

MATEMÁTICA A

11

MATEMÁTICA A | 11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

CADERNO DE ATIVIDADES

ÍNDICE

TEMA 1 – GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO II

Trigonometria

Exercícios e problemas resolvidos 2

Exercícios e problemas propostos 6

Geometria analítica

Exercícios e problemas resolvidos 15

Exercícios e problemas propostos 21

TEMA 2 – INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL I

Exercícios e problemas resolvidos 33

Exercícios e problemas propostos 40

TEMA 3 – SUCESSÕES REAIS

Exercícios e problemas resolvidos 62

Exercícios e problemas propostos 68

Soluções 76

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Uma árvore e um observador encontram-se em margens opostas de um rio. O observador mediu o ângulo de visão do cimo da árvore com a horizontal e obteve 35° . Recuou 10 m e mediu de novo o ângulo de visão com o cimo da árvore, obtendo 25° . Qual a altura da árvore?



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Utilizando os triângulos retângulos [CDA] e [CDB] e representando por h a altura da árvore e por x a distância inicial do observador à árvore,

$$\left. \begin{array}{l} \text{no triângulo [CDA]: } \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{no triângulo [CDB]: } \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{h}{x+10} \end{array} \right\} \quad x \operatorname{tg} 35^\circ = (x+10) \operatorname{tg} 25^\circ$$

$$\text{ou seja, } (\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ) x = 10 \operatorname{tg} 25^\circ$$

$$\text{ou ainda } x = \frac{10 \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}$$

$$\text{Logo } h = \frac{10 \operatorname{tg} 25^\circ \times \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ} \Leftrightarrow h = 13,96$$

A árvore mede 13,96 m.

2. Um método universalmente utilizado para calcular a distância entre duas árvores (A e B) que estão em margens diferentes de um rio, pode enunciar-se do seguinte modo: escolhe-se uma referência na margem em que o observador se encontra (árvore C, por exemplo), medem-se os ângulos BCA e CBA e a distância entre B e C – repare-se que estas três medições fazem-se na margem em que o observador se encontra.



Determine a distância entre as árvores A e B para o caso de ser

$$\widehat{BCA} = 32^\circ, \widehat{CBA} = 83^\circ \text{ e } \overline{BC} = 63 \text{ m.}$$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

De um triângulo, conhecemos $\widehat{B} = 83^\circ$, $\widehat{C} = 32^\circ$ e $\overline{BC} = 63 \text{ m}$. Queremos conhecer o comprimento do lado [AB]. Para conhecermos a amplitude do ângulo A, fazemos $\widehat{A} = 180^\circ - (83^\circ + 32^\circ) = 65^\circ$

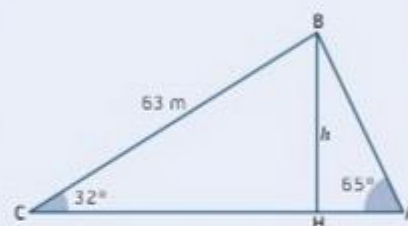


EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

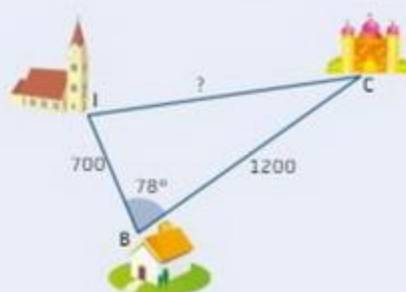
Se traçarmos a altura h , relativa ao vértice B, ficamos com dois triângulos retângulos.

No triângulo [BHC], $h = 63 \operatorname{sen} 32^\circ$
 No triângulo [BHA], $h = c \operatorname{sen} 65^\circ$ } Igualando, resulta $63 \operatorname{sen} 32^\circ = c \operatorname{sen} 65^\circ$
 ou seja, $c = \frac{63 \operatorname{sen} 32^\circ}{\operatorname{sen} 65^\circ} \Leftrightarrow c = 36,84$.

A distância entre as árvores A e B é de 36,8 m.



3. O Bernardo (B) vê, desde sua casa, um castelo (C) e uma igreja (I). Conhece as distâncias a ambos os lugares, $\overline{BC} = 1200$ m, $\overline{BI} = 700$ m e pode medir o ângulo em B, sendo $\hat{B} = 78^\circ$.



Determine a distância $\overline{CI}$ entre o castelo e a igreja.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Tracemos a altura relativa ao lado [BC].

Começemos por determinar $\overline{IH}$ no triângulo [IBH]:

$\overline{IH} = 700 \operatorname{sen} 78^\circ = 684,7$ ou seja, $\overline{IH} = 684,7$ m.

Ainda no mesmo triângulo [IBH], determinemos o comprimento do cateto [BH]:

$\overline{BH} = 700 \cos 78^\circ = 145,5$ ou seja, $\overline{BH} = 145,5$ m.

Já podemos determinar a distância $\overline{CI}$, entre o castelo e a igreja.

No triângulo [IHC], temos

$\overline{IH} = 684,7$ m

e

$\overline{HC} = 1200 - 145,5 = 1054,5$, ou seja, $\overline{HC} = 1054,5$ m.

Logo $\overline{IC} = \sqrt{\overline{IH}^2 + \overline{HC}^2} = 1257$ m.

A distância entre a igreja e o castelo é cerca de 1257 m.



4. A partir das razões trigonométricas do ângulo de amplitude 25°

$$\operatorname{sen} 25^\circ \approx 0,423, \cos 25^\circ \approx 0,906, \operatorname{tg} 25^\circ \approx 0,466$$

calcule as razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes 65° , 115° , 155° e 205° .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

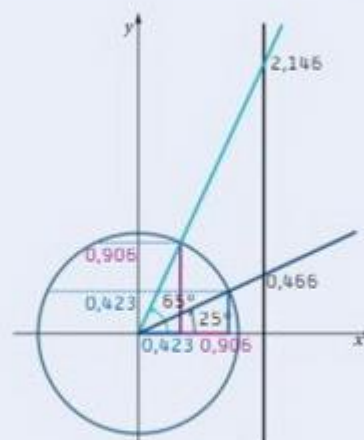
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Reparando que os ângulos de amplitudes 65° e 25° são complementares [$65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$], tem-se que:

$$\sin 65^\circ = \cos 25^\circ = 0,906$$

$$\cos 65^\circ = \sin 25^\circ = 0,423$$

$$\operatorname{tg} 65^\circ = \frac{\sin 65^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} = \frac{1}{0,466} = 2,146$$

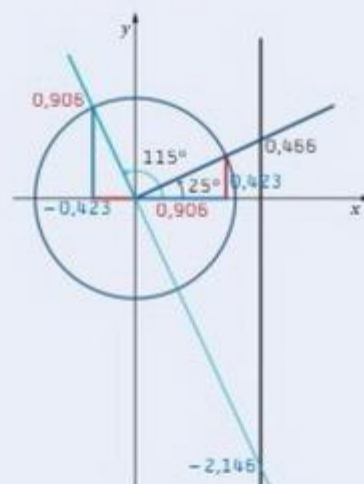


Como $115^\circ = 25^\circ + 90^\circ$, tem-se:

$$\sin 115^\circ = \cos 25^\circ = 0,906$$

$$\cos 115^\circ = -\sin 25^\circ = -0,423$$

$$\operatorname{tg} 115^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} = -2,146$$



Os ângulos de amplitudes 25° e 155° são suplementares, logo:

$$\sin 155^\circ = \sin 25^\circ = 0,423$$

$$\cos 155^\circ = -\cos 25^\circ = -0,906$$

$$\operatorname{tg} 155^\circ = -\operatorname{tg} 25^\circ = -0,466$$



Reparando que $205^\circ = 25^\circ + 180^\circ$, tem-se:

$$\sin 205^\circ = -\sin 25^\circ = -0,423$$

$$\cos 205^\circ = -\cos 25^\circ = -0,906$$

$$\operatorname{tg} 205^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ = 0,466$$



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

5. Resolva cada uma das seguintes equações:

5.1. $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$

5.2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.3. $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

5.1. Resolver a equação $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, significa descobrir todos os valores de x que são amplitudes, em radianos, de ângulos cujo seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

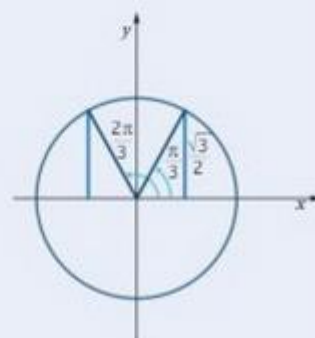
Representemos tais ângulos no círculo trigonométrico.

$x = \frac{\pi}{3}$ é uma solução e $x = \pi - \frac{\pi}{3}$ é outra solução.

Então, todos os ângulos que tenham o lado extremidade coincidente com o dos anteriores são soluções da equação dada.

Ou seja, o conjunto-solução é constituído pela seguinte família de amplitudes:

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



5.2. Para resolver a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, comecemos por recorrer ao círculo trigonométrico para desenharmos ângulos cujo cosseno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Todos os ângulos que têm o lado extremidade coincidente com $\vec{OA}$,

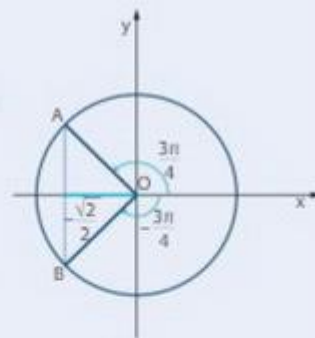
ou seja, $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ são soluções da equação, assim como os

ângulos que têm o lado extremidade coincidente com $\vec{OB}$, isto é,

$$x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o conjunto-solução da equação $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ é constituído pelos elementos da forma

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



5.3. Uma boa estratégia para resolver a equação $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ é escrever uma equação equivalente à dada, na forma $\cos x = \cos \alpha$.

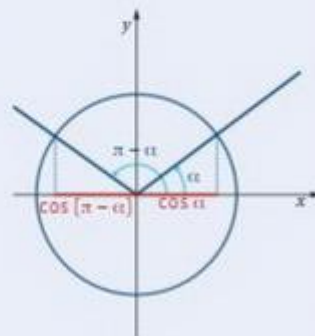
Para isso, basta lembrar que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

$$\text{Assim, } -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right).$$

Então,

$$\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{5} + k2\pi \vee x = -\frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

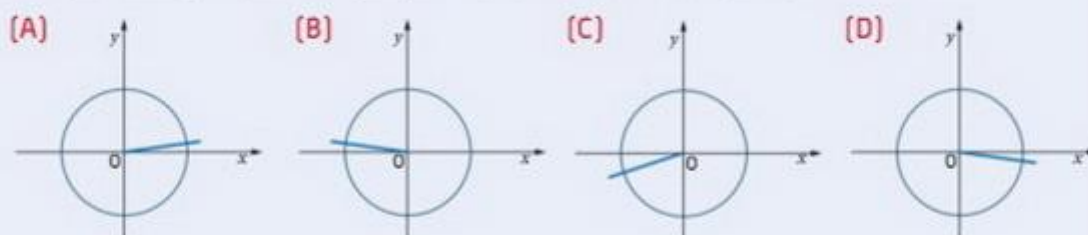


EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões 1 a 20 são de "escolha múltipla". Deve responder indicando apenas a letra correspondente à opção que considera certa [assegure-se, no entanto, de que saberia justificar a sua escolha caso tal lhe fosse solicitado].

1. No círculo trigonométrico de cada uma das figuras seguintes, está representado, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox .

Em qual das figuras, esse ângulo pode ter 6 radianos de amplitude?



2. Dos quatro ângulos seguintes, um deles tem 1 radiano de amplitude. Indique-o.



3. Numa circunferência de raio 4 cm, um arco de 2 cm tem de amplitude:

(A) $\frac{\pi}{2}$ rad (B) $\frac{1}{2}$ rad (C) π rad (D) 2 rad

4. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) No 2.º quadrante, $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0$.
 (B) No 3.º quadrante, o cosseno e o seno têm sinais diferentes.
 (C) Existe um ângulo no 4.º quadrante cujo cosseno é igual a $\frac{5}{2}$.
 (D) Não existe qualquer ângulo no 1.º quadrante cuja tangente seja igual a 5.

5. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\cos(2 \text{ rad}) > \cos(1 \text{ rad})$ (B) $\sin(2 \text{ rad}) > \sin(3 \text{ rad})$
 (C) $\sin\left(\frac{\pi}{5} \text{ rad}\right) > \sin\left(\frac{4\pi}{5} \text{ rad}\right)$ (D) $\operatorname{tg}(2 \text{ rad}) > \operatorname{tg}(1 \text{ rad})$

6. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) No 4.º quadrante, existe um ângulo cujo cosseno é igual ao seno.
 (B) No 3.º quadrante, o seno de um ângulo é sempre maior que o cosseno.
 (C) Existe um ângulo no 2.º quadrante cuja tangente é -100 .
 (D) Existe um ângulo no 4.º quadrante cujo seno é -2 .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

7. Se α é a amplitude de um ângulo interno de um triângulo equilátero, então $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ é igual a:

(A) 0,5 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) -0,5 (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\sin x = \frac{3}{4}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{3}{4}$?

(A) $\frac{3\pi}{2} + \beta$ (B) $-\beta$ (C) $\pi - \beta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \beta$

9. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Qual das expressões seguintes dá o valor de $\sin \alpha$?

(A) $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (B) $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

(C) $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ (D) $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$

GAVE - TI (2006)

10. Considere a equação trigonométrica $\cos x = 0,4$.

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, -2\pi\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

11. Considere a equação trigonométrica $\sin x = -0,7$.

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

(A) $\left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

12. No respetivo domínio, a expressão $\frac{\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ é equivalente a:

(A) 1 (B) $\operatorname{tg} x$

(C) $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ (D) 0

13. Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ e que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então o valor de $\sin(\pi - \alpha)$ é:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

14. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$.

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

- (A) $\cos \theta - \sin \theta$ (B) $\sin \theta \times \cos \theta$
(C) $\sin \theta \times \operatorname{tg} \theta$ (D) $\sin \theta - \operatorname{tg} \theta$

15. Considere a equação $1 + 3 \operatorname{tg}(2x) = 4$.

Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

- (A) $-\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{5\pi}{8}$ (D) $\frac{7\pi}{8}$

16. Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0,3$.

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (B) $[0, \pi]$
(C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$

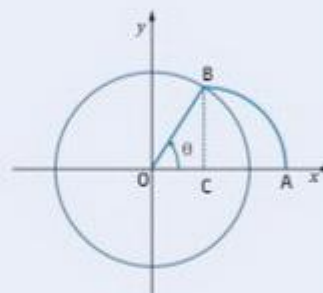
17. Considere, sobre o círculo trigonométrico, o ponto P de modo que o raio [OP] faça com o semieixo positivo das abscissas um ângulo de 7440° . Sobre o seno desse ângulo podemos afirmar que:

- (A) é a abscissa de P.
(B) é a ordenada de P e ela é positiva.
(C) é a ordenada de P e P está no 4.º quadrante.
(D) é a ordenada de P e P está no 3.º quadrante.

18. Na figura está representado um círculo trigonométrico, o raio [OB] e o arco de circunferência AB de centro no ponto C.

A abscissa do ponto A é:

- (A) $1 + \sin \theta$ (B) $1 + \cos \theta$
(C) $\cos \theta + \sin \theta$ (D) $1 + \cos \theta + \sin \theta$



19. A expressão $\sin^4 x - \cos^4 x$ é equivalente a:

- (A) 1 (B) $1 - 2 \sin^2 x$
(C) $2 \cos^2 x + 1$ (D) $2 \sin^2 x - 1$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

20. De entre os pares de amplitudes seguintes, qual o par que corresponde a ângulos que têm o mesmo lado extremidade, no círculo trigonométrico?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ rad e $\frac{\pi}{6}$ rad

(B) $-\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{13\pi}{6}$ rad

(C) $-\frac{25\pi}{6}$ rad e $\frac{11\pi}{6}$ rad

(D) $-\frac{5\pi}{6}$ rad e $\frac{13\pi}{6}$ rad

As questões que se seguem são de resposta "aberta". Leia atentamente os enunciados e efetue as resoluções completas, explicando os raciocínios apresentando os cálculos.

21. Para determinar a altura do cume de um monte, um observador mede o ângulo segundo o qual avista o ponto mais alto do cume e obtém 59° . Retrocede 12 metros e mede o novo ângulo de alcance do topo da montanha e encontra 42° .

Qual a altura da montanha?

22. As bases de um trapézio têm de comprimento 17 cm e 10 cm e um dos seus lados mede 8, também em cm.

O ângulo entre a base menor e o lado de medida 8 é 70° .

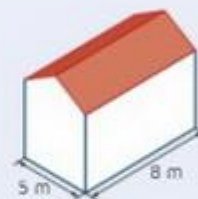
Determine, com aproximação às centésimas, o comprimento do outro lado do trapézio e a sua área.

23. Um barco pede socorro e recebem-se os seus sinais em duas estações de rádio, A e C, que distam entre si 50 km. Desde cada estação, medem-se os ângulos em que um dos lados é a semirreta que contém o segmento [AC], $\hat{A} = 46^\circ$ e $\hat{C} = 53^\circ$.

A que distância de cada estação se encontra o barco?

24. Pretende-se prever a área a revestir com telha numa casa em construção. O arquiteto projetou as duas "águas" do telhado iguais e com uma inclinação de 30%. As dimensões do edifício são as que estão assinaladas na figura.

Qual é, então, a área a ser revestida com telha?



25. Determine um valor aproximado (às centésimas de grau) da amplitude do ângulo de duas diagonais de um paralelepípedo com base quadrangular regular de lado 4 cm e altura 9 cm.
26. Calcule as razões trigonométricas de 55° , 125° , 145° , 215° , 235° , 305° e 325° a partir dos valores seguintes: $\sin 35^\circ \approx 0,57$; $\cos 35^\circ \approx 0,82$ e $\tan 35^\circ \approx 0,70$.
27. Determine as razões trigonométricas de 718° , 516° e 342° , utilizando a calculadora apenas para calcular razões trigonométricas de ângulos compreendidos entre 0° e 90° .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

28. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $[-180^\circ, 180^\circ]$.

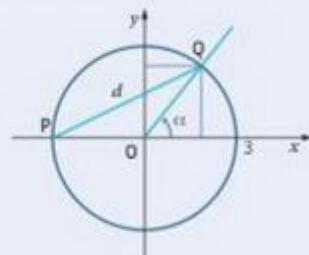
28.1. Supõe-se que $\cos \theta$ é positivo. Indique um intervalo de amplitude 180° a que pertença θ .

28.2. Supõe-se que $\sin \theta$ é negativo. Indique um intervalo de amplitude $\frac{\pi}{2}$ a que pertença θ .

29. A circunferência representada na figura tem centro na origem do referencial o. n. (O, x, y) e raio 3.

Admita que o ponto Q se desloca ao longo da circunferência no 1.º quadrante.

Para cada posição do ponto Q , seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo $\hat{O}x$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\hat{O}Q$. Seja d o comprimento do segmento $[PQ]$.



29.1. Mostre que $d^2 = 18 + 18 \cos \alpha$

29.2. Para uma certa posição do ponto Q , tem-se $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$.

Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d .

30. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares. Cada peça é um triângulo isósceles em que a medida de cada um dos lados iguais é a constante a , como mostra a figura.

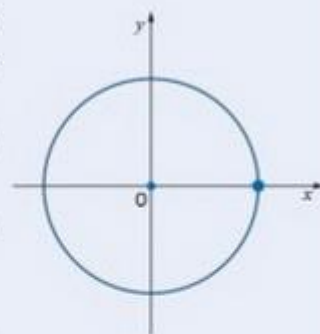


Mostre que a área da peça é dada em função de θ por

$$A(\theta) = a^2 \sin \theta \cos \theta, \quad a > 0 \text{ e } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

31. Uma partícula move-se numa trajetória circular, em torno de O , no sentido positivo, descrevendo arcos iguais em tempos iguais. Realiza uma volta em cada 2 segundos.

O raio da trajetória é de 4 m e a partícula, no instante inicial, estava na posição da figura.



31.1. Qual a amplitude, em radianos, que a partícula descreve em torno de O em $\frac{3}{4}$ do segundo?

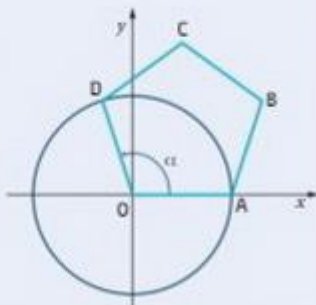
Qual o comprimento do respetivo arco?

31.2. Indique as coordenadas do ponto onde a partícula se encontra depois de descrever um ângulo de $\frac{7\pi}{6}$ radianos.

32. Na figura está representado um círculo trigonométrico de centro O e um pentágono regular $[ABCD]$.

32.1. Mostre que as coordenadas de B são $(1 - \cos \alpha^\circ; \sin 72^\circ)$.

32.2. Determine uma expressão para obter a área do pentágono em função de α (em graus) e apresente um valor dessa área aproximado às décimas.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

33. Desenhe no círculo trigonométrico, ângulos que cumpram as seguintes condições e determine, em cada caso, o valor das restantes razões trigonométricas:

33.1. $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$

33.2. $\operatorname{tg} \beta = -1$ e $\cos \beta < 0$

34. Sabe-se que $\sin(\alpha + \pi) = a$.

34.1. Determine, em função de a , $\sin(2\pi - \alpha)$.

34.2. Determine os valores de α ($0 < \alpha < 2\pi$), quando $a = 0,5$.

34.3. Se o ângulo α estiver compreendido entre $\frac{3\pi}{2}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad, quem é maior: o seu seno ou o seu cosseno?

35. Recorrendo ao círculo trigonométrico, exprima, em função de $\sin b$ e $\cos b$, as expressões:

35.1. $\sin(b + \pi) + \sin(b + 2\pi) + \sin(b - \pi)$

35.2. $\cos(b + \pi) + \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(b - \pi) + \sin\left(b + \frac{3\pi}{2}\right)$

35.3. $\sin(-b - \pi) - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{2} - b\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + b\right)$

36. Demonstre a seguinte igualdade: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

37. Utilize a calculadora para encontrar o ângulo α em cada um dos seguintes casos (aproximação às centésimas):

37.1. $\sin \alpha = 0,87 \wedge 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

37.2. $\cos \alpha = -0,37 \wedge \sin \alpha > 0$

37.3. $\cos \alpha = 0,15 \wedge \sin \alpha < 0$

37.4. $\sin \alpha = -0,6 \wedge 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

37.5. $\sin \alpha = 0,48 \wedge \cos \alpha < 0$

37.6. $\operatorname{tg} \alpha = 2 \wedge 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

37.7. $\operatorname{tg} \alpha = -3,5 \wedge \sin \alpha > 0$

37.8. $\cos \alpha = -0,9 \wedge \operatorname{tg} \alpha > 0$

38. Resolva as equações trigonométricas:

38.1. $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

38.2. $2 \sin^2 x - 1 = 0$

38.3. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

38.4. $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$

39. Resolva as equações seguintes:

39.1. $2 \cos x = -\sqrt{3}$

39.2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

39.3. $6 \sin x = -3$

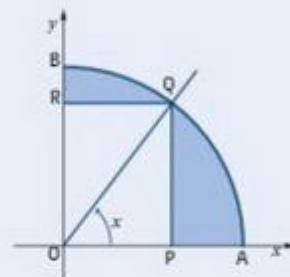
39.4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

39.5. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$

39.6. $1 - \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

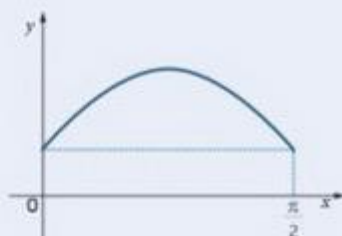
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 43.** Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , um arco de circunferência AB , de centro na origem do referencial e raio 1. O ponto Q move-se ao longo desse arco. Os pontos P e R , situados sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q , de tal forma que o segmento de reta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de reta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox . Para cada posição do ponto Q , seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja $h(x)$ a área da região sombreada.

