

Testes 5+5

MT 11 MATEMÁTICA A
11.º ANO

CRISTINA VIEGAS
SÉRGIO VALENTE



INCLUI:

- 5 Testes
 - Respostas
-

**OFERTA
AO ALUNO**

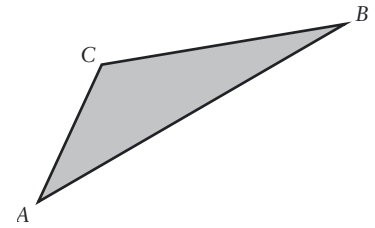
Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Considera o triângulo $[ABC]$.

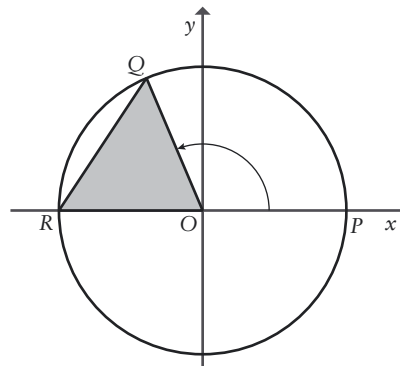
Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 5$
- $\hat{ACB} = 125^\circ$
- $\hat{ABC} = 20^\circ$



Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\overline{BC}$?

- (A) 3,5 (B) 3,8
(C) 4,1 (D) 4,4
2. Em que quadrante está o lado extremidade do ângulo generalizado de amplitude -950° , supondo que, como habitualmente, o lado origem coincide com o semieixo positivo Ox ?
- (A) 1° (B) 2°
(C) 3° (D) 4°
3. Numa dada circunferência, um arco com 3 cm de comprimento tem 2,4 radianos de amplitude. Qual é o comprimento do raio dessa circunferência?
- (A) 0,8 cm (B) 1,25 cm
(C) $0,8\pi$ cm (D) $1,25\pi$ cm
4. Na figura seguinte está representada a circunferência trigonométrica.



Tal como a figura sugere, O é a origem do referencial, o ponto Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas $(1, 0)$ e R é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$. A área do triângulo $[RQO]$, arredondada às centésimas, é 0,46.

Qual é a medida da amplitude, em radianos, arredondada às centésimas, do ângulo orientado assinalado na figura?

- (A) 0,99 (B) 1,17
(C) 1,97 (D) 2,74

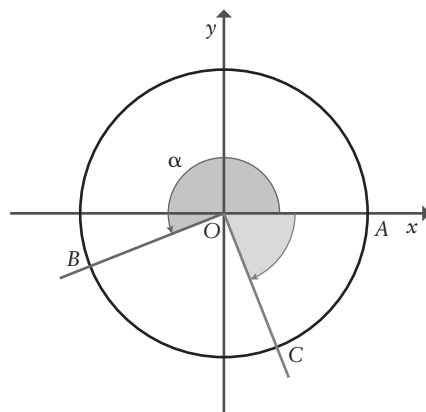
5. Na figura está representada a circunferência trigonométrica.

O ponto A tem coordenadas $(1, 0)$.

As semirretas $\vec{OB}$ e $\vec{OC}$ são perpendiculares. A semirreta $\vec{OB}$ é o lado extremidade do ângulo orientado de amplitude α (em radianos) e lado origem $\vec{OA}$, assinalado na figura.

Qual das expressões seguintes é a amplitude (em radianos) do ângulo orientado de lado origem $\vec{OA}$ e lado extremidade $\vec{OC}$, assinalado na figura?

- (A) $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2} + \alpha$
 (C) $\alpha - \frac{3\pi}{2}$ (D) $-\frac{\pi}{2} - \alpha$

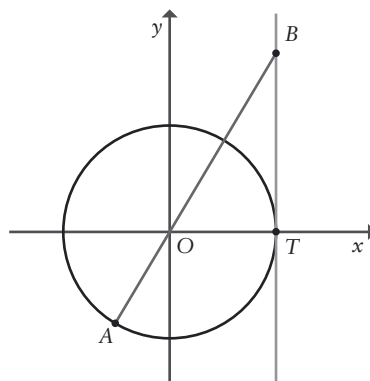


Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Na figura está representada a circunferência trigonométrica num referencial o.n. xOy . Sabe-se que:

- a reta BT é tangente à circunferência no ponto $T(1, 0)$;
- o ponto A pertence à circunferência;
- a reta AB passa na origem do referencial;
- o ponto A tem ordenada $-\frac{4}{5}$.



Sem recorrer à calculadora, resolve os itens seguintes.

a) Qual é a ordenada do ponto B ?

b) Seja $\alpha \in \left] \pi, \frac{3}{2}\pi \right[$ a medida da amplitude, em radianos, do ângulo orientado de lado extremidade $\vec{OA}$.

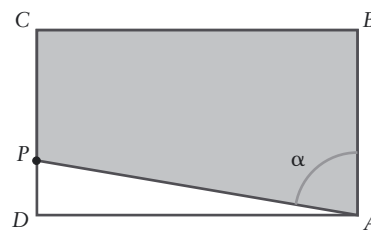
b₁) Exprime $\arcsen\left(-\frac{4}{5}\right)$ em função de α .

b₂) Seja β a medida da amplitude, em radianos, de um ângulo orientado cujo lado origem é a semirreta $\vec{OT}$ e cujo lado extremidade é uma semirreta $\vec{OC}$.

Sabe-se que $\sin \alpha \times \cos \beta > 0 \wedge \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \times \operatorname{tg}(\pi - \beta) > 0$.

A que quadrante pertence o ponto C ?

2. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$. Sabe-se que $\overline{AB} = 3$ e que $\overline{AC} = 6$. Considera que um ponto P se desloca ao longo do lado $[DC]$, nunca coincidindo com o ponto D , nem com o ponto C . Para cada posição do ponto P , seja α a amplitude, em radianos, do ângulo BAP .



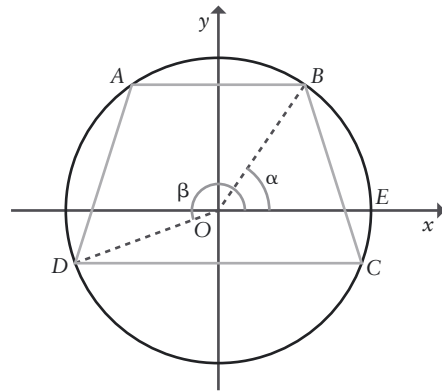
- Determina a amplitude, em radianos, do ângulo BAC .
- Determina o valor da tangente de α quando a área da região representada a sombreado é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo.
- Seja f a função definida em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ por $f(x) = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2 \operatorname{tg} x}$.
 - Mostra que a área da região representada a sombreado é dada por $f(\alpha)$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.
 - Determina o valor da área da região representada a sombreado para o valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfaz a equação $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
 - Determina o valor exato de $\cos \alpha$, sabendo que a área da região representada a sombreado, para esse valor de α , é $6\sqrt{3}$.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 2 \cos(3x)$.

