

Provas finais

• PROVA FINAL 1	1
• PROVA FINAL 2	6
• Soluções das Provas finais	10

PROVA FINAL 1

ESCOLA: _____
 NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

Caderno 1 (com calculadora) — 45 minutos

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1 Considere uma amostra correspondente à idade, em anos, de 12 pessoas:

$$x = (3, 5, 11, 12, 17, 15, 13, 11, 12, 19, 14, 16)$$

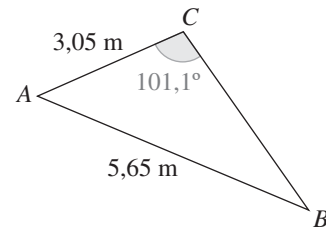
Qual é o valor de P_{63} ?

- (A) 11 (C) 13
(B) 12 (D) 14

- 2 Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 5,65$ m
- $\overline{AC} = 3,05$ m
- $\hat{ACB} = 101,1^\circ$



Qual é a amplitude, em graus, arredondada às décimas do ângulo BAC ?

- (A) $32,0^\circ$ (C) $46,9^\circ$
(B) $42,1^\circ$ (D) $58,0^\circ$

- 3 Num exame, um aluno tem de responder a oito perguntas de escolha múltipla com quatro alternativas de resposta cada, estando apenas uma correta.

Quantas sequências diferentes de resposta existem em que o aluno acerta exatamente a cinco questões quando responde às oito?

- (A) 336 (C) 13 440
(B) 1512 (D) 40 320

Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 4 Uma pessoa fez um empréstimo bancário no valor de 3500 euros e acordou em pagar o valor do empréstimo em dez prestações mensais. Além dos 350 euros de cada prestação, deve pagar 1,2 % de juros mensais pelo valor que ainda falta pagar.

- 4.1 Mostre que o valor do juro a pagar em cada mês é um termo de uma progressão aritmética e indique o termo geral dessa progressão.
 4.2 Determine o total de juros pagos até pagar todo o empréstimo.

- 5** Numa experiência lança-se um objeto a uma dada altura, na vertical, e regista-se o tempo que demora a atingir o solo.

Seja a , a função definida por $a(t) = 8 - e^t$ que indica a altura em metros do objeto após t segundos do início da experiência.

- 5.1** Determine a altura percorrida pelo objeto ao fim de um segundo.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às décimas.

- 5.2** Considere, num referencial o.n. Oxy :

- parte do gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}_0^+$, por $f(x) = 8 - e^x$;
- parte do gráfico da função g , definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \frac{1}{x}$;
- os pontos A e B de interseção dos dois gráficos;
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A .

Determine a área da região delimitada pelos dois gráficos.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, os gráficos de f e de g , no intervalo $[0; 2,3]$;
- indique as coordenadas de A e de B arredondadas às milésimas;
- equacione o problema;
- determine a área da região arredondada às centésimas;
- nos cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Grupo	ITEM				
	Cotação (em pontos)				
I	1 a 3				
	3 × 5 pontos				15
II	4.1	4.2	5.1	5.2	
	10	5	10	15	40
Total					55

PROVA FINAL 1

ESCOLA: _____
 NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

Caderno 2 (sem calculadora) — 105 minutos

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 6** Considere um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos possíveis $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,6$
- $P(B) = 0,5$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,8$

Qual é o valor de $P(A \cap \bar{B})$?

- (A) 0,5 (C) 0,3
(B) 0,4 (D) 0,2

- 7** Qual é o valor do

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{4x-4} - 1}{\sin(2-x)} ?$$

- (A) 1 (C) -12
(B) 2 (D) -2

- 8** Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais:

$$u_n = \frac{2 + 2n}{kn} \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ e } v_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n \ln 2}$$

Sabe-se que $\lim(u_n) = \lim(v_n)$.

Qual é o valor de k ?

- (A) $\frac{1}{2}$ (C) 2
(B) 1 (D) 4

- 9** Qual é a máxima distância entre o ponto de coordenadas $(1, 4)$ e um ponto da circunferência $(x+2)^2 + y^2 = 4$?

- (A) 5 (C) 7
(B) 6 (D) 8

- 10** Qual é o conjugado do complexo $\frac{1-3i}{1+2i}$?

- (A) $-1+i$ (C) $1-i$
(B) $1+i$ (D) $-1-i$

Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 11** Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 - z^3 + z - 1 = 0$.