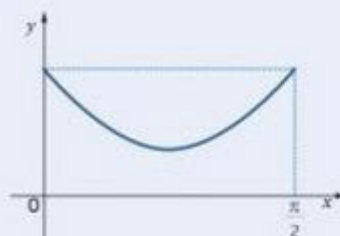


- 43.1.** Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ? Justifique, com argumentos geométricos, a sua resposta.

(A)



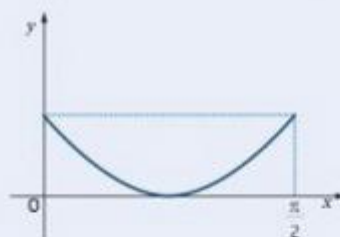
(B)



(C)



(D)



- 43.2.** Encontre a expressão que lhe dá a área sombreada em função de x e indique o valor dos extremos da função.

- 44.** Um candeeiro, colocado no teto na vertical, como mostra a figura, origina um cone de luz. Sabe-se que o candeeiro (o foco de luz) está colocado a 2 m de altura.

- 44.1.** Quando o ângulo de corte do cone é 70° , determine com aproximação às centésimas, a área iluminada.

- 44.2.** Mostre que a expressão que dá a área iluminada em função do ângulo de corte α , é

$$A(\alpha) = 4 \times \pi \times \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- 44.3. a)** Resolva, no contexto da situação, a condição $A(\alpha) = 9$ apresentando o resultado com aproximação às décimas.

- b)** Traduza a condição anterior em linguagem comum e que se enquadre no problema.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

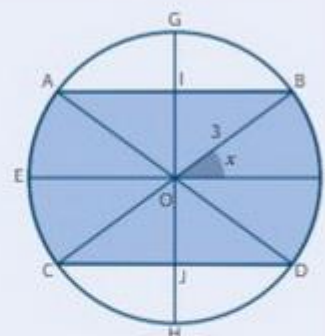
45. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e raio 3.

Os diâmetros [EF] e [GH] são perpendiculares.

Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.

Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:

- as cordas [AB] e [CD] permanecem paralelas a [EF];
- [AD] e [BC] são sempre diâmetros da circunferência.



Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de [GH] com [AB] e [CD], respectivamente.

Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB

$$(x \in [0, \frac{\pi}{2})).$$

- 45.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x , por $A(x) = 18(x + \sin x \cdot \cos x)$
Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

- 45.2. Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?

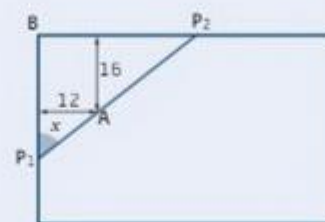
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

46. Na figura está representado um lago artificial de forma retangular.

Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2 , tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja x a amplitude do ângulo P_2P_1B .



- 46.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por $C(x) = \frac{16 \sin x + 12 \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$.

- 46.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

- 46.3. Determine o valor de x para o qual o comprimento da ponte é mínimo.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$ do qual se sabe que (em unidades de comprimento):

$$\overline{AB} = 8$$

$$\overline{BC} = 5$$



Determine o ângulo formado pelas diagonais do retângulo.

(Sugestão: comece por exprimir cada um dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$ como a soma de dois vetores.)

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Observando a figura, podemos escrever

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \text{ e } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

Recorrendo à definição de produto escalar e respetivas propriedades,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{DB}\| \cdot \cos \alpha = (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB}) \quad (1)$$

onde α , amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$, é o que pretendemos conhecer.

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 5^2 + 8^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$$

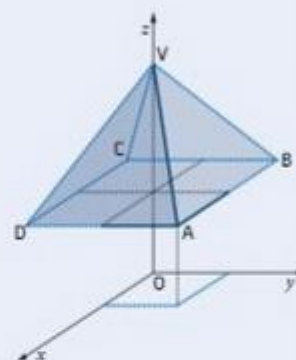
Como $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{DB}\|$, a igualdade (1) toma o aspeto seguinte

$$89 \cdot \cos \alpha = 0 + 5 \times 5 \times (-1) + 8 \times 8 + 0$$

Ou seja,

$$\cos \alpha = \frac{39}{89} \Leftrightarrow \alpha = 64^\circ$$

2. Considere o referencial o.n. (O, x, y, z) . A pirâmide quadrangular regular está assente sobre um plano paralelo a xOy , tem o vértice no eixo Oz e os planos xOz e yOz são planos mediadores das arestas da base (como ilustra a figura). Sabe-se, ainda, que $A(1, 1, 3)$ e que a altura da pirâmide é 5 unidades.



- 2.1. Caracterize, por uma condição, o plano em que a base da pirâmide está assente.
- 2.2. Identifique as coordenadas de todos os vértices da pirâmide.
- 2.3. Calcule a medida do comprimento da aresta lateral da pirâmide.
- 2.4. Calcule o volume da pirâmide.
- 2.5. Escreva as equações cartesianas da reta que contém a aresta $[AV]$.
- 2.6. Determine um vetor normal ao plano ABV e escreva uma equação desse plano.
- 2.7. Considere a esfera que tem por círculo máximo o círculo circunscrito à base da pirâmide e escreva uma condição que a defina.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 2.1. Os pontos do plano onde assenta a base da pirâmide têm todos a mesma cota que o ponto A. A equação que define este plano é $z = 3$.
- 2.2. O vértice B tem a mesma ordenada e a mesma cota que A e abcissa simétrica: B[-1, 1, 3].
O vértice C tem a mesma cota que A e abcissa e ordenada simétrica: C[-1, -1, 3].
O vértice D tem a mesma abcissa e a mesma cota que A e ordenada simétrica: D[1, -1, 3].
O vértice V pertence ao eixo Oz e tem cota $3 + 5 = 8$: V[0, 0, 8].
- 2.3. Pretende-se conhecer $\overrightarrow{AV}$, que é igual a $\|\overrightarrow{AV}\|$
 $\overrightarrow{AV} = [0, 0, 8] - [1, 1, 3] = [-1, -1, 5]$
 $\|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
- 2.4. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$
 Área da base = $\overline{AD}^2 = 2^2 = 4$
 $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 4 \times 5 = \frac{20}{3}$
- 2.5. A reta r, que contém a aresta [AV], passa pelo ponto A[1, 1, 3] e tem a direção de $\overrightarrow{AV} [-1, -1, 5]$.
 Então, as suas equações são: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{5}$ ou $1-x = 1-y = \frac{z-3}{5}$
- 2.6. Seja $\vec{n} [n_1, n_2, n_3]$ o vetor que procuramos. Se é normal a ABV então é perpendicular a todos os vetores do plano. Em particular, será perpendicular aos vetores $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$.
 $\overrightarrow{VA} = [1, 1, -5]$
 $\overrightarrow{VB} = [-1, 1, 3] - [0, 0, 8] = [-1, 1, -5]$
 Temos $\vec{n} \perp \overrightarrow{VA} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{VA} = 0 \Leftrightarrow [n_1, n_2, n_3] \cdot [1, 1, -5] = 0 \Leftrightarrow n_1 + n_2 - 5n_3 = 0$
 E, também, $\vec{n} \perp \overrightarrow{VB} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{VB} = 0 \Leftrightarrow [n_1, n_2, n_3] \cdot [-1, 1, -5] = 0 \Leftrightarrow -n_1 + n_2 - 5n_3 = 0$
 Pretendemos encontrar valores tais que

$$\begin{cases} n_1 + n_2 - 5n_3 = 0 \\ n_1 - n_2 + 5n_3 = 0 \end{cases}$$

 Pelo método da adição ordenada, obtemos

$$\begin{cases} n_1 + n_2 - 5n_3 = 0 \\ 2n_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_2 = 5n_3 \\ n_1 = 0 \end{cases}$$

 Fazendo $n_3 = 1$, por exemplo, obtém-se $\vec{n} [0, 5, 1]$
 Temos então AVB: $5y + z + d = 0$
 Como o ponto A[1, 1, 3] pertence ao plano, substituindo as coordenadas desse ponto na equação do plano, vem
 $5 \times 1 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$
 Ou seja, a equação do plano ABV é $5y + z - 8 = 0$
- 2.7. Se o círculo máximo é circunscrito à base da pirâmide, tal significa que o centro do círculo máximo é o centro da esfera, ou seja, é o ponto de interseção da base da pirâmide com o eixo Oz, ou seja, o ponto [0, 0, 3].

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

O raio do círculo máximo é o raio da esfera.

Assim, o raio será igual a $\frac{\overline{AC}}{2}$.

Ora

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

O raio da esfera é, então, igual a $\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

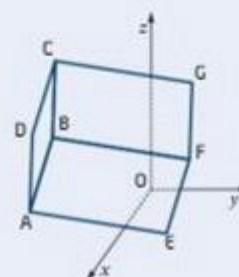
A condição que define a esfera é, pois,

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 2$$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(14, -7, 4)$
- O ponto B tem coordenadas $(16, -4, 10)$
- O ponto C tem coordenadas $(10, -6, 13)$
- O ponto E tem coordenadas $(8, 5, 0)$



- 3.1. Determine as coordenadas dos outros vértices do prisma.
- 3.2. Defina, por uma condição, a aresta $[AB]$.
- 3.3. Escreva a condição que define o lugar geométrico dos pontos P tais que é nulo o produto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC}$ e identifique-o em relação ao prisma.
- 3.4. Mostre que a secção produzida no prisma pelo plano ABG é um retângulo e determine a sua área.
- 3.5. Determine uma condição do lugar geométrico dos pontos equidistantes de C e de A e identifique-o.

Adaptado de "Séries de Problemas de Matemática A – 10.º Ano", GAVE

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 3.1. Começamos por calcular as coordenadas de D . Observando a figura e atendendo a que se trata de um prisma quadrangular regular temos:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{BA} = [10, -6, 13] + [(14, -7, 4) - (16, -4, 10)] = [8, -9, 7]$$

E, por raciocínio semelhante,

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{AE} = [16, -4, 10] + [(8, 5, 0) - (14, -7, 4)] = [10, 8, 6]$$

$$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{AE} = [10, -6, 13] + [(8, 5, 0) - (14, -7, 4)] = [4, 6, 9]$$

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{AE} = [8, -9, 7] + [(8, 5, 0) - (14, -7, 4)] = [2, 3, 3]$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.2. A aresta [AB] está contida na reta AB

Para determinar uma equação da reta, por exemplo uma equação vetorial, determinemos um seu vetor diretor

$$\overrightarrow{AB} = [16, -4, 10] - [14, -7, 4] = [2, 3, 6]$$

Então, o segmento [AB] é o conjunto dos pontos P tais que $P = A + k \overrightarrow{AB}$, com $k \in [0, 1]$

Ou seja

$$[x, y, z] = [14, -7, 4] + k [2, 3, 6], k \in [0, 1]$$

3.3. Sendo $P[x, y, z]$ vem

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \Leftrightarrow [(x, y, z) - (14, -7, 4)] \cdot [(4, 6, 9) - (x, y, z)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 14, y + 7, z - 4) \cdot (4 - x, 6 - y, 9 - z) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 56 - x^2 + 14x + 6y + 42 - y^2 - 7y - z^2 + 4z + 9z - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 18x - 56 - y^2 - y + 42 - z^2 + 13z - 36 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por (-1) e passando para o 2.º membro os termos independentes, temos

$$x^2 - 18x + y^2 - y + z^2 - 13z = -56 + 42 - 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + y^2 - y + z^2 - 13z = -50$$

Demos outra forma à equação de modo a obtermos uma equação do tipo

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - 5z + \frac{169}{4} = -50 + 81 + \frac{1}{4} + \frac{169}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - 9)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{147}{2}$$

O conjunto dos pontos P é a superfície esférica de centro no ponto médio da diagonal espacial [AC]

e raio $\sqrt{\frac{147}{2}}$

Notemos que o centro é o ponto de interseção das diagonais espaciais e, como elas se bisseitam, todos os vértices pertencem a essa superfície esférica.

Podemos, a título de exemplo, verificar isso para o ponto E(8, 5, 0).

Substituindo as coordenadas na equação temos

$$(8 - 9)^2 + \left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{147}{2}$$

$$1 + \frac{81}{4} + \frac{169}{4} = \frac{147}{2}$$

$$\frac{147}{2} = \frac{147}{2}$$

Da mesma forma se verificaria que os outros vértices também pertencem à superfície esférica.

3.4. A secção produzida pelo plano ABC é o quadrilátero [ABGH]

Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}$, o quadrilátero é um paralelogramo e, também, se $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, então os ângulos são retos.

$$\overrightarrow{AB} = [16, -4, 10] - [14, -7, 4] = [2, 3, 6] \text{ e } \overrightarrow{HG} = [4, 6, 9] - [2, 3, 3] = [2, 3, 6]$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

donde se conclui que o referido quadrilátero é um paralelogramo.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= [2, 3, 6] \cdot [(4, 6, 9) - (16, -4, 10)] = \\ &= [2, 3, 6] \cdot [-12, 10, -1] = -24 + 30 - 6 = \\ &= 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, o ângulo ABC é reto e, como os lados são paralelos dois a dois, todos os ângulos são retos. A secção é, portanto, um retângulo.

A área desse retângulo é igual a

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| &= \|[14, -7, 4] - [16, -4, 10]\| \times \|[4, 6, 9] - [16, -4, 10]\| = \\ &= \|[-2, -3, -6]\| \times \|[-12, 10, -1]\| = \\ &= \sqrt{4 + 9 + 36} \times \sqrt{144 + 100 + 1} = \\ &= 7 \times 7\sqrt{5} = \\ &= 49\sqrt{5}\end{aligned}$$

A área do retângulo é de $49\sqrt{5}$ u. a.

- 3.5. Trata-se do plano mediador do segmento $[CA]$ e, observando a figura, concluímos que é o plano DBF.

Determinemos uma sua equação.

O ponto médio do segmento $[CA]$ é $M\left(\frac{14+10}{2}, \frac{-7-6}{2}, \frac{4+13}{2}\right)$, ou seja, $M\left(12, -\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$.

Seja $P(x, y, z)$ o ponto genérico do plano, temos

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \iff \left(x - 12, y + \frac{13}{2}, z - \frac{17}{2}\right) \cdot (4, -1, -9) = 0$$

$$\iff 4x - y - 9z + 22 = 0 \quad \text{equação do plano DBF}$$

B e D são equidistantes de A e de C pois são todos vértices de uma das bases que são quadrados, portanto pertencem ao plano mediador de $[CA]$.

Verifiquemos, agora, que F pertence ao plano.

Substituindo as coordenadas de F na equação obtida,

$$4 \times 10 - 8 - 9 \times 6 + 22 = 0 \iff 0 = 0$$

Concluindo:

O plano pedido é plano mediador do segmento $[CA]$ e é o plano DBF, de equação

$$4x - y - 9z + 22 = 0.$$

4. Para angariarem fundos para a Associação de Estudantes, os alunos conseguiram a oferta de 20 pares de chuteiras e 60 camisolas e decidiram fazer com elas dois tipos de lotes para venda:

Tipo A: um par de chuteiras e uma camisola.

Tipo B: um par de chuteiras e cinco camisolas.

Decidiram também que venderiam os lotes do tipo A a 40 € e os do tipo B, a 60 €.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

Qual deverá ser o número de lotes do tipo A e o número de lotes do tipo B a constituir para que o lucro obtido nas vendas seja máximo?

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Sejam

$x \rightarrow$ o número de lotes do tipo A

$y \rightarrow$ o número de lotes do tipo B

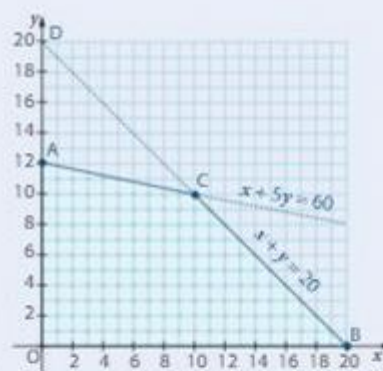
Organizemos os dados numa tabela

	N.º lotes	N.º pares de chuteiras	N.º camisolas	Lucro (L)
Tipo A	x	x	x	$40x$
Tipo B	y	y	$5y$	$60y$
Total		$x + y$	$x + 5y$	$40x + 60y$

As restrições a impor são as seguintes

- $x \in \mathbb{N}_0$ e $y \in \mathbb{N}_0$
- $x + y \leq 20$ (o número total de chuteiras não pode ser superior a 20)
- $x + 5y \leq 60$ (o número total de camisolas não pode ser superior a 60)

Obtém-se, assim, a seguinte região de validade:



Pretende-se neste caso maximizar a função objetivo:

$$L = 40x + 60y \text{ (Lucro)}$$

Atribuindo a L diversos valores (por exemplo, 360 e 700), representemos as retas correspondentes.

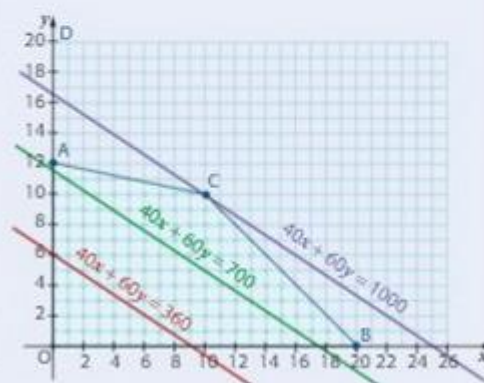
Todas as retas da família são paralelas e o valor de L cresce quando a reta que representa a função objetivo se desloca paralelamente a si própria, da esquerda para a direita.

Verificamos que a solução ótima se obtém quando a reta que representa a função objetivo passa no ponto C, cujas coordenadas poderemos determinar pela interseção das retas $x + y = 20$ e $x + 5y = 60$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 20 - y + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$$

Conclui-se, assim, que se forem vendidos 10 lotes do tipo A e 10 lotes do tipo B, o lucro será máximo e de 1000 €.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões 1 a 17 são de "escolha múltipla". Deve responder indicando apenas a letra correspondente à opção que considera certa [assegure-se, no entanto, de que saberia justificar a sua escolha caso tal lhe fosse solicitado].

1. Num referencial o.n. (O, x, y, z) , considere um ponto P pertencente ao semieixo positivo $\hat{O}z$ e um ponto Q pertencente ao semieixo positivo $\hat{O}x$.

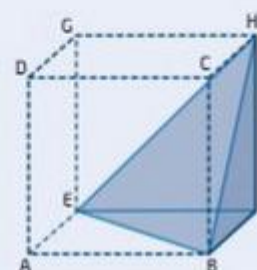
Quais poderão ser as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PQ}$?

- (A) $(-1, 0, 1)$ (B) $(0, -1, 1)$
(C) $(1, 0, -1)$ (D) $(1, -1, 0)$

2. Na figura está representado um cubo de aresta 4, em que os pontos E, F, B e H são vértices de uma pirâmide triangular.

O valor do produto escalar $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HB}$ é

- (A) $16\sqrt{2}$ (B) 16
(C) $8\sqrt{2}$ (D) 8



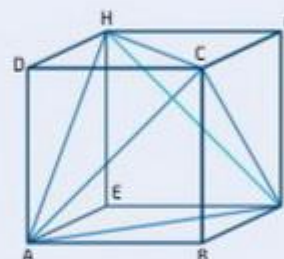
3. De dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ sabe-se que têm ambos norma igual a 3 e que $\vec{p} \cdot \vec{q} = -9$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- (A) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$ (B) $\vec{p} - \vec{q} = \vec{0}$
(C) $\vec{p} \perp \vec{q}$ (D) O ângulo dos vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é agudo.

4. Na figura, está representado um cubo e, dentro dele, um tetraedro.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (B) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$
(C) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ (D) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$

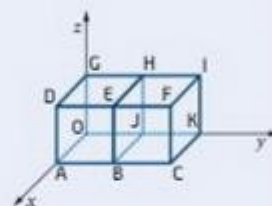


5. Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, de norma k e sentidos opostos, é possível concluir que:

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = k^2$ (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -k^2$
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 2k$ (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

6. Considere o referencial ortonormado no espaço e os pontos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$, $F(1, 2, 1)$, $G(0, 0, 1)$, $H(0, 1, 1)$, $I(0, 2, 1)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 2, 0)$ indicados na figura ao lado:



- 6.1. O produto escalar $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$ é igual a
 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2
- 6.2. O ângulo formado pelas retas HA e HC é aproximadamente igual a
 (A) 60° (B) 71° (C) 45° (D) 70°
- 6.3. Uma equação cartesiana do plano GBK é
 (A) $2x + 2y - z - 2 = 0$ (B) $x + y - 3 = 0$ (C) $x + y + 2z = 2$ (D) $x + y + 2z = 0$

7. Na figura está representado um prisma triangular reto num referencial o.n. $Oxyz$, sendo FE a reta suporte de uma das arestas.

- o ponto F pertence ao plano xOz ;
- o ponto E pertence ao plano xOy .

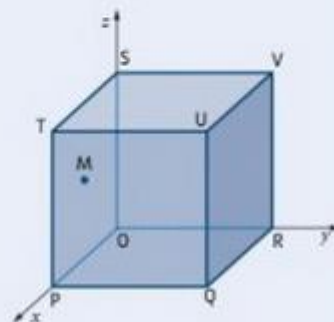
A reta FE é definida por

- (A) $[x, y, z] = [4, 0, 5] + k[0, 6, -5]$, $k \in \mathbb{R}$
 (B) $x = 4 \wedge y = 6 \wedge z = 5$
 (C) $4x + 6y + 5z = 0$
 (D) $[x, y, z] = [0, 6, -5] + k[4, 0, 5]$, $k \in \mathbb{R}$
8. Num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto de interseção da reta $s: \frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z-2}{3}$ com o plano yOz tem coordenadas
 (A) $[-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, 0]$ (B) $[-5, 0, -7]$
 (C) $[0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ (D) $[0, 4, 3]$
9. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo de vértices O, P, Q, R, S, T, U e V.

- O ponto M é o centro da face do cubo a que pertence.
- Uma equação do plano QVM é $x + z = 2$.

A medida da aresta do cubo é

- (A) 2 (B) $2\sqrt{2}$
 (C) 1 (D) $\sqrt{2}$



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

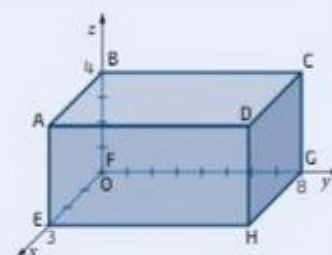
10. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo.