Resolve os itens 3. a) a 3. f) sem recorrer à calculadora.

- Determina os zeros de f que pertencem ao intervalo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Sejam A e B os pontos cujas abcissas são os zeros de f que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e seja C o ponto do gráfico de f que tem abcissa $-\frac{\pi}{3}$. Determina a área do triângulo $[ABC]$.
- Mostra que $f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ é um número inteiro.
- Determina o conjunto solução da condição $f\left(\frac{x}{3}\right) \leq 2 \wedge x \in [0, 2\pi[$.
- Mostra que $\frac{2\pi}{3}$ é período da função.
- Determina o máximo de f e o maior maximizante negativo da função.
- Existe um único ponto no gráfico de f cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa. Recorrendo à calculadora gráfica, determina a abcissa desse ponto. Reproduz o gráfico que visualizaste e apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

4. Na figura seguinte está representada, num referencial o.n. xOy do plano, uma circunferência de centro no ponto O e raio 1. Os pontos A , B , C e D pertencem à circunferência e as retas AB e DC são paralelas ao eixo das abscissas. O ponto E é um dos pontos de interseção da circunferência com o eixo das abscissas.



Seja $\widehat{EOB} = \alpha$ e seja $\widehat{EOD} = \beta$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

- a) Qual é a relação que tem de existir entre α e β para que o polígono $[ABCD]$ seja um retângulo?

- b) Considera o problema seguinte: «Escreve uma expressão que dê a área do polígono $[ABCD]$ em função de α e de β .»

A Arniquita e o Bartulastro responderam a este problema. As suas respostas foram diferentes.

Resposta da Arniquita: Área = $(\cos \alpha - \cos \beta)(\sin \alpha - \sin \beta)$

Resposta do Bartulastro: Área = $(\cos \alpha + \cos \beta)(\sin \alpha + \sin \beta)$

Só uma destas respostas está correta. Qual? Justifica.

- c) Sejam a e b números reais.

- c₁) Determina o conjunto dos valores de a para os quais é possível a equação $\sin \beta = \frac{2-a^2}{2}$.

- c₂) Determina o valor de b para o qual $\sin \beta = \frac{3-b}{\sqrt{5}} \wedge \cos \beta = -\sqrt{\frac{b}{5}}$.

- d) Pode provar-se que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

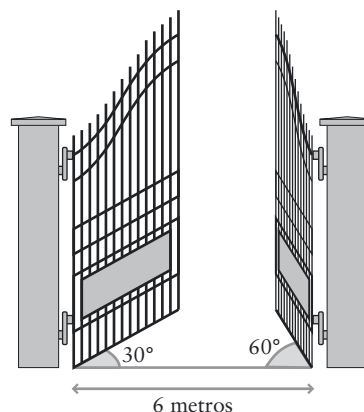
Mostra, recorrendo a esta propriedade, que $BD = \sqrt{2 - 2 \cos(\beta - \alpha)}$.

5. O portão de uma quinta abandonada pelos proprietários foi deixado parcialmente aberto, com as portas na posição ilustrada na figura.

Quando, passados vários anos, a quinta foi vendida, o novo proprietário verificou que era impossível movimentar qualquer das portas.

A largura total da entrada é 6 metros e as duas portas têm dimensões iguais.

Investiga se é possível fazer entrar na quinta uma viatura com 2 metros de largura, com as portas na posição indicada.

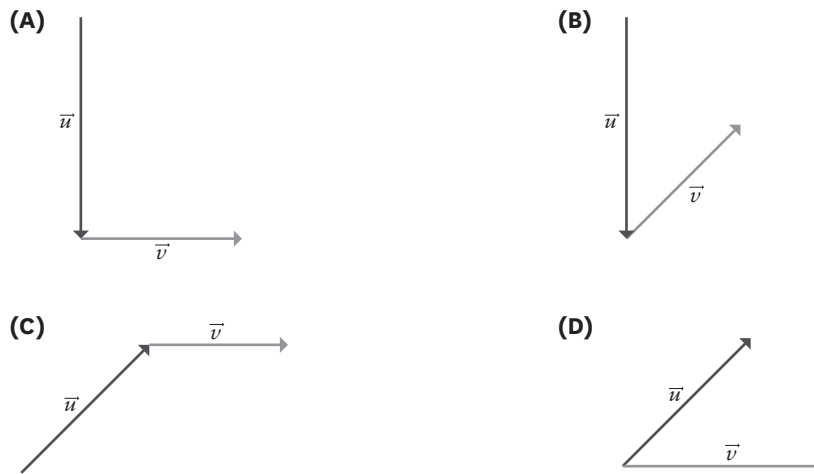


Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

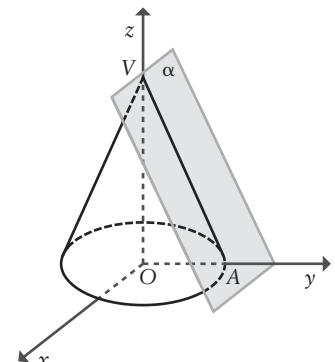
1. Considera, num referencial o.n. xOy , as retas r e s definidas respetivamente por $x = -5$ e $y = \sqrt{3}x$. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas retas? (Recorda que ângulo de duas retas concorrentes não perpendiculares é um dos ângulos agudos por elas formado.)
- (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120°

2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores do plano. Sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$. Em qual das opções seguintes podem estar representados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?



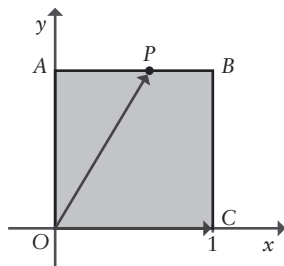
3. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por
- $$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$$
- Qual das condições seguintes define um plano paralelo à reta r ?
- (A) $z = 1$ (B) $x + y = 0$
 (C) $x + y - z = 0$ (D) $x + 2y + 3z = 0$

4. Na figura está representado um cone num referencial o.n. $Oxyz$. O cone tem a base contida no plano xOy e o vértice pertence ao eixo Oz . O ponto A pertence ao eixo Oy e o segmento $[VA]$ é a geratriz do cone que está contida no plano α de equação $2y + z = 6$. Qual é a medida do volume do cone?



- (A) 9π (B) 18π
 (C) 27π (D) 36π

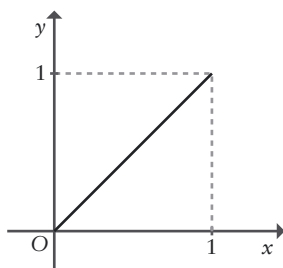
5. No referencial o.n. da figura está representado um quadrado $[OABC]$ de lado 1. Os vértices A e C pertencem aos eixos coordenados. Considera que o ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$.



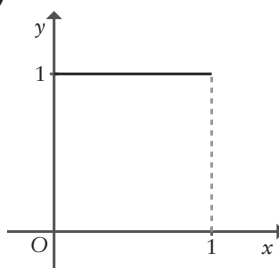
Seja f a função que, à abscissa x do ponto P , faz corresponder o produto escalar $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$.

