqrt{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = 144\sqrt{3} \times \frac{9}{5} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{1296\sqrt{3}}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

128. O número de aves em cada ano é igual a 92% do número de aves existentes no ano anterior. Então, passados n anos de 2015, existirão $30\,000 \times 0,92^n$, pelo que, em 2040, existirão $30\,000 \times 0,92^{25}$, ou seja, aproximadamente 3730 aves.

129. A intensidade da luz após atravessar um filtro é igual a 90% da intensidade da luz antes de o atravessar.

Então, a intensidade da luz após ter atravessado dez filtros é igual a $0,9^{10}$ da intensidade inicial. Tem-se $1 - 0,9^{10} \approx 0,65$ pelo que a intensidade da luz é reduzida em 65%.

130. Os raios das semicircunferências são os termos da progressão geométrica cuja razão é $\frac{1}{2}$ e cujo primeiro termo é 3.

O termo geral desta progressão é $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Então, o raio da 16.ª semicircunferência seria $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{16-1} = \frac{3}{2^{15}}$, pelo que o comprimento do 16.º arco seria $\frac{1}{2} \left(2\pi \times \frac{3}{2^{15}}\right)$, ou seja, $\frac{3\pi}{2^{15}}$.

Determinação do comprimento da espiral com dez arcos:

O comprimento da semicircunferência de ordem n é igual a $\frac{1}{2} \left[2\pi \times 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ ou seja $3\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Ora, $3\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é o termo geral de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 3π e cuja razão é $\frac{1}{2}$.

O comprimento da espiral com dez arcos é igual a S_{10} .

$$\text{Ora, } S_{10} = 3\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\pi \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] \approx 18,83.$$

131.

a) $u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$

b) $r = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{6}{3} = -2$; portanto, $u_n = 3 \times (-2)^{n-1}$.

c) $u_7 = u_4 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 6 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$; portanto, $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$.

132.

a₁) $m(2) - m(1) = -0,165 m(1) \Leftrightarrow m(2) = m(1) - 0,165 m(1) \Leftrightarrow m(2) = 0,835 m(1)$

a₂) $m(3) - m(2) = -0,165 m(2) \Leftrightarrow m(3) = 0,835 m(2) \Leftrightarrow m(3) = 0,835 \times 0,835 m(1) \Leftrightarrow m(3) = 0,835^2 m(1)$

a₃) $m(t) = 0,835^{t-1} m(1)$

b₁) $m(2) = 0,835 m(1)$

$m(3) = 0,835^2 m(1) \approx 0,697 m(1)$

$m(4) = 0,835^3 m(1) \approx 0,58 m(1)$

$m(5) = 0,835^4 m(1) \approx 0,486 m(1)$, pelo que a amostra atinge metade da massa que tem no fim do primeiro dia, ao longo do 5.º dia.

b₂) $m(6) = 0,835^5 m(1) \approx 0,406 m(1)$

$m(7) = 0,835^6 m(1) \approx 0,339 m(1)$

$m(8) = 0,835^7 m(1) \approx 0,283 m(1)$

$m(9) = 0,835^8 m(1) \approx 0,236 m(1)$, pelo que a amostra atinge um quarto da massa que tem no fim do primeiro dia, ao longo do 9.º dia.

Pág. 57

133.

a) A intensidade do som após atravessar uma placa é igual a 60% da intensidade do som antes de a atravessar, pelo que se tem $f_2 = 0,6f_1$, $f_3 = 0,6f_2 = 0,6^2f_1$ e $f_{n+1} = 0,6^n f_1$.

b) f_n é o termo geral da progressão geométrica cujo primeiro termo é 600 e cuja razão é 0,6. Então, $f_n = 600 \times 0,6^{n-1}$.

c) Uma condição que traduz o problema é $f_n < 11$.

Com recurso à calculadora, determinemos, por exemplo, o valor de f_7 : $f_7 = 600 \times 0,6^6 \approx 27,994$, pelo que são necessárias mais do que sete placas.

$f_8 = 600 \times 0,6^7 \approx 16,796$

$f_9 = 600 \times 0,6^8 \approx 10,078$ São necessárias, pelo menos, nove placas.

134. Designemos a progressão por (u_n) .

$u_6 = u_4 \times r^2 \Leftrightarrow 16 = 8 \times r^2 \Leftrightarrow r = -\sqrt{2} \vee r = \sqrt{2}$; dado que a progressão é não monótona, vem $r = -\sqrt{2}$. Tem-se $u_4 = u_1 \times r^3 \Leftrightarrow 8 = u_1 \times (-\sqrt{2})^3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8}{-\sqrt{8}} \Leftrightarrow u_1 = -\sqrt{8}$

Então:

$$\begin{aligned} S_{10} &= -\sqrt{8} \times \frac{1 - (-\sqrt{2})^{10}}{1 - (-\sqrt{2})} = -2\sqrt{2} \times \frac{1 - 32}{1 + \sqrt{2}} = \frac{62\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{62\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{62\sqrt{2} - 62 \times 2}{-1} = 124 - 62\sqrt{2} \end{aligned}$$

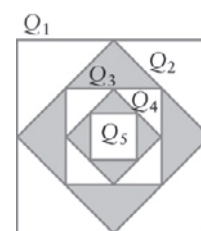
135.

a) A área de cada quadrado, à exceção do primeiro, é igual a metade da área do quadrado anterior.

Como se observa na figura, a área da parte colorida a azul quando estão desenhados cinco quadrados é igual à soma da diferença entre as áreas do 2.º e do 3.º quadrados com a diferença entre a área do 4.º e 5.º quadrados.

Então, quando estão desenhados cinco quadrados, a área da parte colorida é igual

a $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{8}$.



b) No caso do número de quadrados ser ímpar, generalizando a situação da alínea a) que pode ser

escrita na forma $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \sum_{k=1}^{5-1} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, conclui-se que a área colorida a azul é

dada por $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Tem-se: $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ e, recorrendo à fórmula da soma

de termos consecutivos de uma progressão geométrica, e tendo em consideração que $n-1$ é par, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

No caso de o número, n , de quadrados ser par, a região colorida a azul é constituída pela região colorida a azul correspondente a $n-1$ quadrados e pelo quadrado de ordem n .

Recorrendo ao resultado que já obtivemos no caso de o número de quadrados ser ímpar, tem-se, para o caso de o número n de quadrados ser par, que a área é dada por:

$$\frac{1}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

136. Seja T o número de tijolos que o pedreiro recebeu.

No final da 1.ª obra, sobraram $\frac{1}{3} T$ tijolos.

No final da 2.ª obra, sobraram $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} T \right)$ tijolos, ou seja, $\left(\frac{1}{3} \right)^2 T$ tijolos.

No final da 3.ª obra, sobraram $\left(\frac{1}{3} \right)^3 T$ tijolos.

...

No final da 12.ª obra, sobraram $\left(\frac{1}{3} \right)^{12} T$ tijolos.

Uma condição que traduz o problema é $\left(\frac{1}{3} \right)^{12} T = 1$.

Tem-se: $\left(\frac{1}{3} \right)^{12} T = 1 \Leftrightarrow T = 3^{12}$

O pedreiro recebeu 3^{12} tijolos, ou seja, 531 441 tijolos.

137. Na lengalenga, há 7 mulheres, 7^2 sacos, 7^3 gatos e 7^4 gatinhos.

Ora, 7, 7^2 , 7^3 e 7^4 são os quatro primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 7 e cuja razão é 7.

Tem-se, neste caso, $S_4 = 7 \times \frac{1-7^4}{1-7} = 7 \times \frac{2400}{6} = 2800$.

138. Designemos por v_n o volume de líquido presente ao fim de n horas e seja V o volume inicial.

Tem-se: $v_n = 0,94^n V$

Uma condição que traduz o problema é $0,94^n V = \frac{1}{2} V$.

Ora, $0,94^n V = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow 0,94^n = \frac{1}{2}$.

Como $0,94^{10} \approx 0,539$ e $0,94^{11} \approx 0,506$, conclui-se que, ao fim de 11 horas, a quantidade de líquido está reduzida a metade do valor inicial (com erro inferior a 0,01).

139. Designemos por b_n o número de bactérias da população ao fim de n horas e seja B o número inicial de bactérias. Tem-se: $b_n = 1,03^n B$.

Uma condição que traduz o problema é $1,03^n B = 17B$.

Ora, $1,03^n B = 17B \Leftrightarrow 1,03^n = 17$.

Como $1,03^{95} \approx 16,578$ e $1,03^{96} \approx 17,076$, conclui-se que, ao fim de 96 horas, ou seja, ao fim de quatro dias, a população será aproximadamente igual a 17 vezes o número inicial de bactérias.

140.

a) Seja a_n o valor capitalizado, com capitalizações anuais, ao fim de n anos.

Tem-se: $a_n = 8000 \times 1,04^n$.

Então, ao fim de 10 anos, tenho $a_{10} = 8000 \times 1,04^{10} \approx 11\,841,95$ €.

b) Seja q_n o valor capitalizado, com capitalizações de quatro em quatro meses, ao fim de n ciclos de quatro meses.

Tem-se: $q_n = 8000 \times 1,015^n$.

Então, ao fim de 10 anos, ou seja, ao fim de 30 ciclos de quatro meses, tenho

$$q_{30} = 8000 \times 1,015^{30} \approx 12\,504,64 \text{ €}.$$

c) Seja m_n o valor capitalizado, com capitalizações mensais, ao fim de n meses.

Tem-se: $m_n = 8000 \times 1,003^n$.

Então, ao fim de 10 anos, ou seja, ao fim de 120 meses, tenho

$$m_{120} = 8000 \times 1,003^{120} \approx 11\,460,46 \text{ €}.$$

141. Designemos por C o capital investido. Ao fim de n anos, o valor existente é dado por $1,026^n C$.

Uma condição que traduz o problema é $1,026^n C = 1,3 C$.

Ora, $1,026^n C = 1,3 C \Leftrightarrow 1,026^n = 1,3$

Como $1,026^{10} \approx 1,29$ e $1,026^{11} \approx 1,33$, conclui-se que são necessários, no mínimo, 11 anos para que o depósito renda, pelo menos, 30% do capital investido.

Capítulo 3 | Limites de sucessões

Pág. 59

142.

$$\text{a) } \left| \frac{3}{n+2} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n+2 > 300 \Leftrightarrow n > 298$$

O menor número natural que satisfaz a condição é 299.

$$\text{b) } \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 10^{-3} \Leftrightarrow \left| \frac{n-n-1}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n+1 > 1000 \Leftrightarrow n > 999$$

O menor número natural que satisfaz a condição é 1000.

$$\begin{aligned} \text{c) } \left| \frac{2}{3-4n} \right| < 10^{-6} &\Leftrightarrow \frac{2}{3-4n} < 0 \text{ qualquer que seja o natural } n \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{4n-3} < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow 2\,000\,000 < 4n-3 \Leftrightarrow 4n > 2\,000\,003 \Leftrightarrow n > 500\,000,75 \end{aligned}$$

O menor número natural que satisfaz a condição é 500 001.

Pág. 60

143.

$$\text{a) } |u_n| < \delta \Leftrightarrow u_n \in]-\delta, \delta[$$

$$\text{b) } |v_n - 2| < 0,01 \Leftrightarrow v_n \in]1,99; 2,01[$$

$$\text{c) } a_n \in]-3 - \delta, -3 + \delta[\Leftrightarrow |a_n + 3| < \delta$$

$$\text{d) } x_n \in V_\delta(1) \Leftrightarrow |x_n - 1| < \delta$$

144.

a)

Para todo o número real positivo δ , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \frac{2}{3} \right| < \delta$$

b)

Para todo o número real positivo δ , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n| < \delta$$

c)

Para todo o número real positivo δ , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n + 3| < \delta$$

145.

$$a_1) \left| \frac{1}{4n+2} \right| < 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \frac{5}{1000} \Leftrightarrow 20n + 10 > 1000 \Leftrightarrow 20n > 990 \Leftrightarrow n > 49$$

Então, $\left| \frac{1}{4n+2} \right| < 0,005$ a partir de $n = 50$.

$$a_2) \left| \frac{1}{4n+2} \right| < 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{10^8} \Leftrightarrow 4n + 2 > 10^8 \Leftrightarrow n > \frac{10^8 - 2}{4} \Leftrightarrow n > \frac{100 \times 10^6}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > 25 \times 10^6 - \frac{1}{2}$$

Então, $\left| \frac{1}{4n+2} \right| < 10^{-8}$ a partir de $n = 25 \times 10^6$.

$$a_3) \left| \frac{1}{4n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \delta \Leftrightarrow 4n + 2 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{\frac{1}{\delta} - 2}{4} \Leftrightarrow n > \frac{1 - 2\delta}{4}$$

Então, se $\frac{1 - 2\delta}{4}$ for negativo, $\left| \frac{1}{4n+2} \right| < \delta$ a partir de $n = 1$ e, se $\frac{1 - 2\delta}{4}$ for positivo, $\left| \frac{1}{4n+2} \right| < \delta$ a partir de $n = \left\lceil \frac{1 - 2\delta}{4} \right\rceil$.

b) De a_3) conclui-se que, para qualquer número real positivo δ , é possível encontrar uma ordem p para a qual se tem $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{4n+2} \right| < \delta$, o que equivale a afirmar que (u_n) tende para 0.

146.

$$\left| -\frac{2}{n} \right| < 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{2}{n} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > \frac{2}{10^{-6}} \Leftrightarrow n > 2 \times 10^6$$

Tal equivalência significa que os termos da sucessão (u_n) são valores aproximados de 0 se e só se a ordem dos termos for superior a dois milhões.

147. Mostremos que (u_n) tende para 0:

$$\text{Seja } \delta \in \mathbb{R}^+. \left| \frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Então, sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{1}{\delta}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta$

Mostremos que (v_n) tende para 0:

$$\text{Seja } \delta \in \mathbb{R}^+. \left| \frac{1}{1-2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} + 1 < 2n \Leftrightarrow n > \frac{1+\delta}{2\delta}$$

Então, sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{1+\delta}{2\delta}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{1-2n} \right| < \delta$$

148.

a) Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Tem-se:

$$\left| \frac{1-2n}{n+1} - (-2) \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-2n+2n+2}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{3-\delta}{\delta}$$

Então, sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{3-\delta}{\delta}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n + 2| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_n \notin V_{0,0001}(-2) &\Leftrightarrow \left| \frac{1-2n}{n+1} + 2 \right| \geq 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{1-2n+2n+2}{n+1} \right| \geq \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n+1} \right| \geq \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{n+1} \geq \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow 30\,000 \geq n+1 \Leftrightarrow n \leq 29\,999 \end{aligned}$$

Há 29 999 termos de (u_n) que não pertencem à vizinhança de raio 0,0001 de -2 .

Pág. 62

149.

$$\text{a) } |u_n - 0| < 0,25 \Leftrightarrow \left| \frac{n+100}{5n} \right| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{n+100}{5n} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4n + 400 < 5n \Leftrightarrow n > 400$$

É a partir da ordem 400, exclusive.

$$\begin{aligned} \text{b) } |u_n - 0| < 0,21 &\Leftrightarrow \left| \frac{n+100}{5n} \right| < \frac{21}{100} \Leftrightarrow \frac{n+100}{5n} < \frac{21}{100} \Leftrightarrow 100n + 10\,000 < 105n \Leftrightarrow 5n < 10\,000 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n < 2000 \end{aligned}$$

É a partir da ordem 2000, exclusive.

c) Não. Por exemplo, não existe uma ordem a partir da qual os termos da sucessão sejam valores aproximados de 0 com erro inferior a 0,2.

Pág. 63

150.

a) $x \in V_{0,5}(1) \Leftrightarrow x \in]0,5; 1,5[$ e, então, $x \notin]1,5; 2,5[$, pelo que $x \notin V_{0,5}(2)$.

b) Por exemplo, $\delta = 0,05$ (ou qualquer valor positivo menor ou igual do que $\frac{|2,1-2|}{2}$)

Pág. 64

151.

Suponhamos que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$; então,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - c| = 0.$$

Portanto, dado qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, tem-se:
 $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - c| < \delta$, o que prova que c é limite de (u_n) . Dado que uma sucessão convergente admite um único limite, conclui-se que $\lim u_n = c$.

Pág. 65

152.

a) Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Tem-se:

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{3+2\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2\sqrt{n}-3-2\sqrt{n}}{2(3+2\sqrt{n})} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{2(3+2\sqrt{n})} < \delta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\delta} < 3+2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{3-6\delta}{4\delta}$$

Então, sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\left(\frac{3-6\delta}{4\delta}\right)^2$, tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{n}}{3+2\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right| < \delta. \text{ Portanto, a sucessão tende para } \frac{1}{2}$$

b) A proposição traduz que a sucessão é limitada e, portanto, é verdadeira pois, como a sucessão é convergente, é limitada.

153. Como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$, (u_n) é crescente; como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$, (u_n) é majorada. Como a sucessão é crescente e majorada, é convergente.

O limite da sucessão é menor ou igual do que 3.

Pág. 66

154.

a) $u_n > 2000 \Leftrightarrow n^3 - 5 > 2000 \Leftrightarrow n^3 > 1995 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{1995}$

Como $\sqrt[3]{1995} \approx 12,59$, a ordem do primeiro termo da sucessão que é maior do que 2000 é 13.

b)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $n^3 - 5 > L \Rightarrow n > \sqrt[3]{L+5}$.

Sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\sqrt[3]{L+5}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

155.

a)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $\frac{2n-3}{5} > L \Rightarrow n > \frac{5L+3}{2}$.

Sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{5L+3}{2}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

b)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $3n^2 > L \Rightarrow n > \sqrt{\frac{L}{3}}$

Sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\sqrt{\frac{L}{3}}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

156.

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. Dado que $u_n \rightarrow -\infty$, sabemos que existe uma ordem p tal que:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, ou seja, tal que

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow -u_n > L$.

Portanto, $-u_n \rightarrow +\infty$ ou seja, $v_n \rightarrow +\infty$.

157.

a) $u_n < -2000 \Leftrightarrow 50 - 10n < -2000 \Leftrightarrow -10n < -2050 \Leftrightarrow n > 205$

Então, a ordem do primeiro termo da sucessão que é menor do que -2000 é 206.

b)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $u_n < -L \Leftrightarrow 50 - 10n < -L \Leftrightarrow n > \frac{50+L}{10}$

Seja p um número natural maior do que $\frac{50+L}{10}$

Então, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, o que traduz que $u_n \rightarrow -\infty$

158.

a) Seja $L \in \mathbb{R}^+$. Tem-se: $\frac{5-2n}{3} < -L \Leftrightarrow -2n < -3L - 5 \Leftrightarrow n > \frac{3L+5}{2}$

Então, sendo p um número natural maior do que $\frac{3L+5}{2}$, tem-se:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$

b) Seja $L \in \mathbb{R}^+$. Tem-se: $1 - \sqrt{n} < -L \Leftrightarrow -\sqrt{n} < -L - 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} > L + 1 \Leftrightarrow n > (L + 1)^2$

Então, sendo p um número natural maior do que $(L + 1)^2$, tem-se:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$

159. Dado que as sucessões (u_n) e (v_n) só diferem nos 100 primeiros termos, $\lim v_n = \lim u_n = a$.

160.

a) Tem-se: $\frac{\sin n}{n+3} = \sin n \times \frac{1}{n+3}$, pelo que a sucessão de termo geral $\frac{\sin n}{n+3}$ é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\sin n$) por outra (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+3}$) que tende para zero. Então, $\lim \frac{\sin n}{n+3} = 0$.

b) Tem-se: $\frac{\cos^2 n}{3n+1} = \cos^2 n \times \frac{1}{3n+1}$, pelo que a sucessão de termo geral $\frac{\cos^2 n}{3n+1}$ é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\cos^2 n$) por outra (a sucessão de termo geral $\frac{1}{3n+1}$) que tende para zero. Então, $\lim \frac{\cos^2 n}{3n+1} = 0$.

c) Tem-se: $\frac{2-(-1)^n}{n+1} = [2 - (-1)^n] \times \frac{1}{n+1}$, pelo que a sucessão de termo geral $\frac{2-(-1)^n}{n+1}$ é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $2 - (-1)^n$) por outra (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+1}$) que tende para zero. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-(-1)^n}{n+1} = 0$.

Pág. 70

161.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0n+2}{n+1} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{0,1n+2} = \frac{2}{0,1} = 20$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+2} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2} = +\infty$, pois tem-se, neste caso, $c = 0$ e $\frac{a}{d} = \frac{5}{2} > 0$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3} = -\infty$, pois tem-se, neste caso, $c = 0$ e $\frac{a}{d} = \frac{-2}{3} < 0$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{1} = +\infty$, pois tem-se, neste caso, $c = 0$ e $\frac{a}{d} = \frac{2}{1} > 0$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3-2n} = \frac{-2}{-2} = 1$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0n+2}{\sqrt{2}-n} = \frac{0}{-1} = 0$

i) Tem-se: $|100 - 2n| = \begin{cases} 100 - 2n & \text{se } n \leq 50 \\ 2n - 100 & \text{se } n > 50 \end{cases}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100-2n|}{3-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-100}{3-2n} = \frac{2}{-2} = -1$

j) Tem-se: $|3n - 80| = \begin{cases} 80 - 3n & \text{se } n \leq 26 \\ 3n - 80 & \text{se } n > 26 \end{cases}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3n-80|}{3n-80} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n-80} = -\frac{2}{3}$

162.

a) Por exemplo, $\frac{4n}{1-2n}$.

b) Por exemplo, $\frac{3n+1}{4n}$.

c) Por exemplo, $\frac{2n+1}{5}$.

d) Por exemplo, $\frac{1}{2n+3}$.

e) Por exemplo, $\frac{1-3n}{2}$.

Pág. 73

163.

a) $\lim (b_n - 2a_n) = \lim [b_n + (-2a_n)] = \lim b_n + \lim (-2a_n) = b + (-2 \lim a_n) = b + (-2a) = b - 2a$

b) $\lim \left(\frac{a_n \times b_n}{2} \right)^2 = \left(\lim \frac{a_n \times b_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lim(a_n \times b_n)}{\lim 2} \right)^2 = \left(\frac{a \times b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 b^2}{4}$

c) $\lim \sqrt{\frac{b_n}{(a_n)^2 + 1}} = \lim \left[\frac{b_n}{(a_n)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim \frac{b_n}{(a_n)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\lim b_n}{(\lim a_n)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{b}{a^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a^2 + 1}}$

Pág. 75

164.

a) $\lim (u_n + v_n) = 3 \Leftrightarrow \lim u_n + \lim v_n = 3 \Leftrightarrow -2 + \lim v_n = 3 \Leftrightarrow \lim v_n = 5$, pelo que se tem, por exemplo, $v_n = \frac{5n+1}{n}$.

b) $\lim (u_n \times v_n) = 3 \Leftrightarrow \lim u_n \times \lim v_n = 3 \Leftrightarrow -2 \times \lim v_n = 3 \Leftrightarrow \lim v_n = -\frac{3}{2}$, pelo que se tem, por exemplo, $v_n = \frac{-3n+1}{2n-3}$.

c) $\lim \frac{u_n}{v_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{-2}{\lim v_n} = 3 \Leftrightarrow \lim v_n = -\frac{2}{3}$, pelo que se tem, por exemplo, $v_n = \frac{-2n+1}{3n+5}$

d) $\lim \frac{v_n}{u_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim v_n}{\lim u_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim v_n}{-2} = 3 \Leftrightarrow \lim v_n = -6$, pelo que se tem, por exemplo, $v_n = \frac{-6n+1}{n+3}$

e) $\lim \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\lim \frac{v_n}{u_n}} = 3 \Leftrightarrow \lim \frac{v_n}{u_n} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lim v_n}{\lim u_n} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lim v_n}{-2} = 9 \Leftrightarrow \lim v_n = -18$, pelo que se tem, por exemplo, $v_n = \frac{1-18n}{n+3}$.

Pág. 78

165.

a) $\lim u_n = \lim (-n^2 + 3) = \lim(-n^2) + \lim 3 = -\infty + 3 = -\infty$

b₁) $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = -\infty + \lim(5 - n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$

b₂) $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = -\infty + \lim \left(\frac{5-n}{1-2n} \right) = -\infty + 2 = -\infty$

c₁) Para que se tenha $\lim (u_n + w_n) = 5$, basta que se tenha, por exemplo, $u_n + w_n = 5$
Ora, $u_n + w_n = 5 \Leftrightarrow -n^2 + 3 + w_n = 5 \Leftrightarrow w_n = 2 + n^2$.

c₂) Para que se tenha $\lim (u_n + w_n) = +\infty$, basta que se tenha, por exemplo, $u_n + w_n = n^2$
Ora, $u_n + w_n = n^2 \Leftrightarrow -n^2 + 3 + w_n = n^2 \Leftrightarrow w_n = 2n^2 - 3$.

Pág. 80

166.

a) $\lim u_n = \lim (-2n^2 + 3) = \lim(-2n^2) + \lim 3 = -\infty + 3 = -\infty$

b₁) $\lim (u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n = -\infty \times \lim(5 - n) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$

b₂) $\lim (u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n = -\infty \times \lim\left(\frac{5-n}{1-2n}\right) = -\infty \times 2 = -\infty$

c) $\lim (u_n)^3 = (\lim u_n)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$ e

$\lim \sqrt{1 - u_n} = \lim \sqrt{1 - (-2n^2 + 3)} = \lim \sqrt{2n^2 - 2} = \sqrt{\lim (2n^2 - 2)} = \sqrt{+\infty - 2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

167.

a) $\lim u_n = \lim (4n - 2n^2) = \lim[2n(2 - n)] = \lim(2n) \times \lim(2 - n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

b₁) Para que se tenha $\lim (u_n \times w_n) = -\infty$, basta que se tenha $\lim w_n = +\infty$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = n$.

b₂) Para que se tenha $\lim (u_n \times w_n) = +\infty$, basta que se tenha $\lim w_n = -\infty$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -n$.

168.

a) Para que se tenha $\lim (u_n \times v_n) = -\infty$, basta que se tenha $\lim u_n = +\infty$ e

$\lim v_n = -\infty$; portanto, pode ser, por exemplo, $u_n = n$ e $v_n = -2n$.

Para que, nestas condições, se tenha $\lim (u_n \times v_n \times w_n) = +\infty$, basta que se tenha $\lim w_n = -\infty$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -n$.

b) Nestas condições basta que se tenha $\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = +\infty$ e $\lim w_n = -\infty$; portanto, pode ser, por exemplo, $u_n = n$, $v_n = n^2$ e $w_n = -n$.

Pág. 81

169. Dado que (u_n) é decrescente com limite igual a 3, todos os termos da sucessão são maiores do que 3, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 > 0$ e, portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, 3 - u_n > 0$.

a) $\lim \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\lim(u_n - 3)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

b) $\lim \left(\frac{1}{3 - u_n}\right)^3 = \left(\lim \frac{1}{3 - u_n}\right)^3 = \left[\frac{1}{\lim(3 - u_n)}\right]^3 = \left(\frac{1}{0^-}\right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

170. Dado que (u_n) é crescente com limite igual a -2 , todos os termos da sucessão são menores do que -2 , pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 + u_n < 0$ e, também, $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n)^2 - 4 > 0$.

a) $\lim \frac{1}{2+u_n} = \frac{1}{\lim(2+u_n)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

b) $\lim \frac{1}{(u_n)^2-4} = \frac{1}{\lim[(u_n)^2-4]} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

c) $\lim \frac{1}{(u_n+2)^2} = \frac{1}{\lim(u_n+2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

171.

a) $\lim \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{\lim(2-u_n)} = \frac{1}{2-\lim u_n} = \frac{1}{2-(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

b) $\lim \frac{1}{(u_n)^2-4} = \frac{1}{\lim[(u_n)^2-4]} = \frac{1}{\lim(u_n)^2-4} = \frac{1}{(\lim u_n)^2-4} = \frac{1}{(+\infty)^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Pág. 82

172.

a) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = -\infty$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = -n$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -n^2$.

b) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = 3$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = 3$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = \frac{1}{3}n^3$.

c) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = 0$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = \frac{1}{n}$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = n^4$.

173.

a) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = 2$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = 2$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = \frac{1}{2n^2}$.

b) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = 0$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = \frac{1}{n}$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = \frac{1}{n}$.

c) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = -\infty$, basta que se tenha $\frac{u_n}{w_n} = -n$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -\frac{1}{n^3}$.

Pág. 83**174.**

$$\text{a) } \lim (100n - n^3) = \lim \left[n^3 \left(\frac{100}{n^2} - 1 \right) \right] = +\infty \times (0 - 1) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim (2n^4 - n - 5n^3) = \lim \left[n^4 \left(2 - \frac{1}{n^3} - \frac{5}{n} \right) \right] = +\infty \times (2 - 0 - 0) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim [10n^3 - (1 - 2n^2)^2] &= \lim [10n^3 - (1 - 4n^2 + 4n^4)] = \lim (10n^3 - 1 + 4n^2 - 4n^4) = \\ &= \lim \left[n^4 \left(\frac{10}{n} - \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2} - 4 \right) \right] = +\infty \times (0 - 0 + 0 - 4) = +\infty \times (-4) = -\infty \end{aligned}$$

175.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \frac{100n - n^3}{2n - n^3} &= \\ &= \lim \frac{n^3 \left(\frac{100}{n^2} - 1 \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right)} = \lim \frac{\frac{100}{n^2} - 1}{\frac{2}{n^2} - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \frac{2n^4}{n - 5n^3} &= \\ &= \lim \frac{2n^4}{n^3 \left(\frac{1}{n^2} - 5 \right)} = \lim \frac{2n}{\frac{1}{n^2} - 5} = \frac{+\infty}{0 - 5} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \frac{(2n-1)^2}{3n^2+n+1} &= \\ &= \lim \frac{4n^2 - 4n + 1}{3n^2 + n + 1} = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{4 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Pág. 84**176.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \left(\frac{2}{2-n^3} \times n^2 \right) &= \\ &= \lim \frac{2n^2}{2-n^3} = \lim \frac{2n^2}{n^3 \left(\frac{2}{n^3} - 1 \right)} = \lim \frac{2}{n \left(\frac{2}{n^3} - 1 \right)} = \frac{2}{+\infty(0-1)} = \frac{2}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \left[\frac{1}{n^2+1} \times (2-n^2) \right] &= \\ &= \lim \frac{2-n^2}{n^2+1} = \lim \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{0-1}{1+0} = -1 \end{aligned}$$

177.

a) $\lim \frac{\frac{2}{2-n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2n^2}{2-n^3} = 0$ (ver exercício 176)

b) $\lim \frac{\frac{n^2}{2+n^3}}{\frac{n+1}{n^2}} =$
 $= \lim \frac{n^4}{n^4 + n^3 + 2n + 2} = \lim \frac{n^4}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}\right)} = \frac{1}{1+0+0+0} = 1$

Pág. 85

178.

a)

$\lim (100n - 4n^2) = \lim (-4n^2) = -\infty$, pois $-4 < 0$

b)

$\lim (2n^4 - n - 5n^3) = \lim (2n^4) = +\infty$, pois $2 > 0$

c) $\lim [n^4 - n^3 - (1 - n^2)^2] = \lim [n^4 - n^3 - (1 - 2n^2 + n^4)] = \lim (n^4 - n^3 - 1 + 2n^2 - n^4) =$
 $= \lim (-n^3 - 1 + 2n^2) = \lim(-n^3) = -\infty$

Pág. 86

179. a) $\lim \frac{10n-2n^3}{n^3+n+2} = \lim \frac{-2n^3}{n^3} = -2$

b) $\lim \frac{(n-2n^2)^2}{n^4+2} = \lim \frac{n^2-4n^3+4n^4}{n^4+2} = \lim \frac{4n^4}{n^4} = 4$

c) $\lim \frac{(n+2)(n-2)}{3-n} = \lim \frac{n^2-4}{3-n} = \lim \frac{n^2}{-n} = \lim (-n) = -\infty$

180. Seja (w_n) uma sucessão cujo termo geral é da forma $a_0n^p + a_1n^{p-1} + \dots + a_p$.

a) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = 0$, basta que p seja maior do que o grau de u_n que é 3; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = n^4$.

b) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = \frac{1}{2}$, basta que p seja igual ao grau de u_n e que $\frac{-1}{a_0} = \frac{1}{2}$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -2n^3$.

c) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{w_n} = -3$, basta que p seja igual ao grau de u_n e que $\frac{-1}{a_0} = -3$; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = \frac{1}{3}n^3$.

d) Para que se tenha $\lim \frac{u_n}{n^3+w_n} = +\infty$, basta que o grau de $n^3 + w_n$ seja menor do que o grau de u_n e que a_1 seja negativo; portanto, pode ser, por exemplo, $w_n = -n^3 - n^2$.

Pág. 87**181.**

$$\text{a) } \lim (1,5)^n = +\infty \quad | \text{ tem-se: } 1,5 > 1$$

$$\text{b) } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \lim 2^n = +\infty \quad | \text{ tem-se: } 2 > 1$$

$$\text{c) } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad | \text{ tem-se: } \frac{2}{3} < 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim \left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+1} &= \lim \left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^n \times \frac{\pi}{3}\right] = \lim \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \times \lim \frac{\pi}{3} = & | \text{ tem-se: } \frac{\pi}{3} > 1 \\ &= +\infty \times \frac{\pi}{3} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim \sqrt[n]{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\text{f) } \lim \frac{\sqrt[n]{2}}{n} = \frac{\lim \sqrt[n]{2}}{\lim n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Pág. 88

$$\text{182. } \lim u_n = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(\frac{1-a}{2}\right)^n = +\infty \Leftrightarrow \frac{1-a}{2} > 1 \Leftrightarrow 1-a > 2 \Leftrightarrow a < -1$$

O conjunto solução é $] -\infty, -1[$.

183.

1.º caso: esta fatorização não permite levantar a indeterminação.

$\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{5}{2}\right)^n$ conduz a uma situação de indeterminação $\infty - \infty$.

2.º caso: esta fatorização permite levantar a indeterminação.

$$\begin{aligned} \lim \left[3^n \left[1 - \left(\frac{5}{3}\right)^n \right] \right] &= +\infty \times (1 - (+\infty)) = \\ &= +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

3.º caso: esta fatorização permite levantar a indeterminação.

$$\begin{aligned} \lim \left[4^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{5}{4}\right)^n \right] \right] &= \\ &= +\infty \times (0 - (+\infty)) = +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

4.º caso: esta fatorização não permite levantar a indeterminação.

$6^n \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n \right]$ conduz a uma situação de indeterminação $+\infty \times 0$.

184. Todos os limites são situações de indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n \times 3^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n \times 3 \right] = 0 \times 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1}} + \left(\frac{3}{2} \right)^n \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + (+\infty) \times \frac{1}{2} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{3^{-n} + 2^n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{2^n \left[\left(\frac{1}{6} \right)^n + 1 \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n \times \frac{1}{0 + 1} = +\infty \end{aligned}$$

Pág. 90

$$\begin{aligned} \text{185. a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3+4n}{9n-1}} &= \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+4n}{9n-1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+2}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{4+0}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{1-3n} &= \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{3n-1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^2-1}{(3n-1)^2}} = -\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{9n^2}} = -\sqrt{\frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

186.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3})^2 - (\sqrt{2n})^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^2}{n}} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n} + 1}} \right) = \\
&= +\infty \times \frac{1+0}{\sqrt{2+0+1}} = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n^2+3} - 3n) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{n^2+3} - 3n)(2\sqrt{n^2+3} + 3n)}{2\sqrt{n^2+3} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2+3) - 9n^2}{2\sqrt{n^2+3} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - 5n^2}{2\sqrt{n^2+3} + 3n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} \times \frac{\frac{12}{n^2} - 5}{2\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 3} = +\infty \times \frac{0-5}{2\sqrt{1+0}+3} = +\infty \times (-1) = -\infty
\end{aligned}$$

Pág. 91

187.

a) Tem-se: $\frac{1}{2^{4-1}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, pelo que $u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ e $u_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$

b) u_n é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é $\frac{1}{2}$, pelo que se tem $u_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = 2 \times (1 - 0) = 2$.

Pág. 92

188.

a) Designemos por c_n o comprimento da espiral com n «arcos».

Tem-se, de acordo com o/s resultado/s obtido/s no exercício 130, na pág. 57:

$$c_{15} = 3\pi \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{15}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\pi \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{15} \right] = 6\pi \left(1 - \frac{1}{2^{15}} \right)$$

b) Esse comprimento seria igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Tem-se: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[6\pi \left(1 - \frac{1}{2^{15}} \right) \right] = 6\pi \times \left(1 - \frac{1}{\infty} \right) = 6\pi \times (1 - 0) = 6\pi$

189. Tem-se:

- O lado de T_1 é 1, pelo que a altura de T_1 é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto, a área de T_1 é igual a $\frac{(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2})}{2}$ ou seja, é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
 - A área de cada triângulo, a partir do segundo, é igual ao quádruplo da área do triângulo anterior. Designemos por A_n a área do triângulo T_n .
- A_n é o termo geral da progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e cuja razão é 4, pelo que se tem $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^{n-1}$.
- Portanto $\lim A_n = \lim \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^{n-1} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (+\infty) = +\infty$.

Pág. 98

190.

a) $|x - 2| < 0,1$ é equivalente a:

- x é valor aproximado de 2 com erro inferior a uma décima;
- $2 - 0,1 < x < 2 + 0,1$
- $x \in V_{0,1}(2)$

b) $-0,001 < x < 0,001$ é equivalente a:

- x é valor aproximado de 0 com erro inferior a uma milésima;
- $|x| < 0,001$
- $x \in V_{0,001}(0)$

c) $x \in V_\delta \left(-\frac{1}{2} \right)$ é equivalente a:

- x é valor aproximado de $-\frac{1}{2}$ com erro inferior a δ ;
- $\left| x + \frac{1}{2} \right| < \delta$
- $-\frac{1}{2} - \delta < x < -\frac{1}{2} + \delta$

d) $3 - \varepsilon < a < 3 + \varepsilon$ é equivalente a:

- a é valor aproximado de 3 com erro inferior a ε ;
- $|a - 3| < \varepsilon$
- $a \in V_\varepsilon(3)$

191.

- a) $\left| \frac{7}{2n-1} \right| < 0,0015 \Leftrightarrow \left| \frac{7}{2n-1} \right| > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\Leftrightarrow \frac{7}{2n-1} < \frac{15}{10\,000} \Leftrightarrow 70\,000 < 30n - 15 \Leftrightarrow n > \frac{70\,015}{30}$; como $\frac{70\,015}{30} \approx 2333,8(3)$, o menor natural que satisfaz a condição é 2334.

b) $\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < 0,025 \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+2} \right| < \frac{25}{1000} \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{2n-1} \right| < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{25}{1000} \Leftrightarrow 1000 < 25n + 50 \Leftrightarrow n > \frac{950}{25} \Leftrightarrow n > 38$; portanto, o menor natural que satisfaz a condição é 39.

c) $\left| \frac{n}{n^2+8} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{n}{n^2+8} \right| > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \frac{n}{n^2+8} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 100n < n^2 + 8 \Leftrightarrow n^2 - 100n + 8 > 0$

Como os zeros do polinómio $x^2 - 100x + 8$ são os números reais $50 - 2\sqrt{623} \approx 0,08$ e $50 + 2\sqrt{623} \approx 99,92$, tem-se $n^2 - 100n + 8 > 0 \Leftrightarrow n < 0,08 \vee n > 99,92$.
 Portanto, o menor natural que satisfaz a condição é 100.

d) $\left| \frac{1-0,2n}{n+1} + 0,2 \right| < 2^{-4} \Leftrightarrow \left| \frac{1,2}{n+1} \right| < \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left| \frac{1,2}{n+1} \right| < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \frac{1,2}{n+1} < \frac{1}{16} \Leftrightarrow 19,2 < n + 1 \Leftrightarrow n > 18,2$; portanto, o menor natural que satisfaz a condição é 19.

192. A afirmação é equivalente a afirmar, relativamente a uma dada sucessão (u_n) , que todos os termos a partir do 100.º inclusive, pertencem à vizinhança δ de a .

Ora, tal implica que o mesmo facto se verifique para todos os termos a partir do 150.º, pelo que a afirmação III. é verdadeira, mas não implica a veracidade de qualquer uma das outras afirmações:

- I. todos os termos da sucessão, a partir do 50.º inclusive, pertencem à vizinhança $\frac{\delta}{2}$ de a ;
- II. todos os termos da sucessão, a partir do 200.º inclusive, pertencem à vizinhança $\frac{\delta}{2}$ de a ;
- III. os 99 primeiros termos da sucessão não pertencem à vizinhança δ de a .

193.

a) Provemos que $\lim u_n = 3$.

Seja δ um número real positivo.

$$\left| \frac{3n}{n+2} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{6}{n+2} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{6-2\delta}{\delta}$$

Então, sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{6-2\delta}{\delta}$,

$$\text{tem-se } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Provemos que $\lim v_n = 0$.

Seja δ um número real positivo.

$$\left| \frac{1}{13-2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{2n-13} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1+13\delta}{2\delta}$$

para $n > 6$ para $n > 6$

Então, sendo p um número natural maior do que 6 e maior do

$$\text{que } \frac{6-2\delta}{\delta}, \text{ tem-se } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n| < \delta$$

$$\text{b)} |u_n - 3| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left| \frac{3n}{n+2} - 3 \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left| \frac{-6}{n+2} \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left| \frac{-6}{n+2} \right| < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6}{n+2} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 6000 < n+2 \Leftrightarrow n > 5998$$

Portanto, o termo de menor ordem é o termo de ordem 5999.

$$\text{Tem-se: } u_{5998} = \frac{3 \times 5999}{5999+2} = \frac{17997}{6001}$$

194.

a) $|u_{1001} - 1| < 0,001 \Leftrightarrow \left| \frac{1001+1}{1001} - 1 \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{1001} \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000}$; portanto, a afirmação é verdadeira.

b) Começemos por observar o que se passa com o termo de ordem imediatamente seguinte à do termo de ordem 1001 :

$$u_{1002} = \frac{1002-2}{1002} = \frac{1000}{1002}$$

$$|u_{1002} - 1| = \left| \frac{1000}{1002} - 1 \right| = \left| -\frac{2}{1002} \right| = \frac{2}{1002} \approx 0,001996$$

Portanto, como $0,001996 > 0,001$, $|u_{1002} - 1| > 0,001$, pelo que a afirmação é falsa.

Na verdade, só a partir da ordem 2000 é que os termos de ordem par são valores aproximados de 1 com erro inferior a 0,001.

c) Seja δ um número real positivo. Tem-se:

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} \quad \text{e} \quad \left| \frac{n-2}{n} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$$

Então, sendo p um número natural maior do que $\frac{2}{\delta}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$$

195.

a)

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - 6n < 0 \wedge 3n - 1 > 0. \text{ Portanto, } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1-6n}{3n-1} < 0$$

$$\text{b)} u_{n+1} - u_n = \frac{1-6(n+1)}{3(n+1)-1} - \frac{1-6n}{3n-1} = \frac{-5-6n}{3n+2} - \frac{1-6n}{3n-1} = \frac{-15n-18n^2+5+6n-3n+18n^2-2+12n}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{3}{(3n+2)(3n-1)}$$

Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, pelo que (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente e é majorada (0 é majorante), é convergente.

196. Tem-se: $|u_n| < 4 \Leftrightarrow -4 < u_n < 4$, pelo que a sucessão é minorada.

Como a sucessão é decrescente e minorada, é convergente.

197. Tem-se: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, pelo que, como $A =] - 2, 2[$, a sucessão é limitada.

Como a sucessão é monótona e limitada, é convergente.

198.

a)

Falso. Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é limitada e não é convergente.

b)

Verdade. Provamos que se uma sucessão é convergente, então é limitada, pelo que, como $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a)$, se não é limitada, então não é convergente.

199.

a) $u_2 = u_1 \times \frac{2+1}{2+2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$; $u_3 = u_2 \times \frac{4+1}{4+2} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{16}$ e $u_4 = u_3 \times \frac{6+1}{6+2} = \frac{5}{16} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{128}$

b) $u_{n+1} - u_n = u_n \times \frac{2n+1}{2n+2} - u_n = u_n \left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right) = u_n \left(\frac{2n+1-2n-2}{2n+2} \right) = u_n \left(\frac{-1}{2n+2} \right)$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, pelo que a sucessão é decrescente.

c)

A sucessão é decrescente e, portanto, é majorada; como os termos são positivos, também é minorada. Portanto, é limitada.

d) Como a sucessão é decrescente e minorada, é convergente.

200. Dado que os termos de u_n são todos positivos, tem-se $u_n \times v_n = 1 \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{u_n}$, pelo que os termos de v_n também são todos positivos e, como (u_n) é crescente, (v_n) é decrescente. Portanto, (v_n) é decrescente e minorada, pelo que é convergente.

201.

a)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $\frac{3n-10}{5} > L \Rightarrow n > \frac{5L+10}{3}$

Sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{5L+10}{3}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

b) $\frac{3n-10}{5} > 1000 \Leftrightarrow 3n - 10 > 5000 \Leftrightarrow 3n > 5010 \Leftrightarrow n > \frac{5010}{3} \Leftrightarrow n > 1670$; a ordem é 1671

202. $\frac{2n^2-8}{n+2} = \frac{2(n^2-4)}{n+2} = \frac{2(n-2)(n+2)}{n+2} = 2n - 4$

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. $2n - 4 > L \Rightarrow n > \frac{L+4}{2}$

Sendo $p \in \mathbb{N}$ maior do que $\frac{L+4}{2}$, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

203.

a) $u_{50} = 120 \times 50 - 50^2 = 6000 - 2500 = 3500$; portanto $u_{50} > 3000$

b) $u_n > 3000 \Leftrightarrow 120n - n^2 > 3000 \Leftrightarrow -n^2 + 120n - 3000 > 0$

Como os zeros do polinómio $-x^2 + 120x - 3000$ são os números reais $60 - 10\sqrt{6} \approx 35,5$ e

$60 + 10\sqrt{6} \approx 84,5$, tem-se $-n^2 + 120n - 3000 > 0 \Leftrightarrow n > 35,5 \wedge n < 84,5$

Portanto, os termos que são maiores do que 3000 são apenas os de ordens entre 36 e 84 inclusive.

Logo, por exemplo, u_{100} não é maior do que 3000 . A proposição é, portanto, falsa.

204.

a) Estudemos f quanto ao sinal:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 150x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(150 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 75$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 75[\quad \text{e} \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]75; +\infty[$$

Estudemos f quanto à monotonia:

O maximizante de f é igual a $-\frac{150}{2 \times (-2)} = 37,5$.

f é crescente em $] - \infty; 37,5]$ e f é decrescente em $[37,5; +\infty[$.

b₁) A proposição afirma que a sucessão é decrescente, o que é falso porque, como f é crescente em $] - \infty; 37,5]$, tem-se, por exemplo, $u_2 > u_1$.

b₂) A proposição afirma que existe uma ordem, p , a partir da qual todos os termos da sucessão são positivos, o que é falso porque, como $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 75[$, só são positivos os termos da sucessão de ordem inferior a 75.

b₃) O valor procurado é o da menor ordem a partir da qual, inclusive, todos os termos da sucessão são negativos. Ora, como $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]75; +\infty[$, esse valor é 76.

205.

a)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. Dado que $u_n \rightarrow +\infty$, sabe-

mos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

Dado que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > u_n$, então $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n > L$

Provámos, portanto, que $v_n \rightarrow +\infty$

b)

Seja $L \in \mathbb{R}^+$. Dado que $u_n \rightarrow -\infty$, sabemos

que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow u_n < -L$

Como as sucessões diferem num número finito de termos, existe uma ordem a partir da qual os termos das sucessões são iguais.

