

TESTE 2

TEMA 1

Parte I

A Parte I deste teste é constituída por perguntas de “escolha múltipla”. Indique apenas a letra que corresponde à resposta certa (mas certifique-se que saberia justificar a sua escolha se tal lhe fosse solicitado).

1. Considere as seguintes afirmações:

(I) Sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dois ângulos quaisquer, se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ então $\operatorname{tg} \mathbf{a} < \operatorname{tg} \mathbf{b}$.

(II) Sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dois ângulos quaisquer se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ e $\operatorname{sen} \mathbf{a} > \operatorname{sen} \mathbf{b}$ então $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pertencem ao 3.º ou 4.º quadrantes.

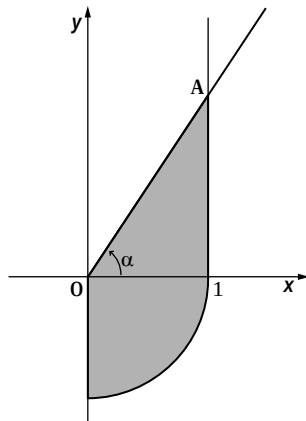
(III) Qualquer que seja a amplitude $\mathbf{a}$ de um ângulo existe uma amplitude $\mathbf{b}$ tal que $\operatorname{sen} \mathbf{a} + \cos \mathbf{b} = 0$.

(A) São todas falsas.

(B) São todas verdadeiras.

(C) Só a primeira é falsa.

(D) Só a terceira é verdadeira.

2. Na figura estão representados em referencial o.m. $\mathbf{xOy}$:

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1.
- uma semirreta paralela ao eixo $\mathbf{Oy}$, com origem no ponto (1, 0).
- um ponto A pertencente a esta semirreta.
- um ângulo de amplitude $\mathbf{a}$, cujo lado origem é o semieixo $\mathbf{Ox}$, e cujo lado extremidade é a semirreta $\mathbf{OA}$.

Qual das expressões seguintes representa a área da região sombreada, em função de $\mathbf{a}$?

(A) $p + \frac{\operatorname{tg} \mathbf{a}}{2}$

(B) $p + \frac{2}{\operatorname{tg} \mathbf{a}}$

(C) $\frac{p}{4} + \frac{\operatorname{tg} \mathbf{a}}{2}$

(D) $\frac{p}{4} + \frac{2}{\operatorname{tg} \mathbf{a}}$

3. Considere num referencial o.n. $\mathbf{xOy}$ as retas $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, definidas respetivamente por:

$\mathbf{p}: \mathbf{y} = -2\mathbf{x} - 3$

$\mathbf{q}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (8, 5) + \mathbf{k}(-2, 4), \mathbf{k} \in \mathbf{R}$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas duas retas:

(A) 0°

(B) 180°

(C) 90°

(D) 45°

4. Considere num referencial o.n. $\mathbf{Oxyz}$, dois planos concorrentes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de equações

$\mathbf{a}: \mathbf{x} - \mathbf{y} + 3\mathbf{z} = 1$ e $\mathbf{b}: \mathbf{x} + \mathbf{y} - 4\mathbf{z} = 7$

Seja $\mathbf{r}$ a reta de interseção dos dois planos. Qual dos pontos seguintes pertence a $\mathbf{r}$?

(A) (4, 3, 0)

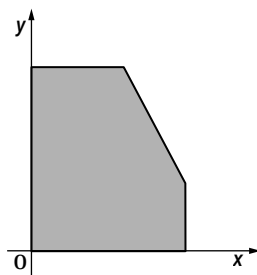
(B) (5, 5, 0)

(C) (1, 0, 0)

(D) (0, 0, -1)

5. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema:

$$\begin{array}{l} a \ x \geq 0 \\ d \ y \geq 0 \\ d \ y \leq 6 \\ b \ x \leq 5 \\ d \ y \leq 6 \\ c \ 2x + y \leq 12 \end{array}$$



Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $z = x + y$, pode alcançar nesta região?

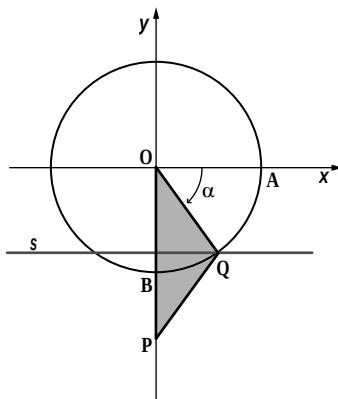
- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

Teste intermédio de matemática A, 11.º ano, maio 2007

Parte II

Responda às questões da Parte II com frases completas, apresentando os cálculos, as justificações e os raciocínios que utilizou na resolução.

6. Na figura, está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro O e raio 13.



Os pontos A e B são os pontos de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox e com o semieixo negativo Oy , respetivamente. Considere que um ponto Q se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B.

Para cada posição do ponto Q, sabe-se que:

- o ponto P é o ponto do eixo Oy tal que $\overline{QO} = QP$
- a reta s é a mediatriz do segmento $[OP]$
- o ponto S é o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOQ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

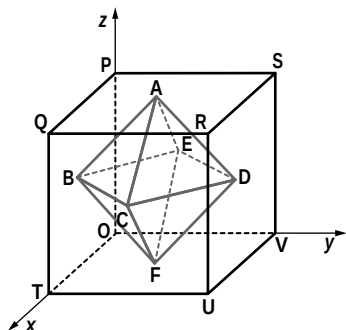
Seja g a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, definida por

$$g(x) = -169 \sin x \cos x$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $g(\alpha)$.
- Determine o valor de α , pertencente ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, para o qual se tem $g(\alpha) = 169 \sin^2 \alpha$.
- Seja q um número real, pertencente ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, tal que $g(q) = 13$. Determine o valor de $(\sin q + \cos q)^2$.
- Considere agora o caso em que a abcissa do ponto Q é 12. Determine a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto Q.

7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$, dual do cubo $[PQRSOTUV]$.

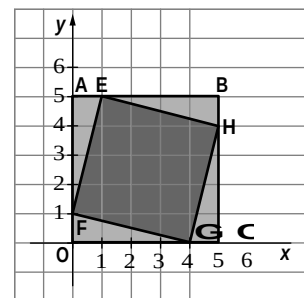


Sabe-se que:

- O vértice B tem coordenadas $(1, 0, 1)$;
- O vértice E tem coordenadas $(0, 1, 1)$;
- O vértice F pertence ao plano xOy ;
- O vértice A tem coordenadas $(1, 1, 2)$.

- 7.1. Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva a(s) equação(ões) cartesiana(s) que o define(m):
- Plano ACD;
 - Plano perpendicular ao plano ACD e que passa por B;
 - Reta paralela a CD e que passa no ponto F;
 - Superfície esférica que passa nos vértices do octaedro.
- 7.2. Determine o volume do octaedro dado.
- 7.3. Considere um ponto X pertencente à aresta UR do cubo do qual se sabe que $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OX} = 6$. Determine as coordenadas de X.

8. Na figura está representado num referencial o.n. Oxy o quadrado $[ABCO]$.



- As coordenadas do vértice A são $(0, 5)$;
- $\overline{AE} = \overline{BH} = \overline{CG} = \overline{OF} = 1$.

Mostre, recorrendo às propriedades que conhece sobre vetores, que $[EFGH]$ é também um quadrado.

FIM

Questões	1. a 5.	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	7.1.1.	7.1.2.	7.1.3.	
Cotação	5 * 10	10	15	15	15	10	15	10	