Em qual dos referenciais seguintes está representada a função f ?

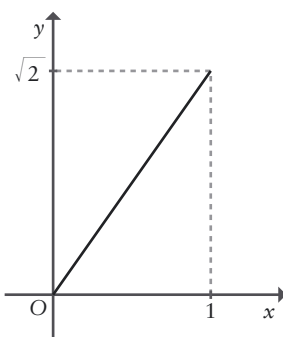
(A)



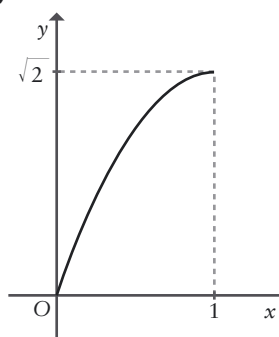
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Num plano munido de um referencial o.n. xOy , considera os pontos $A(-7, 5)$ e $B(1, -1)$. Seja c a circunferência de diâmetro $[AB]$.

a) Mostra que a equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12$ define a circunferência c .

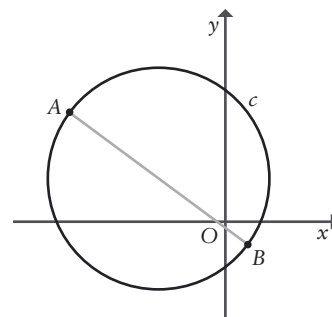
b) Escreve a equação reduzida da reta tangente à circunferência c no ponto B .

c) Determina as coordenadas de um ponto E que pertença à bissetriz do terceiro quadrante e tal que o triângulo $[ABE]$ seja retângulo em A .

d) Seja α a inclinação da reta AB . Determina o valor exato de $\cos \alpha$.

e) Identifica o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a equação $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$.

f) Sejam c_1 e c_2 duas circunferências que se intersectam nos pontos A e B . A distância do centro de cada uma dessas circunferências ao ponto médio de $[AB]$ é igual a 5. Determina as coordenadas dos centros dessas circunferências e escreve a equação reduzida de uma delas.



2. Considera dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 8$ e $\widehat{(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$.

a) Mostra que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ e que $\|\vec{v}\| = 7$.

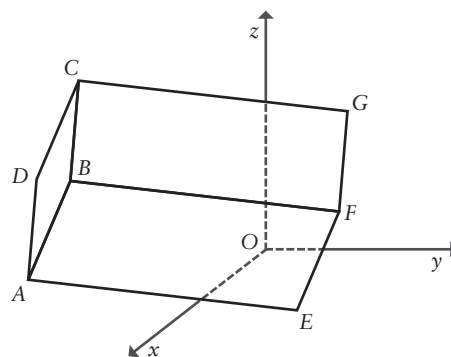
b) Determina $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

c) Determina $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$, cujas bases são os quadrados $[ABCD]$ e $[EFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(14, -7, 4)$;
- o ponto B tem coordenadas $(16, -4, 10)$;
- a equação $3x - 6y + 2z = -6$ define o plano GFE .

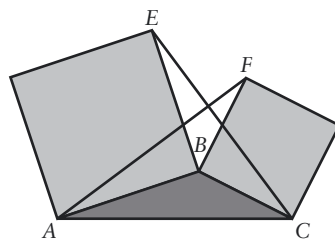


- a) Escreve uma equação cartesiana do plano ABC .
- b) Escreve uma equação cartesiana do plano BCG .
- c) Escreve a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e que passa em C .
- d) Determina a amplitude do ângulo BAO .
Apresenta o resultado em radianos, arredondado às décimas.
- e) Identifica o conjunto dos pontos P que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- f) Determina o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.
Na resolução deste item, debes:
 - definir, por uma condição, a reta BF ;
 - determinar as coordenadas do ponto F .

4. Fixado um referencial o.n. $Oxyz$ no espaço, considera os pontos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, -3)$.

- a) Determina as coordenadas de dois vetores perpendiculares ao vetor $\overrightarrow{AB}$ que não sejam colineares.
- b) Escreve uma equação cartesiana do plano medidor de $[AB]$.
- c) Mostra que os pontos A , B e C definem um plano e escreve uma equação vetorial do plano por eles definido.
- d) Escreve uma condição que defina a esfera com centro no ponto de coordenadas $(0, 0, -1)$ que é tangente ao plano $[ABC]$.

5. Considera um triângulo $[ABC]$ e dois quadrados construídos sobre dois dos seus lados, como se ilustra na figura.



Prova, recorrendo ao produto escalar de vetores, que $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ são perpendiculares.

Sugestão: escreve cada um dos vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ como soma de vetores e relaciona as amplitudes dos ângulos ABC e EBF .

Grupo I

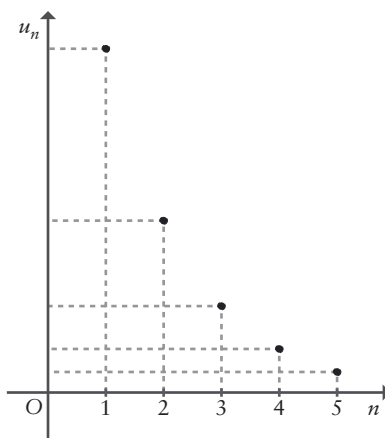
Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Recorda que uma sucessão de números reais é uma função de domínio $\mathbb{N}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes **não** pode definir uma sucessão de números reais?

- (A) $\sqrt{n+1}$ (B) $\frac{n+1}{n-3}$ (C) $\frac{n}{n+1}$ (D) $\operatorname{tg}(n\pi)$

2. No referencial seguinte está representada parte do gráfico da sucessão (u_n) .



Qual das condições seguintes pode definir a sucessão (u_n) ?

- (A) $u_n = \frac{5n+1}{n}$ (B) $u_n = 6-n$
 (C) $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$ (D) $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

3. Considera as sucessões (u_n) , (v_n) , (x_n) e (w_n) assim definidas:

$$u_n = \frac{n-1}{n} \quad v_n = \frac{3n+(-1)^n}{n} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n} \end{cases} \quad w_n = (-1)^n \times n + n$$

Qual destas sucessões é uma sucessão **não** limitada?

- (A) (u_n) (B) (v_n) (C) (x_n) (D) (w_n)

4. Em cada uma das opções está definida uma sucessão. Em qual delas, a sucessão definida não é progressão aritmética nem é progressão geométrica?

- (A) $u_n = 1 - 3n$ (B) $v_n = \frac{n^2 + 4n + 4}{n + 2}$
 (C) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} w_1 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{3} \end{cases}$

5. A soma de k termos consecutivos de uma progressão aritmética é 2116. Adicionando a primeira parcela à última, obtém-se 23.

Qual é o valor de k ?

