

# Fichas de avaliação

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| • FICHA DE AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA .....   | 1  |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 1 .....             | 5  |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 2 .....             | 7  |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 3 .....             | 9  |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 4 .....             | 11 |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 5 .....             | 13 |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 6 .....             | 15 |
| • FICHA DE AVALIAÇÃO 7 .....             | 17 |
| • Matriz do teste diagnóstico .....      | 19 |
| • Matrizes de conteúdos .....            | 20 |
| • Soluções das Fichas de avaliação ..... | 27 |

---



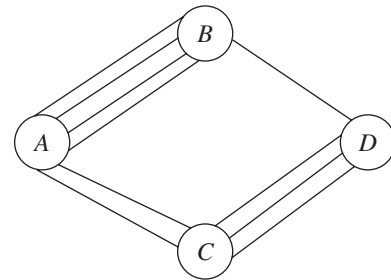
## FICHA DE AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1** Na figura estão assinaladas, num esquema, as localidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  ligadas por segmentos de reta que traduzem as diferentes estradas que as ligam. Para ir de  $A$  a  $D$ , quantos percursos diferentes existem?



- (A) 9  
 (B) 10  
 (C) 24  
 (D) 25

- 2** Lança-se um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6 e regista-se o número saído.

Em qual das opções estão indicados dois acontecimentos disjuntos e não complementares?

- (A) «Sair número par» e «Sair número ímpar»  
 (B) «Sair número primo» e «Sair número maior do que 3»  
 (C) «Sair múltiplo de 3» e «Sair múltiplo de 2»  
 (D) «Sair número maior do que 3» e «Sair número menor do que 3»

- 3** Um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6 é lançado e regista-se o número saído na face. Qual é a probabilidade da saída do número 5?

- (A)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{5}{6}$   
 (B)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{30}$

- 4** Lança-se duas vezes um dado, equilibrado, com a forma de um tetraedro regular, com as faces numeradas de 1 a 4, e adicionam-se os números saídos na face que fica voltada para baixo.

Qual é a probabilidade de a soma ser pelo menos 6?

- (A)  $\frac{3}{8}$  (C)  $\frac{5}{8}$   
 (B)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{3}{16}$

- 5** Qual é o valor de  $\sum_{i=1}^5 (i + 1)$ ?

- (A) 8 (C) 16  
 (B) 15 (D) 20

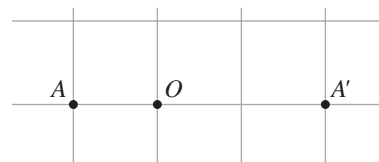
- 6 Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , qual das seguintes representações não designa a «diferença entre  $A$  e  $B$ »?

(A)  $A \setminus B$  (C)  $\overline{A \cap B}$   
 (B)  $A \cap \bar{B}$  (D)  $\overline{A \cup B}$

- 7 Considere um polinómio  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c + 4$ , com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{Z}$ . Qual dos seguintes inteiros não pode ser solução de  $P(x) = 0$ ?

(A) 1 (C) 3  
 (B) 2 (D) 4

- 8 Na figura está representada uma homotetia de centro  $O$  e razão  $r$ , a correspondência que associa o ponto  $A$  ao ponto  $A'$ .



Qual é a razão da homotetia?

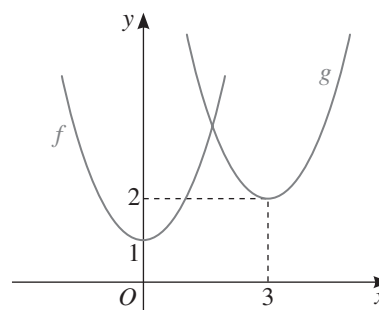
(A)  $-2$   
 (B)  $-\frac{1}{2}$   
 (C)  $\frac{1}{2}$   
 (D) 2

- 9 Na figura estão representados, em referencial o.n.  $Oxy$ , partes dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ .

Sabe-se que:

- o gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $\vec{u}$ .
- Quais são as coordenadas do vetor  $\vec{u}$ ?

(A) (1, 2) (C) (3, 1)  
 (B) (3, 2) (D) (1, 3)



- 10 Considere, num referencial o.n.  $Oxy$ , a representação do gráfico de uma função real de variável real  $f$  contínua num intervalo  $I$  do seu domínio.

Sabe-se que:

- $A$ ,  $B$  e  $C$  são três pontos do gráfico de  $f$ , tais que  $x_A < x_B < x_C$  pertencem a  $I$ ;
- o declive da reta  $AB$  é 3;
- o declive da reta  $CB$  é  $-2$ ;
- $f(x_B)$  é um extremo de  $f$ .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira relativamente ao gráfico de  $f$ ?

(A) Tem concavidade voltada para cima em  $[x_A, x_C]$  e  $x_B$  é um minimizante.  
 (B) Tem concavidade voltada para cima em  $[x_A, x_C]$  e  $x_B$  é um maximizante.  
 (C) Tem concavidade voltada para baixo em  $[x_A, x_C]$  e  $x_B$  é um minimizante.  
 (D) Tem concavidade voltada para baixo em  $[x_A, x_C]$  e  $x_B$  é um maximizante.

- 11 Considere o triângulo  $[ABC]$ , retângulo em  $B$ , em que a hipotenusa mede 4,3 cm e o ângulo  $ACB$  mede  $35^\circ$ . Qual é a medida, em centímetros, do cateto  $[BC]$ , aproximada à décima.

(A) 2,0 (C) 3,0  
 (B) 2,5 (D) 3,5

- 12** Considere um arco de circunferência com medida igual a 2 cm . Se o diâmetro da circunferência for igual a 2 cm , qual é, em radianos, a amplitude desse arco de circunferência?

(A) 1 (C)  $\pi$   
(B) 2 (D)  $\frac{\pi}{2}$

- 13** Sabe-se que  $\cos x = a$ , com  $0 < a < 1$ . Qual é o valor de  $1 + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ?

(A)  $1 + a$  (C)  $2 - a^2$   
(B)  $1 + a^2$  (D)  $a^2$

- 14** Sabe-se que  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  com  $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .

Em qual das opções está indicado o valor de  $\cos(x + 11\pi) + \tan(5\pi - x)$ ?

(A)  $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$   
(B)  $\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}$  (D)  $-\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$

- 15** Sabe-se que  $2 \sin x = -1$  com  $x \in [0, 2\pi[$ .

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha < \beta$ , as soluções da equação.

Qual é o valor de  $3\alpha - \beta$ ?

(A)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $-\frac{2\pi}{3}$   
(B)  $-\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{3}$

- 16** Seja  $(u_n)$  a sucessão definida por  $u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{1-n}$ .

Qual é o valor de  $\lim u_n$ ?

(A)  $-\infty$  (C) 1  
(B)  $-1$  (D)  $+\infty$

- 17** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \frac{3 + 2x - 2x^2}{3 - x}$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ?

(A)  $+\infty$  (C) 2  
(B)  $-1$  (D)  $-2$

- 18** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ ax^2 - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ .

Sendo  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$ , qual é o valor de  $a$ ?

(A)  $-1$  (C) 1  
(B) 0 (D)  $\frac{1}{2}$

- 19** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{se } x \leq 1 \\ 4x - 6 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

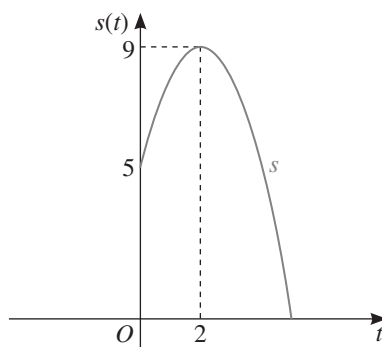
Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ?