Sabe-se que:

- $z_0 = 1$ é uma das soluções;
- A, B, C e D são, no plano complexo, os afixos dos complexos que são solução da equação.

Determine a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$.

- 12** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $x + 2y - 3z + 8 = 0$ e o ponto A de coordenadas $(1, 2, 3)$.

12.1 Defina, por uma equação vetorial, uma reta que contenha A e seja paralela ao plano α .

12.2 Seja r a reta com a direção do vetor de coordenadas $(3, 2, 1)$ que contém o ponto A e que intersecta α no ponto B .

Determine $\overline{AB}$.

- 13** Considere a função f definida por:

$$f(x) = 2\ln(x - 3) - x^2 + 6x - 8$$

Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

- 14** Considere duas caixas U e V e um conjunto de bolas de cor azul e de cor branca indistinguíveis ao tato.

Na caixa U , colocam-se 6 bolas azuis e 4 bolas brancas e na caixa V colocam-se 2 bolas brancas e 8 bolas azuis.

Realiza-se a seguinte experiência:

Lança-se um dado cúbico equilibrado e numerado de 1 a 6.

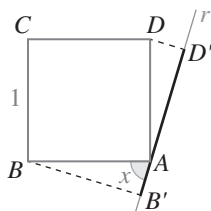
Se sair a face 1 ou a 2 retiram-se duas bolas, em simultâneo, da caixa V ; caso contrário, retiram-se, em simultâneo, duas bolas da caixa U .

Registam-se as cores das bolas que saíam.

Qual é o valor lógico da afirmação seguinte?

É mais provável saírem duas bolas de cores diferentes do que duas bolas de cores iguais.

- 15** Considere um quadrado $[ABCD]$ de lado 1.



Seja:

- r a reta que passa em A e não intersecta o quadrado noutro ponto;
- B' e D' os pés das perpendiculares dos vértices B e D para a reta r ;
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo formado pelo lado $[AB]$ e pela reta r .

15.1 Mostre que o comprimento de $[B'D']$ é dado, em função de x , por $C(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

15.2 Determine o comprimento máximo de $[B'D']$ e interprete geometricamente o resultado.

16 Seja f a função definida por $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

16.1 Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

16.2 Mostre que existe pelo menos um número real $c \in]1, 3[$: $f(c) = c - 1$.

Grupo	ITEM									
	Cotação (em pontos)									
I	6 a 10									
	5 × 5 pontos									25
II	11.	12.1	12.2	13.	14.	15.1	15.2	16.1	16.2	
	15	10	10	15	15	15	10	15	15	120
Total										145

PROVA FINAL 2

ESCOLA: _____

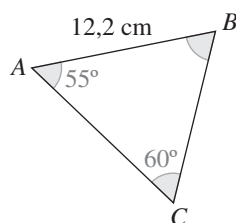
NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

Caderno 1 (com calculadora) — 45 minutos

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- 1 Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 12,2 \text{ cm}$
- $\hat{BAC} = 55^\circ$
- $\hat{ACB} = 60^\circ$

Qual é a medida, aproximada à décima, de $[AC]$?

- (A) 12,9 cm (C) 11,7 cm
- (B) 12,8 cm (D) 11,5 cm
- 2 Considere, em C , o complexo $z = -2 + i$.
- Qual das seguintes opções pode representar o complexo $z_1 = iz$?
- (A) $\sqrt{5} e^{i0,464}$ (C) $\sqrt{5} e^{i3,605}$
- (B) $\sqrt{5} e^{i0,464}$ (D) $\sqrt{5} e^{i4,249}$

Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

- 3 Um carpinteiro deve construir uma caixa com a forma de paralelepípedo com tampa usando a quantidade mínima de madeira.

Sabe-se que:

- o volume da caixa é 900 dm^3 ;
- uma das dimensões da caixa é 15 dm .

Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

A quantidade mínima de madeira é inferior a 585 dm^2 .

Nota: Na sua justificação, pode optar por apresentar o gráfico obtido na calculadora, indicando toda a informação que lhe permita justificar a sua resposta.

- 4** Seja P a função que traduz um modelo para a evolução da população na Terra dada por:

$$P(t) = \frac{11}{1 + 1,2e^{-0,025t}}$$

em que t representa o número de anos após 1990 e $P(t)$ representa a população em milhares de milhão.

Nos itens seguintes, apresente os resultados arredondados à décima.