Suponhamos que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow u_n = v_n$

Seja p maior do que p_1 e maior do que p_2

Então, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n < -L$

206.

Por exemplo:

I. A sucessão definida por $u_n = n$ é monótona e não é convergente.

II. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ é limitada e não tem limite.

III. A sucessão definida por $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente e não é monótona.

207.

a) A afirmação é falsa: por exemplo, a sucessão definida por $u_n = -\frac{1}{n}$ é crescente mas não tende para $+\infty$.

b) A afirmação é falsa: por exemplo, a sucessão definida por $u_n = n(n - 20)$ tem limite $+\infty$ mas não é crescente.

208.

Suponhamos que (u_n) é uma sucessão limitada e que (v_n) é uma sucessão que tem limite 0. Dado que (u_n) é limitada, existe um número real positivo M tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Multiplicando os dois membros da desigualdade $|u_n| \leq M$ por $|v_n|$, conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n||v_n| \leq M|v_n|$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M|v_n|$.

Seja δ um qualquer número real positivo. Então, $\frac{\delta}{M}$ também é um número real positivo e, como (v_n) tem limite 0, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n| < \frac{\delta}{M}$.

Assim, para todo o número natural n ,

$$n \geq p \Rightarrow |u_n v_n| \leq M|v_n| < M \times \frac{\delta}{M}.$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n v_n| < \delta$, de onde se conclui que a sucessão de termo geral $u_n v_n$ tem limite 0.

209.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n+2} = \frac{3}{1} = 3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3} = +\infty$, pois tem-se, neste caso, $c = 0$ e $\frac{a}{d} = \frac{2}{3} > 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5+3n} = \frac{2}{3}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{5-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0n-1}{5-3n} = \frac{0}{-3} = 0$

Pág. 100

e) Tem-se: $u_n = (-1)^n \times n^{-3} = (-1)^n \times \frac{1}{n^3}$; portanto, (u_n) é o produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $(-1)^n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n^3}$), pelo que $\lim u_n = 0$.

$$\text{f) Tem-se } \frac{|10-n|+3n}{n} = \begin{cases} \frac{(10-n)+3n}{n} & \text{se } n \leq 10 \\ \frac{(n-10)+3n}{n} & \text{se } n > 10 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2n+10}{n} & \text{se } n \leq 10 \\ \frac{4n-10}{n} & \text{se } n > 10 \end{cases}$$

$$\text{e, portanto, } \lim \frac{|10-n|+3n}{n} = \lim \frac{4n-10}{n} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{g) } \lim \frac{3-2n}{5} = -\infty, \text{ pois tem-se, neste caso, } c = 0 \text{ e } \frac{a}{d} = \frac{-2}{5} < 0.$$

$$\text{h) } \lim \frac{1}{n^{10}} = \lim n^{-10} = 0$$

$$\text{i) } \lim \frac{3n-1}{\sqrt{2}n} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

j) Tem-se: $0 \leq |\cos n| \leq 1$, pelo que $-1 \leq |\cos n| - 1 \leq 0$.

$u_n = (|\cos n| - 1) \times \frac{1}{n}$ e, portanto, (u_n) é o produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $|\cos n| - 1$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$), pelo que $\lim u_n = 0$.

k) Tem-se: $-1 \leq \sin n \leq 1$, pelo que $0 \leq \sin^2 n \leq 1$

$u_n = n^{-2} \times \sin^2 n = \frac{1}{n^2} \times \sin^2 n$ e, portanto, (u_n) é o produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\sin^2 n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n^2}$), pelo que $\lim u_n = 0$.

$$\text{l) } \lim \frac{n^2-(n+1)^2}{5+3n} = \lim \frac{n^2-(n^2+2n+1)}{5+3n} = \lim \frac{-2n-1}{5+3n} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{m) } \lim \frac{4n}{\sqrt{2}-n} = \frac{4}{-1} = -4$$

n) Tem-se: $-1 \leq \sin n \leq 1 \wedge -1 \leq \cos n \leq 1$, pelo que $-2 \leq \sin n + \cos n \leq 2$ e, portanto, $-1 \leq \sin n + \cos n + 1 \leq 3$

$u_n = \frac{\sin n + \cos n + 1}{n+2} = (\sin n + \cos n + 1) \times \frac{1}{n+2}$ e, portanto, (u_n) é o produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\sin n + \cos n + 1$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+2}$), pelo que $\lim u_n = 0$.

210.

a) Para que $\lim \frac{an+2}{bn+1} = 3$, basta que se tenha $a = 3$ e $b = 1$; na verdade, tem-se

$$\lim \frac{3n+2}{n+1} = \frac{3}{1} = 3.$$

b) Para que $\lim \frac{bn+1}{an+2} = 0$, basta que se tenha $a = 1$ e $b = 0$; na verdade, tem-se $\lim \frac{1}{n+2} = 0$.

c) Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+2}{bn+1} = +\infty$, basta que se tenha $a = 1$ e $b = 0$; na verdade, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+2) = +\infty$.

d) Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+1}{an+2} = -\infty$, basta que se tenha $a = 0$ e $b = -1$; na verdade, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = -\infty$.

211.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + w_n}{2v_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim(u_n + w_n)}{\lim(2v_n)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim u_n + \lim w_n}{2 \lim v_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{2 + \lim w_n}{2(-1)} = 3 \Leftrightarrow \lim w_n = -8$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n \times v_n}{1 - w_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{\lim u_n \times \lim v_n}{1 - \lim w_n} = 3 \Leftrightarrow \frac{2 \times (-1)}{1 - \lim w_n} = 3 \Leftrightarrow 1 - \lim w_n = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \lim w_n = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{w_n} + v_n)^2 = 4 &\Leftrightarrow [\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{w_n} + v_n)]^2 = 4 \Leftrightarrow [\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n]^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} - 1]^2 = 4 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} - 1 = -2 \vee \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} - 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} = -1}_{\text{cond. imp.}} \vee \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} = 3 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{w_n} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n} = 3 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 9 \end{aligned}$$

212.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}\right)^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -\frac{1}{2}$$

Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+2}{bn+1} = -\frac{1}{2}$, basta que se tenha $a = 1$ e $b = -2$; na verdade, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{-2n+1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 4$$

Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+2}{bn+1} = 4$, basta que se tenha $a = 4$ e $b = 1$; na verdade, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4$.

213.

$$\text{a) Tem-se: } \frac{\cos n + 2n}{n+3} = \frac{\cos n}{n+3} + \frac{2n}{n+3}$$

Ora, $\frac{\cos n}{n+3}$ é o termo geral de uma sucessão que é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\cos n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+3}$), pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n+3} = 0$.

$$\text{Então, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 2n}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n+3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 0 + 2 = 2.$$

b) Tem-se: $\frac{\sin^2 n - 3n}{1-2n} = \frac{\sin^2 n}{1-2n} - \frac{3n}{1-2n}$

Ora, $\frac{\sin^2 n}{1-2n}$ é o termo geral de uma sucessão que é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\sin^2 n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{1-2n}$), pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{1-2n} = 0$.

Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n - 3n}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{1-2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-2n} = 0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-2n} = 0 - \frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$.

214. Tem-se: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2}{1} = 2$ e, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-u_n}{3u_n} = \frac{1-\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n} = \frac{1-2}{3 \times 2} = -\frac{1}{6}$.

De outro modo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2n-1}{n+3}}{3 \times \frac{2n-1}{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-2n+1}{6n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+4}{6n-3} = -\frac{1}{6}$$

215.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 10 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (10 - n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{u_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{u_n} = +\infty - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^2 \times (u_n - 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 1) = +\infty \times (-\infty - 1) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

216.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} + \frac{2n+1}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = +\infty + \frac{2}{3} = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{2} \times \frac{1-n}{3} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2} \times \frac{1-n}{3} \right) = 1 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3} \right) = 1 - [+ \infty \times (-\infty)] = 1 - \infty = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} \times \frac{1-n^2}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} \times \frac{(1-n)(1+n)}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n+1} \times (1-n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1-n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2n)^3 = [\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2n)]^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \times (1-2n)]^2 = [\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1-2n)]^2 = [+ \infty \times (-\infty)]^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

217. Dado que (u_n) é crescente com limite igual a 2, todos os termos da sucessão são menores do que 2, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - u_n > 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2 < 0$.

$$\text{a) } \lim \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{\lim(2-u_n)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{1}{n-u_n} = \frac{1}{\lim(n-u_n)} = \frac{1}{\lim n - \lim u_n} = \frac{1}{+\infty - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim \frac{u_n}{u_n-2} = \frac{\lim u_n}{\lim(u_n-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

218. Dado que (v_n) é decrescente com limite igual a -3 , todos os termos da sucessão são maiores do que -3 , pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n + 3 > 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}, -3 - v_n < 0$.

$$\text{a) } \lim \frac{1}{3+v_n} = \frac{1}{\lim(3+v_n)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{v_n}{-3-v_n} = \frac{\lim v_n}{\lim(-3-v_n)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim \left(\frac{v_n}{v_n+3} \right)^3 = \left(\lim \frac{v_n}{v_n+3} \right)^3 = \left[\frac{\lim v_n}{\lim(v_n+3)} \right]^3 = \left(\frac{-3}{0^+} \right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

Pág. 101

219.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim (2n - n^3) &= \\ &= \lim [n(2 - n^2)] = +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \frac{2n^2+n+1}{n} &= \\ &= \lim \left(\frac{2n^2}{n} + \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \lim \left(2n + 1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty + 1 + 0 = +\infty \end{aligned}$$

220.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \frac{2-n^3+5n^2}{2} &= \\ &= \lim \frac{2-n^3+5n^2}{2} = \frac{1}{2} \lim (2-n^3+5n^2) = \frac{1}{2} \lim \left[n^3 \left(\frac{2}{n^3} - 1 + \frac{5}{n} \right) \right] = \frac{1}{2} \times [+ \infty \times (0 - 1 + 0)] = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \frac{2n^3-n^2+1}{1+n^2} &= \\ &= \lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^2}{1+2n^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-12n+9n^2}{1+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(\frac{4}{n^2}-\frac{12}{n}+9\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n^2}-\frac{12}{n}+9}{\frac{1}{n^2}+2} = \frac{0-0+9}{0+2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^3 - (n^2 + 1)^2 \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [n^3 - n^4 - 2n^2 - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^4 \left(\frac{1}{n} - 1 - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} \right) \right] = +\infty \times (0 - 1 - 0 - 0) = -\infty$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{1+n} \times \frac{1}{2-3n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1+n)(2-3n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{-3n^2 - n + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2\left(-3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{-3-0+0} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{1+n^2}}{\frac{0}{3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+3)}{3(1+n^2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{3 + 3n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}+3\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\frac{3}{n^2}+3} = \frac{2+0}{0+3} = \frac{2}{3}$$

g) Tem-se $\forall n \geq 50$, $|50 - n| = n - 50$, pelo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n |50 - n|}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n - 50)}{2n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 150n}{2n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(3-\frac{150}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{150}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

h) Tem-se $\forall n \geq 50$, $|50 - n| = n - 50$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|3n + 5| = 3n + 5$, pelo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|50 - n| + |3n + 5|}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 50 + 3n + 5}{2n + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 45}{2n + 1} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

221.

a) $\lim (\sqrt{3})^n = +\infty$ | tem-se: $\sqrt{3} > 1$

b) $\lim \frac{2}{\pi^{-n}} = \lim (2 \times \pi^n) = 2 \times \lim (\pi^n) = 2 \times (+\infty) = +\infty$ | tem-se: $\frac{\pi}{3} > 1$

c) $\lim \frac{3^{n+1}}{4^n} = \lim \frac{3 \times 3^n}{4^n} = \lim \left[3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] = 3 \times \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3 \times 0 = 0$ | tem-se: $\frac{3}{4} < 1$

d) $\lim \frac{4^{n-1}}{\pi^n} = \lim \frac{4^{-1} \times 4^n}{\pi^n} = \lim \left[\frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \right] = \frac{1}{4} \times \lim \left(\frac{4}{\pi}\right)^n = \frac{1}{4} \times (+\infty) = +\infty$ | tem-se: $\frac{4}{\pi} > 1$

e) $\lim \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \lim \frac{(2^3)^n}{(3^2)^n} = \lim \frac{8^n}{9^n} = \lim \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ | tem-se: $\frac{8}{9} < 1$

f) $\lim \frac{4^n}{3^{n+1} + 2^{2n+1}} = \lim \frac{4^n}{3 \times 3^n + 2 \times 2^n} = \lim \frac{4^n}{3 \times 3^n + 2 \times 4^n} = \lim \frac{4^n}{4^n \left[3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \right]} =$
 $= \lim \frac{1}{3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2} = \frac{1}{3 \times 0 + 2} = \frac{1}{2}$ | tem-se: $\frac{3}{4} < 1$

g) $\lim \frac{2^n + 3^n}{2^n \times 3^n} = \lim \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \lim \left(\frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} \right) = \lim \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] =$
 $= \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n + \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 + 0 = 0$ | tem-se: $\frac{1}{3} < 1$ e $\frac{1}{2} < 1$

h) $\lim \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 6^n} = \lim \frac{6^n}{2 \times 6^n} = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim \frac{2^n \times 3^n}{2 + 6^n} = \lim \frac{6^n}{2 + 6^n} = \lim \frac{6^n}{6^n \left(\frac{2}{6^n} + 1\right)} = \lim \frac{1}{\frac{2}{6^n} + 1} = \frac{1}{\lim \frac{2}{6^n} + 1} =$ | tem-se: $6 > 1$
 $= \frac{1}{\frac{2}{+\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$

j) $\lim (2^{n+1} - 3^{-n}) = \lim \left[2 \times 2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 2 \times (+\infty) - 0 = +\infty$ | tem-se: $2 > 1$ e $\frac{1}{3} < 1$

k) $\lim (2^{n+1} - 3^n) = \lim (2 \times 2^n - 3^n) = \lim \left[3^n \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right) \right] =$
 $= +\infty \times (2 \times 0 - 1) = -\infty$ | tem-se: $2 > 1$ e $\frac{1}{3} < 1$

l) $\lim 2^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$

$$222. \lim u_n = \lim \frac{a^{n+2^n}}{2^{n+2}} = \lim \left(\frac{a^n}{2^{n+2}} + \frac{2^n}{2^{n+2}} \right) = \lim \left(\frac{a^n}{2^2 \times 2^n} + \frac{2^n}{2^2 \times 2^n} \right) = \lim \left[\frac{1}{4} \times \left(\frac{a}{2} \right)^n + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \lim \left[\left(\frac{a}{2} \right)^n + 1 \right]$$

Tem-se:

- Se $\frac{a}{2} > 1$, ou seja, se $a > 2$ vem $\lim u_n = \frac{1}{4} \lim \left[\left(\frac{a}{2} \right)^n + 1 \right] = \frac{1}{4} \times [(+\infty) + 1] = +\infty$.
 - Se $\frac{a}{2} = 1$, ou seja, se $a = 2$ vem $\lim u_n = \lim \frac{2^{n+2^n}}{2^{n+2}} = \lim \frac{2 \times 2^n}{2^2 \times 2^n} = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
 - Se $0 < \frac{a}{2} < 1$, ou seja, se $0 < a < 2$ vem $\lim u_n = \frac{1}{4} \lim \left[\left(\frac{a}{2} \right)^n + 1 \right] = \frac{1}{4} \times (1 + 1) = \frac{1}{2}$.
- Então, (u_n) é convergente se e só se $a \in]0, 2]$.

223. Tem-se:

$$u_n = \sum_{k=1}^n (2k+1) = \frac{3+2n+1}{2} \times n = n^2 + 2n$$

$$\text{Então, } \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2+2n}{\frac{n^2+1}{2}} = \lim \frac{2n^2+4n}{n^2+1} = \lim \frac{n^2 \left(2 + \frac{4}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{2 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

224.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{n \sqrt{n}}{\sqrt{n} \sqrt{n}} = \lim \frac{n \sqrt{n}}{n} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{1}{\sqrt{2n+n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim (2 - n - \sqrt{n}) = 2 - \infty - \infty = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{2n+1} =$$

$$= \lim \frac{n \sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} =$$

$$= \lim \sqrt{\frac{2n+1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\lim \frac{2n+1}{n^2+2n+1}} = \sqrt{\lim \frac{2n}{n^2}} = \sqrt{\lim \frac{2}{n}} = \sqrt{0} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt{n^2+1} \right) =$$

$$= \lim \frac{(n - \sqrt{n^2+1})(n + \sqrt{n^2+1})}{n + \sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n^2 - (n^2+1)}{n + \sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n^2 - n^2 - 1}{n + \sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - n) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n}-n)(\sqrt{n}+n)}{\sqrt{n}+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-n^2}{\sqrt{n}+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-n)}{n(\frac{1}{\sqrt{n}}+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = \frac{1-\infty}{\frac{1}{+\infty}+1} = -\frac{\infty}{1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}-n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0^+}-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n-\sqrt{2n}} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(1-\sqrt{\frac{2}{n}})} = \frac{1}{+\infty \times (1-0)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3n}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3)}{n(\frac{1}{n}-2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2} = \frac{\sqrt{1+0}-3}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{(10-n)^2}-n}{\sqrt{2n-1}} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|10-n|-n}{\sqrt{2n-1}} = \quad \quad \quad (\text{tem-se } \forall n \geq 10, |10-n| = n-10) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-10-n}{\sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-10}{\sqrt{2n-1}} = -\frac{10}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Pág. 102

225.

$$\text{a)} u_{n+1} - u_n = \frac{5n+5+k}{n+3} - \frac{5n+k}{n+2} = \frac{5n^2+10n+5n+10+nk+2k-(5n^2+15n+kn+3k)}{(n+3)(n+2)} = \frac{10-k}{(n+3)(n+2)}$$

Portanto, a sucessão é crescente se e só se $10-k > 0$, ou seja, se e só se $k \in]-\infty, 10[$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+u_n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2+u_n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{u_n}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{\frac{5n+k}{n+3}}{n^2} \right)} = \sqrt{1+\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+k}{n^3+2n^2}} = \\ &= \sqrt{1+\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{n^3}} = \sqrt{1+\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2}} = \sqrt{1+0} = 1 \end{aligned}$$

226. Tem-se:

$$\lim u_n = \lim \frac{\frac{1+n}{2} \times n}{n^2} = \lim \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, (u_n) é convergente.

227.

a) Tem-se:

$$u_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n^{-1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Então, para qualquer $\delta > 0$, todos os termos de ordem ímpar e maior do que $\frac{1}{\delta}$ são valores aproximados de 0 com erro inferior a δ .

b) Para qualquer $L > 0$, todos os termos de ordem par e maior do que L são maiores de que L .

c) Do que se mostrou nas alíneas anteriores decorre imediatamente que a sucessão não tem limite, quer finito, quer infinito.

228.

a)

$$u_1 = \sum_{i=1}^1 \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Pode conjecturar-se que $u_n = \frac{n}{n+1}$.

b)

Para $n = 1$, obtém-se $u_1 = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos que $u_n = \frac{n}{n+1}$ (hipótese de indução).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

A condição é válida para $n = 1$ e é hereditária, logo é universal em $\mathbb{N}$

Tem-se $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$.

c)

A sucessão é limitada, dado que é convergente.

Dado que a sucessão é crescente, que o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e que tem limite igual a 1, concluímos que o conjunto dos minorantes

é $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty[$

229. Tem-se $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{4}$.

Como $u_1 = -8$, tem-se $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ e, portanto, $\lim u_n = \lim \left[-8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = -8 \times 0 = 0$

(v_n) é a sucessão cujo termo de ordem n é igual à soma dos n primeiros termos de (u_n) ; portanto,

$$v_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = -8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = -8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = -\frac{32}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

Então, $\lim u_n = \lim \left[-\frac{32}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right] = -\frac{32}{3} \times \lim \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = -\frac{32}{3} \times (1 - 0) = -\frac{32}{3}$.

230.

a)

Para $n = 1$, obtém-se $u_1 > 1$, que é uma proposição verdadeira, pois $u_1 = 4$

Suponhamos que $u_n > 1$ (hipótese de indução).

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}; \text{ dado que } u_n > 1, \text{ tem-se } \frac{1+u_n}{2} > \frac{1+1}{2}, \text{ ou seja, } \frac{1+u_n}{2} > 1$$

Portanto, $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} > 1$

A condição é válida para $n = 1$ e é hereditária, logo é universal em $\mathbb{N}$

b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2} - u_n = \frac{1-u_n}{2}$$

Dado que $u_n > 1$, conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$

Portanto, a sucessão (u_n) é decrescente.

c) A sucessão é decrescente e minorada, logo é convergente; seja $k \in \mathbb{R}$, o limite da sucessão. Tem-se:

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1+u_n}{2} \Leftrightarrow \lim u_{n+1} = \frac{1+\lim u_n}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1+k}{2} \Leftrightarrow 2k = 1+k \Leftrightarrow k = 1$$

Então, $\lim u_n = 1$.

231. Seja l_n a medida do comprimento do lado do quadrado de ordem n .

Tal como a figura ao lado pretende ilustrar, tem-se $l_{n+1} = \sqrt{2} \left(\frac{l_n}{2} \right)$,

ou seja, $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n$.

Seja P_n a medida do perímetro do quadrado de ordem n .

Tem-se $P_{n+1} = 4 l_{n+1} = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l_n \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (4 l_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} P_n$, pelo

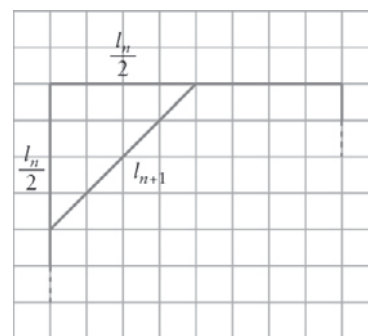
que (P_n) é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A soma dos perímetros de todos os quadrados é, portanto, igual a

$$\lim \left[P_1 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right].$$

Como o perímetro do quadrado exterior é igual a 16, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim \left[16 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] &= 16 \times \frac{1 - 0}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{32}{2 - \sqrt{2}} = \frac{32(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{32(2 + \sqrt{2})}{2} = 16(2 + \sqrt{2}) = \\ &= 32 + 16\sqrt{2} \end{aligned}$$



232. Tem-se, de acordo com a sugestão: $0, (36)$ é igual à soma de todos os termos da progressão geométrica cuja razão é $\frac{1}{100}$ e cujo primeiro termo é $0,36$.

$$\text{Ora, } S = \lim S_n = \lim \left[0,36 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n}{1 - \frac{1}{100}} \right] = 0,36 \times \frac{1 - 0}{\frac{99}{100}} = 0,36 \times \frac{100}{99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

233.

Tem-se $v_n = (-1)^n \times (-k)^n$. A sucessão definida por $(-k)^n$ é uma sucessão da família das sucessões definidas por a^n , com $a \in]0, 1[$, que já sabemos que tem limite igual a 0.

A sucessão definida por $(-1)^n$ é limitada e, portanto, a sucessão (v_n) tende para 0 porque é o produto de uma sucessão limitada por outra que tende para 0.

+ Exercícios Propostos

Pág. 103

234. Opção (D)

Tem-se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, pelo que $A \cap B = \{2, 3, 5\}$.

Então, o conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é o intervalo $[5, +\infty[$.

235. Opção (C)

Tem-se:

- A não tem máximo e o mínimo de A é 2.
- $B = [3, +\infty[$, pelo que B não tem máximo e o mínimo de B é 3.

236. Opção (D)

Tem-se $\left\{x \in [0, \pi]: \sin x < \frac{1}{2}\right\} = [0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6}, \pi]$, pelo que $A =]\frac{5\pi}{6}, \pi]$; portanto, A não tem mínimo e o máximo de A é π .

237. Opção (D)

Os termos de (a_n) são todos ímpares, pelo que o número não é termo de (a_n) .

Nenhum quadrado perfeito termina em 2, pelo que o número não é termo de (b_n) .

Os termos de (c_n) são todos múltiplos de 3, pelo que o número não é termo de (c_n) .

O número é termo de (d_n) : é o termo cuja ordem é igual ao quadrado do número.

238. Opção (D)

A sucessão não é majorada pois, para n par, ela é a restrição, ao conjunto dos números naturais pares, da função de variável real definida por $f(x) = x$.

A sucessão não é minorada pois, para n ímpar, ela é a restrição, ao conjunto dos números naturais ímpares, da função de variável real definida por $f(x) = -x^2$.

Pág. 104

239. Opção (A)

Dado que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$, pelo que (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_1$.

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n < 0$.

240. Opção (D)

$$r = u_4 - u_3 = 12 - 16 = -4$$

$$u_3 = u_2 + r \Leftrightarrow 16 = u_2 - 4 \Leftrightarrow u_2 = 20$$

241. Opção (C)

$$\text{Tem-se } u_1 + u_{10} = 16 \Leftrightarrow u_1 + (u_1 + 9r) = 16 \Leftrightarrow 2u_1 + 9r = 16.$$

$$\text{Ora, } u_5 + u_6 = (u_1 + 4r) + (u_1 + 5r) = 2u_1 + 9r, \text{ pelo que se tem } u_5 + u_6 = 16.$$

242. Opção (B)

$$\text{Tem-se } u_4 = u_2 \times r^{4-2} \Leftrightarrow 54 = 6 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = -3 \vee r = 3$$

Como a progressão é não monótona, tem-se $r = -3$.

$$u_2 = u_1 \times r \Leftrightarrow 6 = u_1 \times (-3) \Leftrightarrow u_1 = -2$$

243. Opção (C)

$$S_5 = u_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} = u_1 \times \frac{1-2^5}{1-2} = u_1 \times \frac{1-32}{-1} = u_1 \times 31$$

244. Opção (D)

(u_n) é a progressão aritmética de razão 5 e cujo primeiro termo é -3 .

$$\text{Portanto, } u_{1001} = u_1 + (1001 - 1) \times r = -3 + 5000 = 4997.$$

Pág. 105**245. Opção (C)**

$$\lim \left(1 + \frac{3}{4n+5} \right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

246. Opção (B)

(u_n) tende para $+\infty$

247. Opção (C)

Toda a sucessão convergente é limitada, mas pode não ser monótona, como, por exemplo, a sucessão de termo geral $(-1)^n \times \frac{1}{n}$.

248. Opção (A)

$$\lim \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{1+0}{1+(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

249. Opção (C)

Tem-se:

A sucessão de termo geral $9 - 2n$ é decrescente e tende para $-\infty$.

A sucessão de termo geral $2n - 9$ é crescente e tende para $+\infty$.

A sucessão de termo geral $9 - \frac{2}{n}$ é crescente e tende para 9.

A sucessão de termo geral $9 + \frac{2}{n}$ é decrescente e tende para 9.

250. Opção (D)

Como a razão da progressão é positiva, a progressão é crescente e tende para $+\infty$.

251. Opção (B)

Como a razão da progressão pertence a $]0, 1[$, os valores absolutos dos termos da sucessão são cada vez menores e tendem para 0.

252. Opção (C)

Como a sucessão tem limite 1, existem infinitos termos da sucessão que pertencem a $V_{\frac{1}{24}}(1)$, ou seja, existem infinitos termos da sucessão que são maiores do que $\frac{1}{24}$.

Pág. 106

253.

- a) Conj. dos majorantes: $[10, +\infty[$; conj. dos minorantes: $] -\infty, 2]$; máximo: 10; mínimo: 2.
- b) Não é majorado; conj. dos minorantes: $] -\infty, 37]$; não tem máximo; mínimo: 37.
- c) Conj. dos majorantes: $[6, +\infty[$; não é minorado; máximo: 6; não tem mínimo.
- d) Conj. dos majorantes: $[6, +\infty[$; conj. dos minorantes: $] -\infty, 2]$; máximo: 6; não tem mínimo.
- e) Conj. dos majorantes: $[4, +\infty[$; conj. dos minorantes: $] -\infty, 1]$; máximo: 4; mínimo: 1.
- f) Conj. dos majorantes: $[\sqrt{2}, +\infty[$; conj. dos minorantes: $] -\infty, -\sqrt{2}]$; não tem máximo nem mínimo.

254.

a) Tem-se: $x^3 \leq 25x \Leftrightarrow x^3 - 25x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 25) \leq 0$

Resolvamos esta inequação com o auxílio de uma tabela.

	$-\infty$	-5		0		5	$+\infty$
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 25$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x(x^2 - 25)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Portanto, $A =]-\infty, -5] \cup [0, 5]$.

b) O conjunto dos majorantes de A é $[5, +\infty[$.

c) $A \cap B = [0, 5]$, pelo que o máximo de $A \cap B$ é 5.

d) O mínimo de $A \cap B$ é 0.

255.

a) $a_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$ e $a_{10} = 2 \times 10 + 3 = 23$

b) $b_1 = (-1)^1 \times \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ e $b_{10} = (-1)^{10} \times \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$

c) $c_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$ e $c_{10} = 10 + 5 = 15$

256.

a) $\frac{n}{n+1}$

b) n^2

c) $2^n - 1$

257.

a) $u_1 = \frac{3 \times 1 + 25}{1+2} = \frac{28}{3}$; $u_2 = \frac{3 \times 2 + 25}{2+2} = \frac{31}{4}$ e $u_3 = \frac{3 \times 3 + 25}{3+2} = \frac{34}{5}$

b) $u_n = 4 \Leftrightarrow \frac{3n+25}{n+2} = 4 \Leftrightarrow 3n + 25 = 4n + 8 \Leftrightarrow n = 17$; portanto, 4 é o décimo sétimo termo de (u_n) .

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+25}{(n+1)+2} - \frac{3n+25}{n+2} = \frac{3n+28}{n+3} - \frac{3n+25}{n+2} = \frac{3n^2+28n+6n+56 - (3n^2+25n+9n+75)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-19}{(n+3)(n+2)}$

Então, como, para todo o natural n , $u_{n+1} - u_n < 0$, conclui-se que (u_n) é decrescente.

d) $u_n > 3 \Leftrightarrow \frac{3n+25}{n+2} > 3 \Leftrightarrow 3n + 25 > 3n + 6 \Leftrightarrow 25 > 6$, que é uma proposição verdadeira, pelo que, para todo o natural n , $u_n > 3$.

- e) A sucessão é decrescente, pelo que o primeiro termo é majorante da sucessão. Portanto, a sucessão é majorada.

Por outro lado, como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$, a sucessão é minorada (3 é minorante). Como a sucessão é minorada e é majorada, podemos concluir que a sucessão é limitada.

$$f) u_n > 3,1 \Leftrightarrow \frac{3n+25}{n+2} > 3,1 \Leftrightarrow 3n + 25 > 3,1n + 6,2 \Leftrightarrow -0,1n > -18,8 \Leftrightarrow n < 188$$

Portanto, há 187 termos superiores a 3,1.

258.

Toda a sucessão de termos positivos é minorada (0 é minorante).

Por outro lado, como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, vem:

$$\frac{3}{u_n} > 4 \Leftrightarrow 3 > 4u_n \Leftrightarrow u_n < \frac{3}{4}$$

Portanto, a sucessão é majorada ($\frac{3}{4}$ é majorante).

Como a sucessão é minorada e é majorada, podemos concluir que a sucessão é limitada.

Pág. 107

259.

Para $n = 1$ obtém-se uma proposição verdadeira, pois $2^{2 \times 1} - 3 \times 1 + 8 = 4 - 3 + 8 = 9$ e 9 é múltiplo de 9.

Hipótese de indução:

$2^{2n} - 3n + 8$ é múltiplo de 9

Tese de indução:

$2^{2(n+1)} - 3(n+1) + 8$ é múltiplo de 9

Demonstração:

$$\begin{aligned} & 2^{2(n+1)} - 3(n+1) + 8 = \\ & = 2^{2n+2} - 3n - 3 + 8 = \\ & = 2^{2n} \times 2^2 - 3n - 3 + 8 = \\ & = 2^{2n} \times 4 - 3n - 3 + 8 = \\ & = 2^{2n} \times (3+1) - 3n - 3 + 8 = \\ & = 2^{2n} \times 3 + 2^{2n} - 3n - 3 + 8 = \\ & = 2^{2n} - 3n + 8 + 2^{2n} \times 3 - 3 = \\ & = 2^{2n} - 3n + 8 + 3 \times (2^{2n} - 1) = \\ & = 2^{2n} - 3n + 8 + 3 \times (4^n - 1) \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, $2^{2n} - 3n + 8$ é múltiplo de 9.

Por outro lado, tendo em conta que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, vem que $3 \times (4^n - 1)$ é múltiplo de 9.

Como a soma de dois múltiplos de 9 é um número múltiplo de 9, está provado que

$2^{2n} - 3n + 8 + 3 \times (4^n - 1)$ é múltiplo de 9.

260.

Para $n = 1$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2 \times 1 + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2+4} \text{ e } \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2+4} \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Hipótese de indução:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{2n+6}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n}{2n+4} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{2}{2(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n+1}{2(n+3)} = \\ &= \frac{n+1}{2n+6} \end{aligned}$$

261.

Para $n = 1$, tem-se:

$$u_1 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \text{ e } u_1 = 1 \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Hipótese de indução:

$$u_n = 2^{n+1} - 3$$

Tese de indução:

$$u_{n+1} = 2^{n+2} - 3$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 3 = \\ &= 2 \times (2^{n+1} - 3) + 3 = \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 6 + 3 = \\ &= 2^{n+2} - 3 \end{aligned}$$

262.

a) Tem-se: $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{u_1}{u_1+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ e $u_3 = \frac{u_2}{u_2+3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{17}{5}} = \frac{2}{17}$

b) Para $n = 1$, tem-se:

$$u_1 > 0 \Leftrightarrow 2 > 0 \text{ e } 2 > 0 \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Hipótese de indução: $u_n > 0$

Tese de indução: $u_{n+1} > 0$

Demonstração:

$$u_n > 0 \Rightarrow u_n + 3 > 0 \Rightarrow \frac{u_n}{u_n + 3} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$$

c) A sucessão é decrescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

Ora, para qualquer número natural n , tem-se:

$$u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_n + 3} < u_n \Leftrightarrow u_n < u_n^2 + 3u_n \Leftrightarrow u_n^2 + 2u_n > 0, \text{ o}$$

que é verdade, pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

d) A sucessão é decrescente, pelo que o primeiro termo é majorante da sucessão.

Portanto, a sucessão é majorada.

263. Designemos a progressão por (a_n) .

Tem-se:

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \times r \Leftrightarrow 21 = 6 + 3r \Leftrightarrow r = 5$$

$$a_n = 6 + (n - 1) \times 5 \Leftrightarrow a_n = 5n + 1$$

$$101 = 5n + 1 \Leftrightarrow n = 20$$

Portanto, 101 é o vigésimo termo de (a_n) .

264. Designemos a progressão por (b_n) .

Tem-se:

$$r = b_2 - b_1 = 89 - 93 = -4, \text{ pelo que se tem } b_n = 93 + (n - 1) \times (-4) \Leftrightarrow b_n = -4n + 97.$$

Determinemos quantos são os termos positivos da progressão:

$$b_n > 0 \Leftrightarrow -4n + 97 > 0 \Leftrightarrow n < \frac{97}{4} \Leftrightarrow n < 24,25 \Leftrightarrow n \leq 24$$

Os únicos termos positivos da progressão são os vinte e quatro primeiros. Determinemos a sua soma:

$$b_{24} = -4 \times 24 + 97 = 1 \text{ e, portanto, } S_{24} = \frac{b_1 + b_{24}}{2} \times 24 = \frac{93 + 1}{2} \times 24 = \frac{94}{2} \times 24 = 1128.$$

265. Designemos a progressão por (c_n) .

Uma condição que traduz o problema é $\begin{cases} S_{10} = 185 \\ S_{20} = 670 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } \begin{cases} S_{10} = 185 \\ S_{20} = 670 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c_1 + c_{10}}{2} \times 10 = 185 \\ \frac{c_1 + c_{20}}{2} \times 20 = 670 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_{10} = 37 \\ c_1 + c_{20} = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_1 + 9r = 37 \\ c_1 + c_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + 9r = 37 \\ 2c_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c_1 - 9r = -37 \\ 2c_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10r = 30 \\ 2c_1 + 19r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ 2c_1 + 19 \times 3 = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ 2c_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ c_1 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, tem-se $c_{30} = c_1 + 29 \times r = 5 + 29 \times 3 = 92$.

266. Designemos a progressão por (u_n) .

Tem-se $S_1 = u_1 = 3 - 2 = 1$ e $S_2 = u_1 + u_2 \Leftrightarrow 12 - 4 = 1 + u_2 \Leftrightarrow u_2 = 7$

Então, $r = u_2 - u_1 = 7 - 1 = 6$, pelo que $u_n = 1 + (n - 1) \times 6$, ou seja, $u_n = 6n - 5$.

Pág. 108

267. Designemos por f_n o número de lugares da fila de ordem n da sala.

(f_n) é a progressão aritmética cujo primeiro termo é 20 e cuja razão é 2.

O número total de lugares da sala é igual a S_{26} .

Tem-se $f_{26} = f_1 + 25 \times r = 20 + 25 \times 2 = 70$, pelo que $S_{26} = \frac{f_1 + f_{26}}{2} \times 26 = \frac{20 + 70}{2} \times 26 = 1170$.

268. Designemos a progressão por (a_n) .

Tem-se:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{6} = 3, \text{ pelo que se tem } a_{17} = a_1 \times r^{17-1} = 6 \times 3^{16} = 258\,280\,326.$$

269. Designemos a progressão por (v_n) .

Como $v_9 = v_7 \times r^{9-7}$ e $v_9 = v_7 \times 2$, tem-se $r^2 = 2$, pelo que, como a razão não pode ser negativa dado que todos os termos da progressão são positivos, se tem $r = \sqrt{2}$.

Então, vem:

$$\begin{aligned} S_{12} = v_1 \times \frac{1-r^{12}}{1-r} &\Leftrightarrow 63 = v_1 \times \frac{1-\sqrt{2}^{12}}{1-\sqrt{2}} \Leftrightarrow v_1 = \frac{63 \times (1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}^{12}} \Leftrightarrow v_1 = \frac{63 \times (1-\sqrt{2})}{1-2^6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 = \frac{63 \times (1-\sqrt{2})}{-63} \Leftrightarrow v_1 = -(1-\sqrt{2}) \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

270. Designemos por q_n a quantia que se tem ao fim de n anos e designemos por Q a quantia que é investida.

Tem-se $q_n = Q \times 1,03^n$.

Uma condição que traduz o problema é $q_{10} = 2000$.

Ora $q_{10} = 2000 \Leftrightarrow Q \times 1,03^{10} = 2000 \Leftrightarrow Q = \frac{2000}{1,03^{10}}$ e, portanto, $Q \approx 1488,19$ euros.

271.

a) No final de 2025 passaram 25 anos desde o início de 2001. Então, nessa altura, os 1000 euros investidos no início de 2001 valem $1000 \times 1,04^{25}$, ou seja, 2665,84 euros.

b) Os valores investidos nos dois primeiros anos valem $1000 \times 1,04^{25} + 1000 \times 1,04^{24}$, ou seja, 5229,14 euros.

c) $1000 \times 1,04^{25} + 1000 \times 1,04^{24} + 1000 \times 1,04^{23} + \dots + 1000 \times 1,04^2 + 1000 \times 1,04^1 =$
 $= 1000 \underbrace{(1,04^{25} + 1,04^{24} + 1,04^{23} + \dots + 1,04^2 + 1,04^1)}_{\substack{\text{soma dos 25 primeiros termos da prog. geom. cujo} \\ \text{primeiro termo é } 1,04 \text{ e cuja razão é } 1,04}} = 1000 \times \left(1,04 \times \frac{1-1,04^{25}}{1-1,04}\right) =$
 $= 1040 \times \frac{1-1,04^{25}}{-0,04} = -26\,000 \times (1 - 1,04^{25}), \text{ ou seja, } 43\,311,74 \text{ euros.}$

272.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+6}{2n+5} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 7}{5 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{5}{n^2} - 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{5}{n^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^2 + 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{23n - 6}{n^3 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(23 - \frac{6}{n}\right)}{n(n^2 + 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{23 - \frac{6}{n}}{n^2 + 3} = \frac{23}{+\infty} = 0$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n}{n+7}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{n+7}} = \sqrt{9} = 3$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{2} = 1$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 7n}{\sqrt{n^2 + 3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{n} - 7\right)}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 7}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}} = \frac{-7}{1} = -7$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-6}{\sqrt{n^2+5n}+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4-\frac{6}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+3} = \frac{4}{1+3} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n(1 + \frac{3}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 7}{3^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 7}{9^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n(1 + \frac{7}{6^n})}{9^n(1 + \frac{1}{9^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{6}{9}\right)^n \times \frac{1 + \frac{7}{6^n}}{1 + \frac{1}{9^n}} \right] = 0 \times \frac{1+0}{1+0} = 0$$

$$\text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(\frac{2 \times 2^n}{3^n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3^n \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right) \right] = +\infty \times (2 \times 0 - 1) = -\infty$$

$$\text{n) Tem-se: } \frac{6n + \sin n}{2n+7} = \frac{6n}{2n+7} + \frac{\sin n}{2n+7}$$

Ora, $\frac{\sin n}{2n+7}$ é o termo geral de uma sucessão que é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $\sin n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{2n+7}$), pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2n+7} = 0$.

$$\text{Então, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \sin n}{2n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+7} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2n+7} = \frac{6}{2} + 0 = 3.$$

$$\text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + (-1)^n}{n^3 + 5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right]}{n^3 \left(1 + \frac{5}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^3}}{1 + \frac{5}{n}}$$

Ora, $\frac{(-1)^n}{n^3}$ é o termo geral de uma sucessão que é igual ao produto de uma sucessão limitada (a sucessão de termo geral $(-1)^n$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{n^3}$), pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$.

$$\text{Então, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + (-1)^n}{n^3 + 5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^3}}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

$$\text{p)} \lim \frac{n^2 \cos(n+1)}{n\sqrt{n^3+3n}} = \lim \frac{n \cos(n+1)}{\sqrt{n^2(n+\frac{3}{n})}} = \lim \frac{n \cos(n+1)}{n\sqrt{n+\frac{3}{n}}} = \lim \frac{\cos(n+1)}{\sqrt{n+\frac{3}{n}}}$$

Ora, $\frac{\cos(n+1)}{\sqrt{n+\frac{3}{n}}}$ é o termo geral de uma sucessão que é igual ao produto de uma sucessão limitada

(a sucessão de termo geral $\cos(n+1)$) por uma sucessão com limite igual a zero (a sucessão de termo geral $\frac{1}{\sqrt{n+\frac{3}{n}}}$), pelo que $\lim \frac{n^2 \cos(n+1)}{n\sqrt{n^3+3n}} = \lim \frac{\cos(n+1)}{\sqrt{n+\frac{3}{n}}} = 0$.

273.

a)

De acordo com a definição, temos de provar que, para todo o $L > 0$, existe uma ordem p tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

Seja, então, $L > 0$, qualquer. Tem-se:

$$u_n > L \Leftrightarrow 2n - 6 > L \Leftrightarrow n > \frac{L+6}{2}$$

Portanto, $n > \frac{L+6}{2} \Rightarrow u_n > L$.

Seja p um número natural tal que $p > \frac{L+6}{2}$.

Tem-se, então, para qualquer n natural, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$.

b)

De acordo com a definição, temos de provar que, para todo o $L > 0$, existe uma ordem p tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$$

Seja, então, $L > 0$, qualquer. Tem-se:

$$u_n < -L \Leftrightarrow 1 - n < -L \Leftrightarrow n > L + 1$$

Portanto, $n > L + 1 \Rightarrow u_n < -L$.

Seja p um número natural tal que $p > L + 1$.

Tem-se, então, para qualquer n natural, $n \geq p \Rightarrow u_n < -L$.

c) De acordo com a definição, temos de provar que, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem p tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Seja, então, $\delta > 0$, qualquer.

Tem-se:

$$\begin{aligned} |u_n - 3| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3n+1-3n-6}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n+2} < \delta \Leftrightarrow 5 < n\delta + 2\delta \Leftrightarrow n > \frac{5-2\delta}{\delta} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } n > \frac{5-2\delta}{\delta} \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

$$\text{Seja } p \text{ um número natural tal que } p > \frac{5-2\delta}{\delta}$$

$$\text{Tem-se, então, para qualquer } n \text{ natural, } n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Pág. 109

274.

a) u_n é da forma $\frac{an+b}{cn+d}$ com $cn+d \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$, pelo que se tem:

$$\lim u_n = \lim \frac{4n+3}{2n-1} = \frac{4}{2} = 2$$

b) Da alínea anterior, conclui-se que (u_n) é uma sucessão convergente, pelo que é limitada.

$$\begin{aligned} \text{c) } u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1)+3}{2(n+1)-1} - \frac{4n+3}{2n-1} = \frac{4n+7}{2n+1} - \frac{4n+3}{2n-1} = \frac{8n^2+14n-4n-7-(8n^2+4n+6n+3)}{(2n+1)(2n-1)} = \\ &= \frac{8n^2+14n-4n-7-8n^2-4n-6n-3}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-10}{4n^2-1} \end{aligned}$$

Como $\frac{-10}{4n^2-1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto (u_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} \text{d) } u_n < 2,0001 &\Leftrightarrow \frac{4n+3}{2n-1} < 2,0001 \Leftrightarrow 4n+3 < 2,0001(2n-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4n+3 < 4,0002n-2,0001 \Leftrightarrow 4n-4,0002n < -3-2,0001 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,0002n < -5,0001 \Leftrightarrow n > \frac{-5,0001}{-0,0002} \Leftrightarrow n > 25\,000,5 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se $u_n < 2,0001$ a partir da ordem 25 001 inclusive.

275.

a) Qualquer sucessão cujo termo geral seja da forma $a + \frac{b}{n}$, com $b > 0$, é decrescente e tem limite igual a a .

Então, para que a sucessão seja decrescente, tenha limite 5 e o primeiro termo seja 8, basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $5 + \frac{3}{n}$.

b) Qualquer sucessão cujo termo geral seja da forma $a + \frac{b}{n}$, com $b < 0$, é crescente e tem limite igual a a .

Então, para que a sucessão seja crescente, tenha limite 6 e o primeiro termo seja 5, basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $6 - \frac{1}{n}$.

c) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

d) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral n .

e) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $-n$.

f) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $n + (-1)^n$.

g) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $-n + (-1)^n$.

h) Basta considerar, por exemplo, a sucessão de termo geral $(-1)^n$.

276. (u_n) é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e cuja razão também é $\frac{1}{3}$, pelo que se tem $u_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

Então, $\lim u_n = \frac{1}{2} \times \lim \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{2} \times (1 - 0) = \frac{1}{2}$.

277.

a) $u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{2 \times 11 + 3} = \sqrt{25} = 5$

b)

Para $n = 1$, tem-se: $u_1 > 3 \Leftrightarrow 11 > 3$ e $11 > 3$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $u_n > 3$

Tese de indução: $u_{n+1} > 3$

Demonstração:

$$u_n > 3 \Rightarrow 2u_n > 6 \Rightarrow 2u_n + 3 > 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2u_n + 3} > \sqrt{9} \Rightarrow u_{n+1} > 3$$

c)

A sucessão é decrescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} < u_n$.