Seja r a reta dada pela equação

$$[x, y, z] = [3, 8, 4] + k[0, 1, 0], k \in \mathbb{R}$$

O ponto de interseção de r com o plano ABH é:

- (A) H (B) C (C) A (D) B



11. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos $\alpha: z = 3$ e $\beta: y = -1$.
Seja r a reta de interseção dos dois planos. Então, uma equação vetorial da reta r é

- (A) $[x, y, z] = [0, -1, 3] + k[1, 0, 0], k \in \mathbb{R}$
 (B) $[x, y, z] = [1, -1, 3] + k[0, -1, 3], k \in \mathbb{R}$
 (C) $[x, y, z] = [1, 0, 0] + k[0, -1, 3], k \in \mathbb{R}$
 (D) $[x, y, z] = [1, 1, 0] + k[1, 0, 0], k \in \mathbb{R}$

12. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, dois planos concorrentes de equações

$$2x - 3y + z = 5 \quad \text{e} \quad 3x - 2y + z = 5$$

Um ponto pertencente à interseção dos dois planos é:

- (A) $[2, 1, 1]$ (B) $[0, -2, 1]$ (C) $[1, -1, 0]$ (D) $[2, 0, 0]$

13. Considere, relativamente a um referencial o.n. $Oxyz$:

- um plano α , definido pelas equações $3x - z = 2$;
- uma reta r , definida pelas equações $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;
- um ponto P , de coordenadas $[0, 2, 3]$.

- (A) P pertence a α (B) P pertence a r
 (C) r é paralela a α (D) r é perpendicular a α

14. Qual dos pares de equações seguintes define, num referencial o.n. $Oxyz$, um par de planos perpendiculares?

- (A) $x + y = 3$ e $x + y = 0$
 (B) $-x + y - z = 1$ e $3x + 2y + 2z = 2$
 (C) $x = y$ e $z = 0$
 (D) $2x + 2y + z = 9$ e $x - 3z = 0$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

15. Determine o valor real de k que torna coincidentes as duas retas r e s , definidas num referencial o.n. $Oxyz$, pelas condições

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = z-4 \quad \text{e} \quad s: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-k}{3} = z-1$$

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) -7

16. Num referencial o.n. $Oxyz$, estão definidos os planos α e β de equações

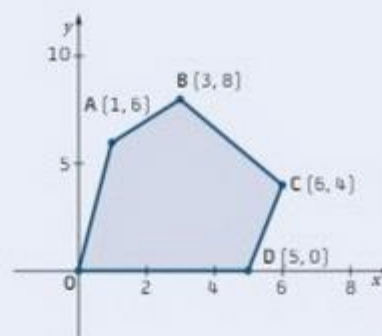
$$\alpha: 2x - y + 4z - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \beta: x - 2y = 6$$

Qual a posição relativa dos dois planos?

- (A) Perpendiculares (B) Concorrentes não perpendiculares
(C) Coincidentes (D) Estritamente paralelos

17. Num dado problema de programação linear a função objetivo lucro é dada por $L = 30x + 45y$, em milhares de euros.

A região admissível é o polígono $[OABCD]$ da figura:



- 17.1. O sistema de restrições é:

- (A) $\begin{cases} y \leq 6x \\ y \leq x+5 \\ 4x+3y \leq 36 \\ y \geq 4x-20 \\ y \leq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y \geq 6x \\ y \leq x+5 \\ 4x+3y \leq 36 \\ y \geq 4x-20 \\ y \geq 0 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} y \geq 6x \\ y \leq x-5 \\ 4x+3y \leq 36 \\ y \geq 4x-20 \\ y = 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y \geq 6x \\ y \leq x+5 \\ y \geq \frac{4}{3}x+12 \\ y \geq 4x-20 \\ y \geq 0 \end{cases}$

- 17.2. O lucro em B é de:

- (A) 375 milhares de euros. (B) 450 euros.
(C) 75 milhares de euros. (D) 450 000 euros.

- 17.3. A solução ótima é representada pelo:

- (A) ponto A (B) ponto B (C) ponto C (D) ponto D

- 17.4. Se a solução ótima correspondesse ao ponto C, a função lucro L podia ser:

- (A) $L = 15x + 40y$ (B) $L = 40x + 15y$ (C) $L = x - 3y$ (D) $L = 80y$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

17.5. Um ponto representa uma solução admissível se:

- (A) a abscissa for maior que 5.
- (B) a ordenada for maior que zero e menor que 6.
- (C) a abscissa for menor que 5 e a ordenada menor que 8.
- (D) a abscissa tomar valores entre 1 e 5 e a ordenada for inferior a 6.

As questões que se seguem são de resposta "aberta". Leia atentamente os enunciados e efetue as resoluções completas, explicando os raciocínios apresentando os cálculos.

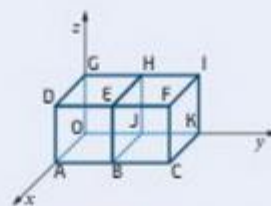
18. Determine o produto escalar e o ângulo formado pelos seguintes pares de vetores.

18.1. $\vec{u}(2, -3)$ e $\vec{v}(5, 4)$

18.2. $\vec{u}(-2, 1)$ e $\vec{v}(3, 4)$

18.3. $\vec{u}(2, 2)$ e $\vec{v}(-5, 0)$

19. Dado o referencial ortonormado no espaço e os pontos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$, $F(1, 2, 1)$, $G(0, 0, 1)$, $H(0, 1, 1)$, $I(0, 2, 1)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 2, 0)$ indicados na figura, calcule:



19.1. $\vec{HD} \cdot \vec{AE}$

19.2. $\vec{HD} \cdot \vec{FB}$

19.3. $\vec{FC} \cdot \vec{BG}$

19.4. $\vec{GE} \cdot \vec{BI}$

20. Sabe-se de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que $\|\vec{u}\| = 3$ e que $\vec{u} = -2\vec{v}$. Determine o valor de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

21. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores:

21.1. $\vec{a}(2, -3)$ e $\vec{b}(k, 1)$ sejam perpendiculares.

21.2. $\vec{a}(-5, k)$ e $\vec{b}(2, 5)$ sejam perpendiculares.

21.3. $\vec{a}(k, 1)$ e $\vec{b}(2, 3)$ tenham produto escalar igual a 9.

22.

22.1. Determine um vetor perpendicular a $\vec{u}(5, 3)$.

22.2. Determine todos os vetores perpendiculares a $\vec{v}(3, -4)$, de norma igual a 10.

22.3. Determine todos os vetores perpendiculares a cada um dos seguintes vetores, de norma igual a ele:

$\vec{a}(2, -2)$

$\vec{b}(7, 3)$

$\vec{c}(11, -4)$

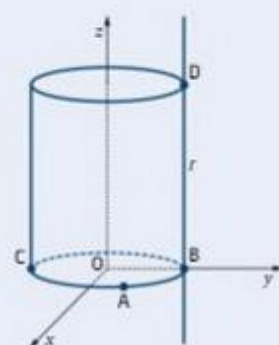
$\vec{d}(-1, -3)$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

23. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores colineares tais que $\vec{u} + \vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u} - \vec{v}$, justifique que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma norma.
24. Recorrendo ao produto escalar de dois vetores, mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares.

25. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o representado na figura.

- A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy .
- $[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy . O ponto C tem coordenadas $(0, -5, 0)$.
- O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4, 3, 0)$.
- A reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz .
- O ponto D pertence à reta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

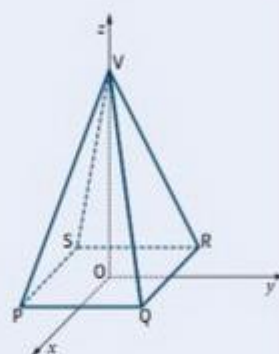


- 25.1. Justifique que a reta AC é perpendicular à reta AB .
- 25.2. Escreva uma equação vetorial da reta r .
- 25.3. Justifique que $\vec{AC}$ é um vetor perpendicular ao plano ABD . Determine uma equação deste plano.
- 25.4. Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD , mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\pi \operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

GAVE

26. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura).

- O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz .
- A base da pirâmide está contida no plano xOy .
- A aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oy .
- O ponto Q tem coordenadas $(2, 2, 0)$.



- 26.1. Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que a cota do vértice V é igual a 6.
- 26.2. Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$.
- 26.3. Determine uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

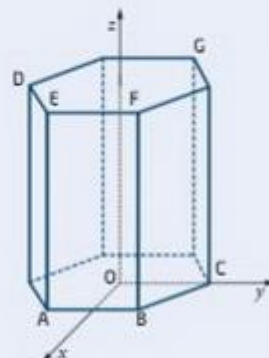
- 26.4. Justifique que a interseção da aresta [QV] com o plano de equação $z = 3$ é o ponto M (1, 1, 3) e determine a área da secção produzida na pirâmide por esse plano.

GAVE

27. Uma embalagem de pastilhas tem a forma de um prisma hexagonal regular. Considere o prisma hexagonal representado no referencial o.n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C pertencem à base inferior do prisma, a qual está contida no plano xOy e tem por centro a origem do referencial;
- Os pontos D, E, F e G pertencem à base superior do prisma, a qual está contida no plano de equação $z = 12$;
- O ponto C tem coordenadas $(0, 4, 0)$.



- 27.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(\sqrt{12}, 2, 0)$ e aproveite este resultado para justificar que G tem coordenadas $(-\sqrt{12}, 2, 12)$.
- 27.2. Mostre que a reta DG pode ser definida pela condição $\sqrt{3}x + y = -4 \wedge z = 12$.
- 27.3. Determine a interseção da reta DG com o plano que contém a face [ABFE] do prisma.
- 27.4. Considere agora que a unidade do referencial é um centímetro (1 cm). Sabendo que, quando a caixa foi comprada, tinha doze pastilhas, cada uma das quais com um volume de 30 cm^3 , determine, com aproximação às unidades, a percentagem do volume da caixa que, no momento da compra, se encontrava vazio.

28. Identifique, em cada caso, o lugar geométrico definido pelas condições:

28.1.
$$\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

28.2.
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 3 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

29. Estude, em função dos valores de $k \in \mathbb{R}$, a posição relativa dos planos α , β e γ , de equações

respetivamente
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 2 = 0 \\ x + ky + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

30. Dado o plano α de equação $3x - 2y + 2z - 5 = 0$, determine a equação do plano paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A(1, 0, -1).

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

31. Dados os planos α e β de equações respectivamente $2x - y + 3z - 5 = 0$ e $x + y - 2z + 4 = 0$, determine a equação do plano que passa pela origem e contém a reta r de interseção dos planos α e β .
32. Dada a reta r de equações $\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z+3}{3}$ e o plano de equação $3x - 2y + 2z - 3 = 0$, determine o ponto de interseção da reta com o plano.
33. Escreva equações da reta que passa pelo ponto $A(1, 2, -1)$ e é paralela à reta de equações $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.
Escreva, ainda, a equação do plano que contém a reta e o ponto dados.
34. Escreva a equação do plano que contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u}(2, -1, -2)$ e à reta de equações $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z+1$.
35. Determine um vetor diretor da reta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$.
36. Determine o ângulo das retas r e s de equações $r: \frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z}{-3}$ e $s: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$.
37. Averigue, em cada caso, se as retas r e s são ou não coplanares. Em caso afirmativo, determine a equação do plano que as contém.
- 37.1. $r: \frac{x-1}{-2} = y-2 = 3-z$ e $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{3}$
- 37.2. $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = -z-1$ e $s: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = z$
38. Determine o ponto de interseção da reta r de equações $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ e do plano de equação $x + 2y - 3z + 2 = 0$.
Determine de seguida a distância deste ponto à origem.
39. Mostre que $A(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido por $B(-1, 0, 1)$, $C(2, -1, -1)$ e $D(2, 1, 0)$, sem determinar a equação desse plano.
40. Dada a reta r de equações $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$ e o ponto $A(1, 1, 1)$, escreva as equações da reta s , que contém o ponto A e é paralela à reta r .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

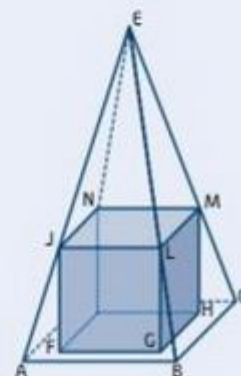
41. Dadas as retas r e s de equações respectivamente $r: \begin{cases} x = 2y + 2 \\ z = y \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 2k \end{cases}$, determinar a equação do plano α que passa na origem e é paralelo às retas r e s dadas.

42. Na figura estão representados uma pirâmide quadrangular regular e um cubo de aresta 4, num referencial o.n. $\{O, x, y, z\}$ sendo O o centro da base da pirâmide. O vértice E pertence a $\hat{O}z$ e os semieixos $\hat{O}x$ e $\hat{O}y$ passam nos pontos médios das arestas $[AB]$ e $[BC]$ respectivamente. Uma das faces do cubo está contida na base da pirâmide e cada um dos vértices da face oposta pertence a uma aresta da pirâmide de modo que

$$\overline{EL} = \frac{2}{3} \overline{EB}$$

- 42.1. Determine:
- as coordenadas dos vértices do cubo e da pirâmide.
 - as equações cartesianas da reta BE .
 - a equação do plano ABE .
 - a equação vetorial da reta interseção dos planos LME e JNE .

- 42.2. Relacione o volume do cubo com o volume da pirâmide.

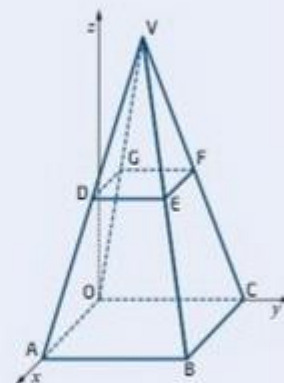


Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10.º Ano, GAVE

43. Na figura está representada, num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[VOABC]$ cujos vértices A e B pertencem aos eixos coordenados Ox e Oy , respectivamente.

Sabe-se que:

- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 16z = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto V e que contém os quatro vértices da base da pirâmide $[VOABC]$.
- o quadrado $[DEFG]$ é a secção produzida na pirâmide $[VOABC]$ por um plano paralelo ao plano xOy .
- o volume da pirâmide $[VDEFG]$ é a oitava parte do volume da pirâmide $[VOABC]$.



- 43.1. Calcule o volume da pirâmide $[VOABC]$.
- 43.2. Determine as coordenadas dos vértices da base da pirâmide $[VDEFG]$.
- 43.3. Considere a esfera que tem um diâmetro contido na altura da pirâmide e que é tangente quer à base da pirâmide $[VDEFG]$, quer à base da pirâmide $[VOABC]$. Escreva uma condição que defina essa esfera.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

44.6. Sejam M, N e Q os pontos médios das arestas do cubo [BF], [CG] e [EF]. Escreva a equação cartesiana do plano MNQ e determine a área da secção determinada no cubo por este plano.

44.7. Escreva a equação do plano paralelo a MNQ que contém A.

44.8. Escreva uma equação de uma reta paralela ao plano MNQ que passa em B.

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10º Ano, GAVE

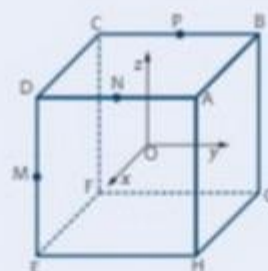
45. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo [ABCDEFGH].

Sabe-se que:

- o centro do cubo coincide com a origem do referencial;
- as arestas do cubo são paralelas aos eixos coordenados;
- os pontos M, N e P são os pontos médios das arestas a que pertencem.
- o ponto E tem coordenadas $(1, 1, 1)$.

Considere o vetor $\vec{u}$ e os pontos X, Y e Z tais que:

- $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{BP}$
- $X = A + \vec{CG}$
- $Y = X + \frac{1}{2} \vec{XF}$
- $Z = X + (\vec{u} + \vec{AC})$



45.1. Represente os pontos X, Y e Z (por construção geométrica, sem recorrer a coordenadas).

45.2. Defina, por uma condição, o lugar geométrico dos pontos W para os quais o ponto X pertence ao plano mediador do segmento [BW].

Identifique esse lugar geométrico, no contexto do problema.

45.3. A reta definida pela equação $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(0, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ intersesta a reta XD.

Determine as coordenadas do ponto de interseção.

45.4. A secção produzida no cubo pelo plano definido pelos pontos E, Y e Z divide o cubo em dois sólidos.

Determine o volume do sólido que contém o ponto G.

45.5. Escreva a equação cartesiana do plano CAM.

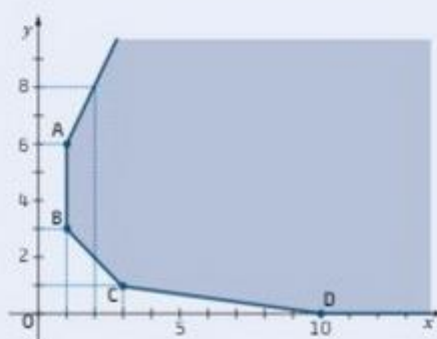
45.6. Escreva as equações cartesianas da reta perpendicular ao plano CAM que passa por D.

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10º Ano, GAVE

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 46.** Para florir um parque, são precisos, pelo menos, 1200 jacintos, 3200 tulipas e 3000 narcisos.
- Um viveiro oferece um lote A, composto por 30 jacintos, 40 tulipas e 30 narcisos por 75 €; outro viveiro oferece um lote B, composto por 10 jacintos, 40 tulipas e 50 narcisos, por 60 €. Quantos lotes de cada tipo devem comprar-se para obter a despesa mínima?

- 47.** Para resolver um problema de programação linear onde se pretende minimizar uma determinada função objetivo C , uma aluna do 11.º Ano representou a região admissível da figura:



- 47.1.** O ponto P de coordenadas $(5, 3)$ é ou não admissível?
- 47.2.** Escreva condições que definam as restrições das quais resulta o vértice A .
- 47.3.** Se a função objetivo fosse $C = 3y + 8x$, qual seria a solução ótima?
- 47.4.** Se a solução ótima fosse o ponto $C(3, 1)$, indique uma função que pudesse ser função objetivo do problema.
- 48.** Um talho dispõe de 60 kg de carne de 1.ª qualidade, 21 kg de 2.ª qualidade e 24 kg de 3.ª qualidade. A partir destas carnes pretende produzir almôndegas e carne picada usando, por quilograma, pelo menos, as seguintes percentagens:

	Carne picada	Almôndegas	Disponíveis
Carne de 1.ª	30%	80%	60 kg
Carne de 2.ª	30%	10%	21 kg
Carne de 3.ª	30%	20%	24 kg

Sabendo que cada quilograma de almôndegas vai ser vendido com um lucro de 3 € e cada quilograma de carne picada com lucro de 1,5 €, que quantidade de cada produto deve ser produzida para que se obtenha lucro máximo?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{5x - 4}{10 - x}$
- 1.1. Determine o domínio da função f .
- 1.2. Escreva a expressão analítica de f na forma $f(x) = b + \frac{k}{x - \alpha}$ e indique a equação da assíntota horizontal do gráfico da função.
- 1.3. Estude o sinal da função f .

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 1.1. O domínio de f é
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 10 - x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{10\}$
- 1.2. Procedendo à divisão do polinómio numerador pelo polinómio denominador

$$\begin{array}{r} 5x - 4 \quad | \quad -x + 10 \\ -5x + 50 \\ \hline 46 \end{array}$$

Conclui-se que $f(x) = -5 + \frac{46}{10 - x}$ e que, portanto, a reta de equação $y = -5$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

- 1.3. Façamos o estudo, recorrendo a um quadro de variação de sinal:

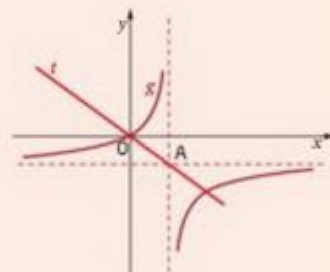
x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$		10	$+\infty$
Sinal de $5x - 4$	-	0	+		+
Sinal de $-x + 10$	+		+	0	-
Sinal de $f(x)$	-	0	+	n.d.	-

Podemos, então, concluir que

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{4}{5}\right[\cup]10, +\infty[$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{5}, 10\right[$$

2. Considere a função racional g definida por $g(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$ e a reta r , representadas graficamente. O ponto $A(3, -2)$ pertence à reta r que intersesta o gráfico da função na origem do referencial. O ponto A é a interseção das duas assíntotas do gráfico da função g .



- 2.1. Mostre que $\alpha = 3$ e $\beta = -2$.
- 2.2. Determine o valor de k e apresente a definição da função g .

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 2.1. O número 3 é zero do denominador da fração e, portanto, não pertence ao domínio de g . Observando a figura, verificamos que o gráfico tem uma assíntota vertical de equação $x = 3$. Conclui-se, assim, que $\alpha = 3$.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

β é o valor para que tende a função quando a fração $\frac{k}{x-a}$ tende para 0, ou seja, quando $x \rightarrow +\infty$. Então, $\beta = -2$, o que é também confirmado pelo facto de a reta de equação $y = -2$ ser assintota horizontal do gráfico de g .

- 2.2. Como o ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função e atendendo aos valores de α e β já conhecidos, podemos escrever

$$-2 + \frac{k}{0-3} = 0$$

ou seja,

$$\frac{k}{-3} = 2 \Leftrightarrow k = -6$$

Então, é

$$g: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = -2 - \frac{6}{x-3}$$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objeto, é dado por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

- 3.1. Determine, analiticamente, a que distância do objeto tem que estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.
- 3.2. A lupa pode ser usada a um metro de distância do objeto? Porquê? Indique a que distâncias do objeto podemos usar a lupa para obtermos ampliação.
- 3.3. Resolva, por processo analítico, a inequação $A(d) \geq 10$ e interprete o significado desta condição e da solução encontrada, no contexto do problema.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 3.1. A condição imposta é $\frac{5}{5-d} = 5$

Resolvendo a equação em ordem a d , vem

$$\frac{5}{5-d} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 25 + 5d}{5-d} = 0$$

$$\Leftrightarrow -20 + 5d = 0 \wedge 5 - d \neq 0 \Leftrightarrow d = 4 \wedge d \neq 5$$

Se a lupa estiver colocada a 4 dm do objeto, o coeficiente de ampliação será igual a 5.

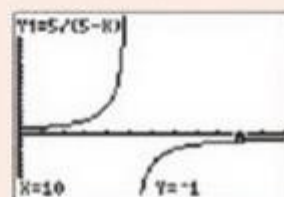
- 3.2. Como $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, substituindo na expressão de $A(d)$ teremos

$$A(10) = \frac{5}{5-10} = -1$$

Ou seja, para $d = 10$ obter-se-ia um coeficiente de ampliação negativo, o que é absurdo.

Recorrendo à calculadora, podemos visualizar o comportamento da função e observar o que se passa quanto ao seu domínio.

Atendendo ao contexto do problema, fica claro que o domínio da função é $[0, 5[$.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

$$3.3. \frac{5}{5-d} \geq 10 \Leftrightarrow \frac{5}{5-d} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-45+10d}{5-d} \geq 0$$

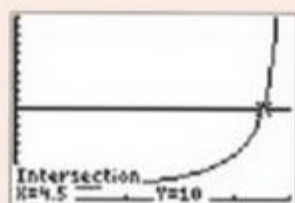
$$-45+10d=0 \Leftrightarrow d=4,5$$

$$5-d=0 \Leftrightarrow d=5$$

d	0		4,5		5
$-45+10d$		-	0	+	
$5-d$		+		+	0
$\frac{-45+10d}{5-d}$		-	0	+	n.d.