- 4.1** Segundo este modelo, qual será a população mundial em 2100 ?

- 4.2** Considere a função f , definida para $x > 0$, por:

$$f(x) = \frac{11}{1 + 1,2e^{-0,025x}}$$

O gráfico de f apresenta um ponto de inflexão. Determine as suas coordenadas.

Grupo	ITEM			
	Cotação (em pontos)			
I	1 a 2			
	2 × 5 pontos			10
II	3.	4.1	4.2	
	15	8	17	40
Total				50

PROVA FINAL 2

ESCOLA: _____
 NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

Caderno 2 (sem calculadora) — 105 minutos

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a opção correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

5 Qual é a soma dos 5 primeiros coeficientes do desenvolvimento de $(1 + x)^9$?

- (A) 2^4 (C) 2^8
 (B) 2^5 (D) 2^9

6 Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, sabe-se que:

- $P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(A|B) = \frac{2}{3}$
- $P(B|A) = \frac{1}{4}$

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{8}$

7 Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Sejam:

- A e B os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox ;
- C o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos A e B .

Qual é o valor do produto escalar $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$?

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$
 (B) 0 (D) 1

8 Qual das seguintes expressões é equivalente a $\log_a \frac{1}{b}$, com $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$?

- (A) $\log_a b$ (C) $-\log_b a$
 (B) $\log_b a$ (D) $-\log_a b$

9 Qual é o valor de $\frac{\sqrt{12} \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$?

(A) $\sqrt{3}$

(C) 1

(B) $2\sqrt{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10 Seja f , a função real de variável real, definida por $f(x) = -\sqrt{x}$.

Num referencial o.n. Oxy , o ponto $(1, -2)$ pertence ao gráfico de F primitiva de f .

Qual é a ordenada do ponto de interseção do gráfico de F com o eixo Oy ?

(A) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(D) $-\frac{4}{3}$

Grupo II

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e as justificações necessárias.

11 Considere, em $\mathbb{C}$, o complexo $z = \frac{3i + 1}{i - 1}$.

Determine os números complexos w , tais que $w^3 = z + 3e^{i\frac{25\pi}{2}}$.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

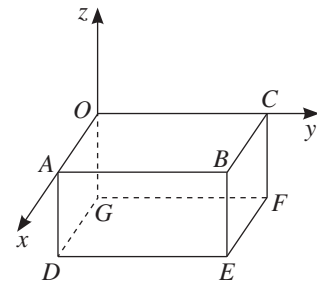
12 Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, possíveis e independentes, prove que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$

13 Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$.

Sabe-se que:

- os pontos A , C e G pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto E tem coordenadas $(2, 6, -2)$.



13.1 Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto E e que é tangente ao plano yOz .

13.2 Seja α o plano mediador de $[EC]$.

13.2.1 Mostre que α é definido pela condição $x - z = 2$.

13.2.2 Seja r a reta que passa no ponto $R(-1, 5, 4)$ e é perpendicular a α no ponto P .

Determine o valor de $\overline{RP}$.

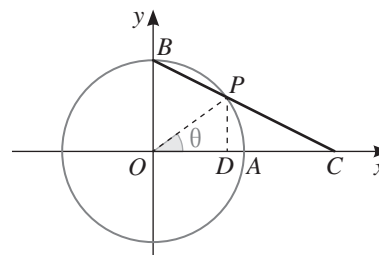
14 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x} + x - 3$.

Estude f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

- 15** No referencial o.n. Oxy da figura, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- A e B são pontos de interseção do círculo com os eixos Ox e Oy , respetivamente;
- C pertence a Ox , tal que $\overline{OC} = 2$;
- P é um ponto do arco AB ;
- D é o pé da perpendicular de P para Ox ;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP , $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Seja f a função que para cada valor de θ corresponde à medida de $2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$.

15.1 Mostre que $f(\theta) = 9 - 4\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.

15.2 Existe um valor de θ para o qual $f(\theta)$ tem o valor mínimo.

Determine, para esse valor de θ , a medida da área do triângulo $[PDC]$.

- 16** Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a & \text{se } x \geq 2 \\ 12 & \text{se } x < 2 \end{cases} \text{ com } a \in \mathbb{R}^+.$$

Determine a de forma que o teorema de Weierstrass permita garantir a existência de um mínimo e de um máximo absolutos da função f em $[1, 3]$.