(A) Não existe. (C) 0  
(B)  $-2$  (D) 1

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 20** Na figura encontra-se representado o gráfico da posição, em metros, de um objeto em relação ao solo, ao longo do tempo, em segundos, quando é projetado verticalmente de baixo para cima, até atingir o solo.



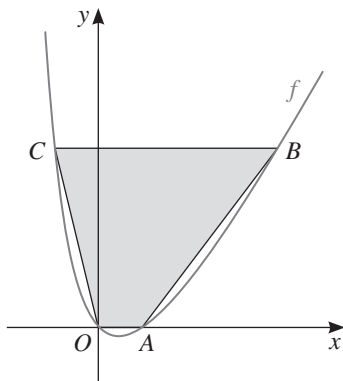
- 20.1** Determine a expressão da função  $s$  que traduz a altura do objeto ao longo do tempo.
- 20.2** Determine a velocidade nos instantes  $t = 0$ ,  $t = 2$  e  $t = 3$ .
- 20.3** Determine a velocidade do objeto quando toca no solo.

- 21** Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 1}$ .

**21.1** Mostre que  $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x + 1)^2}$ .

- 21.2** Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1.

- 21.3** Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxy$ , parte do gráfico de  $f$  e o trapézio  $[OABC]$ .



Sabe-se que:

- $O$  e  $A$  são pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$ ;
- $B$  e  $C$  pertencem ao gráfico de  $f$  e têm ordenada igual a 2.

Determine a área do trapézio  $[OABC]$ .

- 21.4** Estude  $f$  quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.
- 21.5** Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

## FICHA DE AVALIAÇÃO 1

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1** Num universo  $U$ , sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios em que  $B \subset A$ .

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A)  $\overline{B} \setminus \overline{A} = A \setminus B$

(B)  $\overline{B} \setminus \overline{A} = B \setminus \overline{A}$

(C)  $\overline{A} \setminus \overline{B} = A \setminus B$

(D)  $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus \overline{A}$

- 2** Qual é o termo central do desenvolvimento de  $\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^{10}$ ?

(A)  ${}^{11}C_6$

(B)  ${}^{10}C_6 \frac{x^2}{4}$

(C)  ${}^{11}C_6 \frac{x}{4}$

(D)  ${}^{10}C_5$

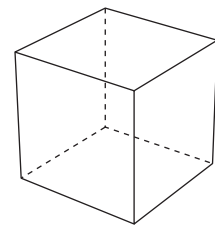
- 3** Quantos planos existem que contêm pelo menos 3 vértices de um cubo?

(A) 20

(B) 14

(C) 8

(D) 6



- 4** Quantos números entre 400 e 4000 podem ser construídos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, sem que nenhum deles se repita?

(A) 120

(B) 180

(C) 220

(D) 360

- 5** O 21.º e o 22.º elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal são iguais.

Qual é o quinto elemento da linha seguinte?

(A) 101 270

(B) 111 930

(C) 123 410

(D) 148 995

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

**6** Sobre uma turma da professora Rita, sabe-se que:

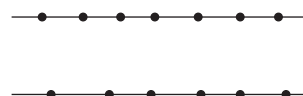
- tem 13 rapazes;
- 20 dos seus alunos têm calculadora;
- 11 dos alunos com calculadora são raparigas.

Determine quantos rapazes da turma não têm calculadora.

**7** Numa reta, estão marcados 7 pontos e noutra reta paralela estão marcados 6 pontos.

Unem-se cada um dos pontos de uma reta a cada um dos pontos da outra reta.

Quantos pontos de interseção se obtêm?



**8** Com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, vão formar-se números com sete algarismos todos diferentes. Quantos números é possível formar se:

- a) não houver restrições?
- b) os algarismos pares aparecerem seguidos?
- c) o algarismo 1 aparecer antes do 2 e o 3 aparecer antes do 4?

**9** Considere a expressão  $(x + y)^5 + (x - y)^5$ .

**9.1** Mostre que a expressão pode ser escrita como  $2(x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4)$ .

**9.2** Usando a expressão anterior, calcule  $(\sqrt{3} + 1)^5 + (\sqrt{3} - 1)^5$ .

**10** Considere os termos do desenvolvimento de  $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Sabe-se que a soma dos coeficientes de  $x^5$  e de  $x^{10}$  é nula.

Determine o valor de  $n$ .

**11** Resolva a equação:

$${}^nA_4 = 72 \times {}^nA_2$$

**12** Mostre que:

$${}^{m-1}C_{n-1} = \frac{n}{m} {}^mC_n$$

## FICHA DE AVALIAÇÃO 2

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1** A Luísa recebeu uma chamada da amiga Manuela e sabe que a Manuela tem dois filhos um dos quais é um rapaz.

Assumindo que é igualmente provável uma criança ser rapaz ou rapariga, qual é a probabilidade do outro filho da Manuela ser uma rapariga?

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{1}{4}$

- 2** Escolhem-se dois números inteiros diferentes do intervalo  $[7, 21]$ .

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser um número ímpar?

- (A)  $\frac{18}{35}$  (B)  $\frac{7}{15}$  (C)  $\frac{4}{13}$  (D)  $\frac{4}{15}$

- 3** Dado um conjunto finito  $E$ , uma probabilidade  $P$  em  $\mathcal{P}(E)$  e dois acontecimentos  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  possíveis, sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$

Qual é o valor de  $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$ ?

- (A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,7

- 4** Dado um conjunto finito  $E$ , uma probabilidade  $P$  em  $\mathcal{P}(E)$  e dois acontecimentos  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , possíveis, sabe-se que  $A \subset B$ .

Qual das seguintes opções é verdadeira?

- (A)  $P(A|B) < P(A)$  (B)  $P(A|B) \geq P(A)$  (C)  $P(A|B) < P(A)$  (D)  $P(A|B) \leq P(A)$

- 5** Lança-se um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 e regista-se o número saído na face voltada para cima.

Sejam os acontecimentos:

- $A$ : «Sair face ímpar»
- $B$ : «Sair face 2 ou 3»
- $C$ : «Não sair a face 1 nem a face 6»

Qual é o valor de  $P((A \cup B)|C)$ ?

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 6** Num armário há 8 pares de sapatos e são retirados 4 sapatos ao acaso. Determine a probabilidade de:

- a) não se ter retirado nenhum par de sapatos.
- b) se retirar pelo menos um par de sapatos.
- c) se retirar exatamente dois pares de sapatos.
- d) se retirar exatamente um par de sapatos.



- 7** Escrevem-se as letras da palavra **PROBABILIDADE**, de forma aleatória, na horizontal, uma a seguir à outra.

Qual é a probabilidade dos dois **D** aparecerem juntos?

- 8** Considere todos os números de 3 algarismos em que o dígito das centenas é diferente de 0.

Escolhe-se um desses números ao acaso.

Determine a probabilidade da soma dos seus dígitos ser igual a 5.

- 9** Uma caixa tem bolas indistinguíveis ao tato, sendo 5 da cor branca e  $k$  da cor preta.

Se retirarmos 2 bolas da caixa, uma a seguir à outra, a probabilidade de as duas bolas serem de cores diferentes é  $\frac{10}{21}$ .

Quantas bolas pretas podem estar na caixa?