O coeficiente de ampliação é maior ou igual a 10 quando a distância entre a lupa e o objeto se situa no intervalo $[4,5; 5]$, em dm.

Este resultado pode ser visualizado na calculadora:



4. Considere as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$$f(x) = -\frac{x^2-1}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x-4} + x - 2}{x-4}$$

4.1. Indique o domínio de cada uma das funções.

4.2. Determine o menor número inteiro que verifica a condição $f(x) \leq x+1$.

4.3. Caracterize a função $\frac{f}{g}$.

4.4. Caracterize a função $g \circ f$.

4.5. Calcule os zeros da função h .

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

$$4.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-4 \neq 0 \wedge 2x-4 \geq 0\} = [2, +\infty[- \{4\}$$

$$4.2. -\frac{x^2-1}{x+2} \leq x+1 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1-(x+1)(x+2)}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+1-x^2-3x-2}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-3x-1}{x+2} \leq 0$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

Como $-2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$, fazendo o quadro de sinal, obtemos:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 - 3x - 1$		-		-	0	+	0	-	
$x + 2$		-	0	+		+		+	
$\frac{-2x^2 - 3x - 1}{x + 2}$		+	nd	-	0	+	0	-	

O menor inteiro que verifica a condição $f(x) \leq x + 1$ é, portanto, -1 .

$$4.3. D_f = (D_f \cap D_g) - \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 0\}$$

$$4.4. D_{g \circ f} = D_g \cap D_f \cap \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = (\mathbb{R} - \{-2, 0\}) \cap \{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \frac{-\frac{x^2 - 1}{x + 2} + 1}{-\frac{x^2 - 1}{x + 2}} = \frac{-x^2 + 1 + x + 2}{-x^2 + 1} = \frac{-x^2 + x + 3}{-x^2 + 1}, \text{ com } x \neq -2$$

$$4.5. h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x - 4} + x - 2}{x - 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 4} + x - 2 = 0 \wedge x - 4 \neq 0$$

Resolvamos a equação com radical:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 4} + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x - 4} = -x + 2 \\ &\Rightarrow [\sqrt{2x - 4}]^2 = [-x + 2]^2 \\ &\Leftrightarrow 2x - 4 = x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Verificação:

$$\sqrt{2 \times 4 - 4} + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 - 2 = 0 \text{ Falsa. } 4 \text{ é solução estranha.}$$

$$\sqrt{2 \times 2 - 4} + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ Verdadeira. } 2 \text{ é solução da equação e é o único zero da função } h.$$

5. Defina, caso exista, a função inversa da função f , real de variável real, definida por:

$$5.1. f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$5.2. f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$5.3. f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

5.1. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ e f é injetiva, logo admite inversa.

Procuramos a expressão analítica de f^{-1} :

$$y = \frac{x + 3}{x - 2} \Leftrightarrow yx - 2y = x + 3 \Leftrightarrow (y - 1)x = 2y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{2y + 3}{y - 1} \rightarrow y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

$$\text{Temos, então, } f^{-1}(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} \text{ e } D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\}$$

(note que, como $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f , o contradomínio de f é $\mathbb{R} - \{1\}$)

5.2. A função quadrática definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ não é injetiva pelo que não admite função inversa.

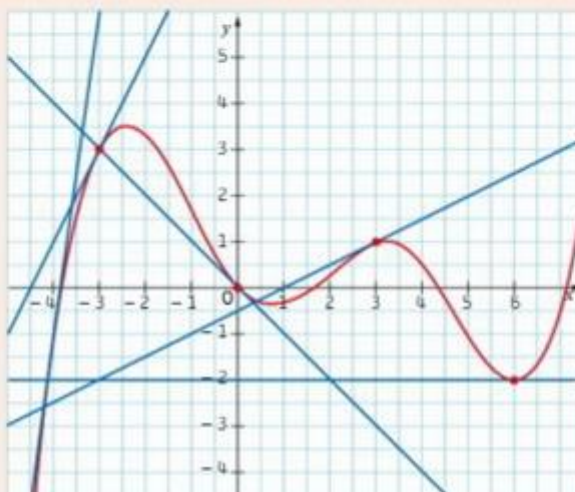
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

5.3. $D_f = \mathbb{R}$ e f , função raiz cúbica, é invertível.

$$y = \sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow y^3 = x-1 \Leftrightarrow x = y^3 + 1 \rightarrow y = x^3 + 1$$

Logo, $f^{-1}[x] = x^3 + 1$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

6. Observe a figura onde está uma representação de uma função f e algumas retas tangentes em determinados pontos.



6.1. Indique:

$$f(-4) \text{ e } f'(-4)$$

$$f(-3) \text{ e } f'(-3)$$

$$f(0) \text{ e } f'(0)$$

$$f(3) \text{ e } f'(3)$$

$$f(6) \text{ e } f'(6)$$

6.2. Escreva a equação reduzida de cada uma das retas tangentes ao gráfico nos pontos de abscissa 0, abscissa 3 e abscissa 6.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

6.1. Observando o gráfico, podemos dizer que:

$$f(-4) = -1, f(-3) = 3, f(0) = 0, f(3) = 1 \text{ e } f(6) = -2.$$

O valor da derivada nos pontos de abscissa pedidos será dado, em cada caso, pelo declive da reta tangente representada na figura.

Recordemos que o declive é dado por $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, sendo A e B dois pontos quaisquer da reta.

Assim

$$f'(-4) = 7, f'(-3) = 2, f'(0) = -1, f'(3) = \frac{1}{2} \text{ e } f'(6) = 0.$$

6.2. A equação da reta tangente no ponto de abscissa 0 é $y = -x$, no ponto de abscissa 3, obtemos

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ e no ponto de abscissa 6, a reta tem equação } y = -2.$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

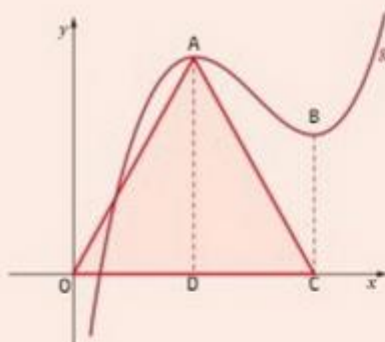
7. Considere:

- a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \frac{6}{x}$
- a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 8x - 3$

Resolva os itens 7.1., 7.2. e 7.3., usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

- 7.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \leq 5$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.
- 7.2. Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abscissa igual a 2. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto P . Determine a equação reduzida da reta r .
- 7.3. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g .



Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g , sendo as suas ordenadas, respetivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função.

Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox .

A abscissa do ponto C é igual à do ponto B e a abscissa do ponto D é igual à do ponto A .

Determine a área do triângulo $[OAC]$.

- 7.4. A equação $f(x) = g(x)$ tem exatamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa.

Determine a solução positiva, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente essa solução arredondada às centésimas.

Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

7. PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

$$7.1. \quad 3 + \frac{6}{x} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+6-5x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x} \leq 0$$

fazendo o quadro de sinal obtemos:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-2x+6$		+		+	0	-	
$\frac{-2x+6}{x}$		-	0	+		+	
$\frac{-2x+6}{x}$		-	n.d.	+	0	-	

São soluções os números reais da reunião de intervalos $]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$

7.2. O ponto de abscissa 2 tem ordenada $f(2)$, isto é, $P(2, f(2))$ ou $P(2, 6)$.

Para escrevermos a equação reduzida da reta tangente, temos de determinar $f'(2)$ já que este é o declive da reta procurada.

Então, determinemos a taxa média de variação da função f no intervalo $[2, 2+h]$.

Vem

$$\text{tmv}_{[2, 2+h]} = \frac{3 + \frac{6}{2+h} - 6}{h} = \frac{\frac{6}{2+h} - 3}{h} = \frac{6 - 6 - 3h}{h(2+h)} = \frac{-3h}{h(2+h)} = \frac{-3}{2+h}$$

Se h tende para zero a taxa média de variação calculada tende para a taxa de variação instantânea no ponto $x=2$, isto é, para $f'(2)$.

Obtemos, então, $f'(2) = \frac{-3}{2}$ e a equação da reta tangente é $y = \frac{-3}{2}x + b$.

Como $P(2, 6)$ é ponto da reta, vem $6 = \frac{-3}{2} \times 2 + b$, logo, $b = 9$ e a equação da reta é $y = \frac{-3}{2}x + 9$

7.3. Para determinarmos o valor do máximo e do mínimo da função g teremos de estudar o sinal de $g'(x)$.

$g'(x) = x^2 - 6x + 8$ e tem zeros $x=2$ e $x=4$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		+	0	-	0	+	

A função g é monótona crescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e em $[4, +\infty[$ e monótona decrescente em $[2, 4]$.

Tem máximo igual a $g(2)$, isto é, $\text{Max} = \frac{11}{3}$ e mínimo igual a $g(4)$, isto é, $\text{mín} = \frac{7}{3}$

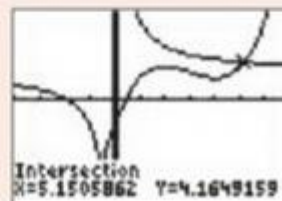
os valores $\frac{11}{3}$ e $\frac{7}{3}$ são, respetivamente, as ordenadas dos pontos A e B.

Então, a área do triângulo [OAB] é

$$\frac{4 \times \frac{11}{3}}{2} = \frac{22}{3}$$

7.4. Na calculadora, podemos editar em Y_1 a expressão $g(x)$ e em Y_2 a expressão $f(x)$ e obter o gráfico na janela $[-4, 7]$ por $[-10, 10]$, conforme apresentado na figura.

Recorrendo ao menu da interseção, obtemos como solução positiva da equação $f(x) = g(x)$, o valor $x = 5,15$.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões 1 a 40 são de "escolha múltipla". Deve responder indicando apenas a letra correspondente à opção que considera certa [assegure-se, no entanto, de que saberia justificar a sua escolha caso tal lhe fosse solicitado].

- Em $\mathbb{R}$, a expressão $\frac{2x+3}{4x+6}$ é equivalente a:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2x+3}$, sendo $x \neq \frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$, sendo $x \neq -\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2x+3}$, sendo $x \neq -\frac{3}{2}$
- Considere as funções r e s polinomiais de grau 2. Sobre a função quociente $\frac{r}{s}$ podemos afirmar que:

(A) O seu gráfico não tem assintotas verticais.

(B) O seu domínio não pode ser $\mathbb{R}$.

(C) Se tiver zeros, eles são também zeros da função r .

(D) É crescente nos intervalos em que r e s forem crescentes simultaneamente.
- Considere a família de funções definida por $y = 3 + \frac{1}{kx-2}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Qual das seguintes características do gráfico não se altera com a variação do valor de k ?

(A) A monotonia. (B) A variação do sinal.

(C) A assintota horizontal. (D) A assintota vertical.
- Seja $f(x) = k + \frac{a}{x-2}$ a expressão de uma função racional de domínio $\mathbb{R} - \{2\}$. Sabendo que a função é crescente e não tem zeros no intervalo $]2, +\infty[$, qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $a > 0$ e $k > 0$ (B) $a > 0$ e $k < 0$

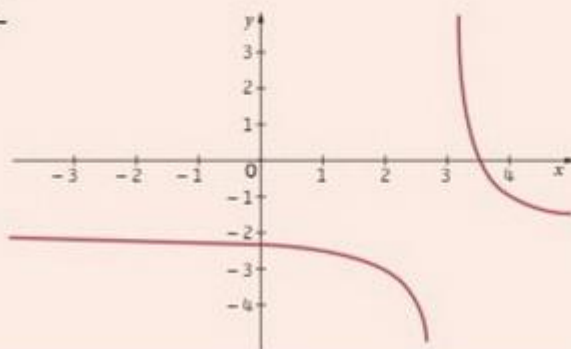
(C) $a < 0$ e $k > 0$ (D) $a < 0$ e $k < 0$
- Se a representação gráfica de f , função real de variável real, for a da figura, podemos afirmar que:

(A) o domínio de f é $\mathbb{R}$.

(B) f é decrescente no seu domínio.

(C) $f(x) > 0$ em $]3; 3,5[$.

(D) o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

6. Considere uma função real de variável real f tal que $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$, com $a \neq 0$. Sobre a função f podemos afirmar que:
- (A) o domínio pode ser $\mathbb{R}$ e f não tem zeros.
(B) o domínio pode ser $\mathbb{R}$ e f tem zeros.
(C) o domínio não pode ser $\mathbb{R}$ e f tem zeros.
(D) o domínio não pode ser $\mathbb{R}$ e f não tem zeros.
7. A eficiência de certo tipo de baterias é dada, em percentagem, em função do tempo de utilização t , em horas, pela lei $E(t) = \frac{800 - 10t}{t + 8}$. Então, qual é o domínio da função E ?
- (A) $\mathbb{R} - \{-8\}$ (B) $\mathbb{R} - \{8\}$ (C) $[0, +\infty[$ (D) $[0, 80]$
8. Uma função racional h , de domínio $\mathbb{R} - \{1\}$, definida por $h(x) = \beta + \frac{k}{x-1}$ é positiva no intervalo $]1, +\infty[$. Então, podemos afirmar que
- (A) $\beta \geq 0$ e $k > 0$ (B) $\beta \geq 0$ e $k < 0$
(C) $\beta \leq 0$ e $k > 0$ (D) $\beta \leq 0$ e $k < 0$
9. As retas de equações $x = -1$ e $y = 2$ são assintotas do gráfico da função f . Então, f pode ser definida por:
- (A) $f(x) = -1 + \frac{5}{x-2}$ (B) $f(x) = 1 + \frac{5}{x-2}$
(C) $f(x) = 2 - \frac{5}{x+1}$ (D) $f(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$
10. Qual das funções a seguir definidas não tem assintota vertical?
- (A) $y = \frac{x-2}{3x-6}$ (B) $y = \frac{x-2}{x}$ (C) $y = \frac{5x-4}{10-x}$ (D) $y = \frac{10}{(x-1)^2}$
11. Considere a função $h: x \mapsto -2 + \frac{1}{x}$ e as seguintes afirmações:
- I. A função h e a função g , definida por $g(x) = h(x) - 2$, têm o mesmo contradomínio.
II. O domínio de h é $\mathbb{R}^*$.
III. A função h tem um só zero.
- Indique a opção correta:
- (A) As afirmações são todas verdadeiras.
(B) Apenas a afirmação II é falsa.
(C) As afirmações são todas falsas.
(D) Apenas a afirmação III é verdadeira.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

12. Na figura 1, está representada graficamente a função f .
Na figura 2, está representada graficamente a função g .

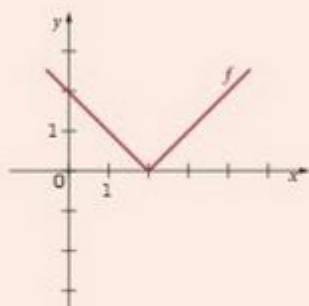


Figura 1

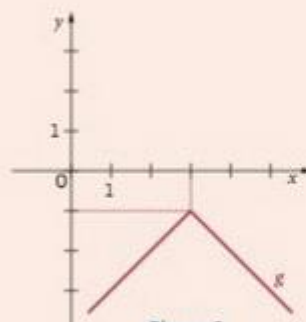


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = f(x+1) - 1$

(C) $g(x) = f(x-1) + 1$

(B) $g(x) = -f(x-1) - 1$

(D) $g(x) = -f(x+1) - 1$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2006

13. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2 + 4}{5 - x} < 0$.

(A) $] -1, 5[$

(B) $] 1, 5[$

(C) $] -\infty, 5[$

(D) $] 5, +\infty[$

14. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática f ;
- parte do gráfico de uma função afim g .

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto-solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

(A) $] -\infty, -4[\cup] -2, 0[$

(B) $] -\infty, -4[\cup] -2, 0]$

(C) $] -4, -2[\cup] 0, +\infty[$

(D) $] -4, -2[\cup] 0, +\infty[$

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2006

15. Considere a função f , definida por $f(x) = x^2 - 5$ e a função g , cuja representação gráfica é a da figura:

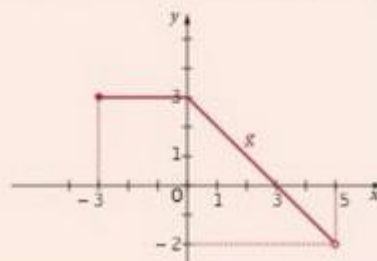
Então, o valor de $(f \circ g)(3)$ é:

(A) 0

(B) 4

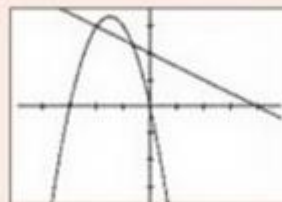
(C) -5

(D) -2



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

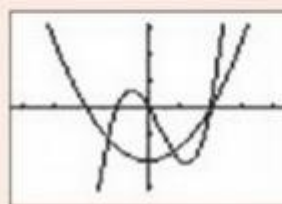
16. Considere as funções g e h , ambas polinomiais de graus 1 e 2, respectivamente, de domínio $\mathbb{R}$ e representadas graficamente na figura ao lado.



Quantos zeros tem a função $(g-h)(x)$?

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

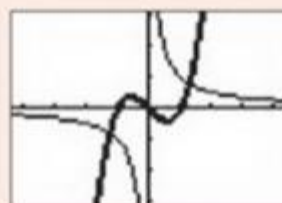
17. Na figura estão representadas a função f , quadrática e a função g , cúbica.



A função $\frac{f}{g}$ tem domínio:

- (A) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 2\}$ (B) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$
(C) $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$ (D) $\mathbb{R}$

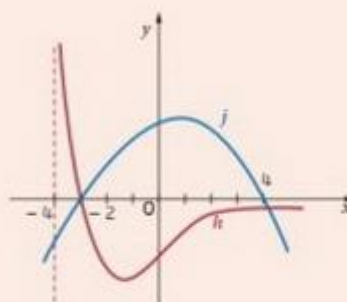
18. Na figura estão representadas a função g , cúbica e a função h , racional.



O conjunto de zeros da função $g \times h$ é:

- (A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0\}$
(C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{\}$

19. Observe a figura, onde se encontram representadas graficamente as funções h e j .



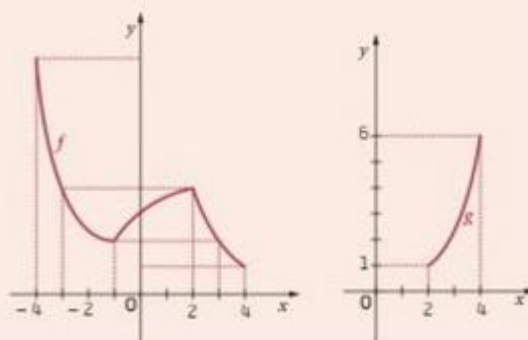
A reta $x = -4$ é assíntota do gráfico de h .

Então, o domínio de $\frac{h}{j}$ é:

- (A) $\mathbb{R}$ (B) $]-4, +\infty[$
(C) $]-4, +\infty[- \{-3, 4\}$ (D) $]-4, 3[$

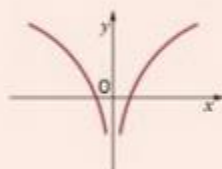
20. Observe, nas figuras, as representações gráficas das funções f e g . Sobre os valores de $(g \circ f)(2)$ e $(g \circ f)(4)$ podemos afirmar que:

- (A) o primeiro é 6 e o segundo não existe.
(B) não existem ambos.
(C) respectivamente 1 e 6.
(D) não existe o primeiro e o segundo é 6.



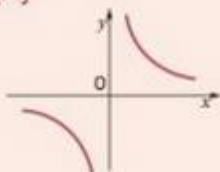
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

21. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , de domínio $\mathbb{R} - \{0\}$.

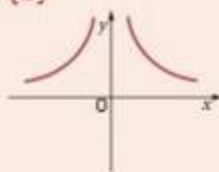


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g' , derivada de g ?

(A)



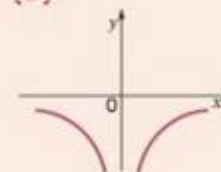
(B)



(C)



(D)

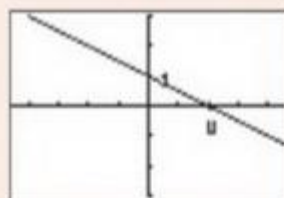


22. Qual dos gráficos corresponde à derivada de uma função que tem um mínimo para $x = u$.

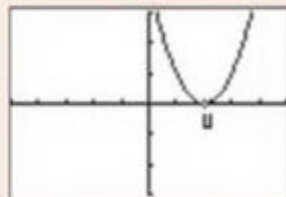
(A)



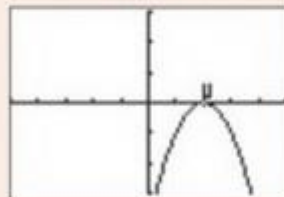
(B)



(C)



(D)

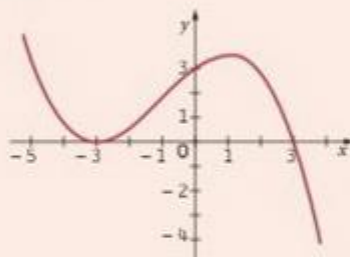


23. De uma função afim g sabe-se que $g(3) = 3$ e que tem um zero para $x = -4$. Qual das afirmações seguintes é falsa?

- (A) O ponto de coordenadas $(3, 3)$ pertence ao gráfico da função g^{-1} .
- (B) Os gráficos g e de g^{-1} interseitam-se num só ponto.
- (C) O gráfico de g^{-1} interseita o eixo das ordenadas.
- (D) A função g^{-1} não tem zeros.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

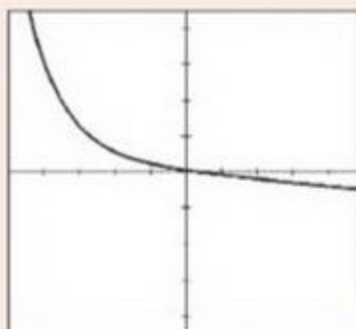
24. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f , polinomial de terceiro grau, cujos únicos zeros são -3 e 3 .



O domínio da função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é:

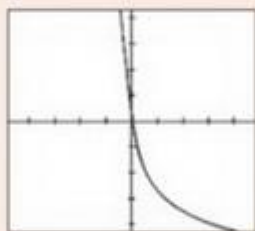
- (A) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ (B) $]-\infty, 3]$
 (C) $[3, +\infty[$ (D) $]-3, 3[$

25. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ cuja representação gráfica está na figura seguinte.

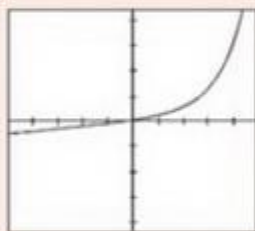


Qual das seguintes figuras representa a função g^{-1} , função inversa de g ?

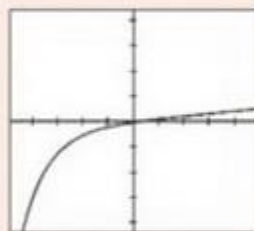
(A)



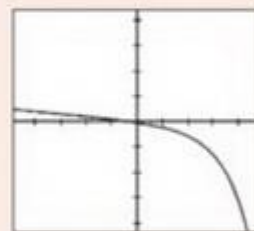
(B)



(C)



(D)



26. Seja j uma função definida por $j(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Qual é o domínio desta função?

