

Fichas de recuperação

• FICHA DE RECUPERAÇÃO 1	1
• FICHA DE RECUPERAÇÃO 2	3
• FICHA DE RECUPERAÇÃO 3	6
• FICHA DE RECUPERAÇÃO 4	8
• FICHA DE RECUPERAÇÃO 5	11
• Soluções das Fichas de recuperação	15

FICHA DE RECUPERAÇÃO 1

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Sejam a e b duas proposições.Em qual das opções seguintes está uma proposição equivalente a $\sim(a \wedge \sim b)$?

- (A) $a \Rightarrow b$
 (B) $b \Rightarrow a$
 (C) $\sim a \Rightarrow b$
 (D) $\sim b \Rightarrow a$

2 Qual das proposições seguintes é falsa?

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2 \vee x < 3)$
 (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \vee \forall x \in \mathbb{R}, x < 3$
 (C) $\exists x \in \mathbb{R}: x > 2 \wedge \exists x \in \mathbb{R}: x < 3$
 (D) $\exists x \in \mathbb{R}: (x > 2 \wedge x < 3)$

3 Qual das proposições seguintes é verdadeira?

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$
 (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$
 (C) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Rightarrow x = 1)$
 (D) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x = 1 \Rightarrow x^2 = 1)$

4 Seja f uma função cujo gráfico é $G_f = \{(-3, -1), (-2, 2), (0, 3), (1, 4)\}$. Seja g a função definida por $g(x) = 3f(x + 2) + 1$.Qual é o valor de $g(-2)$?

- (A) -5 (B) -3 (C) 7 (D) 10

5 Considere a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ par} \\ x, & x \text{ ímpar} \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) f é injetiva e não sobrejetiva.
 (B) f não é injetiva e é sobrejetiva.
 (C) f não é injetiva nem sobrejetiva.
 (D) f é bijetiva.

6 Em qual das seguintes opções está uma fração equivalente a $\frac{\sqrt{3} - 1}{4 - 2\sqrt{3}}$?

- (A) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ (C) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

- 7** Seja $P(x)$ o polinómio definido por $P(x) = ax^3 + 2x^2 + bx - 6$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é zero;
- $P(-1) = -8$

Determine os valores de a e de b .

- 8** Seja $P(x)$ o polinómio definido por $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$.

8.1 Determine a multiplicidade da raiz 1 de $P(x)$.

8.2 Decomponha $P(x)$ em fatores do 1.º grau.

8.3 Resolva a inequação $P(x) < 0$.

- 9** Seja $P(x)$ o polinómio definido por $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

9.1 Determine os zeros de $P(x)$.

9.2 Resolva a condição $(3 - x)(P(x)) < 0$.

- 10** Sejam f e g duas funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

Sabe-se que:

- f é definida por $f(x) = x + 1$.

Determine a expressão de g sabendo que $g \circ f(x) = Id_{\mathbb{Z}}$

- 11** Seja f a função de $\mathbb{N}$ em B , $B \subseteq \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- f é definida por $f(x) = x^2 + 6x + 10$;
- $B = D'_f$

11.1 Mostre que existe a função inversa de f .

11.2 Defina f^{-1} .

- 12** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x + 3}{6x - 2}$.

12.1 Determine D_f .

12.2 Mostre que $f \circ f(x) = x$.

12.3 Defina f^{-1} .

- 13** Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$.

Determine o número de soluções inteiras de $f(x) > \frac{1}{2}$.

- 14** Determine o domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sqrt{(x + 1)(3 - x)} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- 15** Considere uma função f real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x + 3}$.

Determine o conjunto-solução das seguintes inequações:

a) $f(x) \leq 2$

b) $f(x) \geq \sqrt{1 - x}$

FICHA DE RECUPERAÇÃO 2

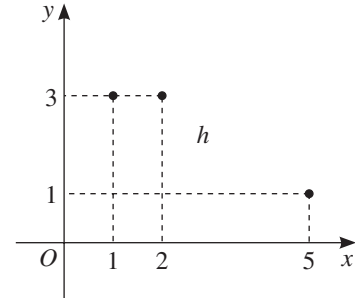
NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Sejam duas funções f e h , em que:

- o gráfico f é $G_f = \{(0, 1), (1, 2), (3, 5), (4, 3)\}$;
- o gráfico h está representado no referencial da figura.

Determine:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) $g \circ f(3)$ | d) o domínio de $g \circ f$. |
| b) $f \circ g(5)$ | e) o contradomínio de $f \circ g$. |
| c) o domínio de $f \circ g$. | f) o contradomínio de $g \circ f$. |

**2** Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais.

Sabe-se que:

- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

Defina as seguintes funções:

- | | |
|---------------|----------------------------------|
| a) $(f+g)(x)$ | d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ |
| b) $(f-g)(x)$ | e) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ |
| c) $(fg)(x)$ | |

3 Considere uma função a real de variável real.

Sabe-se que:

- $D_a = [-3, 2]$
- $D'_a = [-2, 6]$

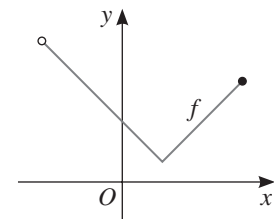
Indique o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $b(x) = 2a(x)$ | e) $f(x) = a(3x)$ |
| b) $c(x) = \frac{1}{2}a(x)$ | f) $g(x) = -2a\left(\frac{x}{3}\right) - 1$ |
| c) $d(x) = -a(x) + 2$ | g) $h(x) = 3a\left(-\frac{x}{2}\right) + 4$ |
| d) $e(x) = a\left(\frac{x}{2}\right)$ | |

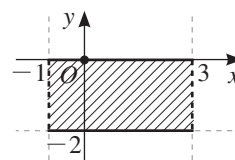
4 Na figura seguinte, está representado o gráfico da função f real de variável real.