Para $n = 1$, tem-se: $u_2 < u_1 \Leftrightarrow 5 < 11$
e $5 < 11$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $u_{n+1} < u_n$

Tese de indução: $u_{n+2} < u_{n+1}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\Rightarrow 2u_{n+1} < 2u_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2u_{n+1} + 3 < 2u_n + 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{2u_{n+1} + 3} < \sqrt{2u_n + 3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1} \end{aligned}$$

d) Como a sucessão é decrescente, $u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $u_n \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $3 < u_n \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão é limitada e, por isso, é convergente.

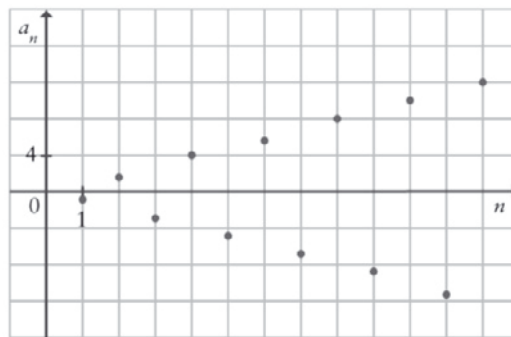
e) Seja $k \in \mathbb{R}$ o limite de (u_n) , cuja existência está garantida na alínea anterior.

Tem-se $\lim u_n = \lim \sqrt{2u_n + 3} = \sqrt{2 \lim u_n + 3}$, pelo que se tem $k = \sqrt{2k + 3}$.

$$k = \sqrt{2k + 3} \Rightarrow k^2 = 2k + 3 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 3$$

Como $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim u_n$ não pode ser igual a -1 ; portanto, $\lim u_n = 3$.

278. A figura seguinte ilustra um contraexemplo: para qualquer $L > 0$, existem infinitos termos de (a_n) maiores do que L , mas (a_n) não tende para $+\infty$, pois não é verdade que, para qualquer $L > 0$, exista uma ordem, a partir da qual, todos os termos de (a_n) sejam superiores a L .



$$\text{Tem-se: } a_n = (-1)^n \times n = \begin{cases} -n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

279.

Seja $L > 0$.

Se (u_n) não é majorada, não tem majorantes.
Em particular, L não é majorante de (u_n) .

Portanto, existe nesta sucessão pelo menos um termo maior do que L . Designemos esse termo por u_p . Como (u_n) é crescente, todos os termos de ordem superior a p são maiores do que u_p , sendo, portanto, maiores do que L . Tem-se, assim, para qualquer n natural, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$.

Pág. 110

280.

a)

A sucessão é constante se e só se, para todo o número natural n , $u_{n+1} = u_n$

Tem-se, então:

$$3u_{n+1} = 2u_n + 1 \Leftrightarrow 3u_n = 2u_n + 1 \Leftrightarrow u_n = 1$$

Portanto, fazendo $u_1 = 1$, tem-se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$

b₁) (v_n) é uma progressão geométrica não identicamente nula se e só se, para todo o número natural n , $\frac{v_{n+1}}{v_n} = k$, em que k é um número real.

Então, em particular, tem que se ter: $\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_2}{v_1}$

Determinemos h de modo que esta condição se verifique e, em seguida, confirmemos que, para esse valor de h , a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica.

Tem-se, $3u_{n+1} = 2u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$, pelo que, como $u_1 = 2$, vem $u_2 = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ e $u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{9} + \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$.

Então, $v_1 = u_1 - h = 2 - h$, $v_2 = u_2 - h = \frac{5}{3} - h$ e $v_3 = u_3 - h = \frac{13}{9} - h$

$$\begin{aligned} \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_2}{v_1} &\Leftrightarrow \frac{\frac{13}{9} - h}{\frac{5}{3} - h} = \frac{\frac{5}{3} - h}{2 - h} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{9} - h\right)(2 - h) = \left(\frac{5}{3} - h\right)^2 \Leftrightarrow \frac{26}{9} - \frac{31}{9}h + h^2 = \frac{25}{9} - \frac{10}{3}h + h^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{31}{9}h + \frac{10}{3}h = \frac{25}{9} - \frac{26}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}h = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow h = 1 \end{aligned}$$

Confirmemos que, para $h = 1$, (v_n) é uma progressão geométrica.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$; está confirmado.

b₂) (v_n) é a progressão geométrica cuja razão é $\frac{2}{3}$ e cujo primeiro termo é 1, pelo que se tem

$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ e, então, como $v_n = u_n - 1$, $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1$.

$$\mathbf{b}_3) \quad S_p = \sum_{n=1}^p v_n = v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{\frac{1}{3}} = 3 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right]$$

$$S'_p = \sum_{n=1}^p u_n = \sum_{n=1}^p (v_n + 1) = \sum_{n=1}^p v_n + \sum_{n=1}^p 1 = 3 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right] + p$$

$$\mathbf{b}_4) \quad \lim S_p = 3 \times \lim \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right] = 3 \times [1 - 0] = 3$$

$$\lim S'_p = \lim \left[3 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right] + p\right] = 3 \times \lim \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right] + \lim p = 3 + \infty = +\infty$$

281. Tem-se:

a₁)

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - 1}{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) + 1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{u_n^2 + 1}{u_n} - 1}{\frac{1}{2} \times \frac{u_n^2 + 1}{u_n} + 1} = \frac{\frac{u_n^2 + 1}{2u_n} - 1}{\frac{u_n^2 + 1}{2u_n} + 1} = \frac{\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n}}{\frac{u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n}} = \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2 + 2u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n + 1)^2} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)^2 = w_n^2 \end{aligned}$$

a₂)

$$w_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

Vamos provar por indução que $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$.

Para $n = 1$, tem-se:

$$w_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{1-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^0} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} \text{ e}$$

$w_1 = \frac{1}{3}$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$

Tese de indução: $w_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

Demonstração:

$$w_{n+1} = w_n^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1} \times 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Leftrightarrow w_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow w_n u_n + w_n = u_n - 1 \Leftrightarrow w_n u_n - u_n = -1 - w_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_n(w_n - 1) = -1 - w_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - w_n}{w_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + w_n}{1 - w_n}, \text{ pelo que se tem } u_n = \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

c) Determinação de $\lim u_n$:

Começemos por provar que a sucessão (u_n) tem os termos maiores do que 1 e é decrescente.

Vamos mostrar, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

Para $n = 1$, vem $u_1 > 1$ que é uma proposição verdadeira pois $2 > 1$.

Hipótese de indução: $u_n > 1$

Tese de indução: $u_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$u_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) > 1 \Leftrightarrow (u_n)^2 + 1 - 2u_n > 0 \Leftrightarrow (u_n - 1)^2 > 0, \text{ o que é verdade para todo o}$$

natural n , pois, por hipótese, $u_n > 1$.

Mostremos, agora, que (u_n) é decrescente.

$$\text{Tem-se } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2} u_n = \frac{1 - (u_n)^2}{2u_n} < 0$$

Então, como (u_n) é decrescente e é minorada, é convergente.

$$\text{Ora, se } \lim u_n = a, \text{ tem-se } a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow a^2 = 1.$$

Como a sucessão tem os termos positivos, tem-se $a = 1$, ou seja, $\lim u_n = 1$.

Determinação de $\lim w_n$:

$$\lim w_n = \lim \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

282.

a₁) Relativamente à figura ao lado, que pretende ilustrar a situação descrita, seja r_n o comprimento do segmento de ordem n da figura do enunciado.

Tem-se:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{r_n}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{r_n}{\sqrt{3}}$$

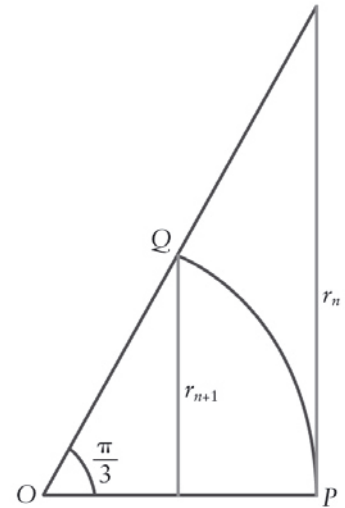
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{r_{n+1}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{OQ} \Leftrightarrow r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{r_n}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_{n+1} = \frac{1}{2} \times r_n$$

Portanto, (r_n) é a progressão geométrica cuja razão é $\frac{1}{2}$ e cujo primeiro termo é o comprimento do segmento $[BC]$ da figura do enunciado, ou seja, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Então, tem-se } S_{10} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{3} \times \left[1 - \frac{1}{2^{10}}\right] = \frac{1023\sqrt{3}}{1024}$$



a₂) Relativamente à figura ao lado, que pretende ilustrar a situação descrita, seja a_n o comprimento do arco de ordem n da figura do enunciado.

Tem-se:

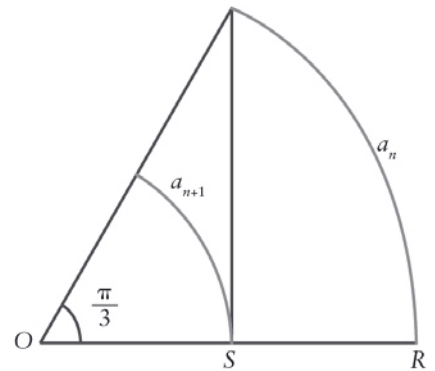
$$a_n = \frac{\pi}{3} \times \overline{OR}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \overline{OS} = \frac{1}{2} \times \overline{OR}$$

$$a_{n+1} = \frac{\pi}{3} \times \overline{OS} = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{OR}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{3} \times \overline{OR}\right) = \frac{1}{2} \times a_n$$

Portanto, (a_n) é a progressão geométrica cuja razão é $\frac{1}{2}$ e cujo primeiro termo é o comprimento do arco AB da figura do enunciado, ou seja, $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{Então, tem-se } S'_{10} = \frac{\pi}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3} \times \left[1 - \frac{1}{2^{10}}\right] = \frac{2\pi}{3} \times \frac{1023}{1024} = \frac{341\pi}{512}.$$



$$\mathbf{a_3)} \lim S_n = \lim \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] = \sqrt{3} \times \lim \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \sqrt{3} \times (1 - 0) = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{a_4)} \lim S'_n = \lim \left[\frac{\pi}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] = \frac{2\pi}{3} \times \lim \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \frac{2\pi}{3} \times (1 - 0) = \frac{2\pi}{3}$$

b₁) Tem-se, para qualquer $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, e considerando as designações utilizadas em a₁) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_n}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{r_n}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{r_{n+1}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow r_{n+1} = \operatorname{sen} \alpha \times \overline{OQ} \Leftrightarrow r_{n+1} = \operatorname{sen} \alpha \times \overline{OP} \Leftrightarrow r_{n+1} = \operatorname{sen} \alpha \times \frac{r_n}{\operatorname{tg} \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{n+1} = \cos \alpha \times r_n$$

Portanto, (r_n) é a progressão geométrica cuja razão é $\cos \alpha$ e cujo primeiro termo é o comprimento do segmento $[BC]$ da figura do enunciado, ou seja, $\operatorname{sen} \alpha$.

Então, tem-se:

$$\lim S_n = \lim \left[\operatorname{sen} \alpha \times \frac{1 - (\cos \alpha)^n}{1 - \cos \alpha} \right] = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \lim [1 - (\cos \alpha)^n] = \quad \left| \begin{array}{l} \text{Tem-se, para qualquer } \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \cos \alpha \in]0, 1[, \text{ pelo que se tem, em} \\ \text{qualquer caso, } \lim (\cos \alpha)^n = 0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} \times (1 - 0) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

b₂) Tem-se, para qualquer $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, e considerando as designações utilizadas em a₂) :

$$a_n = \alpha \times \overline{OR}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \overline{OS} = \cos \alpha \times \overline{OR}$$

$$a_{n+1} = \alpha \times \overline{OS} = \frac{\pi}{3} \times (\cos \alpha \times \overline{OR}) = \cos \alpha \times \left(\frac{\pi}{3} \times \overline{OR} \right) = \cos \alpha \times a_n$$

Portanto, (a_n) é a progressão geométrica cuja razão é $\cos \alpha$ e cujo primeiro termo é o comprimento do arco AB da figura do enunciado, ou seja, α .

Então, tem-se:

$$\lim S'_n = \lim \left[\alpha \times \frac{1 - (\cos \alpha)^n}{1 - \cos \alpha} \right] = \frac{\alpha}{1 - \cos \alpha} \times \lim [1 - (\cos \alpha)^n] = \frac{\alpha}{1 - \cos \alpha} \times (1 - 0) = \frac{\alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Tema 4 | Funções Reais de Variável Real

Atividades «Será que...?»

Pág. 8

SERÁ QUE..?

Pontos aderentes a um conjunto

- a) Por exemplo: $a_n = \frac{1}{2}$; $b_n = \frac{n+1}{2n}$; $c_n = \frac{2n-1}{4n}$
- b) Por exemplo: $a_n = 1$; $b_n = \frac{2n-1}{2n}$; $c_n = \frac{3n-1}{3n}$
- c) Por exemplo: $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{2n}$; $c_n = \frac{1}{n^2}$

Não existe nenhuma sucessão de termos em $]0, 1]$ com limite 2, pois, para qualquer sucessão com limite 2, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem, por exemplo, a $V_{0,5}(2)$, pelo que não pertencem a $]0, 1]$.

Também não existe nenhuma sucessão de termos em $]0, 1]$ com limite $-0,001$, pois, para qualquer sucessão com este limite, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem, por exemplo, a $V_{0,00005}(-0,001)$, pelo que não pertencem a $]0, 1]$.

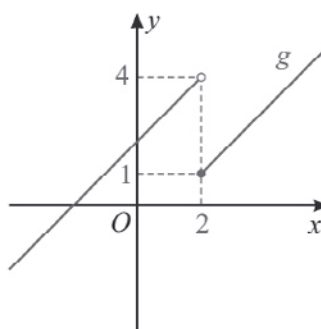
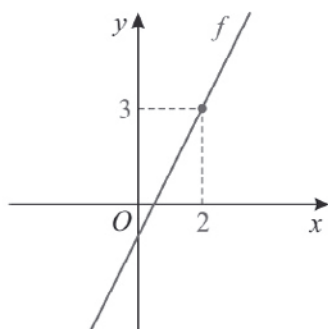
Também não existe nenhuma sucessão de termos em $]0, 1]$ com limite $1,000005$, pois, para qualquer sucessão com este limite, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem, por exemplo, a $V_{0,000001}(1,000005)$, pelo que não pertencem a $]0, 1]$.

Pág. 11

SERÁ QUE..?

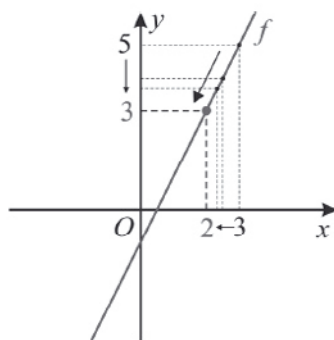
Funções de variável real e sucessões

1.



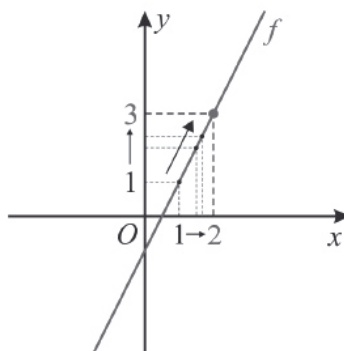
2.

n	u_n	$f(u_n)$
1	3	5
2	2,5	4
3	2,33...	3,66...
4	2,25	3,5
5	2,2	3,4
10	2,1	3,2
25	2,04	3,08
50	2,02	3,04
↓	↓	↓
$+\infty$	2	3



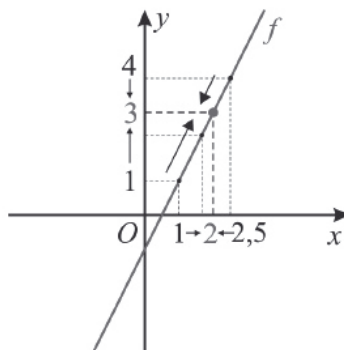
Tem-se: $f(u_n) = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 3 + \frac{2}{n} \rightarrow 3$

n	v_n	$f(v_n)$
1	1	1
2	1,5	2
3	1,66...	2,33...
4	1,75	2,5
5	1,8	2,6
10	1,9	2,8
25	1,96	2,92
50	1,98	2,96
↓	↓	↓
$+\infty$	2	3



Tem-se: $f(v_n) = f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 1 = 3 - \frac{2}{n} \rightarrow 3$

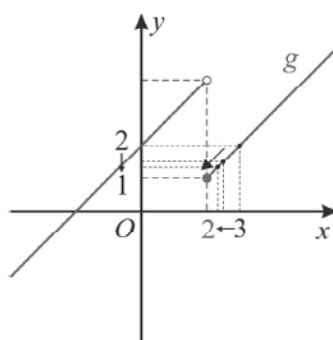
n	w_n	$f(w_n)$
1	1	1
2	2,5	4
3	1,66...	2,33...
4	2,25	3,5
5	1,8	2,6
10	2,1	3,2
25	1,96	2,92
50	2,02	3,04
↓	↓	↓
$+\infty$	2	3



Tem-se: $f(w_n) = f\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 = 3 + \frac{2 \times (-1)^n}{n} \rightarrow 3$

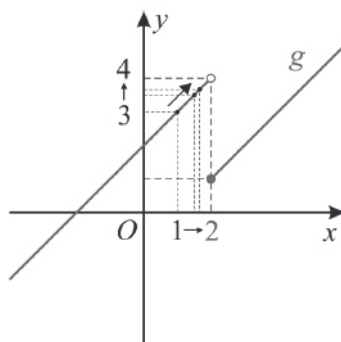
3.

n	u_n	$g(u_n)$
1	3	2
2	2,5	1,5
3	2,33...	1,33...
4	2,25	1,25
5	2,2	1,2
10	2,1	1,1
25	2,04	1,04
50	2,02	1,02
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	2	1



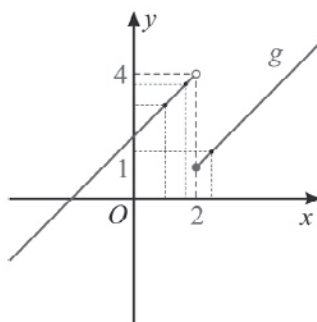
Tem-se: $g(u_n) = g\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n} - 1 = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$

n	v_n	$g(v_n)$
1	1	3
2	1,5	3,5
3	1,66...	3,66...
4	1,75	3,75
5	1,8	3,8
10	1,9	3,9
25	1,96	3,96
50	1,98	3,98
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	2	4



Tem-se: $g(v_n) = g\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} + 2 = 4 - \frac{1}{n} \rightarrow 4$

n	w_n	$g(w_n)$
1	1	3
2	2,5	1,5
3	1,66...	3,66...
4	2,25	1,25
5	1,8	3,8
10	2,1	1,1
25	1,96	3,96
50	2,02	1,02
$\downarrow$	$\downarrow$	
$+\infty$	2	Não tem limite



Tem-se: $g(w_n) = g\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$. Esta sucessão não tem limite.

4. Seja x_n uma sucessão que tende para 2.

Tem-se: $\lim f(x_n) = \lim(2x_n - 1) = \lim(2x_n) - \lim(1) = 2\lim(x_n) - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$

Portanto, não é possível definir o termo geral de uma sucessão (x_n) convergente para 2 e tal que a sucessão $(f(x_n))$ não tenda para 3.

No caso da função g , o que se passa é que:

- a sucessão (u_n) tende para 2, por valores inferiores a 2; ora, objetos próximos de 2 e inferiores a 2 têm imagens próximas de 4;
- a sucessão (v_n) tende para 2, por valores superiores a 2; ora, objetos próximos de 2 e superiores a 2 têm imagens próximas de 1.

Pág. 22

SERÁ QUE..?

Limites «no infinito»

1.

a1) $f(u_n) = \frac{3(u_n)^2 - 1}{(u_n)^2 + 2}$

a2) $f(v_n) = \frac{3(v_n)^2 - 1}{(v_n)^2 + 2}$

a3) Admitindo que se tem $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$, vem $g(u_n) = (u_n)^2 + 1$.

a4) Admitindo que se tem $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$, vem $g(v_n) = \frac{1}{(v_n)^2 + 1}$.

b1) $\lim f(u_n) = \lim \frac{3(u_n)^2 - 1}{(u_n)^2 + 2} = \lim \frac{3 - \frac{1}{(u_n)^2}}{1 + \frac{2}{(u_n)^2}} = \frac{3 - \frac{1}{(-\infty)^2}}{1 + \frac{2}{(-\infty)^2}} = \frac{3 - \frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{2}{+\infty}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$

b2) $\lim f(v_n) = \lim \frac{3(v_n)^2 - 1}{(v_n)^2 + 2} = \lim \frac{3 - \frac{1}{(v_n)^2}}{1 + \frac{2}{(v_n)^2}} = \frac{3 - \frac{1}{(+\infty)^2}}{1 + \frac{2}{(+\infty)^2}} = \frac{3 - \frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{2}{+\infty}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$

b3) $\lim g(u_n) = \lim[(u_n)^2 + 1] = (-\infty)^2 + 1 = +\infty$

b4) $\lim g(v_n) = \lim \frac{1}{(v_n)^2 + 1} = \frac{1}{(+\infty)^2 + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$

2. O domínio de h é o intervalo $[-1, 1]$. Assim, não é possível considerar sucessões com limite $-\infty$, ou com limite $+\infty$, com todos os seus termos pertencentes ao domínio de h . Por isso, não tem sentido falar de $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, nem tem sentido falar de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

SERÁ QUE..?

Indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$

1.

- a) $g(x)$ pode ser qualquer polinómio de grau superior a 3, como, por exemplo, $x^4 - 3x + 5$.
- b) $g(x)$ pode ser qualquer polinómio de grau inferior a 3 e tal que o termo de maior grau tenha coeficiente negativo, como, por exemplo, $-3x^2 + 5x + 2$.
- c) $g(x)$ pode ser qualquer polinómio de grau 3 e tal que o termo de grau 3 tenha coeficiente $\frac{2}{5}$, como, por exemplo, $\frac{2}{5}x^3 - 4x^2 + 2x - 7$.

2. Seja $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ e $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$.

Se $n > m$, então:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, se a_0 e b_0 tiverem o mesmo sinal;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, se a_0 e b_0 tiverem sinais contrários.

Se $n < m$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Se $n = m$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$.

SERÁ QUE..?

Funções contínuas e descontínuas

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| A. Contínua | B. Contínua | C. Não contínua |
| D. não contínua | E. Contínua | F. Contínua |
| G. Contínua | H. Não contínua | I. Não contínua |
| J. Contínua | K. Contínua | |

SERÁ QUE..?

Assíntotas

Primeiro gráfico

As retas p e q são assíntotas ao gráfico da função.

Segundo gráfico (à direita do primeiro gráfico)

Nenhuma das retas (s e t) é assíntota ao gráfico da função.

Terceiro gráfico

A reta u é assíntota ao gráfico da função.

Quarto gráfico (à direita do terceiro gráfico)

A reta r é assíntota ao gráfico da função.

Quinto gráfico

A reta k não é assíntota ao gráfico da função.

Sexto gráfico (à direita do quinto gráfico)

As retas a , b e c são assíntotas ao gráfico da função.

A reta d não é assíntota ao gráfico da função.

Sétimo gráfico

As retas l , m e n são assíntotas ao gráfico da função.

Oitavo gráfico (à direita do sétimo gráfico)

Nenhuma das retas (t , w e z) é assíntota ao gráfico da função.

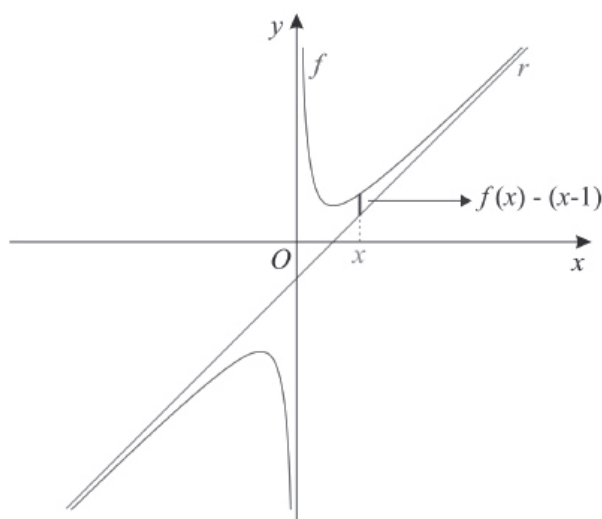
SERÁ QUE..?

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) - (x - 1) &= \frac{x^2 - x + 1}{x} - (x - 1) = \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x} - x + 1 = \\ &= x - 1 + \frac{1}{x} - x + 1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

c)



- d) Quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, o comprimento do segmento que representa a diferença $f(x) - (x-1)$ tende para zero.
Por isso, o gráfico da função f tende a confundir-se com a reta de equação $y = x - 1$.

Pág. 75

SERÁ QUE..?

Uma hipérbole

- a) $\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{2})^-} \frac{4x-3}{2x-5} = \frac{7}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2} = 2$
Portanto, as retas de equações $x = \frac{5}{2}$ e $y = 2$.

- b) Sugere-se que se escreva $\frac{4x-3}{2x-5}$ na forma $b + \frac{k}{x-a}$ como se apresenta, em seguida, no manual.

Pág. 78

SERÁ QUE..?

Rio acima, rio abaixo

- a) À ida, a velocidade do barco, em relação às margens, é de 2 km/h ($4 - 2 = 2$).
Portanto, demora 6 horas a percorrer 12 km.
À volta, a velocidade do barco, em relação às margens, é de 6 km/h ($4 + 2 = 6$).
Portanto, demora 2 horas a percorrer 12 km.
Assim, o tempo total da viagem é de 8 horas.

- b) À ida, a velocidade do barco, em relação às margens, é de 10 km/h ($12 - 2 = 10$).
Portanto, demora 1,2 horas a percorrer 12 km.
À volta, a velocidade do barco, em relação às margens, é de 8 km/h ($6 + 2 = 8$).
Portanto, demora 1,5 horas a percorrer 12 km.
Assim, o tempo total da viagem é de 2,7 horas, ou seja, 2 h e 42 min ($0,7 \times 60 = 42$).
Tendo iniciado a viagem às 9 h 15 min, chegou a ponto de partida às 11 h e 57 min.
Portanto, chegou três minutos antes das 12 horas.
- c) $\frac{12}{x-2}$ representa o tempo que demora viagem de ida.
 $\frac{12}{x+2}$ representa o tempo que demora viagem de volta.
 x tem de ser superior a 2, para que o barco consiga subir o rio.
- d) $\frac{12}{x-2} + \frac{12}{x+2} = 2,5$
- e) $\frac{12}{x-2} + \frac{12}{x+2} \leq 4,5$
- f) Resolvida no manual.
A equação está resolvida na mesma página deste **Será que...?**
A inequação está resolvida na página 83.

Pág. 107

SERÁ QUE...?

O passeio do Aníbal

1. $d(0,4) - d(0,2) = 4 - 1 = 3$

O Aníbal percorreu 3 km entre os instantes 0,2 e 0,4 (instantes correspondentes a 12 e a 24 minutos após o início do passeio).

2. $\frac{d(0,4) - d(0,2)}{0,4 - 0,2} = \frac{3}{0,2} = 15$

O Aníbal percorreu os referidos 3 km à velocidade média de 15 km/h.

3. O declive da reta AB é $\frac{10-6}{1-0,7} = \frac{4}{0,3} = \frac{40}{3}$.

$\frac{40}{3}$ km/h é a velocidade média do Aníbal entre os instantes 0,7 e 1 (instantes correspondentes a 42 minutos e a 1 hora após o início do passeio).

4. Por exemplo, o intervalo $[0; 0,2]$ e o intervalo $[0,4; 0,5]$.

5. O intervalo $[0,4; 0,5]$, pois o declive do segmento de reta correspondente a este intervalo é maior do que o declive do segmento de reta correspondente ao intervalo $[0; 0,2]$.

O instante $t = 0,45$ pertence ao intervalo $[0,4; 0,5]$, intervalo durante o qual o Aníbal se deslocou sempre à mesma velocidade de 20 km/h $\left(\frac{6-4}{0,5-0,4} = 20\right)$.

Portanto, no instante $t = 0,45$, o Aníbal deslocava-se a 20km/h.

O instante $t = 0,8$ pertence a um intervalo onde a velocidade não é constante. Neste caso, a velocidade num certo instante tem a ver com o conceito de derivada, que irá ser estudado mais à frente.

Pág. 108

SERÁ QUE..?

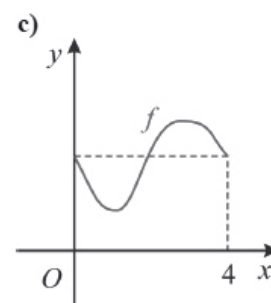
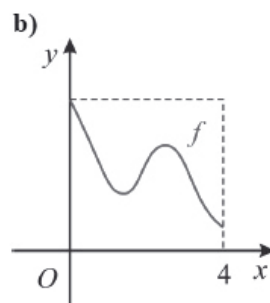
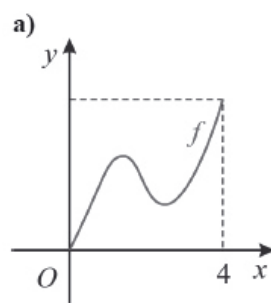
Enchendo um depósito

No manual, apresenta-se a resolução apresentada pelo IAVE, imediatamente a seguir a este **Será que...?**

Pág. 109

SERÁ QUE..?

Taxa média de variação



Tem-se:

$f(4) > f(0)$ é condição necessária e suficiente para a taxa média de variação entre 0 e 4 ser positiva.

$f(4) < f(0)$ é condição necessária e suficiente para a taxa média de variação entre 0 e 4 ser negativa.

$f(4) = f(0)$ é condição necessária e suficiente para a taxa média de variação entre 0 e 4 ser igual a zero.

Pág. 111

SERÁ QUE..?

Na autoestrada

O tempo gasto a percorrer a distância entre as duas portagens permite calcular a velocidade média do percurso entre essas portagens. Porém, essa velocidade média pode estar compreendida entre 50 km/h e 120 km/h e, no entanto, terem existido instantes em que a velocidade foi superior a 120 km/h ou inferior a 50 km/h. Portanto, uma tal medida não permitiria identificar todos os «prevaricadores».

a) Tem-se $p(0) = 60$. Portanto, no instante inicial, o ponto P está a 60 cm da origem.

b) Tem-se $\frac{p(3) - p(0)}{3 - 0} = \frac{12 - 60}{3} = -16$. A velocidade média foi de -16 cm/s.

c) A velocidade no instante 4 é dada por $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{p(t) - p(4)}{t - 4}$.

Tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{p(t) - p(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 19t + 60 - 0}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 19t + 60}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} (t - 15) = -11$$

A velocidade no instante 4 é -11 cm/s.

Como $p(4) = 0$, o ponto P coincide com a origem, no instante $t = 4$, pelo que, nesse instante, a distância de P à origem é igual a zero.

d) A velocidade no instante t_0 é dada por $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p(t) - p(t_0)}{t - t_0}$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p(t) - p(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 - 19t + 60 - (t_0^2 - 19t_0 + 60)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 - t_0^2 - 19t + 19t_0}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0) - 19(t - t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)[(t + t_0) - 19]}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} [(t + t_0) - 19] = 2t_0 - 19 \end{aligned}$$

Assim, a velocidade no instante t é $2t - 19$ cm/s.

A velocidade é nula no instante $t = \frac{19}{2}$.

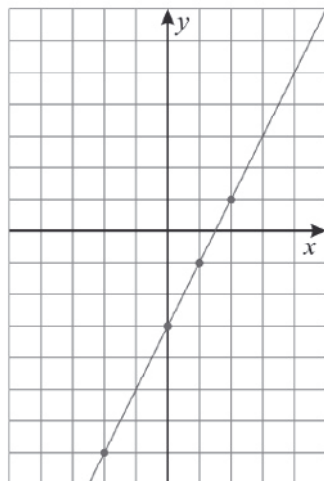
SERÁ QUE..?

Função derivada

1. Tem-se

x	-2	0	1	2
$f'(x)$	-7	-3	-1	1

2. Tem-se:



Seja $A(1, -1)$ e seja $B(2, 1)$.

Tem-se:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1) - (1, -1) = (1, 2)$$

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -3)$, tem-se que a ordenada na origem é igual a -3 .

Assim, a equação reduzida da reta é $y = 2x - 3$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{Tem-se: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) = 2x - 3 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 2x - 3$.

O gráfico desta função é a reta de equação $y = 2x - 3$, desenhada no ponto 2.

SERÁ QUE..?

Derivada do produto

a) Tem-se $f'(x) = 6x + 1$ e $g'(x) = 2$

Portanto, $f'(x) \times g'(x) = (6x + 1) \times 2 = 12x + 2$

b) Tem-se $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (3x^2 + x + 1)(2x + 3) = 6x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 3x + 2x + 3 =$
 $= 6x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

Portanto, $(f \times g)'(x) = 18x^2 + 22x + 5$.

Constata-se, assim, que $(f \times g)' \neq f' \times g'$, ou seja, a derivada de um produto é diferente do produto das derivadas.

SERÁ QUE..?

Derivada de x^n , $n \in \mathbb{N}$

Tem-se: $(x)' = 1 = 1x^0$ $(x^2)' = 2x = 2x^1$ $(x^3)' = 3x^2$

Tal conduz naturalmente a conjecturar que $(x^4)' = 4x^3$ e que $(x^5)' = 5x^4$

De facto, tem-se:

- $(x^4)' = (x^3 \times x)' = (x^3)' \times x + x^3 \times (x)' = 3x^2 \times x + x^3 \times 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3$
- $(x^5)' = (x^4 \times x)' = (x^4)' \times x + x^4 \times (x)' = 4x^3 \times x + x^4 \times 1 = 4x^4 + x^4 = 5x^4$

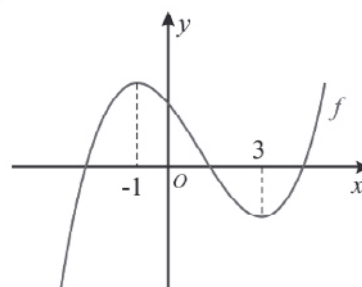
SERÁ QUE..?

Monotonia, extremos e derivada

a) Reproduz-se ao lado o gráfico da função f , obtido com a calculadora.

Analisando o gráfico de f , podemos concluir que:

- a função f é decrescente no intervalo $[-1, 3]$;
- a função f é crescente nos intervalos $]-\infty, -1]$ e $[3, +\infty[$;
- a função f tem um máximo relativo para $x = -1$;
- a função f tem um mínimo relativo para $x = 3$.

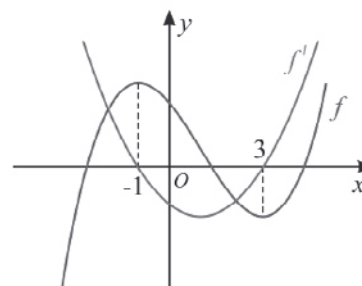


- b) Tem-se $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Reproduz-se ao lado o gráfico da função f' , obtido com a calculadora, sobreposto ao gráfico da função f .

Analizando o gráfico de f' , podemos concluir que:

- a função f' é negativa no intervalo $]-1, 3[$ e é negativa ou nula no intervalo $[-1, 3]$;
 - a função f' é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]3, +\infty[$ e é positiva ou nula nos intervalos $]-\infty, -1]$ e $[3, +\infty[$;
 - a função f' tem dois zeros: -1 e 3 .
- c) Nos intervalos em que a função f é decrescente, a derivada é negativa ou nula. Nos intervalos em que a função f é crescente, a derivada é positiva ou nula. No ponto em que a função f atinge um máximo relativo, a derivada é nula. No ponto em que a função f atinge um mínimo relativo, a derivada é nula.



Pág. 142

SERÁ QUE..?

Tangentes paralelas a secantes

- a) Tem-se:

$$\bullet f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + 2 \times (-3) - 4 = -9 - 6 - 4 = -19$$

pelo que o ponto A tem coordenadas $(-3, -19)$.

$$\bullet f(0) = \frac{0^3}{3} + 2 \times 0 - 4 = -4$$

pelo que o ponto B tem coordenadas $(0, -4)$.

$$\text{Portanto, } \overrightarrow{AB} = B - A = (0, -4) - (-3, -19) = (3, 15).$$

O declive da reta AB é, portanto, igual a $\frac{15}{3}$, ou seja, igual a 5.

- b) Tem-se $f'(x) = x^2 + 2$, pelo que $f'(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + 2 = 3 + 2 = 5$

Portanto, a reta tangente ao gráfico de f no ponto C de abscissa $-\sqrt{3}$ tem declive 5, ou seja, tem declive igual ao da reta AB .

Logo, a reta tangente ao gráfico de f no ponto C é paralela à reta AB .

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Pág. 9

1.

- a) A aderência de A é $[-2, 5]$.
- b) A aderência de A é A .

Pág. 10

2.

$0,1$ não é aderente a A , pois, por exemplo, na vizinhança de raio $0,01$ de $0,1$ não existe qualquer elemento de A não sendo, portanto, possível definir uma sucessão de elementos de A convergente para $0,1$; 1 é aderente a A , pois, por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{2n}$ é uma sucessão de elementos de A convergente para 1 .

3.

a) A aderência de $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \setminus [1, 6[=]-\infty, 1[\cup [6, +\infty[$
A aderência de $\mathbb{R} \setminus [1, 6[$ é $]-\infty, 1] \cup [6, +\infty[$.

c) A aderência de $\mathbb{N}$ é $\mathbb{N}$.

d) Tem-se $\frac{3n+5}{n+2} = 3 - \frac{1}{n+2}$, pelo que a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{3n+5}{n+2}$ é crescente e converge para 3 ; tem-se, ainda, $a_1 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Então, a representação do conjunto A pode ser sugerida pelo gráfico:



A aderência de A é $A \cup \{3\}$.

e) Tem-se
$$(-1)^n \frac{2n+1}{n} = \begin{cases} -2 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Os termos de ordem ímpar da sucessão (b_n) definida por $b_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$ constituem uma sucessão crescente e que converge para -2 e os termos de ordem par da sucessão (b_n) constituem uma sucessão decrescente e que converge para 2 ; tem-se, ainda, $b_1 = -3$ e $b_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Então, a representação do conjunto B pode ser sugerida pelo gráfico:



A aderência de B é $B \cup \{-2, 2\}$.

f) Tem-se $\frac{5-n^2}{n+2} = -n + 2 - \frac{1}{n+2}$, pelo que a sucessão (c_n) definida por $c_n = \frac{5-n^2}{n+2}$ tende para $-\infty$.

Então, não existe, para além dos termos de (c_n) , qualquer outro ponto aderente a C .
A aderência de C é C .

Pág. 13

4. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, então, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de D_f , tal que $x_n \rightarrow 0$, tem-se $\lim f(x_n) = 2$.

5.

a) Não existe, porque as sucessões (u_n) e (v_n) tendem ambas para 1 e as sucessões das imagens têm limites diferentes.

b) Não se sabe se existe; se existir, terá de ser igual a 2.

Pág. 14

6.

a) Sim, porque, como 2 é ponto aderente do domínio de f , podemos considerar sucessões de elementos de D_f , convergentes para 2.

b) Não, porque 2 não é ponto aderente do domínio de f , pelo que não podemos considerar sucessões de elementos de D_f , convergentes para 2.

c) Sim, porque 2 é ponto aderente do domínio de f .

d) Sim, porque 2 é ponto aderente do domínio de f .

e) Sim, porque 2 é ponto aderente do domínio de f .

f) Não, porque 2 não é ponto aderente do domínio de f .

7. A opção correta é (C), pois tem-se:

A sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero tomando sempre valores positivos, pelo que $\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

A sucessão de termo geral $1 - \frac{1}{n}$ tende para 1 tomando sempre valores inferiores a 1, pelo que $\lim f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^2 = 1$.

A sucessão de termo geral $1 + \frac{2}{n}$ tende para 1 tomando sempre valores superiores a 1, pelo que $\lim f\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 3 - 1 = 2$.

A sucessão de termo geral $2 + \frac{1}{n}$ tende para 2, pelo que $\lim f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 3 - 2 = 1$.

Pág. 15

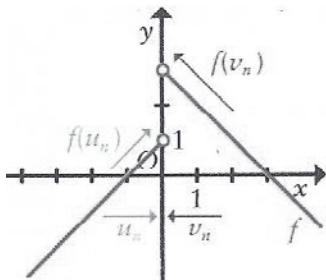
8.

a) $\lim u_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ e $\lim v_n = \lim\frac{1}{n^2} = 0$

b) Tem-se: $f(u_n) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + 1$ e $f(v_n) = f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 3 - \frac{1}{n^2}$, pelo que $\lim f(u_n) = \lim\left(-\frac{1}{n} + 1\right) = 1$ e $\lim f(v_n) = \lim\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$

Então, como existem duas sucessões de elementos de D_f ambas convergentes para 0 para as quais as sucessões das respetivas imagens por meio de f convergem para diferentes valores, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

c)



9. a) Para que $\lim g(u_n) = 1$, basta considerar que (u_n) converge para 2 tomando sempre valores superiores a 2, ou seja, considerar, por exemplo, que $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

b) É uma afirmação falsa, pois, como se viu na alínea anterior, não é verdade que, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de D_g convergente para 2, se tenha $\lim g(x_n) = 3$.

Pág. 16

10. Se considerarmos a sucessão (a_n) definida por $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(g(a_n))$ é definida por $g(a_n) = 2 - \left(2 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$, que tem limite igual a 0.

Se considerarmos a sucessão (b_n) definida por $b_n = 2$ tem-se que a sucessão $(g(b_n))$ é a sucessão constante definida por $g(b_n) = g(2) = 3$, que tem limite igual a 3.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

11.

a) Seja (u_n) uma qualquer sucessão convergente para 0;

$$\lim f(u_n) = \lim (3 - (u_n)^2) = 3 - (\lim u_n)^2 = 3 - 0^2 = 3$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3.$$

b) Seja (v_n) uma qualquer sucessão convergente para -2;

$$\lim f(v_n) = \lim (3 - (v_n)^2) = 3 - (\lim v_n)^2 = 3 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1.$$

Pág. 17

12.

a) A sucessão (u_n) tem os termos todos positivos, pelo que $f(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{b - \frac{1}{n}}{3}$.

$$\text{Portanto, } \lim f(u_n) = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{b - \frac{1}{n}}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{b - \lim \frac{1}{n}}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{3} = 1 \Leftrightarrow b = 3.$$

A sucessão (v_n) tem todos os termos negativos, exceto o primeiro, pelo que, para $n > 1$,

$$f(v_n) = f\left(\frac{1-n}{n^2}\right) = 2 \times \frac{1-n}{n^2} - a.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \lim f(v_n) = 2 &\Leftrightarrow \lim \left(2 \times \frac{1-n}{n^2} - a\right) = 2 \Leftrightarrow 2 \times \lim \frac{1-n}{n^2} - a = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \times \lim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) - a = 2 \Leftrightarrow 2 \times 0 - a = 2 \Leftrightarrow a = -2 \end{aligned}$$

b) Se o limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existir, então, para qualquer sucessão (a_n) com termos todos positivos e convergente para 0 e para qualquer sucessão (b_n) com termos todos negativos e convergente para 0, tem-se $\lim f(a_n) = 3$ e $\lim f(b_n) = 3$.

Ora,

$$\lim f(a_n) = 3 \Leftrightarrow \lim \frac{b - a_n}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{b - \lim a_n}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{b - 0}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{b}{3} = 3 \Leftrightarrow b = 9$$

$$\lim f(b_n) = 3 \Leftrightarrow \lim (2 \times b_n - a) = 3 \Leftrightarrow 2 \times \lim b_n - a = 3 \Leftrightarrow 2 \times 0 - a = 3 \Leftrightarrow a = -3$$

13.

a) Se considerarmos a sucessão (a_n) definida por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(a_n))$ é definida por $f(a_n) = 1 - \frac{1}{n} - 3 = -2 - \frac{1}{n}$, que tem limite igual a -2 .

Se considerarmos a sucessão (b_n) definida por $b_n = 1$ tem-se que a sucessão $(f(b_n))$ é a sucessão constante definida por $f(b_n) = f(1) = 3$, que tem limite igual a 3 .

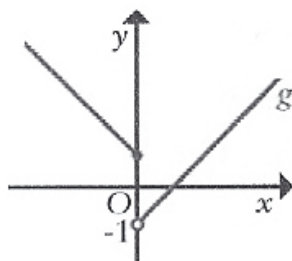
Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Se considerarmos a sucessão (a_n) definida por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(a_n))$ é definida por $f(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$, que tem limite igual a -2 .

Se considerarmos a sucessão (b_n) definida por $b_n = 1$ tem-se que a sucessão $(f(b_n))$ é a sucessão constante definida por $f(b_n) = f(1) = 0$, que tem limite igual a 0 .

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

14. Por exemplo:



Tem-se $\lim u_n = 0$ e os termos de (u_n) são todos positivos, pelo que $\lim g(u_n) = -1$.

Se considerarmos a sucessão (v_n) definida por $v_n = 0$ tem-se que a sucessão $(g(v_n))$ é a sucessão constante definida por $g(v_n) = g(0)$; portanto, $\lim g(v_n) \neq -1$, pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Pág. 18

15. Se considerarmos a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(a_n))$ é definida por $f(a_n) = \frac{1}{n}$, que tem limite igual a 0 .

Se considerarmos a sucessão (b_n) definida por $b_n = -\frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(b_n))$ é definida por $f(b_n) = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n$, que tem limite igual a $+\infty$.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

16. Se considerarmos a sucessão (a_n) definida por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(a_n))$ tem limite igual a $+\infty$.

Se considerarmos a sucessão (b_n) definida por $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ tem-se que a sucessão $(f(b_n))$ tem limite igual a $-\infty$.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Pág. 19

17.

Seja (u_n) uma qualquer sucessão convergente para 1;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|u_n - 1|} = +\infty$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

18. A sucessão (u_n) converge para 1 e os seus termos são inferiores a 1

Por observação de gráfico, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = +\infty$.

Tem-se $v_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Portanto, a sucessão (v_n) converge para 1 e os seus termos são superiores a 1

Por observação de gráfico, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = -\infty$.

Tem-se $w_n = \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1$.

Portanto, a sucessão (w_n) converge para -1 e os seus termos são superiores a -1

Por observação de gráfico, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = +\infty$.

Pág. 20

19. Tem-se $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Então, qualquer que seja a sucessão (u_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos menores do que 0, tem-se $f(u_n) = -1$ pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = -1$ e, qualquer que seja a sucessão (v_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos maiores do que 0, tem-se $f(v_n) = 1$, pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = 1$.

Portanto, os limites de $f(x)$ à esquerda e à direita de 0 são diferentes.

Pág. 21

20. Tem-se:

• Qualquer que seja a sucessão (u_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos menores do que 0, tem-se $f(u_n) = 2u_n + 3$, pelo que $\lim f(u_n) = \lim (2u_n + 3) = 2 \lim u_n + 3 = 3$ e, qualquer que seja a sucessão (v_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos maiores do que 0, tem-se $f(v_n) = 3v_n + 2$ pelo que $\lim f(v_n) = \lim (3v_n + 2) = 3 \lim v_n + 2 = 2$.

Portanto, os limites de $f(x)$ à esquerda e à direita de 0 são diferentes, pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

• Qualquer que seja a sucessão (u_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos menores do que 0, tem-se $g(u_n) = u_n - 1$, pelo que $\lim g(u_n) = \lim (u_n - 1) = \lim u_n - 1 = -1$ e, qualquer que seja a sucessão (v_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos maiores do que 0, tem-se $g(v_n) = v_n$, pelo que $\lim g(v_n) = \lim v_n = 0$.