- (A) $]1; +\infty[$ (B) $\mathbb{R}_0^+$
 (C) $[1; +\infty[$ (D) $\mathbb{R} - \{1\}$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

27. Qual é o domínio da função g definida por $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{3x-6}}$?

- (A) $[2; +\infty[$ (B) $\mathbb{R}^+$ (C) $]2; +\infty[$ (D) $\mathbb{R} - \{0\}$

28. Considere as funções $a(x) = \frac{1}{x-3}$ e $b(x) = \sqrt{x-1}$, definidas nos domínios $\mathbb{R} - \{3\}$ e $[1; +\infty[$, respetivamente.

Qual dos seguintes valores pertence ao domínio de $(b \circ a)(x)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 3 (D) 4

29. Sejam f e g duas funções reais de variável real. Sabe-se que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e tem cinco zeros;
- a função g tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros;
- um, e só um, dos zeros da função f também é zero da função g .

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

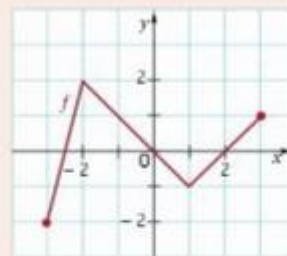
- (A) 7 (B) 5 (C) 4 (D) 2

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2010

30. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x + 3$.

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

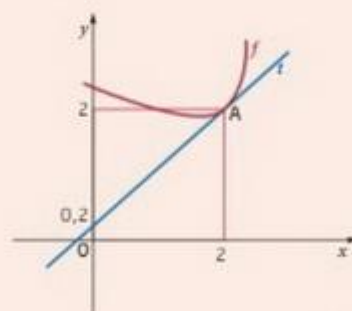
- (A) -1 (B) 0
(C) 1 (D) 2



Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2010

31. A reta t é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abscissa 2. A derivada de f no ponto 2 é:

- (A) 1 (B) $\frac{9}{10}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$



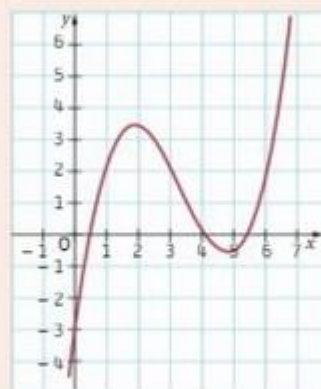
GAVE

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

32. Considere a representação gráfica de uma função f , conforme a figura.

O valor de $f'(3)$ é

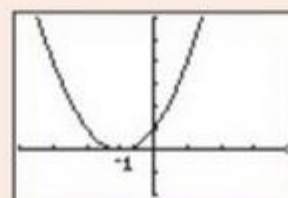
- (A) $\frac{1}{f(3)}$ (B) -2
(C) $-\frac{1}{f(0)}$ (D) -1



33. Considere a função derivada de f , designada por f' , representada graficamente na figura, e de domínio $\mathbb{R}$.

Pode, então, concluir-se que:

- (A) f tem um máximo para $x = -1$.
(B) f tem um mínimo para $x = -1$.
(C) f tem um zero para $x = -1$.
(D) f não tem extremos.



34. Uma barra metálica com 30 cm de comprimento à temperatura de 0°C é sujeita a aquecimento e dilata segundo a lei $L(t) = 30 + 0,0005t$, sendo L o comprimento da barra, em cm, e t a temperatura em $^\circ\text{C}$.

Então:

- (A) A velocidade de crescimento da barra é a mesma quer à temperatura de 50°C quer à temperatura de 100°C .
(B) A velocidade de crescimento da barra à temperatura de 100°C é superior à velocidade de crescimento à temperatura de 50°C .
(C) O comprimento da barra atinge os 40 cm quando $t = 200^\circ\text{C}$.
(D) A velocidade de crescimento da barra aos 80°C é menor que a velocidade de crescimento aos 100°C .

35. Um projétil é lançado verticalmente de baixo para cima e a sua altitude h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t) = 100t - 5t^2$.

Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projétil, três segundos após o lançamento?

- (A) 80 (B) 70 (C) 255 (D) 270

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

36. Considere a representação gráfica de uma função f e a reta tangente no ponto de abscissa 3.

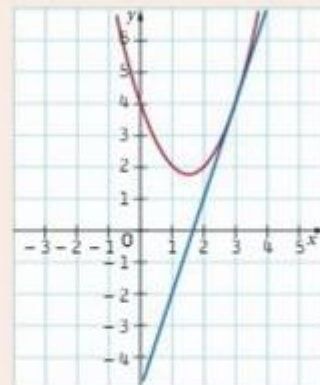
O valor de $f'(3)$ é:

(A) -3

(B) $\frac{1}{f(3)}$

(C) 0

(D) 3



37. A taxa média de variação da função definida por $f(x) = 2x^2 - 5$ no intervalo $[a, a + 1]$ é:

(A) $2a + 1$

(B) $-4a - 2$

(C) $-2a - 1$

(D) $4a + 2$

38. O gráfico da função g é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e zeros -1 e 3 . Seja g' a função derivada de g .

- 38.1. Qual dos valores seguintes é nulo?

(A) $g'(-1)$

(B) $g'(0)$

(C) $g'(1)$

(D) $g'(2)$

- 38.2. Qual dos seguintes valores é negativo?

(A) $g'(-1)$

(B) $g'(0)$

(C) $g'(1)$

(D) $g'(3)$

39. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy :

- parte do gráfico de uma função h ;
- uma reta t , tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 1.

Tal como a figura sugere, a reta t interseja o eixo Ox no ponto de abscissa -2 e o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

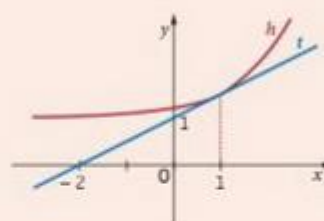
Indique o valor de $h'(1)$, derivada da função h no ponto 1.

(A) -2

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 2



Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2008

40. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 5 - 2x^2$.

Sendo t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $0,25$, a inclinação da reta t é

(A) 45°

(B) 120°

(C) 150°

(D) 135°

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões que se seguem são de resposta "aberta". Leia atentamente os enunciados e efetue as resoluções completas, explicando os raciocínios apresentando os cálculos.

41. Considere a função definida por $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

41.1. Escreva, justificando, as equações das assintotas do gráfico de f e faça o quadro de variação da função.

41.2. Resolva, analiticamente, a equação $f(x) = x$ e determine a solução da condição $f(x) \leq x$.

42. A partir da igualdade $y = \frac{1}{x}$ escreva uma equação de uma curva que satisfaça as seguintes condições:

- tem como assintotas as retas $y = 5$ e $x = 0$;
- tem como assintotas as retas $y = -4$ e $x = 0,3$.

43. Uma experiência química inicia-se à temperatura ambiente. A temperatura (em °C) dos reagentes evolui de acordo com o modelo definido por $f(t) = \frac{310t + 180}{2t + 8}$, com o tempo t expresso em minutos.

43.1. Qual é a temperatura ambiente?

43.2. O gráfico desta função tem uma assintota horizontal. Qual é ela e qual o seu significado no contexto da experiência?

43.3. A experiência vai ser interrompida quando a temperatura atingir 100 °C. Determine, gráfica e analiticamente, ao fim de quanto tempo (valor aproximado em minutos e segundos) terá de ser interrompida a experiência.

44. Suponha que a eficiência E (em percentagem) de certas pilhas usadas em relógios digitais pode ser expressa pela lei $E(t) = \frac{690 - 9t}{t + 7}$, em que t é o tempo de utilização em meses.

44.1. Qual a eficiência das pilhas no momento em que são colocadas no relógio?

44.2. Supondo que os relógios só funcionarão em perfeitas condições se a eficiência das pilhas for superior a 35%, durante quanto tempo poderemos usar um relógio com as mesmas pilhas? (Use a calculadora gráfica para responder a esta questão e apresente um (ou mais) esboço(s) do(s) gráfico(s) visualizado(s).)

44.3. Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} E(t)$ para a função E e explique o significado do valor encontrado, no contexto da situação descrita.

45. Uma pedra é atirada para um lago, provocando na água vários círculos concêntricos. Suponha que o diâmetro d de cada círculo que se forma, t segundos após a pedra ter caído na água, é dado, em centímetros, por

$$d(t) = 180 - \frac{450}{t + 2,5}$$

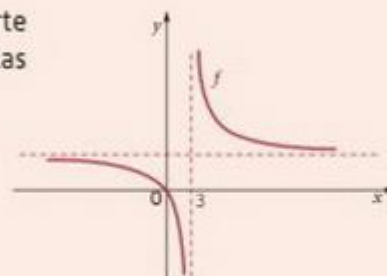
45.1. Determine, analiticamente, a área do círculo que se forma 10 segundos depois de a pedra ter caído na água. Apresente o resultado aproximado às unidades.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 45.2. Exprima o tempo que decorreu depois de a pedra ter caído na água em função do diâmetro do círculo formado.
- 45.3. Determine o tempo que decorreu desde que a pedra caiu na água até que se forma um círculo com 150 cm de diâmetro.
46. Um balão equipado para fins experimentais é lançado de um helicóptero sobre o mar. Num certo momento, foram ativados uns sensores e, a partir desse instante, a altitude do balão passou a ser modelada por $A(t) = \frac{-t^2 + 15t + 10}{t + 1}$, com A expresso em km e t em horas. Usando processos analíticos, responda às seguintes questões:
- 46.1. Qual era a altitude do balão quando os sensores foram ligados?
- 46.2. Um avião que viajava a 8700 m de altitude quase chocou com o balão. Determine o momento em que isso aconteceu. Apresente a resposta em horas e minutos.
- 46.3. Durante quanto tempo esteve o balão acima dos 11 km de altitude? Apresente a resposta em horas e minutos.
- 46.4. Explique o significado de $A(t) = 0$ no contexto do problema.
47. A temperatura T , em graus Celsius, do forno de uma padaria, varia, a partir do momento em que é ligado, de acordo com a lei:
- $$T(t) = \frac{180t + 26}{t + 1}, \quad t \geq 0 \quad (t \text{ representa o tempo decorrido em minutos})$$
- 47.1. Calcule a temperatura do forno meia hora depois de ter sido ligado.
- 47.2. Determine quanto tempo o forno deverá estar ligado, de forma a atingir 130 °C (apresente o resultado final arredondado às unidades).
- 47.3. Represente graficamente a função T .
- 47.4. A função tem uma assintota horizontal. Explique o seu significado no contexto do problema.
48. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \frac{3x + 3}{x - 5}$ e $g(x) = \frac{x^2 - 25}{2x^2 + 2x}$
- 48.1. Escreva a função f na forma $y = b + \frac{a}{x - c}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 48.2. Indique o domínio e o contradomínio da função f .
- 48.3. Resolva, analiticamente, a equação $f(x) = 2$.
- 48.4. Apresente as equações das assintotas do gráfico da função $h(x) = -f(x - 2) + 4$.
- 48.5. Caracterize a função $f \times g$ e apresente a sua expressão analítica o mais simplificada possível.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 49.** Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f , bem como as duas assintotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere:

- a origem do referencial pertence ao gráfico de f ;
- uma das assintotas é paralela ao eixo Ox ;
- a outra assintota é paralela ao eixo Oy e intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.

- 49.1.** Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 9$. Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g , resolva a inequação $f(x) \times g(x) \geq 0$, completando a seguinte tabela de variação de sinal:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
$g(x)$		
$f(x) \times g(x)$		

Apresente o conjunto-solução da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

- 49.2.** Admita agora que:

- a assintota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 4$.
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ onde a , b e c designam números reais. Indique os valores de a , b e c .

- 50.** Suponha que o número C de cartões da lotaria instantânea a serem vendidos (em milhões) é dado pela lei

$$C(p) = \frac{10p + 2}{p + 2}$$

sendo p o valor do montante de prémios a distribuir (em centenas de milhares de euro) e $p > 0$.

- 50.1.** Calcule e interprete, no contexto do problema, $C(10)$.
- 50.2.** Usando a calculadora gráfica, resolva a condição $C(p) > 8,85$. Interprete a solução e apresente os valores de p arredondados às centésimas.
- 50.3.** Mostre que $C(p) = 10 - \frac{18}{p+2}$.
- 50.4.** Comente, justificando, a seguinte afirmação: "Quanto maior for o montante dos prémios a distribuir, maior será o número de bilhetes a vender".

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

51. Considere a função $f(x) = \frac{x}{x+3}$.

51.1. Mostre que $f(x) = 1 - \frac{3}{x+3}$.

51.2. Indique o domínio e o contradomínio de f .

51.3. Resolva cada uma das seguintes condições:

a) $f(x) = \frac{x}{-5x+10}$

b) $f(x) \geq \frac{6x}{x^2-9} - \frac{x}{x-3}$.

52. Um móvel desloca-se sobre um eixo $[0, \vec{u}]$.

Supõe-se que a sua posição sobre esse eixo no instante t ($t \geq 0$) é dado pela sua abscissa: $p(t) = t^2 + 2t$. A unidade de comprimento é o metro e a unidade de tempo é o segundo.

52.1. Quais são as posições nos instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$? Justifique que o móvel se desloca no sentido do vetor $\vec{u}$ sem voltar atrás.

52.2. Determine a distância percorrida quando t varia de 1 a 3.

52.3. Encontre as velocidades médias do móvel nos intervalos $[1, 2]$, $[1; 1,5]$, $[1; 1,25]$, $[1; 1,1]$ e $[1; 1,01]$.

Que pode conjecturar sobre a velocidade instantânea no instante $t = 1$?

53. Trace a representação gráfica da função definida em $[0, 3]$ por $f(x) = x^2 + 2x$ no referencial $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de unidade 2 cm sobre Ox e 0,5 sobre Oy . Coloque sobre a curva o ponto P de abscissa 1.

53.1. Para cada um dos valores de x que se seguem, calcule $f(x)$ e coloque o ponto M de abscissa x sobre a curva, com $x = 2$, $x = 1,5$ e $x = 1,1$.

53.2. Considere o ponto da curva de abscissa $1+h$, com h positivo *muito pequeno*. Calcule $f(1+h)$ e deduza o valor do declive da reta PM. Para que tende a reta PM e o valor do seu declive quando h tende para zero?

54. Considere a função definida em $]0, +\infty[$ por $f(x) = \frac{1}{x}$.

54.1. Calcule $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ e indique o valor de $f'(1)$.

54.2. Seja $x_0 \in]0, +\infty[$, justifique que f é derivável em x_0 e indique o valor de $f'(x_0)$.

55. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x^2 - 1|$

55.1. Escreva a expressão de $f(x)$ sem recorrer ao símbolo de módulo e trace uma representação gráfica de f .

55.2. Estude a derivabilidade de f em $x = -2$, $x = 2$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

55.3. Que particularidade tem a curva de f nos seus pontos de abscissa -1 e 1 ? O que resulta desse facto?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

56. Na figura ao lado está uma representação de uma função f .

56.1. Por leitura do gráfico, determine $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(2)$ e $f'(4)$.

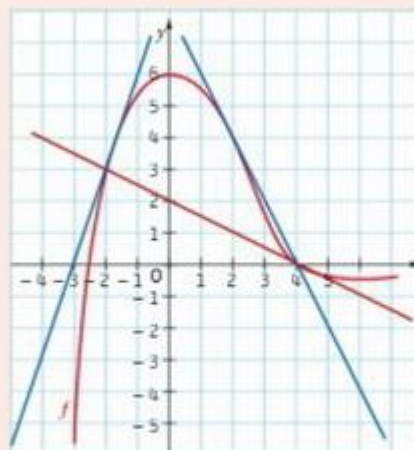
56.2. Trace sobre o gráfico a representação gráfica de uma função g tal que

$$g(-3) = 0 \text{ e } g'(-3) = -3$$

$$g(1) = -2 \text{ e } g'(-1) = 1$$

$$g(6) = -4 \text{ e } g'(-6) = -\frac{2}{3}$$

(Apresente de forma clara, sobre o desenho, todos os elementos).



57. Trace uma representação gráfica de uma função que verifique simultaneamente:

$$f(-2) = 1; \quad f(0) = \frac{1}{2}; \quad f(2) = 2; \quad f(5) = 1$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{2}; \quad f'(0) = 0; \quad f'(2) = 1; \quad f'(5) = -3$$

58. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$. Calcule $f'(x)$ e estude o sentido de variação de f . Indique o mínimo da função, caso exista.

59. Na figura ao lado, está representado o gráfico de f' , função derivada de f , sendo f , uma função polinomial de grau 4.

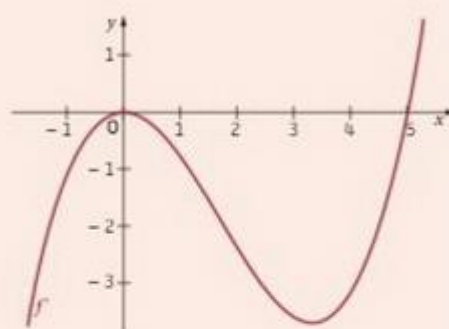
59.1. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

(A) A função f tem 2 extremos.

(B) A função f tem um máximo para $x = 0$ e um mínimo para $x = 5$.

(C) A função f é decrescente para $x \in]-\infty, 5]$.

(D) A função f é crescente para $x \in]-\infty, 0]$.



59.2. Seja m o declive da reta t , tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa -1 . Justifique a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações:

(A) $m = \text{tg}(135^\circ)$.

(B) Existe só uma reta tangente ao gráfico de f , paralela a t .

(C) m é um número positivo.

(D) Não existe uma reta tangente ao gráfico de f perpendicular a t .

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

60. A figura apresenta uma representação gráfica da função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21$

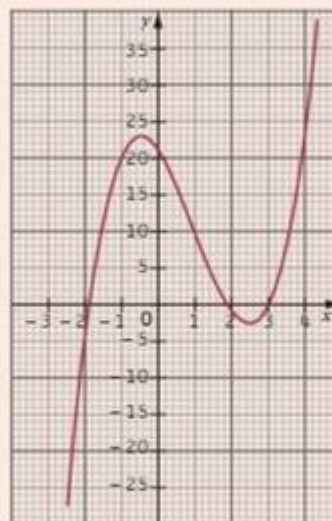
60.1. Determine os valores exatos dos zeros de f e fatorize $f(x)$ em monômios do menor grau possível.

60.2. Resolva gráfica e analiticamente a inequação $f(x) \leq -x + 11$

60.3. Considere a função $h(x) = 3x$. Determine os zeros da função composta $(f \circ h)$.

60.4. Indique uma restrição de f que admita inversa.

60.5. Indique o sinal de $f(0) \times f'(0)$ e $f(3) \times f'(3)$



61. A altura de água, em milímetros, num vaso como o da figura, em função do tempo de enchimento, em segundos, é dada pela fórmula:

$$h(t) = 10t + 0,2t^2$$



61.1. Se o vaso tiver 10 cm de altura, quanto tempo demora até estar cheio?

61.2. Determine a velocidade média de enchimento do vaso, entre os 2 e os 4 segundos.

61.3. Determine a velocidade com que a água sobe no vaso:

a) 2 segundos depois de se iniciar o enchimento (use um processo analítico).

b) 4 segundos depois de se iniciar o enchimento (use as capacidades da sua calculadora).

61.4. Recorra às capacidades gráficas da sua calculadora para determinar quanto tempo demora a água a subir de um quarto até metade da altura do vaso. Apresente o resultado arredondado às décimas. Descreva e ilustre devidamente os procedimentos que adotou.

62. Considere uma caixa, com forma de um prisma quadrangular. A soma do comprimento das arestas é 76 dm.

62.1. Mostre que o volume da caixa é dado, em função de x , por

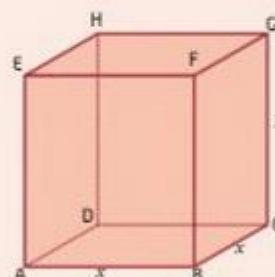
$$V(x) = 19x^2 - 2x^3 \text{ com } x \in]0; 9,5[$$

62.2. Determine, analiticamente, o volume máximo e as dimensões da caixa que possui esse volume.

62.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva graficamente a inequação $V(x) \geq 190$

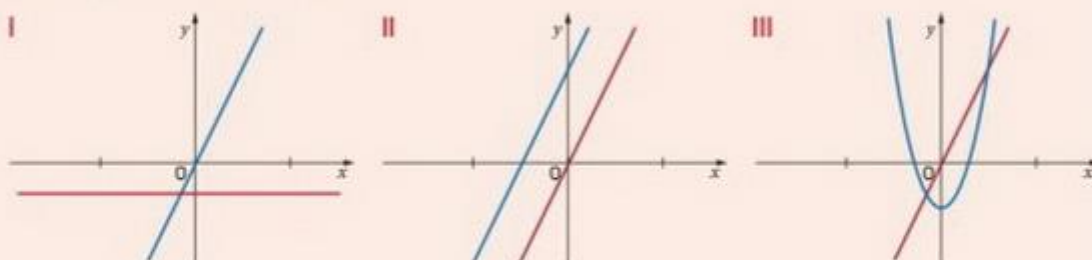
Apresente os valores encontrados arredondados às centésimas.

Explique como procedeu, apresentando o gráfico em que se baseou para elaborar a sua resposta.



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

63. Observe os gráficos seguintes.



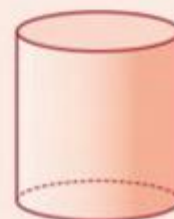
Um deles representa uma função e a sua derivada. Diga qual, justifique a sua escolha e explique por que teria de excluir qualquer dos outros dois.

64. Numa unidade de turismo de habitação, existem três reservatórios de água: um em forma de cilindro e dois em forma de cone, todos com a mesma altura e com bases iguais.

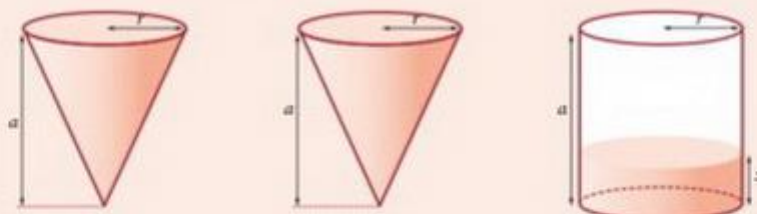
Houve necessidade de despejar o reservatório cilíndrico, para se proceder a uma reparação.

A figura ao lado representa o reservatório cilíndrico, cheio de água.

Parte dessa água foi despejada nos dois reservatórios em forma de cone, que ficaram cheios.



Nas figuras seguintes, estão representados esses reservatórios, cheios de água, e o reservatório cilíndrico, com a água restante.



Considere que:

- a é a altura, em metros, de cada um dos reservatórios;
- r é o raio, em metros, da(s) base(s) de cada um dos reservatórios;
- x é a altura, em metros, da água que ficou no reservatório cilíndrico;
- a espessura do material de que são feitos os reservatórios é desprezável.

64.1. Mostre que a relação entre a altura da água que ficou no reservatório cilíndrico (x) e a altura de cada um dos reservatórios (a) é dada por $x = \frac{a}{3}$.

64.2. Posteriormente, a água que restava no reservatório cilíndrico, depois de se terem enchido os dois reservatórios cónicos, foi sendo retirada, até aquele ficar vazio.

Admita que a altura h , em metros, da água que restava no reservatório cilíndrico, t horas após ter sido começada a retirar até o reservatório ficar completamente vazio, é dada por:

$$h(t) = \frac{5t - 16}{t - 10}$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- a) Calcule a altura, em metros, do reservatório cilíndrico.