- (A) 183 (B) 184 (C) 185 (D) 186

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera as sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) definidas, respetivamente, por:

$$u_n = \frac{4n-3}{2} \quad \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = -\frac{v_n}{2} \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} \frac{10}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 22-5n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

- a) Estuda cada uma das sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) quanto à monotonia e fundamenta as conclusões que apresentares.
- b) Apresenta, para cada uma das sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) , o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes dos seus termos.
- c) Define a sucessão (u_n) por recorrência.
- d) Mostra que $v_n = (-2)^{3-n}$.
- e) Determina o primeiro termo da sucessão (u_n) que já é maior do que 11 200.
- f) Determina a soma dos vinte termos consecutivos da sucessão (u_n) a partir do terceiro termo, inclusive.
- g) Mostra que a soma dos n primeiros termos da sucessão (v_n) é dada por

$$S_n = \frac{8 + (-2)^{3-n}}{3}$$

- h) Estuda cada uma das sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) quanto à convergência e justifica as conclusões que apresentares.

2. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

- a) Prova, recorrendo ao método de indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.
- b) Mostra que (u_n) é uma sucessão crescente e justifica que é uma sucessão convergente.
- c) Determina $\lim u_n$.
- d) Determina os cinco primeiros termos da sucessão e formula uma conjectura acerca de uma expressão do seu termo geral.
- e) Recorre ao método de indução matemática para confirmares a validade da conjectura que formulaste na alínea anterior (se estiver correta) e determina o valor do limite.

f) Acerca de uma sucessão (v_n) , sabe-se que:

- (v_n) é uma progressão aritmética;
- $v_2 = u_1$ e $v_5 = -3u_2$.

f₁) Escreve uma expressão do termo geral de (v_n) .

f₂) Prova que a sucessão (w_n) definida por $w_n = 2^{v_n}$ é uma progressão geométrica e estuda-a quanto à monotonia.

3. A Leonor e a Margarida vivem em Campo Maior e ofereceram-se para colaborar na organização da Festa das Flores.



Estão a fazer flores de papel e iniciaram essa tarefa no mesmo dia.

No primeiro dia, aprenderam a técnica e qualquer delas fez apenas uma flor. A Margarida está determinada em fazer, cada dia, mais seis flores do que fez no dia anterior. A Leonor acha que, com a ajuda dos irmãos, vai conseguir fazer, cada dia, o dobro das flores que fez no dia anterior.

a) Mostra que, ao fim de n dias, a Margarida já fez $3n^2 - 2n$ flores.

b) Num determinado dia, a Margarida verificou que já tinha feito, ao todo, 225 flores. Nesse dia, quantas flores fez a Leonor com a ajuda dos irmãos?

4. Considera as sucessões (u_n) , (v_n) , (x_n) e (w_n) definidas, respetivamente, por:

$$u_n = 2n$$

$$v_n = 2\sqrt{n^2 + n}$$

$$x_n = \frac{2^{2n} - 3^n}{3^{n+1}}$$

$$w_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

a) Seja (z_n) a sucessão de termo geral $z_n = \frac{u_n}{n+1}$.

a₁) Mostra que $\lim z_n = 2$, recorrendo à definição de limite de uma sucessão convergente.

a₂) Determina o número de termos da sucessão (z_n) que não pertencem a $V_{0,015}(2)$.

b) Sejam a e b números reais e seja α um número natural. Considera a família de sucessões de termo geral $y_n = an^\alpha + b$.

Determina valores para a , b e α de modo que:

b₁) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{y_n} = 0$

b₂) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{u_n} = \frac{3}{4}$

b₃) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{y_n} = -\infty$

b₄) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - u_n) = 3$

c) Determina os limites seguintes:

c₁) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

c₂) $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)$

c₃) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{v_n}$

5. A cada dia, uma certa planta infestante duplica a área que ocupa na superfície de um lago e prevê-se que cubra a totalidade da superfície do lago ao fim de 50 dias.



Quantos dias se prevê que a referida planta demore a cobrir metade da superfície do lago?

Grupo I

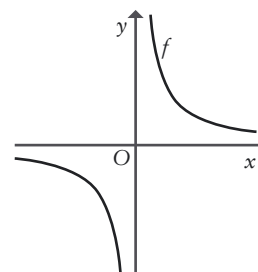
Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. No referencial da figura está representada parte do gráfico da função f .

As retas de equações $x = 0$ e $y = 0$ são assíntotas ao gráfico de f .

Seja (u_n) uma sucessão. Sabe-se que a sucessão (u_n) é divergente e que a sucessão $(f(u_n))$ é convergente.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?



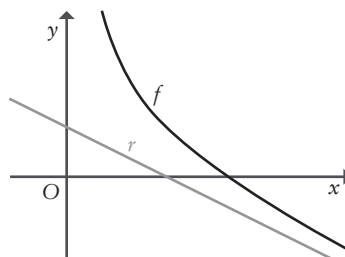
(A) $\frac{(-1)^n}{n}$

(B) $\frac{1}{n^2}$

(C) $(-1)^n$

(D) $(-2)^n$

2. No referencial da figura estão representadas uma função f e uma reta r , que é assíntota ao seu gráfico. A reta r interseca os eixos nos pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(2, 0)$.



Qual das afirmações é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x - 1) = 0$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x + 1 \right) = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$

3. Para um certo valor de a , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + x} & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{x+1} - a & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Qual é esse valor de a ?

(A) -1

(B) 0

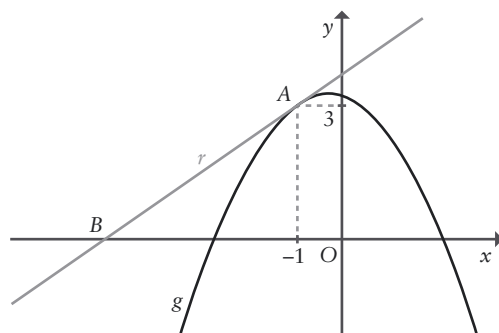
(C) 1

(D) 2

4. No referencial está representada parte do gráfico da função g de domínio $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R}$.

A reta r é tangente ao gráfico de g no ponto A e intersecta o eixo das abscissas no ponto B .

Sabe-se que o ponto A tem coordenadas $(-1, 3)$ e que $g'(-1) = \frac{4}{5}$.



Qual é a abscissa do ponto B ?

- (A) $-\frac{13}{4}$ (B) $-\frac{15}{4}$
(C) $-\frac{17}{4}$ (D) $-\frac{19}{4}$

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

A função f está representada graficamente, bem como a reta de equação $y = -2x + 5$, que é tangente ao gráfico de f no ponto A , de abscissa 1.

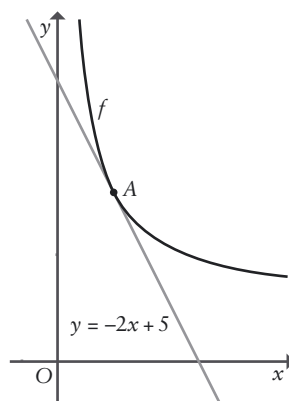
Acerca da função g , sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -4$$

e que o seu gráfico intersecta o gráfico da função f no ponto A .