Portanto, os limites de $g(x)$ à esquerda e à direita de 0 são diferentes, pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

$$\bullet (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} (2x + 3) + (x - 1) & \text{se } x < 0 \\ (3x + 2) + x & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 4x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qualquer que seja a sucessão (u_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos menores do que 0, tem-se $(f + g)(u_n) = 3u_n + 2$, pelo que $\lim (f + g)(u_n) = \lim (3u_n + 2) = 3 \lim u_n + 2 = 2$ e, qualquer que seja a sucessão (v_n) que tenda para 0 e tenha todos os termos maiores do que 0, tem-se $(f + g)(v_n) = 4v_n + 2$, pelo que $\lim (f + g)(v_n) = \lim (4v_n + 2) = 4 \lim v_n + 2 = 2$.
Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x) = 2$.

Pág. 23

21.

Seja (x_n) uma sucessão cujos termos pertencem ao domínio de f e que tende para $+\infty$.

Dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Por outro lado, dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Como uma sucessão não pode ter dois limites diferentes, os números b e c são iguais.

22. Tem-se: $\lim (4n - 1) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} - 2n\right) = -\infty$

Então, tem que ser: $u_n = 4n - 1$ e $v_n = \frac{1-2n^2}{n}$.

Pág. 24

23.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim f(u_n) &= \lim [u_n(2 - (u_n)^2)] = \\ &= \lim u_n \times [2 - (\lim u_n)^2] = \\ &= +\infty \times (-\infty) = -\infty ; \\ \text{portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(-x) &= 2 \times (-x) - (-x)^3 = \\ &= -2x - (-x^3) = -2x + x^3 = \\ &= -(2x - x^3) = -f(x) \\ \text{Como a função é ímpar, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty . \end{aligned}$$

Pág. 25

24. Seja $u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; tem-se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim (\sin u_n) = \lim \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] = \lim 1 = 1$
Seja $v_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$; tem-se $\lim v_n = +\infty$ e $\lim (\sin v_n) = \lim \left[\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] = \lim (-1) = -1$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$.

25.

a) Da observação do gráfico, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

b) Tem-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c) Basta considerar uma sucessão (u_n) tal que $\lim u_n = -\infty$ e uma sucessão (v_n) tal que $\lim v_n = +\infty$; pode ser, por exemplo, $u_n = -n$ e $v_n = n$.

Pág. 28

26. a) Tem-se $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, pelo que se $\lim_{x \rightarrow a} x = 3$ então $a = 3$.

b) Tem-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$, pelo que se $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = 5$ então $k = 5$.

Pág. 29

27.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-3 - x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-3) - \lim_{x \rightarrow -1} x = -3 - (-1) = -2$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -3 - (+\infty) = -3 - \infty = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 100) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \lim_{x \rightarrow +\infty} 100 = +\infty - 100 = +\infty$$

Pág. 30

28.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + x^3) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + (-1)^3 = 1 + 3 - 1 = 3$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} [(x - 1)^2 - 2x + 1] = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{9}{4} + 1 + 1 = \frac{17}{4}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x}{5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x\right) = \frac{2}{5} - (+\infty) = \frac{2}{5} - \infty = -\infty$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 - 3x) \times x^3] = (+\infty - (-\infty)) \times (-\infty) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

29.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{(x^2 - 1)(x + 3)} = \sqrt{(4 - 1)(-2 + 3)} = \sqrt{3}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^5 - 1} = \sqrt[3]{(-1)^5 - 1} = \sqrt[3]{-2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - \sqrt{x + 3}) = 1 - \sqrt{1 + 3} = -1$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \sqrt{1 - x}) = +\infty + \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Pág. 31**30.****a)**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (g(x))^2] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)^2 = 2 + (-3)^2 = 11$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x) \times h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 2 \times (-3) \times (-\infty) = +\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow a} [h(x)]^{100} = \left[\lim_{x \rightarrow a} h(x) \right]^{100} = (-\infty)^{100} = +\infty$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow a} [g(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} h(x) = -3 - (-\infty) = -3 + \infty = +\infty$$

31.**a)**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{2 \times (-2) - 3}{-2 + 1} = \frac{-7}{-1} = 7$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 3} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{1 - \sqrt{3}} = \frac{+\infty + \infty}{1 - \sqrt{3}} = -\infty \quad (\text{tem-se: } 1 - \sqrt{3} < 0)$$

Pág. 32**32.****a)**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{1-x}} = \frac{3}{\sqrt{1-(-\infty)}} = \frac{3}{\sqrt{+\infty}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(-3+3)^2} = \frac{-3}{0^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

c)

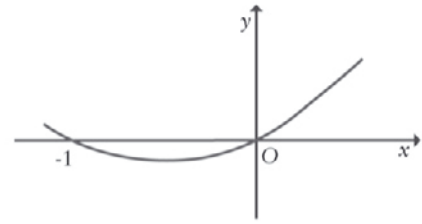
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad (\text{para } x > 2, \quad \text{tem-se } 2-x < 0)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Na figura ao lado, está parte da representação gráfica da função real de variável real, f , definida por $f(x) = x^2 + x$.

Tal como se pode observar, para $x > 0$, tem-se $x^2 + x > 0$.



Pág. 33

33.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)} = \frac{+\infty}{-3} = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2+x}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2^-} (2+x)}{\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)} = \frac{0^-}{+\infty} = 0 \quad (\text{para } x < -2, \quad \text{tem-se } 2+x < 0)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-g(x)}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2^-} [x-g(x)]}{\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2)} = \frac{-2-\infty}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{\frac{x \cdot g(x)}{x+2}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow -2^-} [x \cdot g(x)]}{\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2)}} = \sqrt{\frac{-2 \times (+\infty)}{0^-}} = \sqrt{\frac{-\infty}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Pág. 35

34.

a) O domínio da função é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) O domínio da função é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 1+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) O domínio da função é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

d) O domínio da função é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x + x^3 \neq 0\}$.

Tem-se $x + x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; portanto, o domínio da função é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

35.

a) $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x + 3)(x - 3)$

b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

c) $2x^3 - x^2 - 3x = x(2x^2 - x - 3) =$ $| 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$
 $= 2x(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $a^4 - 16 = (a^2 + 4)(a^2 - 4) = (a^2 + 4)(a + 2)(a - 2)$

e) Tem-se:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0 = R

Então, tem-se $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$.

Ora $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$, pelo que
 $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$

36.

a) $\frac{x^2 - 4}{3x^2 + 6x} = \frac{(x+2)(x-2)}{3x(x+2)} = \frac{x-2}{3x}$

Tem-se $3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$; portanto, a simplificação é válida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

b) 1 é zero do polinómio $x^3 - 1$, pelo que se tem:

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0 = R

Então, tem-se $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Ora $x^2 + x + 1 = 0$ é uma condição impossível; portanto $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

Tem-se $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; portanto a simplificação é válida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) Tem-se $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$

Então, vem:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \frac{2(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(1+x)(1-x)} = \frac{-2(x - \frac{1}{2})(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{-2(x - \frac{1}{2})}{1+x} = \frac{1-2x}{1+x}$$

Tem-se $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$; portanto, a simplificação é válida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pág. 36

37.

a) $\frac{3x}{x+3} + \frac{9}{x+3} = \frac{3x+9}{x+3} = \frac{3(x+3)}{x+3} = 3$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) $\frac{4}{(a+1)^2} - \frac{1-3a}{(a+1)^2} = \frac{4-(1-3a)}{(a+1)^2} = \frac{3+3a}{(a+1)^2} = \frac{3(1+a)}{(a+1)^2} = \frac{3}{a+1}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

38.

a) $\frac{1}{2x+6} + \frac{3}{x^2-9} = \frac{1}{2(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{2(x+3)(x-3)} + \frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3+6}{2(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{2(x+3)(x-3)} = \frac{1}{2(x-3)} = \frac{1}{2x-6}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

b) $\frac{t-10}{t^2-4} - \frac{t}{2-t} = \frac{t-10}{(t+2)(t-2)} + \frac{t}{t-2} = \frac{t-10}{(t+2)(t-2)} + \frac{t(t+2)}{(t+2)(t-2)} = \frac{t-10+t^2+2t}{(t+2)(t-2)} = \frac{t^2+3t-10}{(t+2)(t-2)} = \frac{(t+5)(t-2)}{(t+2)(t-2)} = \frac{t+5}{t+2}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
 $|t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$

c) $\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{x} = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x(x-1)^2} - \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{x^2-x+1-(x^2-2x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pág. 37

39.

a) $\frac{2}{3x+6} \times \frac{x^2+2x}{4} = \frac{2 \times x(x+2)}{3(x+2) \times 4} = \frac{x}{6}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) $\frac{2a^2-6a}{a^2} \times \frac{a}{a^2-9} = \frac{2a(a-3) \times a}{a^2 \times (a+3)(a-3)} = \frac{2}{a+3}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$.

c) $\frac{x^2-x}{x^2-3x+2} : \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} \times \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} \times \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} = \frac{x+2}{x}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 2\}$.
 $|x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

d) $\frac{x^3+2x^2}{2} : \frac{x^2+2x}{4} = \frac{x^3+2x^2}{2} \times \frac{4}{x^2+2x} = \frac{x^2(x+2) \times 4}{2 \times x(x+2)} = 2x$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

40.

a) $\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) \times \frac{x^2-1}{2x} = \frac{x}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{2x} = \frac{x+1}{2}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

b) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \frac{2-x}{2x(x-2)} = \frac{-(x-2)}{2x(x-2)} = -\frac{1}{2x}$; o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Pág. 38

41.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (10^5 x - 3x^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5) = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + x^3 - 1}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) = -\infty$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - \pi x^4 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 - \pi)x^4 - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 - \pi)x^4] = -\infty \text{ (tem-se } 1 - \pi < 0)$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 10)^5 - 0,1x^6] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,1x^6) = -\infty$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(x^2 - 1) - x^2(x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x - x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

42.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-2}{x-1} \right) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} - \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x} - 2x \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Outro processo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x} - 2x \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

43.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 1} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x+1 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x^3 + 1}{3x^3 + 10x} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^4 - x^3 - 4x^4}{4x^3 + 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\pi - 4)x^4 - x^3}{4x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\pi - 4)x^4}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi - 4}{4} x \right) = -\infty \quad (\text{tem-se: } \pi - 4 < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 - x^6}{2x^5 + x + 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^6}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} x \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{1 - 2x^2} \right)^3 &= \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{1 - 2x^2} \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x^2} \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^3 + 1) - (1 + x^2)^2}{2x^3 + 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x - (1 + 2x^2 + x^4)}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x - 1 - 2x^2 - x^4}{2x^3 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - 2x^2}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x} = 0 \end{aligned}$$

45. Seja $ax^2 + bx + k$, com $a \neq 0$, a expressão analítica que define a função g .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -2 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2 + bx + k} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Então, dado que -3 e 3 são zeros de g , tem-se $g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-3)$.

Portanto, $g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^2 - 9) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$, pelo que $k = \frac{9}{2}$.

46.

a) Tem-se $|x - 1| = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x - 1| + 2x}{|3 - x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x + 2x}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

b) Tem-se $|3 - x^2| = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3 & \text{se } x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3 - x^2| - 3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3 - 3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 - 3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

47.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{-\sqrt{2 + 0}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + x})}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}$$

48.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{3x + 6} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 2)}{3(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2x^2 - x - 3} &= \frac{0}{0} \quad \left| \text{Tem-se: } 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2} \right. \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1)}{2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{2x - 3} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

c) O limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 1}$ conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$; então 1 é raiz do polinómio

$$2x^3 + x - 3.$$

Tem-se:

1	2	0	1	-3
1	2	2	2	3
	2	2	3	0 = R

Então, $2x^3 + x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$, pelo que se tem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 1} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \frac{2 + 2 + 3}{1 + 1} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x}{x^2 - 2x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x^2 + 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1}{x - 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned} \text{a) Tem-se: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(x^2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+x} = \frac{2}{0} \end{aligned}$$

Determinemos os limites laterais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x^2+x} &= \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2+x} &= \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Observe o esboço do gráfico da função real de variável real, f , definida por $f(x) = x^2 + x$ na figura apresentada na resolução do exercício 32.d)

Portanto, como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2}$.

b) Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{(x+2)^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0} \end{aligned}$$

Determinemos os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Portanto, como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{(x+2)^2}$.

50.

a) Tem-se: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$ conduz a $\frac{0}{0}$. Determinemos os limites laterais:

$$\text{Tem-se} \quad |x| = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Portanto: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0.$$

b) Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{|2-x|-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-2-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

51.

a) Tem-se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|-2}{|x-1|}$ **conduz a** $\frac{0}{0}$. **Determinemos os limites laterais:**

Tem-se $|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+1|-2}{|x-1|} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1-2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x} = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+1|-2}{|x-1|} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Portanto, como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|-2}{|x-1|}$.

b) Tem-se: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{|x+1|}$ **conduz a** $\frac{0}{0}$. **Determinemos os limites laterais:**

Tem-se $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x \leq -1 \\ x+1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{|x+1|} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -(x-1) = -(-2) = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-1}{|x+1|} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2$$

Portanto, como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{|x+1|}$.

52.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} \cdot \frac{0}{0}}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + \frac{1}{0^+}} = \sqrt{1 + \infty} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2 \cdot \frac{0}{0}}{x^2 - 4x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 4x)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1 \cdot \frac{0}{0}}{2 - \sqrt{x + 3}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(2 + \sqrt{x + 3})}{(2 - \sqrt{x + 3})(2 + \sqrt{x + 3})(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2 + \sqrt{x + 3})}{(4 - x - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1 - x)(2 + \sqrt{x + 3})}{(1 - x)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2 + \sqrt{x + 3})}{\sqrt{x} + 1} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1 \cdot \frac{0}{0}}{x^3 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x^2 - 1} - 1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)}{(x^3 - 1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = \end{aligned}$$

	1	0	0	-1
1	1	1	1	1
	1	1	1	0 = R

| Então: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x + 1)}{(x^2 + x + 1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = \frac{4}{3 \times 2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Outro processo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2)(x + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2)(x + \sqrt{2})}{(x^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

53.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x^2 + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2 + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2 - x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - x^2}{2x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^2 - 2x} \times \frac{x^2 - 4}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{2x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 4)}{2x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+2)}{2x} = \frac{12}{4} = 3$$

Pág. 44

54.

a) Seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e seja (y_n) a sucessão definida por $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

Tem-se:

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{2n\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \lim y_n = \lim \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = 0$$

Ora,

$$\lim \left[\sin \left(\frac{1}{x_n} \right) \right] = \lim [\sin(2n\pi)] = 0 \quad \text{e} \quad \lim \left[\sin \left(\frac{1}{y_n} \right) \right] = \lim \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] = 1$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$.

b) Tem-se $-1 \leq \sin \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1$ para qualquer valor real de x diferente de zero, portanto

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 0$, pois trata-se do limite do produto de uma função que tende para 0 por uma função limitada.

Pág. 45

55.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3 \cos x}{3x^2 + 2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3 \cos x}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{2 \sin x}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3 \cos x}{x^2}}{3 + \frac{2 \sin x}{x^2}} = \frac{2 + 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2}}{3 + 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^2}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{2 + 3 \times 0}{3 + 2 \times 0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cos x \times \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sin x \times \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

pois, em ambos os casos, se trata do limite do produto de uma função que tende para 0 por uma função limitada.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

pois trata-se do limite do produto de uma função que tende para 0 por uma função limitada.

56. As condições do problema são as condições do teorema do limite da função composta para a determinação do limite $\lim_{x \rightarrow 1} (h \circ g)(x)$.

Então, por aplicação do referido teorema, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow 1} (h \circ g)(x) = 4$.

Pág. 47

57.

a) O domínio da expressão $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ é $[0, +\infty[\setminus\{1\}$.

Seja $y = \sqrt{x}$.

Tem-se, para $x \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$, $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$ e, se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 1$.

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y + 1)(y - 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y + 1} = \frac{1}{2}$$

b) O domínio da expressão $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Seja $y = \sqrt[3]{x}$.

Tem-se, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3$ e, se $x \rightarrow -1$, então $y \rightarrow -1$.

Então,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^3+1}{y+1} =$$

1	0	0	1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	0 = R

$$= \lim_{y \rightarrow -1} (y^2 - y + 1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

| Então, $y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$

c) O domínio da expressão $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ é $[0, +\infty[$.

Seja $y = \sqrt[6]{x}$.

Tem-se, para $x \in [0, +\infty[$, $y = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = y^6$ e, se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{y^6+1}}{\sqrt{y^6+2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2+1}{y^3+2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{y^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

d) O domínio da expressão $\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ é $[-1, +\infty[\setminus \{3\}$.

Seja $y = \sqrt{x+1}$.

Tem-se, para $x \in [-1, +\infty[\setminus \{3\}$, $y = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 1$ e, se $x \rightarrow 3$, então $y \rightarrow 2$.

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{y^2-1-3} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{y^2-4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{(y+2)(y-2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y+2} = \frac{1}{4}$$

Pág. 51

58. Seja n um número inteiro. Tem-se, para todo o n , $\lim_{x \rightarrow n^-} c(x) = n-1$ e $\lim_{x \rightarrow n^+} c(x) = n$.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow n} c(x)$, pelo que c não é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{Z}$.

Pág. 52

59. Tem-se:

• $g(-3) = \frac{9-15+6}{9} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+5x+6}{x^2} = \frac{9-15+6}{9} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+7x+12}{3x+19} = \frac{9-21+12}{-9+19} = 0$

Portanto, existe $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$, pelo que g é contínua no ponto -3 .

60. Tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3\end{aligned}$$

Ver, por exemplo, resolução do exer. 36 b):
Tem-se $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Então, para que a função f seja contínua no ponto 1, tem que se ter $a = 3$.

61.

Seja (u_n) uma sucessão real; o seu domínio é $\mathbb{N}$ e a aderência do domínio também é $\mathbb{N}$. Seja $k \in \mathbb{N}$, qualquer; vamos provar que a sucessão é contínua em k . Qualquer sucessão de elementos do domínio da sucessão a tender para k é a sucessão constante (ou é uma sucessão constante a partir de certa ordem) e a sucessão das imagens é a sucessão, também constante (ou é uma sucessão constante a partir de certa ordem), com todos os termos iguais a u_k (a partir de certa ordem) que é convergente para u_k (imagem de k na sucessão).

Pág. 53

62.

a) Função g :

- $g(1) = 3 \times 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x) = 3 \times 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, pelo que g não é contínua no ponto 1.

Função h :

- $h(1) = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$, pelo que h não é contínua no ponto 1.

b) Tem-se, $(g + h)(x) = g(x) + h(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- $(g + h)(1) = 4 - 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g + h)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 1) = 4 - 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (g + h)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 2 + 1 = 3$

Portanto, existe $\lim_{x \rightarrow 1} (g + h)(x)$, pelo que $g + h$ é contínua no ponto 1.

c)

A afirmação é falsa. As funções g e h deste item constituem um contraexemplo, ambas são descontínuas no ponto 1 e a soma é uma função contínua nesse ponto.

Pág. 54

63. Função f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0 \wedge x \geq 0\} = [0, 2[\cup]2, +\infty[$$

f é contínua porque é soma de restrições de funções polinomiais, racionais e raiz quadrada de uma função polinomial.

Função g :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

g é contínua porque é a raiz cúbica do quociente entre a composta da função seno com uma função afim e uma função afim.

Pág. 55

64. Função f :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Para $x < 1$: f é contínua porque é o quociente de restrições de funções polinomiais.

Para $x > 1$: f é contínua porque é o quociente entre uma restrição de uma função polinomial e uma restrição da composta de uma raiz quadrada de uma função polinomial.

Então f é contínua.

Função g :

$$D_g = \mathbb{R}$$

Para $x < 1$: g é contínua porque é o quociente de restrições de funções polinomiais.

Para $x > 1$: g é contínua porque é uma restrição de uma raiz quadrada de uma função polinomial.

Para $x = 1$:

$$\bullet g(1) = \sqrt{1^2 - 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{1^2 - 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$| \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, pelo que g não é contínua no ponto 1.

Então, g só não é contínua no ponto 1.

65. Função f :

Tem-se $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

f é contínua em $] -\infty, 0[$ e em $] 0, +\infty[$ por ser, em cada intervalo, restrição de uma função polinomial (portanto, contínua).

E também é contínua em 0, pois:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Função h :

h é contínua porque é a composta de duas funções contínuas: a função f e a função seno.

66.

a) f é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas: a diferença entre a raiz quadrada de uma função polinomial e uma constante e uma função polinomial.

b) A função g tem que ser a extensão de f a $\mathbb{R}$ tal que $g(-1)$ seja igual a

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\text{Tem-se: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x + 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3 - 4}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{-2}{2 + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

67. Tem-se:

- $f(k) = k^2 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} (x^2 + 2) = k^2 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (4x - 2) = 4k - 2$

Se a função f é contínua, é contínua no ponto k , pelo que se tem $k^2 + 2 = 4k - 2$.

Ora, $k^2 + 2 = 4k - 2 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Pág. 57

68. As afirmações que garantem a existência de uma assíntota vertical são as das alíneas a) e d).

a) A assíntota é definida por $x = 0$.

d) A assíntota é definida por $x = 1$.

Pág. 58

69. Função f :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(-1+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota ao gráfico de f .

Função g :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota ao gráfico de g .

Função h :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2x^2 - x - 3} = \frac{\frac{0}{0}}{2(-1)^2 - (-1) - 3} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{2(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{2x - 3} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}, \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ não é assíntota ao gráfico de h .

70.

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \neq 0 \wedge 3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

$$\left| \begin{array}{l} 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$$

c) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0\} =$
 $= [-2, 0[\cup]0, 2]$

$$\begin{aligned} \text{d)} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} - 2 \neq 0 \wedge x \geq 0\} = & | \sqrt{x} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4 \\ &= [0, 4[\cup]4, +\infty[\end{aligned}$$

71.

$$\text{a)} \text{ Se } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq a \\ x+1 & \text{se } x > a \end{cases},$$

a função f não é contínua no ponto a e a reta de equação $x = a$ não é assíntota ao seu gráfico.

$$\text{b)} \text{ Se } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e a reta de equação $x = 0$ é assíntota ao seu gráfico.

Pág. 59

72.

$$\text{a)} \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical no ponto -1 .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

• A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{b)} \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical nos pontos -2 e 2 .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4-2x}{x^2-4} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{x^2-4} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{(x+2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

• A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{c)} \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical no ponto -3 .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x+3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(3-x)(3+x)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (3-x) = 3-3 = 0$$

• Não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\text{d)} \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 + x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

• Não existem assíntotas verticais, pois a função é contínua em $\mathbb{R}$.

e) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical no ponto 1.

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

• A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

f) • $D_f = \mathbb{R}$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical no ponto 1.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 1} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$

• Não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

g) • $D_f = \mathbb{R}$

• Só temos de procurar a existência de assíntota vertical nos pontos -1 e 1 .

• $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

• As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

Pág. 60

73.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2)] = 0$$

A assíntota é definida por $y = -2$.

b) A assíntota é definida por $y = 3x$.

c) A assíntota é definida por $y = 2x + 1$.

d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x - 1] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-3x + 1)] = 0$$

A assíntota é definida por $y = -3x + 1$.

e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 3 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] - 3 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x - 3] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0 \end{aligned}$$

A assíntota é definida por $y = -2x + 3$.

Pág. 61

74. Determinemos, por exemplo, o limite da função quando x tende para $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^2}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) = -2\end{aligned}$$

Portanto, está provado que a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico de f .

De outro modo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x^2}{x^2+1} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x^2+2x^2+2}{x^2+1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{x^2+1} \right] = 0\end{aligned}$$

75. Determinemos, por exemplo o limite da função quando x tende para $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Portanto, está provado que o eixo das abcissas é assíntota ao gráfico de f .

76.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2+x} - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right) - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) + x} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right)} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

Pág. 62**77.**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

Portanto, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

O estudo é análogo para o caso « $+\infty$ ».

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x - 1}{5x + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$$

Portanto, não existe assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

O estudo é análogo para o caso « $+\infty$ ».

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x}{x^3 + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

O estudo é análogo para o caso « $+\infty$ ».

Pág. 63**78.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

79.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + 3x] = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -3$$

Pág. 64**80.**

$$\text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 3}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 3}{x^2 + x} \stackrel{\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - x - 3}{x + 1} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 3 - 3x^2 - 3x}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 3}{x + 1} =\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4) = -4$$

Portanto, a reta de equação $y = 3x - 4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

O estudo é análogo para o caso « $-\infty$ ».

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 2x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 2x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x - 1 - x^3 + 2x^2}{x^2 - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

O estudo é análogo para o caso « $-\infty$ ».

$$\text{c) } D_j = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^3 + 2}{2x + 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2}{2x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de j quando x tende para $+\infty$.

O estudo é análogo para o caso « $-\infty$ ».

81.

$$\text{a) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{2x|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} \frac{2x \times (-x)}{x^2 + 1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x \times x}{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2x^2}{x^2 + 1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x^2}{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$.

$$\text{b) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

O domínio da função é minorado pelo que só faz sentido procurar existência de assíntota não vertical em $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^4}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \times x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^2}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty \end{aligned}$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

$$\text{c) } D_h = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(x) = \frac{|x^3 + 1|}{2x^2} = \begin{cases} \frac{-x^3 - 1}{2x^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{x^3 + 1}{2x^2} & \text{se } x \geq -1 \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x^3 - 1}{2x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 1}{2x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(j(x) + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^3 - 1}{2x^2} + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 1 + x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x^2} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de j quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{2x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(j(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{2x^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de j quando x tende para $+\infty$.

Pág. 66

82.

$$\text{a) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pelo que só a reta de equação $x = -1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x|x|}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2x^2}{x^2} \right) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x|x|}{x+1} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x^2}{x+1} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 2x^2 + 2x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x|x|}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x - 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$.

$$\begin{aligned}\text{b) } D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \\ &=]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{é positivo, } \forall x \in \mathbb{R}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{array} \right.$$

• Assíntotas verticais

Só a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x + \frac{1}{x}} = \sqrt{0 + \infty} = +\infty\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas não verticais

O domínio da função é minorado pelo que só faz sentido procurar existência de assíntota não vertical em $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x} \cdot \frac{\infty}{\infty}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x^4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x} \cdot \frac{\infty}{\infty}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty\end{aligned}$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

$$\begin{aligned}\text{b) } D_h &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}\end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1 \end{array} \right.$$

• Assíntotas verticais

Só as retas de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 - x^4}{x^3 - x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-1)(1 + x^2)}{x} = \frac{-1 \times 2}{-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) &= 2\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^4}{x^3 - x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)(1 + x^2)}{x} = \frac{-1 \times 2}{1} = -2 \quad \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= -2\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^4}{x^3 - x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(1 + x^2)}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{x^3-x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{x^4-x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^4} = -1 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x^4}{x^3-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4+x^4-x^2}{x^3-x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x^3-x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

O estudo é análogo para o caso « $+\infty$ ».

Pág. 67

83.

a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- Assíntotas verticais

Só a reta de equação $x = -1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3-2x^3}{x^2-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x^3}{x^2-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x^3}{x^3-x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3-2x^3}{x^2-1} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x^3+2x^3-2x}{x^2-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{+\infty}$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$.

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

• Assíntotas verticais

Só as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x}{|x| - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{|x| - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{|x| - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{-x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{-x^2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x}{-x - 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - x}{-x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x} = 2 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{|x| - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$.

Pág. 68

84.

Dado que f é ímpar, tem-se $f(-x) = -f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx - b)] &= \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-f(-x) + m(-x) + b] = \\&= - \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(-x) - m(-x) - b] = \\&= - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] = \\&= - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0\end{aligned}$$

85.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2g(x)}{x} + \frac{4x}{x} \right) = \\&= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + 4 = 2 \times 3 + 4 = 10\end{aligned}$$

Uma equação que define essa assíntota é $y = 10$.

Pág. 69

86.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + cx} = 1 \quad (\text{não depende de } c)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4 - x^2 - xc}{x + c} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - c)x - 4}{x + c} = 3 - c\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x + 3 - c$ é assíntota ao gráfico de f .

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-c\}$

Para cada valor de c , só a reta de equação $x = -c$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se: $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$, pelo que $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + c} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{x + c}$

Então, se e só se $c = 4$ ou $c = -1$, tem-se que nem $\lim_{x \rightarrow -c^-} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow -c^+} f(x)$ são $-\infty$ ou $+\infty$.

Então, os valores de c para os quais o gráfico de f não tem assíntotas verticais são -1 e 4 .

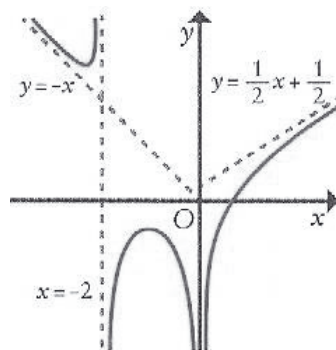
87. Dado que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, que f é contínua e que $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, conclui-se que as retas definidas por $x = -2$ e por $x = 0$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f . Dado que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$, conclui-se que a reta definida por $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

Dado que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) - x] = 1 &\Leftrightarrow 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

conclui-se que a reta definida por $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

Um esboço do gráfico de uma função compatível com estas condições é:



88. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Assíntotas verticais

Só a reta de equação $x = 1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de $\frac{1}{f}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de $\frac{1}{f}$.

• Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto, o gráfico de $\frac{1}{f}$ não tem assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de $\frac{1}{f}$ quando x tende para $+\infty$.

Pág. 72

$$89. \text{ a) } \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x - x^2 \neq 0\} = \quad \mid \quad 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \\ = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge 4x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-1		0		3		4	$-\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$4x - x^2$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, 3[\cup]4, +\infty[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]3, 4[$$

$$\text{b) } \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 \neq 0\} = \quad \mid \quad 5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5} \\ = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow 16x - x^5 = 0 \wedge 5 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x(16 - x^4) = 0 \wedge x \neq -\sqrt{5} \wedge x \neq \sqrt{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(4 - x^2)(4 + x^2) = 0 \wedge x \neq -\sqrt{5} \wedge x \neq \sqrt{5} \Leftrightarrow (x = 0 \vee 4 - x^2 = 0) \wedge x \neq -\sqrt{5} \wedge x \neq \sqrt{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2) \wedge (x \neq -\sqrt{5} \wedge x \neq \sqrt{5}) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		-2		0		2		$\sqrt{5}$	$-\infty$
x	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$4 + x^2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$4 - x^2$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$5 - x^2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	n.d.	+

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-2, 0[\cup]2, \sqrt{5}[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{5}, -2[\cup]0, 2[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$$

Pág. 74

90. Função f :

A função f é contínua por ser uma função racional.

Função g :

Para $x \neq 0$, g é contínua por ser, nesse conjunto, igual a uma função racional.

Para $x = 0$, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ e } g(0) = 0$$

pelo que g não é contínua no ponto 0 .

91.

$$\text{a)} \frac{5}{2x} = \frac{5/2}{x} = \frac{2,5}{x}$$

$$\text{b)} \frac{0,2}{5x} = \frac{0,2/5}{x} = \frac{0,04}{x}$$

$$\text{c)} \frac{4}{-3x} = \frac{-4/3}{x}$$

Pág. 75

92.

O gráfico de g obtém-se do gráfico de f por meio da translação definida pelo vetor de coordenadas $(-2, 1)$.

O gráfico de h obtém-se do gráfico de f aplicando a este gráfico a translação definida pelo vetor de coordenadas $(1, 0)$, seguida da reflexão de eixo Ox e da translação definida pelo vetor de coordenadas $(0, 2)$.

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}, \quad D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$h(x) = 2 - \frac{1}{x-1}, \quad D'_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{93. a)} \frac{3x+1}{x+2} =$$

$$= 3 + \frac{-5}{x+2} = 3 + \frac{-5}{x-(-2)}$$

$$\begin{array}{r} 3x+1 \quad | \quad x+2 \\ -3x-6 \quad | \quad 3 \\ \hline -5 \end{array}$$

$$\text{b)} \frac{x-5}{3-x} =$$

$$= -1 + \frac{-2}{-x+3} = -1 + \frac{2}{x-(-2)}$$

$$\begin{array}{r} x-5 \quad | \quad -x+3 \\ -x+3 \quad | \quad -1 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\text{c)} \frac{2x}{3x+1} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3x+1} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3(x+\frac{1}{3})} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{9}}{x-(-\frac{1}{3})}$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad | \quad 3x+1 \\ -2x-2/3 \quad | \quad 2/3 \\ \hline -2/3 \end{array}$$

Pág. 76

94.

a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x-3} = 1 + \frac{-2}{x-3}$; portanto, a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 3$ e a assíntota horizontal é a reta de equação $y = 1$.

b) $g(x) = \frac{1}{x} + 2 = 2 + \frac{1}{x-0}$; portanto, a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = 0$.

Pág. 77**95.**

a) A assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = -1$ e a assíntota horizontal é a reta de equação $y = 2$, pelo que se tem $f(x) = 2 + \frac{k}{x-(-1)} = 2 + \frac{k}{x+1}$; como se tem $f(0) = 1$, vem $2 + \frac{k}{0+1} = 1$, pelo que $k = -1$. Então, $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$.

b) A assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = 2$ e a assíntota horizontal é a reta de equação $y = -1$, pelo que se tem $g(x) = -1 + \frac{k}{x-2}$; como se tem $g(-1) = 0$, vem $-1 + \frac{k}{-1-2} = 0$, pelo que $k = -3$. Então, $g(x) = -1 + \frac{-3}{x-2} = -1 - \frac{3}{x-2}$.

c) A assíntota vertical ao gráfico de h é a reta de equação $x = -2$ e a assíntota horizontal é a reta de equação $y = 0$, pelo que se tem $h(x) = 0 + \frac{k}{x-(-2)} = \frac{k}{x+2}$; como se tem $h(0) = -1$, vem $\frac{k}{0+2} = -1$, pelo que $k = -2$. Então, $h(x) = -\frac{2}{x+2}$.

96. Seja f a função referida no enunciado.

A assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 1$ e a assíntota horizontal é a reta de equação $y = 2$, pelo que se tem $f(x) = 2 + \frac{k}{x-1}$; como se tem $f(0) = 1$, vem

$$2 + \frac{k}{0-1} = 1, \text{ pelo que } k = 1.$$

Então, $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$; portanto, pode ser $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$.

Pág. 78**97.**

a) Tem-se $x \times c = 12$, com $1,5 \leq x \leq 5$; então $c = \frac{12}{x}$ e $\frac{12}{5} \leq c \leq \frac{12}{1,5}$, ou seja, $2,4 \leq c \leq 8$.

b) O perímetro do painel é dado por $2x + 2c$.

Seja P a função que dá, para cada valor de x , o perímetro do painel. Tem-se:

$$P(x) = 2x + 2c = 2x + 2 \times \frac{12}{x} = 2x + \frac{24}{x} = \frac{2x^2+24}{x}, \text{ com } D_P = [1,5; 5]$$

Pág. 79**98.**

a) $\frac{x-5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = 5$; conjunto-solução: $\{5\}$

b) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = -2$; conjunto-solução: $\{-2\}$

$$\text{c) } \frac{5x-2}{x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2-3x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-5 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ conjunto-solução: } \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{d) } \frac{2x+1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-2x+6}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 7 = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x \in \emptyset; \\ \text{conjunto-solução: } \emptyset$$

Pág. 80

99.

$$\text{a) } \frac{2}{x-1} - \frac{1}{1-x} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2+1-6x+6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+9}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6x+9 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; \text{ conjunto-solução: } \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x} + \frac{2}{x+2} = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4}{x} + \frac{2}{x+2} - \frac{6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)(x-1)+2x(x-1)-6x(x+2)}{x(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(4x+8)(x-1)+2x^2-2x-6x^2-12x}{x(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-4x+8x-8-4x^2-14x}{x(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-10x-8}{x(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -10x-8 = 0 \wedge x(x+2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}; \\ \text{conjunto-solução: } \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$$

$$\text{c) } \frac{4}{x^2+2x-3} - \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2+2x-3} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \quad | \quad x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{(x+3)(x-1)} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{(x+3)(x-1)} + \frac{x-1}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x+3)(x-3)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4x-12+x-1-x^2+9}{(x+3)(x-3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-4}{(x+3)(x-3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -x^2+5x-4 = 0 \wedge (x+3)(x-3)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 \wedge (x \neq -3 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow x = 4; \text{ conjunto-solução: } \{4\}$$

100.

$$\text{a) } f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-x^2-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -1; \text{ o zero de } f \text{ é } -1.$$

$$\text{b) } g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2-3}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \emptyset; g \text{ não tem zeros.}$$

Pág. 81

101.

$$\text{a) } 5 + 2x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2; \text{ conjunto-solução: } [-2, +\infty[$$

$$\text{b) } 5 - 2x < 0 \Leftrightarrow -2x < -5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}; \text{ conjunto-solução: }]\frac{5}{2}, +\infty[$$

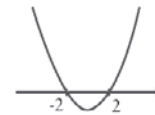
$$\text{c) } \frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x - 3x + 6 \leq 6 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0; \text{ conjunto-solução: } [0, +\infty[$$

$$d) \frac{x^2-4}{3} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2;$$

Conjunto-solução: $] -\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Na figura está representado um esboço do gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 4$.

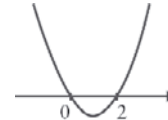


$$e) 2x^2 \leq 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2;$$

Conjunto-solução: $[0, 2]$

Na figura está representado um esboço do gráfico da função f definida por $f(x) = 2x^2 - 4x$.



$$f) (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2; \text{ conjunto-solução: } \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Pág. 82

$$102. a) \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{2}]$$

Quadro do estudo da variação de sinal de $\frac{1-2x}{x}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$-\infty$
$1-2x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\frac{1-2x}{x}$	-	n.d.	+	0	-

$$b) \frac{4-x^2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2, 1[\cup]2, +\infty[$$

Quadro do estudo da variação de sinal de $\frac{4-x^2}{x-1}$

x	$-\infty$	-2		1		2	$-\infty$
$4-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{4-x^2}{x-1}$	+	0	-	n.d.	+	0	-

$$c) \frac{4x}{x^2-4} \leq \frac{x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{4x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-x^2-2x}{(x+2)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [0, 2[\cup]2, +\infty[$$

Quadro do estudo da variação de sinal de $\frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)}$

x	$-\infty$	-2		0		2	$-\infty$
$2x-x^2$	-	-	-	0	+	0	-
$(x+2)(x-2)$	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)}$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-

$$d) \frac{2}{x-2} \leq \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \times 2 - x(x-2) + 2(x-2)}{2(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2+2x+2x-4}{2(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x}{2(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [0, 2[\cup [4, +\infty[$$

Quadro do estudo da variação de sinal de $\frac{-x^2+4x}{2(x-2)}$

x	$-\infty$	0		2		4	$-\infty$
$-x^2+4x$	-	0	+	+	+	0	-
$2(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{-x^2+4x}{2(x-2)}$	+	0	-	n.d.	+	0	-

103. Designemos por f , em cada alínea, a função definida pela expressão analítica apresentada

a) • $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = -3$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x+3$		0	$+$	$+$	$+$
$2-x$		$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$-$	0	$+$	n.d.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 2[$$

• Estudo das assíntotas ao gráfico

$$f(x) = \frac{x+3}{2-x} =$$

$$\begin{array}{r} x+3 \quad | \quad -x+2 \\ -x+2 \quad | \quad -1 \\ \hline 5 \end{array}$$

$= -1 + \frac{5}{-x+2} = -1 - \frac{5}{x-2}$; portanto, o gráfico de f admite uma assíntota vertical de equação $x = 2$ e uma assíntota horizontal de equação $y = -1$.

b) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-x-6 = 0 \wedge 1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3 \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
x^2-x-6		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-x^2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		$-$	0	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]1, 3[$$

• Estudo das assíntotas ao gráfico

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-x-6}{1-x^2} = \frac{1+1-6}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-x-6}{1-x^2} = \frac{1-1-6}{0^+} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-6}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x-6}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

Portanto, o gráfico de f admite uma assíntota horizontal de equação $y = -1$.

c) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x^2-x-6} = 0 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \wedge x^2-x-6 \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -2 \wedge (x \neq -2 \wedge x \neq 3) \Leftrightarrow x \in \emptyset$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	$+$
x^2-x-6		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$		$-$	n.d.	$-$	n.d.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 3[$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]3, +\infty[$

• Estudo das assíntotas ao gráfico

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+4}{x^2-x-6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{-5}$

O resultado é análogo para o caso « -2^+ ».

Portanto, a reta de equação $x = -2$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+4}{x^2-x-6} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+4}{x^2-x-6} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+4}{x^2-x-6} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Portanto, o gráfico de f admite uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.

d) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 6\}$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-5x-6} = 0 \Leftrightarrow$

$x^3+4x^2+x-6 = 0 \wedge x^2-5x-6 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+6) = 0 \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1 = 0 \vee x^2+5x+6 = 0) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -2 \vee x = -3) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 6) \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-3		-2		-1		1		6	$+\infty$
x^3+4x^2+x-6		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-5x-6		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, -1[\cup]1, 6[$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, -2[\cup]-1, 1[\cup]6, +\infty[$

• Estudo das assíntotas ao gráfico

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} = \frac{-1 + 4 - 1 - 6}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} = \frac{216 + 144 + 6 - 6}{0^-} = \frac{360}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 6$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - 5x^2 - 6x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6 - x^3 + 5x^2 + 6x}{x^2 - 5x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 7x - 6}{x^2 - 5x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2}{x^2} = 9$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 9$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

e) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -3$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 1[$$

• Estudo das assíntotas ao gráfico

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{0}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Portanto, o gráfico de f admite uma assíntota horizontal de equação $y = 1$.

104.

$$\text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - 2x \neq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{4}{2-2x} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{4}{2(1-x)} - \frac{5}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x-1} - \frac{5}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2(x+1)-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2x-7}{(x+1)(x-1)}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{(x+1)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -2x-7 = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	$-7/2$		-1		1	$+\infty$
$-2x-7$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x^2-1		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$		$+$	0	$-$	n.d.	$+$	n.d.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{7}{2}[\cup]-1, 1[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{7}{2}, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : 10 - 2x \neq 0 \wedge 4 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$$

Para $x \in D_g$ tem-se:

$$g(x) = \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2} = \frac{3(x-2)}{2(5-x)} \times \frac{x(x-5)}{(2+x)(2-x)} = \frac{3x(x-2)(x-5)}{2(5-x)(2+x)(2-x)} = \frac{-3x(2-x)(x-5)}{-2(x-5)(2+x)(2-x)} = \frac{3x}{2(2+x)} = \frac{3x}{4+2x}$$

$$\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2(2+x)} = 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 5 \Leftrightarrow 3x = 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 5 \Leftrightarrow x = 0$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-2		0		2		5	$+\infty$
$3x$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4+2x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$		$+$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	n.d.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, 5[\cup]5, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[$$

Pág. 85

105.

a) A reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , pois:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(2x + \frac{1}{x} \right) - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

b) A reta de equação $y = x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g , pois:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x - 3)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(x - 3 - \frac{1}{x^2} \right) - (x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 3 - \frac{1}{x^2} - x + 3 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0\end{aligned}$$

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

$$\text{c) } h(x) = |3x - 1| + \frac{2}{x} = \begin{cases} -3x + 1 + \frac{2}{x} & \text{se } x < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0 \\ 3x - 1 + \frac{2}{x} & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

A reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h , pois:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (-3x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(-3x + 1 + \frac{2}{x} \right) - (-3x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h , pois:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (3x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(3x - 1 + \frac{2}{x} \right) - (3x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Pág. 87

106.

a) O total de pessoas inscritas é igual a $15 + x$ pelo que o preço a pagar por pessoa, em função de x é igual a $\frac{490}{15+x}$.

$$\text{b) } \frac{490}{15+x} < 20 \Leftrightarrow \frac{490}{15+x} - 20 < 0 \Leftrightarrow \frac{490-300-20x}{15+x} < 0 \Leftrightarrow \frac{190-20x}{15+x} < 0$$

Dado que, no contexto da situação, a expressão $15 + x$ toma sempre valores positivos, tem-se:

$$\frac{190 - 20x}{15 + x} < 0 \Leftrightarrow 190 - 20x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{190}{20} \Leftrightarrow x > 9,5$$

O número mínimo de pessoas para que $\frac{490}{15+x}$ seja menor do que 20 é 10.

107.

a) 20 horas = 1200 minutos pelo que a capacidade do depósito é igual a 1200×6 litros, ou seja, 7200 litros.

Se o caudal da torneira é igual a x litros por minuto, é igual a $60x$ litros por hora, pelo que a torneira demora $\frac{7200}{60x}$ horas a encher o depósito. Então, $t = \frac{120}{x}$.

b) $\frac{120}{x+6}$ é o tempo em horas que duas torneiras de caudais constantes, de x litros por minuto e de 6 litros por minuto, demoram, em simultâneo a encher o referido depósito.

108.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Tem-se: $f(x) = \frac{1-4x}{2x+6} = -2 + \frac{13}{2x+6}$

$$\begin{array}{r|l} -4x+1 & 2x+6 \\ \hline 4x+12 & -2 \\ \hline & 13 \end{array}$$

Então, $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

b) $y = \frac{1-4x}{2x+6} \Leftrightarrow y(2x+6) = 1-4x \Leftrightarrow 2xy+6y = 1-4x \Leftrightarrow 2xy+4x = 1-6y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2y+4) = 1-6y \Leftrightarrow x = \frac{1-6y}{2y+4}$; portanto $f^{-1}(x) = \frac{1-6x}{2x+4}$

Tem-se: $f^{-1}(x) = \frac{1-6x}{2x+4} = -3 + \frac{13}{2x+4}$

$$\begin{array}{r|l} -6x+1 & 2x+4 \\ \hline 6x+12 & -3 \\ \hline & 13 \end{array}$$

Então a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f^{-1} e a reta de equação $y = -3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f^{-1} ; observa-se uma possível relação com as assíntotas ao gráfico da função f .

109. a) $\begin{cases} 5-2x \leq 0 \\ 13 > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x < \frac{13}{3} \end{cases}$, pelo que $A = [\frac{5}{2}, \frac{13}{3}[$. A aderência de A é $[\frac{5}{2}, \frac{13}{3}]$.

b) A aderência de B é $[-1, 2] \cup [3, +\infty[$.

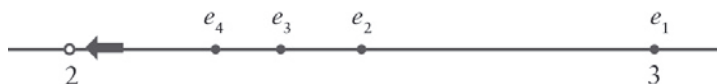
c) $\frac{(-1)^n \times n+n}{3n} = \begin{cases} \frac{-n+n}{3n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n+n}{3n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2}{3} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$; portanto $C = \{0, \frac{2}{3}\}$.

A aderência de C é C .

d) A aderência de D é $\mathbb{R}$.

e) A sucessão (e_n) definida por $e_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ é uma sucessão decrescente que converge para 2 e cujo primeiro termo é igual a 3.

Então, a representação do conjunto E pode ser sugerida pelo gráfico:



A aderência de E é $E \cup \{2\}$.

110. Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, pois, para que pudesse existir, era necessário (apesar de não ser suficiente) que $\lim f(u_n)$ fosse igual a $\lim f(v_n)$.

111. Como $\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = 3$, pode-se concluir que $\lim f(u_n) = 3$.

112. Opção (C)

Como $\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$, pode-se concluir que $\lim g(u_n) = 2$.