Na sua resolução, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- calcular $h(0)$
- relacionar $h(0)$ com x
- utilizar a igualdade $x = \frac{a}{3}$
- calcular a altura pedida

- b) Quanto tempo demorou o reservatório cilíndrico a esvaziar, a partir do momento em que se começou a retirar a água que ficara nesse reservatório, depois de se terem enchido os dois reservatórios cônicos?

Apresente o resultado em horas e minutos.

- c) Relativamente à situação descrita, fez-se a seguinte afirmação:

"Durante o período de esvaziamento do reservatório cilíndrico, existe um certo intervalo de tempo, no qual a taxa de variação média da função h tem um valor positivo." Esta afirmação é verdadeira? Justifique a sua resposta.

Exame Nacional de Matemática B, 10.º e 11.º Anos de escolaridade, 2010

- 65.** Segundo os testes de um laboratório especializado, a eficácia de determinada marca de pilhas quando são usadas num *walkman*, pode ser expressa pela função:

$$E(t) = \frac{10t - 780}{-t - 8} \text{ em que } E \text{ é a eficácia, em percentagem, e } t \text{ é o tempo em horas de utilização.}$$

- 65.1.** Qual a eficácia dessas pilhas quando são colocadas no *walkman*?

- 65.2.** O *walkman* só funciona em boas condições enquanto a eficácia das pilhas se mantiver acima dos 40%. Durante quanto tempo podem, então, ser usadas as pilhas?

- 65.3.** Calcule a taxa de variação da eficácia dessas pilhas no instante em que se inicia a sua utilização e interprete o valor encontrado, no contexto do problema.

- 66.** Considere as seguintes funções:

- a função f definida por $f(x) = x^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola com vértice no ponto $(1, -4)$.
- a função g definida por $g(x) = x^2 - 4$
- a função h definida por $h(x) = \frac{1 + 3x}{2 - x}$

- 66.1.** Relativamente à função f , mostre que $b = -2$ e $c = -3$.

- 66.2.** Explique por que não existe a imagem de 2 pela função $g - h$.

- 66.3.** Resolva a condição $h(x) > -2$.

- 66.4.** Caracterize a função inversa da função h .

- 66.5.** Caracterize a função $g \times h$ e determine os seus zeros, caso existam.

- 66.6.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 3.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

67. São dadas em $\mathbb{R}$ as funções:

$$\begin{array}{l} f: x \mapsto 1 + \cos x \\ g: x \mapsto \frac{x}{2} \end{array}$$

67.1. Caracterize $f \circ g$.

67.2. Determine uma expressão geral dos seus zeros.

67.3. Calcule $(f \circ g)\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

67.4. Esboce o gráfico da restrição de $f \circ g$ ao intervalo $[0, 4\pi]$.

67.5. Pela análise do gráfico indique:

- a) o contradomínio da função;
- b) um intervalo tal que a restrição da função a esse intervalo seja injetiva e crescente.

68. A tabela seguinte representa o estudo do sinal de uma função f , definida em $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

68.1. Estude o sinal da função $(f \times g)(x)$, sendo g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = -x + 5$.

68.2. Considere a função $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ definida em $\mathbb{R}$.

Indique os valores de $(h \circ g)(1)$ e $(h \circ g)(8)$.

69. Caracterize a função y^{-1} inversa, da função $y = \frac{3x+2}{x+1}$ de domínio $\mathbb{R} - \{-1\}$.

70. Considere as funções $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$ e $g(x) = \sqrt{-x+3}$.

70.1. Calcule, se existir, $(f+g)(-7)$.

70.2. Determine o domínio da função $(f-g)(x)$.

70.3. Determine o ponto em que a função $(f \times g)(x)$ interseja o eixo das ordenadas.

70.4. Indique, justificando, um valor que não pertença ao domínio da função $(g \circ f)(x)$.

70.5. Caracterize a função $f^{-1}(x)$.

71. Seja j a função definida no intervalo $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$ por $j(x) = -1 + \sqrt{2x+5}$.

71.1. Determine analiticamente o conjunto de zeros da função.

71.2. Utilizando a calculadora gráfica determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função j com o da sua inversa. Explique como procedeu.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 72.** Uma professora pediu aos seus alunos do 11.º Ano que determinassem o domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{-\frac{2}{x+5}}$. Obteve as seguintes quatro respostas distintas:

(I) $]-\infty, -5[$ (II) $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ (III) $] -5, +\infty[$ (IV) $\{\}$

Diga qual das respostas está certa e justifique devidamente a sua opção.

- 73.** Considere a função: $f: x \mapsto 3 + \sqrt{x^2 - 4}$

73.1. Determine o domínio da função.

73.2. Resolva a equação $f(x) = x$.

- 74.** A distância d (em metros) percorrida por uma partícula durante o tempo t (em segundos) é dada pela expressão $d(t) = 0,6 t^2 + t$.

74.1. Calcule, aplicando a definição, o valor da taxa de variação da função quando $x = 3$ e interprete o significado do valor encontrado, no contexto do problema.

74.2. Suponha que, ao fim de 5 segundos, há uma anomalia que faz com que a partícula abandone repentinamente, a sua trajetória, seguindo a direção da tangente à curva do gráfico nesse ponto. Investigue se há risco de colisão com um modelo artificial fixado na posição $(7, 34)$.

74.3. Considere d_1 , o prolongamento da função d ao conjunto $\mathbb{R}$ e a função f definida por $f(t) = 10t$. Faça o estudo analítico da variação e dos extremos da função $d_1 \times f$.

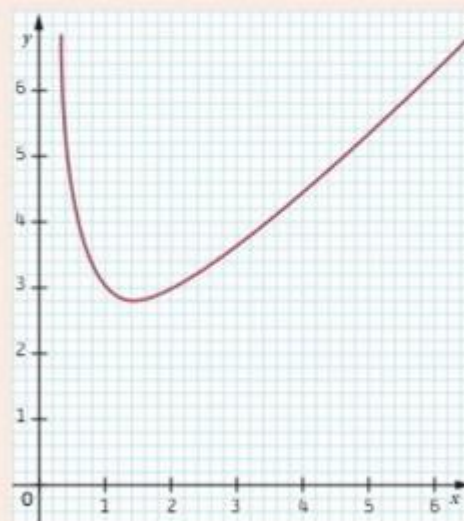
- 75.** Considere a função f , definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

75.1. Justifique que a função é derivável em 2 e indique o valor de $f'(2)$.

75.2. A curva ao lado representa a função f . Interprete geometricamente o resultado da questão anterior desenhando no referencial os elementos gráficos necessários a essa interpretação.

75.3. Considere a função g definida por $g(x) = 3x - 6$.

- Caracterize a função $f \circ g$.
- Determine uma equação das assintotas da função $f \circ g$.
- Determine os valores de x que satisfazem a condição $(f \circ g)(x) > 5$.



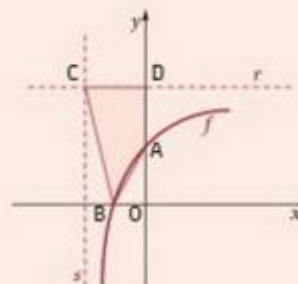
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

76. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} - \{-2\}$, definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$. Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

76.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

76.2. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy

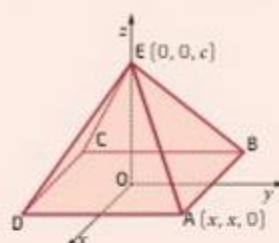
- parte do gráfico da função f ;
- as retas r e s , assintotas do gráfico de f ;
- o quadrilátero $[ABCD]$.



A e B são os pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados. C é o ponto de interseção das retas r e s . D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy . Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2009

77. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular.



Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz , entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos. Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy , de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular;
- o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada;
- sendo x a abcissa de A e sendo c a cota de E, tem-se sempre $x + c = 6$.

77.1. Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de x ($x \in]0, 6[$). Mostre que $V(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$.

77.2. Utilizando a função derivada de V e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função V quanto à monotonia, conclua qual é o valor de x para o qual é o máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

77.3. Admita agora que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

Teste Intermédio de Matemática A, 11.º Ano, maio 2008

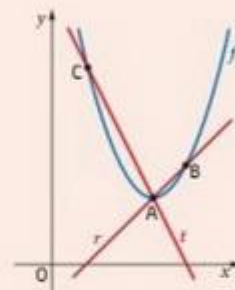
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

78. Na figura, estão parcialmente representadas, num referencial o.n. xOy :

- uma parábola, que é o gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 6x + 11$, e cujo vértice é o ponto A
- a reta r , que passa no vértice da parábola e tem declive 1
- a reta t , que passa no vértice da parábola e tem declive -2

Tem-se ainda que:

- a reta r e a parábola também se intersectam no ponto B
- a reta t e a parábola também se intersectam no ponto C



78.1. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

78.2. Seja D o ponto do segmento $[CB]$ que pertence ao eixo de simetria da parábola. Determine a área do triângulo $[ACD]$.

78.3. Seja h a função cujo gráfico é simétrico do gráfico da função f em relação à reta de equação $y = 2$. Determine $h(x)$.

78.4. Determine as coordenadas do ponto de tangência da reta tangente à parábola paralela a r .

78.5. Determine a equação da reta tangente à parábola paralela a t .

78.6. Sendo a função g definida por $g(x) = a + \frac{b}{x+c}$ determine a sua expressão sabendo que A é ponto de interseção da assintotas e que B pertence ao seu gráfico.

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10.º ano, GAVE

79. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

79.1. Sendo $f(x) = 1 + \frac{1}{3x-2}$ determine, por processos analíticos, o conjunto solução da condição $f(x) > g(x)$.

79.2. Determine a equação reduzida da reta de declive -2 tangente à parábola e indique o ponto de tangência.

79.3. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g e a reta r , que é o eixo de simetria desse gráfico.

Os pontos A, B, P e Q pertencem ao gráfico da função.

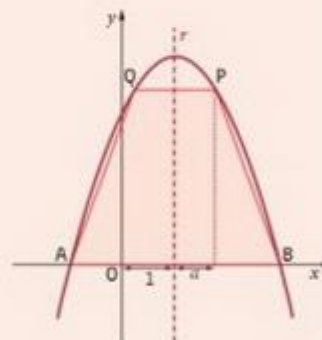
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto P tem abcissa $1 + a$, com $a \in [0, 2[$;
- o ponto Q tem ordenada igual à do ponto P;

Seja T a função que, a cada valor de a , faz corresponder a área da região sombreada.

a) Mostre que a ordenada do ponto P é dada, em função de a , por $4 - a^2$

b) Mostre que $T(a) = 8 + 4a - 2a^2 - a^3$, $a \in]0, 2[$



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- c) Se $a = 0$, o ponto Q coincide com o ponto P.

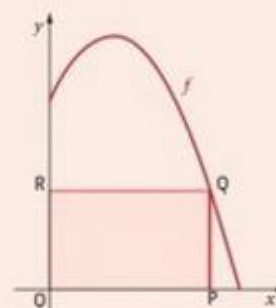
Identifique, nesse caso, a forma da região sombreada e verifique que a sua área ainda é dada pela expressão $8 + 4a - 2a^2 - a^3$

- d) Determine o valor de a para o qual a área da região sombreada é máxima, por meios exclusivamente analíticos.

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10.º ano – GAVE

- 80.** Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy , o gráfico da função f , de domínio $[0, 3]$, definida por $f(x) = 4 - (x - 1)^2$

A cada ponto Q pertencente ao gráfico da função f , com abcissa diferente de zero e diferente de três, correspondem um ponto P, no eixo Ox , e um ponto R, no eixo Oy , tais que $[OPQR]$ é um retângulo.



- 80.1.** Determine as coordenadas do ponto Q para o qual o retângulo $[OPQR]$ é um quadrado.

- 80.2.** Seja $\overline{OP} = b$

Mostre que a área A do retângulo $[OPQR]$ pode ser dada, em função de b , por $A(b) = -b^3 + 2b^2 + 3b$ ($b \in]0, 3[$).

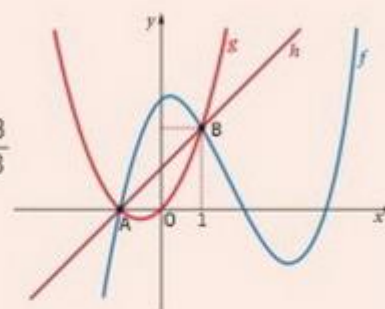
- 80.3.** Determine as coordenadas do ponto Q a que corresponde o retângulo de maior área por meios exclusivamente analíticos e estude a monotonia da função A .

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10º ano, GAVE

- 81.** Na figura, estão representadas graficamente três funções, f , g e h , todas de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- a função f é definida pela expressão $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
- o gráfico da função g é uma parábola que passa na origem do referencial;
- o gráfico da função h é uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto A tem ordenada 0 e o ponto B tem abcissa 1.



- 81.1.** Defina analiticamente a função h , depois de determinar a ordenada do ponto B.

- 81.2.** Defina analiticamente a função g , depois de determinar a abcissa do ponto A.

- 81.3.** Determine o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$, sem recorrer à calculadora.

- 81.4.** Determine a abcissa dos pontos em que a reta tangente à representação gráfica de f é paralela à reta h .

- 81.5.** Determine, por métodos exclusivamente analíticos, os extremos da função f .

Adaptado de Séries de Problemas de Matemática A – 10.º ano, GAVE

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Observe as sequências seguintes

$$[a_n]: 5; -3; -11; -19; \dots \quad [b_n]: -2; -2; 0; 4; 10; \dots \quad [c_n]: \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{8}; -\frac{4}{16}; \dots$$

e supondo que se mantêm a regularidade entre os termos indique:

- 1.1. o termo seguinte;
- 1.2. o termo geral.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 1.1. • Para $[a_n]$, analisemos as diferenças entre termos consecutivos e observemos que é constante, igual a -8 .

Então o termo seguinte é $-19 + (-8) = -27$

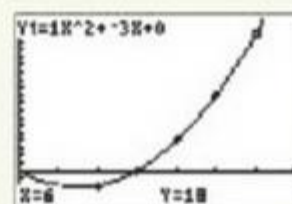
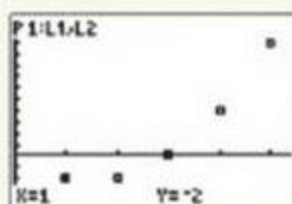
• Quanto a $[b_n]$ analisemos, também, as diferenças entre termos consecutivos.

Verificamos que são os múltiplos de 2.

Logo é de esperar que o termo seguinte seja $10 + 8 = 18$.

Outro processo poderá ser a utilização da calculadora e o modo estatístico, depois de introduzidos os valores nas listas:

L1	L2	L3	1
5	-2		
-3	-2		
-11	0		
-19	4		
	10		
L1(1)=1			



visualizamos a nuvem de pontos que nos sugere um arco de parábola.

Fazendo a regressão quadrática obtemos para $x = 16$, $y = 18$.

• Relativamente a $[c_n]$, analisemos separadamente os numeradores e os denominadores, sem ter em conta o sinal.

Quanto à sequência dos numeradores

$$1; 1; 3; 4 \dots$$

seria a sucessão dos números naturais se o segundo numerador fosse 2.

Quanto à sequência dos denominadores

$$2, 2, 8, 16 \dots$$

seria a sucessão das potências de 2 se o segundo denominador fosse 4.

Basta então considerar que o segundo termo, $-\frac{1}{2}$, se pode escrever como $-\frac{2}{4}$

e obtemos então

$$\frac{1}{2}; -\frac{2}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{4}{16}; \dots$$

Sendo possível concluir que o termo seguinte é $\frac{5}{32}$, tendo em conta a alternância de sinal.

- 1.2. • a_n é uma progressão aritmética, uma vez que a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Então

$$a_n = 5 - 8(n - 1) = -8n + 3;$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

- $b_n = n^2 - 3n$, como podemos constatar a partir da regressão efetuada na calculadora;
- $c_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$, a partir do que vimos na alínea anterior.

2. Dada a progressão aritmética (u_n) em que $u_5 = -5$ e $u_{10} = 20$.

- 2.1.** Mostre que o termo geral é $u_n = 5n - 30$.
- 2.2.** Mostre que é monótona.
- 2.3.** Calcule a soma dos 20 primeiros termos.
- 2.4.** Mostre pela definição que é um infinitamente grande positivo.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

2.1. Como (u_n) é uma progressão aritmética temos $u_{10} = u_5 + (10 - 5)r$, onde r é a razão.

Então

$$20 = -5 + 5r \Leftrightarrow 25 = 5r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{25}{5} = 5$$

Como $u_5 = u_1 + 4r$, vem $-5 = u_1 + 20 \Leftrightarrow u_1 = -25$

e $u_n = -25 + 5(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 5n - 30$

2.2. Como é uma progressão aritmética de razão positiva, então é estritamente crescente. Podemos mostrá-lo pela definição.

(u_n) é crescente se $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 30$$

$$= 5n - 25$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow 5n - 25 - 5n + 30 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5n - 5n + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

logo u_n é estritamente crescente.

2.3. $S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20$

$$= \frac{5 - 30 + 5 \times 20 - 30}{2} \times 20$$

$$= 450$$

2.4. (u_n) é infinitamente grande positivo se, dado um número real L qualquer, existe uma ordem p a partir da qual, os termos de ordem n maior que p são maiores que L .

Seja L um número real qualquer,

$$u_n > L \Leftrightarrow 5n - 30 > L$$

$$\Leftrightarrow 5n > 30 + L$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{30 + L}{5}$$

Tomando p igual à parte inteira de $\frac{30 + L}{5}$, vemos que $\forall n > p, u_n > L$.

Provamos, assim que (u_n) é infinitamente grande positivo.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

3. Seja a sucessão $\{v_n\}$ definida por $v_n = -5^{-n+1}$.
- 3.1. Mostre que é uma progressão geométrica.
- 3.2. Estude a limitação de v_n .
- 3.3. Estude a monotonia.
- 3.4. Mostre que é convergente e indique o valor do limite.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 3.1. Uma sucessão é uma progressão geométrica se $\frac{v_{n+1}}{v_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\text{Ora, } \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{-5^{-(n+1)+1}}{-5^{-n+1}} = \\ &= \frac{-5^{-n-1+1}}{-5^{-n+1}} = \\ &= -5^{-n-n+1} = 5^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

A sucessão é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

- 3.2. Para estudar a monotonia de v_n , estudemos o sinal de $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= -5^{-(n+1)+1} - 5^{-n+1} \\ &= 5^{-n} - 5^{-n+1}\end{aligned}$$

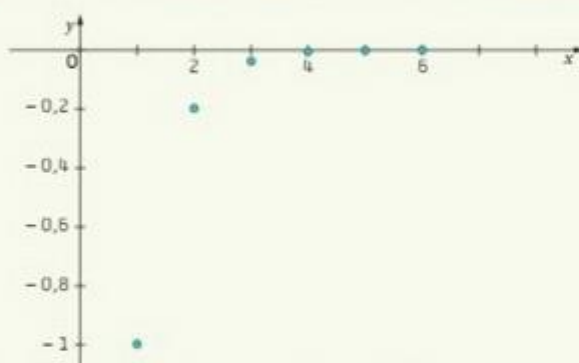
pondo -5^{-n} em evidência, vem

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= -5^{-n} [1 + 5] = \\ &= -6 \times 5^{-n}\end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

logo $\{v_n\}$ é estritamente decrescente.

- 3.3. Para estudar a limitação podemos começar por analisar uma representação gráfica de $\{v_n\}$



Observamos que os pontos se situam abaixo do eixo das abcissas e as suas ordenadas, valores dos termos da sucessão, estão compreendidos entre -1 e 0 , isto é,

$$-1 \leq v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostremos que a conjectura feita por visualização está correta.

De facto, como $5 > 1 > 0$ e $5^{-n} > 0$, temos:

$$5 \times 5^{-n} > 0,$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

multiplicando por -1 , vem

$-5 \cdot n^{-1} < 0$, logo a sucessão é limitada superiormente por zero.

Como é monótona crescente, é limitada inferiormente pelo primeiro termo, -1 .

Portanto é verdade que $-1 \leq v_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- 3.4. A sucessão é limitada e monótona logo é convergente e pelo gráfico podemos conjecturar que converge para zero; é um infinitésimo.

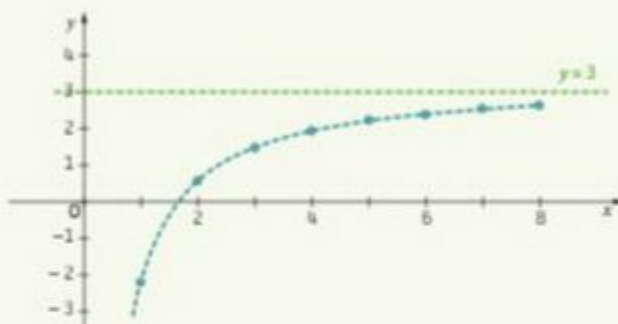
4. Dada a função real de variável real f tal que $f(x) = \frac{3x-5}{x}$

- 4.1. Seja $\{u_n\}$ a sucessão definida por $u_n = f(n) = \frac{3n-5}{n}$.
Estude a monotonia, limitação e convergência de $\{u_n\}$

- 4.2. Sendo $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, prove pela definição que $\{v_n\}$ dada por $v_n = f(a_n)$ converge para $\frac{1}{2}$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

- 4.1. Reparemos que $\{u_n\}$ é uma restrição a $\mathbb{N}$ da função real de variável real $f(x) = \frac{3x-5}{x}$ equivalente a $f(x) = 3 - \frac{5}{x}$ e cujo gráfico tem por assintota horizontal a reta de equação $y = 3$. Por este facto podemos concluir que a sucessão é convergente para 3, pois o seu comportamento, quando n tende para $+\infty$, traduz-se na aproximação dos valores dos seus termos a 3 tanto quanto quisermos. Analisando uma representação gráfica podemos conjecturar sobre a monotonia e limitação de $\{u_n\}$.



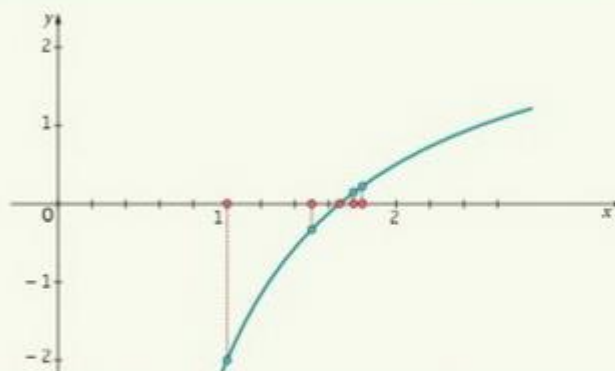
Observamos que $-2 \leq u_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, que $\{u_n\}$ é limitada. Também observamos que é monótona crescente, logo convergente. O seu limite é 3, visto este valor ser o menor dos majorantes.

- 4.2. Observemos que sendo $\{v_n\}$ dada por $v_n = f(2 - \frac{1}{n})$ os seus termos são imagens por f dos termos da sucessão de termo geral $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Visualizemos na representação gráfica os valores dos cinco primeiros termos de $\{a_n\}$ sobre o eixo das abcissas (a vermelho na figura seguinte). $1; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{4}; \frac{9}{5}; \dots$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

Verificamos que se aproximam de 2.