Qual é o valor de $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$?

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$
(C) $-\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$



Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 4$ e por $g(x) = 2x - 1$, respetivamente.

Responde aos itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

- a) Resolve a condição $\left(\frac{g}{f}\right)(x) \geq 1$. Apresenta o conjunto solução usando a notação de intervalos.

- b) Seja $h = \frac{f}{g}$. Mostra que existem duas retas que são assíntotas ao gráfico de h e define-as por equações.

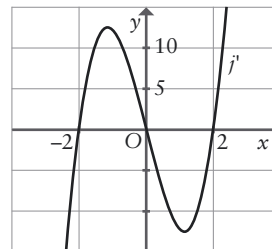
- c) Estuda a função $f \times g$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Na tua resposta, deves apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- o(s) extremo(s), caso exista(m).

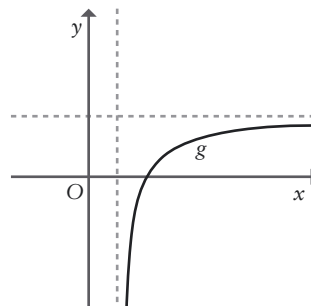
- d) No referencial da figura ao lado está representada parte do gráfico da função j' , derivada da função $j = f^2$.

- d.) Escreve equações de duas retas tangentes ao gráfico de j que sejam paralelas ao eixo das abcissas.

- d.) Define analiticamente a função j' .



2. Seja f a função, de domínio $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$, definida por $f(x) = \sqrt{2x-1}$ e seja g a função, de domínio $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por $g(x) = 1 + \frac{1}{1-2x}$, representada graficamente.



- a) Mostra, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, que $f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- b) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

- c) Determina os limites seguintes:

c.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

c.) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (f(x) + g(x))$

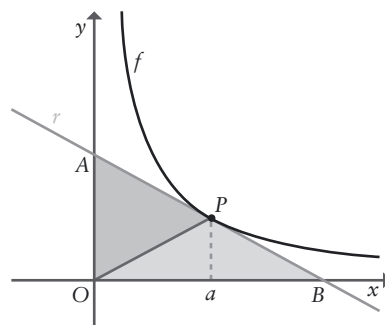
c.) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (f(x) \times g(x))$

3. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

O ponto P é o ponto do gráfico de f com abscissa a .

A reta r , também representada na figura, é a reta tangente ao gráfico de f no ponto P .

A reta r interseca os eixos coordenados nos pontos A e B .



- a) Mostra que os triângulos $[OPA]$ e $[OPB]$ são isósceles e que têm áreas iguais.

Sugestão: escreve a equação reduzida da reta r e determina as coordenadas dos pontos A e B .

- b) Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$ em função da abscissa a do ponto P .

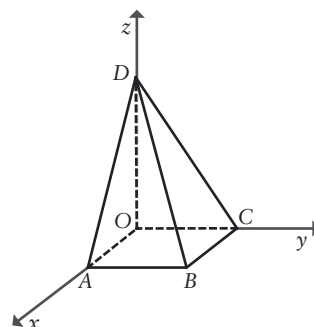
Justifica a afirmação: $\forall a \in \mathbb{R}^+, g'(a) = 0$.

4. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular $[OABCD]$, cuja base está contida no plano xOy .

O vértice D desloca-se no semieixo positivo Oz , entre a origem do referencial e o ponto de cota 10, nunca coincidindo com qualquer destes pontos.

Com o movimento do vértice D , os vértices A , B e C também se deslocam, de modo que:

- a pirâmide permanece quadrangular;
- o vértice A pertence sempre ao semieixo positivo Ox ;
- o vértice C pertence sempre ao semieixo positivo Oy ;
- $\overline{AD} = 10$.



- a) Mostra que o volume da pirâmide pode ser dado em função da abscissa x do ponto A por

$$v(x) = \frac{x^2 \times \sqrt{100 - x^2}}{3}$$

e apresenta o domínio da função v definida por $v(x)$, no contexto da situação descrita.

- b) Determina, por processos analíticos, o valor de x para o qual se obtém a pirâmide de maior volume.

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota ao gráfico da função f .

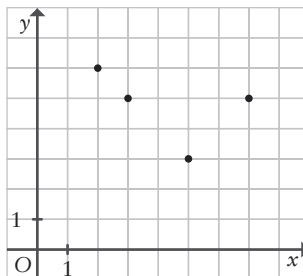
A função g é a função definida por $g(x) = x - f(x)$.

Mostra que o gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua e determina a sua equação reduzida.

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Seja N a nuvem de pontos $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. No referencial seguinte estão representados os pontos P_1, P_2, P_3 e P_5 .



Sabe-se que o centro de gravidade da nuvem é o ponto de coordenadas $(4,6; 5)$.
Quais são as coordenadas de P_4 ?

- (A) $(4, 6)$ (B) $(4, 4)$
(C) $(6, 4)$ (D) $(6, 6)$
2. Considera, em referencial o.n. xOy , a reta t de equação $y = -2x + 7$ e os pontos $A(1, 4)$ e $B(3, 3)$.
Qual é a soma dos quadrados dos desvios verticais dos pontos A e B em relação à reta t ?
- (A) 4 (B) 5
(C) 6 (D) 7

3. Seja (x_i, y_i) uma amostra de dados bivariados, de dimensão 10.
Relativamente a esta amostra, sabe-se que:

- $\bar{x} = 3$
- $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100$
- $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 290$
- a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 2,4x - 3,2$.

Qual é o valor do coeficiente de correlação linear correspondente a esta amostra?

- (A) 0,42 (B) 0,44
(C) 0,46 (D) 0,48

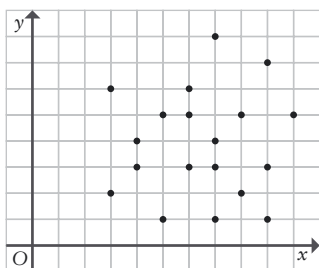
4. Considera, num plano em que se fixou um referencial o.n., a sequência de pontos $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4), P_5(x_5, y_5))$ e a reta t de equação $y = 2x + 3$.
Seja e_i o desvio vertical de P_i em relação à reta t .

Sabe-se que $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 9)$ e que $\sum_{i=1}^4 e_i = -2$. Qual é o valor de e_5 ?