- 10** Considere um conjunto finito  $E$ , uma probabilidade  $P$  em  $\mathcal{P}(E)$  e dois acontecimentos  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

Prove que a probabilidade de que exatamente um dos acontecimentos ocorra é igual a:

$$P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - 2P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

- 11** De um baralho com 40 cartas retiram-se 3 cartas ao acaso.

Determine a probabilidade de as 3 cartas serem todas do naipe de ouros, sabendo que pelo menos 2 delas são de ouros.



- 12** Numa fábrica de espelhos retrovisores para automóveis existem 3 máquinas,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , que fabricam diariamente, 2500, 2000 e 3000 espelhos, sendo a percentagem de produção de espelhos defeituosos por cada uma das máquinas, respetivamente, 3%, 2,5% e 4%.

Selecionou-se, ao acaso, um espelho retrovisor de toda a produção diária e verificou-se que é defeituoso.

Determine a probabilidade de o espelho defeituoso ter sido produzido pela máquina  $A$ .



## FICHA DE AVALIAÇÃO 3

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1 Seja  $(u_n)$  definida por  $u_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n}$ .

Qual é o  $\lim u_n$ ?

- (A)  $+\infty$  (B) 5 (C) 7 (D)  $\sqrt{12}$

- 2 Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ , definida por:

$$f(x) = \left( \frac{5x - 1}{2x + 3} \right)^{-x}$$

Em qual das opções está indicado o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?

- (A)  $+\infty$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $-\infty$  (D) 0

- 3 Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = x^3 - 2x - 3$$

Em qual dos intervalos seguintes, é possível garantir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a existência de pelo menos um zero?

- (A)  $[-1, 0]$  (B)  $[0, 1]$  (C)  $[1, 2]$  (D)  $[2, 3]$

- 4 Indique em qual das opções está indicada a expressão da função derivada da função  $f$  definida por:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{3}x}{x - \sqrt{3}}$$

- (A)  $\frac{2}{(x - \sqrt{3})^2}$  (B)  $\frac{3x}{(x - \sqrt{3})^2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{(x - \sqrt{3})^2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$

- 5 Considere a função  $f$  definida por:

$$f(x) = x^3 - x$$

No intervalo  $[-2, -1]$ , qual das seguintes afirmações é verdadeira relativamente à função  $f$ ?

- (A) É estritamente crescente e o seu gráfico tem concavidade voltada para cima.  
 (B) É estritamente crescente e o seu gráfico tem concavidade voltada para baixo.  
 (C) É estritamente decrescente e o seu gráfico tem concavidade voltada para cima.  
 (D) É estritamente decrescente e o seu gráfico tem concavidade voltada para baixo.

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 6 Considere a função  $f$ , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x \cos x}{x^2 - 3x}$$

Usando métodos exclusivamente analíticos, estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico não paralelas aos eixos coordenados.

- 7 Considere a função  $f$ , real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a & \text{se } x \geq 2 \\ 12 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Determine o valor de  $a > 0$ , de forma que o teorema de Weierstrass permita garantir a existência de um mínimo e um máximo absolutos da função  $f$  em  $[1, 3]$ .

- 8 Considere a função polinomial  $f$  definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - x + c$$

Relativamente à função  $f$ , sabe-se que:

- o gráfico de  $f$  interseja o eixo  $Oy$  no ponto de ordenada 2;
- a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1 tem equação  $y = 4x - 2$ .

Determine os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

- 9 Considere a função  $f$ , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

Usando métodos exclusivamente analíticos, estude a função  $f$  quanto:

- à existência de assíntotas ao seu gráfico.
- à monotonia e à existência de extremos relativos.
- ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

- 10 Um projétil foi lançado verticalmente a partir do solo e a sua altura  $h$  (em centenas de metros) em função do tempo decorrido  $t$  (em segundos), após o lançamento, é dada por:

$$h(t) = 3t - t\sqrt{t}$$

Usando processos exclusivamente analíticos, determine:

- a altura máxima atingida pelo projétil.
- a velocidade média do projétil nos primeiros 4 segundos.
- a velocidade no instante em que atingiu o solo, em m/s.



## FICHA DE AVALIAÇÃO 4

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1** Qual das seguintes expressões é equivalente, no seu domínio, a

$$1 + \tan x (2 \cos^2 x - \sin(2x)) ?$$

- (A)  $\sin(2x) + \cos(2x)$  (C)  $(\sin x + \cos x)^2$   
 (B)  $\sin(2x) - \cos(2x)$  (D)  $2 \sin x + \sin(2x)$

- 2** Sejam  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- $\sin x = a$
- $\cos y = a$

Qual é o valor de  $\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} \cos(x-y)$  ?

- (A) 0 (B)  $\sqrt{2} + 1$  (C)  $\sqrt{2} - 1$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 3** Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{\pi n^2 + 1}{1 - 4n^2}$  ?

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D)  $+\infty$

- 4** Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x$$

Qual é o valor de  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ?

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $-\frac{1}{8}$  (C)  $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

- 5** Considere um sistema constituído por um ponto que se desloca sobre uma reta numérica num dado intervalo de tempo, de tal forma que a sua abcissa é dada em função do tempo  $t$  por:

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{t}{2} + 1\right)\right)$$

Qual é o valor do período deste oscilador harmónico?

- (A) 2 (B) 6 (C) 9 (D) 12

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

6 Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\tan x + \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x$ .

7 Determine os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , de modo que a função  $f$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x - 1 & \text{se } x \leq \frac{\pi}{6} \\ a \tan x + b & \text{se } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x + 1 & \text{se } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

8 No referencial  $Oxy$  da figura, está representado:

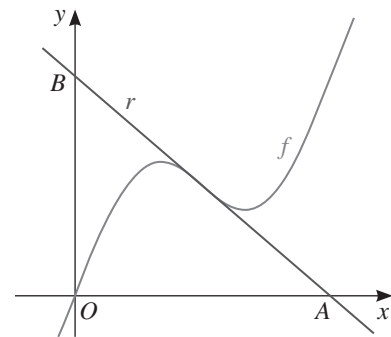
- parte do gráfico da função  $f$  definida, em  $\mathbb{R}$ , por:

$$f(x) = x + 2 \sin x$$

- a reta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $\pi$ ;
- os pontos  $A$  e  $B$  de interseção da reta  $r$  com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente.

Determine o valor exato da área do triângulo  $[AOB]$ .

Use exclusivamente métodos analíticos.



9 Um corpo suspenso por uma mola sofre um movimento oscilatório descrito pela função  $f$  definida por  $f(t) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ , com  $t \in [0, 10]$  segundos.

9.1 Determine a velocidade do corpo no instante  $t = 1$ .

9.2 Mostre que  $f''(t) = -\alpha f(t)$  e indique o valor da constante  $\alpha$ .

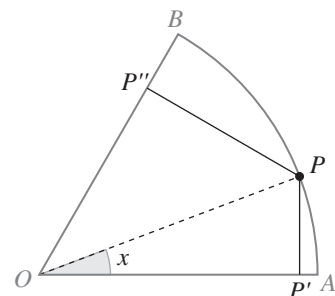
10 Na figura, está representado um setor circular  $AOB$  com amplitude  $\frac{\pi}{3}$ .

Um ponto  $P$  move-se no arco  $AB$  entre  $A$  e  $B$ . Sabe-se que:

- $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$
- $P'$  é o pé da perpendicular de  $P$  sobre  $[OA]$ ;
- $P''$  é o pé da perpendicular de  $P$  sobre  $[OB]$ ;
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOP$  ( $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ).

Seja  $f$  a função que faz corresponder à amplitude  $x$ , do ângulo  $AOP$ , a medida de  $\overline{PP'} + \overline{PP''}$ .

