

Fichas de trabalho

• FICHA DE TRABALHO 1	Propriedades das operações sobre conjuntos	1
• FICHA DE TRABALHO 2	Cálculo combinatório	3
• FICHA DE TRABALHO 3	Triângulo de Pascal e binómio de Newton	5
• FICHA DE TRABALHO 4	Definição de probabilidade	7
• FICHA DE TRABALHO 5	Propriedades da probabilidade, probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e teorema da probabilidade total	10
• FICHA DE TRABALHO 6	Limites e continuidade	12
• FICHA DE TRABALHO 7	Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	14
• FICHA DE TRABALHO 8	Fórmulas trigonométricas: seno, cosseno e tangente da diferença e da soma de dois ângulos	16
• FICHA DE TRABALHO 9	Limites e derivadas de funções trigonométricas. Gráficos de funções e osciladores harmónicos	18
• FICHA DE TRABALHO 10	Juros compostos. Funções exponenciais	20
• FICHA DE TRABALHO 11	Operações com logaritmos. Equações e inequações	22
• FICHA DE TRABALHO 12	Funções exponenciais e logarítmicas	25
• FICHA DE TRABALHO 13	Primitivas	27
• FICHA DE TRABALHO 14	Cálculo integral	29
• FICHA DE TRABALHO 15	Números complexos. Representação geométrica	31
• FICHA DE TRABALHO 16	Números complexos. Operações na forma algébrica ...	33
• FICHA DE TRABALHO 17	Números complexos: Forma trigonométrica. Raízes índice n . Conjunto de pontos	35
• Soluções das Fichas de trabalho		37

FICHA DE TRABALHO 1 Propriedades das operações sobre conjuntos

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** No universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ e $C = \{1, 3, 5\}$

Determine:

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| a) $\bar{A}$ | h) $\bar{A} \cup \bar{B}$ |
| b) $A \cup C$ | i) $\bar{B} \cap \bar{C}$ |
| c) $A \cup \bar{B}$ | j) $A \setminus B$ |
| d) $\bar{B} \cup C$ | k) $C \setminus \bar{A}$ |
| e) $A \cap B$ | l) $A \setminus (B \cup C)$ |
| f) $A \cap \bar{C}$ | m) $C \setminus (A \cap B)$ |
| g) $\bar{A} \cap B$ | |

- 2** No universo $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, considere os conjuntos $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Determine:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(B \cup U) \cap (A \cup C)$ | c) $B \setminus C$ |
| b) $C \setminus B$ | d) $(\bar{A} \cap B) \cup (C \cap B)$ |

- 3** Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x < 0\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x-1} < 0\right\}$.

Determine:

- | | |
|---------------|---------------------|
| a) A | d) $A \setminus B$ |
| b) B | e) $\bar{A} \cup B$ |
| c) $A \cap B$ | |

- 4** Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$.

Sabe-se que $A \cup B = \mathbb{R} \setminus C$.

Determine C e apresente-o na forma de intervalo de números reais.

- 5** Sejam A e B dois conjuntos.

Sabe-se que:

- $\#(A \times B) = 6$
- $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, 3)$ são elementos de $A \times B$;

Determine os restantes elementos de $A \times B$.

- 6** Seja U um conjunto com 500 elementos e sejam A e B subconjuntos de U .

Sabe-se que:

- $\#A = 250$
- $\#(A \cap \bar{B}) = 100$
- $\#(\bar{A} \cap B) = 50$

Determine:

- | | | |
|-------------------|-------------------------------|---------------------|
| a) $\#(A \cap B)$ | b) $\#(\bar{A} \cap \bar{B})$ | c) $\#(A \times B)$ |
|-------------------|-------------------------------|---------------------|

- 7** Sejam A e B dois conjuntos num universo U .

Sabe-se que:

- $\#A = 30$
- $\#(A \times B) = 1410$
- $\#(A \cup B) = 55$

Determine $\#((A \setminus B) \cup ((B \setminus A)))$.

- 8** Num inquérito a 300 alunos, sabe-se que 120 bebem sumo de pera, que 130 bebem sumo de laranja e que 80 bebem sumo de pera e sumo de laranja.
Quantos alunos não bebem nenhum destes dois tipos de sumo?

- 9** Numa escola secundária estão 163 alunos inscritos no 12.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias.

Sabe-se que:

- 80 alunos estão inscritos em Matemática A;
- 70 alunos estão inscritos em Física;
- 53 alunos estão inscritos em Química;
- 40 alunos estão inscritos em Matemática A e em Física;
- 35 alunos estão inscritos em Matemática A e em Química;
- 33 alunos estão inscritos em Física e em Química;
- 26 alunos estão inscritos nas três disciplinas.

Determine:

- quantos alunos estão apenas inscritos em Matemática A.
- quantos alunos não estão inscritos em nenhuma destas três disciplinas.

- 10** Numa certa cidade, sabe-se que:

- 25 % das famílias têm *tablet*;
- 20 % das famílias têm carro;
- 67 % das famílias não têm carro nem *tablet*;
- 3600 famílias têm carro e *tablet*.

Considere as seguintes afirmações:

- 11 % das famílias têm carro e *tablet*.
- 30 % das famílias têm carro ou têm *tablet*.
- Vivem 30 000 famílias nessa cidade.

Mostre que apenas uma das afirmações é correta.

- 11** Mostre, usando um exemplo, que $A \cap B = A \cap C$ não significa necessariamente que $B = C$.

- 12** Mostre que quaisquer que sejam os conjuntos A e B :

- $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
- $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

- 13** Sejam A e B dois conjuntos. Prove que $(A \setminus B) \cup B = A$ se, e só se, $B \subset A$.

- 14** Sejam A , B e C , três conjuntos.

Sabe-se que:

- $A \cup B = C$
- $A \cap B = \emptyset$

Prove que $A = C \setminus B$.

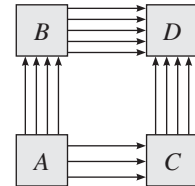
FICHA DE TRABALHO 2 Cálculo combinatório

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Sejam o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : |2x - 3| \leq 5\}$ e o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ : x \leq 5\}$. Os conjuntos são equipotentes? Justifique a sua resposta.

- 2** Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \cap]-2\pi, 2\pi[: \sin x = \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$. Os conjuntos são equipotentes? Justifique a sua resposta.

- 3** Pretende-se ir da cidade A para a cidade D passando pela cidade B ou passando pela cidade C . Quantos percursos diferentes permitem efetuar esse trajeto de A a D ?



- 4** Quantos pares de números naturais (a, b) satisfazem a inequação $a^3 + b \leq 70$?
- 5** Com as 26 letras do nosso alfabeto, quantas palavras com três letras se podem construir que tenham pelo menos uma letra A , façam ou não sentido?

- 6** Quantos números com três algarismos têm exatamente:

a) um 0?

b) um 1?

- 7** Calcule, sem usar a calculadora:

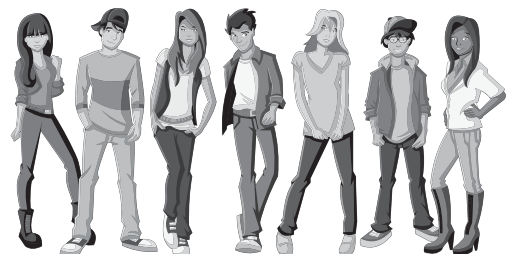
a) $5! \times 4!$ c) $5! \div 4!$ e) $11! \div 9!$ b) $5! + 4!$ d) $5! - 4!$ f) $20! \div 17!$

- 8** Uma caixa, opaca, contém 10 bolas iguais numeradas de 1 a 10. Indique de quantas maneiras diferentes se podem retirar sucessivamente três bolas da caixa, se:

- a) cada bola é retirada sem reposição.
b) cada bola é reposta na caixa depois de retirada.
c) a primeira bola retirada é reposta, mas as outras não.

- 9** Um casal tem três rapazes e quatro raparigas. De quantas maneiras diferentes podem ficar em fila, ao lado uns dos outros, para tirar uma fotografia, se:

- a) dois dos rapazes ficarem nas pontas?
b) as raparigas ficarem sempre juntas?
c) os rapazes ficarem sempre juntos?
d) os rapazes ficarem juntos e as raparigas também?
e) os rapazes ficarem intercalados com as raparigas?
f) os rapazes ficarem ao meio?
g) não houver restrições?
h) o Miguel e o Duarte não puderem ficar juntos?
i) pelo menos duas raparigas ficarem juntas?