Sabe-se que:

- f é definida por $f(x) = 1 + |x - 2|$;
- $D_f =]-4, 6]$

4.1 Indique o contradomínio de f .4.2 Indique os intervalos de monotonia de f .4.3 Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de f .4.4 Justifique que f é limitada e indique, caso existam, os extremos absolutos de f .4.5 Represente graficamente a função g definida por $g(x) = -f(-x) + 3$.4.6 Resolva a inequação $f(x) \leq 2 + |2x + 1|$.

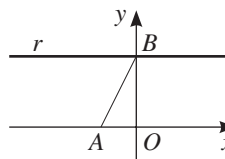
- 5 Indique uma condição que defina a região tracejada representada no referencial o.n. Oxy da figura.



- 6 Indique as coordenadas do ponto médio de um segmento $[AB]$, em que $A(\sqrt{2}, 2)$ e $B(-3\sqrt{2}, -6)$.

- 7 Considere, num referencial o.n. Oxy da figura, o ponto $A(-1, 0)$ e a reta r paralela ao eixo Ox .

Sabendo que $\overline{AB} = \sqrt{3}$, determine a equação que define a reta r .

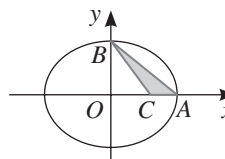


- 8 Considere num referencial o.n. $Oxyz$ o ponto $A(-2, k-1, -2k+1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Se $A \in 7.^\circ$ octante, determine os possíveis valores de k .

- 9 No referencial o.n. Oxy da figura está representada uma elipse definida por:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Sabe-se que:

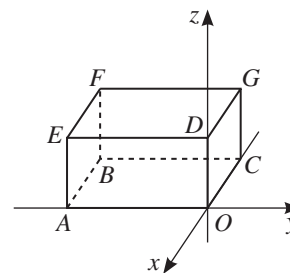
- A é um dos vértices e pertence ao eixo maior;
- B é um dos vértices e pertence ao eixo menor;
- C é um dos focos da elipse.

Qual é, na unidade quadrada considerada, a medida da área do triângulo $[ABC]$?

- 10 Qual é, na unidade de comprimento considerada, a máxima distância entre o ponto $A(-4, 5)$ e um ponto P da circunferência $x^2 + (y-2)^2 = 1$?

- 11 Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$. Sabe-se que:

- os pontos C , A e D pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto F tem coordenadas $(-2, -6, 2)$.



- 11.1 Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto F e que é tangente ao plano xOy .

- 11.2 Seja M o ponto médio da aresta $[ED]$.

Mostre que o plano mediador de $[FM]$ é definido por $4x + 6y + 31 = 0$.

- 12 Considere, num referencial o.n. Oxy , os vetores $\vec{u}(-1, 2)$ e $\vec{v}(3, -2)$.

- 12.1 Determine as coordenadas do vetor $\vec{w}$, tal que $2\vec{u} = 2\vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

- 12.2 Seja $A(4a, 5)$, $P(-3, 2)$ e $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Determine o valor de a , de modo que os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{t}$ sejam colineares.

- 13 Considere, num referencial o.n. Oxy :

- a circunferência T definida por $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$;
- a reta r de equação $y = x + 5$.

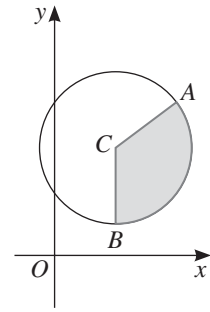
- 13.1 Mostre que $A(-4, 1)$ e $B(-2, 3)$ são os pontos de interseção da reta r com a circunferência T .

- 13.2 Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

- 13.3 Represente a região do plano definida por

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge y \leq x+5 \wedge x < -2$$

- 14** Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy :
- a circunferência de centro C definida por $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$ e que contém o ponto $A(8, 10)$.
 - $[CB]$ é um raio da circunferência paralelo a Oy .



- 14.1** Escreva a equação reduzida da circunferência.
- 14.2** Indique uma condição que defina a região sombreada da figura incluindo as fronteiras.
- 14.3** Escreva uma equação vetorial da reta BC .
- 14.4** Escreva um sistema de equações paramétricas da reta AC .

- 15** Determine $\sum_{i=1}^5 (a_i + 1)$ considerando que:

- a) $a_i = 3 - i$
- b) $a_i = 2^{1-i}$
- c) $a_i = \frac{1 - (-1)^i}{1 + i}$

- 16** Num edifício foi selecionada uma amostra de 20 famílias para responderem à questão: «Quantos televisores possuem?» Os resultados do inquérito foram resumidos na seguinte tabela:

$\tilde{x}$	1	2	3	4	5
f_r	0,10	0,25	0,35	0,25	0,05

- 16.1** Quantas famílias possuem 3 televisores?
- 16.2** Determine:
- a percentagem de famílias desta amostra com mais de 3 televisores.
 - o número médio de televisores por família.
 - a soma dos quadrados dos desvios em relação à média da amostra.
 - a variância e o desvio-padrão da amostra.
 - o percentil de ordem 10.