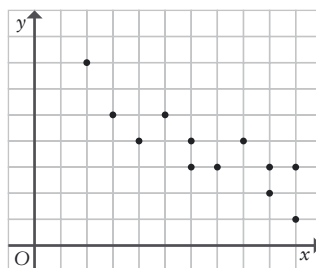
- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

5. Considera as seis nuvens de pontos seguintes.

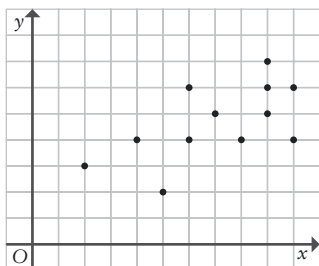
I



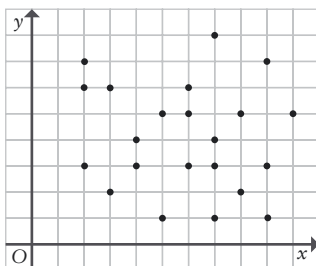
II



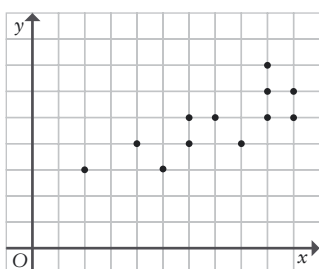
III



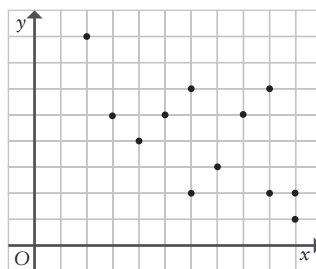
IV



V



VI



Os números $-0,85$, $-0,63$, $-0,12$, $0,05$, $0,61$ e $0,85$ são os valores dos coeficientes de correlação linear destas nuvens (não necessariamente por esta ordem).

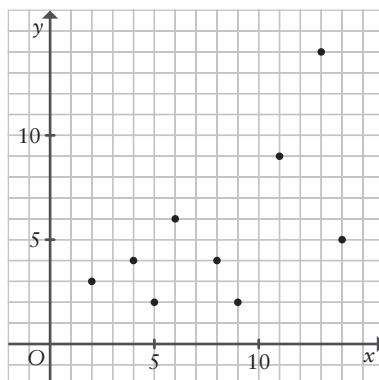
Qual das correspondências seguintes está correta?

- (A) $r = 0,05 \rightarrow \text{I}$, $r = -0,63 \rightarrow \text{II}$, $r = -0,12 \rightarrow \text{IV}$ e $r = 0,85 \rightarrow \text{V}$
 (B) $r = 0,05 \rightarrow \text{I}$, $r = 0,61 \rightarrow \text{III}$, $r = 0,85 \rightarrow \text{V}$ e $r = -0,63 \rightarrow \text{VI}$
 (C) $r = -0,12 \rightarrow \text{III}$, $r = 0,05 \rightarrow \text{IV}$, $r = 0,63 \rightarrow \text{V}$ e $r = -0,63 \rightarrow \text{VI}$
 (D) $r = 0,61 \rightarrow \text{II}$, $r = -0,63 \rightarrow \text{III}$, $r = 0,05 \rightarrow \text{IV}$ e $r = -0,12 \rightarrow \text{VI}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a nuvem de pontos representada no referencial seguinte.



- a) Completa a tabela de acordo com a nuvem apresentada.

x									
y									

- b) Determina as coordenadas do centro de gravidade da nuvem.

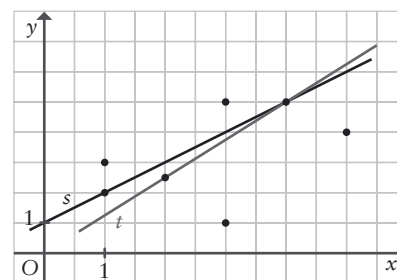
2. Fixado um referencial ortogonal num plano, sejam $P_1(2, 5)$ e $P_2(6, 3)$ dois pontos e seja r uma reta desse plano.

Sabe-se que o desvio vertical de P_1 em relação à reta r é -2 e o desvio vertical de P_2 em relação à reta r é 1 .

Determina a equação reduzida da reta r .

3. No referencial da figura está representada a nuvem de pontos correspondente aos dados da tabela.

x_i	1	1	2	3	3	4	5
y_i	2	3	2,5	1	5	5	4



- a) Escreve a equação reduzida de cada uma das retas s e t .
- b) Calcula a soma dos quadrados dos desvios dos pontos da nuvem em relação a cada uma das retas s e t .
- c) De acordo com os resultados da alínea b), qual das retas s e t se ajusta melhor a esta nuvem de pontos?

4. Considera a nuvem de pontos $M = \{(2, 8), (4, 7), (6, 5), (8, 6), (10, 5)\}$.
- Representa a nuvem M num referencial ortogonal.
 - Determina as coordenadas do centro de gravidade da nuvem.
 - Seja $y = ax + b$ a equação reduzida de uma reta que passa no centro de gravidade da nuvem M .
Exprime, em função de a :
 - o valor de b ;
 - o desvio vertical de cada ponto da nuvem em relação à reta;
 - a soma dos quadrados dos desvios, na forma de polinómio reduzido.
 - Determina o valor de a para o qual é mínima a soma dos quadrados dos desvios.
 - Escreve a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.
 - Representa a reta dos mínimos quadrados no mesmo referencial em que representaste a nuvem de pontos.
5. Uma firma de comércio de carrinhas e automóveis novos exhibe, no seu *stand* de vendas, informação acerca da potência (cv), consumo (l / 100 km) e emissão de CO₂ (g/km) dos modelos de carrinhas e automóveis que comercializa.
A tabela seguinte reproduz a informação relativa a 16 modelos de viaturas a gasóleo.

cv	75	102	110	112	112	115	140	140	140	140	145	145	170	170	185	185
litros	4,4	4,9	4,7	7	7,6	4,9	6	7,7	8	8,4	7,8	8,5	7,9	8,6	7,8	9
CO ₂	116	128	121	185	205	129	162	204	210	223	208	226	209	228	206	237

- Quais são os pares de variáveis explicativa e de resposta que é mais natural estudar?
- Considera a variável consumo como explicativa (x) e a variável emissões como resposta (y).
 - Determina o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresenta o resultado arredondado às décimas.
 - Determina a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados, considerando o declive e a ordenada na origem arredondados às décimas.
 - Utilizando a equação que escreveste na alínea anterior, determina a emissão de CO₂ esperada para um modelo com 10 litros de consumo aos 100 km. Apresenta o resultado em g/km, arredondado às unidades.
 - Determina o coeficiente de correlação linear da amostra $(\tilde{x}, y)$ arredondado às milésimas e interpreta o valor obtido.

Respostas

Teste 1

Grupo I

1. (A) 2. (B) 3. (B) 4. (C) 5. (C)

Grupo II

1. a) $\frac{4}{3}$ b) $\pi - \alpha$ c) 3.º quadrante

2. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $2\sqrt{3}$

- c) Tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{PD}} = \frac{3\sqrt{3}}{\overline{PD}}$ e, portanto,

$$\overline{PD} = \frac{3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\overline{PC} = 3 - \overline{PD} = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{Área sombreada} = \frac{\overline{AB} + \overline{PC}}{2} \times \overline{AD} =$$

$$= \frac{3 + 3 - \frac{3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}}{2} \times 3\sqrt{3} =$$

$$= \frac{18\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}^2}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2 \operatorname{tg} \alpha} = f(\alpha)$$

c₂) $\frac{36\sqrt{3} - 27}{4}$ c₃) $\frac{2\sqrt{31}}{31}$

3. a) $-\frac{8\pi}{9}, -\frac{4\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}$ e $\frac{4\pi}{9}$.