- 10** A associação de estudantes de uma escola tem 15 membros. É necessário atribuir os lugares de direção para presidente, vice-presidente e tesoureiro. Se nenhum membro puder ocupar mais de um lugar, de quantas maneiras se pode preencher esses lugares se:

- não houver restrições?
- a Margarida não quiser pertencer à direção se o João for selecionado?
- a Rita só quer pertencer à Direção se o Rui também pertencer, mas o Rui não se importa de pertencer quer esteja ou não a Rita?

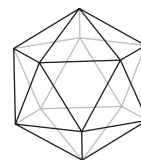
- 11** Indique quantos anagramas é possível construir com as palavras:

- | | | |
|---------------|-----------------|----------------|
| a) PAPA | c) MATEMATICA | e) ESTATISTICA |
| b) ACUPUNTURA | d) REBOBINADORA | f) ARRARAR |

- 12** De quantas maneiras podemos escrever palavras com as letras da palavra ARRANJO de modo que os dois R estejam sempre juntos?

- 13** Vão construir-se anagramas com as letras da palavra ESTUDO. Se colocarmos todas essas palavras pela ordem com que aparecem num dicionário, em que posição aparece ESTUDO?

- 14** Uma caixa tem 12 bolas numeradas de 1 a 12. Retiram-se duas bolas da caixa. Quantos conjuntos de números diferentes se podem obter?



- 15** Quantas diagonais espaciais tem um icosaedro?

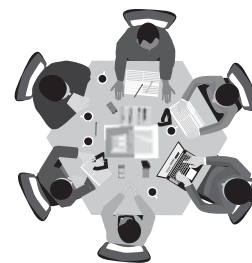
- 16** De quantas maneiras diferentes se podem sentar 5 rapazes e 5 raparigas à volta de uma mesa circular (duas maneiras são iguais se cada pessoa tiver sentada à sua volta na mesma posição as mesmas pessoas) se:

- não tiverem restrições?
- os rapazes se sentam ao lado uns dos outros e as raparigas também?
- os rapazes e as raparigas se sentam alternadamente?



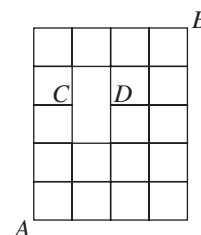
- 17** De quantas maneiras diferentes se podem sentar 6 pessoas à volta de uma mesa circular (duas maneiras são iguais se cada pessoa tiver sentada à sua volta na mesma posição as mesmas pessoas) se:

- o Adilson e o Bernardo ficarem em frente um do outro?
- o Adilson e o Bernardo não se sentarem ao lado um do outro?
- o Adilson, o Bernardo e a Cláudia se sentarem em três lugares seguidos?



- 18** Uma comissão de cinco pessoas vai ser formada de entre 9 rapazes e 7 raparigas. Quantas comissões se podem formar se:

- não houver restrições?
- a comissão tiver exatamente duas raparigas?
- a comissão tiver elementos dos dois sexos mas mais rapazes do que raparigas?
- a comissão tiver pelo menos três raparigas?



- 19** Na grelha quadriculada da figura pretende-se seguir de A para B deslocando-se, para a direita ou para cima, sempre pelos segmentos da quadrícula. Quantos caminhos possíveis existem?

- 20** Resolva, em $\mathbb{N}$, as seguintes equações:

- | | | |
|---|---------------------------------|---|
| a) $\frac{1}{5c_p} + \frac{3}{6c_p} = \frac{1}{4c_p}$ | b) ${}^nA_4 = 8 \times {}^nA_3$ | c) $30 \times {}^nC_2 = 9 \times {}^{n+1}C_3$ |
|---|---------------------------------|---|

FICHA DE TRABALHO 3 Triângulo de Pascal e binómio de Newton

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Uma linha do triângulo de Pascal tem 99 elementos.
Qual é o antepenúltimo elemento dessa linha?
- 2** O terceiro elemento de uma certa linha do triângulo de Pascal é 300 .
Qual é o penúltimo elemento da linha anterior?
- 3** Um conjunto tem 128 subconjuntos.
Quantos desses subconjuntos têm 5 elementos?
- 4** O 13.º e o 14.º elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal são iguais.
Qual é o sexto elemento da linha seguinte?
- 5** O quarto elemento de uma certa linha do triângulo de Pascal é 1330 .
A soma dos quatro últimos números dessa linha é 1562 .
 - 5.1 Qual é o terceiro número da linha seguinte?
 - 5.2 Qual é a soma dos elementos da linha seguinte?
 - 5.3 Quantos elementos da linha seguinte são maiores do que 10 000 ?
- 6** A soma dos três primeiros números de uma certa linha do triângulo de Pascal é 500 501 .
Qual é o 4.º elemento da linha anterior?
- 7** Sobre uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que 431 910 é a soma dos elementos que estão à esquerda do maior elemento dessa linha.
Determine a soma dos dois maiores elementos:
 - a) da linha anterior.
 - b) da linha seguinte.
- 8** A Mafalda está a organizar uma festa. Ela tem 15 amigos mas não consegue decidir quantos é que vai convidar.
Se ela puder decidir escolher qualquer número de amigos para vir à sua festa, quantas listas diferentes de convidados é possível fazer sabendo que convida:
 - a) pelo menos 4 amigos?
 - b) no mínimo 3 e no máximo 12 amigos?
- 9** No desenvolvimento de $(3 + kx)^9$, os coeficientes de x^3 e de x^4 são iguais.
Determine o valor de k .
- 10** Determine o termo independente do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.
- 11** Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$.

- 12** Determine a soma dos termos racionais do desenvolvimento de $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^9$.
- 13** No desenvolvimento de $(\sqrt{7} + \sqrt[6]{5})^{78}$, quantos termos são números inteiros?
- 14** Os coeficientes de dois termos consecutivos do desenvolvimento de $(1 + x)^{20}$ estão na razão de 1 para 2.
Qual é a ordem do menor desses termos?
- 15** No desenvolvimento de $(1 + px)^n$, os coeficientes de x e de x^2 são 8 e 24, respetivamente.
Determine o valor de n e de p .
- 16** No desenvolvimento de $(1 + x)^n$, sabe-se que 220, 495 e 792 são três coeficientes consecutivos.
Determine o valor de n .
- 17** Use o desenvolvimento do binómio de Newton.
- 17.1** Simplifique $(x + y)^4 + (x - y)^4$.
- 17.2** Usando a expressão encontrada, calcule $(2 + \sqrt{2})^4 + (2 - \sqrt{2})^4$.
- 18** Considere os termos do desenvolvimento de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^n$.
Se a razão entre o 6.º termo inicial e o 6.º termo final for $\sqrt{\frac{2}{3}}$, qual é o valor de n ?
- 19** Quantos termos com coeficientes racionais existem no desenvolvimento de $(1 + 3^{\frac{1}{3}})^6$?
- 20** Sobre o desenvolvimento de $(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2})^{10}$, sabe-se que o termo independente da variável x é igual a 180.
Determine os possíveis valores de k .
- 21** Os coeficientes dos termos centrais nos desenvolvimentos de $(1 + ax)^4$ e de $(1 - ax)^6$ são iguais.
Determine o valor de a .
- 22** Quantos termos tem o desenvolvimento de $(1 + 2x + x^2)^{13}$ após simplificação?
- 23** Prove as seguintes igualdades:
- a) ${}^m C_n \times {}^n C_p = {}^m C_p \times {}^{m-p} C_{n-p}$
- b) $2 {}^n C_2 + n^2 = {}^{2n} C_2$
- c) ${}^n C_p = \frac{n}{n-p} {}^{n-1} C_p$
- 24** Prove que:
- $${}^n C_1 + 6 {}^n C_2 + 6 {}^n C_3 = n^3$$
- 25** Mostre que:
- $${}^{15} C_4 + \sum_{i=1}^5 {}^{20-i} C_3 = {}^{20} C_4$$

FICHA DE TRABALHO 4 Definição de probabilidade

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado tetraédrico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 4 e registar o número da face que fica virada para baixo.



- 1.1 Indique, em extensão, o espaço amostral E .
- 1.2 Quantos elementos tem o espaço de acontecimentos $\mathcal{P}(E)$?
- 1.3 Indique, em extensão, o espaço de acontecimentos $\mathcal{P}(E)$.

- 2** Considere a experiência que consiste em lançar primeiro um dado cúbico e, de seguida, um dado tetraédrico equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e de 1 a 4, respetivamente. Regista-se o número da face que fica voltada para cima no dado cúbico e, de seguida, o número da face que fica voltada para baixo no dado tetraédrico.