FICHA DE RECUPERAÇÃO 3

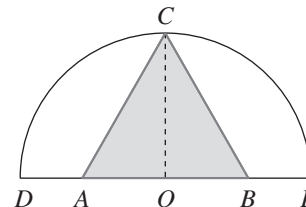
NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Na figura, está representado o triângulo equilátero $[ABC]$ e o semicírculo DCE de centro O .

Sabe-se que:

- $[AB]$ pertence ao diâmetro $[DE]$;
- o semicírculo tem área igual a $\frac{\pi}{2}$.

Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.



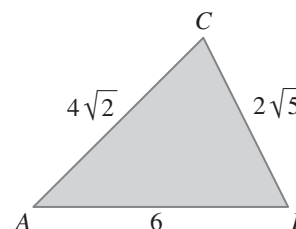
- 2** Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que, na unidade considerada:

- $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$

2.1 Determine a amplitude do ângulo ACB , em graus, arredondada à décima.

2.2 Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.



- 3** Num triângulo $[ABC]$, sabe-se que:

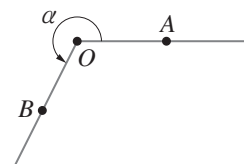
- $\overline{AB} = 20$ cm e $\overline{AC} = 16$ cm
- $\widehat{ACB} = 76,0^\circ$

Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$, em centímetros, arredondado à décima.

- 4** Considere o ângulo orientado α , representado na figura, com amplitude igual a 243° .

Indique a amplitude do ângulo generalizado:

- a) $(\alpha, 1)$ b) $(\alpha, 2)$ c) $(-\alpha, -4)$



- 5** Indique o valor de $\hat{a}$ e de k para o ângulo generalizado (α, k) de amplitude:

- a) 500° b) -7500° c) 2017°

- 6** Simplifique as expressões:

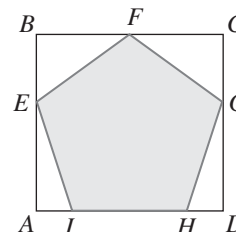
- a) $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ b) $\cos^3 x + \cos x - \sin^2 x \cos x$

- 7** Na figura, está representado o pentágono regular $[EFGHI]$ inscrito no retângulo $[ABCD]$. Sabe-se que:

- $\overline{AD} = 1$

Determine, arredondando à décima:

- a) o perímetro do pentágono $[EFGHI]$.
- b) a área do pentágono $[EFGHI]$.



- 8** Seja f a função definida por $f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

8.1 Determine o contradomínio de f .

8.2 Determine a expressão geral dos zeros de f .

8.3 Calcule o período fundamental de f .

8.4 Resolva a equação $f(x) = 1$ em $x \in [-5\pi, 5\pi]$.

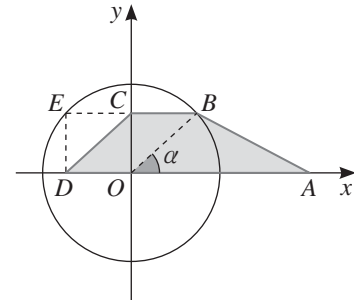
8.5 Sabendo que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 12$ e $\theta \in [0, \pi]$, determine $f(\theta)$.

9 Determine o valor exato de $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2 \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

10 No referencial Oxy da figura está representado o círculo trigonométrico de centro O e o polígono $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao eixo Ox ;
- os pontos B e E pertencem à circunferência;
- B , C e E têm a mesma ordenada;
- E e D têm a mesma abscissa;
- $\overline{OA} = 2$
- $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB .



10.1 Mostre que a área, A , do polígono $[ABCD]$, em função de x , é dada por $A(x) = (1 + \cos x) \sin x$.

10.2 Determine $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado.

10.3 Use as capacidades gráficas da sua calculadora para determinar a amplitude do ângulo AOB que conduz à área máxima do polígono $[ABCD]$ e indique o valor dessa área arredondada à décima.

10.4 Mostre que o perímetro, P , do polígono $[ABCD]$, em função de x , é dado por:

$$P(x) = 3 + 2 \cos x + \sqrt{5 - 2 \cos x}$$

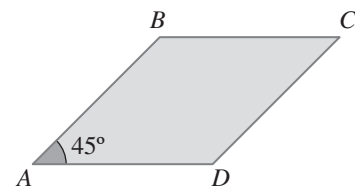
10.5 Determine o perímetro do polígono quando este tem a área máxima.

11 Na figura está representado o losango $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o losango tem perímetro 8;
- $\widehat{DAB} = 45^\circ$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$?



12 Num triângulo $[ABC]$, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 3$
- $\overline{AC} = 5$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7,5$

Determine, em graus, a amplitude do ângulo BAC .

13 Considere, num referencial o.n. Oxy :

- a circunferência T , de centro C , definida por $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$;
- o ponto P que pertence à circunferência T que tem ordenada 3 e abscissa menor do que 3.