113.

a) $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

Como os termos da sucessão (u_n) são todos inferiores a 1, tem-se $h(u_n) = u_n + 1 = 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$; portanto, $\lim h(u_n) = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$.

b) Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Tem-se $\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ mas, como os termos da sucessão (v_n) são todos superiores a 1,

tem-se $h(v_n) = -v_n + 1 = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = -1 - \frac{1}{n} + 1 = -\frac{1}{n}$ e, portanto, $\lim h(v_n) = 0$.

Temos, portanto, duas sucessões, (u_n) e (v_n) , ambas convergentes para 1, para as quais se tem $\lim h(u_n) \neq \lim h(v_n)$, pelo que se pode concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

114.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; a aderência de D_f é $\mathbb{R}$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq 0\} =] - \infty, 3]$; a aderência de D_g é $] - \infty, 3]$.

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0 \wedge \sqrt{x-2} - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0 \wedge \sqrt{x-2} - 1 \neq 0\} = [2, +\infty[\setminus \{3\}$; a aderência de D_h é $[2, +\infty[$.

b) $f(u_n) = \frac{1}{u_n - 2}$

c) Dado que $u_n = \frac{1}{n}$, tem-se $f(u_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} - 2}$, pelo que $\lim f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} - 2} = \frac{1}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) - 2} = \frac{1}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$

Este resultado não é suficiente para garantir que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

Para tal, seria necessário mostrar que, para toda a sucessão (v_n) de termos diferentes de 2 tal que $\lim v_n = 0$, se teria $\lim f(v_n) = -\frac{1}{2}$.

d)

Seja (u_n) uma qualquer sucessão de termos diferentes de 2 tal que $u_n \rightarrow 0$.

$$\lim f(u_n) = \lim \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{0 - 2} = -\frac{1}{2}, \text{ portanto,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Seja (v_n) uma qualquer sucessão de termos menores ou iguais a 3 tal que $v_n \rightarrow 3$.

$$\lim g(v_n) = \lim \sqrt{3 - v_n} = \sqrt{3 - 3} = 0, \text{ portanto, } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0.$$

115. Tem-se que, para cada valor real de k , (u_n) é uma sucessão que converge para k e cujos termos são superiores a k . Então...

a) ... para $k = -1$, (u_n) é uma sucessão que converge para -1 e cujos termos são superiores a -1 , pelo que se tem $\lim f(u_n) = +\infty$.

b) ... para $k = 2$, (u_n) é uma sucessão que converge para 2 e cujos termos são superiores a 2 , pelo que se tem $\lim f(u_n) = -\infty$.

Pág. 97

116. Opção (A)

Como $\lim u_n = \lim(2 - n^2) = -\infty$ tem-se $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

117. Tem-se $\lim u_n = \lim(2n - 1) = +\infty$ e $\lim v_n = \lim \frac{n^2 - 1}{3n} = +\infty$.

Como $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$, pode-se concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

118.

a) A proposição é verdadeira.

Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pudesse ser igual a 1, teria que se ter, para $a = b$ (caso em que $\lim u_n = 1$), $\lim f(u_n) = 1$.

b) A proposição é falsa.

Pode existir uma sucessão (v_n) tal que $\lim v_n = 1$, para a qual se tenha $\lim f(v_n) \neq -1$.

c) A proposição é verdadeira. Admitamos que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Designemos esse limite por k .

Então, para qualquer sucessão (u_n) tal que $\lim u_n = +\infty$, tem que ser $\lim f(u_n) = k$.

Como, para $a > b$, $\lim u_n = +\infty$ e $\lim f(u_n) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ tem que ser igual a 2.

119.

a) (u_n) é uma sucessão que converge para 0 e cujos termos são superiores a 0, pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

b) (u_n) é uma sucessão que converge para 0 e cujos termos são inferiores a 0, pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

c) (u_n) é uma sucessão que converge para -2 e cujos termos são superiores a -2 , pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$.

d) $u_n = \frac{-2n-1}{n} = -2 - \frac{1}{n}$, pelo que (u_n) é uma sucessão que converge para -2 e cujos termos são inferiores a -2 , pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.

e) $\lim u_n = -\infty$, pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

f) $\lim u_n = +\infty$, pelo que se tem $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

120. Opção (B)

$\lim u_n = -\infty$, pelo que, como $\lim f(u_n) = 2$, tem-se $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

121.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 + (-\infty) = -\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \times (-\infty) = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g}{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \frac{-\infty}{3} = -\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g^3(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \right]^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \times (f(x) - 3)] = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3 \right)}_{\infty \times 0}$$

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \times (f(x) - 3)]$ conduz à indeterminação $\infty \times 0$.

g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{(f - g)(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) - g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)]} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \\ &= \sqrt{3 - (-\infty)} = +\infty \end{aligned}$$

h)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{3 - 3}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) + 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}_{\substack{-\infty \\ +\infty}}}$$

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - g(x)}$ conduz à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

j)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{[f(x) - 3]^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 3]^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3 \right]^2} = \frac{-\infty}{(3 - 3)^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

k)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - f(x)}{x - 1} = \frac{3 - \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} x - 1}_{\substack{0 \\ 0}}}$$

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - f(x)}{x - 1}$ conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$.

l)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \times (1 - 2g(x))] &= \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} (1 - 2g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \left[1 - 2 \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \right] = \\ &= -\infty \times [1 - 2 \times (-\infty)] = -\infty \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

122.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \frac{k}{0^+} = -\infty, \text{ pois } k \in \mathbb{R}^-$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)} = \frac{k}{0^+} = +\infty, \text{ pois } k \in \mathbb{R}^+$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

123.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty + (-2) = +\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}_{\frac{0}{0}}}$$

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f}{g}(x)$ conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$.

d)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + 1}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{0 + 1}{0^+} = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 2}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}_{\substack{-\infty \\ +\infty}}}$$

Então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x)$ conduz à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

g)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g}{f}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

124.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} + \frac{x-3}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{0}$$

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x-3}$.

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x-1}$.

d)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{|x-1|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{\frac{1}{4} - 2}{0^+} = \frac{-\frac{7}{4}}{0^+} = -\infty$$

125.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(|3x + 1| + \frac{3}{(x+1)^2} \right) = |-3 + 1| + \frac{3}{0^+} = 2 + (+\infty) = +\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - x + 1 \right) = \frac{1}{+\infty} - (+\infty) + 1 = 0 - (+\infty) + 1 = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(5 - x)^2 \times x - 2] = 5^2 \times 0 - 2 = -2$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(3 - x) \times x^3] = (3 - (-\infty)) \times (-\infty)^3 = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

e)

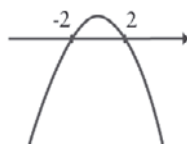
$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\sqrt{x - \pi}} \right)$ conduz à indeterminação $\infty - \infty$, pois:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\pi - x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sqrt{x - \pi}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

126.

a) Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = 4 - x^2$.

Um esboço do gráfico de f é:



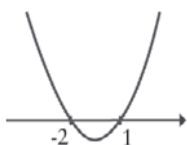
Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 0^-$.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

b) Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 + x - 2$.

Um esboço do gráfico de f é:



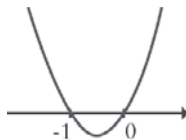
Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar, $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + x - 2) = 0^-$.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + x - 2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

c) Consideremos a função quadrática, f , definida por $f(x) = x^2 + x$.

Um esboço do gráfico de f é:



Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^+$.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

127.

a) O limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe se, e só se, forem iguais os limites $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{k(x-1)}$$

Ora, para que este limite seja igual a $-\infty$, o limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} [k(x-1)]$ tem que ser 0^- , pelo que, como $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+$, k tem que ser negativo.

128.

a) Função racional não polinomial.

b) Função racional polinomial; tem-se: $\frac{2x-1}{\pi-2} = \frac{2}{\pi-2}x - \frac{1}{\pi-2}$.

c) Função não racional.

d) Função não racional.

e) Função racional polinomial; tem-se: $\sqrt{(x^2+2)^2} = x^2 + 2$.

f) Função racional não polinomial.

129.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $D = \mathbb{R}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + \pi \neq 0\} = \mathbb{R}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

130.

a) $\frac{1}{x+2}$

b) $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-x-2}$

c) $\frac{1}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = \frac{1}{x^2-3}$

d) $\frac{1}{x^2+1}$

Pág. 99

131.

a) $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x+2)(x-2)$

b) $2x^2 + 5x - 7 = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x-1) = (2x+7)(x-1) \quad \Bigg| \quad 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = 1$

c) $4h - h^2 = h(4-h)$

d) $x(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(x-2)$

e) Tem-se:

2	-1	0	0	8
		2	4	8
	1	2	4	$0 = R$

Então, tem-se $8 - x^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

Ora $x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, pelo que o polinómio $x^2 + 2x + 4$ não pode ser fatorizado.

f) $2x^3 + 4x^2 + 2x = 2x(x^2 + 2x + 1) = 2x(x+1)^2$

132.

$$\text{a)} \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \frac{(x-1)(x+1)^2}{x(x^2-1)} = \frac{(x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

Domínio:

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \vee x \neq 1$$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\text{b)} \frac{(a+b)^2-4ab}{2a-2b} = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2a-2b} = \frac{a^2-2ab+b^2}{2(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = \frac{a-b}{2}$$

Domínio:

$$2a - 2b \neq 0 \Leftrightarrow 2a \neq 2b \Leftrightarrow a \neq b$$

Portanto, $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b\}$.

$$\text{c)} \frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9} = \frac{(2x)^2-12x+3^2}{(2x)^2-3^2} \cdot \frac{(2x-3)^2}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$$

Domínio:

$$4x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (2x+3)(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

133. $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

134.

$$\text{a)} \frac{2}{2x-x^2} - \frac{x}{4-2x} = \frac{2}{x(2-x)} - \frac{x}{2(2-x)} = \frac{4}{2x(2-x)} - \frac{x^2}{2x(2-x)} = \frac{4-x^2}{2x(2-x)} = \frac{(2+x)(2-x)}{2x(2-x)} = \frac{2+x}{2x}$$

Domínio:

$$\bullet 2x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

$$\bullet 4 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

$$\text{b)} \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

Domínio:

$$\bullet x - y \neq 0 \Leftrightarrow y - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y$$

Portanto, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$.

$$\text{c)} \frac{3x}{3+x} \times \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right) = \frac{3x}{3+x} \times \left(\frac{x^2}{3x} - \frac{9}{3x}\right) = \frac{3x}{3+x} \times \frac{x^2-9}{3x} = \frac{3x(x+3)(x-3)}{(3+x)3x} = x-3$$

Domínio:

$$\bullet 3 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

$$\bullet x \neq 0$$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$.

$$\text{d)} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \times \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \right) \times \frac{1-x}{x} = \left(\frac{1-x}{(1-x)(1+x)} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \right) \times \frac{1-x}{x} =$$

$$= \frac{1-x+2x}{(1-x)(1+x)} \times \frac{1-x}{x} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} \times \frac{1-x}{x} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Domínio:

- $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$
- $1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1$
- $x \neq 0$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\text{e)} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \div \frac{4}{x^2-4} = \left(\frac{x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \right) \times \frac{x^2-4}{4} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+2)(x-2)}{4} = \frac{x}{2}$$

Domínio:

- $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$
- $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$
- $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2$
- $\frac{4}{x^2-4} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\text{f)} \frac{\frac{1-x}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{\frac{2-x}{2}}{\frac{4-x^2}{2x}} = \frac{2-x}{2} \times \frac{2x}{4-x^2} = \frac{2-x}{2} \times \frac{2x}{(2-x)(2+x)} = \frac{(2-x) \times 2x}{2(2-x)(2+x)} = \frac{x}{2+x}$$

Domínio:

- $x \neq 0$
- $\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{2x} \neq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \neq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

$$\text{g)} \frac{x^2-3x+2}{x} \div \frac{x-2}{2x} = \frac{x^2-3x+2}{x} \times \frac{2x}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x} \times \frac{2x}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)2x}{x(x-2)} = 2(x-1) = 2x-2$$

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

Domínio:

- $x \neq 0$
- $\frac{x-2}{2x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 0$

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

135.

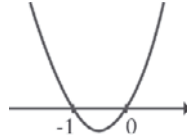
a₁)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x - 1) \stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$$

a₂)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

a₃) Um esboço do gráfico de g é:



Tem-se, tal como a figura pretende ilustrar, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^+$.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

a₄) Tem-se $f(x) = 2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)}{x(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a}_5) \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{2}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{2}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} - \frac{1}{x(x + 1)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x}{x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} - \frac{x - \frac{1}{2}}{x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{\frac{1}{2}}{x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} \right] = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 0^+} = +\infty \end{aligned}$$

a₆)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2x^2 + 2x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2x^2 + 2x})(\sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x})}{\sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + x - 1) - (2x^2 + 2x)}{\sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{2}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{2}{x}} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{-1 - 0}{\sqrt{2 + 0 - 0} + \sqrt{2 + 0}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{a}_7) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{(x+1)^3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{(x+1)^3} = \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty
\end{aligned}$$

b₁) Por exemplo, a função real de variável real h definida por $h(x) = x^3$.

Na verdade, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + h(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x^2 + x - 1 + x^3] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

b₂) Por exemplo, a função real de variável real h definida por $h(x) = x^3$.

Na verdade, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

b₃) Por exemplo, a função real de variável real h definida por $h(x) = \frac{x}{3}$.

Na verdade, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [3(x+1)] = 3$$

136.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Tem-se:

	1	0	1	-2
1		1	1	2
	1	1	2	0 = R

Então: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{0}{-5} = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{2} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x}{2} - 1}{2\left(\frac{x}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2}$$

d) Sempre que x toma valores inferiores a 3, $2x - 6$ é negativo, pelo que se tem, nesses casos, $|2x - 6| = -2x + 6$; então:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|2x - 6|}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{3x - 5}}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2 - \sqrt{3x - 5})(2 + \sqrt{3x - 5})}{(x - 3)(2 + \sqrt{3x - 5})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (3x - 5)}{(x - 3)(2 + \sqrt{3x - 5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(2 + \sqrt{3x - 5})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{2 + \sqrt{3x - 5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{5-2x}} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x})}{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{5-2x})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x})}{x^2+2-(5-2x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x})}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0}
 \end{aligned}$$

$$| \quad x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x})}{(x+3)(x-1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{5-2x}}{x-1} = \frac{2\sqrt{11}}{-4} = -\frac{\sqrt{11}}{2}
 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-\sqrt{4x})(2+\sqrt{4x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{4x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4-4x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{4x})(x+1-2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{4x})(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{2+\sqrt{4x}} = \frac{-4 \times 2\sqrt{2}}{4} = -2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+1}} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2+x) \times \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \times \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x+1) \times \sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x\sqrt{x+1}) = \\
 &= -1 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

i) Sempre que x toma valores inferiores a -1 , $x+1$ é negativo, pelo que se tem, nesses casos, $|x+1| = -x-1$; então:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-x-2}{|x+1|} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-x-2}{-x-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} [-(x-2)] = 3
 \end{aligned}$$

$$| \quad x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$$

$$\text{j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2x^2)^3}{x^2 \times (1-x^2)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\left| \begin{aligned} (x+2x^2)^3 &= (x+2x^2)^2 \times (x+2x^2) = (x^2+4x^3+4x^4) \times (x+2x^2) = \\ &= x^3+2x^4+4x^4+8x^5+4x^5+8x^6 = 8x^6+12x^5+6x^4+x^3 \quad \text{e} \\ x^2 \times (1-x^2)^2 &= x^2 \times (1-2x^2+x^4) = x^2-2x^4+x^6 \end{aligned} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^6+12x^5+6x^4+x^3}{x^2-2x^4+x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^6}{x^6} = 8$$

$$\text{k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-x^{\infty-\infty}}{2x-\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} - 1 \right)}{x \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - 1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{\frac{x}{x^2}} - 1}{2 - \sqrt{\frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{2 - \sqrt{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$$

l) Sempre que x toma valores inferiores a -1 , $x^3 - x$ é negativo, pelo que se tem, nesses casos, $|x^3 - x| = -x^3 + x$; então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 - x| + x^3) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x + x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{m)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{2x+1} \times \frac{x^2+1}{x} \right)^{0 \times \infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2+8}{2x^2+x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{2x^2} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{n)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-x+3}{x+1} - 2x \right) &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x+3-2x^2-2x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+3}{x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{2} : \frac{x^2-3x+2}{x} \right) &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{2} \times \frac{x}{x^2-3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{2x^2-6x+4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pág. 100

137. Opção (C)

Se $k \neq 0$ e $a \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 - 2x^2 - 4}{ax^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{a}$$

pelo que, consoante o sinal de k e o sinal de a , este limite é $-\infty$ ou é $+\infty$.

Se $k \neq 0$ e $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 - 2x^2 - 4}{ax^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{2}$$

pelo que, consoante o sinal de k , este limite é $-\infty$ ou é $+\infty$.

Então, para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 - 2x^2 - 4}{ax^2 + 2} = -\frac{1}{2}$, tem que ser $k = 0$.

Tem-se, neste caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 - 2x^2 - 4}{ax^2 + 2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 4}{ax^2 + 2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{ax^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4$$

138.

a) $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Tem-se $D_g = \mathbb{R}$ e $D_f =]0, +\infty[$, pelo que

$$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

b) Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Então, de acordo com o teorema do limite da função composta,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = +\infty$$

139.

a) Como os zeros de f são -2 e 3 , tem-se $f(x) = a(x+2)(x-3)$, com $a \neq 0$.

Como $f(0) = k$, vem $a \times (0+2) \times (0-3) = k$ ou seja, $a = -\frac{k}{6}$.

Então, tem-se $f(x) = -\frac{k}{6}(x+2)(x-3) = -\frac{k}{6}(x^2 - x - 6) = -\frac{k}{6}x^2 + \frac{k}{6}x + k$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{f(x)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{-\frac{k}{6}x^2 + \frac{k}{6}x + k} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-\frac{k}{6}x^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{k}{6}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{k}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9} = 10 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{k}{6}(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = 10 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{k}{6}(x+2)}{x+3} = 10 \Leftrightarrow \frac{-\frac{5k}{6}}{6} = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{5k}{6} = 60 \Leftrightarrow k = -72 \end{aligned}$$

140. Tem-se $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, pelo que, qualquer que seja o valor de k , se tem $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$.

141. Opção (A)

Se a função f é contínua em $\mathbb{R}$, ela é contínua em a .

Ora, f é contínua em a se e só se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - x + 3) \Leftrightarrow a^2 - 2a = a^2 - a + 3 \Leftrightarrow a = -3$$

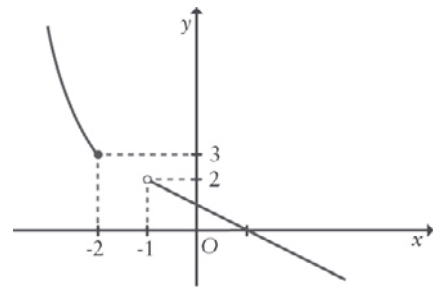
142. Na figura ao lado, está o esboço do gráfico da função g .

Para definir uma função f nas condições do enunciado, tem que se ter:

- f é contínua em $] -2, -1[$;
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$

Uma possível expressão analítica para definir a função f no intervalo $] -2, -1]$ é a que define a reta que passa nos pontos de coordenadas $(-2, 3)$ e $(-1, 2)$.

$$\text{Então, } f \text{ pode ser definida por } f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq -2 \\ -x + 1 & \text{se } -2 < x \leq -1 \\ g(x) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



143. Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, pelo que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(3)$.

144.

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A função é o quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, também contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. No numerador temos a soma da composta da função seno com uma função afim (definida por $2x$) com uma função quadrática (definida por $x^2 + 1$). No denominador temos a diferença entre a raiz quadrada de uma função quadrática sempre positiva (definida por $x^2 + 1$) e uma função constante.

145. • O gráfico de f pode ser obtido a partir do gráfico de g por meio da translação associada ao vetor $(-1, 0)$, pelo que, como não existem assíntotas verticais ao gráfico de g , também não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

• Como a função g não tem zeros, h é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico de h .

• Como existe pelo menos um número real, a , para o qual $g(a) = 1$, existem pontos aderentes ao domínio da função m que não pertencem do domínio de m , pelo que podem existir assíntotas verticais ao gráfico de m .

• Como $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x) + 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que r é contínua em $\mathbb{R}$; portanto não existem assíntotas verticais ao gráfico de r .

• Como existe pelo menos um número real, a , para o qual $g(a) = 4$, existem pontos aderentes ao domínio da função p que não pertencem do domínio de p , pelo que podem existir assíntotas verticais ao gráfico de p .

Pág. 101

146. Opção (B)

Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f , tem-se $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ou

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, pelo que, em qualquer dos casos, se tem $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x)} = 0$.

147. Opção (B)

Como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f , tem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, pelo

que se tem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3}$.

148.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, pelo que só a reta de equação $x = 3$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{3 - x} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3 - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -\infty$$

Portanto, não existem assíntotas horizontais ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} =]2, +\infty[$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $]2, +\infty[$, pelo que só a reta de equação $x = 2$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4 + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) = 4 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) = 4 + \frac{2}{+\infty} = 4 + 0 = 4$$

Portanto, a reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, pelo que só as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

Portanto, a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, pelo que só as retas de equações $x = -2$ e $x = 2$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

- Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

e) $D_f = \mathbb{R}$

- Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, pelo que só a reta de equação $x = 1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

- Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Portanto, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

149. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pelo que só a reta de equação $x = 2$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-6}{(x-2)^2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-6}{(x-2)^2} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-6}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \neq 0\} = \mathbb{R}$

- Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico de g .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x - 2x^3 - 4x}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, pelo que só as retas de equações $x = -1$ e $x = 0$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 + x + 3}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

-1	2	0	1	3
2	-2	2	3	0

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x-1} = -\frac{7}{2}$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3 + x + 3}{x^2 + x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + x + 3}{x^2 + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x + 3 - 2x^3 - 2x^2}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x - 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando x tende para $-\infty$.

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

$$\text{d)} D_r = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+4}{2} \geq 0 \right\} = \mathbb{R}$$

- Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico de r .

- Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+4}{2x^2}} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{2x^2}} = - \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{2x^2}} = - \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2}} = - \sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[r(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} x \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+4}{2} - \frac{1}{2} x^2}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+4-x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de r quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{2x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{2x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4}{2x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[r(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x \right)}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+4}{2} - \frac{1}{2}x^2}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+4-x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+4}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de r quando x tende para $+\infty$.

e) $D_s = \{x \in \mathbb{R} : |5 - x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Tem-se:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{5-x} & \text{se } x < 5 \\ \frac{x^2+2}{x-5} & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, pelo que só a reta de equação $x = 5$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de s .

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2+2}{5-x} = \frac{27}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 5$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{s(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+2}{5-x}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{5x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} [s(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{5-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2+5x-x^2}{5-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+5x}{5-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{-x} = -5
\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x - 5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de s quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} [s(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2-x^2+5x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+5x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5
\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de s quando x tende para $+\infty$.

f) $D_t = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, pelo que só as retas de equações $x = -2$ e $x = 2$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de t .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{|x| - 2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de t .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{|x| - 2} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de t .

• Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{|x| - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-x^2 - 2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [t(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{-x - 2} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 4x}{-x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{-x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

Portanto, a reta de equação $y = -2x + 4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de t quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{|x| - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [t(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 4x}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + 4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de t quando x tende para $+\infty$.

g) $D_v = [-1, +\infty[$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $[-1, 1[$ e em $]1, +\infty[$, pelo que só a reta de equação $x = 1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de v .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2x^2}{1 - x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de v .

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x - 2x^2}{1 - x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{x - x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{-x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2x^2}{1 - x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1 - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de v quando x tende para $+\infty$.

150. Opção (C)

151. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x - 3 + \frac{1}{x + 2} \right) - (x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x + 2} - x + 3 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{+\infty} = 0, \end{aligned}$$

pelo que está provado o pretendido.

152. a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que só a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(|x - 3| + \frac{1}{x} \right) = 3 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais

Tem-se $g(x) = \begin{cases} -x + 3 + \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x - 3 + \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Ora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x + 3)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(-x + 3 + \frac{1}{x} \right) - (-x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + 3 + \frac{1}{x} + x - 3 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

pelo que a reta de equação $y = -x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x - 3)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x - 3 + \frac{1}{x} \right) - (x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x} - x + 3 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

pelo que a reta de equação $y = x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$.

b) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pelo que só a reta de equação $x = 2$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(2x + \frac{1}{x-2} \right) = 4 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

• Assíntotas não verticais

Tem-se $h(x) = 2x + \frac{x}{x-2} = 2x + 1 + \frac{2}{x-2}$.

$$\left| \frac{x}{-x+2} \right| = \frac{1}{\frac{x-2}{1}}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (2x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(2x + 1 + \frac{2}{x-2} \right) - (2x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + \frac{2}{x-2} - 2x - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-2} = 0 \end{aligned}$$

pelo que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando x tende para $-\infty$.

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

153.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{h(x)} = \frac{5}{-\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{h(x)} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{h(x)} = 0$.

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{h(x)} = \frac{1-(+\infty)}{3} = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{h(x)} = \frac{0+1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Pág. 102

154. Tem-se $f(x) - g(x) = x - 2 \Leftrightarrow f(x) - (x - 2) = g(x)$; portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

pelo que a afirmação é verdadeira

155. Opção (C)

Tem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, pelo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{3}$.

156.

a) A afirmação verdadeira que se pode obter é «O gráfico de f pode ter assíntotas verticais».

Basta considerar, por exemplo, a função definida por $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) A afirmação verdadeira que se pode obter é «O gráfico de f pode interseçar a reta de equação $x = 2$ »

Basta considerar, por exemplo, a função definida por $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c) A afirmação verdadeira que se pode obter é «O gráfico de f não pode ter uma assíntota oblíqua».

Na verdade, dado que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quer quando x tende para $-\infty$ quer quando x tende para $+\infty$.

157. Opção (B)

A reta r é definida pela equação $y = -x + 1$ pelo que se tem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = 0$$

158. Opção (B)

O gráfico de g pode ser obtido, a partir do gráfico de f , por meio da translação associada ao vetor de coordenadas $(-1, 0)$, pelo que a única assíntota do gráfico de g se pode obter, a partir da única assíntota do gráfico de f , por meio dessa mesma translação.

159. Opção (A)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{f(1)}{-\infty} = 0$$

160.**a)**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - ax} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 3}{x - a} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 3 - 2x^2 + 2ax}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2a+1)x - 3}{x - a} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2a+1)x}{x} = 2a+1 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + (2a + 1)$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$, para qualquer valor de a .

O resultado é análogo para o caso « $+\infty$ ».

Está provado que todas as funções desta família têm uma assíntota de declive 2.

$$\mathbf{b_1)} \quad 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

b₂) $2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$, pelo que se tem $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - a} = \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)}{x - a}$. Então, para $a = -\frac{3}{2}$, vem $f(x) = 2(x - 1) \wedge D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, e para $a = 1$, vem $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right) \wedge D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, pelo que, em ambos os casos, o gráfico de f não tem assíntotas verticais. Para $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$, a reta de equação $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

161. Como a função g é estritamente decrescente, é injetiva, pelo que admite um único zero: .
Então, tem-se $D_{\frac{1}{g}} = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

- Assíntotas verticais

A função $\frac{1}{g}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, pelo que só a reta de equação $x = a$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de $\frac{1}{g}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Portanto, a reta de equação $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

- Assíntotas não verticais

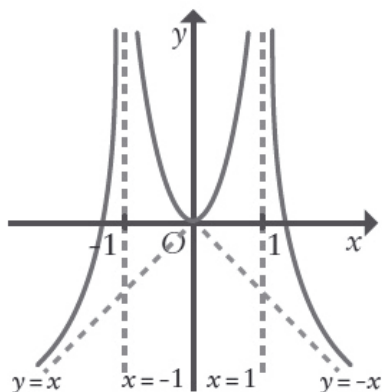
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $\frac{1}{g}$ quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{1}{b}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{b}$ é assíntota horizontal ao gráfico de $\frac{1}{g}$ quando x tende para $+\infty$.

162. Por exemplo:



163. Sejam a e c os zeros da função h .

Então, tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{a, c\}$.

• Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a, c\}$, pelo que só as retas de equações $x = a$ e $x = c$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} h(x)} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow c} h(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Portanto, as retas de equações $x = a$ e $x = c$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{1}{b}, b \neq 0$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{b}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

164. Opção (A)

Dado que a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$,

$$\text{tem-se } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ pelo que } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1.$$

Tal permite rejeitar as opções (B) e (C).

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Tal permite rejeitar a opção (D).

165.

$$\text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x \neq 0 \wedge x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{2-x} + \frac{4}{x^2-2x} = \frac{x}{2-x} + \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x^2}{x(2-x)} - \frac{4}{x(2-x)} = \frac{x^2-4}{x(2-x)} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(2-x)} = \frac{-x-2}{x}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$-x-2$		+	0	-	-	-	-
x		-	-	-	0	+	+
$f(x)$		-	0	+	n.d.	-	n.d.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[$$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0 \wedge x^2 - 3x \neq 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

$$g(x) = \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{5x} = \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x(x-3)} - \frac{3}{5x} = \frac{20x}{5x(x-3)} + \frac{25}{5x(x-3)} - \frac{3x-9}{5x(x-3)} = \frac{20x+25-3x+9}{5x(x-3)} = \frac{17x+34}{5x(x-3)}$$

• $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{17x+34}{5x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow 17x + 34 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = -2$

• Variação de sinal

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$17x + 34$	—	0	+	+	+	+	+
$5x(x - 3)$	+	+	+	0	—	0	+
$g(x)$	—	0	+	n.d.	—	n.d.	+

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, 3[$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[\cup]3, +\infty[$

166.

a) $g(x) = \frac{1}{x-3} + (-2) = -2 + \frac{1}{x-3}$

b) A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g e a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$. Este resultado pode ser obtido do facto de a reta de equação $x = 0$ ser assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = 0$ ser assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$ e de o gráfico de g ser obtido, a partir do gráfico de f , pela translação referida no enunciado.

Pág. 104

167.

a) A translação que permite obter o gráfico de h a partir do gráfico de f é a translação associada ao vetor $(-1, 0)$, pelo que se tem $h(x) = \frac{2}{x+1}$.

b) Como o contradomínio de h é o $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a translação que permite obter o gráfico de h a partir do gráfico de f é a translação associada a um vetor $(a, 1)$, para um certo valor de a , pelo que se tem $h(x) = 1 + \frac{2}{x-a}$.

Como o gráfico passa no ponto de coordenadas $(2, \frac{1}{3})$, tem-se $1 + \frac{2}{2-a} = \frac{1}{3}$.

Ora, $1 + \frac{2}{2-a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2-a} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 5$; portanto, $h(x) = 1 + \frac{2}{x-5}$.

168. Como as assíntotas são as retas de equações $x = 0$ e $y = 2$, a função (que designamos por f) é definida, para um certo valor de k , por $f(x) = 2 + \frac{k}{x-0}$.

Como o gráfico passa no ponto de coordenadas $(3, 1)$, tem-se $2 + \frac{k}{3} = 1$.

Ora, $2 + \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = -1 \Leftrightarrow k = -3$; portanto, $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$.

169. Como as assíntotas são as retas de equações $x = 2$ e $y = 3$, a função é definida, para um certo valor de k , por $f(x) = 3 + \frac{k}{x-2}$.

Como o gráfico passa no ponto de coordenadas $(0, \frac{3}{2})$, tem-se $3 + \frac{k}{0-2} = \frac{3}{2}$.

Ora, $3 + \frac{k}{0-2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{k}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = 3$; portanto, $f(x) = 3 + \frac{3}{x-2}$.

170.

a) Como as assíntotas são as retas de equações $x = 1$ e $y = 2$, a função (que designamos por f) é definida, para um certo valor de k , por $f(x) = 2 + \frac{k}{x-1}$.

Como o gráfico passa no ponto de coordenadas $(0, 1)$, tem-se $2 + \frac{k}{0-1} = 1$.

Ora, $2 + \frac{k}{0-1} = 1 \Leftrightarrow -k = -1 \Leftrightarrow k = 1$; portanto $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$.

Então, tem-se $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$.

b) Como as assíntotas são as retas de equações $x = 2$ e $y = -1$, a função (que designamos por f) é definida, para um certo valor de k , por $f(x) = -1 + \frac{k}{x-2}$.

Como o gráfico passa no ponto de coordenadas $(-1, 0)$, tem-se $-1 + \frac{k}{-1-2} = 0$.

Ora, $-1 + \frac{k}{-1-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{-3} = 1 \Leftrightarrow k = -3$; portanto, $f(x) = -1 - \frac{3}{x-2} = \frac{-x+2-3}{x-2} = \frac{-x-1}{x-2}$.

Então, tem-se $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -2$.

171. a) $f(x) = \frac{5x-3}{x+2} =$

$$\left| \begin{array}{r|l} 5x-3 & x+2 \\ -5x-10 & 5 \\ \hline & -13 \end{array} \right.$$

$= 5 + \frac{-13}{x+2}$; portanto, as assíntotas

são as retas de equações $x = -2$ e $y = 5$.

b) $g(x) = \frac{5-6x}{2x+1} =$

$$\left| \begin{array}{r|l} -6x+5 & 2x+1 \\ 6x+3 & -3 \\ \hline & 8 \end{array} \right.$$

$= -3 + \frac{8}{2x+1} = -3 + \frac{4}{x+\frac{1}{2}}$; portanto, as

assíntotas são as retas de equações $x = -1/2$ e $y = -3$

$$c) h(x) = \frac{-2x}{3x-5} =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{-\frac{10}{3}}{3x-5} = -\frac{2}{3} + \frac{-\frac{10}{9}}{x-\frac{5}{3}}; \text{ portanto, as}$$

assíntotas são as retas de equações $x = \frac{5}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{r|l} -2x & 3x-5 \\ 2x-\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline -\frac{10}{3} & \end{array}$$

172.

a) A função f pode ser definida por $f(x) = 2 \wedge D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, pelo que f pode ser definida por

$$f(x) = \frac{2(x+2)}{x+2} = \frac{2x+4}{x-2}.$$

b) A função g pode ser definida por $f(x) = x \wedge D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pelo que g pode ser definida por

$$g(x) = \frac{x(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1}.$$

173.

$$a) \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow \frac{5}{x} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow 5-x^2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}; \text{ conjunto-solução} = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$b) \frac{x}{6-2x} = \frac{x^2}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{x}{2(3-x)} - \frac{x^2}{(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x+3)}{2(x-3)(x+3)} - \frac{2x^2}{2(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-3x-2x^2}{2(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2-3x}{2(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3(x^2+x)}{2(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow -3(x^2+x) = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 0) \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0; \text{ conjunto-solução} = \{-1, 0\}$$

$$c) \frac{3}{x-1} < 5 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-5x+5}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-5x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]\frac{8}{5}, +\infty[$$

x	$-\infty$	1		$8/5$	$-\infty$
$8-5x$	+	+	+	0	-
$x-1$	-	0	+	+	+
$\frac{8-5x}{x-1}$	-	n.d.	+	0	-

$$d) \frac{x+1}{(2-x)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 2[$$

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$(2-x)(x+3)$	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{x+1}{(2-x)(x+3)}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-

$$e) \frac{x^2+1}{x^2-6x} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-6x < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 6[$$

$$f) \frac{2-x}{2x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x-2x+1}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+3}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1/2[\cup [1, +\infty[$$

x	$-\infty$	$1/2$		1	$+\infty$
$-3x+3$	+	+	+	0	-
$2x-1$	-	0	+	+	+
$\frac{-3x+3}{2x-1}$	-	n.d.	+	0	-

$$g) \frac{2x-6}{x-5} \geq \frac{55-3x^2}{5x-x^2} \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x-5} - \frac{55-3x^2}{-x(-5+x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x-5} + \frac{55-3x^2}{x(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+55-3x^2}{x(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-6x+55}{x(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+11)(x-5)}{x(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-11}{x} \geq 0 \wedge x \neq 5 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-11		0	$+\infty$
$-x-11$	+	0	-	-	-
x	-	-	-	0	+
$\frac{-x-11}{x}$	-	0	+	n.d.	-

$$\Leftrightarrow x \in [-11, 0[\wedge x \neq 5 \Leftrightarrow x \in [-11, 0[$$

174.

a) $h(0) = \frac{3 \cdot 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$; portanto, o ponto de interseção com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$.

$\frac{3x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 3x+1 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$; portanto, o ponto de interseção com o eixo das abscissas é o ponto de coordenadas $(-\frac{1}{3}, 0)$.

$$b) h(x) = \frac{3x+1}{x+2} =$$

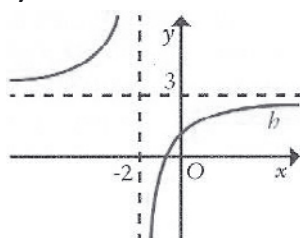
$$= 3 + \frac{-5}{x+2}$$

$$\left| \begin{array}{r} 3x+1 \mid x+2 \\ -3x-6 \quad 3 \\ \hline -5 \end{array} \right.$$

c) As assíntotas são as retas de equações $x = -2$ e $y = 3$.

d) Para $k = 3$ a equação $h(x) = k$ é impossível dado que a assíntota horizontal da hipérbole que é gráfico de h é a reta de equação $y = 3$.

e) Gráfico de h :



h é crescente em $] -\infty, -2[$ e em $] -2, +\infty[$.

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty, -2[\cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$$

Pág. 105

175.

$$a) f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x-5} = \frac{x}{x-4} \Leftrightarrow \frac{3}{x-5} - \frac{x}{x-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-4)-x(x-5)}{(x-5)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-12-x^2+5x}{(x-5)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+8x-12}{(x-5)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12 = 0 \wedge (x-5)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 6) \wedge x \neq 4 \wedge x \neq 5 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

$f(2) = \frac{3}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$ e $f(6) = \frac{3}{6-5} = \frac{3}{1} = 3$, pelo que os gráficos de f e g se intersectam nos pontos de coordenadas $(2, -1)$ e $(6, 3)$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} = x-2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-x(x+2)+2(x+2)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x-4-x^2-2x+2x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+x=0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \\
 f(0) &= \frac{0-4}{0+2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ e } f(1) = \frac{1-4}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1, \text{ pelo que os gr\'aficos de } f \text{ e } g \text{ se interse-} \\
 &\text{tam nos pontos de coordenadas } (0, -2) \text{ e } (1, -1).
 \end{aligned}$$

$$\text{176. a) } g(x) = \frac{2x+1}{x+3} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 2x+1 \quad | \quad x+3 \\ -2x-6 \quad | \quad 2 \\ \hline -5 \end{array} \right.$$

$$= 2 + \frac{-5}{x+3}$$

Portanto, as ass\'intotas ao gr\'afico de g s\~ao as retas de equa\~oes $x = -3$ e $y = 2$.

b) Tem-se, para $x \neq -3$:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2x+1}{x+3} \Leftrightarrow y(x+3) = 2x+1 \Leftrightarrow xy+3y = 2x+1 \Leftrightarrow xy-2x = 1-3y \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x(y-2) = 1-3y \Leftrightarrow x = \frac{1-3y}{y-2} = \frac{3y-1}{2-y}; \text{ portanto } g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x}, \quad D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tem-se: } g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x} = -3 + \frac{5}{2-x} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 3x-1 \quad | \quad -x+2 \\ -3x+6 \quad | \quad -3 \\ \hline 5 \end{array} \right.$$

Ent\~ao, a reta de equa\~ao $x = 2$ \'{e} ass\'intota vertical ao gr\'afico de g^{-1} e a reta de equa\~ao $y = -3$ \'{e} ass\'intota horizontal ao gr\'afico de g^{-1} .

177. As ass\'intotas ao gr\'afico da fun\~cao g s\~ao as retas de equa\~oes $x = 2$ e $y = -1$, pelo que as ass\'intotas ao gr\'afico da fun\~cao g^{-1} s\~ao as retas de equa\~oes $x = -1$ e $y = 2$.

Ent\~ao, tem-se, para um certo n\'umero real k , $g^{-1}(x) = 2 + \frac{k}{x+1}$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gr\'afico da fun\~cao g , o gr\'afico da fun\~cao g^{-1} passa no ponto de coordenadas $(2, 0)$, pelo que se tem $g^{-1}(2) = 0$.

$$\text{Ora: } g^{-1}(2) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{k}{2+1} = 0 \Leftrightarrow k = -6$$

$$\text{Portanto, } g^{-1}(x) = 2 - \frac{6}{x+1}.$$

178.

a)

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
h	+	n.d.	-	0	+

b) O gr\'afico da fun\~cao g \'{e} o transformado do gr\'afico da fun\~cao h pela transla\~ao associada ao vetor (a, b) , pelo que o ponto $(1, -2)$ tem de ser o transformado do ponto $(1, 2)$ pela mesma transla\~ao; portanto tem que se ter $(1, 2) + (a, b) = (1, -2)$, pelo que vem $a = 0$ e $b = -4$.

c₁)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$$

d) Como as assíntotas ao gráfico da função h são as retas de equações $x = 1$ e $y = 2$, tem-se, para um certo número real k , $h(x) = 2 + \frac{k}{x-1}$.

Como o gráfico da função h passa no ponto de coordenadas $(2, 0)$, tem-se $h(2) = 0$.

$$\text{Ora: } h(2) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{k}{2-1} = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

$$\text{Portanto, } h(x) = 2 - \frac{2}{x-1}.$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{179. a)} f(x) = \frac{2-x}{x+2} = \\ = -1 + \frac{4}{x+2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} -x+2 \quad | \quad x+2 \\ \hline x+2 \quad -1 \\ \hline 4 \end{array} \right.$$

Portanto, as assíntotas ao gráfico de f são as retas de equações $x = -2$ e $y = -1$.

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad f(x) \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2-x-x-2}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$-2x$	+	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{-2x}{x+2}$	-	n.d.	+	0	-

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = 2$; portanto, A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$.

$f(0) = \frac{2-0}{0+2} = 1$; portanto, B é o ponto de coordenadas $(0, 1)$.

e) $m = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$; portanto a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

f) H é o ponto de coordenadas $(-2, -1)$.

• Coordenadas do ponto I

A ordenada de I é -1 ; tem-se $-1 = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Portanto, I é o ponto de coordenadas $(4, -1)$.

- Coordenadas do ponto G

A abscissa de G é -2 ; tem-se $y = -\frac{1}{2} \times (-2) + 1 = 2$

Portanto, G é o ponto de coordenadas $(-2, 2)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Área pedida} &= \text{área do triângulo } [GHI] - \text{área do triângulo } [BOA] = \\ &= \frac{\overline{HI} \times \overline{GH}}{2} - \frac{\overline{OA} \times \overline{BO}}{2} = \frac{6 \times 3}{2} - \frac{2 \times 1}{2} = 8 \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

180.

a) Seja h a altura dos paralelepípedos. Tem-se $V = x^2 \times h$, pelo que $h = \frac{V}{x^2}$.

b) Designemos por h_1 a altura do paralelepípedo cuja aresta da base mede x e designemos por h_2 a altura do paralelepípedo cuja aresta da base mede $x + 1$; tem-se, nestas condições, $h_2 < h_1$.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se } h_1 &= \frac{20}{x^2} \text{ e } h_2 = \frac{20}{(x+1)^2}, \text{ pelo que } h_1 - h_2 = \frac{20}{x^2} - \frac{20}{(x+1)^2} = \frac{20(x+1)^2 - 20x^2}{x^2(x+1)^2} = \\ &= \frac{20(x^2 + 2x + 1) - 20x^2}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{20x^2 + 40x + 20 - 20x^2}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{40x + 20}{x^4 + 2x^3 + x^2} \end{aligned}$$

Pág. 106

181.

$$\text{a) } f(0) = 1,6 \Leftrightarrow \frac{8}{k} = 1,6 \Leftrightarrow k = \frac{8}{1,6} \Leftrightarrow k = 5$$

$$\text{b) } f(t) = 1,9 \Leftrightarrow \frac{3t+8}{1,5t+5} = 1,9 \Leftrightarrow \frac{3t+8}{1,5t+5} - 1,9 = 0 \Leftrightarrow \frac{3t+8-2,85t-9,5}{1,5t+5} = 0 \Leftrightarrow \frac{0,15t-1,5}{1,5t+5} = 0 \Leftrightarrow$$

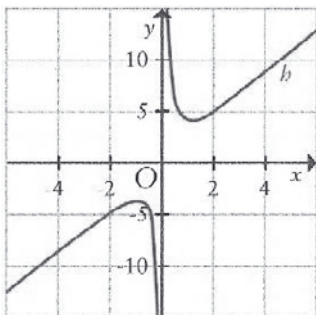
$$\Leftrightarrow 0,15t - 1,5 = 0 \wedge 1,5t + 5 \neq 0 \Leftrightarrow t = 10 \wedge t \neq -\frac{5}{1,5} \Leftrightarrow t = 10; \text{ ao fim de } 10 \text{ dias de atraso.}$$

182.

a) As dimensões do retângulo são as coordenadas do ponto P .

A abscissa de P é x e a ordenada de P é $\frac{1}{x}$; portanto, o perímetro do retângulo é igual a $x + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$, pelo que $g(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

b)



c) A assíntota vertical é a reta de equação $x = 0$.

A assíntota oblíqua é a reta de equação $y = 2x$; na verdade, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x + \frac{2}{x} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

O resultado é análogo para o caso « $-\infty$ ».

183.

a) O domínio é $[0, +\infty[$.

b) A percentagem de água na bebida obtida é dada por $100 \times \frac{\text{quantidade de litros de água na bebida obtida}}{\text{quantidade de litros de bebida obtida}}$

Tem-se $p(x) = \frac{100x+276}{x+3} = 100 \times \frac{x+2,76}{x+3}$, pelo que havia 2,76 litros nos 3 litros de sumo puro.

$\frac{2,76}{3} = 0,92$, pelo que a percentagem de água no sumo puro era de 92%.

c) O domínio de p , no contexto do problema é $[0, +\infty[$ e o contradomínio é $[92, 100[$.

$$\begin{aligned} p &= \frac{100x+276}{x+3} \Leftrightarrow p(x+3) = 100x+276 \Leftrightarrow xp+3p = 100x+276 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow xp-100x = 276-3p \Leftrightarrow x(p-100) = 276-3p \Leftrightarrow x = \frac{276-3p}{p-100} \end{aligned}$$

Então, tem-se:

$$x(p) = \frac{276-3p}{p-100}, D_x = [92, 100[\text{ e } D'_x = [0, +\infty[$$

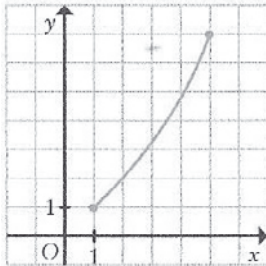
d) Representa o número de litros de água adicionados ao sumo, em função da percentagem de água na bebida.

Pág. 109

$$184. \text{ t. m. v. } f, a, a+h = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

185.