- 2.1 Indique em extensão os acontecimentos:
- a) A: «Os números são ambos ímpares.»
 - b) B: «O produto dos dois números é superior a 1.»
 - c) C: «A soma dos dois números é igual a 10.»
 - d) D: «O produto dos dois números é superior a 25.»
 - e) F: «Ambos os números são divisores de 18.»
 - f) G: «Pelo menos um dos números é par.»
- 2.2 Dos acontecimentos anteriores, identifique, caso existam:
- a) um acontecimento elementar.
 - b) um acontecimento composto.
 - c) um acontecimento certo.
 - d) um acontecimento impossível.
 - e) dois acontecimentos incompatíveis.
 - f) dois acontecimentos complementares.



- 3** De um baralho completo de 40 cartas retiram-se, aleatoriamente, duas cartas.

- 3.1 De quantas maneiras diferentes é possível fazer a extração?
- 3.2 De quantas maneiras diferentes é possível extrair duas cartas com o número 7?
- 3.3 Determine, na forma de fração irredutível, a probabilidade de extrair duas cartas com:
- a) o número 5.
 - b) números diferentes.

- 4** Um grupo de 2 professores, 3 alunos e 4 alunas estão a trabalhar num projeto numa escola. Para a apresentação desse projeto vão ser seleccionadas, ao acaso, 4 pessoas do grupo. Qual é, na forma de fração irredutível, a probabilidade de se seleccionarem:

- a) exatamente 2 alunas?
- b) um professor, 2 alunos e uma aluna?
- c) pelo menos um dos professores?
- d) tantos alunos como alunas?



- 5** Quatro rapazes e duas raparigas foram ao cinema e compraram seis bilhetes todos seguidos numa fila do cinema.

Se os bilhetes forem distribuídos aleatoriamente, qual é a probabilidade:

- a) de as duas raparigas ficarem juntas?
- b) de as duas raparigas ficarem nas pontas?
- c) de os rapazes ficarem juntos e as raparigas também?



- 6** Um dado cúbico equilibrado, com as faces com números de 1 a 6, é lançado duas vezes.

- a) Qual é a probabilidade do produto dos dois números ser um número par?
- b) Qual é a probabilidade de, no primeiro lançamento, sair um número ímpar ou a soma dos números saídos nos dois lançamentos ser 7?

- 7** Uma caixa contém 15 bolas indistinguíveis ao tato, das quais 4 são azuis e numeradas de 1 a 4, 5 são pretas e numeradas de 5 a 9 e 6 são brancas e numeradas de 10 a 15.

7.1 Extraí-se uma bola da caixa e observa-se a cor e o número.

Qual é a probabilidade de se obter:

- a) uma bola com um número ímpar?
- b) uma bola azul com número par?
- c) uma bola branca com número primo?
- d) uma bola com número múltiplo de 3?

7.2 Extraíu-se uma bola e depois outra, após a reposição da primeira, e observou-se a cor e o número de cada uma delas.

Qual é a probabilidade de se obterem:

- a) duas bolas com a mesma cor?
- b) duas bolas com um número ímpar?
- c) duas bolas iguais?
- d) duas bolas com números consecutivos e de cores diferentes?

7.3 Extraíram-se simultaneamente três bolas e observou-se a respetiva cor e número.

Qual é a probabilidade de se obterem:

- a) três bolas pretas?
- b) três bolas da mesma cor?
- c) uma bola de cada cor?
- d) duas bolas com número par e uma com número ímpar?
- e) duas bolas brancas com números pares e uma preta?

- 8** Escrevem-se as letras da palavra *MATEMATICA*, de forma aleatória, na horizontal, uma a seguir à outra.
- 8.1** Qual é a probabilidade de o *C* aparecer antes do *I* e de o *I* aparecer antes do *E* quando se lê da esquerda para a direita?
- 8.2** Qual é a probabilidade de a palavra começar por *MATE*?
- 9** Numa caixa, estão 20 bolas indistinguíveis ao tato, sendo quatro delas pretas. Retiram-se duas bolas da caixa. Qual é a probabilidade de pelo menos uma das bolas ser preta?
- 10** Números com cinco algarismos são formados usando os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9 sem os repetir. Escolhendo um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser maior do que 30 000 e inferior a 90 000?
- 11** Numa caixa *A* estão três bolas numeradas de 1 a 3, na caixa *B*, estão cinco bolas numeradas de 1 a 5 e, na caixa *C*, estão sete bolas numeradas de 1 a 7. Retira-se uma bola de cada caixa pela ordem *A*, *B* e *C* e registam-se os números saídos.
- 11.1** Qual é a probabilidade de a soma dos números ser um número par?
- 11.2** Qual é a probabilidade de os 3 números estarem em progressão aritmética com $r \geq 1$?
- 12** Escolheram-se aleatoriamente dois dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x - 1)^4$. Determine a probabilidade:
- a) de o respetivo produto ser negativo.
- b) de a sua soma ser positiva.
- 13** O Clube de Matemática de uma escola tem 14 membros, sendo 8 raparigas e 6 rapazes. Escolhe-se aleatoriamente um elemento para presidente e três elementos para secretários. Qual é a probabilidade de o presidente ser do mesmo género que a maioria dos secretários?

FICHA DE TRABALHO 5 Propriedades da probabilidade, probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e teorema da probabilidade total

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, prove que:

$$1 + P(A \cap B) - P(B) - P(A) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

- 2** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ possíveis, tais que:

- a probabilidade de que pelo menos um dos acontecimentos ocorra é $\frac{2}{3}$;
 - a probabilidade de que os acontecimentos ocorram em simultâneo é $\frac{3}{10}$.
- Determine $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$.

- 3** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ possíveis, sabe-se que:

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Determine $P(\bar{A} \cap B)$.

- 4** Considere um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ possíveis.

4.1 Determine $P(A|B)$, se $P(A \cap B) = 0,7$ e $P(B) = 0,8$.

4.2 Determine $P(A \cap B)$, se $P(A|B) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

4.3 Determine $P(B)$, se $P(A|B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

4.4 Se $P(A \cup B) = \frac{13}{15}$, $P(A) = \frac{4}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$, determine:

a) $P(A|B)$

c) $P(\bar{B}|A)$

e) $P(\bar{B}|\bar{A})$

g) $P(A|\bar{B})$

b) $P(B|A)$

d) $P(\bar{A}|B)$

f) $P(\bar{A}|\bar{B})$

h) $P(B|\bar{A})$

4.5 Estabeleça relações entre as probabilidades encontradas na questão 4.4.

- 5** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, sabe-se que:

$$P(\bar{A}) = 0,2$$

$$P(B) = 0,4$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,5$$

Qual é o valor de $P(B|(A \cup \bar{B}))$?

- 6** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, independentes, sabe-se que:

$$P(A) = 0,4$$

$$P(A \cup B) = 0,6$$

Qual é o valor de $P(B)$?

- 7** Dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, independentes, sabe-se que:

• a probabilidade de exatamente um dos dois ocorrer é $\frac{13}{24}$;

• a probabilidade de nenhum ocorrer é $\frac{5}{24}$.

Determine $P(A)$ sabendo que A é o acontecimento que tem maior probabilidade de ocorrer.

- 8** Lançam-se dois dados cúbicos, equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6 .
Qual é a probabilidade de a soma dos números das faces ser 8 , sabendo que pelo menos um dos dados mostra o número cinco?
- 9** Em duas caixas opacas colocaram-se bolas indistinguíveis ao tato.
A caixa A contém cinco bolas castanhas, três bolas verdes e oito bolas laranja.
A caixa B contém três bolas castanhas e cinco bolas verdes.
Considere a seguinte experiência:
Lança-se um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 .
Se o número da face que fica voltada para cima for 1 , 2 , 3 , 4 , retira-se uma bola da caixa A e regista-se a cor, caso contrário, retira-se uma bola da caixa B e regista-se a cor.
Sejam os seguintes acontecimentos:
C: «Saiu uma bola castanha.»
V: «Saiu uma bola verde.»
L: «Saiu uma bola laranja.»
Determine:
a) a probabilidade dos acontecimentos C , V e L e conclua sobre a sua equiprobabilidade.
b) $P(\text{sair da caixa A sabendo que a bola saída é castanha})$.
c) $P(\text{sair a face 6 sabendo que a bola saída é verde})$.
- 10** Em duas caixas colocaram-se bolas indistinguíveis ao tato.
A caixa 1 tem quatro bolas azuis e três bolas brancas.
A caixa 2 tem apenas uma bola azul.
Considere a seguinte experiência aleatória:
Lança-se uma moeda equilibrada de 1 euro.
Se sair a face nacional, retira-se ao acaso uma bola da caixa 1 e coloca-se na caixa 2 .
Se sair a face euro, retiram-se ao acaso duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2 .
Finalmente, retira-se uma bola ao acaso da caixa 2 e regista-se a cor.
10.1 Qual é a probabilidade de a cor da bola que saiu ser azul?
10.2 Sabendo que a cor da bola que saiu é azul, qual é a probabilidade de a face da moeda ter sido a face nacional?
- 11** Ao contar o número de cartas de um baralho de 40 cartas, verificou-se que faltava uma.
Retiraram-se ao acaso 4 cartas desse baralho e verificou-se que eram todas do naipe de ouros.
Determine a probabilidade de a carta que se perdeu ser do naipe de ouros.
- 12** Seleccionam-se, ao acaso, dois números inteiros de entre os inteiros de 1 a 15 , inclusive.
Sejam os acontecimentos:
A: «A soma é par.»
B: «Os números escolhidos são ímpares.»
Determine $P(B|A)$ sem usar a fórmula da probabilidade condicionada.
Na sua resposta, deve:
• interpretar o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação;
• determinar o número de casos possíveis;
• determinar o número de casos favoráveis;
• apresentar o valor pedido na forma de fração irredutível.
- 13** Numa fábrica de espelhos retrovisores para automóveis existem três máquinas, A , B e C , que fabricam diariamente, 2500 , 2000 e 3000 espelhos, sendo 3 % , 2,5 % e 4 % os espelhos defeituosos, respetivamente.
Seleccionou-se um espelho retrovisor ao acaso de toda a produção diária e verificou-se que é defeituoso.
Qual é a probabilidade de ter sido produzido pela máquina A ?