13.1 Determine uma equação vetorial da reta CP .

13.2 Escreva a equação reduzida da reta tangente a T que passa em P .

14 Num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α é definido por $x + 2y - 3z = 6$. Determine:

- as coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oz .
- uma condição que defina a reta perpendicular ao plano α e que passa em $A(-1, 2, 1)$.
- uma equação cartesiana de um plano paralelo ao plano α e que passa no ponto de coordenadas $(2, 1, -2)$.

FICHA DE RECUPERAÇÃO 4

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Estude, quanto à monotonia, a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1 - 3n}{n + 1}$.

2 Sobre uma dada sucessão (u_n) , sabe-se que $u_n - u_{n+1} = \frac{4}{(2n - 1)(2n - 3)}$.

2.1 Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

2.2 Mostre que (u_n) pode ser definido por $u_n = \frac{2}{2n - 3}$.

2.3 Indique o valor lógico da afirmação: u_2 é um dos majorantes da sucessão.

2.4 Mostre que a sucessão é limitada.

3 Prove, por indução matemática, que são verdadeiras as seguintes propriedades:

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 9^n - 1$ é divisível por 8.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, com $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

4 Sobre uma progressão aritmética (a_n) , sabe-se que:

• $a_1 = -4$

• $a_2 = -1$

4.1 Determine:

a) o termo geral de (a_n) .

b) o termo com o valor 101.

4.2 Classifique (a_n) quanto à monotonia.

5 Sobre uma progressão aritmética (a_n) , sabe-se que:

• $a_3 = 5$

• $a_{10} = -23$

Determine:

a) o termo geral de (a_n) .

b) a soma dos primeiros 20 termos da progressão.

6 Sobre três termos consecutivos de uma progressão aritmética monótona crescente (a_n) , sabe-se que:

• a sua soma é igual a 18;

• o seu produto é igual a 120.

Determine os três termos da progressão.

7 Sobre uma progressão aritmética (a_n) , sabe-se que:

• $a_{16} = 3a_5$

• $a_{12} = a_7 + 20$

Determine:

a) o termo geral de (a_n) .

b) $S_{30} - S_{20}$

8 Sobre uma progressão aritmética (a_n) , sabe-se que:

- $S_{10} = \frac{7}{2}S_4$
- $a_5 = 4$

8.1 Determine o termo geral de (a_n) .

8.2 A soma dos primeiros n termos é igual a 1134. Determine n .

9 Sobre uma progressão geométrica (a_n) , sabe-se que:

- $a_1 = 64$
- $a_4 = 8$

9.1 Determine:

- a) o termo geral de (a_n) .
- b) o termo com o valor 0,0625.

9.2 Classifique (a_n) quanto à monotonia.

10 Sobre uma progressão geométrica (a_n) , de termos positivos, sabe-se que:

- $a_4 = 9$
- $a_8 = \frac{1}{9}$

10.1 Determine o termo geral de (a_n) .

10.2 Determine a soma dos primeiros 10 termos de (a_n) .

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

11 Sobre uma progressão geométrica (a_n) , de termos positivos, sabe-se que:

- $a_2 = a_1 - 3$
- $a_3 + a_2 = \frac{9}{2}$

11.1 Determine o termo geral de (a_n) .

11.2 Determine $\frac{S_{15}}{S_{10}}$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

12 Uma loja vai pôr à venda, durante várias semanas, um mesmo artigo por um preço 10 % inferior ao da semana anterior. Na primeira semana, o preço de venda do produto é 500 €.

12.1 Qual é o preço de venda do produto na terceira semana?

12.2 Ao fim de quantas semanas o preço de venda do produto passa a ser inferior a 150 €?

13 Sobre uma progressão geométrica (a_n) , de termos positivos, sabe-se que:

- $a_1 = x + 1$
- $a_2 = 1 - x$
- $a_3 = x + 3$

Determine:

- a) o valor de x .
- b) o termo geral de (a_n) .

14 Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

Mostre que (u_n) é convergente.

15 Determine os seguintes limites:

a) $\lim \frac{3n + 1}{2 + n}$

b) $\lim \frac{1 - 4n}{3n}$

c) $\lim \left(\frac{2n - 1}{1 + 5n} - \frac{6 - 5n}{1 + 2n} \right)$

d) $\lim \frac{5n^2 - 1}{1 + 3n}$

e) $\lim \frac{5n - 1}{n^2 + 1}$

f) $\lim (\sqrt{n^2 + 1} - n)$

g) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{4n + 1}$

FICHA DE RECUPERAÇÃO 5

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Considere a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{3x}{x-1}$.
Averigúe se existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

- 3** Seja a função f real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x > 4 \\ k - 2x & \text{se } x \leq 4 \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determine:

- a) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
b) k , de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.
c) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

- 3** Sejam f e g funções reais de variável real. Sabe-se que:

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- $g(x) = 2x - 2$

Determine, caso existam, os seguintes limites:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ | e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)g(x)}{f(x)}$ |

- 4** Considere as funções f e g definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \frac{3}{x-4} \text{ e } g(x) = x^2 - 3x$$

Determine, caso existam, os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ g)(x)$
b) $\lim_{x \rightarrow 4} (f \circ g)(x)$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$

- 5** Determine os seguintes limites:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{1-2x}$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2}{6x^4}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-4x}{1+x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 1}{2x^2 + 1}$ |

- 6** Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 10 & \text{se } x < 2 \\ x^3 - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

- 6.1** Prove que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe e indique o seu valor.

