



Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Um saco contém seis bolas numeradas de 1 a 6, indistinguíveis ao tato. Retiram-se sucessivamente e aleatoriamente, duas bolas do saco, repondo a primeira antes de se retirar a segunda. Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja 5?

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{4}{15}$ (D) $\frac{1}{18}$

2. Considere os dois primeiros elementos e os dois últimos de uma certa linha do triângulo de Pascal. Sabe-se que o produto desses quatro elementos é igual a 1024. Qual é o terceiro elemento da linha anterior?

(A) 4495 (B) 496 (C) 465 (D) 4960

3. Considere os números naturais a , b e c tais que:

$a = {}^{2008}C_{100}$, $b = {}^{2008}C_{101}$ e $c = {}^{2009}C_{101}$

O valor de $a + 2b - c$ é igual a:

(A) ${}^{2008}C_{100}$ (B) ${}^{2009}C_{100}$ (C) ${}^{2009}C_{101}$ (D) ${}^{2008}C_{101}$

4. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Sabe-se que:

- $P(A) = 0,6$
- $P(B) = 0,7$
- $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,2$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(A \cup B) = 0,75$ e $P(A \cap B) = 0,55$
(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(C) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(D) $P(A \cup B) = 0,55$ e $P(A \cap B) = 0,75$

5. Um código é constituído por seis algarismos.
Quantos códigos diferentes existem em que o algarismo 5 aparece exactamente três vezes e os restantes algarismos são diferentes?

(A) 504

(B) 10 080

(C) 14 580

(D) 14 400

(8x5 pontos)

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, três cartas

Quantas extrações são possíveis, de forma que a primeira carta seja de copas, a segunda seja um rei e a terceira seja de espadas?

(18 pontos)

2. Seja C o conjunto de todos os números com quatro algarismos.

2.1 Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5 entre 1000 e 5000, **inclusive** ?

2.2. Escolhe-se, ao acaso, um elemento de C.

Qual é a probabilidade de ser múltiplo de 5 entre 1000 e 6000 e ter os algarismos todos diferentes?

Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.

(15+17 pontos)

Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Prove que :

$$P(A \cap B) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A)$$

(17 pontos)

4. Considere a seguinte expressão:

$$A(x) = \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{33}$$

Determine, recorrendo à fórmula do Binómio de Newton, o termo independente de x.

(15 pontos)

5. Numa caixa encontram-se 16 bolas numeradas, de duas cores diferentes, e de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tato. Das 16 bolas da caixa, 10 bolas são azuis e 6 bolas são vermelhas.

- 5.1. Supondo que se retiram, sucessivamente, todas as bolas da caixa e se colocam numa fila, determine a probabilidade de as bolas azuis ficarem juntas.

Apresente o valor pedido na forma de dízima, com cinco casas decimais.

$$P = \frac{16!}{10!6!} = 0,0013(x)$$

- 5.2. Supondo agora que se retiram da caixa, simultaneamente, apenas seis bolas. Sabendo que se retiram bolas das duas cores, determine a probabilidade de se retirarem mais bolas azuis do que vermelhas. Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.

- 5.3. A caixa com a forma de um prisma hexagonal regular, encontra-se apresentada na figura:

Sabe-se que:

- A base inferior do prisma está contida no plano xOy;
- O eixo Oy contém a aresta [OP];
- O eixo Oz contém a aresta [OA];

- 5.3.1. Escolheu-se, ao acaso, uma aresta do prisma perpendicular ao eixo Oz. Qual é a probabilidade de essa reta ser **estritamente** paralela ao eixo Oy? Apresenta o resultado na forma de percentagem.

- 5.3.2. Considere agora que se assinalaram outros n ($n \in \mathbb{N}$) pontos na face [ABOP] de maneira que nunca haja três pontos colineares.

Escolheram-se, ao acaso, três dos pontos assinalados nessa face.

Mostra que a probabilidade de ser construído um triângulo em que o ponto A

não seja um dos vértices é igual a $\frac{n+1}{n+4}$

(15+15+15+15 pontos)

6. A Clara desenhou nove pontos numa folha de papel. Desses nove pontos, quatro são colineares. Escolhendo ao acaso três desses pontos, qual é a probabilidade de formarem um triângulo?

Uma resposta correta a esse problema é:

$$\frac{{}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_2 \times {}^5C_1}{{}^9C_3}$$

Numa pequena composição, explique porquê.

Na sua composição deve incluir:

- Uma referencia à Regra de Laplace
- Uma explicação do número de casos possíveis
- Uma explicação do número de casos favoráveis

(18 pontos)

FIM