10.1 Mostre que  $\overline{PP'} + \overline{PP''}$  é dado por  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ .



10.2 Estude a função  $f$  quanto à monotonia e à existência de extremos relativos e indique o contradomínio da função.

## FICHA DE AVALIAÇÃO 5

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

**1** Considere a equação:

$$(5^{x-2})^{x+3} = 1$$

Em qual das opções está indicada a soma das raízes da equação?

- (A) 1 (C) -1  
 (B) 2 (D) -5

**2** Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-2} \right)^n$ ?

- (A)  $\sqrt{e}$  (C)  $\frac{1}{e^2}$   
 (B)  $e^2$  (D)  $\frac{\sqrt{e}}{e}$

**3** Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{x}$ ?

- (A) 0 (C) -2  
 (B) 2 (D)  $-\frac{1}{2}$

**4** Seja  $a$  um número real.

Seja a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \frac{a}{\ln x}$ .

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , o ponto  $P(\sqrt{e}, 8)$ .

Sabe-se que o ponto  $P$  pertence ao gráfico de  $f$ .

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 4 (C)  $\frac{1}{2}$   
 (B) 2 (D)  $\frac{1}{4}$

**5** Seja  $f$  a função definida em  $]0, \pi[$  por:

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

Qual é o declive da reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{\pi}{3}$ ?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\sqrt{3}$   
 (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $-\sqrt{3}$

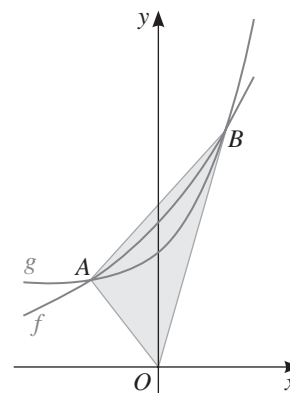
## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

**6** Considere  $f$  a função real de variável real de domínio  $\mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = 4e^x(x^2 + 1)$$

- 6.1** Use processos exclusivamente analíticos para estudar a função  $f$  quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.
- 6.2** Mostre, usando o teorema de Weierstrass, que, no intervalo  $[-2, 0]$ , o contradomínio de  $f$  é um intervalo limitado e fechado, e indique esse intervalo.
- 6.3** No referencial cartesiano da figura, está representado:
- parte do gráfico de  $f$ ;
  - parte do gráfico da função  $g$  definida por  $g(x) = 5e^x$ ;
  - os pontos  $A$  e  $B$ , interseção dos gráficos de  $f$  e de  $g$ ;
  - o triângulo sombreado  $[AOB]$ .



Determine o valor exato da área do triângulo  $[AOB]$ .

Apresente o resultado na forma de fração com denominador racionalizado.

**7** Sabe-se que  $\log_a x$ ,  $\log_a(x + 3)$  e  $\log_a(x + 8)$  são três termos consecutivos de uma progressão aritmética. Usando exclusivamente processos analíticos determine o valor de  $x$ .

**8** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  três números reais positivos. Sabe-se que:

- $\log_3(a - 1) - \log_3 b = 4c - 1$
- $\log_9(8a + 1) + \log_9(3b) = 5c + \frac{1}{2}$

**8.1** Mostre que  $(8a + 1)(a - 1) = 3^{14c - 1}$ .

**8.2** Considere  $c = \frac{1}{2}$ . Determine os possíveis valores de  $a$  e de  $b$ .

Utilize a calculadora para eventuais cálculos numéricos.

**9** Determine:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1 + x}{3 + 4x} \right)^{4x - x^3}$$

**10** Seja  $f$  uma função real de variável real definida por  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Use processos exclusivamente analíticos para responder às questões seguintes.

**10.1** Estude a função  $f$  quanto à existência de concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.

**10.2** Seja  $g$  a função definida por  $g(x) = f(x) - \ln x$ .

Estude  $g$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

## FICHA DE AVALIAÇÃO 6

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1 Sabe-se que  $F(x) = ax^3 + b \cos(2x)$ , com  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , é uma primitiva de  $f(x) = x^2 + \sin(2x)$ . Em qual das opções estão indicados os valores de  $a$  e de  $b$ ?

(A)  $a = \frac{1}{3}$  e  $b = \frac{1}{2}$

(C)  $a = 3$  e  $b = \frac{1}{2}$

(B)  $a = \frac{1}{3}$  e  $b = -\frac{1}{2}$

(D)  $a = 3$  e  $b = -\frac{1}{2}$

- 2 Seja  $F$  uma primitiva de uma certa função  $f$ . Sabe-se que:

•  $F'(x) = 12\sqrt{x}$

•  $F(1) = 4$

Qual é o valor de  $F\left(\frac{1}{4}\right)$ ?

(A)  $-3$

(B)  $-2$

(C)  $-1$

(D)  $1$

- 3 Qual é o valor do seguinte integral definido por  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin x \, dx$ ?

(A)  $1 + \sqrt{3}$

(C)  $-1 - \sqrt{3}$

(B)  $-1 + \sqrt{3}$

(D)  $1 - \sqrt{3}$

- 4 Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada:

• pelo gráfico da função definida por  $f(x) = 1 - \sin(x)$ ;

• o eixo  $Ox$ ;

• o eixo  $Oy$ ;

• a reta de equação  $x = \frac{\pi}{3}$ .

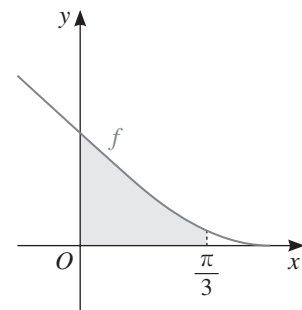
Qual é o valor da área da região sombreada da figura?

(A)  $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$

(C)  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$

(B)  $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$

(D)  $1 - \frac{\pi}{6}$



- 5 Seja  $F$  a função definida por  $F(x) = \int_0^{x^3} t^2 \, dt$ .

Qual das opções seguintes corresponde a  $F'(x)$ ?

(A)  $x^6$

(C)  $3x^8$

(B)  $3x^2$

(D)  $9x^4$

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 6** Seja  $F$  uma primitiva de  $f(x) = 4x + a$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

Considere, num referencial o.n.  $Oxy$ , o gráfico de  $F$ . Sabe-se que:

- $F$  tem um extremo para  $x = -\frac{3}{2}$ ;
- $F(-3) = 4$

**6.1** Determine o valor de  $a$ .

**6.2** Determine a expressão de  $F(x)$ .

Nota: Caso não tenha resolvido a questão 6.1, use  $a = 2$ .

- 7** Calcule, em intervalo conveniente:

$$\int 6 \sin x \sin(2x) dx$$

- 8** Um ponto material  $P$  desloca-se numa reta numérica, em que a unidade é o centímetro, a partir da origem  $O$ , ao longo do tempo  $t$ , em segundos, com velocidade  $v$ , dada por:

$$v(t) = 4t - \frac{4}{t^2}$$

**8.1** A posição do ponto material  $P$ , em relação a  $O$ , é dada ao longo do tempo por  $x(t)$ . Determine  $x(t)$  sabendo que se encontra, no instante  $t = 2$ , afastado da origem  $O$  2 cm no sentido negativo.

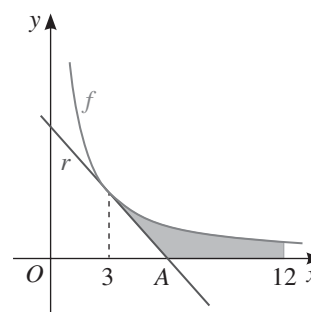
**8.2** Determine a aceleração do ponto material  $P$  no instante  $t = 2$ .

