

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere a sucessão $u_n = n \ln \left(\frac{1+2n}{2n} \right)$.

Qual é o valor de $\lim u_n$?

(A) $+\infty$

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\sqrt{e}$

2. Quatro rapazes e três raparigas, todos com alturas diferentes, vão colocar-se numa fila para tirarem uma fotografia.

De quantas maneiras se podem colocar na fila de modo que os rapazes fiquem ordenados pela altura?

(A) ${}^7A_3 \times 3!$

(B) $2 \times {}^7A_3$

(C) $2 \times {}^7C_3$

(D) ${}^7C_4 \times 3!$

3. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sin(2x) - \cos^2(3x)$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x}$?

(A) -2

(B) 2

(C) -1

(D) 1

4. Seja S o espaço de resultados (finito) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

• $P(A) = 0,3$

• $P(A \cap B) = 0,2$

• $P(\bar{B}) = 0,3$

Qual o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

(A) 0,1

(B) 0,2

(C) 0,8

(D) 0,9

Proposta de Exame de Matemática A – 12.º ano

5. Na figura 1, está representada, num referencial xOy , parte do gráfico de uma função h'' , segunda derivada de uma função polinomial h .

Sabe-se que a primeira derivada da função h é nula no ponto 0, ou seja, $h'(0) = 0$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

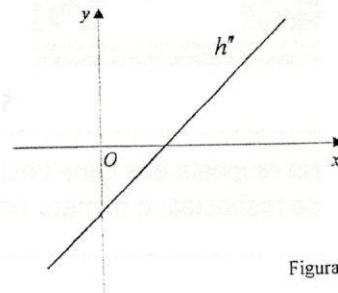
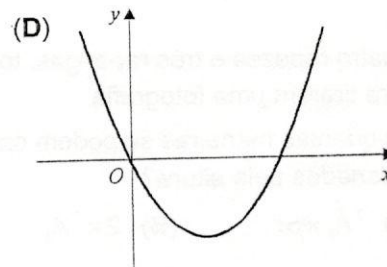
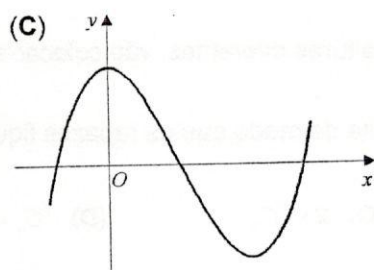
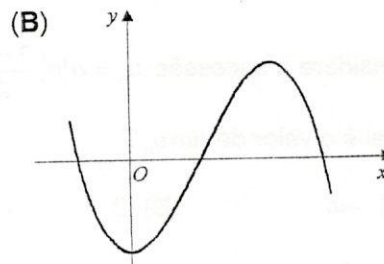
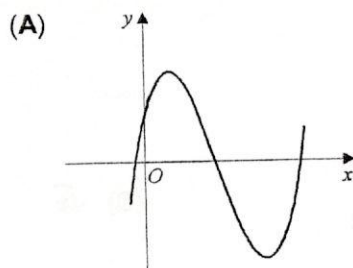


Figura 1



6. De uma função f , par, e de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a reta de equação $y = 2x - 3$ é uma assíntota do seu gráfico quando x tende para $+\infty$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$?

- (A) 2 (B) -2 (C) 3 (D) -3

7. Sendo n um número natural diferente de 1 e a um número real positivo, também diferente de 1, $\log_n (\log_a (\log_a \sqrt[n]{a}))$ é igual a:

- (A) -1 (B) 1 (C) n (D) $\frac{1}{n}$

8. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, o plano α de equação $x - y + 2z = 1$ e a reta r definida por $x = \frac{y+1}{3} = z$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A reta r está contida no plano α .
 (B) A reta r é estritamente paralela ao plano α .
 (C) A reta r é concorrente e perpendicular ao plano α .
 (D) A reta r é concorrente e não perpendicular ao plano α .

Proposta de Exame de Matemática A – 12.º ano

5. Seja f a função definida em $[0, +\infty[$ por $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

5.1. Designando por f' a função derivada de f , mostre que $f'(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$ e mostre que a função f' é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

5.2. Justifique, aplicando o teorema de Bolzano, que a função f' admite pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$ e, de seguida, conclua que esse é o único zero da função f' .

5.3. Sendo α o zero da função f' cuja existência provou nas alíneas anteriores, mostre que $f(\alpha)$ é o mínimo da função f .

5.4. Na figura 2 estão representados, num referencial xOy , parte do gráfico da função f e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence ao eixo Ox ;
- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abscissa $x \in]0, 1[$;
- a reta AB é tangente ao gráfico de f no ponto A ;
- o triângulo $[OAB]$ é retângulo em A .

Determine a abscissa do ponto A recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abscissa de A com arredondamento às centésimas.

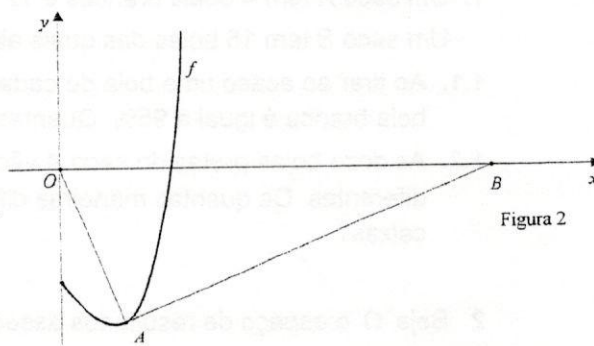


Figura 2

6. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$ representado na figura 3 (o vértice F não é visível).

Os pontos P e Q pertencem às arestas $[BC]$ e $[CD]$, respetivamente.

Sabe-se ainda que $\overline{PC} = \overline{QD}$.

6.1. Prove que os vetores $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ são perpendiculares.

6.2. Seja α amplitude do ângulo CPA .

Sabendo que $\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{BP}$, determine o valor exato de $\cos \alpha$.

6.3. Fixado um referencial ortonormado do espaço, são conhecidas as coordenadas de três vértices do cubo: $B(4, 1, 3)$, $D(1, 6, 7)$ e $F(0, 1, 0)$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta BH com o plano xOy .

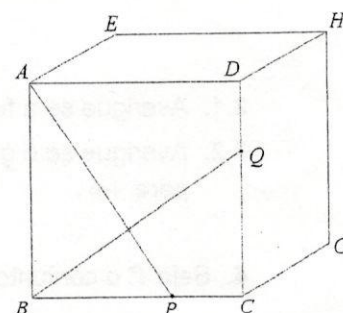


Figura 3

FIM

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Um saco A tem 4 bolas brancas e 12 bolas pretas numeradas de 1 a 12.

Um saco B tem 15 bolas das quais algumas são brancas.

- 1.1. Ao tirar ao acaso uma bola de cada saco, a probabilidade de sair, no máximo, uma bola branca é igual a 95%. Quantas bolas brancas estão no saco B ?
- 1.2. As doze bolas pretas do saco A vão ser distribuídas, em partes iguais, por 4 caixas diferentes. De quantas maneiras diferentes podem as bolas ficar colocadas nas caixas?

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se ainda que o acontecimento A é possível mas não certo.

Prove que A e B são independentes se e somente se $P(B|A) = P(B|\bar{A})$.

3. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{se } x < 0 \\ \ln(e^x + x) + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- 3.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

- 3.2. Averigue se o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

- 4.1. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(\sqrt{3} - i)^n$ é um número real positivo.

- 4.2. Sabe-se que w e w^5 são raízes de índice n de um número complexo z , não nulo. Determine z .