FICHA DE TRABALHO 6 Limites e continuidade

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Sejam (u_n) e (v_n) , tais que:

- (u_n) é monótona decrescente e para todo o natural $n > 1000$, $u_n \geq v_n$;
- (v_n) é definida por:

$$v_n = \frac{3n - 1000}{2n}$$

O que pode concluir sobre $\lim u_n$?**2** Sejam (u_n) e (v_n) , tais que:

- (u_n) é monótona crescente e para todo natural $n > 50$, $u_n \geq v_n$;
- (v_n) é definida por:

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{(2n + 1)(2n + 3)}$$

O que pode concluir sobre $\lim u_n$?**3** Sejam (u_n) e (v_n) , tais que:

- para todo o natural $n \geq 500$, $u_n \leq v_n$;
- (u_n) é definida por $u_n = \frac{n + 1}{\sqrt{n}}$.

Indique, justificando, o $\lim v_n$.**4** Sejam (u_n) e (v_n) , tais que:

- para todo o natural $n > 500$, $v_n \leq \sqrt{n} - u_n$;
- (u_n) é definida por $u_n = 2n$.

Indique, justificando, o $\lim v_n$.**5** Utilize o teorema das sucessões encaixadas para calcular, caso exista, o limite de cada uma das sucessões indicadas.

a) $a_n = \frac{\cos n}{n}$

b) $b_n = \frac{n \cos n}{n + 1}$

c) $c_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

d) $d_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

e) $e_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

f) $f_n = \left(\frac{3n - 2}{4n + 1} \right)^n$

6 Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$.**6.1** Determine o domínio D de f .**6.2** Mostre que $\forall x \in D \setminus \{0\}$, se tem $0 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$.**6.3** Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 7** Considere a função f definida por $f(x) = \cos x - x$.

7.1 Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}$, se tem $-1 - x < f(x) < 1 - x$.

7.2 Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 8** Considere a função f definida por $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x}$.

Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 9** Considere a função f definida por $f(x) = \left(\frac{5x-1}{2x+3}\right)^{-x}$.

Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 10** Considere a função definida por $f(x) = \frac{x^3 + x \sin x}{x^2 + 2x}$.

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico não paralelas aos eixos coordenados.

- 11** Considere num referencial o. n. xOy :

- o gráfico da função f , de domínio $[5, 8]$, definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$;
- a reta r de equação $y = 1$.

Justifique, sem recorrer à calculadora, que a reta r intersesta o gráfico de f em pelo menos um ponto.

- 12** Seja f uma função contínua, de domínio $[-2, 6]$ e contradomínio $[1, 3]$.

Seja g a função de domínio $[-2, 6]$, definida por $g(x) = x - 2 - f(x)$.

Prove que a função g tem pelo menos um zero.

- 13** De uma função f de domínio $[-3, -1]$, sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio;
- $\forall x \in [-3, -1], f(x) < 0$

• $f(-1) = \frac{f(-3)}{4}$

Seja g a função de domínio $[-3, -1]$ definida por $g(x) = f(-3) - 2f(x)$.

Prove que a função g tem pelo menos um zero.

- 14** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \sqrt{x+10} - \sqrt{x}$.

14.1 Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 6[$ (a calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos).

14.2 Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ com recurso ao teorema das funções enquadadas.

- 15** Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

15.1 Determine uma função g , extensão da função f , de modo que o teorema de Weierstrass permita garantir a existência de um mínimo e um máximo absolutos da função g em $[-5, 1]$.

15.2 Determine os extremos absolutos de g .

FICHA DE TRABALHO 7 Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Determine a função derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x$

e) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$

i) $f(x) = \frac{6-x}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{4}{x}$

f) $f(x) = 5x^3 + 2x$

j) $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

g) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

k) $f(x) = (1+2x^3)^4$

d) $f(x) = 7x - 3$

h) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

l) $f(x) = (x^3 + 3x + 1)^3$

2 Mostre que as seguintes funções não são diferenciáveis no seu domínio e indique o domínio da função derivada:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = |x^2 - 6x|$

3 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{se } x < 3 \\ x^2 - 9 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

3.1 Determine os valores de a e de b , de modo que a função f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

3.2 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos de abscissa 3 e $\frac{1}{2}$.

4 Usando métodos exclusivamente analíticos, determine $f''(x)$ e o sentido da concavidade do gráfico das funções no intervalo indicado:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ em $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$ em $]0, 1[$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ em $] -3, -2[$.

f) $f(x) = (x^2 - 4)^3$ em $]-\frac{1}{2}, 0[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ em $] -5, -3[$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$ em $] -2, -1[$.

d) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ em $] -3, 0[$.

5 Usando métodos exclusivamente analíticos, determine $f''(x)$, indique as concavidades e os pontos de inflexão no gráfico das funções no intervalo indicado e, caso estes existam, determine as abscissas desses pontos:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ em $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ em $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ em $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$.

6 Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - x^3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

6.1 Determine os valores de a e de b , de modo que f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

6.2 Usando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão.

- 7** Use a derivada de segunda ordem para concluir se os gráficos das funções seguintes apresentam extremos relativos e pontos de inflexão e apresente os quadros de variação de sinal de f' e de f'' para confirmar os seus resultados:

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 1$

b) $f(x) = 6x^4 - 8x^3$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

- 8** Esboce o gráfico de f tendo como base o estudo da mesma no que se refere, à existência de zeros, paridade, existência de assíntotas ao seu gráfico, monotonia e existência de extremos, sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

- 9** Numa experiência laboratorial de Física, observou-se que o espaço percorrido, em metros, em relação a um ponto fixo, por uma partícula que se desloca com movimento retilíneo é dado em função do tempo, em segundos, a partir do instante em que inicia a observação por:

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$$

9.1 Determine:

- a) o valor da velocidade da partícula, em m/s, no instante $t = 3$.
- b) o valor da aceleração da partícula, em m/s², no instante $t = 3$.
- c) as condições iniciais da experiência.
- d) a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 5$.

9.2 Supondo que a partícula esteve em movimento entre o instante $t = 0$ e $t = 10$, determine em que instante atingiu a velocidade mínima e o seu valor.

- 10** Dois pontos móveis, M_1 e M_2 , movem-se numa reta numérica cuja unidade de medida é o metro, sendo a função posição de cada um, descrita em função do tempo t , em segundos, por:

$$x_1(t) = 2t^2 - t$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 9t$$

respetivamente.

Determine o instante em que os dois objetos têm a mesma velocidade e determine a velocidade e a distância entre eles, nesse instante.

- 11** Uma bola é lançada verticalmente para cima e a sua distância, em metros, relativamente ao solo, é dada, em cada segundo após o lançamento, por:

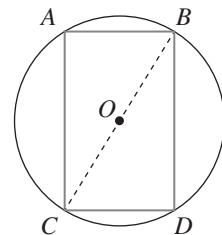
$$s(t) = 21t - 4,9t^2$$

11.1 Determine a velocidade da bola no instante $t = 2$.

11.2 Qual é a velocidade da bola no instante em que toca no solo?

- 12** De todos os retângulos inscritos num círculo de raio $r = 1$, qual é aquele que tem perímetro máximo?