Grupo	ITEM									
	Cotação (em pontos)									
I	5 a 10									
	6 × 5 pontos									30
II	11.	12.	13.1	13.2	13.3	14.	15.1	15.2	16.	
	15	15	8	12	15	15	15	10	15	120
Total										200

Soluções das Provas finais

PROVA FINAL 1

Caderno 1 (com calculadora)

Grupo I

1 D

2 C

3 B

Grupo II

4 4.1 Juros ao fim do 1.º mês: $3500 \times 0,012 = 42,00$

Juros ao fim do 2.º mês: $(3500 - 350) \times 0,012 = 42,00 - 4,20 = 37,80$

Juros ao fim do 3.º mês: $(3500 - 2 \times 350) \times 0,012 = 42,00 - 2 \times 4,20 = 33,60 \dots$

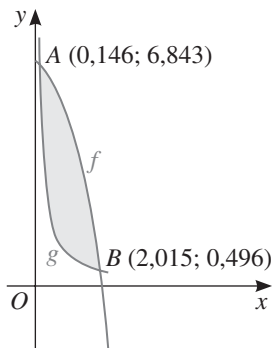
Trata-se de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 42,00 e a razão é $-4,20$

$$u_n = 46,2 - 4,2n$$

4.2 $u_1 = 42$, $u_{10} = 46$, $2 - 42 = 4,2$ e, então, $S_{10} = 231$ €

5 5.1 $a(1) = 8 - e^1 = 5,2817\dots$ e $a(0) = 8 - e^0 = 7$, então, $a(0) - a(1) = 7 - 5,2817 = 1,7183 \approx 1,7$ m

5.2 Área = $\int_{0,146}^{2,015} (8 - e^x) dx - \int_{0,146}^{2,015} \frac{1}{x} dx = 8x - e^x \Big|_{0,146}^{2,015} - [\ln |x|]_{0,146}^{2,015} = 5,98$ u.a.



Caderno 2 (sem calculadora)

Grupo I

6 B

7 D

8 A

9 C

10 A

Grupo II

11 11.1 $z^4 - z^3 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^3 + 1) = 0$

Como $z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{(\pi + 2k\pi)}{3}}$, com $k \in \{0, 1, 2\}$

Temos $k = 0 \rightarrow z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 1 \rightarrow z_1 = e^{i\frac{3\pi}{3}} \Leftrightarrow z_1 = -1$

$k = 2 \rightarrow z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

O quadrilátero é um losango cuja área é $A = \frac{D \times d}{2}$

Como $D = (1 - (-1)) = 2$ e $d = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, vem $A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ u.a.

12 12.1 As coordenadas do vetor normal $\vec{n}$ ao plano α são $(1, 2, -3)$.

As coordenadas de um vetor com a direção perpendicular é, por exemplo, $(1, 1, 1)$, pelo que a equação vetorial será $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 1, 1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

12.2 A equação vetorial da reta r é $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(3, 2, 1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Temos, então, $x = 1 + 3k$, $y = 2 + 2k$ e $z = 3 + k$.

Vem, assim, $1 + 3k + 4 + 4k - 9 - 3k + 8 = 0 \Leftrightarrow 4k = 4 \Leftrightarrow k = 1$

B tem as coordenadas $(4, 4, 4)$ e $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

13 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0\}$, pelo que $x \in]3, +\infty[$.

$f(x) = 2 \ln(x - 3) - x^2 + 6x + 8$

$$f'(x) = \frac{2}{x-3} - 2x + 6 = \frac{2 - 2(x-3)^2}{x-3} = \frac{-2x^2 + 12x - 16}{x-3} = \frac{-2(x-2)(x-4)}{x-3}$$

Dado que $x \in]3, +\infty[$, então:

x	3		4	$+\infty$
$(x-2)$		+	+	+
$(x-3)$		+	+	+
$-2(x-4)$		+	0	-
$f'(x)$		+	0	-
f		$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Temos, então, que f tem um máximo absoluto em $x = 4$, é estritamente crescente para $x \in]3, 4[$ e é estritamente decrescente para $x \in [4, +\infty[$.