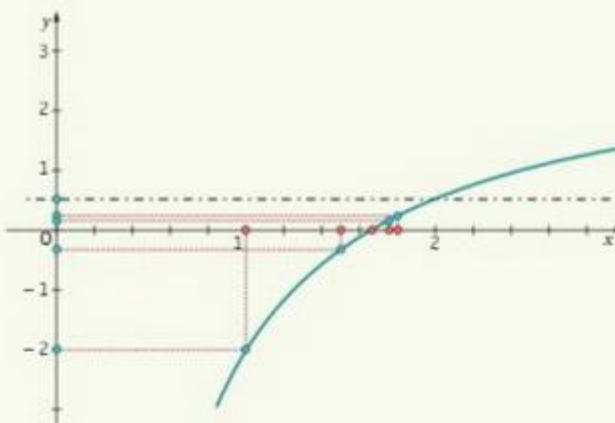


Vejamos o que acontece às respetivas imagens por f , ou seja, observemos, a partir de uma representação gráfica, o comportamento de $f\left(2 - \frac{1}{n}\right)$.

À medida que n tende para $+\infty$, os termos de $\{a_n\}$ aproximam-se de 2 e as suas imagens por f , de $\frac{1}{2}$. Provemos pela definição que $f[a_n] \rightarrow \frac{1}{2}$.

Designando $f[a_n]$ por $\{u_n\}$.

$$\begin{aligned} u_n = f\left(2 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{3\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 5}{2 - \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{2n-1}{n}} = \\ &= \frac{n-1}{2n-1} \end{aligned}$$



Queremos agora mostrar que:

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \Rightarrow \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta$$

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n-1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n-2-2n+1}{4n-2} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{4n-2} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n-2} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 4n-2 > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 4n > \frac{1}{\delta} + 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1+2\delta}{4\delta}$$

Basta que se considere p como o maior inteiro que não excede $\frac{1+2\delta}{4\delta}$, para que, se $n > p$ então $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta$,

provando-se assim que $\lim f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS RESOLVIDOS

5. Seja a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n} \end{cases}$$

- 5.1. Determine os 4 primeiros termos de (u_n) .
 5.2. Mostre por indução matemática que $u_n = \frac{1}{1 - 2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 5.3. Estude a monotonia e limitação de (u_n) .
 5.4. Mostre que (u_n) é convergente.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

5.1. A sucessão está definida por recorrência.

$$u_1 = -1; u_2 = \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3}; u_3 = \frac{-\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = -\frac{1}{5}; u_4 = \frac{-\frac{1}{5}}{1+2 \times \frac{1}{5}} = -\frac{1}{7}$$

5.2. • Verifiquemos que a expressão é válida para $n = 1$.

$$-1 = \frac{1}{1-2} \text{ [proposição verdadeira]}$$

• Suponhamos que a propriedade é válida para a ordem p , o que significa que $u_p = \frac{1}{1-2p}$ [hipótese de indução].

Então verifiquemos que é também válida para a ordem $p+1$, isto é, que $u_{p+1} = \frac{1}{1-2(p+1)} = \frac{1}{-2p-1}$

De facto, pela definição por recorrência

$$u_{p+1} = \frac{u_p}{1 - 2u_p}$$

E, pela hipótese de indução, temos

$$u_{p+1} = \frac{\frac{1}{1-2p}}{1 - \frac{2}{1-2p}} = \frac{\frac{1}{1-2p}}{\frac{1-2p-2}{1-2p}} = \frac{1}{-2p-1}$$

Fica assim provado que $u_n = \frac{1}{1-2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, uma vez que a propriedade é verificada para $n = 1$ e é hereditária (se válida para uma ordem p qualquer, também é válida para a ordem $p+1$).

5.3. Quanto à monotonia, estudemos o sinal de $u_{n+1} - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{-1-2n} - \frac{1}{1-2n} = \frac{1-2n+1+2n}{4n^2-1} = \frac{2}{4n^2-1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão é estritamente crescente.

Sendo estritamente crescente, $u_1 \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $1-2n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão é limitada, uma vez que

$$-1 \leq u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

5.4. Provamos que (u_n) é monótona e limitada, então ela é convergente.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões 1 a 10 são de "escolha múltipla". Deve responder indicando apenas a letra correspondente à opção que considera certa [assegure-se, no entanto, de que saberia justificar a sua escolha caso tal lhe fosse solicitado].

1. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1-3n}{n+2}$

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $u_{n+1} = \frac{1-3n}{n+2} + 1$ (B) $u_{n+1} = \frac{-3n}{n+3}$ (C) $u_{n+1} = \frac{2-3n}{n+3}$ (D) $u_{n+1} = \frac{-2-3n}{n+3}$

2. Seja (u_n) a sucessão tal que $u_n = \begin{cases} \frac{3}{n+2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$. Então:

(A) $u_{n+1} = \frac{3}{n+3}$

(B) $u_{n+1} = 2n+2$

(C) $u_{n+1} = \begin{cases} 2n+2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{3}{n+3} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

(D) $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{n+3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2n+2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

3. Se numa progressão aritmética $a_1 = 25$ e $a_{12} = -5$

- 3.1. então a razão é:

(A) -5

(B) -30

(C) $-\frac{30}{11}$

(D) $\frac{20}{11}$

- 3.2. a soma dos primeiros 23 termos é:

(A) -35

(B) -115

(C) -230

(D) 115

- 3.3. o termo geral é:

(A) $30n - 245$

(B) $\frac{30n - 245}{11}$

(C) $\frac{-30n + 305}{11}$

(D) $-30n + 305$

4. Numa progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo $u_1 = -7$, a soma dos n primeiros termos é 88. O número n de termos é:

(A) Não existe n

(B) 11

(C) 49

(D) -32

5. Sejam as sucessões (r_n) , (s_n) , (t_n) , (u_n) e (v_n) , cujos termos gerais são respetivamente:

$$r_n = 3n \quad s_n = \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}} \quad t_n = (-1)^n 2^{-n+1} \quad u_n = \frac{7}{2^{n+3}} \quad v_n = n^3$$

Quais delas são progressões geométricas?

(A) (r_n) e (s_n) .

(B) (s_n) , (t_n) e (u_n) .

(C) Todas.

(D) (t_n) , (u_n) e (v_n) .

6. Sejam as sucessões (u_n) e (v_n) progressões geométricas de termos gerais

$$u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}} \quad v_n = (-1)^n 3^{-n+1}$$

- 6.1. As suas razões r_u e r_v são:

(A) $r_u = 3$ e $r_v = -3$

(B) $r_u = \frac{3}{2}$ e $r_v = -\frac{1}{3}$

(C) $r_u = -\frac{3}{2}$ e $r_v = -3$

(D) $r_u = \frac{2}{3}$ e $r_v = -\frac{1}{3}$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

6.2. A soma dos dez primeiros termos de $\{v_n\}$ é:

(A) $\frac{3^{10} - 1}{4}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{3^{10} - 1}{4 \times 3^9}$

(D) $3^{10} - 1$

6.3. Sobre as sucessões $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ podemos dizer:

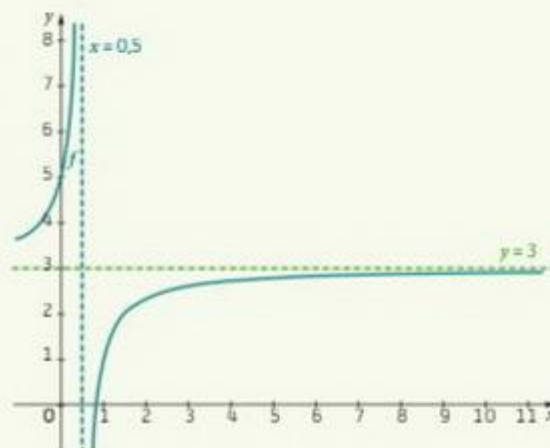
(A) $\{u_n\}$ é um infinitamente grande positivo e $\{v_n\}$ é um infinitésimo.

(B) são ambas decrescentes.

(C) são ambas limitadas.

(D) são ambas convergentes.

7. A sucessão $\{u_n\}$ é uma restrição a $\mathbb{N}$, da função real de variável real f , cuja representação gráfica se apresenta abaixo. Sabe-se que f tem por assíntotas, as retas de equação $y = 3$ e $x = \frac{1}{2}$.



Qual é o comportamento de $\{u_n\}$?

(A) $u_n \rightarrow +\infty$

(B) $u_n \rightarrow -\infty$

(C) $u_n \rightarrow 3$

(D) $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$

8. A sucessão $\{u_n\}$ é uma restrição a $\mathbb{N}$, de uma função quadrática de concavidade voltada para cima.

8.1. Sobre $\{u_n\}$ podemos afirmar que:

(A) $\{u_n\}$ é monótona crescente.

(B) $\{u_n\}$ é monótona decrescente.

(C) $\{u_n\}$ é limitada.

(D) $\{u_n\}$ é minorada.

8.2. Qual é o comportamento de $\{u_n\}$?

(A) $u_n \rightarrow +\infty$

(B) $u_n \rightarrow -\infty$

(C) $u_n \rightarrow$ para um número real

(D) $u_n \rightarrow$ nenhuma das situações anteriores.

9. A sucessão de termo geral $u_n = \frac{2}{3^n}$ é

(A) uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

(B) divergente.

(C) uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$ é termo da sucessão.

10. De uma sucessão $\{a_n\}$ sabe-se que $a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5 = 5$. Então pode concluir-se que:

(A) $\{a_n\}$ é uma progressão aritmética.

(B) se $\{a_n\}$ for uma progressão é aritmética e crescente.

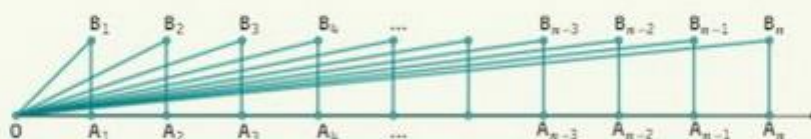
(C) $\{a_n\}$ é uma sucessão monótona.

(D) Se $\{a_n\}$ for monótona é decrescente.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

As questões que se seguem são de resposta "aberta". Leia atentamente os enunciados e efetue as resoluções completas, explicando os raciocínios apresentando os cálculos.

- 11.** Na figura as distâncias $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ são iguais à unidade. As retas $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ são perpendiculares à reta OA_1 e as distâncias $\overline{A_1B_1}, \dots, \overline{A_nB_n}$ são iguais à unidade.



- 11.1.** Determine os cinco primeiros termos e o termo geral de cada sucessão seguinte:

$$u_n: n \rightarrow \overline{A_nB_n}$$

$$v_n: n \rightarrow \overline{OA_n}$$

$$r_n: n \rightarrow \overline{OB_n}$$

$$s_n: n \rightarrow \sin(A_n \hat{O} B_n)$$

$$c_n: n \rightarrow \cos(A_n \hat{O} B_n)$$

$$t_n: n \rightarrow \operatorname{tg}(A_n \hat{O} B_n)$$

- 11.2.** Estude a monotonia e limitação dessas sucessões.

- 12.** Considere as sucessões $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ de termos gerais

$$u_n = \begin{cases} \frac{2-n}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} n^{-2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n-1}{(n+1)^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Para cada uma

- 12.1.** calcule:

- os cinco primeiros termos;
- o termo de ordem 1999 e o termo de ordem 3000;
- o termo de ordem $n+1$.

- 12.2.** averigue se 0,3 ou 0,01 é valor de algum dos seus termos.

- 13.** Considere a sucessão $\{u_n\}$ de termo geral $u_n = -\frac{3n}{n+2}$.

- 13.1.** Calcule os cinco primeiros termos, o termo de ordem 100 e o de ordem 1000.

- 13.2.** Averigue se $-2,7$ é valor de algum termo dessa sucessão.

- 13.3.** Mostre que a sucessão é monótona.

- 13.4.** Mostre que a sucessão tem infinitos termos inferiores a $-2,9$.

- 13.5.** Mostre que $-3 < u_n \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 14.** No estudo da monotonia da sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{5n-3}$ um aluno executou os seguintes passos, que estão incompletos. Transcreva para o seu caderno e complete de modo a obter um texto correto.

Como $0 < n < n+1$ então temos $5n < 5(n+1)$ pois multipliquei ambos os ... por ... Também será $0-3 < 5n-3 < 5(n+1)-3$ pois adicionei ... a ambos os ... Ora sabemos que a função $f: x \mapsto \sqrt{x}$ é crescente em $\mathbb{R}_0^+$ donde $\sqrt{5n-3} < \sqrt{5(n+1)-3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $u_n < u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, o que significa que a sucessão (u_n) é ...

- 15.** Mostre, por um processo análogo ao utilizado na questão anterior, que a sucessão de termo geral $v_n = 2 - \sqrt{3n-4}$ é decrescente.

- 16.** Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- 16.1.** Nenhuma sucessão decrescente é minorada.
16.2. Nenhuma sucessão crescente é limitada superiormente.
16.3. Toda a sucessão decrescente é majorada.
16.4. Nenhuma sucessão monótona é limitada.

- 17.** Considere as seguintes sucessões das quais se conhece:

(i) $-3, -1, 1, \dots$

(ii) $1, -3, 9, \dots$

(iii) $u_n = 3n - 10, \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $v_n = 2^{1-n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Supondo que se mantém a regularidade da formação dos termos:

- 17.1.** indique os cinco primeiros termos de cada uma.
17.2. distinga as progressões aritméticas das progressões geométricas e indique a respetiva razão.
17.3. calcule a soma dos 20 primeiros.
17.4. classifique-as quanto à limitação.
17.5. classifique-as quanto à monotonia.
- 18.** Uma substância líquida colocada num frasco destapado, perde por evaporação um décimo do seu volume por dia. Se no frasco tiverem sido colocados 1000 cm^3 , ao fim de quanto tempo restará no frasco menos de 5 cm^3 ?
- 19.** Uma população de bactérias aumenta 15% cada 12 horas. Se no início da contagem havia 100 bactérias quantas haverá passada uma semana?
- 20.** Sendo a taxa de rendimento anual 4,5%, quanto rendem os juros de mil euros após 3 anos levantando cada ano o rendimento?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 21.** No princípio deste ano (ano 0), o senhor Fortunato, que não confia na banca, escondeu debaixo do colchão a quantia de 100 000 euros em notas.
Claro que ele não teve em conta que, devido à inflação, as suas economias irão desvalorizar-se ao ritmo de cerca de 8% ao ano.

Designe por C_n o valor real (em euros) das economias do senhor Fortunato ao fim de n anos ($n \in \mathbb{N}$).

- 21.1.** Ao fim de um ano,

$$C_1 = 100\,000 - 100\,000 \times 0,08 = 100\,000 \times (1 - 0,08),$$

donde,

$$C_1 = 100\,000 \times 0,92 = 92\,000$$

Do mesmo modo, determine C_2 , C_3 e C_4 .

- 21.2.** Exprima C_{n+1} em função de C_n e C_n em função de n .

- 21.3.** Calcule o valor do capital (em "euros atuais") ao fim de 10 anos.

- 21.4.** O senhor Fortunato recusa-se a acreditar que decorridos 15 anos o seu dinheiro valerá menos de 30 000 euros em "euros atuais"!
Utilize a calculadora para lho provar.

- 21.5.** E ao fim de 20 anos, quanto valerá aquele "tesouro" tão bem guardado?

- 22.** O senhor Ventura ganhou 50 000 € no Totoloto e resolveu ir ao banco para se informar sobre a modalidade a escolher para depositar o seu dinheiro.
Um funcionário atendeu-o e informou-o que poderia depositar o dinheiro na modalidade de juros simples ou na de juros compostos.

- 22.1.** Escolhendo o senhor Ventura a modalidade de juros simples à taxa de 4%, e designando por S_n o seu capital, em euros, ao fim de n anos, verifique que:

$$S_1 = 50\,000 + 2000$$

$$S_2 = 50\,000 + 2 \times 2000$$

$$S_3 = 50\,000 + 3 \times 2000$$

- 22.2.** Deduza agora uma expressão que represente S_n .

- 22.3.** Se a escolha recair sobre a modalidade de juros compostos, à taxa de 6% e designando por C_n o seu capital, ao fim de n anos, em euros, verifique que:

$$C_1 = 50\,000 \times 1,06$$

$$C_2 = 50\,000 \times 1,06^2$$

$$C_3 = 50\,000 \times 1,06^3$$

Ao fim de 10 anos, quanto teria amealhado o senhor Ventura? E ao fim de n anos?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

23. Prove que, dada a sucessão de termo geral $u_n = (4 - n)^2$:

23.1. o valor 1000 não pertence ao conjunto dos seus termos.

23.2. não é monótona.

23.3. não é progressão aritmética nem geométrica.

24. Dada a sucessão de termo geral $u_n = 3^{-n}$

24.1. Prove que é monótona decrescente.

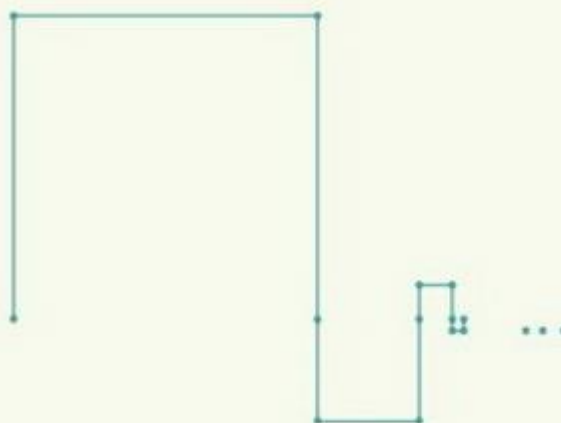
24.2. Prove que não é uma progressão aritmética.

24.3. Prove que é uma progressão geométrica.

24.4. Indique um minorante e um majorante do conjunto dos seus termos, caso existam. Conclua se a sucessão dada é ou não limitada.

24.5. Calcule a soma dos dez primeiros termos.

25. Um caracol faz um percurso de 3 lados de cada um dos n quadrados, de forma muito semelhante ao sugerido pela figura. O lado de cada quadrado é um terço do anterior. Tomando para unidade o lado do primeiro quadrado quantas unidades percorreu se for $n = 5$ quadrados? E se $n \rightarrow +\infty$?



26. Sobre as sucessões definidas pelos termos gerais seguintes:

$$a_n = n^2 - 1$$

$$b_n = (n - 1)^2$$

$$c_n = \frac{5}{n} - 1$$

$$d_n = \frac{4 - n}{n}$$

$$e_n = \frac{n^2 - 1}{n}$$

$$f_n = (-n)^2;$$

$$g_n = \sqrt{n + 5}$$

$$h_n = 1 - \sqrt{n + 5}$$

$$j_n = (-3^{-1}) - n;$$

$$k_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$l_n = 10 - \cos\left((2n - 1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_n = \frac{\sin(n) - 1}{n}$$

Estude o seu comportamento quanto ao limite.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

27. Estude a monotonia e a limitação de cada uma das sucessões do exercício anterior.

28. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

28.1. Se uma sucessão tende para mais infinito então é crescente a partir de certa ordem.

28.2. Se uma sucessão tende em módulo para mais infinito então não é majorada nem minorada.

28.3. Nenhuma sucessão divergente é limitada.

28.4. Nenhuma sucessão limitada é divergente.

28.5. Há sucessões limitadas que são convergentes.

28.6. Toda a sucessão convergente é limitada.

29. Uma sucessão $\{u_n\}$ é uma restrição a $\mathbb{N}$, da função real de variável real f tal que

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x+3}.$$

29.1. Determine os 5 primeiros termos.

29.2. Averigue se $\{u_n\}$ é monótona.

29.3. Indique um menorante e um majorante do conjunto dos seus termos.

29.4. Mostre pela definição que -1 é o limite de $\{u_n\}$.

30. Dada f , função real de variável real tal que $f(x) = -1 + \frac{1}{x+3}$ e a sucessão $\{v_n\}$ definida por $v_n = f(2n-3)$

30.1. Represente graficamente f e assinale a cor diferente os 5 primeiros termos de $\{v_n\}$.

30.2. Determine o termo geral de $\{v_n\}$.

30.3. Averigue se $\{v_n\}$ é monótona.

30.4. Mostre pela definição que -1 é o limite de $\{v_n\}$.

31. Dada f , função real de variável real tal que $f(x) = -1 + \frac{1}{x+3}$ e a sucessão $\{w_n\}$ definida por $w_n = f\left(\frac{1}{n} - 3\right)$

31.1. Represente graficamente f e assinale a cor diferente os 5 primeiros termos de $\{w_n\}$.

31.2. Determine o termo geral de $\{w_n\}$.

31.3. Averigue se $\{w_n\}$ é monótona.

31.4. Mostre que $\{w_n\}$ é um infinitamente grande.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 32.** Usando o teorema das sucessões enquadadas estude a convergência das sucessões definidas pelos termos gerais

$$s_n = \frac{10 \operatorname{sen}(n) - 1}{n} \quad u_n = \frac{10 \operatorname{sen}^2(30n) - 1}{n} \quad v_n = \frac{\cos(n) - 1000}{n} \quad t_n = \frac{n+1}{n^6}$$

- 33.** Dadas as sucessões convergentes definidas pelos termos gerais

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2} - 1 & b_n &= \frac{(n-1)^2}{n^2} & c_n &= \frac{5}{n} - 10 & d_n &= \frac{4-7n}{n} \\ e_n &= \frac{n^6-1}{n^6} & f_n &= [-n]^{-2} & g_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & h_n &= \operatorname{tg}(n\pi) \end{aligned}$$

- 33.1.** Qual é o limite de cada uma?

- 33.2.** Usando as operações sobre sucessões convergentes indique o limite de

- a) $a_n \times g_n$; $d_n \times h_n$;
 b) $a_n + g_n$; $b_n - c_n$; $f_n - g_n$;
 c) $\frac{a_n}{g_n}$; $\frac{f_n}{e_n}$;
 d) $[a_n]^2$; $[g_n]^3$; $[h_n]^5$;
 e) $\sqrt{g_n}$; $\sqrt[5]{e_n}$;

- 34.** Demonstre por indução matemática que o produto de um número natural par pelo seu consecutivo é um número par.

- 35.** Demonstre por indução matemática que a soma de n números naturais ímpares é o quadrado de n , ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

- 36.** Demonstre por indução matemática que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

SOLUÇÕES

TEMA 1

TRIGONOMETRIA

PÁG. 6

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (A) 5. (B)
 6. (C) 7. (B) 8. (D) 9. (B) 10. (D)
 11. (D) 12. (C) 13. (D) 14. (B) 15. (C)
 16. (B) 17. (D) 18. (C) 19. (D) 20. (C)

RESPOSTA ABERTA

21. 23,5 m (aprox.)
 22. 12,30 cm e 101,49 cm²
 23. O barco dista cerca de 42 m de A e cerca de 36,4 m de C.
 24. 41,76 m² aproximadamente.
 25. 47,92°
 26. $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ = \sin 125^\circ = 0,82$
 $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ = \sin 145^\circ = 0,57$
 $\operatorname{tg}(55^\circ) = 1,43$
 $\cos 125^\circ = -0,57$; $\operatorname{tg} 125^\circ = -1,43$
 $\cos 145^\circ = -0,82$; $\operatorname{tg} 145^\circ = -0,70$
 $\sin 215^\circ = -0,57$; $\cos 215^\circ = 0,82$

28.1. $]-90^\circ; 90^\circ[$ 28.2. $]-\frac{\pi}{2}; 0[$

29.2. $\sqrt{18 + 18 \times \frac{\sqrt{13}}{13}} = 4,79$

31.1. $\frac{3\pi}{4}$ rad; 3π metros. 31.2. $[-2\sqrt{3}; -2]$

32.2. 1,72 unidades de área.