- b) $\frac{\pi}{9}$ (u.a.)

c) $f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{15}\right) =$

$$= 1 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) =$$

$$= 1 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1 + 2 \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) =$$

$$= 1 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1 - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2$$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

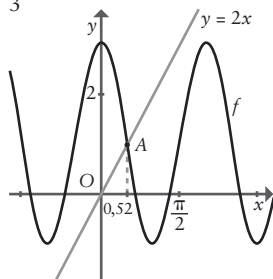
e) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$

$$= 1 + 2 \cos\left(3x + \frac{6\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos(3x + 2\pi) =$$

$$= 1 + 2 \cos(3x) = f(x)$$

- f) O máximo de f é 3 e o maior maximizante negativo é $-\frac{2\pi}{3}$.

- g) 0,52



4. a) $\beta = \alpha + \pi$

- b) A resposta correta é a da Arniquita.

$AB = 2 \cos \alpha$, $DC = -2 \cos \beta$ e a altura do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\sin \alpha + (-\sin \beta) = \sin \alpha - \sin \beta$.

c₁) $-1 < \frac{2-a^2}{2} < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \in]-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[$$

c₂) $\left(\frac{3-b}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{b}{5}}\right)^2 = 1 \wedge$

$$\wedge \frac{3-b}{\sqrt{5}} < 0 \wedge -\sqrt{\frac{b}{5}} < 0 \Leftrightarrow b = 4$$

- d) $B(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $D(\cos \beta, \sin \beta)$, portanto:

$$\overline{BD} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta} =$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \sqrt{2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)} =$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 - 2 \cos(\beta - \alpha)}$$

5. É possível; pode passar uma via-tura de largura não superior a 2,19 metros de largura (valor arredondado às centésimas).

Teste 2

Grupo I

1. (A) 2. (B) 3. (C) 4. (B) 5. (A)

Grupo II

1. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12$$

b) $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

c) $E(-43, -43)$

d) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

- e) É a reta perpendicular à reta AB no ponto A .

- f) Os centros são os pontos de coordenadas $(0, 6)$ e $(-6, -2)$; as equações reduzidas das circunferências correspondentes são $x^2 + (y-6)^2 = 50$ e $(x+6)^2 + (y+2)^2 = 50$.

2. a) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\|} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{25 + \vec{u} \cdot \vec{v}}{5 \times 8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 = 25 + \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -5$$

Recorrendo ao teorema dos cossenos:

$$\|\vec{v}\|^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49; \text{ portanto,}$$

$$\|\vec{v}\| = 7$$

b) 157

c) 84

3. a) $3x - 6y + 2z = 92$

b) $2x + 3y + 6z = 80$

c) $(x-14)^2 + (y+7)^2 + (z-4)^2 = 98$

d) Aproximadamente, 1,8 rad.

- e) Plano perpendicular à reta AB que passa em A ; é o plano AED .

f) $F(10, 8, 6)$; o volume é 686 (u.c.)

4. a) Por exemplo, $\vec{u}(1, 1, 0)$ e $\vec{v}(2, -1, 4)$.

b) $x - y - z = \frac{1}{2}$

- c) Os pontos A , B e C não são colineares (pois os vetores $\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{BC}(-2, 1, -3)$ não são colineares), logo definem um plano.

Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, -1, -1) + t(-2, 1, -3)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

d) $x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq \frac{7}{6}$

5. Tem-se: $\vec{EC} = \vec{EB} + \vec{BC}$ e $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}$. Então:

$$\vec{EC} \cdot \vec{AF} = (\vec{EB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BF}) =$$

$$= \vec{EB} \cdot \vec{AB} + \vec{EB} \cdot \vec{BF} + \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{BF}$$

Como $\vec{EB} \perp \vec{AB}$, e também $\vec{BC} \perp \vec{BF}$, são perpendiculares, tem-se $\vec{EB} \cdot \vec{AB} = 0$ e $\vec{BC} \cdot \vec{BF} = 0$.

$$\text{Portanto, } \vec{EC} \cdot \vec{AF} = \vec{EB} \cdot \vec{BF} + \vec{BC} \cdot \vec{AB}.$$

Por outro lado,

$$\vec{EB} \cdot \vec{BF} = \|\vec{EB}\| \times \|\vec{BF}\| \times \cos(180^\circ - \widehat{EBF}) \text{ e}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AB} = \|\vec{BC}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) =$$

$$= -\|\vec{BC}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\widehat{ABC}) =$$

$$= -\|\vec{BF}\| \times \|\vec{EB}\| \times \cos(\widehat{ABC})$$

Atendendo a que os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{CBF}$ são ângulos retos, tem-se

$$\widehat{ABC} + \widehat{EBF} = 180^\circ \text{ e, portanto,}$$

$$\vec{EB} \cdot \vec{BF} = \|\vec{EB}\| \times \|\vec{BF}\| \times \cos(180^\circ - \widehat{EBF}) =$$

$$= \|\vec{EB}\| \times \|\vec{BF}\| \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\text{Assim, } \vec{EC} \cdot \vec{AF} = \vec{EB} \cdot \vec{BF} + \vec{BC} \cdot \vec{AB} =$$

$$= \|\vec{EB}\| \times \|\vec{BF}\| \times \cos(\widehat{ABC}) -$$

$$- \|\vec{BF}\| \times \|\vec{EB}\| \times \cos(\widehat{ABC}) = 0$$

De $\vec{EC} \cdot \vec{AF} = 0$, conclui-se que os vetores $\vec{EC}$ e $\vec{AF}$ são perpendiculares.

Teste 3

Grupo I

1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (C) 5. (B)

Grupo II

1. a) (u_n) é crescente, pois é uma progressão aritmética de razão positiva ($r = 2$).

(v_n) não é monótona, pois é uma progressão geométrica de razão negativa ($r = -\frac{1}{2}$).

(w_n) não é monótona, pois, por exemplo,

$$w_1 = 10, w_2 = 12 \text{ e } w_3 = \frac{10}{3}. \text{ Assim, } w_1 < w_2 \text{ e } w_2 > w_3.$$

- b) (u_n) : conjunto dos majorantes $\emptyset$; conjuntos dos minorantes $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(v_n) : conjunto dos majorantes $[4, +\infty[$; conjuntos dos minorantes $]-\infty, -2]$.