- 13** Num referencial o.n. xOy , considere a reta de equação $y = -2x + 5$. Determine as coordenadas do ponto P da reta cuja distância à origem seja mínima e indique essa distância.



- 14** Qual é o conjunto de valores que o número real k pode ter, de modo que a função

$$f(x) = -x^3 + (2k - 1)x$$

seja sempre decrescente em $\mathbb{R}$?

- 15** Determine os valores de a , b , c e d em $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabendo que:

- o gráfico de f contém o ponto $(0, -8)$;
- o gráfico de f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(2, 0)$;
- a reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$ tem equação $y = 3x - 8$.

FICHA DE TRABALHO 8 Fórmulas trigonométricas: seno, cosseno e tangente da diferença e da soma de dois ângulos

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** Use as fórmulas trigonométricas do seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos para determinar os valores exatos das razões trigonométricas indicadas:

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

g) $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$

e) $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

h) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

f) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

- 2** Determine o valor exato das razões trigonométricas indicadas, sabendo que $\sin(x) = \frac{5}{13}$ e $\cos(y) = -\frac{3}{5}$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

a) $\sin(x - y)$

d) $\cos(x + y)$

b) $\sin(x + y)$

e) $\tan(x - y)$

c) $\cos(x - y)$

f) $\tan(x + y)$

- 3** Determine o valor de $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$, sabendo que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e que $\sin x = \frac{1}{5}$. Apresente o resultado com denominador racional.

- 4** Sabe-se que $\cos(x) = -\frac{1}{3}$ e $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e que $\sin(y) = \frac{3}{5}$ e $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Determine $\tan(x + y)$ e apresente o resultado com denominador racional.

- 5** Sabe-se que $\tan(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos(y) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Determine $\sin(x - y)$.

- 6** Sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{6}$.

Determine $\cos(x) + \sin(x)$. Apresente o resultado com denominador racional.

- 7** Mostre que:

a) $\cos(x - y)\cos(x + y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

b) se $\tan a = x + 1$ e $\tan b = x - 1$, então, $\tan(a - b) = \frac{2}{x^2}$.

- 8** Se $x = \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}$ e se $y = \cos\frac{7\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$, qual é o valor de $x^2 + y^2$?

- 9** Determine as soluções de $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi[$.

- 10** Determine as soluções de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ no intervalo $[0, 2\pi[$.

FICHA DE TRABALHO 9 Limites e derivadas de funções trigonométricas. Gráficos de funções e osciladores harmónicos

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos 2x$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos 3x$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (3 \sin x + \cos x)$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{4x}$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \tan x}{\sin 4x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 3x}{\sin x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - 3}{\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)}$

k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \cos x)^{\frac{1}{2}}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arcsin \frac{1 + 2x^2}{4x^2} \right)$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arccos \frac{1 + 3x}{6x} \right)$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \frac{x^3 - 2x + 1}{1000 - x^3} \right)$

2 Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}, a, b \neq 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \tan x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \tan 2x}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 3 \tan 4x}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 4x}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 4x}{3x + \sin x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{\tan^2 x}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 7x \cos x}{x \cos x + \sin x}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{\sin^2(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x^2} \right)$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \left(2 \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} \right)$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x}{x \sin x}$

t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}$

3 Determine o valor de a de modo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{5x} = -3$.

4 Determine os seguintes limites:

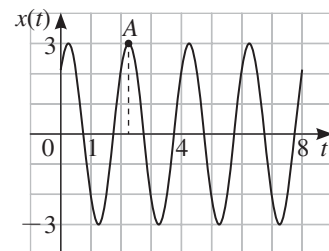
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan^2 x}{\sin x} + 2x + 1 \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 2x - \cos x}{\cos x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{2 \sin(\pi x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x}$

- 5** Determine o domínio de $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \tan x}$.
- 6** Determine o valor de a sabendo que a função $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2a + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- 7** Considere a função $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.
- 7.1** Determine o domínio e o contradomínio de f .
- 7.2** Determine os zeros de f .
- 7.3** Resolva a equação $2f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 = 0$.
- 8** Determine, caso existam, as assíntotas ao gráfico da função $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x}$.
- 9** Determine a derivada de primeira ordem das funções indicadas:
- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x + 3 \sin x$ | j) $f(x) = 3x \tan x$ |
| b) $f(x) = x^2 + 2 \cos x$ | k) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ |
| c) $f(x) = x \sin x$ | l) $f(x) = 4 \cos x^3$ |
| d) $f(x) = \sin x \cos x$ | m) $f(x) = 5 \sin^3 x$ |
| e) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ | n) $f(x) = (1 - \cos x)^3$ |
| f) $f(x) = x^3 - 2 \cos x + \frac{3\pi}{2}$ | o) $f(x) = (x + \sin 2x)^2$ |
| g) $f(x) = (\cos x - \sin x)(-\sin x - \cos x)$ | p) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ |
| h) $f(x) = 2x \sin x - 2 \cos x$ | q) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ | r) $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin x$ |
- 10** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sin x + \cos x$ em $x = \frac{\pi}{2}$.
- 11** Considere a função $f(x) = 2 \sin x$, definida em $x \in [0, 2\pi[$.
- Determine as coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja reta tangente é igual a -1 .
- 12** Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 60]$ (em segundos) de tal forma que a sua abcissa é dada em função do tempo $t \in I$ por:
- $$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)$$
- 12.1** Indique a amplitude, a pulsação e a fase deste oscilador harmónico.
- 12.2** Indique o período e a frequência do oscilador.
- 12.3** Indique a abcissa do ponto P nos instantes $t = 0$, $t = 16$, $t = 23$ e $t = 48$.
- 12.4** Determine o número de vezes que, neste intervalo de tempo, o ponto P passa na origem da reta numérica.
- 12.5** Determine os intervalos de monotonia e os extremos relativos da função x .
- 13** Na figura ao lado está representado o movimento de um oscilador harmónico x no intervalo $[0, 8]$. Sabe-se que $A\left(\frac{9}{2}, 3\right)$.
- 13.1** Determine a amplitude A , a pulsação ω , o período T e a fase φ .
- 13.2** Determine uma expressão analítica $x(t)$ da função representada.
- 13.3** Resolva a equação $x(t) = \frac{3}{2}$.



FICHA DE TRABALHO 10 Juros compostos. Funções exponenciais

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

- 1** A Luísa tem 8000 euros para investir e após alguma pesquisa encontra três opções que considera interessantes:

Opção I — Juros compostos a uma taxa anual de 1,4 % com capitalizações anuais;

Opção II — Juros compostos a uma taxa anual de 1,39 % com capitalização semestral.

Opção III — Juros compostos a uma taxa anual de 1,38 % com capitalização trimestral.

Qual é a opção mais vantajosa para a Luísa se pretender manter o depósito por três anos?

- 2** Vai investir-se um determinado capital em regime de capitalização contínua a uma taxa anual de 7 % . Use as capacidades da calculadora para resolver as questões seguintes.

2.1 Depois de quanto tempo, em anos e dias, o investimento duplica o seu valor?

2.2 Pretende-se duplicar o capital investido no máximo, em 6 anos.

Qual é a taxa de juro mínima que garante esse retorno do investimento?

- 3** Resolva as seguintes equações:

a) $2^x = \frac{1}{16}$

i) $e^{5x} = e^2$

b) $3^x = \frac{1}{27}$

j) $5^{2x+7} = 5^{\frac{x-1}{2}}$

c) $2^{1-x} = 8$

k) $6^{x+7} = \frac{1}{6^{x-9}}$

d) $(0,1)^{1-x} = 100$

l) $3^{4-2x} = \frac{\sqrt{3}}{81}$

e) $(3\sqrt{2})^x = 324$

m) $e^{3x-1} = e^{\frac{2}{x}}$

f) $7^x = 1$

n) $4^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x}$

g) $3^{2x+3} = 1$

o) $\frac{5 \times 2^{x-2}}{2^x + 1} = 1$

h) $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^x = \frac{49}{4}$

p) $3^{\sqrt{|x+2|}} = 9$

- 4** Resolva as seguintes equações:

a) $9 \times 4^{2x-1} - 4 \times 3^{4x-2} = 0$

e) $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 15\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 19 = 0$

b) $7 \times 3^{x-1} - 3 \times \frac{7^{2x-1}}{7^x} = 0$

f) $e^{\cos x} - e^{\sin x} = 0$

c) $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{1-\sqrt{x}} = 6$

g) $4^{2\cos x} - 5 \times 4^{\cos x} + 4 = 0$

d) $6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0$

5 Resolva as seguintes inequações:

a) $6^x > 36$

d) $5^x \leq 0,008$

g) $3^{-x} - \frac{1}{3} < 0$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < 0$

h) $\frac{e^x - 1}{e^{2x}} < 0$

c) $(2\sqrt{5})^x < 1$

f) $e^{3x+6} > -2$

i) $10^{x^2-2x} \leq 1000$

j) $e^{-\cos 2x} \leq e^{\cos x}$

6 Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 4 \times 2^x - 3^y = -7 \\ 6 \times 2^x = 3^{y-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 \times 2^{2x} - 3^{2y} = 55 \\ 2^{x+2} + 3^{y+1} = 25 \end{cases}$