6.2 Considere agora um número real k e a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2 \\ k - 2 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Indique, justificando, o valor de k para o qual existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

7 Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{2 - x}$

8 Considere a função f real de variável real de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+kx} - \sqrt{1-kx}}{x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4x-2}{x+6} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

8.1 Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) o valor de k , de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e indique esse limite.

9 Considere a função f real de variável real de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3-x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

9.1 Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

9.2 Estude f quanto à continuidade.

10 Considere a função f , real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k + \cos x}{1 - 2x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{16+x} - 4} & \text{se } x > 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Determine k , de modo que f seja contínua no seu domínio.

11 Considere a função f , real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 2x - 3}$$

11.1 Indique o domínio de f .

11.2 Estude a continuidade de f .

11.3 Determine, caso existam, as equações das assíntotas verticais ao gráfico de f .

11.4 Determine, caso existam, as equações das assíntotas não verticais ao gráfico de f .

11.5 Seja g a função definida por $g(x) = (x + 2)f(x)$.

Estude g quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

- 12** Considere a função f real de variável real de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4-x} & \text{se } x < 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \\ \frac{x^2-1}{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

12.1 Mostre que a reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

12.2 Estude f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

12.3 Determine os zeros e estude o sinal de f .

- 13** Calcule a taxa média de variação da função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 3x + 1$, no intervalo:

a) $[-2, 1]$

b) $[0, 5]$

c) $[-4, 0]$

- 14** Seja a um número real e considere f a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = ax^2 - 3x + 4$$

Determine a , de modo que a taxa média de variação de f no intervalo $[0, 3]$ seja igual a 3.

- 15** Determine, usando a definição de derivada, a derivada de $f(x) = 3 - 4x^2$ em $x = 1$.

- 16** Um ponto P move-se numa reta numérica de tal forma que, em cada instante t , em segundos, a distância d , em metros, à origem O é dada pela expressão:

$$d(t) = 4t^2 + t - 2$$

Determine:

a) a velocidade média atingida pelo ponto P nos primeiros 3 segundos.

b) a velocidade instantânea no instante $t = 3$.

- 17** Considere a função f real de variável real, definida por $f(x) = 7x - 2x^2$.

Determine:

a) $f'(x)$

b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

c) a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

d) a abscissa do ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 18** Determine, caso existam, os zeros de f' , derivada de f , definida por:

a) $f(x) = \sqrt{4x} - x$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

d) $f(x) = (1 - x^2)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

- 19** Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

A partir do estudo do sinal da derivada, indique os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos e absolutos de f .

20 Considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 6)$ e $C(5, 12)$ e a reta r de equação $y = 2x + 1$.

20.1 Determine:

- a) o desvio vertical de cada um dos pontos em relação à reta r .
- b) a soma dos desvios.

20.2 Mostre que o valor médio das abcissas dos três pontos é 3 e, tendo por base que $\bar{y} = a\bar{x} + b$, sendo a e b , respetivamente, o declive e a ordenada na origem da reta r , deduza o valor da média das ordenadas dos três pontos.

21 Numa amostra bivariada $\begin{matrix} (x,y) \\ \sim \end{matrix}$, sabe-se que:

- $\bar{x} = 4$ e $\bar{y} = 5$
- $SS_x = 16$ e $SS_y = 30$
- o declive da reta de mínimos quadrados é igual a $-\frac{5}{8}$.

21.1 Determine:

- a) a equação reduzida da reta de mínimos quadrados.
- b) o coeficiente de correlação linear.

21.2 Conclua sobre a associação linear entre as duas variáveis.

Soluções das Fichas de recuperação

FICHA DE RECUPERAÇÃO 1

1 (A)

2 (B)

3 (C)

4 (D)

5 (B)

6 (A)

7 $a = -1$ e $b = 5$

8 **8.1** Multiplicidade 3.

8.2 $P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2$

8.3 $x \in]-\infty, 1[\setminus \{-2\}$

9 **9.1** zeros: $-2, -1, 1, 2$

9.2 $x \in]-2, -1[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$

10 $g(x) = x - 1$

11 **11.1** Para f ter inversa, tem de ser injetiva.

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 + 6x_1 + 10 = x_2^2 + 6x_2 + 10 \Rightarrow 2x_1^2 + 6x_1 = x_2^2 + 6x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 6(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6) = 0 \end{aligned}$$

Como $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + 6 \neq 0$, então,

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ pelo que } f \text{ é injetiva.}$$

Como $B = Df$, então, f é sobrejetiva, conclui-se por isso que f é bijetiva, logo, tem inversa.

(Em opção pode estudar a posição do vértice da parábola que ocorre para $x = -3$ e, como $-3 \notin \mathbb{N}$, concluir que f é injetiva.)

11.2 $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f^{-1}(y) = -3 + \sqrt{y - 1}$.

12 **12.1** $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

12.2 $f \circ f(x) = f(f(x)) = \frac{2 \frac{2x+3}{6x-2} + 3}{6 \frac{2x+3}{6x-2} - 2} = \frac{4x+6+18x-6}{12x+18-12x+4} = \frac{22x}{22} = x$

12.3 $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{6y-2}$.