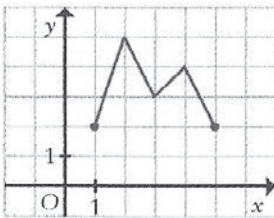
a)



Tem-se:

$$\text{t. m. v. } f, 1, 5 = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2} \text{ e } f \text{ é crescente}$$

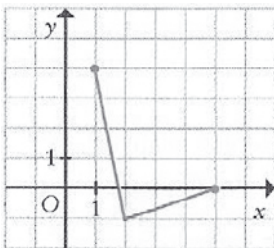
b)



Tem-se:

$$\text{t. m. v. } f, 1, 5 = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{2-2}{4} = 0 \text{ e } f \text{ não é constante}$$

c)



Tem-se:

$$\text{t. m. v. } f, 1, 5 = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{0-4}{4} = -1 \text{ e } f \text{ não é decrescente}$$

Pág. 110**186.**

$$\text{a) t. m. } v_{f,1,3} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3-(-1)}{2} = 2$$

$$\text{t. m. } v_{g,1,3} = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$$

$$\text{t. m. } v_{j,1,3} = \frac{j(3)-j(1)}{3-1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b) t. m. } v_{f,-3,5} = \frac{f(5)-f(-3)}{5-(-3)} = \frac{7-(-9)}{8} = 2$$

$$\text{t. m. } v_{g,-3,5} = \frac{g(5)-g(-3)}{5-(-3)} = \frac{25-9}{8} = 2$$

$$\text{t. m. } v_{j,-3,5} = \frac{j(5)-j(-3)}{5-(-3)} = \frac{\frac{1}{5}-(-\frac{1}{3})}{8} = \frac{1}{15}$$

$$\text{c) t. m. } v_{f,1,1+h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{2(1+h)-3-(-1)}{h} = \frac{2+2h-3+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

$$\text{t. m. } v_{g,1,1+h} = \frac{g(1+h)-g(1)}{1+h-1} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

$$\text{t. m. } v_{j,1,1+h} = \frac{j(1+h)-j(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} = \frac{-\frac{h}{1+h}}{h} = -\frac{1}{1+h}$$

187. Tem-se $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$, pelo que a reta passa nos pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(1, 3)$.

O declive da reta é igual a $\frac{3-1}{1-0} = 2$ e a ordenada na origem é 1, pelo que a equação reduzida da reta é $y = 2x + 1$.

188. A taxa média de variação é igual ao declive da reta AB , ou seja, $\frac{2}{3}$.

Pág. 113**189.**

a) No caso de este limite existir, ele representa a derivada de f no ponto 3.

b) No caso de este limite existir, ele representa a derivada de f no ponto 2.

c) No caso de este limite existir, ele representa a derivada de g no ponto 0.

d) No caso de este limite existir, ele representa a derivada de r no ponto 1.

190. Opção (A)

$f'(-1)$ é igual ao declive da reta r que é negativo.

191.

a)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

b)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Pág. 114

192.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3 - (-3)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 3 - 5}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2x - 4) = -8 \\ f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3 - (-1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 2) = 4 \end{aligned}$$

193.

a)

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 2(1 + h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 2 - 2h - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \stackrel{0}{=} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2}{h} \stackrel{0}{=} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2-2h}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+h} = -2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2-(1+h)} - 1}{h} \stackrel{0}{=} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-1+h}{1-h}}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1-h} = 1\end{aligned}$$

194.

a) Vimos, no exercício 193. b), que se tem, neste caso, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Tem-se $f(1) = 1$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(1, 1)$.

Então, uma equação da reta é $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$.

Ora, $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

A equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h-1} - (-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+2h-2}{h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h-1} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2 \end{aligned}$$

Tem-se $g(0) = -2$ pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(0, -2)$.

Então, uma equação da reta é $y = -2(x - 0) + (-2)$.

Ora, $y = -2(x - 0) + (-2) \Leftrightarrow y = -2x - 2$.

A equação reduzida da reta é $y = -2x - 2$.

Pág. 115

195.

a) O declive da reta é igual a $f'(1)$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - x^2 - 3}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x + 3) = 2 \end{aligned}$$

O declive da reta é igual a 2.

$$4x - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

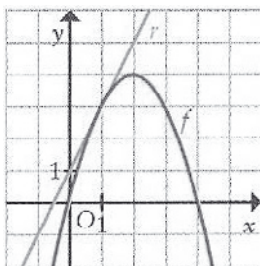
b) Tem-se $f(1) = -3$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(1, -3)$.

Então, uma equação da reta é $y = 2(x - 1) - (-3)$.

Ora, $y = 2(x - 1) - (-3) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 1$

A equação reduzida da reta é $y = 2x + 1$.

c)



196.

a) Tem-se $f(-1) = 0$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

$$m = f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)^2 - 0}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)^2}{x+1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} (2x+2) = 0$$

Então, uma equação da reta é $y = 0$.

b) Tem-se $f(-2) = 2 \times (-2+1)^2 = 2$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-2, 2)$.

$$m = f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+1)^2 - 2}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 4x}{x+2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2x) = -4$$

Então, uma equação da reta é $y = -4(x+2) + 2$.

Ora, $y = -4(x+2) + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 8 + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 6$.

A equação reduzida da reta é $y = -4x - 6$.

c) $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = -2 \vee x+1 = 2 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Os pontos do gráfico cuja ordenada é 8 são os pontos de coordenadas $(-3, 8)$ e $(1, 8)$.

• Reta tangente ao gráfico no ponto de coordenadas $(-3, 8)$.

$$m = f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+1)^2 - 8}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3} \stackrel{0}{=}$$

$$| 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)(x-1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (2x-2) = -8$$

Então, uma equação da reta é $y = -8(x+3) + 8$.

Ora, $y = -8(x+3) + 8 \Leftrightarrow y = -8x - 16$.

A equação reduzida da reta é $y = -8x - 16$.

• Reta tangente ao gráfico no ponto de coordenadas $(1, 8)$.

$$m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)^2 - 8}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x-1} \stackrel{0}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+6) = 8$$

Então, uma equação da reta é $y = 8(x-1) + 8$.

Ora, $y = 8(x-1) + 8 \Leftrightarrow y = 8x$.

A equação reduzida da reta é $y = 8x$.

197.

$$\begin{aligned} f'(1) = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - a}{x - 1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+1)(x-1)}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (ax + a) = 4 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

198. Qualquer que seja k , o declive da reta é igual a $f'(1)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1+h) + k - 2 - k}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h + h^2 + 1 - h + k - 2 - k}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-3) = -3 \end{aligned}$$

Pág. 117

199. Opção (C)

200.

a) $4,9t^2 = 78,4 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = -4 \vee t = 4$

Como, no contexto da situação, se tem $t \geq 0$, conclui-se que o telemóvel demorou 4 segundos a chegar à água.

b) Velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto a percorrê-la}} = \frac{78,4 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 19,6 \text{ m/s}$

c) Seja $d(t)$ a distância percorrida pelo telemóvel ao fim de t segundos.

A velocidade do telemóvel no instante $t = 4$ é igual a $d'(4)$.

$$\begin{aligned} d'(4) &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4,9t^2 - 78,4}{t - 4} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4,9(t+4)(t-4)}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} (4,9t + 19,6) = 39,2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Tem-se: $39,2 \text{ m/s} = 39,2 \times 3600 \text{ m/h} = 141120 \text{ m/h} = 141,12 \text{ km/h}$

201.

a) Seja a um número real qualquer.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{4}(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x}{4} + \frac{a}{4} \right) = \frac{a}{2} \\ \text{Portanto, } f'(x) &= \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

b) $m = f'(-2) = \frac{-2}{2} = -1$

Tem-se $f(-2) = \frac{(-2)^2}{4} = 1$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-2, 1)$.

Então, uma equação da reta é $y = -(x + 2) + 1$.

Ora, $y = -(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$.

A equação reduzida da reta é $y = -x - 1$.

c) Seja a a abscissa do ponto de tangência. Como a reta tangente tem declive 3, tem-se $f'(a) = 3$.

$$f'(a) = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 3 \Leftrightarrow a = 6$$

$$f(6) = \frac{6^2}{4} = 9$$

Portanto, o ponto de tangência é o ponto de coordenadas $(6, 9)$ e, então, uma equação da reta é $y = 3(x - 6) + 9$.

Ora, $y = 3(x - 6) + 9 \Leftrightarrow y = 3x - 18 + 9 \Leftrightarrow y = 3x - 9$; portanto, $b = -9$.

202. O declive da reta r é igual a 1, pelo que se tem $f'(3) = 1$.

O declive da reta t é igual a $-\frac{1}{3}$, pelo que se tem $f'(1) = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} f'(3) = 1 \\ f'(1) = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a + b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ -a - b = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} + b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

203. Dado que a função é diferenciável em 2 (por ser diferenciável em $\mathbb{R}$), é contínua em 2, pelo que, como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $f(2) = 3$.

Pág. 125

204.

a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + x^2 - 3$

b) $(3f - g)'(x) = [3f + (-g)]'(x) = (3f)'(x) + (-g)'(x) = 3f'(x) - g'(x) =$
 $= 3 \times 2x - (x^2 - 3) = 6x - x^2 + 3$

c) $\left(\frac{f}{2}\right)'(x) = \left(\frac{1}{2}f\right)'(x) = \frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x$

205. Como a reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1, tem-se $f(1) = 1$ e $f'(1) = 1$.

Como a reta de equação $y = -3x + 1$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1, tem-se $g(1) = -2$ e $g'(1) = -3$.

Tem-se:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 - 2 = -1 \text{ e}$$

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 1 - 3 = -2$$

Então, uma equação da reta tangente ao gráfico de $f + g$ no ponto de abscissa 1 é $y = -2(x - 1) + (-1)$.

$$\text{Ora, } y = -2(x - 1) + (-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 - 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1.$$

A equação reduzida da reta é $y = -2x + 1$.

Pág. 126

206.

Seja $f(x) = mx + b$ e seja r a reta que é o gráfico de f em referencial o.n. do plano; tem-se $f'(x) = m \times (x)' + 0 = m \times 1 = m$.

Então, a reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto do gráfico é uma reta com declive m . Dado que a reta r tem declive m , as retas tangentes ao gráfico de f em qualquer ponto coincidem com a reta r .

Pág. 127

207.

a) $(-2x)' = -2x' = -2 \times 1 = -2$

b) $(-2x + 3)' = (-2x)' + 3' = -2 + 0 = -2$

c) $\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}x' = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$$\text{d)} (-x)' = -x' = -1$$

$$\text{e)} (3x^2 + 2x - 5)' = (3x^2)' + (2x)' + (-5)' = 3(x^2)' + 2(x)' + 0 = 3 \times 2x + 2 \times 1 = 6x + 2$$

$$\text{f)} \left(\frac{3-x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(3-x^2)' = \frac{1}{2}(0-2x) = -x$$

$$\text{g)} (0,1x^3 + 2\pi^2)' = (0,1x^3)' + (2\pi^2)' = 0,1 \times 3x^2 + 0 = 0,3x^2$$

$$\text{h)} (x^3 - 3x^2 + 100)' = (x^3)' + (-3x^2)' + (100)' = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x$$

$$\text{i)} \left(\frac{2-3x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(2-3x)' = \frac{1}{2}(0-3) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{j)} (2\pi)' = 0$$

$$\text{k)} (\pi x^2 + \pi^2)' = (\pi x^2)' + (\pi^2)' = \pi \times 2x + 0 = 2\pi x$$

$$\text{l)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{\pi} - 5^3\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' - \left(\frac{x^3}{\pi}\right)' - (5^3)' = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{\pi} \times 3x^2 = x - \frac{3}{\pi}x^2$$

$$\text{m)} \left(\frac{2-x+2x^3}{\pi+2}\right)' = \frac{1}{\pi+2}(2-x+2x^3)' = \frac{1}{\pi+2}(-1+2 \times 3x^2) = \frac{-1+6x^2}{\pi+2}$$

Pág. 128

208.

$$\text{a)} \left(\frac{3\sqrt{x}+x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(3\sqrt{x}+x)' = \frac{1}{2}(3\sqrt{x}+x)' = \frac{1}{2}[3(\sqrt{x})' + (x)'] = \frac{1}{2}\left(3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$$

$$\text{b)} (3x^2 + \sqrt{2x} - \sqrt{3})' = (3x^2)' + (\sqrt{2} \times \sqrt{x})' + 0 = (3\sqrt{x}+x)' = 3 \times 2x + \sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 6x + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

209.

$$\text{a)} [(2-3x)^2]' = [4-12x+9x^2]' = (-12x)' + (9x^2)' = -12 + 9 \times (2x) = -12 + 18x$$

$$\text{b)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x} + 5^3\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' - 3\left(\frac{1}{x}\right)' - (5^3)' = \frac{1}{2} \times 2x - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x + \frac{3}{x^2}$$

$$\text{c)} [(2x+1)(3-x)]' = (-2x^2+5x+3)' = -2(x^2)' + 5(x)' = -4x+5$$

$$\text{d)} \left(\frac{x-x^3+5}{2x}\right)' = \left(\frac{x}{2x} - \frac{x^3}{2x} + \frac{5}{2x}\right)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2x}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2)' + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{2} \times 2x + \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x - \frac{5}{2x^2}$$

$$\text{e)} [(1-x)^2(2x+3)]' = [(1-2x+x^2)(2x+3)]' = (2x^3-x^2-4x+3)' = 6x^2-2x-4$$

Pág. 129**210.**

a) Tem-se $g(-1) = \frac{-3-2}{4} = -\frac{5}{4}$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, -\frac{5}{4})$.

$$g'(x) = \left(\frac{3x-2x^2}{4}\right)' = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = \left(\frac{3}{4}x\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{3}{4} - x$$

$$m = g'(-1) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

Então, uma equação da reta é $y = \frac{7}{4}(x+1) - \frac{5}{4}$.

$$\text{Ora, } y = \frac{7}{4}(x+1) - \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} - \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}.$$

A equação reduzida da reta é $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$.

b) Tem-se $x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x$, pelo que a reta tem declive igual a $\frac{1}{4}$; portanto, a abcissa do ponto de tangência satisfaz a condição $g'(x) = \frac{1}{4}$.

$$g'(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tem-se $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4}$ pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Então, uma equação da reta é $y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$.

$$\text{Ora, } y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}.$$

A equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.

Pág. 130**211.**

$$\begin{aligned} \text{a) } [x^3 \times (1 - 3x^2)]' &= (x^3)' \times (1 - 3x^2) + x^3 \times (1 - 3x^2)' = \\ &= (3x^2) \times (1 - 3x^2) + x^3 \times (-6x) = -15x^4 + 3x^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left[(1 - 2x^3) \times \frac{x}{2}\right]' = (1 - 2x^3)' \times \frac{x}{2} + (1 - 2x^3) \times \left(\frac{x}{2}\right)' = -6x^2 \times \frac{x}{2} + (1 - 2x^3) \times \frac{1}{2} = -4x^3 + \frac{1}{2}$$

212. Tem-se:

- A reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, pelo que $f(2) = \frac{5}{2}$ e $f'(2) = \frac{1}{2}$.

- $g'(x) = \left(\frac{x^3}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^3)' = \frac{3}{2}x^2$, pelo que $g'(2) = 6$.

- $g(2) = \frac{2^3}{2} = 4$

Então, vem:

$$(fg)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{5}{2} \times 6 = 2 + 15 = 17$$

213.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \times \frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= f'(a) \times \frac{1}{g(a)} + f(a) \times \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a) \cdot \frac{g'(a)}{[g(a)]^2} = \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}\end{aligned}$$

Pág. 131

214.

$$\text{a) } f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+3}\right)' = -\frac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{2x}{x+3}\right)' = \frac{(2x)' \times (x+3) - (2x) \times (x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)' = \frac{(x^2+1)' \times (x+2) - (x^2+1) \times (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } f'(x) &= \left(\frac{x+1}{2x^2+2x+3}\right)' = \frac{(x+1)' \times (2x^2+2x+3) - (x+1) \times (2x^2+2x+3)'}{(2x^2+2x+3)^2} = \frac{2x^2+2x+3 - (x+1) \times (4x+2)}{(2x^2+2x+3)^2} = \\ &= \frac{2x^2+2x+3 - (4x^2+6x+2)}{(2x^2+2x+3)^2} = \frac{-2x^2-4x+1}{(2x^2+2x+3)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e) } f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x-2} - \frac{x-2}{2x+1}\right)' = \left(\frac{2x+1}{x-2}\right)' - \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)' = \\ &= \frac{(2x+1)' \times (x-2) - (2x+1) \times (x-2)'}{(x-2)^2} - \frac{(x-2)' \times (2x+1) - (x-2) \times (2x+1)'}{(2x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} - \frac{2x+1 - (x-2) \times 2}{(2x+1)^2} = -\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{5}{(2x+1)^2}\end{aligned}$$

215. No exercício 212. vimos que se tem:

$$f(2) = \frac{5}{2}, f'(2) = \frac{1}{2}, g(2) = \frac{2^3}{2} = 4 \text{ e } g'(2) = 6$$

Então, vem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 - \frac{5}{2} \times 6}{4^2} = -\frac{13}{16} \text{ e } \left(\frac{g}{f}\right)'(2) = \frac{g'(2) \times f(2) - g(2) \times f'(2)}{[f(2)]^2} = \frac{6 \times \frac{5}{2} - 4 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{52}{25}$$

Pág. 132

216.

$$\text{a) } f'(x) = (x^7)' = 7x^6$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \right)' = \frac{1}{6}(x^6)' + \frac{1}{5}(x^5)' + \frac{1}{4}(x^4)' = x^5 + x^4 + x^3$$

$$\text{c) } f'(x) = \left(\frac{x^6}{2x^5+2} \right)' = \frac{(x^6)' \times (2x^5+2) - x^6 \times (2x^5+2)'}{(2x^5+2)^2} = \frac{6x^5(2x^5+2) - x^6 \times 10x^4}{(2x^5+2)^2} = \frac{2x^{10} + 12x^5}{(2x^5+2)^2}$$

217.

a) Por exemplo: $g(x) = 2x + 1$ e $f(x) = x^7$.

b) Por exemplo: $g(x) = x^4 + 1$ e $f(x) = \sqrt{x}$.

c) Por exemplo: $g(x) = \frac{2x}{x+1}$ e $f(x) = x^3$.

Pág. 133

218.

Aplicando a regra relativa à derivada da função composta, sendo $g(x) = x^n$, tem-se

$$\begin{aligned} g'(x) &= nx^{n-1} \text{ e} \\ [(f(x))^n]' &= (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)] = \\ &= f'(x) \times n[f(x)]^{n-1} \end{aligned}$$

219.

a) $h'(x) = [(2x + 1)^7]' = (2x + 1)' \times [7(2x + 1)^6] = 2 \times 7 \times (2x + 1)^6 = 14(2x + 1)^6$

b) $h'(x) = (\sqrt{x^4 + 1})' = (x^4 + 1)' \times \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c) $h'(x) = \left[\left(\frac{2x}{x+1} \right)^3 \right]' = \left(\frac{2x}{x+1} \right)' \times \left[3 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 \right] = \frac{(2x)' \times (x+1) - 2x \times (x+1)'}{(x+1)^2} \times \left[3 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 \right] =$
 $= \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} \times \left[3 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 \right] = \frac{2}{(x+1)^2} \times \left[3 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 \right] = \frac{24x^2}{(x+1)^4}$

Pág. 134

220.

a) $f'(x) = (\sqrt[5]{x})' = \left(x^{\frac{1}{5}} \right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

b) $f'(x) = (x^{0,6})' = 0,6x^{0,6-1} = 0,6x^{-0,4}$

$$\begin{aligned} \text{c)} f'(x) &= (\sqrt[3]{x^2+1})' = ((x^2+1)^{\frac{1}{3}})' = (x^2+1)' \times \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\right] = \\ &= 2x \times \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\right] = \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \end{aligned}$$

Pág. 135

221.

a) Seja a a abscissa do ponto de tangência. A reta de equação $y = 4x + 9$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a , pelo que se tem $f'(a) = 4$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x' \times (x+1) - x \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(a) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)^2} = 4 \Leftrightarrow (a+1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a+1 = \pm \frac{1}{2} \vee a+1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \vee a = -\frac{3}{2}$$

• Estudo do caso $a = -\frac{1}{2}$

$$\text{Tem-se } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

Vejamos se o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ pertence à reta de equação $y = 4x + 9$

$$-1 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \Leftrightarrow -1 = -2 + 9; \text{ o ponto não pertence à reta.}$$

Portanto, a reta de equação $y = 4x + 9$ não é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$

• Estudo do caso $a = -\frac{3}{2}$

$$\text{Tem-se } f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3$$

Vejamos se o ponto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ pertence à reta de equação $y = 4x + 9$.

$$3 = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 9 \Leftrightarrow 3 = -6 + 9; \text{ o ponto pertence à reta.}$$

Portanto, a reta de equação $y = 4x + 9$ é tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$.

b) Seja α a inclinação da reta e seja m o declive da reta.

$$m = f'(-3) = \frac{1}{(-3+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Tem-se, então, $\tan \alpha = \frac{1}{4}$, pelo que $\alpha \approx 14^\circ$.

222.

$$f(x) = 3x^2 \text{ e } g(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$$

$$= f\left(\frac{4}{1+x^2}\right) = 3\left(\frac{4}{1+x^2}\right)^2 = \frac{48}{1+2x^2+x^4}$$

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{48}{1+2x^2+x^4}\right)' =$$

$$= \frac{-48(4x+4x^3)}{(1+2x^2+x^4)^2} = \frac{-48 \times 4x(1+x^2)}{[(1+x^2)^2]^2} = \frac{-192x}{(1+x^2)^3}$$

Ou

$$f'(x) = 6x \text{ e } g'(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) =$$

$$= -\frac{8x}{(1+x^2)^2} \times 6 \times \frac{4}{1+x^2} = -\frac{192x}{(1+x^2)^3}$$

Pág. 136

223. $(f \circ g)'(2) = g'(2) \times f'[g(2)]$

Tem-se:

• A reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2, pelo que $g(2) = 1$ e $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

• $f'(x) = (\sqrt{3x+1})' = (3x+1)' \times \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$, pelo que $f'[g(2)] = f'(1) = \frac{3}{4}$

Então, vem:

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \times f'[g(2)] = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}$$

224. $f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)' = 4x^3 - 2x$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$; portanto, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ tem declive igual a $\frac{1}{2}$, pelo que qualquer reta perpendicular a ela tem declive -2 .

Seja a a abscissa do ponto do gráfico de f em que a reta tangente tem declive -2 .

Tem-se $f'(a) = -2$.

$$f'(a) = -2 \Leftrightarrow 4a^3 - 2a = -2 \Leftrightarrow 4a^3 - 2a + 2 = 0$$

Com auxílio da calculadora gráfica, conclui-se: $4a^3 - 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Tem-se $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 + 1 = 1$.

Então, uma equação da reta é $y = -2(x+1) + 1$.

Ora, $y = -2(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

A equação reduzida da reta é $y = -2x - 1$.

225.

a) $f'(x) = (4x^3)' = 12x^2$

$$f'(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 = 24$$

$$f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 = -8\sqrt{2}$$

Então, uma equação da reta é $y = 24(x + \sqrt{2}) - 8\sqrt{2}$.

$$\text{Ora, } y = 24(x + \sqrt{2}) - 8\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 24x + 24\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 24x + 16\sqrt{2}.$$

A equação reduzida da reta é $y = 24x + 16\sqrt{2}$.

b) Seja c a abscissa de cada ponto do gráfico de f em que a reta tangente tem declive 1.

Tem-se $f'(c) = 1$.

$$f'(c) = 1 \Leftrightarrow 12c^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow c = -\sqrt{\frac{1}{12}} \vee c = \sqrt{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{6} \vee c = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

• Estudo do caso $c = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 = -\frac{4 \times 3\sqrt{3}}{216} = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Então, uma equação da reta é $y = 1\left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{18}$.

$$\text{Ora, } y = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow y = x + \frac{2\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

A equação reduzida da reta é $y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}$.

• Estudo do caso $c = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{4 \times 3\sqrt{3}}{216} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Então, uma equação da reta é $y = 1\left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{18}$.

$$\text{Ora, } y = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow y = x - \frac{2\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

A equação reduzida da reta é $y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}$.

c) Seja c a abscissa do ponto do primeiro quadrante cuja existência, nas condições referidas no enunciado, nele está garantida.

$$\text{Tem-se } f'(c) = -\frac{1}{g'(c)}$$

$$f'(c) = -\frac{1}{g'(c)} \Leftrightarrow 12c^2 = -\frac{1}{-\frac{a}{c^2}} \Leftrightarrow 12c^2 = \frac{c^2}{a} \Leftrightarrow 12c^2 = \frac{1}{a}c^2$$

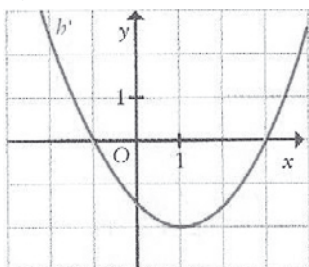
$$\text{Então, } a = \frac{1}{12}.$$

226.

a)

	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
Sinal e zeros de h'	+	0	-	0	+
Variação e extremos de h	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$

b)

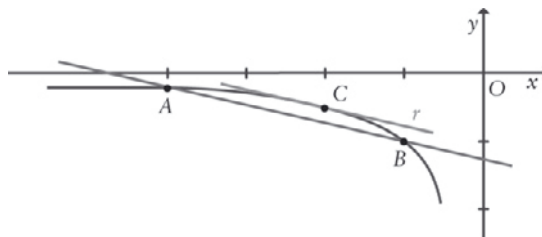


227.

Escreva a expressão na forma $a(x - h)^2 + k$.
Agora, como sei que na abscissa do vértice a função atinge um extremo e dado que a função é diferenciável, a derivada nesse ponto é zero. Portanto, a abscissa do vértice é a solução da equação $f'(x) = 0$.

228. Dado que f é diferenciável em 1 , se f atinge um extremo em $x = 1$, então $f'(1) = 0$.
Tem-se $f'(x) = (x^3 + kx^2 + 1)' = 3x^2 + 2kx$, pelo que $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$.

229. Na figura ao lado está representada parte do gráfico da função f , os pontos A e B desse gráfico, a reta AB e o ponto C , nas condições do enunciado, cuja existência é garantida pelo teorema de Lagrange.



Tem-se: A é o ponto de coordenadas $(-4, -\frac{1}{4})$ e B é o ponto de coordenadas $(-1, -1)$, pelo

$$\text{que } m_r = m_{AB} = \frac{-1 - (-\frac{1}{4})}{-1 - (-4)} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Seja a a abscissa do ponto C ; tem-se $f'(a) = -\frac{1}{4}$.

Ora, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pelo que $f'(a) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$; portanto a abscissa de C é igual a -2 , pelo que C é o ponto de coordenadas $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

Então, uma equação da reta r é $y = -\frac{1}{4}(x + 1) - 1$.

Ora, $y = -\frac{1}{4}(x + 2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - 1$.

A equação reduzida da reta r é $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

Pág. 144

230. A função g , função derivada de f , é positiva em $] -1, 2[$; portanto, f é crescente em $[-1, 2]$.

Pág. 145

231.

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(1 + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)' = 2x - \frac{3x^2}{3} = 2x - x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+	0	-
f		↘ Min. rel.	↗	Máx. rel.	↘

f é crescente em $[0, 2]$ e f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

$f(0) = 1$ é mínimo relativo e $f(2) = \frac{7}{3}$ é máximo relativo.

O contradomínio de f é $\mathbb{R}$ pelo que f não tem extremos absolutos.

b) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 + x^2 - 5x + 3)' = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 1$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-	0	+
f		Máx. rel.	↘	Mín. rel.	↗

f é crescente em $]-\infty, -\frac{5}{3}]$ e em $[1, +\infty[$ e f é decrescente em $[-\frac{5}{3}, 1]$.

$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27}$ é máximo relativo e $f(1) = 0$ é mínimo relativo.

O contradomínio de f é $\mathbb{R}$ pelo que f não tem extremos absolutos.

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e f é decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, 1]$.

$f(-1) = -2$ é máximo relativo e $f(1) = 2$ é mínimo relativo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1/x) = -\infty + 0 = -\infty, \quad \text{pelo que } f \text{ não tem mínimo absoluto.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1/x) = +\infty + 0 = +\infty, \quad \text{pelo que } f \text{ não tem máximo absoluto.}$$

d) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3}{3} + 4x - 5\right)' = 2x^2 + 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Tem-se $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$; f não tem extremos relativos.

O contradomínio de f é $\mathbb{R}$ pelo que f não tem extremos absolutos.

Pág. 146

232.

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + 2$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

f é decrescente em $] -\infty, 0]$ e f é crescente em $[0, +\infty[$.

$f(0)$ é mínimo absoluto.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

f é decrescente em $] -\infty, 3]$ e f é crescente em $[3, +\infty[$.

$f(3)$ é mínimo absoluto.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$

f é crescente em $\mathbb{R}$; f não tem extremos relativos.

233. Tem-se, de acordo com a figura, o seguinte quadro de variação do sinal de $f(x) \times f'(x)$:

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) \times f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \times f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$

Pág. 146

234. As dimensões do retângulo são as coordenadas do ponto P .

Seja x ($0 \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$) a abscissa de P ; então, a ordenada de P é $f(x)$ e, portanto, a área, A , do retângulo, é dada por $A(x) = x \times f(x) = x \times \left(\frac{4-3x^2}{2}\right) = 2x - \frac{3}{2}x^3$.

$A'(x) = \left(2x - \frac{3}{2}x^3\right)' = 2 - \frac{9}{2}x^2$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{9}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$A'(x)$	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$

Ora, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4-3 \times \frac{4}{9}}{2} = \frac{4}{3}$, pelo que as dimensões do retângulo que tem maior área são $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

235.

a) • Prisma de dimensões 2 por 2 por 8 :

Volume = $2 \times 2 \times 8 = 32 \text{ cm}^3$

Área da superfície = $2 \times (2 \times 2) + 4 \times (2 \times 8) = 72 \text{ cm}^2$

• Prisma de dimensões 4 por 4 por 2 :

Volume = $4 \times 4 \times 2 = 32 \text{ cm}^3$

Área da superfície = $2 \times (4 \times 4) + 4 \times (4 \times 2) = 64 \text{ cm}^2$

b) Seja x ($x > 0$, em cm) a aresta da base do prisma e seja h (em cm) a altura do prisma.

Tem-se:

$$x^2 h = 32, \text{ pelo que } h = \frac{32}{x^2}.$$

Seja A a área da superfície do prisma.

$$\text{Tem-se } A(x) = 2x^2 + 4 \times (xh) = 2x^2 + 4x \frac{32}{x^2} = 2x^2 + \frac{128}{x}.$$

$$A'(x) = \left(2x^2 + \frac{128}{x}\right)' = 4x - \frac{128}{x^2} = \frac{4x^3 - 128}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 128 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0		$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$x^3 - 128$		—	0	+
x^2		+	+	+
$A'(x)$		—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

A área da superfície é mínima no caso do prisma em que a aresta da base mede $\sqrt[3]{32}$ cm.

A altura deste prisma é igual a $\frac{32}{(\sqrt[3]{32})^2} = \frac{32}{\sqrt[3]{32^2}} = \frac{32 \times \sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{32^2} \times \sqrt[3]{32}} = \frac{32 \times \sqrt[3]{32}}{32} = \sqrt[3]{32}$ cm.

Este prisma é o cubo cuja aresta mede $\sqrt[3]{32}$ cm.

Pág. 148

236.

a) Por exemplo, uma caixa de dimensões 5 cm por 5 cm por 4 cm.

$$\text{Área da superfície desta caixa} = 5 \times 5 + 4 \times (5 \times 4) = 105 \text{ cm}^2$$

b) Seja x ($x > 0$, em cm) a aresta da base da caixa e seja h (em cm) a altura da caixa.

Tem-se:

$$x^2 h = 100, \text{ pelo que } h = \frac{100}{x^2}$$

$$\text{Tem-se } A(x) = x^2 + 4 \times (xh) = x^2 + 4x \frac{100}{x^2} = x^2 + \frac{400}{x}$$

$$A'(x) = \left(x^2 + \frac{400}{x}\right)' = 2x - \frac{400}{x^2} = \frac{2x^3 - 400}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 400 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 200 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{200} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{200}$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0		$\sqrt[3]{200}$	$+\infty$
$2x^3 - 400$		—	0	+
x^2		+	+	+
$A'(x)$		—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

A área da superfície é mínima no caso do prisma em que a aresta da base mede $\sqrt[3]{200} \approx 5,85$ cm.

237. Seja h ($h > 0$, em cm) a altura do cilindro e seja r (em cm) o raio da base do cilindro. Tem-se:

$$\pi r^2 h = 12, \text{ pelo que } r = \sqrt{\frac{12}{\pi h}}.$$

Seja A a área da superfície do cilindro.

$$\text{Tem-se } A(h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \times \frac{12}{\pi h} + 2\pi \sqrt{\frac{12}{\pi h}} h = \frac{24}{h} + \sqrt{48\pi h}$$

$$A'(h) = \left(\frac{24}{h} + \sqrt{48\pi h}\right)' = -\frac{24}{h^2} + \frac{(48\pi h)'}{2\sqrt{48\pi h}} = -\frac{24}{h^2} + \frac{48\pi}{2\sqrt{48\pi h}} = -\frac{24}{h^2} + \frac{24\pi}{\sqrt{48\pi h}} = -\frac{24}{h^2} + \frac{24\pi}{4\sqrt{3\pi h}} =$$

$$= -\frac{24}{h^2} + \frac{6\pi}{\sqrt{3\pi h}} = \frac{6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h}}{\sqrt{3\pi h}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h}}{\sqrt{3\pi h}} = 0 \Leftrightarrow 6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h} = 0 \wedge \sqrt{3\pi h} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\pi h^2 = 24\sqrt{3\pi h} \Leftrightarrow \pi h^2 = 4\sqrt{3\pi h} \Leftrightarrow \quad \quad \quad | \pi h^2 > 0 \text{ e } 4\sqrt{3\pi h} > 0$$

$$\Leftrightarrow \pi^2 h^4 = 48\pi h \Leftrightarrow \pi^2 h^4 - 48\pi h = 0 \Leftrightarrow \pi h(\pi h^3 - 48) = 0 \Leftrightarrow \pi h = 0 \vee \pi h^3 - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 0 \vee h = \sqrt[3]{\frac{48}{\pi}} \approx 2,48$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0		$\sqrt[3]{48/\pi}$	$+\infty$
$6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h}$		—	0	+
$\sqrt{3\pi h}$		+	+	+
$A'(x)$		—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

Para, por exemplo, $h = 1$, a expressão

$6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h}$ é negativa e para, por exemplo,

$h = 3$ a expressão $6\pi h^2 - 24\sqrt{3\pi h}$ é positiva.

A área da superfície é mínima no caso do cilindro cuja altura mede $\sqrt[3]{\frac{48}{\pi}} \approx 2,48$ cm.

O raio da base deste cilindro é igual a $\sqrt{\frac{12}{\pi \sqrt[3]{\frac{48}{\pi}}}} \approx 1,24$ cm.

238.

$$\text{a) } C(31) - C(30) = 0,2 \times 31^2 + 3 \times 31 + 600 - (0,2 \times 30^2 + 3 \times 30 + 600) = 15,2 \text{ €}$$

b)

$0,4x + 3,2$ e $C'(x) = 0,4x + 3$; a diferença entre o acréscimo do custo pela produção de mais uma peça e o custo marginal é $0,2$ €, que tem pouco significado se o valor de x for elevado. O custo marginal é, aproximadamente, o custo de produzir mais uma unidade quando já se produziram x unidades.

Pág. 154

239. Opção (B)

$$m = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{6-0}{3} = 2$$

240.

$$\text{t. m. v.}_{f,-4,-2} = \frac{f(-2)-f(-4)}{-2+4} = \frac{-8-(-24)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\text{t. m. v.}_{g,-4,-2} = \frac{g(-2)-g(-4)}{-2+4} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}{2} = \frac{-\frac{2}{15}}{2} = -\frac{1}{15}$$

241.

$$\text{a) t. m. v.}_{f,-1,2} = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{3-\frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

b) A reta passa no ponto de coordenadas $(2, 3)$ e o seu declive é $\frac{1}{2}$, pelo que é definida pela equação $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3$.

$$\text{Ora, } y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

A equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

c) Tem-se $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$, pelo que o gráfico de f é uma parábola cujo vértice tem abcissa igual a $\frac{1}{4}$.

Então, no intervalo $[-1, 2]$ a t.m.v. da função é positiva e a função não é crescente.

d)

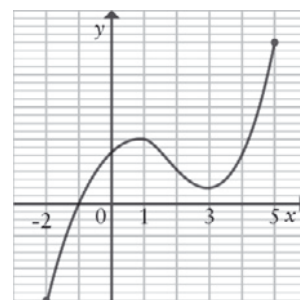
$$\begin{aligned} \text{t. m. v.}_{f,a,a+h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{2(a+h)^2-(a+h)}{2} - \frac{2a^2-a}{2}}{h} = \frac{2(a+h)^2-(a+h)-2a^2+a}{2h} = \frac{2a^2+4ah+2h^2-a-h-2a^2+a}{2h} = \\ &= \frac{4ah+2h^2-h}{2h} = \frac{4a+2h-1}{2} \end{aligned}$$

242. Opção (D)

$$\text{t. m. v.}_{f,1,4} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{f(4)-3}{3} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow f(4) = \frac{15}{6} + 3 \Leftrightarrow f(4) = 5,5$$

243. Opção (D)

Na figura está representado o gráfico de uma função nas condições do enunciado e, para a qual, as afirmações (A), (B) e (C) não são verdadeiras.



$$\begin{aligned}
244. \text{ t. m. v. } f, 4, b = \frac{1}{5} &\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(4)}{b-4} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}-2}{b-4} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow & | \quad b \neq 1 \\
&\Leftrightarrow 5\sqrt{b} - 10 = b - 4 \Leftrightarrow 5\sqrt{b} = b + 6 \Leftrightarrow & | \quad | b + 4 > 0 \text{ e } 5\sqrt{b} > 0 \\
&\Leftrightarrow 25b = b^2 + 12b + 36 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow b^2 - 13b + 36 = 0 \Leftrightarrow b = 4 \vee b = 9 \\
&\text{O intervalo } [4, 9] \text{ é a solução do problema.}
\end{aligned}$$

245.

$$a) \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{20-4(1+h)-16}{h} = \frac{4-4-4h}{h} = -4$$

$$b) \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{5(1+h)^2-5}{h} = \frac{5+10h+5h^2-5}{h} = \frac{10h+5h^2}{h} = 10+5h$$

$$c) \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-5(1+h)-(-4)}{h} = \frac{1+2h+h^2-5-5h+4}{h} = \frac{h^2-3h}{h} = h-3$$

$$d) \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{3}{2-(1+h)}-3}{h} = \frac{\frac{3-3+3h}{1-h}}{h} = \frac{\frac{3h}{1-h}}{h} = \frac{3}{1-h}$$

246. Opção (A)

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$$

e $f'(3)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.

247. A reta passa no ponto de coordenadas $(2, 1)$ e o seu declive é igual a $h'(2)$, pelo que é definida pela equação $y = -2(x - 2) + 1$.

Ora, $y = -2(x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 4 + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 5$.

A equação reduzida da reta é $y = -2x + 5$.

Pág. 156

248. Opção (B)

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) + 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = g'(3)$$

Portanto, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3 é -1 ; isto exclui as opções (C) e (D).

A reta passa no ponto de coordenadas $(3, -2)$, o que exclui a opção (A).

249. Opção (C)

$g'(a)$ é igual ao declive da reta r .

$$m_r = \frac{5-3}{4-0} = \frac{1}{2}$$

250.

a)

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

(o quociente da divisão inteira de $x^5 - 1$ por $x - 1$ é $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e o resto é 0)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 5$$

b)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1} - 1)(\sqrt{2x+1} + 1)}{x(\sqrt{2x+1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1 - 1}{x(\sqrt{2x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} = 1 \end{aligned}$$

251.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h^2 + 2h} = 2 &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h(h+2)} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(3+h) - g(3)}{h} \times \frac{1}{h+2} \right] &= 2 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g'(3) \times \frac{1}{2} = 2 &\Leftrightarrow g'(3) = 4 \end{aligned}$$

252.

a) Tem-se:

$f(2) = 4 - 6 = -2$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(2, -2)$.

$f'(x) = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$, pelo que $f'(2) = 1$.

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1(x - 2) - 2$.

Ora, $y = 1(x - 2) - 2 \Leftrightarrow y = x - 2 - 2 \Leftrightarrow y = x - 4$.

A equação reduzida da reta é $y = x - 4$.

b) Tem-se:

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(0, 2)$

e, portanto, a ordenada na origem da reta é 2.

$f'(x) = \left(\frac{2}{x+1} \right)' = -\frac{2}{(x+1)^2}$, pelo que $f'(0) = -2$.

A equação reduzida da reta é $y = -2x + 2$.

253. $f'(-2)$ é igual ao declive da reta tangente no ponto de abcissa -2 , pelo que $f'(-2) = -1$.
 $f(-2)$ é igual à ordenada do ponto de tangência. Como o ponto de tangência pertence à reta,
 $f(-2) = -(-2) + 3 = 5$.

254. $f'(a)$ é igual ao declive da reta tangente no ponto de abcissa a , pelo que
 $f'(a) = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$.

255. Opção (A)

Seja $v(t)$ a velocidade, em metros por segundo, do projétil, t segundos após o lançamento.
 $v(t) = h'(t) = (100t - 5t^2)' = 100 - 10t$, pelo que $v(2) = 100 - 20 = 80$.

256.

a) $e(t) = 15 \Leftrightarrow 2t^2 + t = 15 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 2,5$

Portanto, a descida demorou 2,5 segundos, pelo que a velocidade média foi de $\frac{15}{2,5} = 6 \text{ ms}^{-1}$.

b) Seja $v(t)$ a velocidade, em metros por segundo, do ponto móvel, t segundos após o início da descida.

$v(t) = e'(t) = (2t^2 + t)' = 4t + 1$, pelo que se tem:

Velocidade inicial = $v(0) = 1 \text{ ms}^{-1}$ e velocidade final = $v(2,5) = 11 \text{ ms}^{-1}$

257. $(x^2 - x)' = 2x - 1$, pelo que f' é a função de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) = 2x - 1$.

258.

a) $f(x + h) - f(x) = 3(x + h) - (x + h)^2 - (3x - x^2) =$
 $= 3x + 3h - x^2 - 2xh - h^2 - 3x + x^2 = 3h - 2xh - h^2$

b)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 2xh - h^2}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 2x - h) = 3 - 2x$$

c) Tem-se:

$f(2) = 6 - 4 = 2$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(2, 2)$

$f'(2) = 3 - 4 = -1$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = -1(x - 2) + 2$.

Ora, $y = -1(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = -x + 2 + 2 \Leftrightarrow y = -x + 4$.

A equação reduzida da reta é $y = -x + 4$.

d) $x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$, pelo que o declive da reta é igual a 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$f(1) = 3 - 1 = 2$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(1, 2)$.

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1(x - 1) + 2$.

$$\text{Ora, } y = 1(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = x - 1 + 2 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

A equação reduzida da reta é $y = x + 1$.

Pág. 156

259. Tem-se $f'(2) = 3$.

Como $g(2) = 5$ e $h(2) = 3$, a função g é a que não pode ser a função derivada de f .

260. Opção (D)

Só esta opção é compatível com o facto de se ter $f'(0) = -1$.

261.

a) A função é contínua no ponto 1 porque é derivável nesse ponto.

b) A função não é contínua no ponto 1 pelo que não é derivável nesse ponto.

c) A função pode, ou não, ser derivável no ponto 1, pois o facto de ser contínua num ponto não garante nem impede que seja derivável nesse ponto.

$$\mathbf{262.} \quad h'(x) = (f(x) + 2)' = f'(x) + (2)' = f'(x) + 0 = f'(x) = g(x)$$

A derivada da função h é a função g .

263.

$$\mathbf{a)} \quad d(2) = 2,5 \times 4 + 4 \times 2 = 18$$

$$d'(t) = (2,5t^2 + 4t)' = 5t + 4, \text{ pelo que } d'(2) = 5 \times 2 + 4 = 14$$

$d(2) = 18$ significa que ao fim de 2 segundos, a bola tinha percorrido 18 metros.

$d'(2) = 14$ significa que ao fim de 2 segundos, a bola tinha atingido a velocidade de 14 metros por segundo.

$$\mathbf{b)} \quad d(t) = 210 \Leftrightarrow 2,5t^2 + 4t = 210 \Leftrightarrow 2,5t^2 + 4t - 210 = 0 \Leftrightarrow t = -10 \vee t = 8,4$$

Portanto, a bola demorou 8,4 segundos a chegar ao fim da rampa, pelo que a velocidade nesse instante era igual a $d'(8,4) = 5 \times 8,4 + 4 = 46 \text{ ms}^{-1}$.

264.

a) Opção (C)

A inclinação da reta r é igual a 120° pelo que o declive é igual a $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$.

b) Opção (B)

$f'(x) = 2\sqrt{3}x$, pelo que se tem:

$$f'(a) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a = -\sqrt{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

265.

a) $Q(0,25) = 50 \times 0,25^2 + 500 \times 0,25 = 128,125 \text{ kg}$

$Q(0,35) = 50 \times 0,35^2 + 500 \times 0,35 = 181,125 \text{ kg}$

Pág. 157

b) $t. m. v._{Q,(0,2),(0,3)} = \frac{Q(0,3)-Q(0,2)}{0,3-0,2} = \frac{154,5-102}{0,1} = \frac{52,5}{0,1} = 525 \text{ Kg/euro} = 5,25 \text{ kg/cêntimo}$

c) $Q'(x) = (50x^2 + 500x)' = 100x + 500$

$Q'(0,4) = 100 \times 0,4 + 500 = 540 \text{ Kg/euro} = 5,4 \text{ kg/cêntimo}$

$Q'(0,5) = 100 \times 0,5 + 500 = 550 \text{ Kg/euro} = 5,5 \text{ kg/cêntimo}$

266. Tem-se $g'(x) = (x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$.

Ora, $3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a afirmação é verdadeira.

267. Tem-se $f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 1)' = 3x^2 - 10x$, pelo que

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - 10 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{10}{3} = -3 \text{ e } f'(3) = 3 \times 9 - 10 \times 3 = 27 - 30 = -3$$

Como $f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(3)$, está provado o pretendido.

268. Tem-se $f'(x) = \left(\frac{x^3}{2} + 2x^2\right)' = \frac{3}{2}x^2 + 4x$, pelo que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{8}{3}$$

$$f(0) = 0 \text{ e } f\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{128}{27}$$

Então, as coordenadas dos pontos são $(0, 0)$ e $\left(-\frac{8}{3}, \frac{128}{27}\right)$.

269. Da primeira condição, conclui-se que $f(0) = 1$, pelo que $c = 1$.

Da primeira condição, conclui-se que $f'(-1) = 2$ e que $f(-1) = -4$.

Tem-se $f'(x) = (ax^3 + bx + c)' = 3ax^2 + b$, pelo que

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(-1) = 2 \\ f(-1) = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ -a - b + 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ -a - b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -3 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{13}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, tem-se $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{13}{2}$ e $c = 1$.

270. Opção (A)

Tem-se $f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$, pelo que $f'(-1) = -2$.

$f(-1) = -2$, pelo que a reta passa pelo ponto de coordenadas $(-1, -2)$.

Então, a reta r é definida pela equação $y = -2(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = -2x - 2 - 2 \Leftrightarrow y = -2x - 4$

Dos pontos apresentados, só o ponto apresentado na opção (A) pertence à reta r .