7 Determine os seguintes limites:

a) $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

e) $\lim \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n+2}$

i) $\lim \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n$

b) $\lim \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$

f) $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

j) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

g) $\lim \left(\frac{4n+2}{4n-1}\right)^n$

k) $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

d) $\lim \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$

h) $\lim \left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{n+3}$

l) $\lim \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

m) $\lim \left(\frac{n^4-1}{n^4+n^2}\right)^{n^2}$

8 Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{x+3} - 1}{2x + 6}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\tan x} - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{4x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{x+3} - 1}{x^2 - 9}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - e^x)}{3x \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{8x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+3} - e^3}{3x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{e^x - 1}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

9 Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = e^{1 - \frac{1}{x}}$$

9.1 Determine:

a) o domínio de f .b) o contradomínio de f .9.2 Indique o sinal de f .**10 Considere a função f , real de variável real, definida por:**

$$f(x) = \frac{e^x - 2x}{x}$$

Determine:

a) o domínio de f .b) as coordenadas dos extremos de f .c) o contradomínio de f .

FICHA DE TRABALHO 11 Operações com logaritmos. Equações e inequações

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Determine o logaritmo de base 2 de cada um dos seguintes números indicados:

a) 32

c) 1

e) $\sqrt[4]{8}$

b) $\frac{1}{4}$

d) $\sqrt{2}$

f) $\frac{64}{\sqrt[3]{2}}$

2 Sem recorrer à calculadora, determine os seguintes números:

a) $2^{\log_2 16}$

j) $\log_5(125)$

b) $3^{\log_3 27}$

k) $\log_8\left(\frac{1}{8}\right)$

c) $10^{\log_{10} 1000}$

l) $\log_{\sqrt{2}}(4)$

d) $e^{\ln e}$

m) $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[4]{2})$

e) $2^{\log_2 8} - 5$

n) $\log_{10}(0,01)$

f) $2 \times 5^{\log_5 15}$

o) $2^{\log_2 12} - \log_{\sqrt{3}}(9)$

g) $3^{\log_3 \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{3}$

p) $\sqrt{5}^{\log_{\sqrt{5}} 10} \times \log_4(16)$

h) $e^{3 - \log_e 4}$

q) $(\sqrt{9^{\log_9 2}})^{-1}$

i) $\log_4(4^2)$

r) $\log_{\sqrt[3]{3}} 243$

3 Resolva, em $\mathbb{R}^+$, as seguintes equações:

a) $\log_{10}(x) = 3$

f) $\log_{\frac{8}{27}}(x) = -\frac{1}{3}$

b) $\log_{\frac{5}{2}}(x) = -3$

g) $\log_{\sqrt{2}}(x) = -2$

c) $\log_{16}(x) = \frac{3}{2}$

h) $\log_{\frac{1}{25}}(x) = -\frac{1}{4}$

d) $\log_{0,1}(x) = -2$

i) $\log_{64}(x) = -\frac{2}{3}$

e) $\log_{\sqrt{5}}(x) = -4$

4 Determine a base x dos logaritmos, de modo que a igualdade seja verdadeira:

a) $\log_x \frac{1}{16} = 4$

f) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{4}$

b) $\log_x \frac{1}{8} = -3$

g) $\log_x \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -2$

c) $\log_x \frac{1}{1000} = 3$

h) $\log_x \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = -2$

d) $\log_x 3 = 2$

i) $\log_x \frac{1}{49} = \frac{2}{3}$

e) $\log_x \sqrt[4]{5} = \frac{3}{4}$

j) $\log_x \frac{1}{a} = -3$

- 5** Aplique as propriedades dos logaritmos para escrever as seguintes expressões como soma e/ou diferença entre logaritmos. Considere que as variáveis tomam valores positivos e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

a) $\log_a x^3 y$	f) $\log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z^2}$
b) $\log_a x^2 y^3$	g) $\log_a \sqrt[3]{\frac{x^2 \sqrt[3]{yz^2}}{z}}$
c) $\log_a \frac{xy}{z}$	h) $\log_a \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}}$
d) $\log_a \sqrt[3]{\frac{xy}{z}}$	i) $\log_a \sqrt{\frac{xy \sqrt[3]{x^2 y^2}}{\sqrt{xy} \sqrt[3]{xy^2}}}$
e) $\log_a x \sqrt{y^3}$	

- 6** Aplique as propriedades dos logaritmos para escrever as seguintes expressões num único logaritmo. Considere que as variáveis tomam valores positivos e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

a) $\log_a x - 2\log_a y + \log_a z$	d) $\log_a 12 - \frac{1}{2}\log_a 4 + \log_a \frac{1}{2}$
b) $2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z$	e) $3\log_a 2 + \frac{1}{3}\log_a 16 - \frac{1}{2}\log_a 2$
c) $3\log_a 2 + \log_a x - \frac{1}{2}\log_a y + \frac{3}{2}\log_a z$	f) $\log_a 4 + \log_a 27 - 2\log_a 3$

- 7** Mostre que:

a) $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$
 b) $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

- 8** Se $\log_x 3 = a$, $\log_x 5 = b$ e $\log_x 10 = c$, exprima por meio de a , b e c os seguintes logaritmos:

a) $\log_x 2$	e) $\log_x 1500$
b) $\log_x 1,5$	f) $\log_x \frac{1}{27}$
c) $\log_x 45$	g) $\log_x \frac{10}{81}$
d) $\log_x 675$	h) $\log_x \sqrt[3]{0,90}$

- 9** Indique para que valores de x são válidas as seguintes igualdades:

a) $\log_a(x^2 + 2x - 3) = \log_a(x - 1) + \log_a(x + 3)$
 b) $\log_a(x^2 - 4) = \log_a(x - 2) + \log_a(x + 2)$
 c) $\log_a(x^3 - 3x^2 + 2x) = \log_a(x) + \log_a(x - 2) + \log_a(x - 1)$
 d) $\log_a\left(\frac{x}{x+5}\right) = \log_a(x) - \log_a(x + 5)$
 e) $\log_a(x^2 + 2x + 1) = 2\log_a(x + 1)$
 f) $\log_a(x^2 + 2x + 1) = 2\log_a|x + 1|$
 g) $\log_a \sqrt{\frac{2x+1}{3x+2}} = \frac{1}{2} [\log_a(2x + 1) - \log_a(3x + 2)]$

10 Resolva as seguintes equações:

- a) $e^{x-2} = 2$
 b) $5e^{2x} = 4$
 c) $5\ln(2x) = 4$
 d) $\ln(x+1) = -3$
 e) $\ln(3x-2) = 0$
 f) $\ln x = 2\ln 3x$
 g) $\ln(x+1) = 2 + \ln 2x$
 h) $2\ln(x+3) = \ln(-1-x)$

- i) $\ln\sqrt{x-2} = \frac{1}{2}\ln(2x-3)$
 j) $\frac{\ln(11-2x)}{\ln(4-x)} = 2$
 k) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$
 l) $2\left(\log\frac{1}{3}x\right)^2 - 3\log\frac{1}{3}x + 1 = 0$
 m) $(\ln x)^3 - 2\ln x = 0$
 n) $|\ln(3-x)| = \ln(1+x)$
 o) $\log_2(2\sin x) - \frac{1}{2} = 0$
 p) $\log_{\cos x} 2 = -1$

11 Resolva os seguintes sistemas de equações:

- a) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 3 \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$

12 Resolva as seguintes inequações:

- a) $\log_2 x < \frac{1}{2}$
 b) $\log_{10} x \leq 3$
 c) $\log\frac{1}{2}x > -\frac{1}{2}$
 d) $\log\frac{1}{3}x > \frac{1}{3}$
 e) $\log_{\sqrt{2}} x < 4$
 f) $\log_{\sqrt{3}} x \geq 3$
 g) $-\frac{1}{2} < \log\frac{1}{4}x < \frac{1}{2}$
 h) $\log_3(x+1) < -3$
 i) $\log\frac{1}{10}(x-2) \geq 1$