13 Há 3 soluções inteiras.

14 $D_f =]1, 3]$

15 **a)** $x \in [-3, 1]$ **b)** $x \in [-1, 1]$

FICHA DE RECUPERAÇÃO 2

1 a) 1

b) 2

c) $D_{f \circ g} = \{1, 2, 5\}$

d) $D_{g \circ f} = \{0, 1, 3\}$

e) $D'_{f \circ g} = \{3, 5\}$

f) $D'_{g \circ f} = \{1, 3\}$

2 a) $(f + g): [-1, 1] \in \mathbb{R}$ definida por: $(f + g)(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x^2}$

b) $(f - g): [-1, 1] \in \mathbb{R}$ definida por: $(f - g)(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x^2}$

c) $(fg): [-1, 1] \in \mathbb{R}$ definida por: $(fg)(x) = (x + 1)\sqrt{1 - x}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right): [-1, 1] \in \mathbb{R}$ definida por: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

e) $\left(\frac{g}{f}\right): [-1, 1] \in \mathbb{R}$ definida por: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \sqrt{1 - x}$

3 a) $D_b = [-3, 2], D'_b = [-4, 12]$

b) $D_c = [-3, 2], D'_c = [-1, 3]$

c) $D_d = [-3, 2], D'_d = [-4, 4]$

d) $D_e = [-6, 4], D'_e = [-13, 3]$

e) $D_f = \left[-1, \frac{2}{3}\right], D'_f = [-2, 6]$

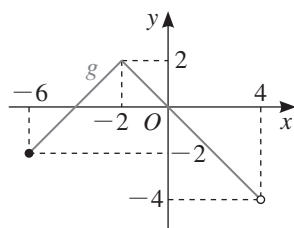
f) $D_g = [-9, 6], D'_g = [-2, 6]$

g) $D_h = [-4, 6], D'_h = [-4, 22]$

4 4.1 $D'_f = [1, 7[$

4.2 f é estritamente crescente em $[2, 6]$ e estritamente decrescente em $] -4, 2]$.4.3 $] -\infty, 1]$ é o conjunto dos minorantes e $[7, +\infty[$, o conjunto dos majorantes de f .4.4 f é limitada por ser majorada e minorada. 1 é o mínimo absoluto.

4.5



4.6 $x \in] -4, -2] \cup [0, 6]$

5 $-1 < x < 3 \wedge -2 \leq y \leq 0$

6 $(-\sqrt{2}, -2)$

7 $y = \sqrt{2}$

8 $\frac{1}{2} < k < 1$

9 4**10** 6**11** 11.1 $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 + (z - 2)^2 = 4$

11.2 $M(0, -3, 2)$, então, temos $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = (x + 2)^2 + (y + 6)^2 + (z - 2)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 \Leftrightarrow -4x + 6y - 12y + 9 - 4 - 36 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -4x - 6y - 31 = 0 \Leftrightarrow 4x + 6y + 31 = 0$ c.q.d.

12 12.1 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ 12.2 $a = -\frac{3}{2}$ **13** 13.1 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \wedge y = x + 5$ e vem $(x + 2)^2 + (x + 5 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (x + 4)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

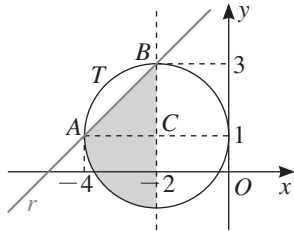
Aplicando a fórmula resolvente, obtém-se $x = -4 \vee x = -2$,

então, quando $x = -4$, temos $y = -4 + 5 = 1$, e obtemos o ponto de coordenadas $(-4, 1)$.

e, quando $x = -2$, temos $y = -2 + 5 = 3$, e obtemos o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ c.q.d.

13.2 $y = -x - 1$

13.3

**14** 14.1 $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$ 14.2 $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 \leq 25 \wedge y \leq \frac{3}{4}x + 4 \wedge x \geq 4$ 14.3 $(x, y) = (4, 7) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

$$14.4 \begin{cases} x = 4 + 4k \\ y = 7 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

15 a) 5b) $\frac{111}{16}$ c) $\frac{41}{6}$ **16** 16.1 7

16.2 a) 30 %

b) $\bar{x} = 2,9$ televisoresc) $SS_x = 21,8$ d) $S_x^2 = 1,15$ e $S_x = 1,07$.e) $P_{10} = 1,5$ televisores

FICHA DE RECUPERAÇÃO 3

1 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ u.a.

2 2.1 $71,6^\circ$

2.2 12 u.a.

3 52,5 cm

4 a) 603°

b) 963°

c) -1683°

5 a) $(240^\circ, 1)$

b) $(-300^\circ, -20)$

c) $(217^\circ, 5)$

6 a) 1

b) $2 \cos^3 x$

7 a) 3,1 u.c.

b) 0,7 u.a.

8 8.1 $D'f = [-3, 1]$

8.2 C.S. = $\left\{ x: x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.3 4π

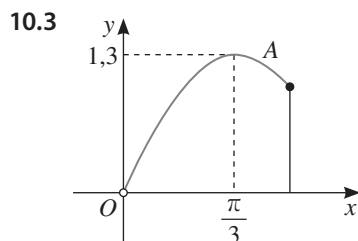
8.4 C.S. = $\{-3\pi, \pi, 5\pi\}$

8.5 $\sqrt{3} - 1$

9 π

10 10.1 Trata-se de um trapézio dado, pois $[BC] \parallel [AD]$. $A(x) = \frac{2 + \cos x + \cos x}{2} \sin x = (1 + \cos x) \sin x$ c.q.d.