14 Sejam:

A: «Escolher a caixa U »

B: «Escolher a caixa V »

D: «As bolas saídas são de cor diferente»

$P(A) = \frac{2}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(D) = P(A) \times P(D|A) + P(B) \times P(D|B)$

Como $P(D|A) = \frac{{}^6C_1 \times {}^4C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{2 \times 6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{24}{45}$ e $P(D|B) = \frac{{}^8C_1 \times {}^2C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{2 \times 8 \times 2}{10 \times 9} = \frac{16}{45}$, vem, então:

$$P(D) = \frac{2}{3} \times \frac{24}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{16}{45} = \frac{48 + 16}{135} = \frac{64}{135}$$

Como $P(D) < \frac{1}{2}$, então, é mais provável saírem bolas de cores iguais e conclui-se que a afirmação é falsa.

- 15.1** $\overline{AB'} = \cos x$ e $\overline{AD'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, então, $\overline{B'D'} = \sin x + \cos x$.

Temos, então, $C(x) = \sin x + \cos x$.

$$\begin{aligned}\text{Como } \sin x + \cos x &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \times \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \times \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

Vem $C(x) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ c.q.d.

- 15.2** O comprimento máximo de $[B'D']$ ocorre quando C for máximo, ou seja, quando $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$.

Então, C é máximo quando $x = \frac{\pi}{4}$ e o valor máximo de $[B'D']$ é $\sqrt{2}$.

$[B'D']$ é máximo quando for paralelo à diagonal do quadrado e tem igual valor.

- 16.1** $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \geq 0\}$, pelo que $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})^{\infty - \infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty - \infty = -\infty$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

Assíntotas oblíquas:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2 - 1}) =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1})^{\infty - \infty} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x - \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{1}{-\infty - \infty} = 0$$

A reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

Concluindo, as retas de equação $y = 0$ e $y = 2x$ são assíntotas não verticais ao gráfico de f .

- 16.2** Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - (x - 1)$.

A função g é contínua em $[1, 3]$, uma vez que a função f é contínua e g é a diferença de f com uma função contínua $(x - 1)$.

$$g(1) = f(1) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0 \text{ e } g(3) = f(3) - 2 = 3 - \sqrt{8} - 2 = 1 - 2\sqrt{2} < 0$$

Portanto, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um número real c no intervalo $]1, 3[$, tal que $g(c) = 0$.

Como $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - (c - 1) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c - 1$, podemos concluir que existe pelo menos um número real c no intervalo $]1, 3[$, tal que $f(c) = c - 1$.

PROVA FINAL 2

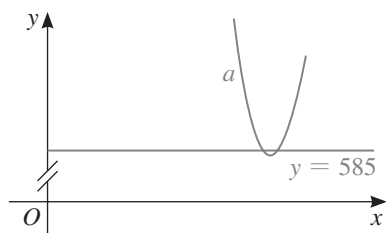
Caderno 1 (com calculadora)

Grupo I

- 1** B **2** D

Grupo II

- 3** $V = 15xy = 900 \text{ dm}^3 \Leftrightarrow xy = 60 \text{ dm}^2 \Leftrightarrow y = \frac{60}{x} \text{ dm}^2$
 $A(x) = 2(15x + 15y + xy) \Leftrightarrow A(x) = 30x + 30y + 2xy \Leftrightarrow A(x) = 30x + 30 \frac{60}{x} + 120 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A(x) = 120 + 30x + \frac{1800}{x}$
 $A'(x) = 30 - \frac{1800}{x^2}$, então, $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 60 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{15}$
 Dado que $A''(x) = \frac{3600}{x^3} > 0$, A tem um mínimo em $x = 2\sqrt{15}$.
 $A(2\sqrt{15}) = 120 + 30(2\sqrt{15}) + \frac{1800}{2\sqrt{15}} = 120 + 60\sqrt{15} + 60\sqrt{15} =$
 $= 120 + 120\sqrt{15} = 584,8 \text{ dm}^2$



A afirmação é verdadeira.

- 4** **4.1** $t = 2100 - 1990 = 110$

$$P(110) = \frac{11}{1 + 1,2e^{-0,025 \times 110}} \approx 10,2 \text{ milhares de milhão}$$