- 9** No referencial cartesiano da figura, está representado:

- parte do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{8}{x}$ ;
- a reta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 3;
- o ponto  $A$  interseção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$ ;
- uma região sombreada delimitada pelo gráfico de  $f$ , a reta  $r$ , o eixo  $Ox$  e a reta  $x = 12$ .

**9.1** Mostre que a abscissa de  $A$  é 6.

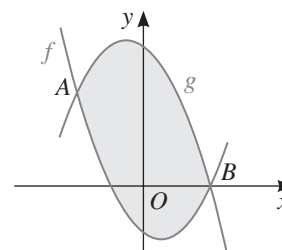
**9.2** Determine o valor exato da medida da área da região sombreada.



- 10** No referencial o.n.  $Oxy$  da figura, estão representados:

- parte do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ ;
- parte do gráfico da função  $g$  definida por  $g(x) = (2 - x)(x + 3)$ ;
- os pontos  $A$  e  $B$  de interseção dos dois gráficos.

Determine a área da região sombreada que é delimitada pelos gráficos das duas funções.



## FICHA DE AVALIAÇÃO 7

ESCOLA: \_\_\_\_\_  
 NOME: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

## Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1** Considere, em  $\mathbb{C}$ , os complexos  $z = 2 + i(1 + 2 \ln a)$  e  $w = (3 - i \ln a^4)$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$ .

Se  $z + w$  é um número real, qual é o valor de  $a$ ?

- (A)  $a = e$  (C)  $a = \frac{\sqrt{e}}{e}$   
 (B)  $a = \sqrt{e}$  (D)  $a = 1 - e$

- 2** Considere, em  $\mathbb{C}$ , os complexos  $z = -i$  e  $w = 1 + i$ .

Sejam as proposições:

- $p: \frac{-2z}{w} = w$
- $q: \text{Arg}(zw) = \frac{3\pi}{4}$

Qual das opções seguintes é uma proposição verdadeira?

- (A)  $\sim p \wedge q$  (C)  $p \Leftrightarrow q$   
 (B)  $\sim p \vee q$  (D)  $q \Rightarrow \sim p$

- 3** Considere, em  $\mathbb{C}$ , os complexos  $z = 1 - 3i$  e  $w = 2 + i^9$ .

Qual é o valor de  $\left| \frac{\bar{w}}{z} \right|$ ?

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$   
 (B)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{5}$

- 4** Considere, em  $\mathbb{C}$ , um número complexo  $w$  diferente de zero.

Em qual das opções, está indicada a representação no plano da condição  $|z - w| = |z + \bar{w}|$ ?

- (A) Eixo real. (C) Bissetriz dos quadrantes pares.  
 (B) Eixo imaginário. (D) Bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 5** Considere, em  $\mathbb{C}$ , os complexos  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$  e  $w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ .

Qual dos números complexos seguintes corresponde a  $\bar{i}zw$  na forma trigonométrica?

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$   
 (B)  $\sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$  (D)  $\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

## Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

**6** Considere, em  $\mathbb{C}$ , o complexo  $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ .

**6.1** Determine  $(\bar{z} - \sqrt{6})^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)^2$ .

Apresente o resultado na forma algébrica.

**6.2** Seja  $w = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Determine  $\frac{w}{z}$ .

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**7** Considere, em  $\mathbb{C}$ , o complexo  $z_1 = -1$ .

Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  as raízes da equação  $z^3 + z^2 + 9z + 9$ .

Seja  $A$  o afixo de  $z_1$ ,  $B$  o afixo da raiz em que  $\text{Im}(z) > 0$  e  $C$  o afixo da restante raiz.

**7.1** Determine o perímetro do triângulo  $[ABC]$ .

**7.2** Construa o triângulo  $[A'B'C']$  imagem do triângulo  $[ABC]$  dada pela função  $f(z) = iz + 1$ .

**8** Considere, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^6 = 1$ . Os pontos afijos das soluções da equação são vértices de um polígono regular.

**8.1** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  duas raízes da equação.

Sabe-se que os pontos afijos são vértices consecutivos do polígono, e que  $\text{Arg}(z_1) > \text{Arg}(z_2)$ .

Determine  $\frac{z_1}{z_2}$  na forma algébrica.

**8.2** Determine a área desse polígono.

**9** Sejam  $w$  e  $z$  dois números complexos, tais que:

$$w = \frac{z - i}{2z + i}$$

Determine o conjunto dos números complexos  $z$ , tal que  $w$  seja um imaginário puro.

**10** Considere, em  $\mathbb{C}$ , os complexos  $z_1 = 2 + 2i$  e  $z_2 = 2z_1$ .

Represente graficamente a região  $S$  do plano definida pela condição:

$$1 \leq |z - z_1| \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq \text{Re}(z_1) \wedge |z| \geq |z - z_2|$$

# Matriz do teste diagnóstico

| META |                     | DESCRIÇÃO                                                       | ITEM | COTAÇÃO |
|------|---------------------|-----------------------------------------------------------------|------|---------|
| 1    | OTD9 - 3.2          | Casos favoráveis a um acontecimento                             | 1    | 6       |
| 2    | OTD9 - 3.4          | Acontecimentos disjuntos e complementares                       | 2    | 6       |
| 3    | OTD9 - 3.6          | Regra de Laplace                                                | 3    | 6       |
| 4    | OTD9 - 3.10         | Probabilidade de acontecimentos compostos                       | 4    | 6       |
| 5    | EST10 - 1.1         | Operar com somatórios                                           | 5    | 6       |
| 6    | LTC10 - 2.16        | Diferença de conjuntos                                          | 6    | 6       |
| 7    | ALG10 - 4.12        | Termo de grau zero e raízes inteiras de polinómios              | 7    | 6       |
| 8    | GM7 - 5.2           | Razão de uma homotetia                                          | 8    | 6       |
| 9    | FRVR10 - 2.9 e 2.10 | Translações de gráficos de funções                              | 9    | 6       |
| 10   | FRVR10 - 4.5 e 4.6  | Sentido das concavidades e extremos relativos                   | 10   | 6       |
| 11   | GM9 - 12.2          | Determinar distâncias usando trigonometria                      | 11   | 6       |
| 12   | TRI11 - 6.1         | Comprimento e amplitude de um arco de circunferência            | 12   | 6       |
| 13   | TRI11 - 7.7 e 7.8   | Fórmula fundamental da trigonometria e redução ao 1.º quadrante | 13   | 6       |
| 14   | TRI11 - 7.8         | Redução ao 1.º quadrante                                        | 14   | 6       |
| 15   | TRI11 - 8.5         | Equações trigonométricas                                        | 15   | 6       |
| 16   | SUC11 - 7.3         | Limite de uma sucessão                                          | 16   | 6       |
| 17   | FRVR11 - 4.2        | Limite de função racional                                       | 17   | 6       |
| 18   | FRVR11 - 2.2        | Função contínua                                                 | 18   | 6       |
| 19   | FRVR11 - 5.3        | Função diferenciável                                            | 19   | 6       |
| 20   | FRVR10 - 6.4        | Função quadrática                                               | 20.1 | 10      |
| 21   | FRVR11 - 9.2        | Função posição e função velocidade                              | 20.2 | 10      |
| 22   | FRVR11 - 9.2        | Função posição e função velocidade                              | 20.3 | 10      |
| 23   | FRVR11-7.13         | Função derivada                                                 | 21.1 | 10      |
| 24   | FRVR11-9.1          | Reta tangente ao gráfico de uma função                          | 21.2 | 10      |
| 25   | FRVR10-6.1          | Resolver equações envolvendo funções polinomiais                | 21.3 | 12      |
| 26   | FRVR11-9.3          | Estudar uma função quanto à monotonia e extremos                | 21.4 | 12      |
| 27   | FRVR11-4.4          | Estudar uma função quanto às assintotas do gráfico              | 21.5 | 12      |