10.2 Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o polígono vai ser o triângulo retângulo $[AOB]$ cuja área é igual a $\frac{2 \times 1}{2} = 1$.



10.4 Como $\overline{AB} = \sqrt{(2 - \cos x)^2 + (\sin x)^2} = \sqrt{4 - 2\cos x + 1} = \sqrt{5 - 2\cos x}$, $\overline{BC} = \cos x$, $\overline{CD} = 1$ e $\overline{AD} = 2 + \cos x$ vem $P(x) = 3 + 2\cos x + \sqrt{5 - 2\cos x}$ c.q.d.

10.5 $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$

11 $2\sqrt{2}$

12 120°

13.1 $(x, y) = (3, 2) + k(-\sqrt{3}, 1), k \in \mathbb{R}$

13.2 $y = \sqrt{3}x + 6 - 3\sqrt{3}$

14 a) $(0, 0, -2)$

b) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(1, 2, -3), k \in \mathbb{R}$

c) $x + 2y - 3z - 10 = 0$

FICHA DE RECUPERAÇÃO 4

1
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2+3n}{n+2} - \frac{1-3n}{n+1} = \frac{-2n-3n^2-2-3n-n+3n^2-2+6n}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{-4}{(n+2)(n+1)} < 0, \text{ então, como } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0, \text{ conclui-se que a sucessão } u_n$$

 é monótona decrescente.

2.1 Para $n > 1$ temos $u_n - u_{n+1} > 0$, a sucessão é decrescente e, para $n = 1, u_n - u_{n+1} < 0$, a sucessão é crescente, logo, (u_n) não é uma sucessão monótona.

2.2
$$\frac{a}{2n-3} + \frac{b}{2n-1} = \frac{2an - a + 2bn - 3b}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{n(2a+2b) - (a+3b)}{(2n-1)(2n-3)}$$

 temos assim que $2a + 2b = 0 \wedge a + 3b = -4 \Leftrightarrow a = -b \wedge 2b = -4 \Leftrightarrow b = -2 \wedge a = 2$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{4}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{2}{2n-3} - \frac{2}{2n-1} \text{ e vem } u_n = \frac{2}{2n-3}.$$

2.3 Como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_2$, então, $u_2 = 2$ é um dos majorantes de (u_n) .

2.4 Temos que $u_1 = -2, u_2 = 2$ e, para $n \geq 2$, a sucessão é decrescente de termos positivos, logo, para $n \geq 2$, temos $0 < u_n \leq 2$.

Conclui-se que a sucessão é limitada, pois $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq u_n \leq 2$.

3 a) Para $n = 1$, tem-se $9^1 - 1 = 8$, que é divisível por 8, logo, é verdade.

Tomemos um certo $n \in \mathbb{N}$

Hipótese: $9^n - 1$ é divisível por 8.

Tese: $9^{n+1} - 1$ é divisível por 8.

Demonstração:

Como por hipótese, $9^n - 1$ é divisível por 8, então, $9^n - 1 = 8t \Leftrightarrow 9^n = 8t + 1$, com $t \in \mathbb{N}$

$$9^{n+1} - 1 = 9 \times 9^n - 1 = 9 \times (8t + 1) - 1 = 9 \times 8t + 9 - 1 = 9 \times 8t + 8 = 8(9t + 1)$$

Como $t \in \mathbb{N}$, então, $9t + 1 = k \in \mathbb{N}$ e temos $9^{n+1} - 1 = 8k$, que é divisível por 8.

Portanto, pelo princípio de indução, $\forall n \in \mathbb{N}, 9^n - 1$ é divisível por 8 é verdadeira.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, com $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Para $n = 1$, tem-se $\frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r$ que é verdade.

Tomemos um certo $n \in \mathbb{N}$

Hipótese: $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

Tese: $1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$

Demonstração:

Como por hipótese, $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, então, temos:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

Portanto, pelo princípio de indução, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, é verdadeira.

4 4.1 a) $a_n = 3n - 7$

b) $n = 36$

4.2 Como $r = 3 > 0$, então, a progressão é monótona crescente.

5 a) $a_n = 17 - 4n$

b) $S_{20} = -500$

6 Os termos são 2, 6 e 10.

7 a) $a_n = 4n + 2$

b) $S_{30} - S_{20} = 1040$

8 8.1 $a_n = 2 + 0,4n$

8.2 $n = 70$

9 9.1 a) $a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $n = 9$

9.2 A progressão é monótona decrescente.

10 10.1 $a_n = 243\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

10.2 $S_{10} = \frac{29524}{19683}$

11 11.1 $a_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

11.2 $\frac{S_{15}}{S_{10}} = \frac{1057}{1056}$

12 12.1 $a_3 = 405 \text{ €}$

12.2 $n = 13$

13 a) $x = -\frac{1}{3}$

b) $a_n = \frac{2^n}{3}$

14 $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{2n+3} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{4n^2 + 4n + 2n + 2 - 4n^2 - 6n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} > 0,$

logo, (u_n) é monótona crescente. Como $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 2n < 2n+1$, então, $\frac{2n}{2n+1} < 1$, então,

(u_n) é majorada. Assim, como (u_n) é crescente e majorada, então, é convergente.