- j) $\log\frac{1}{3}(2x+3) > 2$
 k) $2 - \ln x < 1$
 l) $\log_2\frac{x}{x+3} > 1$
 m) $\log\frac{1}{3}(x^2+x) > \log\frac{1}{3}6$
 n) $1 + 2\ln x \geq \ln 3x$
 o) $\ln(8x-10) > \ln(2x-3) + \ln(x+4)$
 p) $\frac{(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2}{9 - (\log_2 x)^2} \leq 0$
 q) $\log_2(e^{2x} - 2e^x) > 3$
 r) $\log\frac{1}{4}(2\sin x + 1) < -\frac{1}{2}$

FICHA DE TRABALHO 12 Funções exponenciais e logarítmicas

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Determine a expressão da função derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$

k) $f(x) = 4^{-x}$

u) $f(x) = 2^x \log_2 x$

b) $f(x) = e^{4x}$

l) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

v) $f(x) = e^x \sin x$

c) $f(x) = e^{x^2-3x}$

m) $f(x) = x \ln x$

w) $f(x) = e^{-x} \cos x$

d) $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

x) $f(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$

e) $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x+2}}$

o) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

y) $f(x) = x^2 e^x$

f) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$

p) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$

z) $f(x) = \sqrt{x} e^x$

g) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$

q) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

aa) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

h) $f(x) = e^{\sin x}$

r) $f(x) = \log_2 x$

bb) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + 1}$

i) $f(x) = e^{\cos 2x}$

s) $f(x) = x^3 - 3 \ln x$

cc) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x - 1}$

j) $f(x) = 2^x$

t) $f(x) = 2^x - 2 \log_2 x$

dd) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

2 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2^x$ no ponto de interseção com o eixo Oy .**3** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \log_5 x$ no ponto de interseção com o eixo Ox .**4** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^x$ no ponto de abscissa 1.**5** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x \ln x$ no ponto de abscissa e .**6** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^{\cos x}$ no seu ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$.**7** Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x + ax$ no ponto de interseção com Oy contenha o ponto $(1, 5)$.**8** Dada a função $f(x) = e^{3x}$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f :

a) que passe na origem do referencial.

b) que é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

9 Determine, caso existam, os valores de a e de b , de modo que a função:

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2 + 3} & x \leq 1 \\ b \ln x + x & x > 1 \end{cases} \text{ seja derivável em } \mathbb{R}.$$

10 Determine, caso existam, os valores de a e de b , de modo que a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2a & x < 0 \\ bx + 5 & x \geq 0 \end{cases} \text{ seja derivável em } \mathbb{R}.$$

- 11** Determine, caso existam, os valores de a , de b e de c , de modo que a função:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b \sin x + c & x \leq 0 \\ (x+1)^2 & x > 0 \end{cases} \text{ seja duas vezes derivável em } \mathbb{R}.$$

- 12** Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = xe^x - 2$.
Usando processos exclusivamente analíticos, responda às questões seguintes.

- 12.1 Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.
12.2 Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.
12.3 Mostre que $f(x) = 0$ tem apenas uma solução.
12.4 Usando o teorema de Bolzano, mostre que f tem um zero em $]0, 1[$.
12.5 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

- 13** Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x - 1 - x \ln x$.
Usando processos exclusivamente analíticos, responda às questões seguintes.

- 13.1 Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.
13.2 Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.
13.3 Mostre que $f(x) = 0$ tem apenas duas soluções.
13.4 Usando o teorema de Bolzano-Cauchy, mostre que f tem um zero em $]5, 7[$.
13.5 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão.

- 14** Considere a função definida por $f(x) = axe^{bx^2}$.
Determine a e b , de modo que f tenha um máximo no ponto de coordenadas $(1, 1)$.

- 15** Seja f a função definida por $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$. Determine a , de modo que o mínimo de f seja 3.

- 16** Numa experiência laboratorial, o número de células N numa cultura, cresce, no decorrer do tempo t , em horas, dado por $N(t) = 200e^{0,05t}$, para $t \geq 0$.

- 16.1 Quantas células existiam na cultura no início da experiência?
16.2 Quantas células existiam na cultura passadas 8 horas do início da experiência?
16.3 Determine ao fim de quanto tempo após o início da experiência o número de células duplicava relativamente às que existiam inicialmente. Apresente o resultado em horas e minutos.

- 17** O número de um certo tipo de bactérias duplica a cada 15 minutos. Se inicialmente existe uma bactéria, quantas bactérias existem ao fim de 24 horas?

- 18** Num laboratório militar queimou-se 200 kg de uma substância radioativa que foi acondicionada num contentor e enterrada numa zona protegida. Sabe-se que essa substância perde metade da sua massa ao fim de 56 anos.
No ano 2017, desenterrou-se o contentor e verificou-se que existiam, ainda, 75 kg dessa substância. Em que ano se queimou a substância?

- 19** O carbono-14 é uma substância radioativa utilizada na datação de fósseis onde esteja presente. A massa do carbono-14 decai para metade a cada 5715 anos.

- 19.1 Um fóssil contém 1,42 gramas de carbono-14. Que massa de carbono teria há 30 000 anos?
19.2 Qual é a percentagem de carbono-14 que diminui em cada 100 anos? Apresente o resultado arredondado à décima.

FICHA DE TRABALHO 13 Primitivas

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Indique a expressão analítica de duas funções de domínio $\mathbb{R}$ cuja função derivada seja definida por $f(x) = 2x + 1$.

2 Indique duas primitivas da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{2x}$.

3 Indique duas primitivas da função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

4 Determine uma primitiva F de cada uma das funções seguintes:

a) $\int 1 \, dx$

b) $\int -2x \, dx$

c) $\int \left(\frac{x}{4} + 0,2 \right) dx$

d) $\int \left(\frac{x-2}{3} \right) dx$

e) $\int (x^2 - 1) dx$

f) $\int x(x-1) dx$

g) $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx$

h) $\int (x-2)(x+1) \, dx$

i) $\int (\pi x - x^2) dx$

j) $\int (10 - 8x + 3x^2) dx$

k) $\int 3\sqrt{x} \, dx$

l) $\int x^{-3} \, dx$

m) $\int (x^{-4} - x^{-2} + x^{-1}) dx$

n) $\int e^{3x} \, dx$

o) $\int (2x^3 - 5x) dx$

p) $\int (6x^2 + 4x - 1) dx$

q) $\int (e^x - x) dx$

r) $\int (1 + \cos x) dx$

s) $\int 3 \cos x \, e^{\sin x} \, dx$

t) $\int 2 \sin x \, dx$

u) $\int -\frac{2}{x} \, dx$

v) $\int (6e^{2x} + 3 \cos x) dx$

w) $\int \frac{1}{4x} \, dx$, com $x > 0$

x) $\int \frac{6}{x^2} \, dx$

y) $\int x^2(2x^2 - x) dx$

z) $\int \frac{x^2 - 5}{x} \, dx$, com $x > 0$

aa) $\int (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) dx$

bb) $\int \sqrt[3]{(x+1)\sqrt{x+1}} \, dx$

cc) $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}} \, dx$

dd) $\int (2^x - e^x) dx$

ee) $\int \frac{1}{e^{5x} - 1} \, dx$

5 Determine a primitiva F de cada uma das funções seguintes, sabendo que o ponto de coordenadas $(1, -1)$ pertence ao gráfico de F :

a) $a(x) = 7$

b) $b(x) = -3x$

c) $c(x) = x^2$

d) $d(x) = e^x$

e) $e(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

g) $g(x) = \sin(2\pi x)$

6 Determine a primitiva de $f(x) = 2x$ cujo gráfico contém o ponto $A(1, 2)$.

7 Determine a e b , de modo que $F(x) = ax^4 + bx^3$ seja uma primitiva de $f(x) = 3x^3 - 2x^2$.

8 Determine a e b , de modo que $F(x) = a \sin 3x + b \cos 2x$ seja uma primitiva de $f(x) = 6 \cos 3x - 4 \sin 2x$.

- 9** Determine a e b , de modo que $F(x) = a \ln|x| + \frac{b}{x}$ seja uma primitiva de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$.
- 10** Determine a , b e c , de modo que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ seja uma primitiva de $f(x) = 2x^2 e^x$.
- 11** Considere a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2}$.

11.1 Justifique que a função F de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $F(x) = x - \frac{3}{x}$ é uma primitiva de f .

11.2 Defina analiticamente uma função G , primitiva de f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $G(-1) = 1$.