271. Tem-se $D_f = [0, +\infty[$.

$x - 3y = 2 \Leftrightarrow 3y = x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, pelo que o declive da reta é igual a $\frac{1}{3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \text{ pelo que o ponto de tangência é o ponto de coordenadas } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right).$$

272. Tem-se $f'(3) = m_r = -\frac{2}{3}$, pelo que $g'(3) = m_s = \frac{3}{2}$.

Tem-se, também, $f(3) = 1$ e $g(3) = 3$.

$$\text{Portanto, } (f \times g)'(3) = f'(3) \times g(3) + f(3) \times g'(3) = -\frac{2}{3} \times 3 + 1 \times \frac{3}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

273.

a) $f'(x) = (x^7)' = 7x^6$

b) $f'(x) = [(x^3 - 2x + 1)^7]' = (x^3 - 2x + 1)' \times 7(x^3 - 2x + 1)^6 = 7(3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^6$

c) $f'(x) = \left(\frac{2x^4 - (4x-1)^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(2x^4 - (4x-1)^3)' = \frac{1}{3}[(2x^4)' - ((4x-1)^3)'] =$
 $= \frac{1}{3}[8x^3 - (3 \times (4x-1)' \times (4x-1)^2)] = \frac{1}{3}[8x^3 - 12(4x-1)^2] = \frac{8x^3 - 12(4x-1)^2}{3}$

d) $f'(x) = [(2x+1)(1-x)^3]' = (2x+1)'(1-x)^3 + (2x+1)[(1-x)^3]' =$
 $= 2(1-x)^3 + (2x+1)[3 \times (-1)(1-x)^2] = 2(1-x)^3 - 3(2x+1)(1-x)^2 =$
 $= (1-x)^2[2(1-x) - 3(2x+1)] = (1-x)^2[2 - 2x - 6x - 3] = (1-x)^2(-8x-1)$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= [x\sqrt{6x}]' = (x)' \times \sqrt{6x} + x(\sqrt{6x})' = \sqrt{6x} + x\left(\frac{(6x)'}{2\sqrt{6x}}\right) = \sqrt{6x} + x\left(\frac{6}{2\sqrt{6x}}\right) = \\ &= \sqrt{6x} + \frac{3x}{\sqrt{6x}} = \sqrt{6x} + \frac{3x\sqrt{6x}}{6x} = \sqrt{6x} + \frac{\sqrt{6x}}{2} = \frac{3\sqrt{6x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{5x+5}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{5x+5}\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[(\sqrt{5x+5})' + (5\sqrt{x})'] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{5} + \left(5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2\sqrt{5x+5}}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{2\sqrt{5x+5}}{2\sqrt{\pi x}} \end{aligned}$$

274. Opção (B)

Tem-se $f'(1) = 3$ e, como o ponto de tangência é o ponto de coordenadas $(1, 2)$, $f(1) = 2$.

Portanto, como $g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$, tem-se $g'(1) = -\frac{f'(1)}{[f(1)]^2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{275. } h'(x) &= [(f(x))^3]' = 3 \times f'(x) \times [f(x)]^2, \text{ pelo que } h'(1) = 3 \times f'(1) \times [f(1)]^2 = \\ &= 3 \times 3 \times [-2]^2 = 36 \\ j'(x) &= [(f(x))^4]' = 4 \times f'(x) \times [f(x)]^3, \text{ pelo que } j'(1) = 4 \times f'(1) \times [f(1)]^3 = \\ &= 4 \times 3 \times [-2]^3 = -96 \end{aligned}$$

Pág. 158

$$\text{276. Tem-se } f(2) = 3 \text{ e } f'(2) = \frac{3-\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

$$\begin{aligned} [(f(x))^4]' &= 4 \times f'(x) \times [f(x)]^3, \text{ pelo que } (f^4)'(2) = 4 \times f'(2) \times [f(2)]^3 = \\ &= 4 \times \frac{5}{4} \times 3^3 = 135 \end{aligned}$$

$$\text{277. } f - g = k \Rightarrow (f - g)' = (k)' \Rightarrow f' - g' = 0 \Rightarrow f' = g'$$

278. Opção (C)

$$\text{Tem-se } h'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + g'(x)$$

Como a função g é uma função afim decrescente, $g'(x)$ é uma constante negativa.

Então, tem-se:

$$h'(x) = ax^2 + c \Leftrightarrow 3x^2 + g'(x) = ax^2 + c, \text{ pelo que } a = 3 > 0 \text{ e } c = g'(x) < 0.$$

279. Tem-se $g'(x) = \left(\frac{3-2x}{x}\right)' = \left(\frac{3}{x} - 2\right)' = \left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$ e $f'(a) = m_r = \frac{1}{a}$.

Portanto:

$$(f - g)'(a) = 2 \Leftrightarrow f'(a) - g'(a) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{3}{a^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{a+3-2a^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a+3-2a^2 = 0 \wedge a^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left(a = -1 \vee a = \frac{3}{2}\right) \wedge a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = \frac{3}{2}$$

Como $a > 0$, o valor de a é $\frac{3}{2}$.

280. Como a assíntota vertical é a reta de equação $x = 2$, tem-se $c = -2$.

Como a assíntota horizontal é a reta de equação $y = 3$, tem-se $a = 3$.

Então,

$$f'(x) = \left(\frac{3x+b}{x-2}\right)' = \frac{(3x+b)'(x-2) - (3x+b)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2) - (3x+b)}{(x-2)^2} = \frac{3x-6-3x-b}{(x-2)^2} = \frac{-6-b}{(x-2)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-6-b}{(-1-2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-6-b}{9} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -9$$

Portanto, $f(x) = \frac{3x-9}{x-2}$.

281. $(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'[f(1)]$

Tem-se:

- $g(1) = 2$ e $g'(1) = 0$, pelo que, como $f'(1) = -\frac{g'(1)}{[g(1)]^2}$, $f'(1) = -\frac{0}{4} = 0$

- $g'[f(1)] = g'\left[\frac{1}{f(1)}\right] = g'\left(\frac{1}{2}\right)$; como g é derivável, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ é um valor real e, portanto,

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'[f(1)] = 0 \times g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

282. Tem-se:

- $f'(-2) = -3$

- O ponto de tangência é o ponto de coordenadas $(-2, 5)$, pelo que $f(-2) = 5$.

- $f(0) = 0$

Seja, para certos valores de a , b e c , $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = 5 \\ f'(-2) = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = 5 \\ f'(-2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 5 \\ 2a \times (-2) + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 5 \\ -4a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 5 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -2 \\ 4a + 4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$.

283. Tem-se $f'(x) = 3ax^2 + 6$, $f(-1) = 3$ e $f'(-1) = 0$.

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 6 + b = 3 \\ 3a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 9 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b = 9 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = -2 \end{cases}$$

284. $g(-1) = -2 + 1 = -1$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-1, -1)$.

$g(2) = 16 - 2 = 14$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(2, 14)$.

Então, $m_{AB} = \frac{14 - (-1)}{2 - (-1)} = 5$.

Seja a a abcissa do ponto C .

$$g'(a) = 5 \Leftrightarrow 6a^2 - 1 = 5 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1; \text{ como } a \in]-1, 2[, a = 1$$

$g(1) = 2 - 1 = 1$, pelo que C é o ponto de coordenadas $(1, 1)$.

285. Tem-se $p(6) = 36 - 19 \times 6 + 60 = -18$ e $p(10) = 100 - 19 \times 10 + 60 = -30$, pelo que

$$\text{velocidade média}_{[6,10]} = \frac{p(10) - p(6)}{10 - 6} = \frac{-30 + 18}{4} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Ora, velocidade no instante $t_0 = p'(t_0) = 2t_0 - 19$, pelo que, $2t_0 - 19 = -3 \Leftrightarrow t_0 = 8$.

286.

a) f é crescente em $[0, 3]$ e f é decrescente em $] - \infty, 0]$ e em $[3, +\infty[$.

b) f é crescente em $] - \infty, 2]$ e f é decrescente em $[2, +\infty[$.

c) f é crescente em $\mathbb{R}$.

287. Opção (C)

Tem-se o seguinte quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	n.d.	$-$
f	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$		$\searrow$

A única opção compatível com este quadro é a opção (C).

288.

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	Máx. rel.	↘	Mín. rel.	↗

f é crescente em $] -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}]$ e em $[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$ e f é decrescente em $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$.

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ é máximo relativo e $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ é mínimo relativo.

O contradomínio de f é $\mathbb{R}$ pelo que f não tem extremos absolutos.

b) $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = (2x - x^2)x = 2x^2 - x^3$$

$$g'(x) = (2x^2 - x^3)' = 4x - 3x^2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$$

Quadro de variação e de extremos de g

x	$-\infty$	0		$4/3$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$

g é decrescente em $] -\infty, 0]$ e em $[\frac{4}{3}, +\infty[$ e g é crescente em $[0, \frac{4}{3}]$.

$g(0) = 0$ é mínimo relativo e $g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}$ é máximo relativo.

O contradomínio de g é $\mathbb{R}$ pelo que g não tem extremos absolutos.

c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g(x) = \frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

$$h'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Quadro de variação e de extremos de h

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	0	−	−	−	0	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$h'(x)$	+	0	−	n.d.	−	0	+
h	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

h é crescente em $] -\infty, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e h é decrescente em $[-\sqrt{2}, 0[$ e em $]0, \sqrt{2}]$.

$h(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ é máximo relativo e $h(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ é mínimo relativo.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2/x) = -\infty + 0 = -\infty$, pelo que h não tem mínimo absoluto.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2/x) = +\infty + 0 = +\infty$, pelo que h não tem máximo absoluto.

289. Tem-se, de acordo com a figura, o seguinte quadro de variação do sinal de $f(x) \times f'(x)$:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x) \times f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f(x) \times f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[$$

Pág. 160

290.

a) Tem-se $h(0) = 0$ e $h(8) = \frac{512}{15} - \frac{256}{5} + 24 = \frac{104}{15}$, pelo que

$$\text{altura média}_{[0,8]} = \frac{h(8) - h(0)}{8 - 0} = \frac{\frac{104}{15}}{8} = \frac{13}{15} \approx 0,87 \text{ m}.$$

b) $D_h = [0, 8]$

$$\text{Tem-se } h'(t) = \left(\frac{t^3}{15} - \frac{4t^2}{5} + 3t \right)' = \frac{t^2}{5} - \frac{8t}{5} + 3.$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{5} - \frac{8t}{5} + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 5$$

Quadro de variação e de extremos de h

t	0		3		5		8
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	0	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$	$\frac{104}{15}$

$t = 3$ corresponde às 10 horas do dia e $t = 5$ corresponde às 12 horas do dia, pelo que a altura está a diminuir entre as 10 horas e as 12 horas.

c) Às 10 horas, a altura da água é igual a $h(3)$, ou seja, $\frac{27}{15} - \frac{36}{5} + 9 = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ m}$.

Nesse instante o volume de água no depósito cilíndrico é, então, igual a $\pi \times 1^2 \times 3,6 \approx 11,3097 \text{ m}^3$.
 $11,3097 \text{ m}^3 = 11309,7 \text{ dm}^3$, pelo que, àquela hora, havia cerca de 11310 litros de água no depósito.

291. Seja x , $0 < x < 8$, o lado do quadrado a retirar em cada canto da folha.

As dimensões da base da caixa são então dadas, em função de x , por $30 - 2x$ e $16 - 2x$.

A altura da caixa é x .

Então, o volume, V , da caixa, é dado, em função de x , por

$$V(x) = (30 - 2x)(16 - 2x)x = (30 - 2x)(16x - 2x^2) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$$

$$V'(x) = (4x^3 - 92x^2 + 480x)' = 12x^2 - 184x + 480$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 184x + 480 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \vee x = 12$$

Quadro de variação e de extremos de V

x	0		10/3		8
$h'(x)$		+	0	-	
h	n.d.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.

Obtém-se a caixa com maior capacidade possível para $x = \frac{10}{3} \approx 3,3$ cm .

292.

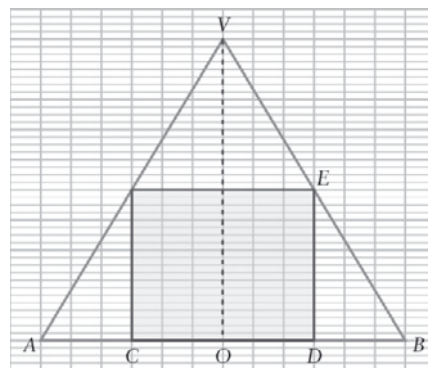
a) Na figura ao lado está representada a secção produzida na peça pelo plano que contém o vértice, V , do cone e o diâmetro $[AB]$ da base do cone.

O é o centro da base do cone, $[CD]$ é um diâmetro da base do cilindro e $\overline{ED}$ é a altura do cilindro.

Tem-se:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{\overline{ED}}{10} \Leftrightarrow \overline{ED} = 5$$

$$\text{Volume do cilindro} = \pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi \text{ cm}^3$$



b) Seja $x = \overline{OD}$, $0 < x < 6$, o raio da base do cilindro.

Tem-se:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{\overline{ED}}{10} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{60-10x}{6} \Leftrightarrow \overline{ED} = 10 - \frac{5}{3}x$$

Então, o volume, V , do cilindro, é dado, em função de x , por

$$V(x) = \pi \times x^2 \times \left(10 - \frac{5}{3}x\right) = 10\pi x^2 - \frac{5\pi}{3}x^3$$

$$V'(x) = \left(10\pi x^2 - \frac{5\pi}{3}x^3\right)' = 20\pi x - 5\pi x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 20\pi x - 5\pi x^2 = 0 \Leftrightarrow x(20\pi - 5\pi x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Quadro de variação e de extremos de V

x	0		4		6
$V'(x)$		+	0	-	
V	n.d.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.

Obtém-se o cilindro de maior volume para $x = 4$ cm, ou seja, quando o diâmetro é 8 cm

$$\text{O volume desse cilindro é igual a } V(4) = 10\pi \times 16 - \frac{5\pi}{3} \times 64 = \frac{160}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

293.

a) Seja h a altura do prisma e seja V o volume do prisma. Tem-se:

$$V = 3 \Leftrightarrow x^2 \times h = 3 \Leftrightarrow h = \frac{3}{x^2}, \quad x > 0$$

$$A(x) = 2 \times x^2 + 4 \times xh = 2x^2 + 4x \times \frac{3}{x^2} = 2x^2 + \frac{12}{x} = \frac{2x^3 + 12}{x}$$

$$b) A'(x) = \left(2x^2 + \frac{12}{x}\right)' = 4x - \frac{12}{x^2} = \frac{4x^3 - 12}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0		$\sqrt[3]{3}$	$+\infty$
$4x^3 - 12$		—	0	+
x^2		+	+	+
$A'(x)$		—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Min. rel.	$\nearrow$

A área da superfície é mínima para $x = \sqrt[3]{3} \approx 1,44$ dm

294. Seja h a altura da caixa. Tem-se:

$$2x + 2x + x + x + 4h = 31,5 \Leftrightarrow 6x + 4h = 31,5 \Leftrightarrow h = \frac{63-12x}{8}$$

Então, o volume, V , da caixa, é dado, em função de x , $0 < x < \frac{21}{4}$, por

$$V(x) = x \times 2x \times h = 2x^2 \times \frac{63-12x}{8} = \frac{2x^2(63-12x)}{8} = \frac{x^2(63-12x)}{4}.$$

$$V'(x) = \left[\frac{x^2(63-12x)}{4}\right]' = \left(\frac{63}{4}x^2 - 3x^3\right)' = \frac{63}{2}x - 9x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{63}{2}x - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{63}{2} - 9x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{7}{2}$$

Quadro de variação e de extremos de V

x	0		$7/2$		$21/4$
$V'(x)$		+	0	—	
V	n.d.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.

Obtém-se a caixa de maior volume para $x = \frac{7}{2} = 3,5$ cm.

Tem-se, neste caso, $2x = 2 \times 3,5 = 7$ cm e $h = \frac{63-12 \times 3,5}{8} = 2,625$ cm.

As dimensões desta caixa são: 3,5 cm de largura, 7 cm de comprimento e 2,625 cm de altura.

+ Exercícios Propostos

Pág. 161

295. Opção (D)

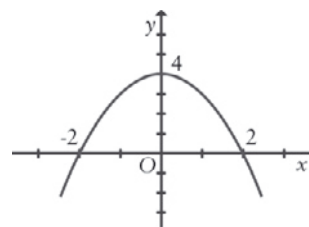
- A sucessão de termo geral $-\frac{1}{n}$ tende para zero, pelo que $\lim \left(g \left(-\frac{1}{n} \right) \right) = g(0)$.
- A sucessão de termo geral $1 - n$ tende para $-\infty$, pelo que $\lim (g(1 - n)) = 0$.
- A sucessão de termo geral $1 - \frac{1}{n}$ tende para 1, tomando sempre valores inferiores a 1, pelo que $\lim \left(g \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = +\infty$.
- A sucessão de termo geral $1 + \frac{1}{n}$ tende para 1, tomando sempre valores superiores a 1, pelo que $\lim \left(g \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = -\infty$.

296. Opção (D)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função real de variável real, f , definida por $f(x) = 4 - x^2$.

Tal como se pode observar, para $-2 < x < 2$, tem-se $4 - x^2 > 0$.



297. Opção (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \end{aligned}$$

298. Opção (D)

Para que g seja contínua, temos que garantir que g seja contínua em 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} x = 4 \end{aligned}$$

Então, para que g seja contínua em 4, temos que ter $\sqrt{k} = 4$, ou seja, $k = 16$.

299. Opção (D)

300.

a) Opção (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

Pág. 162

b) Opção (B)

A reta r é definida pela equação $y = -\frac{1}{2}x + 2$, pelo que se tem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) \right] = 0$$

o que é equivalente a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 2 \right] = 0$$

301. Opção (B)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{f(x) - f(-1)} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)}{f(x) - f(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{\frac{f(x) - f(-1)}{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}} = \frac{-1 \times (-2)}{f'(-1)} = \frac{2}{f'(-1)} \end{aligned}$$

Tem-se $\frac{2}{f'(-1)} = 3 \Leftrightarrow f'(-1) = \frac{2}{3}$.

302. Opção (C)

O ponto de tangência é o ponto de coordenadas $(1, 2)$; ora, de entre todas as opções, só a reta definida pela equação da opção (C) passa nesse ponto. Isto é suficiente para excluir as opções (A), (B) e (D).

303. Opção (C)

$$f'(-2) = m_r = \frac{2-0}{-2-(-4)} = 1$$

304. Opção (C)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$\text{Ora, } f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ pelo que } f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

305. Opção (A)

Tem-se:

- $f'(1) = 1$ e $f(1) = 3$
- $g'(x) = [f(x) + 2x]' = f'(x) + (2x)' = f'(x) + 2$

Então,

$g(1) = f(1) + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$ e, portanto o ponto de tangência é o ponto de coordenadas $(1, 5)$, o que exclui as opções (B) e (C) e $g'(1) = f'(1) + 2 = 1 + 2 = 3$, o que exclui a opção (D).

306. Opção (D)

Tem-se:

- $f(0) = 2$ e $f'(0) = m_r = -1$
- $g(0) = -1$ e $g'(0) = m_s = 0$

Então,

$$(f \times g)'(0) = f'(0) \times g(0) + f(0) \times g'(0) = -1 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$$

Pág. 163**307. Opção (D)**Tem-se o seguinte quadro de variação e de extremos de f :

x	0		6
$f'(x)$	0	+	0
f	Min. abs.	↗	Máx. abs.

f é crescente em $[0, 6]$, e, portanto, só a afirmação da opção (D) é verdadeira.

$$\mathbf{308. a_1)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\mathbf{a_2)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\mathbf{a_3)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\mathbf{a_4)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

b₁)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x) + 3x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x) = -\infty + 3 = -\infty$$

b₂)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 2 \times (+\infty) = +\infty$$

b₃)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]^3 = 2^3 = 8$$

b₄)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \sqrt{2}$$

b₅)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

b₆)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{1}{2}$$

b₇)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

b₈)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{1-x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

b₉)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x)} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

b₁₀)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

b₁₁)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

b₁₂)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

309.

a) Por exemplo:

$$f(x) = \frac{5}{x-3} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+4}$$

b) Por exemplo:

$$f(x) = \frac{2x-3}{5-x} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{4x^3-4x+1}{3-2x^3}$$

c) Por exemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

310.

a) A reta de equação $y = x + 5$ é assíntota ao gráfico de f_a se e só se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - (x + 5)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f_a(x) - (x + 5)] = 0$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - (x + 5)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x - 6}{x - a} - (x + 5) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 6 - x^2 - 5x + ax + 5a}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - 6)x + 5a - 6}{x - a} \end{aligned}$$

Ora, este limite é igual a 0 se e só se $a = 6$.

No caso « $-\infty$ », o resultado é análogo.

b) Tem-se $f_a(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - a} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-a}$

Portanto,

$$f_{-2}(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} = x - 3 \wedge x \neq -2, \text{ pelo que, para } a = -2, \text{ o gráfico de } f_a \text{ não tem assíntotas verticais e}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x + 2 \wedge x \neq 3, \text{ pelo que, para } a = 3, \text{ o gráfico de } f_a \text{ não tem assíntotas verticais.}$$

Pág. 164

311.

Dado que a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) - 1}{x} =$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 3 \times 2 - 0 = 6$$

Portanto, a reta de equação $y = 6$ é assíntota horizontal ao gráfico de g .

312.

Dado que a reta de equação $y = 2x + 3$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Portanto, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de h .

313.

a) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) $(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$; ora, os gráficos das funções f e g têm três pontos comuns, pelo que a função $f - g$ tem três zeros.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow x \in \emptyset$; portanto, a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

314.

a) Os 30 gramas de substância inicial continham 9 gramas de ácido pelo que, no final, havia $30 + x$ gramas de composto, dos quais $9 + x$ eram de ácido. Então, a concentração, C , de ácido no composto obtido é dada, em função de x , por $C(x) = \frac{9+x}{30+x}$, com $x \geq 0$.

b) Tem-se:

- $D_C = [0, +\infty[$

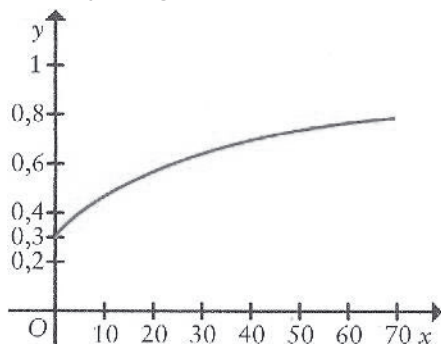
- $C(x) = \frac{9+x}{30+x} = 1 - \frac{21}{30+x}$

- $C(0) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$

- A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de C , pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9+x}{30+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{21}{30+x}\right) = 1$$

- Esboço do gráfico de C



$$D'_C = [0,3; 1[$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{9+x}{30+x} = \frac{75}{100} &\Leftrightarrow \frac{9+x}{30+x} - \frac{75}{100} = 0 \Leftrightarrow \frac{900+100x-2250-75x}{30+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{25x-1350}{30+x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 25x - 1350 = 0 \wedge 30+x \neq 0 \Leftrightarrow 25x - 1350 = 0 \wedge 30+x \neq 0 \Leftrightarrow x = 54 \wedge x \neq -30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 54 \text{ (gramas)} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{9+x}{30+x}\right)' = \frac{(9+x)'(30+x) - (9+x)(30+x)'}{(30+x)^2} = \frac{30+x-(9+x)}{(30+x)^2} = \frac{21}{(30+x)^2}$$

315.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= \left(\frac{x^2+x}{3x+2}\right)' = \frac{(x^2+x)'(3x+2) - (x^2+x)(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{(2x+1)(3x+2) - (x^2+x) \times 3}{(3x+2)^2} = \\ &= \frac{6x^2+7x+2-3x^2-3x}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x+2}{(3x+2)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f'(x) &= \left[\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2\right]' = 2 \times \left(\frac{2x+1}{x}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x}\right) = \frac{2(2x+1)}{x} \times \left(2 + \frac{1}{x}\right)' = \frac{2(2x+1)}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= -\frac{4x+2}{x^3}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\right)' = \frac{(\sqrt{x+1})'(x+1) - (\sqrt{x+1})(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1) - \sqrt{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}}{(x+1)^2} = -\frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2}, \quad D_{f'} =]-1, +\infty[\end{aligned}$$

316. Para $x < 1$, $f'(x) = 0$; para $x > 1$, $f'(x)$ é o declive da reta que passa nos pontos de coordenadas $(1,2)$ e $(4,0)$, ou seja, $\frac{0-2}{4-1} = -\frac{2}{3}$; $f'(1)$ não existe. Então, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ -\frac{2}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Pág. 165

317.

Dado que a função g é diferenciável em a ,
então é contínua em a e, portanto,
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

318. Seja a a abscissa do ponto de tangência.

Como $8x + 8y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x - \frac{1}{8}$, pelo que $f'(a) = -1$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)' = x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, tem-se } f'(a) = -1 \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

A ordenada do ponto de tangência é igual a $f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$.

O ponto de tangência é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

319. O declive da bissetriz do 1.º quadrante é igual a 1.

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow (x^3 + x^2 - 4x + 1)' = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 1$$

• Reta tangente no ponto de abcissa $-\frac{5}{3}$

$$g\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = \frac{157}{27}, \text{ pelo que a reta passa no ponto de coordenadas } \left(-\frac{5}{3}, \frac{157}{27}\right)$$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1\left(x + \frac{5}{3}\right) + \frac{157}{27}$.

$$\text{Ora, } y = 1\left(x + \frac{5}{3}\right) + \frac{157}{27} \Leftrightarrow y = x + \frac{202}{27}.$$

A equação reduzida da reta é $y = x + \frac{202}{27}$.

• Reta tangente no ponto de abcissa 1

$$g(1) = 1^3 + 1^2 - 4 \times 1 + 1 = -1, \text{ pelo que a reta passa no ponto de coordenadas } (1, -1)$$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1(x - 1) - 1$.

$$\text{Ora, } y = 1(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

A equação reduzida da reta é $y = x - 2$.

320. O declive de uma reta cuja inclinação é 120° é igual a $\text{tg } 120^\circ = -\sqrt{3}$.

$$h'(x) = \left(\frac{2x^3 + 6x^2 + 1}{6}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{6}\right)' = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times \sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Como a equação $h'(x) = -\sqrt{3}$ é impossível, está provado o pretendido.

321. Dado que o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence ao gráfico de f , tem-se $f(-1) = 2$.

Como f é diferenciável e atinge um extremo para $x = -1$, tem-se $f'(-1) = 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{bx^2 + a}{x}\right)' = \left(bx + \frac{a}{x}\right)' = b - \frac{a}{x^2}$$

Então, tem-se:

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+a}{-1} = 2 \\ b-a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+a = -2 \\ b-a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -2 \\ b-a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$322. f'(x) = \left(x + \frac{1}{x+a}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+a)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+a)^2} \Leftrightarrow (x+a)^2 = 1 \wedge x \neq a \Leftrightarrow (x+a = -1 \vee x+a = 1) \wedge x \neq a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -a-1 \vee x = -a+1) \wedge x \neq a \Leftrightarrow x = -a-1 \vee x = -a+1$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	$-a-1$		$-a$		$-a+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-(*)	n.d.	-(**)	0	+
f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

$$(*) \text{ Tem-se, por exemplo, } f'(-a-0,1) = 1 - \frac{1}{(-a-0,1+a)^2} = 1 - \frac{1}{(-0,1)^2} = 1 - \frac{1}{0,01} = 1 - 100 < 0.$$

$$(**) \text{ Tem-se, por exemplo, } f'(-a+0,1) = 1 - \frac{1}{0,01} = 1 - 100 < 0.$$

$$\text{Tem-se } -a+1 = 2 \times (-a-1) \Leftrightarrow -a+1 = -2a-2 \Leftrightarrow a = -3.$$

323.

$$a) D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 24x + 1)' = 3x^2 - 6x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, -2]$ e em $[4, +\infty[$ e f é decrescente em $[-2, 4]$.

$f(-2) = 29$ é mínimo relativo e $f(4) = -79$ é máximo relativo.

O contradomínio de f é $\mathbb{R}$, pelo que f não tem extremos absolutos.

$$b) D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)' = \frac{(2x-3)'(x-1) - (2x-3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	n.d.	+
f	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

O contradomínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pelo que f não tem extremos absolutos.

$$c) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x+2) - (x^2+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \wedge x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 - \sqrt{5} \vee x = -2 + \sqrt{5}) \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{5} \vee x = -2 + \sqrt{5}$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{5}$		-2		$-2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 + 4x - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, -2 - \sqrt{5}]$ e em $[-2 + \sqrt{5}, +\infty[$ e f é decrescente em $[-2 - \sqrt{5}, -2[$ e em $] -2, -2 + \sqrt{5}]$.

$f(-2 - \sqrt{5}) = -2\sqrt{5} - 4$ é máximo relativo e $f(-2 + \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4$ é mínimo relativo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 2 + \frac{5}{x+2} \right) = -\infty - 2 + 0 = -\infty,$$

pelo que f não tem mínimo absoluto.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{5}{x+2} \right) = +\infty - 2 + 0 = +\infty,$$

pelo que f não tem máximo absoluto.

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \left[\left(\frac{2x}{x+2} \right)^3 \right]' = 3 \times \left(\frac{2x}{x+2} \right)' \times \left(\frac{2x}{x+2} \right)^2 = 3 \times \frac{(2x)'(x+2) - 2x(x+2)'}{(x+2)^2} \times \left(\frac{2x}{x+2} \right)^2 =$$

$$= 3 \times \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} \times \left(\frac{2x}{x+2} \right)^2 = 3 \times \frac{4}{(x+2)^2} \times \frac{4x^2}{(x+2)^2} = \frac{48x^2}{(x+2)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{48x^2}{(x+2)^4} = 0 \Leftrightarrow 48x^2 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = 0$$

Quadro de variação e de extremos de f

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	n.d.	+	0	+
f	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$		$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, -2[$ e em $] -2, +\infty[$.

f não tem extremos relativos.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2x}{x+2} \right)^3 = \left(\frac{-4}{0^-} \right)^3 = +\infty,$$

pelo que f não tem máximo absoluto.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{2x}{x+2} \right)^3 = \left(\frac{-4}{0^+} \right)^3 = -\infty,$$

pelo que f não tem mínimo absoluto.

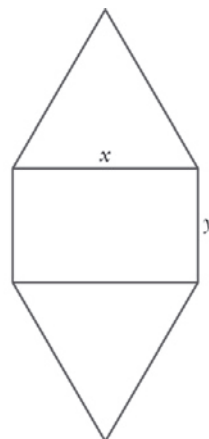
324.

a) Na figura ao lado está ilustrada a situação descrita. x ($x > 0$) representa o comprimento dos lados dos triângulos e y representa a outra dimensão do retângulo.

Tem-se $x \times y = 72$, pelo que $y = \frac{72}{x}$.

Para cada valor de x , seja $P(x)$ o perímetro do hexágono.

Tem-se $P(x) = 4x + 2y = 4x + 2 \times \frac{72}{x} = 4x + \frac{144}{x}$.



b) $P'(x) = \left(4x + \frac{144}{x}\right)' = 4 - \frac{144}{x^2} = \frac{4x^2 - 144}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 144}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 144 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 6$

Quadro de variação e de extremos de P

x	0		6	$+\infty$
$4x^2 - 144$		-	0	+
x^2		+	+	+
$P'(x)$		-	0	+
P	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O perímetro do hexágono é mínimo para $x = 6$.

$x = 6 \Rightarrow y = 12$; as dimensões do retângulo são 6 e 12.

325. Sejam x e y dois números reais tais que $a = x + y$ e, para cada valor de x , seja $S(x)$ a soma dos cubos de x e y .

$S(x) = x^3 + y^3 = x^3 + (a - x)^3 = x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = 3ax^2 - 3a^2x + a^3$

$S'(x) = (3ax^2 - 3a^2x + a^3)' = 6ax - 3a^2$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3a^2}{6a} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Quadro de variação e de extremos de S

x	$-\infty$	$a/2$	$+\infty$
$S'(x)$		0	+
S		$\searrow$	Mín. abs. $\nearrow$

A soma é mínima quando os números são iguais, ou seja, quando são ambos $\frac{a}{2}$.

326. Sejam x e y as duas dimensões do retângulo e, para cada valor de x ($0 < x < 10$), seja $A(x)$ a área do retângulo.

Tem-se: $x^2 + y^2 = 10^2$, pelo que $y = \sqrt{100 - x^2}$.

Então, como se tem $0 < x < 10$, vem:

$$A(x) = x \times y = x \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = (\sqrt{100x^2 - x^4})' = \frac{(100x^2 - x^4)'}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} =$$

$$= \frac{-4x^3 + 200x}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{-4x(x^2 - 50)}{2x\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x^2 + 50}{\sqrt{100 - x^2}}$$

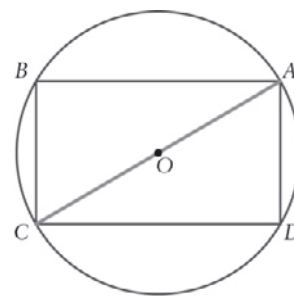
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 50}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 50 = 0 \wedge 100 - x^2 \neq 0 \wedge 0 < x < 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 50 \wedge 0 < x < 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	0		$\sqrt{50}$		10
$-x^2 + 50$		+	0	-	
$\sqrt{100 - x^2}$		+	+	+	
$A'(x)$		+	0	-	
A	n.d.	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	n.d.

Obtém-se o retângulo com maior área para $x = \sqrt{50}$; o retângulo, neste caso, é um quadrado.



Pág. 166

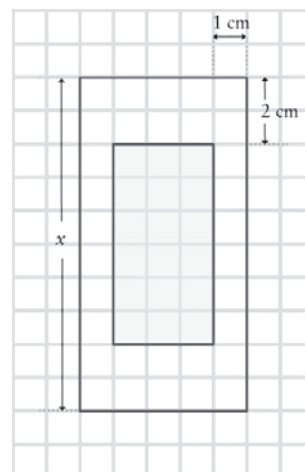
327. a) A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita.

Sejam m , n , respetivamente, a altura e a largura do retângulo relativo à mancha do texto e seja y a largura da página. Tem-se:

- $m \times n = 18$, pelo que $n = \frac{18}{m}$.
- $x = m + 4$, pelo que $m = x - 4$.
- $y = n + 2 = \frac{18}{m} + 2 = \frac{18}{x-4} + 2 = \frac{2x+10}{x-4}$

Então, para cada valor de x , com $x > 4$, a área, a , da

folha, é dada por $a(x) = x \times y = x \times \frac{2x+10}{x-4} = \frac{2x^2+10x}{x-4}$.



$$\text{b) } a'(x) = \left(\frac{2x^2+10x}{x-4} \right)' = \frac{(2x^2+10x)'(x-4) - (2x^2+10x)(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{(4x+10)(x-4) - (2x^2+10x)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 16x + 10x - 40 - 2x^2 - 10x}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 16x - 40}{(x-4)^2}$$

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 16x - 40}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 16x - 40 = 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 10) \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x = 10$$

Quadro de variação e de extremos de a

x	4		10	$+\infty$
$2x^2 - 16x - 40$		—	0	+
$(x - 4)^2$		+	+	+
$a'(x)$	n.d.	—	0	+
a	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O gasto de papel é mínimo quando a altura da folha é 10 cm; neste caso, a largura da folha é igual

$$\frac{2 \times 10 + 10}{10 - 4} = \frac{30}{6} = 5 \text{ cm}.$$

328.

a) Seja h a altura do cilindro. Tem-se:

$$\bullet \pi r^2 \times h = 1 \text{ pelo que } h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Então, a área total, A , do recipiente, pode ser dada, em função de r , $r > 0$, por

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \times h = \pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2}{r}$$

$$\text{b) } A'(r) = \left(\pi r^2 + \frac{2}{r} \right)' = 2\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - 2 = 0 \wedge r \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{\pi} \wedge r \neq 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

Quadro de variação e de extremos de A

r	0		$\sqrt[3]{1/\pi}$	$+\infty$
$2\pi r^3 - 2$		—	0	+
r^2		+	+	+
$A'(r)$	n.d.	—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O material gasto é mínimo quando o raio da base é $\sqrt[3]{1/\pi}$ dm; neste caso, a altura do cilindro é,

$$\text{igual a } \frac{1}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \right)^2} = \frac{1}{\pi \sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \text{ dm, ou seja, o raio da base e a altura medem ambos}$$

aproximadamente 6,8 cm.

329. Seja $x = \overline{BD}$. Tem-se $\overline{AD}^2 = x^2 + 9$, pelo que $\overline{AD} = \sqrt{x^2 + 9}$.

Então, o tempo gasto a percorrer $[AD]$ é igual a $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ e o tempo gasto a percorrer $[DC]$ é igual a

$\frac{9-x}{10}$, pelo que o tempo total, t , gasto para chegar a C , é dado, em função de x , por

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{9-x}{10}.$$

$$t'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{9-x}{10} \right)' = \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{6} \right)' + \left(\frac{9-x}{10} \right)' = \frac{1}{6} \times \frac{(x^2+9)'}{2\sqrt{x^2+9}} + \frac{1}{10} \times (9-x)' = \frac{2x}{12\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{10} = \frac{5x - 3\sqrt{x^2+9}}{30\sqrt{x^2+9}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 9}}{30\sqrt{x^2 + 9}} = 0 \Leftrightarrow 5x - 3\sqrt{x^2 + 9} = 0 \wedge \underbrace{30\sqrt{x^2 + 9} \neq 0}_{\text{cond. univ.}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 9}$$

Dado que, nas condições do problema, se tem $x \geq 0$, vem:

$$5x = 3\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 81 \Leftrightarrow 16x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Quadro de variação e de extremos de t

x	0		9/4	$+\infty$
$5x - 3\sqrt{x^2 + 9}$		-	0	+
$30\sqrt{x^2 + 9}$		+	+	+
$t'(x)$		-	0	+
t	$\frac{1}{2} + \frac{9}{10}$	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O tempo gasto é mínimo no caso em que $\overline{BD} = \frac{9}{4} = 2,25$ km.

330.

a)

$$f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-4x+4}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x-1} \leq 0$$

Tem-se o seguinte quadro de variação de sinal

x	$-\infty$	1		3/2	$+\infty$
$-2x + 3$	+	+	+	0	-
$x - 1$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-

$$\text{Então, } f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2x-1}{x-1} =$$

$$\left| \begin{array}{r|l} 2x-1 & x-1 \\ -2x+2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \right.$$

$= 2 + \frac{1}{x-1}$; portanto, as assíntotas são as retas de equações $x = 1$ e $y = 2$.

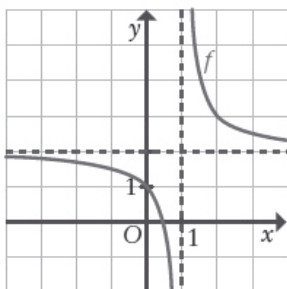
c) Ponto de interseção com o eixo das ordenadas:

$$f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 1} = 1, \text{ pelo que o ponto tem coordenadas } (0, 1).$$

Ponto de interseção com o eixo das abcissas:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \text{ pelo que o ponto tem coordenadas } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

d)



e)

O gráfico de $g \circ f$ obtém-se aplicando ao gráfico de f a translação definida pelo vetor de coordenadas $(0, 2)$, ou seja, deslocando o gráfico de f duas unidades para cima; o gráfico de $f \circ g$ obtém-se aplicando ao gráfico de f a translação definida pelo vetor de coordenadas $(-2, 0)$, ou seja, deslocando o gráfico de f duas unidades para a esquerda.

$$f) D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x + 2 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 2) = \frac{2(x+2)-1}{(x+2)-1} = \frac{2x+3}{x+1}$$

$$g) (f - r)(x) = f(x) - r(x) = \frac{2x-1}{x-1} - \frac{5}{2x^2+x-3} = \quad \mid 2x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$$

$$= \frac{2x-1}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{2(2x-1)(x+\frac{3}{2})-5}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{4x^2+4x-3-5}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{4x^2+4x-8}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{4(x+2)(x-1)}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{4x+8}{2x+3}$$

Pág. 167

$$h_1) f'(x) = \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)' = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}, \text{ pelo que } f'(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1$$

$$h_2) m = f'(2) = -1$$

$$f(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 - 1} = 3, \text{ pelo que a reta } s \text{ passa no ponto de coordenadas } (2, 3).$$

Portanto, a reta s é definida pela equação $y = -1(x - 2) + 3$.

$$\text{Ora, } y = -1(x - 2) + 3 \Leftrightarrow y = -x + 2 + 3 \Leftrightarrow y = -x + 5.$$

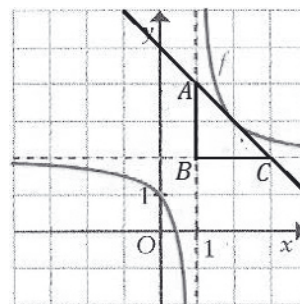
A equação reduzida da reta s é $y = -x + 5$.

h₃) Na figura ao lado esta representado o triângulo descrito no enunciado e cujos vértices são os pontos A , B e C .

- A é o ponto de coordenadas $(1, 4)$.
- B é o ponto de coordenadas $(1, 2)$.
- C é o ponto de coordenadas $(3, 2)$.

$$\text{Tem-se: área do triângulo} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ unidades de área}$$

i) II é a afirmação falsa pois h não é diferenciável em $\frac{1}{2}$.



331.

a) Tem-se $f(0) = 3$ e $f(15) = 0$.

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{a}{-20} = 3 \\ b + \frac{a}{15-20} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20b + a = -60 \\ -5b + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20b + a = -60 \\ 5b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15b = -60 \\ 5b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ 5b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 20 \end{cases}$$

$$\mathbf{b_1)} \text{ t.m.v.}_{f,12,15} = \frac{f(15)-f(12)}{15-12} = \frac{0-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ m/h}$$

$$\text{t.m.v.}_{g,12,15} = \frac{g(15)-g(12)}{15-12} = \frac{0-\frac{3}{17}}{3} = -\frac{1}{17} \approx -0,06 \text{ m/h}$$

Tal significa que entre as 12 h e as 15 h, contadas a partir do instante em que os dois reservatórios começaram a ser esvaziados, a altura da água desceu à taxa média de 50 cm por hora num reservatório e à taxa média de 6 cm por hora (aproximadamente) no outro reservatório.

b₂)

A função g corresponde ao reservatório 1, pois das duas funções é esta que apresenta uma menor taxa média de variação da altura da água (em valor absoluto) na última parte do esvaziamento.

$$\mathbf{c)} f(x) - g(x) = 4 + \frac{20}{x-20} - \left(-1 + \frac{20}{x+5}\right) = 5 + \frac{20}{x-20} - \frac{20}{x+5} = 5 + \frac{20x+100-20x+400}{(x-20)(x+5)} =$$

$$= 5 + \frac{500}{(x-20)(x+5)}$$

d) Seja d a função definida por $d(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0, 15]$.

$$d'(x) = \left(5 + \frac{500}{(x-20)(x+5)}\right)' = \left(\frac{500}{(x-20)(x+5)}\right)' = 500 \left(\frac{1}{x^2-15x-100}\right)' = 500 \times \frac{-(2x-15)}{(x^2-15x-100)^2} =$$

$$= \frac{-500(2x-15)}{(x^2-15x-100)^2}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-500(2x-15)}{(x^2-15x-100)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 15 = 0 \wedge x^2 - 15x - 100 \neq 0 \Leftrightarrow$$

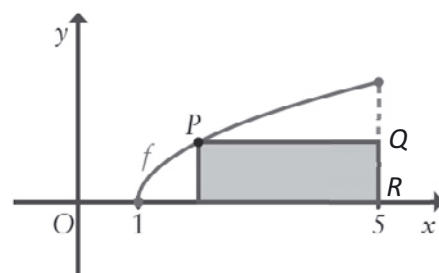
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \wedge x \neq -5 \wedge x \neq 20 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$$

Quadro de variação e de extremos de d

x	0		15/2		15
$-500(2x-15)$	+	+	0	-	-
$(x^2-15x-100)^2$	+	+	+	+	+
$d'(x)$	+	+	0	-	-
d	0	↗	Máx. abs.	↘	0

$f(x) - g(x)$ é máximo para $x = \frac{15}{2} = 7,5$ h; tal significa que é ao fim de 7 h 30 min, ou seja, é a meio da operação de despejo que a diferença de alturas da água nos dois reservatórios toma o maior valor.

332. Seja x ($1 \leq x \leq 5$) a abscissa do ponto P .
Para cada valor de x ($1 < x < 5$), seja A a área do retângulo referido no enunciado e representado na figura ao lado pelo retângulo $[PQRS]$.



Tem-se $\overline{SR} = \overline{OR} - \overline{OS} = 5 - x$ e $\overline{PS} = f(x) = \sqrt{x-1}$

Então $A(x) = \overline{SR} \times \overline{PS} = (5-x)\sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} A'(x) &= [(5-x)\sqrt{x-1}]' = (5-x)' \sqrt{x-1} + (5-x)(\sqrt{x-1})' = \\ &= -\sqrt{x-1} + (5-x) \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -\sqrt{x-1} + \frac{5-x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{-2(x-1)+5-x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{-3x+7}{2\sqrt{x-1}} \\ A'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+7}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow -3x+7 = 0 \wedge 2\sqrt{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \wedge x \neq 1 \end{aligned}$$

Quadro de variação e de extremos de A

x	1		$7/3$		5
$-3x+7$		+	0	-	
$2\sqrt{x-1}$		+	+	+	
$A'(x)$		+	0	-	
A	n.d.	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	n.d.

A área do retângulo é máxima quando $x = \frac{7}{3}$; portanto $x \approx 2,33$.

333.

a) $(f+g)(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x-2} + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1+(x-2)^2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup]2, 3]$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

b) O declive da reta r é igual a 1.

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x-2}\right)' = -\left(-\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}\right) = \frac{1}{(x-2)^2}, \text{ pelo que}$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \vee x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

• Para $x = 1$

$$f(1) = -\frac{1}{1-2} = 1, \text{ pelo que a reta passa no ponto de coordenadas } (1, 1).$$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1(x-1) + 1$.

$$\text{Ora, } y = 1(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = x - 1 + 1 \Leftrightarrow y = x.$$

A equação reduzida da reta é $y = x$.

• Para $x = 3$

$f(3) = -\frac{1}{3-2} = -1$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(3, -1)$.

Portanto, a reta é definida pela equação $y = 1(x - 3) - 1$.

Ora, $y = 1(x - 3) - 1 \Leftrightarrow y = x - 3 - 1 \Leftrightarrow y = x - 4$.

A equação reduzida da reta é $y = x - 4$.

c) $f(-1) = -\frac{1}{-1-2} = \frac{1}{3}$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-1, \frac{1}{3})$.

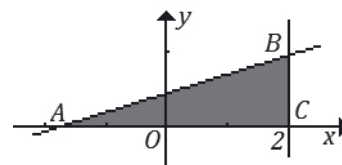
$$f'(-1) = \frac{1}{(-1-2)^2} = \frac{1}{9}$$

Portanto, a reta s é definida pela equação $y = \frac{1}{9}(x + 1) + \frac{1}{3}$.

Ora, $y = \frac{1}{9}(x + 1) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$, pelo que a equação reduzida da reta s é $y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$.

As assíntotas ao gráfico de f são as retas de equações $x = 2$ e $y = 0$.

Na figura ao lado estão representadas, em referencial xOy , o triângulo referido no enunciado e, na figura, designado por $[ABC]$.