(w_n) : conjunto dos majorantes $[12, +\infty[$; conjuntos dos minorantes $\emptyset$.

c) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d) $v_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-2)^2 \times (-2)^{1-n} =$

$$= (-2)^{2+1-n} = (-2)^{3-n}$$

e) $u_{5601} = 11\,200,5$

f) 470

$$\begin{aligned} g) s_n &= 4 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 4 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{8}{3} \times (1 - (-2)^{-n}) = \frac{8 - 2^3 \times (-2)^{-n}}{3} = \\ &= \frac{8 + (-2)^3 \times (-2)^{-n}}{3} = \frac{8 + (-2)^{3-n}}{3} \end{aligned}$$

h) (u_n) é divergente, pois $\lim u_n = +\infty$.
 (v_n) é convergente, pois $\lim v_n = 0$.
 (w_n) é divergente, pois não tem limite.

2. a) Seja $P(n)$ a propriedade $u_n < 0$.
 $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois

$$u_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} < 0.$$

Seja n um número natural qualquer; vamos provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$ e, dado que, por hipótese de indução, $u_n < 0$, tem-se $u_n < 0 \wedge 1 - u_n > 0$; portanto, $\frac{u_n}{1 - u_n} < 0$.

$$b) u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 - u_n} - u_n = \frac{(u_n)^2}{1 - u_n}$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

A sucessão (u_n) é crescente e é majorada (todos os termos são negativos), logo é convergente.

c) Dado que a sucessão é convergente, tem-se $\lim u_{n+1} = \lim u_n$. Sendo $\lim u_n = a$, conclui-se

$$\text{que } \frac{a}{1-a} = a \Leftrightarrow a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$d) u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{3}, u_3 = -\frac{1}{4}, u_4 = -\frac{1}{5}$$

$$\text{e } u_5 = -\frac{1}{6}; u_n = -\frac{1}{n+1}$$

$$e) \text{ Seja } P(n) \text{ a propriedade } u_n = -\frac{1}{n+1}.$$

Tem-se $P(1) \Leftrightarrow u_1 = -\frac{1}{1+1}$ e, portanto, $P(1)$ é

uma proposição verdadeira, pois $u_1 = -\frac{1}{2}$.

Seja n um número natural qualquer; vamos provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n} = \frac{-\frac{1}{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{-\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = -\frac{1}{n+2}$$

$$\lim u_n = \lim \left(-\frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

$$f_1) v_n = \frac{n-3}{2}$$

$$f_2) \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{v_{n+1}}}{2^{v_n}} = 2^{v_{n+1} - v_n} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

É crescente, pois $w_1 > 0$ e $r > 1$.

$$3. a) s_n = \frac{1 + (6n-5)}{2} \times n = (3n-2) \times n =$$

$$= 3n^2 - 2n$$

$$b) 256$$

4. a.) Seja δ um qualquer número real positivo.

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n-2n-2}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{2-\delta}{\delta}$$

Seja p um número natural maior do que

$$\frac{2-\delta}{\delta}. \text{ Então, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |z_n - 2| < \delta$$

a.) 132

b) Por exemplo: b.) $a = 1$, $b = 1$ e $\alpha = 2$

$$b_2) a = \frac{3}{2}, b = 1 \text{ e } \alpha = 1$$

$$b_3) a = 0, b = -1 \text{ e } \alpha = 2$$

$$b_4) a = 2, b = 3 \text{ e } \alpha = 1$$

$$c_1) +\infty \quad c_2) 1$$

$$c_3) 0$$

5. 49 dias

Teste 4

Grupo I

1. (D) 2. (A) 3. (C) 4. (D) 5. (D)

Grupo II

1. a) C.S. = $]-2, -1] \cup]2, 3]$

$$b) x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

c) Crescente em $]-\infty, -1]$ e em $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ e de-

crescente em $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$; $(f \times g)(-1) = 9$ é máximo

relativo e $(f \times g)\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{100}{27}$ é mínimo relativo.

$$d_1) y = 0 \text{ e } y = 16$$

$$d_2) f'(x) = 2 \times f(x) \times f'(x) = 4x^3 - 16x \text{ e } D_f = \mathbb{R}.$$

$$2. a) f'(2) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(2+b)} - 1 - \sqrt{3}}{b} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2b+3} - \sqrt{3})(\sqrt{2b+3} + \sqrt{3})}{b(\sqrt{2b+3} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b+3-3}{b(\sqrt{2b+3} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b}{b(\sqrt{2b+3} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2b+3} + \sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b) y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c_1) 0$$

$$c_2) -\infty$$

$$c_3) -\infty$$

3. a) A equação da reta tangente ao gráfico no ponto P é $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.

$$P\left(a, \frac{1}{a}\right), A\left(0, \frac{2}{a}\right), B(2a, 0) \text{ e, portanto,}$$

$PA = PO$ e $PO = PB$. A área de qualquer um dos triângulos é 1.

b) A função g é constante: $\forall a \in \mathbb{R}^+, g(a) = 2$

4. a) Área da base: x^2 ; altura: $\overline{OD} = \sqrt{100 - x^2}$; $D_v =]0, 10[$

$$b) v'(x) = \frac{200x - 3x^3}{3\sqrt{100 - x^2}}; x = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

5. Dado que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota ao gráfico de f , sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f(x) + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x) + 2x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$$

Portanto, a reta de equação $y = -x - 1$ é assíntota ao gráfico da função g .

Teste 5

Grupo I

1. (D) 2. (B) 3. (D) 4. (D) 5. (B)

Grupo II

1. a)	x_i	2	4	5	6	8	9	11	13	14
	y_i	3	4	2	6	4	2	9	14	5

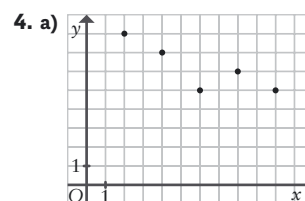
$$b) \left(8, \frac{49}{9}\right)$$

$$2. y = -\frac{5}{4}x + \frac{19}{2}$$

3. a) $t: y = 1,25x$ e $s: y = x + 1$

b) 15,25 relativamente à reta s e 17,8125 relativamente à reta t .

c) A reta s ajusta-se melhor a esta nuvem de pontos do que a reta t .



b) (6; 6,2)

$$c_1) b = -6a + 6,2$$

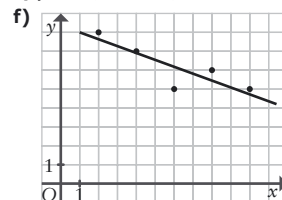
$$c_2) e_1 = 4a + 1,8; e_2 = 2a + 0,8; e_3 = -1,2;$$

$$e_4 = -2a - 0,2; e_5 = -4a - 1,2$$

$$c_3) 40a^2 + 28a + 6,8$$

$$d) a = -0,35$$

$$e) y = -0,35x + 8,3$$



5. a) (potência, consumo), (potência, emissões) e (consumo, emissões).

$$b_1) 26,8 \quad b_2) y = 26,8x - 2,5$$

$$b_3) 266 \text{ g/km}$$

b_4) $r = 0,999$; a associação linear é positiva e muito forte.



Para o aluno, esta obra fará parte integrante do Caderno de Exercícios MVT 11, 11.º Ano.

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-4000-7
		 9 781111 140007