- 4.2** Fazendo $a = 11$, $b = 1,2$ e $c = -0,025$, obtém-se, sucessivamente,

$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{cx}} \text{ e } f'(x) = \frac{-abce^{cx}}{(1 + be^{cx})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-abc^2e^{cx}(1 + be^{cx}) + 2ab^2c^2e^{2cx}}{(1 + be^{cx})^3} = \frac{-abc^2e^{cx} - 2ab^2c^2e^{2cx} + 2ab^2c^2e^{2cx}}{(1 + be^{cx})^3} =$$

$$= \frac{-abc^2e^{cx} + 2ab^2c^2e^{2cx}}{(1 + be^{cx})^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -abc^2e^{cx} + ab^2c^2e^{2cx} = 0 \Leftrightarrow -1 + be^{cx} = 0 \Leftrightarrow e^{cx} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow cx = -\ln b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln b}{c}$$

$$f\left(\frac{-\ln b}{c}\right) = \frac{a}{1 + be^{\left(\frac{-\ln b}{c}\right)c}} = \frac{a}{1 + be^{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}} = \frac{a}{1 + b \frac{1}{b}} = \frac{a}{2}$$

Substituindo os valores iniciais, vem $x = \frac{-\ln 1,2}{-0,025} \approx 7,3$ e $y = \frac{a}{2} = 5,5$.

$$P.I.(x,y) = (7,3; 5,5)$$

Caderno 2 (sem calculadora)

Grupo I

5 C **6** D **7** B **8** A **9** C **10** D

Grupo II

$$11 \quad z = \frac{3i+1}{i-1} = \frac{1+3i}{-1+i} \times \frac{-1-3i-i+3}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

vem $w^3 = z + 3e^{i\frac{25\pi}{2}} = 1-2i+3i = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e, então, $w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Temos, assim:

$$k=0 \rightarrow w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$k=1 \rightarrow w_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$k=2 \rightarrow w_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

São os complexos $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

$$\begin{aligned} 12 \quad P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \\ &= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] = P(\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) = \\ &= P(\bar{A})[1 - P(B)] = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \text{ c.q.d.} \end{aligned}$$

$$13 \quad 13.1 \quad (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 4$$

$$\begin{aligned} 13.2.1 \quad (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 &= x^2 + (y-6)^2 + z^2 \Leftrightarrow \\ -4x + 4 + 4z + 4 &= 0 \Leftrightarrow -x + z = -2 \Leftrightarrow x - z = 2 \text{ c.q.d.} \end{aligned}$$

$$13.2.2 \quad r: (x, y, z) = (-1, 5, 4) + k(1, 0, -1), k \in \mathbb{R}$$

$(x, y, z) = (-1 + k, 5, 4 - k)$, $k \in \mathbb{R}$, substituindo em α , vem

$$-1 + k - 4 + k = 2 \Leftrightarrow 2k = 7 \Leftrightarrow k = \frac{7}{2} \text{ e vem } P\left(\frac{5}{2}, 5, \frac{1}{2}\right).$$

$$\overline{RP} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{-x}}{-x} - 1 - \frac{3}{-x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} y \left(\frac{e^y}{y} - 1 - \frac{3}{y} \right) = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico de f não tem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 3) = -3$$

A reta de equação $y = x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 1 - \frac{3}{-x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} + 1 - \frac{3}{y} \right) = -\infty$$

A reta de equação $y = x - 3$ é a única assíntota não vertical ao gráfico de f .

15 15.1 $\overline{PC}^2 = \sin^2 \theta + (2 - \cos \theta)^2 = 5 - 4 \cos \theta$ e $\overline{PB}^2 = \cos^2 \theta + (1 - \sin \theta)^2 = 2 - 2 \sin \theta$

Assim, $f(\theta) = 4 - 4 \sin \theta + 5 - 4 \cos \theta = 9 - 4(\sin \theta + \cos \theta) =$

$$= 9 - 4 \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\sin \theta \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \theta \right) =$$

$$= 9 - 4\sqrt{2} \left(\sin \theta \times \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \times \cos \theta \right) = 9 - 4\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \text{ c.q.d.}$$

15.2 $f(\theta)$ é mínimo quando $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ for máximo, ou seja, quando $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Para esse ângulo, $\overline{DC} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{PD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então, a área é igual a

$$\frac{\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \text{ u.a.}$$

16 É possível aplicar o teorema de Weierstrass se f for contínua em $[1, 3]$.

A função f é contínua em $x = 2$ se existir $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Temos $f(2) = 12$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a^2 x - 2a) = 2a^2 - 2a$

Para existir limite em $x = 2$, então, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 12$, temos que:

$$2a^2 - 2a = 12 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -2$$

Como $a > 0$, então, $a = 3$ e vem: $f(x) = \begin{cases} 9x - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ 12 & \text{se } x < 2 \end{cases}$