Tem-se:

• C é o ponto de coordenadas $(2, 0)$;

• $\frac{1}{9}x + \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow x = -4$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-4, 0)$;

• $\frac{1}{9} \times 2 + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(2, \frac{2}{3})$;

• Área do triângulo $= \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{6 \times \frac{2}{3}}{2} = 2$ unidades de área.

d) Como, para cada posição do ponto A , a ordenada de A é maior do que a ordenada de B , tem-se $\overline{AB} = -\frac{1}{x-2} - (x-2) = -x + 2 - \frac{1}{x-2}$.

Seja d a função definida, em $] -\infty, 2[$, por $d(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-2}$.

$$d'(x) = \left(-x + 2 - \frac{1}{x-2}\right)' = -1 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2)^2 + 1}{(x-2)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \wedge x \neq 2 \wedge x < 2 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 3) \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Quadro de variação e de extremos de d

x	$-\infty$	1		2
$-x^2 + 4x - 3$	-	0	+	
$(x-2)^2$	+	+	+	
$d'(x)$	-	0	+	
d	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$	n.d.

O comprimento do segmento $[AB]$ é mínimo quando $x = 1$.

e) Opção (C)

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x-2) = -\frac{1}{(x-2)-2} = -\frac{1}{x-4} = \frac{1}{4-x}$$

f) Opção (A)

$$-\frac{1}{x-2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = -y \Leftrightarrow x-2 = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{y}; \text{ portanto } f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{x}.$$

g) Opção (D)

Para a expressão ser compatível com a informação, tem que se ter $h(1) = -1$ e $h'(1) = 1$.

Ora:

- pode excluir-se a opção (A), pois, como $1^3 - 1^2 = 0$, ter-se-ia $h(1) = 0$.
- pode excluir-se a opção (C), pois, como $1^3 - 1^2 + 1 = 1$, ter-se-ia $h(1) = 1$.
- pode excluir-se a opção (B), pois, como $(x - x^2 - 1)' = 1 - 2x$, ter-se-ia $h'(1) = -1$.

Pág. 169

334.

$$\text{a) t.m.v.}_{f,2,2+h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2-(2+h)-2}{h} = \frac{4+4h+h^2-2-h-2}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = \frac{h(3+h)}{h} = 3+h$$
$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (3+h) = 3$$

b) $g(-3) = 0,5 \times (-3)^2 + 2 \times (-3) - 0,5 = -2$, pelo que a reta passa no ponto de coordenadas $(-3, -2)$.

$$g'(x) = (0,5x^2 + 2x - 0,5)' = x + 2, \text{ pelo que } g'(-3) = -1.$$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = -1(x + 3) - 2$.

Ora, $y = -1(x + 3) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3 - 2 \Leftrightarrow y = -x - 5$, pelo que a equação reduzida da reta é $y = -x - 5$.

c) Tem-se $f'(a) = g'(b)$.

$$f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 2a - 1 = b + 2 \Leftrightarrow 2a - b = 3$$

d) Seja c , $c > 0$, a abcissa dos pontos A e B .

$$\text{Tem-se } f'(c) = -\frac{1}{g'(c)}$$

$$f'(c) = -\frac{1}{g'(c)} \Leftrightarrow 2c - 1 = -\frac{1}{c+2} \Leftrightarrow 2c - 1 + \frac{1}{c+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2c^2+4c-c-2+1}{c+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2c^2+3c-1}{c+2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2c^2 + 3c - 1 = 0 \wedge c \neq -2 \Leftrightarrow c = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee c = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}; \text{ portanto, dado que } c > 0, \text{ tem-se}$$
$$c = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

O valor de c , arredondado às centésimas, é 0,28.

$$\text{e) } \frac{f(x+2)}{g(x)+2,5} = \frac{(x+2)^2-(x+2)}{0,5x^2+2x-0,5+2,5} = \frac{x^2+4x+4-x-2}{0,5x^2+2x+2} = \frac{x^2+3x+2}{0,5(x^2+4x+4)} =$$
$$-1 \quad | \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x =$$
$$= \frac{(x+2)(x+1)}{0,5(x+2)^2} = \frac{x+1}{0,5(x+2)} = \frac{2x+2}{x+2}$$

f) Opção (D)

$$(f \circ g)(-1) = f[g(-1)] = f(-2) = 4 - (-2) = 6$$

g) Opção (D)

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x \geq 0\} = \quad |x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \\ =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

h) Opção (A)

$$j(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{x^2 - x}{x^2} = 1 - \frac{1}{x}; \text{ portanto, } j'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

De outro modo:

$$j'(x) = \left[\frac{f(x)}{x^2}\right]' = \frac{f'(x) \times x^2 - f(x) \times (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(2x-1) \times x^2 - (x^2-x) \times (2x)}{x^4} = \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2}{x^4} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

i) Opção (D)

$f(-1) = 2$, pelo que C é o ponto de coordenadas $(-1, 2)$;

$f(1) = 0$, pelo que D é o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Portanto, o declive da reta CD é igual a $\frac{2-0}{-1-1} = -1$, pelo que a inclinação desta reta é 135° .

Pág. 170

335. a) A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita:

- A zona a vedar está representada pelo retângulo $[ABCD]$.
- O canteiro está representado pelo retângulo $[A'B'C'D']$.
- $\overline{BC} = x$; $\overline{DC} = y$
- $\overline{D'C'} \times \overline{B'C'} = 2$
- $\overline{B'C'} = x - 1$; $\overline{D'C'} = y - 2$

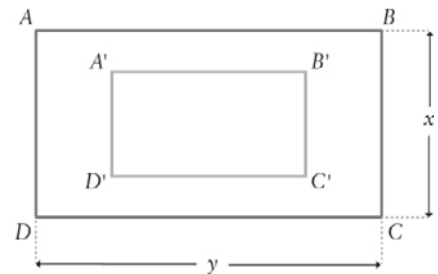
Tem-se:

$$\overline{D'C'} \times \overline{B'C'} = 2 \Leftrightarrow (y - 2)(x - 1) = 2 \Leftrightarrow y - 2 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

Então, vem:

$$a(x) = x \times y = x \times \frac{2x}{x-1} = \frac{2x^2}{x-1}$$

Nas condições da situação, tem que ser $x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$.



$$\text{b) } a'(x) = \left(\frac{2x^2}{x-1}\right)' = \frac{(2x^2)' \times (x-1) - 2x^2 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2) \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Quadro de variação e de extremos de a

x	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 4x$		—	0	+
$(x-1)^2$		+	+	+
$a'(x)$	n.d.	—	0	+
a	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O retângulo que tem menor área é aquele cuja largura, x , é igual a 2.

O comprimento, y , desse retângulo é igual a $\frac{2 \times 2}{2-1}$, ou seja, 4.

O perímetro desse retângulo é $2 + 2 + 4 + 4 = 12$ metros.

c) Para cada valor de x , designemos por $p(x)$ o perímetro do retângulo a vedar.

$$\text{Tem-se: } p(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \times \frac{2x}{x-1} = 2x + \frac{4x}{x-1} = \frac{2x^2 - 2x + 4x}{x-1} = \frac{2x^2 + 2x}{x-1}$$

$$p'(x) = \left(\frac{2x^2 + 2x}{x-1}\right)' = \frac{(2x^2 + 2x)'(x-1) - (2x^2 + 2x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(4x+2)(x-1) - (2x^2 + 2x)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2x - 2 - 2x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x-1)^2}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x-1)^2} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}) \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

Quadro de variação e de extremos de p

x	1		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4x - 2$		—	0	+
$(x-1)^2$		+	+	+
$p'(x)$	n.d.	—	0	+
p	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

A opção não seria idêntica, pois o retângulo que tem menor perímetro é aquele cuja largura, x , é

igual a $1 + \sqrt{2}$; o comprimento, y , deste retângulo, é $\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+4}{2} = 2 + \sqrt{2}$.

336.

a) A assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = -\frac{d}{c}$.

A assíntota horizontal ao gráfico de f é a reta de equação $y = \frac{a}{c}$.

Portanto, o centro de simetria é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Seja A o ponto do gráfico de f pertencente ao eixo das ordenadas e seja B o ponto do gráfico de f pertencente ao eixo das abscissas.

O ponto A é o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{b}{a}\right)$ e o ponto B é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

$$m_{AB} = \frac{0 - \frac{b}{a}}{-\frac{b}{a} - 0} = \frac{b}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{d}$$

Portanto, a reta AB é definida pela equação $y = \frac{a}{d}(x - 0) + \frac{b}{a}$.

$$\text{Ora, } y = \frac{a}{d}(x - 0) + \frac{b}{a} \Leftrightarrow y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{a}.$$

A reta AB passa no centro de simetria do gráfico de f se e só se $\frac{a}{c} = \frac{a}{d} \times \left(-\frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{d} \times \left(-\frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = -\frac{ad}{dc} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow ad = -ad + bc \Leftrightarrow bc = 2ad$$

b) $-1 + \frac{k}{3x+2} = \frac{-3x-2+k}{3x+2}$, pelo que se tem $a = -3$, $b = k - 2$, $c = 3$ e $d = 2$.

Então, neste caso, tem-se:

$$bc = 2ad \Leftrightarrow (k - 2) \times 3 = 2 \times (-3) \times 2 \Leftrightarrow 3(k - 2) = -12 \Leftrightarrow k - 2 = -4 \Leftrightarrow k = -2$$

337. Dado que a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota ao gráfico de g , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 2$$

Vamos resolver este item por dois processos.

1.º processo (apresentado pelo IAVE)

Tem-se, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}} = 1 \quad \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{g(x)} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - xg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[x - g(x)]}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x - g(x)) \times \frac{x}{g(x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-(g(x) - x) \times \frac{x}{g(x)} \right] = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = -2 \times 1 = -2 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x - 2$ é assíntota ao gráfico de h .

2.º processo

Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x-2)] = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x-2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{g(x)} - (x-2) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{g(x)} - x + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - xg(x)}{g(x)} + 2 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x-g(x))}{g(x)} + 2 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - g(x)] + 2 = \\ &= -\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] + 2 = \\ &= -\frac{1}{1} \times 2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 338. g'(x) &= \left(\frac{x^2+ax+3}{x^2+bx+5} \right)' = \frac{(x^2+ax+3)'(x^2+bx+5) - (x^2+ax+3)(x^2+bx+5)'}{(x^2+bx+5)^2} = \\ &= \frac{(2x+a)(x^2+bx+5) - (x^2+ax+3)(2x+b)}{(x^2+bx+5)^2} = \frac{2x^3+2bx^2+10x+ax^2+abx+5a-2x^3-bx^2-2ax^2-abx-6x-3b}{(x^2+bx+5)^2} = \\ &= \frac{bx^2+4x-ax^2+5a-3b}{(x^2+bx+5)^2} = \frac{(b-a)x^2+4x+5a-3b}{(x^2+bx+5)^2} \end{aligned}$$

Então:

$$g'(2) = \frac{4(b-a)+8+5a-3b}{(9+2b)^2} = \frac{4b-4a+8+5a-3b}{(9+2b)^2} = \frac{a+b+8}{(9+2b)^2} \quad e$$

$$g'(3) = \frac{9(b-a)+12+5a-3b}{(14+3b)^2} = \frac{9b-9a+12+5a-3b}{(14+3b)^2} = \frac{-4a+6b+12}{(14+3b)^2}$$

$$\begin{cases} g'(2) = 0 \\ g'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b+8}{(9+2b)^2} = 0 \\ \frac{-4a+6b+12}{(14+3b)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+8 = 0 \wedge b \neq -\frac{9}{2} \\ -4a+6b+12 = 0 \wedge b \neq -\frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+16 = 0 \\ -2a+3b+6 = 0 \end{cases} \wedge b \neq -\frac{9}{2} \wedge b \neq -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+16 = 0 \\ 5b+22 = 0 \end{cases} \wedge b \neq -\frac{9}{2} \wedge b \neq -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+16 = 0 \\ b = -4,4 \end{cases} \wedge b \neq -\frac{9}{2} \wedge b \neq -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3,6 \\ b = -4,4 \end{cases}$$

Determinação do contradomínio da função definida por $g(x) = \frac{x^2-3,6x+3}{x^2-4,4x+5}$

$$g'(x) = \frac{-0,8x^2+4x+5 \times (-3,6) - 3 \times (-4,4)}{(x^2-4,4x+5)^2} = \frac{-0,8x^2+4x-4,8}{(x^2-4,4x+5)^2} \quad | \quad x^2-4,4x+5 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Quadro de variação e de extremos de g

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$-0,8x^2 + 4x - 4,8$	—	0	+	0	—
$(x^2 - 4,4x + 5)^2$	+	+	+	+	+
$g'(x)$	—	0	+	0	—
g	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Como $g(2) = \frac{4-3,6 \times 2+3}{4-4,4 \times 2+5} = \frac{-0,2}{0,2} = -1$, $g(3) = \frac{9-3,6 \times 3+3}{9-4,4 \times 3+5} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1,$$

tem-se que -1 é mínimo absoluto e $1,5$ é máximo absoluto de g , pelo que $D_g = [-1; 1,5]$.

Pág. 171

339. Seja d a abcissa do ponto P ; $f(d) = \frac{k}{d}$, pelo que a reta tangente ao gráfico de f , no ponto P , passa no ponto de coordenadas $\left(d, \frac{k}{d}\right)$.

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}, \text{ pelo que } f'(d) = -\frac{k}{d^2}.$$

Portanto, a reta é definida pela equação $y = -\frac{k}{d^2}(x - d) + \frac{k}{d}$.

$$\text{Ora, } y = -\frac{k}{d^2}(x - d) + \frac{k}{d} \Leftrightarrow y = -\frac{k}{d^2}x + \frac{k}{d} + \frac{k}{d} \Leftrightarrow y = -\frac{k}{d^2}x + \frac{2k}{d}.$$

Seja A o ponto desta reta que pertence ao eixo das ordenadas e seja B o ponto desta reta que pertence ao eixo das abcissas.

O ponto A é o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{2k}{d}\right)$ e o ponto B é o ponto de coordenadas $(2d, 0)$.

$$\text{Área do triângulo } [AOB] = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{2k}{d} \times 2d}{2} = 2k; \text{ está provado que a área não depende de } d.$$

O gráfico de g pode obter-se aplicando ao gráfico de f a translação definida pelo vetor de coordenadas (c, b) ; então, para cada valor de k , o triângulo $[ACB]$ da figura é geometricamente igual ao triângulo $[AOB]$ referido no enunciado e cuja área é igual a $2k$ unidades de área, pelo que a sua área é, também, $2k$ unidades de área.

340. Seja d o diâmetro da circunferência e seja l o lado do quadrado.

$$\text{Soma dos perímetros} = k \Leftrightarrow 4l + \pi d = k \Leftrightarrow l = \frac{k - \pi d}{4}.$$

Para cada valor de d , designemos por $A(d)$ a área total das duas figuras.

$$A(d) = l^2 + \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{k - \pi d}{4}\right)^2 + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{k^2 - 2k\pi d + \pi^2 d^2}{16} + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{k^2 - 2k\pi d + (\pi^2 + 4\pi)d^2}{16}$$

$$A'(d) = \frac{-2k\pi + 2(\pi^2 + 4\pi)d}{16}$$

$$A'(d) = 0 \Leftrightarrow -2k\pi + 2(\pi^2 + 4\pi)d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{2k\pi}{2(\pi^2 + 4\pi)} \Leftrightarrow d = \frac{k}{\pi + 4}$$

Quadro de variação e de extremos de A

d	0		$\frac{k}{\pi+4}$	$+\infty$
$A'(d)$	n.d.	—	0	+
A	n.d.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

A área total das duas figuras é mínima quando $d = \frac{k}{\pi+4}$.

Tem-se, neste caso, $l = \frac{k-\pi d}{4} = \frac{1}{4} \left(k - \frac{\pi k}{\pi+4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi k + 4k - \pi k}{\pi+4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4k}{\pi+4} \right) = \frac{k}{\pi+4}$.

Portanto, está provado que a área total das duas figuras é mínima quando o diâmetro da circunferência é igual ao lado do quadrado.

341.

a) • Comprimento do arco $= \alpha \times 1 = \alpha$

• $2\pi r = \alpha \Leftrightarrow r = \frac{\alpha}{2\pi}$

• Área da base do cone $= \pi \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 = \frac{\pi \alpha^2}{4\pi^2} = \frac{\alpha^2}{4\pi}$

• Seja h a altura do cone; tal como a figura pretende ilustrar, tem-se

$h^2 + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 = 1$.

$h^2 + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow h^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{4\pi^2 - \alpha^2}{4\pi^2}} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

• $v(\alpha) = \frac{1}{3} \times \frac{\alpha^2}{4\pi} \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

• $v'(\alpha) = \left(\frac{\alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \right)' = \left(\frac{\alpha^2}{24\pi^2} \right)' \times \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{24\pi^2} \times (\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2})' =$
 $= \frac{2\alpha}{24\pi^2} \times \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{24\pi^2} \times \frac{-2\alpha}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = \frac{2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{24\pi^2} - \frac{\alpha^3}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = \frac{2\alpha(4\pi^2 - \alpha^2) - \alpha^3}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} =$
 $= \frac{8\pi^2\alpha - 3\alpha^3}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$

$v'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = 0 \wedge 0 < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2) = 0 \wedge 4\pi^2 - \alpha^2 \neq 0 \wedge 0 < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee 8\pi^2 - 3\alpha^2 = 0) \wedge \alpha \neq \pm 2\pi \wedge 0 < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\alpha = 0 \vee \alpha = \pm \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} \right) \wedge 0 < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$

Quadro de variação e de extremos de v

α	0		$\sqrt{8/3} \pi$		2π
α		+	+	+	
$8\pi^2 - 3\alpha^2$		+	0	—	
$24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$		+	+	+	
$v'(\alpha)$	n.d.	+	0	—	n.d.
v	n.d.	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	n.d.

O maximizante de v é $\sqrt{8/3} \pi \approx 5,13$.



b₁)

A função é constante no intervalo $]0, 2\pi[$, pois a soma das áreas laterais dos cones é igual à área do círculo; sendo a função constante nesse intervalo, a derivada é nula.

b₂)

Quando os dois cones são iguais, tem-se $\alpha = 2\pi - a = \pi$.

Tem-se $S(\alpha) = v(\alpha) + v(2\pi - a)$, pelo que

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= v'(\alpha) + [v(2\pi - a)]' = v'(\alpha) + v'(2\pi - a) \times (2\pi - a)' = v'(\alpha) + v'(2\pi - a) \times (-1) = \\ &= v'(\alpha) - v'(2\pi - a) \end{aligned}$$

Portanto, $S'(\pi) = v'(\pi) - v'(\pi) = 0$.

Exercícios propostos

Capítulo 1 | Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

Pág. 174

1.

- a) Relação estatística
- b) Relação funcional
- c) Relação estatística
- d) Relação estatística
- e) Relação funcional

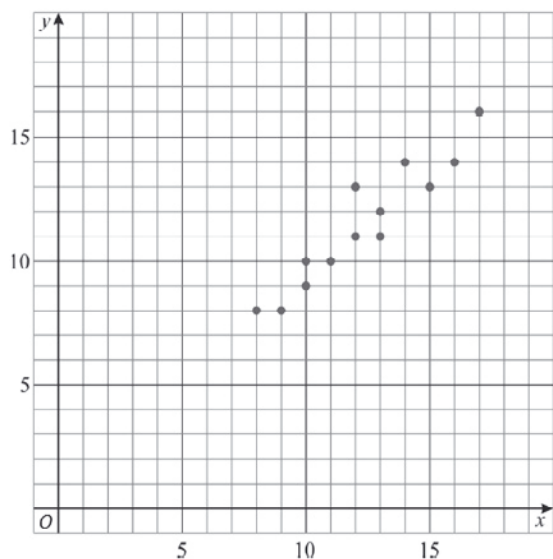
Pág. 175

2.

- a) Variável explicativa: número de anos de escolaridade
Variável de resposta: número médio de livros lidos por ano
- b) Variável explicativa: distância de casa à escola
Variável de resposta: tempo do percurso casa-escola
- c) Variável explicativa: latitude
Variável de resposta: temperatura máxima

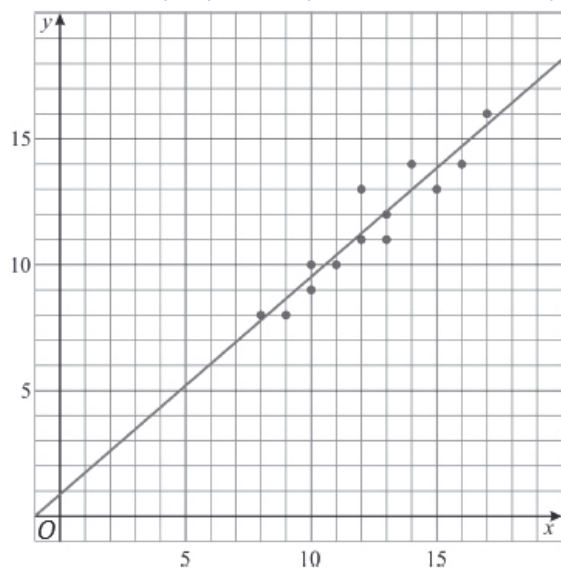
Pág. 176

3. Seja x a variável explicativa «classificações a Matemática» e seja y a variável de resposta «classificações a Física e Química». A amostra pode ser representada graficamente do seguinte modo:



Pág. 177

4. Uma reta que parece ajustada á nuvem de pontos é a representada abaixo:



Pág. 178

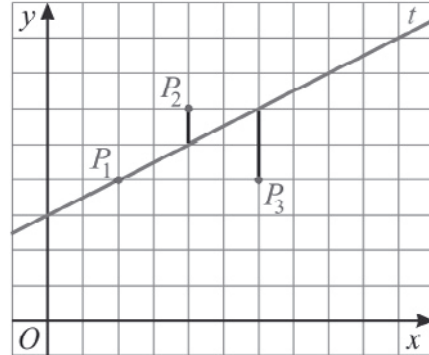
5. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. xOy , a reta t e os pontos P_1 , P_2 e P_3 .

Tem-se:

$$e_1 = 4 - \left(\frac{1}{2} \times 2 + 3\right) = 0$$

$$e_2 = 6 - \left(\frac{1}{2} \times 4 + 3\right) = 1$$

$$e_3 = 4 - \left(\frac{1}{2} \times 6 + 3\right) = -2$$



Pág. 179

6.

a) Tem-se: $\bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$ e $\bar{y} = \frac{3+6+7+8}{4} = 6$, pelo que o centro de gravidade é o ponto de coordenadas $(5, 6)$.

b) Tem-se $6 = 5 + 1$, pelo que o ponto de coordenadas $(5, 6)$ pertence a r .

c) $e_1 = 3 - (2 + 1) = 0$

$$e_2 = 6 - (4 + 1) = 1$$

$$e_3 = 7 - (6 + 1) = 0$$

$$e_4 = 8 - (8 + 1) = -1$$

d) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0 + 1 + 0 + (-1) = 0$

Pág. 181

7.

a) O centro de gravidade da nuvem N é o ponto C de coordenadas $(6, 5)$.

Tem-se $5 = 0,6 \times 6 + 1,4$, pelo que o ponto C pertence a t .

b) Tem-se:

$$e_1 = 2 - (0,6 \times 2 + 1,4) = 2 - 2,6 = -0,6, \text{ pelo que } e_1^2 = (-0,6)^2 = 0,36.$$

$$e_2 = 3 - (0,6 \times 4 + 1,4) = 3 - 3,8 = -0,8, \text{ pelo que } e_2^2 = (-0,8)^2 = 0,64.$$

$$e_3 = 6 - (0,6 \times 6 + 1,4) = 6 - 5 = 1, \text{ pelo que } e_3^2 = 1^2 = 1.$$

$$e_4 = 7 - (0,6 \times 8 + 1,4) = 7 - 6,2 = 0,8, \text{ pelo que } e_4^2 = 0,8^2 = 0,64.$$

$$e_5 = 7 - (0,6 \times 10 + 1,4) = 7 - 7,4 = -0,4, \text{ pelo que } e_4^2 = (-0,4)^2 = 0,16.$$

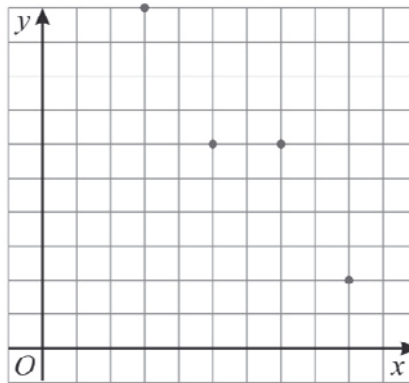
Então, vem $\sum_{i=1}^5 e_i^2 = 0,36 + 0,64 + 1 + 0,64 + 0,16 = 2,8$.

c) Ora, para a reta r , tem-se $\sum_{i=1}^5 e_i^2 = 4$, para a reta s , tem-se $\sum_{i=1}^5 e_i^2 = 6$ e, para a reta t , tem-se $\sum_{i=1}^5 e_i^2 = 2,8$, pelo que a reta t é, das três retas r , s e t , a que melhor se ajusta à nuvem N .

Pág. 182

8.

a) A nuvem M pode ser representada graficamente, num referencial o.n., do seguinte modo:



b) Tem-se: $\bar{x} = \frac{3+5+7+9}{4} = 6$ e $\bar{y} = \frac{10+6+6+2}{4} = 6$, pelo que o centro de gravidade é o ponto de coordenadas $(6, 6)$.

c₁) Como a reta passa no ponto de coordenadas $(6, 6)$, tem-se $6 = a \times 6 + b$, pelo que $b = 6 - 6a$.

c₂) Como a reta é definida por uma equação do tipo $y = ax + b$, com $b = 6 - 6a$, a equação reduzida da reta é da forma $y = ax + 6 - 6a$, pelo que se tem:

$$e_1 = 10 - (3a + 6 - 6a) = 10 - 3a - 6 + 6a = 3a + 4$$

$$e_2 = 6 - (5a + 6 - 6a) = 6 - 5a - 6 + 6a = a$$

$$e_3 = 6 - (7a + 6 - 6a) = 6 - 7a - 6 + 6a = -a$$

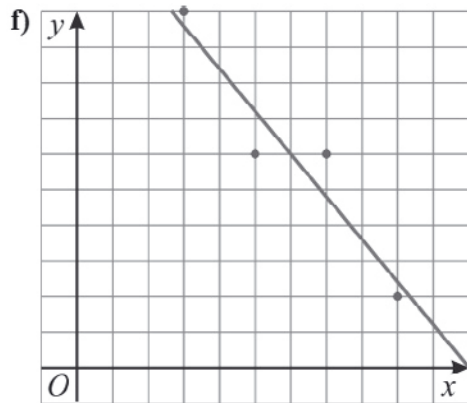
$$e_4 = 2 - (9a + 6 - 6a) = 2 - 9a - 6 + 6a = -3a - 4$$

$$\begin{aligned} \text{c}_3) \sum_{i=1}^5 e_i^2 &= (3a + 4)^2 + a^2 + (-a)^2 + (-3a - 4)^2 = \\ &= 9a^2 + 24a + 16 + a^2 + a^2 + 9a^2 + 24a + 16 = 20a^2 + 48a + 32 \end{aligned}$$

d) Trata-se de determinar o valor de a para o qual é mínimo o valor de $20a^2 + 48a + 32$, o que é equivalente a encontrar o minimizante da função f definida por $f(a) = 20a^2 + 48a + 32$, ou seja, determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f .

A abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f é dada por $-\frac{48}{2 \times 20}$, pelo que é igual a $-1,2$. Então, o valor de a para o qual é mínima a soma dos quadrados dos desvios é $-1,2$.

e) Como $a = -1,2$, vem $b = 6 - 6 \times (-1,2) = 13,2$, pelo que a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = -1,2x + 13,2$.



Pág. 185

9.

Tem-se:

$$\bullet \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 8 \times 5 + 6 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 0 = 40 + 12 + 12 + 0 = 64$$

$$\bullet \bar{x} = \frac{8+6+4+2}{4} = 5 ; \bar{y} = \frac{5+2+3+0}{4} = 2,5$$

$$\bullet SS_x = \sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4\bar{x}^2 = 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 - 4 \times 5^2 = 64 + 36 + 16 + 4 - 4 \times 25 = 120 - 100 = 20$$

$$\bullet SS_y = \sum_{i=1}^4 y_i^2 - 4\bar{y}^2 = 5^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 - 4 \times 2,5^2 = 25 + 4 + 9 - 4 \times 6,25 = 38 - 25 = 13$$

Então, vem:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{64 - 4 \times 5 \times 2,5}{\sqrt{20 \times 13}} = \frac{14}{\sqrt{260}}; \text{ portanto, } r \approx 0,868.$$

Pág. 194

10.

a) Relação estatística

b) Relação funcional

c) Relação funcional

d) Relação estatística

e) Relação funcional

11. a) Variável explicativa: número de médicos por mil habitantes

Variável de resposta: esperança de vida à nascença

b) Variável explicativa: tempo decorrido desde o início do dia

Variável de resposta: temperatura do ar

c) Variável explicativa: distância ao alvo

Variável de resposta: percentagem de tiros certos

d) Variável explicativa: número de horas de estudo

Variável de resposta: classificação obtida no teste

12.

a) $e = 6 - [-2 \times (-1) + 3] = 6 - 5 = 1$

b) $e = 5 - [-2 \times 0 + 3] = 5 - 3 = 2$

c) $e = -1 - [-2 \times 1 + 3] = -1 - 1 = -2$

d) $e = -3 - [-2 \times 3 + 3] = -3 - (-3) = 0$

13. a) Tem-se: $\bar{x} = \frac{5+10+15+20+25+30+35}{7} = 20$ e $\bar{y} = \frac{4+6+5+9+10+11+11}{7} = 8$, pelo que o centro de gravidade é o ponto de coordenadas $(20, 8)$.

b) Tem-se $8 = 0,3 \times 20 + 2$, pelo que o ponto de coordenadas $(20, 8)$ pertence a r ; pode-se concluir que a soma dos desvios verticais dos pontos da nuvem A em relação à reta r é zero.

c) Tem-se:

$e_1 = 4 - (0,3 \times 5 + 2) = 4 - 3,5 = 0,5$, pelo que $e_1^2 = 0,5^2 = 0,25$.

$e_2 = 6 - (0,3 \times 10 + 2) = 6 - 5 = 1$, pelo que $e_2^2 = 1^2 = 1$.

$e_3 = 5 - (0,3 \times 15 + 2) = 5 - 6,5 = -1,5$, pelo que $e_3^2 = (-1,5)^2 = 2,25$.

$e_4 = 9 - (0,3 \times 20 + 2) = 9 - 8 = 1$, pelo que $e_4^2 = 1^2 = 1$.

$e_5 = 10 - (0,3 \times 25 + 2) = 10 - 9,5 = 0,5$, pelo que $e_5^2 = 0,5^2 = 0,25$.

$e_6 = 11 - (0,3 \times 30 + 2) = 11 - 11 = 0$, pelo que $e_6^2 = 0^2 = 0$.

$e_7 = 11 - (0,3 \times 35 + 2) = 11 - 12,5 = -1,5$, pelo que $e_7^2 = (-1,5)^2 = 2,25$.

Então, vem:

$$\sum_{i=1}^7 e_i^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2 + e_7^2 = 0,25 + 1 + 2,25 + 1 + 0,25 + 0 + 2,25 = 7$$

14.

a) Tem-se: $\bar{x} = \frac{3+6+9+12}{4} = 7,5$ e $\bar{y} = \frac{-2+0+3+1}{4} = 0,5$, pelo que o centro de gravidade é o ponto de coordenadas $(7,5; 0,5)$.

b₁) Como a reta passa no ponto de coordenadas $(7,5; 0,5)$, tem-se $0,5 = a \times 7,5 + b$, pelo que $b = 0,5 - 7,5a$.

b₂) Como a reta r_a é definida por uma equação do tipo $y = ax + b$ com $b = 0,5 - 7,5a$, a equação reduzida da reta r_a é da forma $y = ax + 0,5 - 7,5a$, pelo que se tem:

$$e_1 = -2 - (3a + 0,5 - 7,5a) = -2 - 3a - 0,5 + 7,5a = 4,5a - 2,5$$

$$e_2 = 0 - (6a + 0,5 - 7,5a) = -6a - 0,5 + 7,5a = 1,5a - 0,5$$

$$e_3 = 3 - (9a + 0,5 - 7,5a) = 3 - 9a - 0,5 + 7,5a = -1,5a + 2,5$$

$$e_4 = 1 - (12a + 0,5 - 7,5a) = 1 - 12a - 0,5 + 7,5a = -4,5a + 0,5$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 e_i^2 &= (4,5a - 2,5)^2 + (1,5a - 0,5)^2 + (-1,5a + 2,5)^2 + (-4,5a + 0,5)^2 = \\ &= 20,25a^2 - 22,5a + 6,25 + 2,25a^2 - 1,5a + 0,25 + \\ &\quad + 2,25a^2 - 7,5a + 6,25 + 20,25a^2 - 4,5a + 0,25 = \\ &= (20,25 + 2,25 + 2,25 + 20,25)a^2 + \\ &\quad + (-22,5 - 1,5 - 7,5 - 4,5)a + \\ &\quad + (6,25 + 0,25 + 6,25 + 0,25) = \\ &= 45a^2 - 36a + 13 \end{aligned}$$

b₃) Trata-se de determinar o valor de a para o qual é mínimo o valor de $45a^2 - 36a + 13$, o que é equivalente a encontrar o minimizante da função f definida por $f(a) = 45a^2 - 36a + 13$, ou seja, determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f .

A abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f é dada por $-\frac{-36}{2 \times 45}$, pelo que é igual a $0,4$. Então, o valor de a para o qual é mínima a soma dos quadrados dos desvios é $0,4$.

c) Como $a = 0,4$, vem $b = 0,5 - 7,5 \times 0,4 = -2,5$, pelo que a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = 0,4x - 2,5$.

15.

a) Tem-se:

$$\bullet \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 12 \times 4 + 19 \times 2 + 6 \times 6 + 23 \times 1 + 10 \times 5 = 48 + 38 + 36 + 23 + 50 = 195$$

$$\bullet \bar{x} = \frac{12+19+6+23+10}{5} = 14 ; \bar{y} = \frac{4+2+6+1+5}{5} = 3,6$$

$$\bullet SS_x = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 12^2 + 19^2 + 6^2 + 23^2 + 10^2 - 5 \times 14^2 = \\ = 144 + 361 + 36 + 529 + 100 - 5 \times 196 = 1170 - 980 = 190$$

$$\bullet SS_y = \sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5\bar{y}^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2 + 5^2 - 5 \times 3,6^2 = \\ = 16 + 4 + 36 + 1 + 25 - 5 \times 12,96 = 82 - 64,8 = 17,2$$

Então, vem
$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{195 - 5 \times 14 \times 3,6}{\sqrt{190 \times 17,2}} = \frac{-57}{\sqrt{3268}} ; \text{portanto, } r \approx -0,997 .$$

b) Como r é um valor próximo de -1 , é razoável admitir a existência de uma associação linear forte entre as variáveis x e y

c) Tem-se
$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{-57}{190} = -0,3 \text{ e } b = \bar{y} - a\bar{x} = 3,6 - (-0,3) \times 14 = 7,8 , \text{ pelo}$$

que a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = -0,3x + 7,8$.

d) O valor esperado para a variável y quando a variável x toma o valor 16 é dado por $-0,3 \times 16 + 7,8 = 3$.

16.

a) Tem-se:

$$\bullet \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 18 \times 74,9 + 19 \times 76,2 + 20 \times 77,0 + 21 \times 78,4 + 22 \times 78,1 + 23 \times 79,3 + \\ + 24 \times 79,9 + 25 \times 81,7 + 26 \times 80,9 + 27 \times 81,3 + 28 \times 82,1 + 29 \times 86,5 = \\ = 1348,2 + 1447,8 + 1540,0 + 1646,4 + 1718,2 + 1823,9 + \\ + 1917,6 + 2042,5 + 2103,4 + 2195,1 + 2298,8 + 2508,5 = \\ = 22\,590,4$$

$$\bullet \bar{x} = \frac{18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29}{12} = 23,5$$

$$\bullet \bar{y} = \frac{74,9+76,2+77,0+78,4+78,1+79,3+79,9+81,7+80,9+81,3+82,1+86,5}{12} = 79,692$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad SS_x &= \sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12\bar{x}^2 = \\
&= 18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 - \\
&\quad - 12 \times 23,5^2 = \\
&= 324 + 361 + 400 + 441 + 484 + 529 + 576 + 625 + 676 + 729 + 784 + 841 - \\
&\quad - 12 \times 552,25 = \\
&= 6770 - 6627 = 143
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad SS_y &= \sum_{i=1}^{12} y_i^2 - 12\bar{y}^2 = \\
&= 74,9^2 + 76,2^2 + 77,0^2 + 78,4^2 + 78,1^2 + 79,3^2 + 79,9^2 + \\
&\quad + 81,7^2 + 80,9^2 + 81,3^2 + 82,1^2 + 86,5^2 - 12 \times 79,692^2 = \\
&= 5610,01 + 5806,44 + 5929 + 6146,56 + 6099,61 + 6288,49 + 6384,01 + \\
&\quad + 6674,89 + 6544,81 + 6609,69 + 6740,41 + 7482,25 - 12 \times 6350,81 = \\
&= 76\,316,17 - 76\,209,72 = 106,45
\end{aligned}$$

Então, vem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{22\,590,4 - 12 \times 23,5 \times 79,692}{\sqrt{143 \times 106,45}} = \frac{117,23}{\sqrt{15222,35}}; \text{ portanto, } r \approx 0,95.$$

b) Como r é um valor próximo de 1, é razoável admitir a existência de uma associação linear forte entre as variáveis *idade* e *altura*.

c) Tem-se $a = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{117,23}{143} = 0,82$ e $b = \bar{y} - a\bar{x} = 79,69 - 0,82 \times 23,5 = 60,42$,

pelo que a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = 0,82x + 60,42$.

d) Aos três anos correspondem 36 meses pelo que o valor esperado para a altura de uma criança dessa comunidade, aos três anos de idade, é dada por $0,82 \times 36 + 60,42$, ou seja, 89,9 cm.

17. Como os pontos da nuvem A estão alinhados e o declive da reta de mínimos quadrados é positivo, podemos associar a esta nuvem o coeficiente de correlação linear 1.

Como a reta de mínimos quadrados da nuvem B tem declive positivo, podemos associar a esta nuvem o coeficiente de correlação linear 0,94.

Como, das nuvens C e D, o grau de alinhamento dos pontos é maior na nuvem D, podemos associar, para esta nuvem, dos dois restantes valores, o coeficiente de correlação linear que tem maior valor absoluto, ou seja, $-0,61$.

Então:

Nuvem A $\rightarrow r = 1$

Nuvem B $\rightarrow r = 0,94$

Nuvem C $\rightarrow r = -0,30$

Nuvem D $\rightarrow r = -0,61$

18. Como $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x_{i+1} = x_i + 2$, tem-se:

$$x_2 = x_1 + 2,$$

$$x_3 = x_2 + 2 = x_1 + 4,$$

$$x_4 = x_3 + 2 = x_1 + 6,$$

$$x_5 = x_4 + 2 = x_1 + 8,$$

$$x_6 = x_5 + 2 = x_1 + 10 \text{ e}$$

$$x_7 = x_6 + 2 = x_1 + 12, \text{ pelo que } \bar{x} = \frac{7x_1 + 42}{7} = x_1 + 6$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} SS_x &= \sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1 + 2)^2 + (x_1 + 4)^2 + (x_1 + 6)^2 + (x_1 + 8)^2 + (x_1 + 10)^2 + (x_1 + 12)^2 - 7(x_1 + 6)^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1^2 + 4x_1 + 4) + (x_1^2 + 8x_1 + 16) + (x_1^2 + 12x_1 + 36) + \\ &\quad + (x_1^2 + 16x_1 + 64) + (x_1^2 + 20x_1 + 100) + (x_1^2 + 24x_1 + 144) - 7(x_1^2 + 12x_1 + 36) = \\ &= 7x_1^2 + (4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24)x_1 + (4 + 14 + 36 + 64 + 100 + 144) - 7x_1^2 - 84x_1 - 252 = \\ &= 7x_1^2 + 84x_1 + 364 - 7x_1^2 - 84x_1 - 252 = 112 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } r &= a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}, \text{ e } SS_y \geq 0, \text{ tem-se } 0,8 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{112}{SS_y}} \Leftrightarrow 1,6 = \sqrt{\frac{112}{SS_y}} \Leftrightarrow 2,56 = \frac{112}{SS_y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow SS_y = \frac{112}{2,56} \Leftrightarrow SS_y = 43,75 \end{aligned}$$

19. Como a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y = x + 1$, tem-se $a = 1$ e $b = 1$, pelo que, dado que $b = \bar{y} - a\bar{x}$, vem $\bar{x} = \bar{y} - 1$.

$$\text{Tem-se, também, } SS_x = \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 10.$$

$$\text{Então, dado que } a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}, \text{ tem-se } 1 = \frac{130 - 10 \times (\bar{y} - 1) \times \bar{y}}{10}.$$

$$1 = \frac{130 - 10 \times (\bar{y} - 1) \times \bar{y}}{10} \Leftrightarrow 1 = 13 - (\bar{y} - 1)\bar{y} \Leftrightarrow -12 = -\bar{y}^2 + \bar{y} \Leftrightarrow \bar{y}^2 - \bar{y} - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{1+7}{2} \Leftrightarrow \bar{y} = -3 \vee \bar{y} = 4$$

Como o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta de equação $y = x + 1$ e $\bar{x} > 0$, podemos garantir que $\bar{y} > 0$, pelo que se tem $\bar{y} = 4$.

20.

a) Tem-se:

$$e_1 = 6 - (2,6 \times 1 + b) = 3,4 - b, \text{ pelo que } e_1^2 = (3,4 - b)^2 = 11,56 - 6,8b + b^2.$$

$$e_2 = 7 - (2,6 \times 2 + b) = 1,8 - b, \text{ pelo que } e_2^2 = (1,8 - b)^2 = 3,24 - 3,6b + b^2.$$

$$e_3 = 13 - (2,6 \times 3 + b) = 5,2 - b, \text{ pelo que } e_3^2 = (5,2 - b)^2 = 27,04 - 10,4b + b^2.$$

$$e_4 = 13 - (2,6 \times 4 + b) = 2,6 - b, \text{ pelo que } e_4^2 = (2,6 - b)^2 = 6,76 - 5,2b + b^2.$$

$$e_5 = 16 - (2,6 \times 5 + b) = 3 - b = 0,5, \text{ pelo que } e_5^2 = (3 - b)^2 = 9 - 6b + b^2.$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} S_b &= \sum_{i=1}^5 e_i^2 = 5b^2 + (-6,8 - 3,6 - 10,4 - 5,2 - 6)b + (11,56 + 3,24 + 27,04 + 6,76 + 9) = \\ &= 5b^2 - 32b + 57,6 \end{aligned}$$

b) Trata-se de determinar o valor de b para o qual é mínimo o valor de $5b^2 - 32b + 57,6$, o que é equivalente a encontrar o minimizante da função f definida por $f(b) = 5b^2 - 32b + 57,6$, ou seja, determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f .

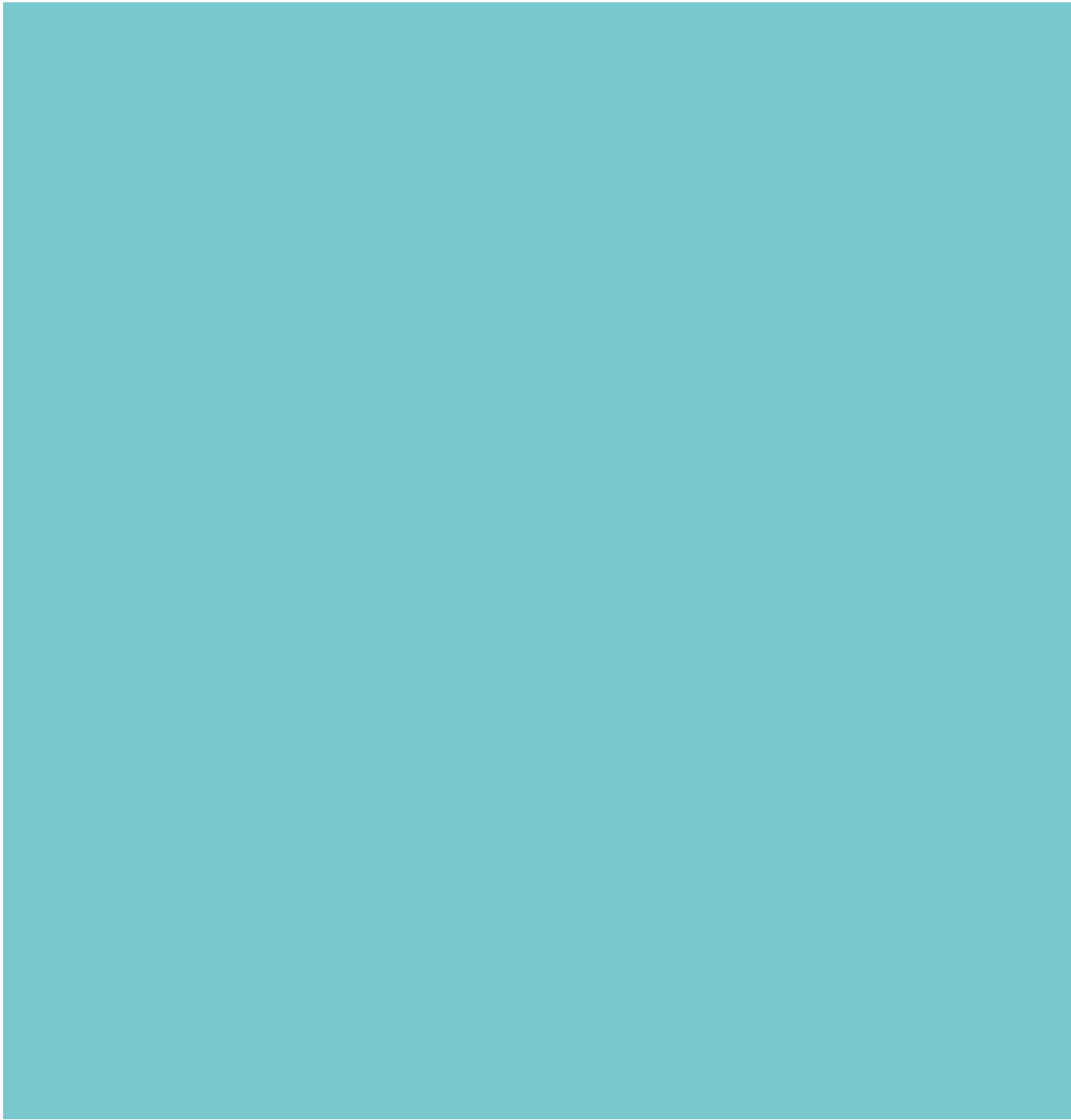
A abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f é dada por $-\frac{-32}{2 \times 5}$ pelo que é igual a $3,2$.

Então, o valor de b para o qual a soma S_b é mínima é $3,2$.

c) Tem-se: $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ e $\bar{y} = \frac{6+7+13+13+16}{5} = 11$, pelo que o centro de gravidade da nuvem N é o ponto de coordenadas $(3, 11)$.

Para $b = 3,2$, a reta r_b é definida pela equação $y = 2,6x + 3,2$.

A reta r_b passa no centro de gravidade da nuvem N, pois $11 = 2,6 \times 3 + 3,2$.



AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-4306-0
		 9 781111 143060



	EDUCAÇÃO
www.leyaeducacao.com	