## Matrizes de conteúdos

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 1                                                                                                     |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                     |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Domínio: Cálculo Combinatório                                                                                                                  |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                     |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                                                      | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos e resolução de problemas</li> </ul>                  | 25                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos.</li> <li>Conhecer factos elementares da combinatória.</li> <li>Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.</li> <li>Resolver problemas envolvendo operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos.</li> <li>Resolver problemas de contagem envolvendo arranjos e combinações.</li> <li>Resolver problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (8)</li> </ul> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Factos elementares da combinatória e problemas de contagem envolvendo arranjos e combinações</li> </ul> | 110                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Triângulo de Pascal e o binómio de Newton</li> </ul>                                                    | 65                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                     |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 2         |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                      |  |
|----------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Domínio:</b> Probabilidades                     |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                      |  |
| CONTEÚDOS                                          | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                    |  |
| • Probabilidades (10.º ano)                        | 20                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Definir espaço de probabilidades.</li> <li>Definir probabilidade condicionada.</li> <li>Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório e a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares.</li> <li>Resolver problemas envolvendo espaços de probabilidades e a determinação de propriedades da função probabilidade.</li> <li>Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (10)</li> </ul> |  |
| • Propriedades das probabilidades                  | 90                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                      |  |
| • Propriedades das probabilidades                  | 30                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                      |  |
| • Probabilidade condicionada e probabilidade total | 60                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                      |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 3                                                                                                        |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                     |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Domínio:</b> Funções reais de variável real                                                                                                    |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                     |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                                                         | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Limites de funções e Teorema de Bolzano-Cauchy e de Weierstrass</li> </ul>                                 | 50                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas.</li> <li>Conhecer propriedades elementares das funções contínuas.</li> <li>Resolver problemas envolvendo os teoremas de comparação e das sucessões e funções enquadradas para o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções reais de variável real.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (9)</li> </ul> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Derivada de funções</li> </ul>                                                                             | 30                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função.</li> <li>Resolver problemas de otimização e envolvendo propriedades das funções diferenciáveis.</li> <li>Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e acelerações e acelerações médias.</li> </ul>             |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Assíntotas do gráfico de funções</li> </ul>                                                                | 35                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Estudar o gráfico de funções, intervalos de monotonia, extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, pontos de inflexão e assíntotas.</li> <li>Resolver problemas envolvendo as propriedades das funções contínuas.</li> </ul>                                                                                                                      |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Estudo da monotonia, do sentido de concavidade e de pontos de inflexão do gráfico de uma função</li> </ul> | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Problemas envolvendo funções posição e velocidades instantâneas</li> </ul>                                 | 45                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                     |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 4                                                                                          |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Domínio:</b> Trigonometria                                                                                                       |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                                           | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas</li> </ul>                     | 40                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Estabelecer fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação de ângulos.</li> <li>Calcular a derivada de funções trigonométricas.</li> <li>Relacionar osciladores harmônicos e a segunda lei de Newton.</li> <li>Resolver problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas e o estudo da monotonia e da existência de extremos relativos e absolutos.</li> <li>Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmônicos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (7)</li> </ul> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Limites de funções trigonométricas</li> </ul>                                                | 10                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Derivadas de funções trigonométricas</li> </ul>                                              | 60                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolução de problemas e estudo de monotonia e a existência de extremos relativos</li> </ul> | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Osciladores harmônicos e movimentos oscilatórios</li> </ul>                                  | 50                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                     |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 5                                                                                                    |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Domínios: Funções exponenciais, funções logarítmicas e funções reais de variável real                                                         |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                                                     | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Limites de sucessões e de funções exponenciais e logarítmicas e estudo das assíntotas</li> </ul>       | 55                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Operar com juros compostos e definir o número de Neper.</li> <li>Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais.</li> <li>Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais.</li> <li>Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas.</li> <li>Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial.</li> <li>Resolver problemas envolvendo juros compostos.</li> <li>Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.</li> <li>Resolver problemas envolvendo a determinação de intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos, sentido de concavidades e pontos de inflexão do gráfico e assíntotas.</li> <li>Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma <math>y'' = ky</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (9)</li> </ul> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Problemas envolvendo as propriedades dos logaritmos</li> </ul>                                         | 70                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Teorema de Weierstrass</li> </ul>                                                                      | 15                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Estudo da monotonia e extremos relativos e de sentidos de concavidades e pontos de inflexão</li> </ul> | 35                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolução de problemas envolvendo funções exponenciais</li> </ul>                                      | 25                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 6                                                                                  |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                     |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Domínios:</b> Primitivas e cálculo integral.                                                                             |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                     |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                                   | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Primitivas e funções de referência para a primitivação</li> </ul>                    | 50                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Definir a noção de primitiva.</li> <li>Abordar intuitivamente a noção de integral definido.</li> <li>Resolver problemas envolvendo o cálculo de integrais definidos.</li> <li>Resolver problemas envolvendo as funções posição, velocidade, aceleração e a primitivação e a integração de funções reais de variável real.</li> <li>Resolver problemas envolvendo a determinação da medida da área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolha múltipla (5)</li> <li>Resposta aberta (8)</li> </ul> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de integrais definidos</li> </ul>                                            | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver problema envolvendo a determinação de áreas de regiões planas</li> </ul>    | 70                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                     |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver problemas envolvendo as funções posição, velocidade e aceleração</li> </ul> | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                     |  |

| MATRIZ DE CONTEÚDOS — FICHA DE AVALIAÇÃO 7                                                                             |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                         |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Domínio: Números complexos                                                                                             |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                         |  |
| CONTEÚDOS                                                                                                              | COTAÇÃO<br>(em pontos) | OBJETIVOS GERAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | TIPOS DE QUESTÕES                                                                                       |  |
| • Operações com números complexos na forma algébrica                                                                   | 40                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos.</li> <li>• Definir o corpo dos números complexos.</li> <li>• Operar com números complexos.</li> <li>• Definir a forma trigonométrica de um número complexo.</li> <li>• Extrair raízes <math>n</math>-ésimas de números complexos.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo números complexos e as respetivas propriedades algébricas.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo a representação de isometrias ou outras transformações do plano.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo a representação trigonométrica de números complexos.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo equações da forma <math>z^n = w</math> e vértices de polígonos regulares.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo polinómios do 2.º grau.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escolha múltipla (5)</li> <li>• Resposta aberta (8)</li> </ul> |  |
| • Resolução de equações em $\mathbb{C}$                                                                                | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                         |  |
| • Resolução de problemas com complexos na forma trigonométrica                                                         | 40                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                         |  |
| • Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos, de isometrias e outras transformações do plano | 80                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                         |  |

# Soluções das Fichas de avaliação

## FICHA DE AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

### Grupo I

- |              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| <b>1</b> (B) | <b>8</b> (A)  | <b>15</b> (D) |
| <b>2</b> (D) | <b>9</b> (C)  | <b>16</b> (B) |
| <b>3</b> (B) | <b>10</b> (D) | <b>17</b> (C) |
| <b>4</b> (A) | <b>11</b> (D) | <b>18</b> (D) |
| <b>5</b> (D) | <b>12</b> (B) | <b>19</b> (A) |
| <b>6</b> (C) | <b>13</b> (C) |               |
| <b>7</b> (C) | <b>14</b> (A) |               |

**20** 20.1  $s(t) = -t^2 + 4t + 5$

20.2  $v(0) = 4 \text{ m/s}, v(2) = 0 \text{ m/s}, v(3) = -2 \text{ m/s}$

20.3  $v(5) = -6 \text{ m/s}$

**21** 21.1  $f'(x) = \frac{(4x-1)(x+1) - (2x^2-x)}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+4x-x-1-2x^2+x}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$

21.2  $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$

21.3 Área = 3 u. a.