33.1. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

33.2. $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

34.1. a 34.2. $\alpha = \frac{7\pi}{6} \vee \alpha = \frac{11\pi}{6}$

34.3. O cosseno.

35.1. $-\sin b$ 35.2. $-2 \cos b$

35.3. $3 \sin b + \cos b$

37.1. $\alpha = 119,54^\circ$ 37.2. $\alpha = 111,72^\circ$

37.3. $\alpha = 278,64^\circ$ 37.4. $\alpha = 323,13^\circ$

37.5. $\alpha = 151,32^\circ$ 37.6. $\alpha = 243,43^\circ$

37.7. $\alpha = 105,95^\circ$ 37.8. $\alpha = 205,84^\circ$

38.1. $x = (2k+1)\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

38.2. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

38.3. $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

38.4. $x = k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.1. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.2. $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.3. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.4. $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \vee x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.5. $x = -\frac{9\pi}{20} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

39.6. $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

- 41.1. a) 30 km
 b) $(10 + 10\sqrt{3})$ km
 c) $20\sqrt{2}$ km

41.2. $10 - 10 \operatorname{tg} \alpha + \frac{20}{\cos \alpha}$ 41.4. $\alpha = 0,524$

42.1. $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$ 42.2. $]0; 1[$

42.4. O. O quadrilátero reduz-se ao centro do quadrado.

43.1. (8)

43.2. $\frac{\pi}{4} - \cos x \sin x$. Os extremos são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

44.1. 6,16 m²

- 44.3. a) $\alpha = 1,4$ rad
 b) Quais as características do candeeiro para que a área iluminada seja de 9 m²?

45.2. $x = 0,42$

46.2. 39,6 m 46.3. 0,738 rad (aprox.)

GEOMETRIA ANALÍTICA

PÁG. 21

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. (A) 2. (B) 3. (A) 4. (B) 5. (B)
 6.1. (B) 6.2. (B) 6.3. (C) 7. (A) 8. (C)
 9. (A) 10. (A) 11. (A) 12. (C) 13. (C)
 14. (C) 15. (D) 16. (A) 17.1. (A) 17.2. (B)
 17.3. (B) 17.4. (B) 17.5. (D)

RESPOSTA ABERTA

18.1. -2 ; $\alpha = 95^\circ$; 18.2. -2 ; $\alpha = 100^\circ$;

18.3. -10 ; $\alpha = 135^\circ$;

19.1. -1

19.2. 1

19.3. -1

19.4. 0

20. $-\frac{9}{2}$

21.1. $k = \frac{3}{2}$;

21.2. $k = 2$;

21.3. $k = 4$

22.1. $[-3, 5]$; 22.2. $\{8, 6\}; \{-8, -6\}$;

- 22.3. perpendicular a $\vec{a}: \{2, 2\}$ e $\{-2, -2\}$;
 perpendicular a $\vec{b}: \{-3, 7\}$ e $\{3, -7\}$;
 perpendicular a $\vec{c}: \{-4, -11\}$ e $\{4, 11\}$;
 perpendicular a $\vec{d}: \{-3, 1\}$ e $\{3, -1\}$.

25.2. $(x, y, z) = \{0, 5, 0\} + k\{0, 0, 1\}$, $k \in \mathbb{R}$

25.3. $x + 2y = 10$

26.3. $(x, y, z) = \{0, 0, 0\} + k\{0, 3, 1\}$, $k \in \mathbb{R}$

26.4. Área = 4 u.a.

SOLUÇÕES

- 27.3. $(\sqrt{12}, -10, 12)$
- 27.4. Cerca de 28% do volume da caixa vazia.
- 28.1. É um ponto de coordenadas $(-1, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$
- 28.2. Conjunto vazio, o sistema é impossível, os planos são paralelos.
29. Para $k = 5$, α perpendicular a β ; para $k \neq 5$ são oblíquos. Para $k = 0$, γ perpendicular a β ; para $k \neq 0$ são oblíquos. Os planos α e γ interseitam-se numa reta qualquer que seja k .
30. $3x - 2y + 2z - 1 = 0$
31. $13x + y + 2z = 0$
32. $(-1, -3, 0)$
33. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{-3}$
34. $5x + 8y + z - 24 = 0$
35. $(-5, -3, 7)$
36. Cerca de 102° .
- 37.1. São coplanares pois interseitam-se no ponto $(-3, 4, 1)$
 $x - y - z + 6 = 0$
- 37.2. Não são coplanares.
38. $(\frac{23}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{1}{3})$; $d = \sqrt{\frac{794}{3}}$
40. $\pi(x, y, z) = [1, 1, 1] + k[2, 3, 1]$ com $k \in \mathbb{R}$
41. $-x + y + z = 0$
- 42.1. a) Vértices do cubo:
 $F(2, -2, 0)$; $G(2, 2, 0)$; $H(-2, 2, 0)$; $I(-2, -2, 0)$;
 $J(2, -2, 4)$; $M(-2, 2, 4)$; $N(-2, -2, 4)$;
 Vértices da pirâmide:
 $A(3, -3, 0)$; $B(3, 3, 0)$; $C(-3, 3, 0)$; $D(-3, -3, 0)$;
 $E(0, 0, 12)$
 b) $x = y = \frac{12 - z}{4}$
 c) $4x + z = 12$
 d) $(x, y, z) = (0, 0, 12) + k(1, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- 42.2. O volume da pirâmide é $\frac{9}{4}$ do volume do cubo.
- 43.1. $\frac{128}{3}$
- 43.2. $D(3, 1, 4)$; $E(3, 3, 4)$; $F(1, 3, 4)$; $G(1, 1, 4)$
- 43.3. $(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$
- 43.4. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 68 \wedge x = 2$
- 43.5. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-8}{-8}$
- 43.6. $x + y - 4z - 8 = 0$
- 43.7. $(x, y, z) = (4, 0, 0) + k(0, 4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- 44.2. $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$; $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$; $C(-2\sqrt{2}, 0, 0)$;
 $D(0, -2\sqrt{2}, 0)$; $E(2\sqrt{2}, 0, 4)$; $F(0, 2\sqrt{2}, 4)$;
 $G(-2\sqrt{2}, 0, 4)$; $H(0, -2\sqrt{2}, 4)$

44.3. a) $x = 0 \wedge y = -2\sqrt{2} \wedge 0 \leq z \leq 4$

44.3. b) $x^2 + y^2 + (z+4)^2 \leq 8 \wedge z = -4$

44.4. $8\sqrt{2} + 8\sqrt{6}$

44.5. $\sqrt{2}x + z = 0 \wedge y = 0$

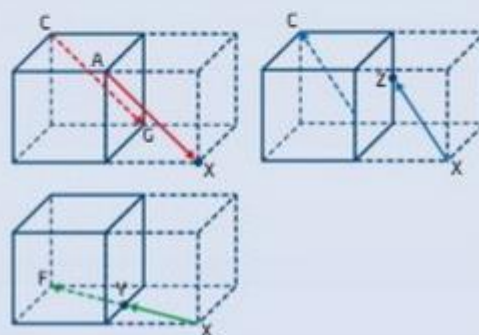
44.6. $-x + y + \sqrt{2}z - 4\sqrt{2} = 0$

Área: $4\sqrt{2}$ u.a.

44.7. $-x + y + \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} = 0$

44.8. $(x, y, z) = (0, 2\sqrt{2}, 0) + k(1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

- 45.1. X é o ponto da semirreta EH tal que $\overline{AX} = \overline{CX}$, Y é o ponto médio de [HG] e Z é o ponto médio de [BG]



45.2. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 12$

É a superfície esférica de centro no ponto X e que contém o ponto B.

45.3. $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

45.4. $\frac{7}{3}$



45.5. $x - y + 2z - 2 = 0$

45.6. $x - 1 = -y - 1 = \frac{z-1}{2}$

46. 20 tipo A e 60 tipo B.

47.1. $(5, 3)$ é admissível.

47.2. $y = 1 \wedge y = 2x + 4$

47.3. $B(1, 3)$

47.4. Por exemplo, $3y + 2x = c$

48. Deve produzir 40 kg de carne picada e 60 kg de almôndegas para obter lucro máximo no valor de 240 euros.

SOLUÇÕES

TEMA 2

PÁG. 40

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. (C) 2. (C) 3. (C) 4. (D) 5. (B)
 6. (A) 7. (C) 8. (A) 9. (C) 10. (A)
 11. (D) 12. (D) 13. (D) 14. (D) 15. (C)
 16. (C) 17. (C) 18. (C) 19. (C) 20. (A)
 21. (A) 22. (A) 23. (D) 24. (B) 25. (A)
 26. (A) 27. (C) 28. (D) 29. (C) 30. (D)
 31. (B) 32. (B) 33. (D) 34. (A) 35. (B)
 36. (D) 37. (D) 38.1. (C) 38.2. (D) 39. (C)
 40. (D)

RESPOSTA ABERTA

41.1. $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$

Assintotas: $x = 3$ e $y = 2$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Varição de f	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$

41.2. $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

C.S. = $\left] \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 3 \right[\cup \left] \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$

42. • Por exemplo, $y = 5 + \frac{1}{x}$ ou $y = 5 - \frac{1}{2x}$
 • Por exemplo, $y = -4 + \frac{1}{x-0,3}$ ou $y = -4 - \frac{2}{x-0,3}$

- 43.1. 22,5 °C
 43.2. $y = 155$. A temperatura dos reagentes vai aumentando e tende a aproximar-se tanto quanto se queira de 155 °C, sem contudo, atingir este valor.
 43.3. Ao fim de 5 min 36 s, aproximadamente.
 44.1. Cerca de 98,6%.
 44.2. Durante pouco mais de 10 meses.
 44.3. $\text{trnv}_{[0,10]} = -6,3\%$ por mês. As pilhas perdem, por mês, em média, 6,3% da sua eficiência, ao longo dos 10 primeiros meses de utilização.
 45.1. Aproximadamente 16 286 cm².
 45.2. $t(d) = \frac{-2,5 d}{d-180}$
 45.3. 12,5 s
 46.1. 10 km.
 46.2. 6h 30 min.
 46.3. Durante cerca de 3h 28 min.
 46.4. $A(t) = 0$ representa o momento em que a altitude do balão é nula, ou seja, em que o balão cai no mar. Tal acontece entre as 15 e as 16 h decorridas desde o lançamento.
 47.1. 175 °C, aproximadamente.
 47.2. 2 min, aproximadamente.
 47.4. A assintota $y = 180$ representa o facto de a temperatura do forno ser crescente e aproximar-se de 180 °C cada vez mais e tanto quanto se queira, sem no entanto atingir aquele valor.

48.1. $f(x) = 3 + \frac{18}{x-5}$

48.2. $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ $CD_f = \mathbb{R} - \{3\}$

48.3. $x = -13$

48.4. $x = 3$ e $y = 1$

48.5. $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 1, 5\}$
 Conj. de chegada: $\mathbb{R}$ $(f \circ g)(x) = \frac{3x+15}{2x}$

49.1. $]-\infty, -3[\cup [0, 3[\cup]3, +\infty[$

49.2. $a = 4$ $b = 12$ $c = 3$

- 50.1. Foram vendidos 8,5 milhões de cartões quando o montante de prémios a distribuir era de 10 centenas de milhares de euros.
 50.2. A partir de 13,66 centenas de milhares de euros de montante de prémio.
 50.3. Sim, pois a função é crescente em $]0, +\infty[$

51.2. $D = \mathbb{R} - \{-3\}$ $CD = \mathbb{R} - \{1\}$

51.3. a) $0; \frac{7}{6}$

b) $]-\infty, -3[\cup [0, 3[\cup]3, +\infty[$

52.1. 0; 3; 15 (m)

52.2. 12 m

52.3. 5 m/s; 4,5 m/s; 4,25 m/s; 4,1 m/s; 4,01 m/s.
 Será 4 m/s.

53.2. $f(1+h) = h^2 + 4h + 3$; $m_{\text{PM}} = h + 4$; tende para 4.

54.1. $-\frac{1}{1+h}$; -1

54.2. $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

55.1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$

55.2. $f'(-2) = -4$; $f'(2) = 4$; $f'(0) = 0$; $f'(1)$ e $f'(-1)$ não existem.

55.3. São pontos angulosos onde não há reta tangente e a curva não tem derivada.

56.1. 3; 0; -2; $-\frac{1}{2}$

58. $\text{Min} = -\frac{16}{3}$ para $x = -\frac{1}{3}$

59.1. F; F; V; F

59.2. V; F; F; F

60.1. $x = 3$; $x = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$

60.2. $]-\infty, 1 - \sqrt{6}[\cup [1 + \sqrt{6}, 3]$

60.3. $x = 1$; $x = \pm \frac{\sqrt{14}}{6}$

60.4. A restrição de f a $[3, +\infty[$

60.5. Negativo; zero

61.1. Entre 8,5 e 8,6 s.

61.2. 11,2 mm/s

61.3. a) 10,8 mm/s b) 11,6 mm/s

62.2. $V_{\text{max}} = \frac{6859}{27} \text{ dm}^3$; cubo de aresta $\frac{19}{3} \text{ dm}$.

SOLUÇÕES

63. III. Gráfico I e II não podem ser pois a derivada é do tipo $y = a$ com $a > 0$.

64.2. a) 4,8 m

b) 3 h 12 min

c) A afirmação é falsa pois a função é decrescente e a taxa média de variação da função é negativa em qualquer intervalo do seu domínio.

65.1. 97,5%

65.2. Pouco mais de 9 h.

65.3. -13,4% por hora de utilização; significa que a eficácia está a diminuir 13,4% por hora de utilização.

66.2. 2 não pertence a D_g

66.3. $]-5, 2[$

66.4. $h^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3+x}$; $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

66.5. $(g \circ h)(x) = -3x^2 - 7x - 2$; $D_{g \circ h} = \mathbb{R} - \{-2\}$

66.6. 7

67.1. $(f \circ g)(x) = 1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; $D = \mathbb{R}$

67.2. $x = k4\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

67.3. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

67.5. a) $[0, 2]$

b) $[-2\pi, 0]$

68.1. $(f \circ g)(x) > 0$ em $]-2, 5[\cup]5, +\infty[$
 $(f \circ g)(x) < 0$ em $]-\infty, -2[$
 Zero em -2 e 5 .

68.2. $-1; 2$

69. $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x-3}$; $D = \mathbb{R} - \{3\}$; $CD = \mathbb{R} - \{-1\}$

70.1. $-1,3 + \sqrt{10}$

70.2. $]-\infty, 3[$

70.3. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

70.4. 2, pois $f(2)$ não pertence a D_f

70.5. $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x+1}$; $D = \mathbb{R} - \{-1\}$; $CD = \mathbb{R} - \{3\}$

71.1. -2

71.2. $\{2, 2\}$

72. (I) Para o radicando ficar positivo.

73.1. $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

73.2. Eq. impossível

74.1. 4,6 m/s é a velocidade instantânea aos 3 s.

74.2. Reta tangente $y = 7x - 15$; o ponto pertence à tangente.

74.3. Máx para $x = -\frac{10}{9}$ e min para $x = 0$.

75.1. 0,5

75.3. a) $(f \circ g)(x) = 3x - 6 + \frac{2}{3x-6}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $x = 2$ e $y = 3x - 6$

c) $2, \frac{51 - \sqrt{153}}{18} \cup \left] \frac{51 + \sqrt{153}}{18}, +\infty \right[$

76.1. $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

76.2. 5 unidades de área.

77.2. $x = 4$; $V_{\max} = \frac{128}{3}$

77.3. $5y + z = 5$

78.1. A(3, 2) B(4, 3) C(1, 5) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

78.2. 2 unidades de área

78.3. $h(x) = -(x-3)^2 + 2$

78.4. $T\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$

78.5. $y = -2x + 7$

78.6. $y = 2 + \frac{1}{x-3}$

79.1. $]-\infty, 1 - 2\sqrt{3}[\cup]1 + 2\sqrt{3}, +\infty[$

79.2. $T(2, 3)$ $y = -2x + 7$

79.3. $\frac{2}{3}$

80.1. $Q\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$

80.3. $Q\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}, \frac{22 + 2\sqrt{13}}{9}\right)$

Função crescente em $\left]0, \frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{2 + \sqrt{13}}{3}, 3\right[$.

81.1. A ordenada do ponto B é 2 e $h(x) = x + 1$

81.2. A abscissa do ponto A é -1 e $g(x) = x^2 + x$

81.3. $]-1, 2[\cup]4, +\infty[$

81.4. $x = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$; $x = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$

81.5. $\text{Max} = f\left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right) = 2,74$

$\text{Min} = f\left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right) = -1,35$

TEMA 3

PÁG. 68

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. (D)	2. (C)	3.1. (C)	3.2. (B)	3.3. (C)
4. (B)	5. (B)	6.1. (B)	6.2. (C)	6.3. (A)
7. (C)	8.1. (D)	8.2. (A)	9. (C)	10. (D)

RESPOSTA ABERTA

11.1. $u_n = 1$; $v_n = n$; $r_n = \sqrt{n^2 + 1}$; $s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$
 $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$; $t_n = \frac{1}{n}$

11.2. u_n é constante e limitada; v_n é crescente, admite minorantes mas não é limitada;
 r_n é crescente, admite minorantes mas não é limitada;
 s_n é decrescente e limitada ($0 < s_n \leq s_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$);
 c_n é decrescente e limitada ($0 < c_n \leq c_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$);
 t_n é decrescente e limitada ($0 < t_n \leq t_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

SOLUÇÕES

12.1. a) $u_1 = 3; u_2 = 0; u_3 = 1; u_4 = -\frac{1}{2}; u_5 = \frac{3}{5}$

$v_1 = \frac{1}{4}; v_2 = \frac{1}{4}; v_3 = \frac{5}{16}; v_4 = \frac{1}{16}; v_5 = \frac{1}{4}$

b) $u_{1999} = \frac{3}{1999}; u_{2000} = -\frac{1499}{1500}$

$v_{1999} = \frac{3997}{4\,000\,000}; v_{2000} = \frac{1}{900\,000}$

c) $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{1+n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$v_{n+1} = \begin{cases} \frac{2n+1}{(n+2)^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{(n+1)^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

12.2. 0,01 é o 10.^o termo de $\{v_n\}$

13.1. $u_1 = -1; u_2 = -\frac{3}{2}; u_3 = -\frac{9}{5}; u_4 = -2; u_5 = -\frac{15}{7}$

$u_{100} = -\frac{50}{17}; u_{1000} = -\frac{500}{167}$

13.2. É u_{18}

13.3. A sucessão é monótona decrescente

13.4. A partir de $n = 58$, todos os termos são inferiores a $u_{58} = -2,9$

14. membros; $S; -3$; membros; $<$; $n \in \mathbb{N}$; $<$; $n \in \mathbb{N}$; monótona crescente

16. A afirmação 16.3. é verdadeira.

17.1. (i) $-3; -1; 1; 3; 5$ (ii) $1; -3; 9; -27; 81$

(iii) $-7; -4; -1; 2; 5$ (iv) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$

17.2. (i) progressão aritmética de razão 2;
(ii) progressão geométrica de razão -3 ;
(iii) progressão aritmética de razão 3;
(iv) progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

17.3. (i) $S_{20} = 320$ (ii) $S_{20} = \frac{1-3^{20}}{4}$

(iii) $S_{20} = 430$ (iv) $S_{20} = 2 - 2^{-18}$

17.4. (i); (ii) e (iii) são não limitadas; (iv) é limitada

17.5. (i) Crescente; (ii) Não monótona; (iii) Crescente;
(iv) Decrescente.

18. Ao fim de 51 dias.

19. 708 bactérias

20. 135 €

21.1. $C_2 = 84\,640$ €; $C_3 = 77\,868,80$ €; $C_4 = 71\,639,30$ €.

21.2. $C_n = 100\,000 \times 0,92^n$

21.3. Ao fim de 10 anos: 43 438,85 €

21.5. Valerá 18 869,33 €

22.2. $S_n = 50\,000 + 2000n$

22.3. Ao fim de 10 anos: 89 542 €;

Ao fim de n anos: $50\,000 \times 1,06^n$

24.4. $0 < u_n < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão é limitada.

24.5. $S_{10} = \frac{1}{2} \times [1 - 3^{-10}]$

25. Para $n = 5$, cerca de 4,48 unidades;

Se $n \rightarrow +\infty$, $\frac{9}{2}$ unidades.

26. $a_n \rightarrow +\infty; b_n \rightarrow +\infty; c_n \rightarrow -1; d_n \rightarrow -1; e_n \rightarrow +\infty;$
 $f_n \rightarrow +\infty; g_n \rightarrow +\infty; h_n \rightarrow -\infty; j_n \rightarrow -\infty; k_n \rightarrow \infty;$
 $l_n \rightarrow 10; p_n \rightarrow 0;$

27.

Sucessão	Monotonia	Limitação
$\{a_n\}$	Crescente	Minorada mas não limitada
$\{b_n\}$	Crescente	Minorada mas não limitada
$\{c_n\}$	Decrescente	Limitada
$\{d_n\}$	Decrescente	Limitada
$\{e_n\}$	Crescente	Minorada mas não limitada
$\{f_n\}$	Crescente	Minorada mas não limitada
$\{g_n\}$	Crescente	Minorada mas não limitada
$\{h_n\}$	Decrescente	Majorada mas não limitada
$\{j_n\}$	Decrescente	Majorada mas não limitada
$\{k_n\}$	Não monótona	Nem majorada; nem minorada
$\{l_n\}$	Constante	Limitada
$\{p_n\}$	Não monótona	Limitada

28. Afirmações verdadeiras: 28.2.; 28.5. e 28.6.

29.1. $u_1 = -\frac{3}{4}; u_2 = -\frac{4}{5}; u_3 = -\frac{5}{6}; u_4 = -\frac{6}{7}; u_5 = -\frac{7}{8}$

29.2. $\{u_n\}$ é monótona decrescente.

29.3. Minorante: -1 ; Majorante: $-\frac{3}{4}$.

30.2. $v_n = \frac{1-2n}{2n}$

30.3. $\{v_n\}$ é monótona decrescente.

31.2. $w_n = n - 1$

31.3. $\{w_n\}$ é monótona crescente.

32. São infinitésimos.

33.1. $a_n \rightarrow 1; b_n \rightarrow 1; c_n \rightarrow -10; d_n \rightarrow -7; e_n \rightarrow 1; f_n \rightarrow 0;$
 $g_n \rightarrow e; h_n \rightarrow 0.$

33.2. a) $a_n \times g_n \rightarrow e; d_n \times h_n \rightarrow 0$

b) $a_n + g_n \rightarrow 1 + e; b_n - c_n \rightarrow 11; f_n - g_n \rightarrow -e;$

c) $\frac{a_n}{g_n} \rightarrow \frac{1}{e}; \frac{h_n}{e_n} \rightarrow 0$

d) $\{u_n\}^2 \rightarrow 1; \{g_n\}^3 \rightarrow e^3; \{h_n\}^3 \rightarrow 0$

e) $\sqrt{g_n} \rightarrow e; \sqrt[3]{e_n} \rightarrow 1$