15 a) 3

b) $-\frac{4}{3}$

- c) $\frac{29}{10}$
- d) $+\infty$
- e) 0
- f) 0
- g) $\frac{1}{2}$

FICHA DE RECUPERAÇÃO 5

1 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

- 2**
- a) 20
 - b) $k = 19$
 - c) $k + 10$

- 3**
- a) -1
 - b) $-\frac{1}{2}$
 - c) Não existe.
 - d) $+\infty$
 - e) 0
 - f) 4

- 4**
- a) $-\frac{1}{2}$
 - b) Não existe $\lim_{x \rightarrow 4} (f \circ g)(x)$.
 - c) $\frac{45}{16}$

- 5**
- a) -2
 - b) -4
 - c) 0
 - d) $-\infty$

6 **6.1** $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 2x) = 8 - 4 = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (7x - 10) = 14 - 10 = 4$
 Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

6.2 Dado que $D_g = \mathbb{R}$, então, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, pelo que $k - 2 = 4 \Leftrightarrow k = 6$.

- 7**
- a) $-\frac{4}{3}$
 - b) 2

- 8**
- a) 4
 - b) $k = -\frac{1}{3}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{3}$.

9 9.1 a) -1 b) $-\infty$

9.2 Na restrição a $] -\infty, 0[$, f é contínua, pois é definida por uma função polinomial, e, na restrição $]0, +\infty[$, f é contínua, pois é definida por uma função racional, logo, f é contínua em todo o seu domínio.

10 $k = 7$ **11** 11.1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

11.2 f é contínua em todo o seu domínio, dado que é definida em todos os intervalos do seu domínio por uma função racional.

11.3 Existe uma assíntota vertical ao gráfico de f de equação $x = -1$.

11.4 Existe uma assíntota horizontal ao gráfico de f de equação $y = 1$.

$$11.5 \quad g(x) = (x+2)f(x) = \frac{(x+2)(x^2+x-12)}{x^2-2x-3} = \frac{x^3+3x^2-10x-24}{x^2-2x-3}.$$

Temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, pelo que não existem assíntotas horizontais ao gráfico de g .

$$\text{Temos, então, que: } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 24}{x^2 - 2x - 3} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 24 - x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2 - 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 - 7x - 24}{x^2 - 2x - 3} \right) = 5 \end{aligned}$$

$$\text{Temos, então, que: } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 24}{x^2 - 2x - 3} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 24 - x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2 - 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 - 7x - 24}{x^2 - 2x - 3} \right) = 5 \end{aligned}$$

Então, existe uma assíntota oblíqua ao gráfico de g de equação $y = x + 5$.

12 12.1 As restrições de f aos intervalos $] -\infty, 3[$ e $]3, +\infty[$ são funções contínuas por serem racionais. Assim, para procurar assíntotas verticais, apenas faz sentido calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{4-x} = \frac{3-2}{4-3} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{9-1}{0^+} = +\infty$$

Conclui-se, assim, que a reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

$$12.2 \text{ Para } x \rightarrow -\infty, \text{ temos } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{4-x} = -1.$$

Conclui-se que a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\text{Para } x \rightarrow +\infty, \text{ temos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x-3} = +\infty.$$

Conclui-se que não existe assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2-3x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x-3} = 3$$

Conclui-se que a reta de equação $y = x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

12.3 Em $]-\infty, 3[$, temos $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{4-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \in]-\infty, 3[\Leftrightarrow x \in \{2\}$.

Em $]3, +\infty[$, temos $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \in]3, +\infty[\Leftrightarrow x \in \{ \}$

f tem apenas um zero em $x = 2$.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-2$	-	0	+		
$4-x$	+	+	+		
3				+	
x^2-1					+
$x-3$					+
$f(x)$	-	0	+	+	+

Assim, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[$ e $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$.

13 a) -4

b) 2

c) -7

14 $a = 2$

$$\begin{aligned} \text{15} \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 4(1+h)^2 - 3 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 4 - 8h - h^2 - 3 + 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-8-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-8-h) = -8 \end{aligned}$$

16 a) 13 m/s

b) 25 m/s

17 a) $f'(x) = 7 - 4x$

b) $y = 3x + 2$

c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$

d) $x = \frac{3}{2}$

18 a) $x = 1$

b) Não existe.

c) $x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$

d) $x = 1$

19 $f(x) = 3x^2 - 6x$ com $D_f = \mathbb{R}$. Como $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e decrescente em $[0, 2]$, tem um máximo relativo em $x = 0$ com o valor -2 e um mínimo relativo em $x = 0$ com o valor -6 .

20 20.1 a) $e_A = 0, e_B = 1$ e $e_C = 1$

b) $e_A + e_B + e_C = 0$

20.2 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{n} = \frac{1 + 3 + 5}{3} = 3$ e vem $\bar{y} = 2(3) + 1 = 7$

21 21.1 a) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{2}$

b) $r \approx -0,456$

21.2 A associação linear entre as variáveis é negativa fraca, pois o coeficiente de correlação é negativo e $|r|$ está suficientemente afastado de 1.