21.4  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

|         |           |                           |   |      |   |                           |           |
|---------|-----------|---------------------------|---|------|---|---------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ |   | $-1$ |   | $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0                         | − | n.d. | − | 0                         | +         |
| $f$     | ↗         | máx.                      | ↘ | n.d. | ↘ | mín.                      | ↗         |

A função  $f$  é estritamente crescente quando  $x \in \left] -\infty, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$  e quando

$x \in \left[ -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right[$  e é estritamente decrescente quando  $x \in \left[ -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 \right]$  e quando

$x \in \left] -1, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$  e tem um máximo relativo em  $x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$  e um mínimo relativo

em  $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

$$21.5 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - x}{x + 1} = \frac{2 + 1}{-1^- + 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - x}{x + 1} = \frac{2 + 1}{-1^+ + 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

O gráfico de  $f$  apresenta uma assíntota vertical de equação  $x = -1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x - 1)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x - 1)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico de  $f$  não apresenta qualquer assíntota horizontal.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2 - x}{x + 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-3x}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-3)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{1 + \frac{1}{x}} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \frac{2x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - x}{x + 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3x}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-3)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{1 + \frac{1}{x}} = -3 \end{aligned}$$

O gráfico de  $f$  tem uma assíntota oblíqua de equação  $y = 2x - 3$ .

## FICHA DE AVALIAÇÃO 1

## Grupo I

- 1** A   **2** D   **3** A   **4** C   **5** B

## Grupo II

- 6** 4 rapazes

- 7** 315 pontos

- 8** a) 5040  
b) 720  
c) 1260

**9** 9.1  $(x + y)^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1x^4y + {}^5C_2x^3y^2 + {}^5C_3x^2y^3 + {}^5C_4xy^4 + {}^5C_5y^5$   
 $(x - y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4y + {}^5C_2x^3y^2 - {}^5C_3x^2y^3 + {}^5C_4xy^4 - {}^5C_5y^5$   
 $(x + y)^5 + (x - y)^5 = 2({}^5C_0x^5 + {}^5C_2x^3y^2 + {}^5C_4xy^4) = 2(x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4)$

9.1  $88\sqrt{3}$

- 10** 15

- 11**  $n = 11$

**12**  ${}^{m-1}C_{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} = \frac{n \times m \times (m-1)!}{m \times (m-n)n \times (n-1)!} = \frac{n}{m} \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{n}{m} {}^mC_n$

## FICHA DE AVALIAÇÃO 2

## Grupo I

- 1** C   **2** D   **3** A   **4** B   **5** D

## Grupo II

**6** a)  $\frac{24}{39}$

b)  $\frac{15}{39}$

c)  $\frac{1}{65}$

d)  $\frac{24}{65}$

**7**  $\frac{2}{13}$

**8**  $\frac{1}{60}$

- 9** 2 ou 10

$$\begin{aligned}
 10 \quad P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\
 &= 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) - 2[1 - P(\overline{A \cap B})] = 2P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) = \\
 &= 2[P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})] - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - 2P(\bar{A} \cap \bar{B})
 \end{aligned}$$

$$11 \quad \frac{4}{49}$$

$$12 \quad \frac{15}{49}$$

## FICHA DE AVALIAÇÃO 3

### Grupo I

- 1 C    2 D    3 C    4 A    5 B

### Grupo II

$$\begin{aligned}
 6 \quad m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x \cos x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2 \cos x}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2 \cos x}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1, \text{ pois para } x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ e para todo } x \neq 0, -\frac{2}{x^2} \leq \frac{2 \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{x^2} = 0$ .

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 2x \cos x}{x^2 - 3x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cos x + 3x^2}{x^2 - 3x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( \frac{2 \cos x}{x} + 3 \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \cos x}{x} + 3}{1 - \frac{3}{x}}, \text{ pois quando } x \rightarrow +\infty \text{ temos, então,} \\
 &-\frac{2}{x} \leq \frac{2 \cos x}{x} \leq \frac{2}{x}.
 \end{aligned}$$

Portanto, porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{x} = 0$ .

O mesmo se passa para  $x \rightarrow -\infty$ . Assim, a reta de equação  $y = x + 3$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  em  $+\infty$  e  $-\infty$ .

$$7 \quad a = 3$$

$$8 \quad a = 3, b = -2, c = 2$$

- 9 a) A função  $f$  é contínua por ser racional e tem domínio  $\mathbb{R}$ . Então, não existem assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0, \text{ então, a reta de equação } y = 0 \text{ é assíntota ao gráfico de } f \text{ em } +\infty \\
 &\text{e em } -\infty.
 \end{aligned}$$

b) 
$$f'x = \frac{(x+1)' \times (x^2+1) - (x^2+1)' \times (x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$1-2x-x^2=0 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2} \vee x = -1 + \sqrt{2}$$

Como, para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x^2+1)^2 > 0$ , construindo o quadro de sinais de  $f'$  e de variação de  $f$ , obtém-se:

|                |            |                 |            |                 |            |
|----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|
| $x$            | $-\infty$  | $-1 - \sqrt{2}$ |            | $-1 + \sqrt{2}$ | $+\infty$  |
| $1 - 2x - x^2$ | $-$        | $0$             | $+$        | $0$             | $-$        |
| $(x^2+1)^2$    | $+$        | $+$             | $+$        | $+$             | $+$        |
| $f'(x)$        | $-$        | $0$             | $+$        | $0$             | $-$        |
| $f$            | $\searrow$ | min.            | $\nearrow$ | máx.            | $\searrow$ |

Portanto,  $f$  é decrescente nos intervalos  $] -\infty, -1 - \sqrt{2}]$  e  $[-1 + \sqrt{2}, +\infty[$ , crescente no intervalo  $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$ ,  $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$  é um mínimo relativo e  $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$  é um máximo relativo.

c) 
$$f''(x) = \frac{(1-2x-x^2)' \times (x^2+1)^2 - [(x^2+1)^2]' (1-2x-x^2)}{[(x^2+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{(-2-2x) \times (x^2+1)^2 - 2 \times (x^2+1) \times 2x \times (1-2x-x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1) \times [(-2-2x) \times (x^2+1) - 4x \times (1-2x-x^2)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x - 2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 4}{(x^2+1)^3} = \frac{2[(x+1)^3 - 2]}{(x^2+1)^3}$$

Calculando os zeros de  $f''$  obtém-se  $f''x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt[3]{2}$ .

Construindo o quadro de sinais da segunda derivada e do sentido das concavidades do gráfico de  $f$ :

|                  |           |                    |           |
|------------------|-----------|--------------------|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $-1 + \sqrt[3]{2}$ | $+\infty$ |
| $2[(x+1)^3 - 2]$ | $-$       | $0$                | $+$       |
| $(x^2+1)^3$      | $+$       | $+$                | $+$       |
| $f''(x)$         | $-$       | $0$                | $+$       |
| $f$              | $\cap$    | P.I.               | $\cup$    |

O gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo no intervalo  $] -\infty, -1 + \sqrt[3]{2}]$ , concavidade voltada para cima no intervalo  $[-1 + \sqrt[3]{2}, +\infty[$  e tem um ponto de inflexão de abcissa  $-1 + \sqrt[3]{2}$ .

- 10** a) 400 m  
b) 100 m/s  
c) -150 m/s

## FICHA DE AVALIAÇÃO 4

## Grupo I

- 1** A   **2** B   **3** C   **4** B   **5** D

## Grupo II

**6**  $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

**7**  $a = 3, b = -1$

**8**  $2\pi^2$

**9** **9.1**  $-2\pi \text{ u/s}$

**9.2**  $f'(t) = -6 \times \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right); f''(t) = -6 \frac{\pi^2}{9} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ , então,  $f''(t) = -\alpha f(t)$   
com  $\alpha = \frac{\pi^2}{9}$

**10** **10.1**  $\overline{PP'} = \sin x$  e  $\overline{PP''} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x = \\ &= \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \end{aligned}$$

**10.2**  $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Construindo o quadro de variação de sinal de  $f'$  e de monotonia de  $f$ , obtém-se:

|      |                      |            |                 |            |                      |
|------|----------------------|------------|-----------------|------------|----------------------|
| $x$  | 0                    |            | $\frac{\pi}{6}$ |            | $\frac{\pi}{3}$      |
| $f'$ |                      | +          |                 | -          |                      |
| $f$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ | 1               | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

A função  $f$  é estritamente crescente para  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  e estritamente decrescente para  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , apresenta o máximo em  $x = \frac{\pi}{6}$  com o valor 1 e mínimo de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  para  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ . O contradomínio de  $f$  é  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ .

## FICHA DE AVALIAÇÃO 5

## Grupo I

- 1 C   2 B   3 C   4 A   5 D

## Grupo II

- 6 6.1  $f'(x) = 4e^x(x^2 + 1) + 4e^x(2x) = 4e^x(x + 1)^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

|      |            |               |            |
|------|------------|---------------|------------|
| $x$  | $-\infty$  | $-1$          | $+\infty$  |
| $f'$ | $+$        | $0$           | $+$        |
| $f$  | $\nearrow$ | $\frac{8}{e}$ | $\nearrow$ |

$f$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$  e não tem qualquer extremo relativo.

- 6.2  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , pois é o produto de uma função constante por uma função exponencial e por uma função polinomial que são contínuas em  $\mathbb{R}$ , logo,  $f$  é contínua em  $[-2, 0]$ .  
Então, pelo Teorema de Weierstrass, podemos garantir que existe um mínimo e um máximo absoluto nesse intervalo e, por isso, o contradomínio de  $f$  nesse intervalo é limitado e fechado.

Como  $f(-2) = \frac{20}{e^2}$  e  $f(0) = 4$  e  $f$  é estritamente crescente, o contradomínio de  $f_{[-2, 0]}$  é  $\left[\frac{20}{e^2}, 4\right]$ .

- 6.3  $f(x) = g(x) = \pm \frac{1}{2}$ ;  $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{\sqrt{e}}\right)$  e  $B\left(\frac{1}{2}, 5\sqrt{e}\right)$ ;

$$\begin{aligned} \text{Área } [AOB] &= \text{Área } [AA'BB'] - \text{Área } [AA'O] - \text{Área } [BB'O] = \frac{5+5e}{2\sqrt{e}} - \frac{5}{4\sqrt{e}} - \frac{5}{4}\sqrt{e} = \\ &= \frac{5\sqrt{e} + 5e\sqrt{e}}{4e} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

7  $x = \frac{9}{2}$

8 8.1  $\log_3\left(\frac{a-1}{b}\right) = 4c-1 \Leftrightarrow \frac{a-1}{b} = 3^{4c-1} \Leftrightarrow a-1 = b3^{4c-1}$  e  $\log_9((8a+1)(3b)) = 5c + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (8a+1)(3b) = 3^{10c+1} \Leftrightarrow (8a+1) = \frac{3^{10c+1}}{3b} \Rightarrow (8a+1)(a-1) = \frac{3^{10c+1}}{3b} b3^{4c-1} = 3^{14c-1}$

Vem  $3b = \frac{a-1}{3^{4c-2}}$  e, assim,  $(8a+1)\left(\frac{a-1}{3^{4c-2}}\right) = 3^{10c+1} \Leftrightarrow (8a+1)(a-1) = 3^{14c-1}$  c.q.d

8.2  $a = 10$ ,  $b = 3$

9  $+\infty$

10 10.1  $f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$   
 $f''(x) = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1})^3}$

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ |
| $f''$ | $+$       | $0$  | $-$       |
| $f$   | $\cup$    | P.I. | $\cap$    |

O gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $x \in ]-\infty, 0]$  e concavidade voltada para baixo em  $x \in [0, +\infty[$  tem um ponto de inflexão em  $x = 0$ .

**10.2**  $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right)$  e  $D_g = \mathbb{R}^+$ .

Assíntota vertical:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln\left(\frac{0 + \sqrt{0 + 1}}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

A reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

Assíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right)$ .

Como  $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 + \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ , vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)\right) = \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = \ln 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ , não existindo outras assíntotas, dado que  $D_g = \mathbb{R}^+$  e se tratar de uma função contínua no seu domínio.

## FICHA DE AVALIAÇÃO 6

### Grupo I

- 1** B   **2** A   **3** B   **4** A   **5** C

### Grupo II

**6** **6.1**  $a = 6$

**6.1**  $F(x) = 2x^2 + 6x + 4$

**7**  $4 \sin^3 x + C$  em  $\mathbb{R}$

**8** **8.1**  $x(t) = 2t^2 + \frac{4}{t} - 12$

**8.2**  $a(2) = 5 \text{ cm/s}^2$

**9** **9.1**  $f'(x) = -\frac{8}{x^2}$ , pelo que  $f'(3) = -\frac{8}{9}$ .

Como  $f(3) = \frac{8}{3}$  vem  $\frac{8}{3} = -\frac{8}{9} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{16}{3}$  e temos assim  $r: y = -\frac{8}{9}x + \frac{16}{3}$ .

Como a ordenada de  $A$  é nula, tem-se  $0 = -\frac{8}{9}x + \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{9}x = \frac{48}{9} \Leftrightarrow x = 6$  c.q.d.

**9.2** Área =  $8 \ln 4 - 4$  u.a.

**10** Área =  $\int_{-2}^2 (g(x) - f(x))dx = \frac{64}{3}$

## FICHA DE AVALIAÇÃO 7

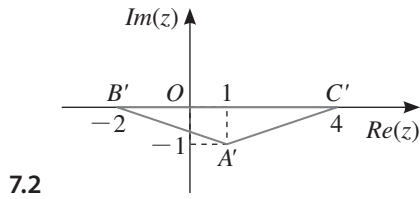
## Grupo I

- 1** (B) **2** (D) **3** (A) **4** (B) **5** (D)

**6** 6.1  $\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{4}$

6.2  $\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$

**7** 7.1  $6 + 2\sqrt{10}$  u.c.



**8** 8.1  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8.2  $3\frac{\sqrt{3}}{2}$  u.a.

- 9** Conjunto dos números complexos cujos afijos pertencem, no plano complexo, à circunferência de centro  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$  e raio  $\frac{3}{4}$ .