- 12** Calcule, em intervalos convenientes, as seguintes primitivas:

- | | |
|--|---|
| a) $\int 3 \cos(3x) dx$ | f) $\int 6 \sin x \cos^2 x dx$ |
| b) $\int 2 \sin(4x) dx$ | g) $\int \frac{3x}{x^2 - 1} dx$, com $x > 1$ |
| c) $\int 4e^{2x} dx$ | h) $\int x^2 e^{x^3} dx$ |
| d) $\int \left(e^{3x} + \frac{3}{x} \right) dx$ | i) $\int 6x^2 (x^3 + 2)^5 dx$ |
| e) $\int (4\sqrt{3x} + 3x^5) dx$ | j) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx$ |

- 13** Determine a primitiva F de uma função f , sabendo que:

- $F'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
- $F(2) = 3$

- 14** Seja F uma primitiva de uma função f . Sabe-se que:

- $F'(x) = 1 - 2x$
- $F(1) = 2$

14.1 Determine a expressão analítica de F .

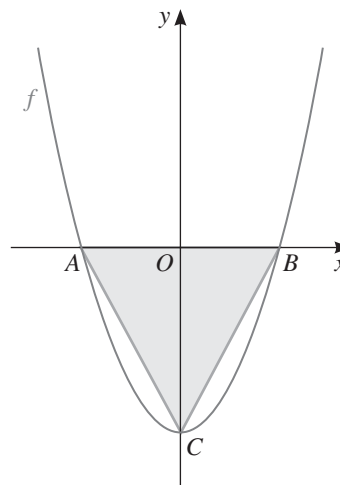
14.2 Determine uma constante C , de modo que o maior valor de $G(x) = F(x) + C$ seja 0.

- 15** No referencial xOy da figura, encontra-se representado o gráfico de uma função quadrática f e o triângulo equilátero $[ABC]$.

Sabe-se que:

- f é uma função par;
- $f(0) = 3$
- A e B são pontos de interseção do gráfico de f com Ox ;
- C é o ponto de interseção do gráfico de f com Oy .

Determine a expressão analítica de F , primitiva de f , tal que $F(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.



- 16** Seja f uma função definida por $f(x) = ae^{bx} + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabe-se que:

- $f(0) = 2$
- $y = x + 2$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Determine a expressão analítica de F , primitiva de f , tal que $2F(1) = f(1) + 3$.

FICHA DE TRABALHO 14 Cálculo integral

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Determine o valor dos seguintes integrais:

a) $\int_1^7 1 \, dx$

e) $\int_{-1}^1 (x^3 + 2) \, dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

b) $\int_2^4 (x + 3) \, dx$

f) $\int_{-1}^3 \sqrt{x+1} \, dx$

j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$

c) $\int_0^3 2x^2 \, dx$

g) $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$

k) $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$

d) $\int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) \, dx$

h) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} \, dx$

2 Determine o valor dos seguintes integrais:

a) $\int_{-2}^3 -1 \, dx$

e) $\int_{-1}^1 (e^x - 3) \, dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos(x) - \sin(x)) \, dx$

b) $\int_2^4 (1 - x) \, dx$

f) $\int_1^3 (-2 + \sqrt{x}) \, dx$

j) $\int_3^6 \frac{1}{x} \, dx$

c) $\int_{-5}^{-1} (x + 2) \, dx$

g) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

k) $\int_{-3}^{-1} \frac{4x}{x^2 + 7} \, dx$

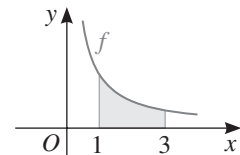
d) $\int_{-1}^3 (x^2 - 4) \, dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \, dx$

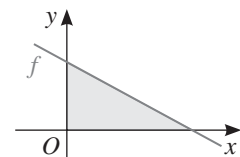
l) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 4}{x^3} \, dx$

3 Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = \frac{3}{2x}$, o eixo Ox e as retas de equação $x = 1$ e $x = 3$.

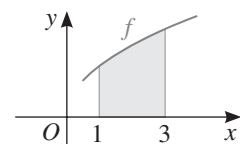
Determine a área da região sombreada.

**4** Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$, o eixo Ox e o eixo Oy .

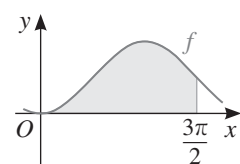
Determine a área da região sombreada usando o cálculo integral.

**5** Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = \sqrt{3x}$, o eixo Ox e as retas de equação $x = 1$ e $x = 3$.

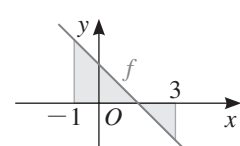
Determine a área da região sombreada.

**6** Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = 1 - \cos x$, o eixo Ox , o eixo Oy e a reta de equação $x = \frac{3\pi}{2}$.

Determine a área da região sombreada.

**7** Considere, num referencial cartesiano, a região sombreada do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = 3 - 2x$, o eixo Ox e as retas de equação $x = -1$ e $x = 3$.

Determine a área da região sombreada usando o cálculo integral.



8 Determine a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $\int_1^x t^2 dt$

e) $\int_{2x}^0 (t - \cos t) dt$

b) $\int_1^{2x} (t^2 + 1) dt$

f) $\int_0^{\sqrt{x}} (2t + 1) dt$

c) $\int_0^{x^2} (t^2 + t) dt$

g) $\int_2^{\frac{x}{2}} (e^{2t} + 2t) dt$

d) $\int_0^{x^3} (t - 2) dt$

h) $\int_0^{\frac{\pi x}{4}} \left(\frac{2}{\pi} \cos t - \frac{4}{\pi} \sin(2t) \right) dt$

9 Determine a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $\int_x^{3x} 2t dt$

c) $\int_x^{2x} \sin t dt$

b) $\int_{\ln x}^{\ln x^2} e^t dt$

d) $\int_{\sqrt{x}}^{x\sqrt{x}} (t^2) dt$

10 Dada uma função f contínua num intervalo $I = [a, b]$ ($a < b$), define-se a média de f em $[a, b]$ por:

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Calcule a média de f , definida por $f(x) = \cos^2 x$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

11 Calcule, num intervalo conveniente, a primitiva que se anula em $a = 2$ das funções definidas por:

a) $f(x) = x + \frac{2}{x}$

b) $f(x) = 2 - x^2$

12 A velocidade de um foguete entre o quarto e o quinto segundo depois de ser lançado é dada, em metros por segundo, por $v(t) = 4e^{0,4t}$. Determine a distância, em metros, percorrida pelo foguete nesse intervalo de tempo.

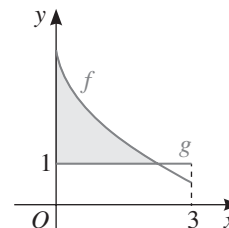
13 Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando, em cada instante $t \geq 0$ (segundos), submetido à aceleração $a(t) = 3 - t$ (em metros por segundo quadrado). Sabe-se que:

- P se encontra no instante $t = 3$ afastado um metro da origem, no sentido positivo;
- a velocidade de P é, no instante $t = 4$, de 2, em metros por segundo, no sentido negativo.

Calcule a posição do ponto P no instante $t = 6$.

14 Na figura, está representada uma zona sombreada limitada pelos gráficos das funções definidas por $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$ e $g(x) = 2$ no intervalo $[0, 3]$ e a reta $x = 0$.

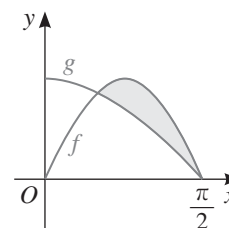
Calcule a medida da área da zona sombreada.



15 Na figura, estão representadas partes dos gráficos das funções definidas por $f(x) = \sin(2x)$ e $g(x) = \cos(x)$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

A zona sombreada da figura está delimitada pelos gráficos das duas funções.

Calcule a medida da área da zona sombreada.



16 Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + x + 2$.

FICHA DE TRABALHO 15 Números complexos. Representação geométrica

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Considere a equação $x^3 - 12x - 16 = 0$.

1.1 Use a fórmula de Cardano para determinar uma solução da equação.

1.2 Fatorize o polinómio $x^3 - 12x - 16$ e determine, caso existam, as restantes soluções da equação.

2 Considere a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

2.1 Use a fórmula de Cardano para determinar uma solução da equação.

2.2 Fatorize o polinómio $x^3 - 6x - 9$ e determine, caso existam, as restantes soluções da equação.

3 Considere a equação $x^3 = 6x - 4$.

3.1 Use a fórmula de Cardano para determinar uma solução da equação.

3.2 Fatorize o polinómio $x^3 - 6x + 4$ e determine, caso existam, as restantes soluções da equação.

4 Considere a equação $x^3 = 18x + 8$.

Use a fórmula de Cardano para determinar uma solução da equação.

Fatorize o polinómio $x^3 - 18x - 8$ e determine, caso existam, as restantes soluções da equação.

5 Considerando as operações «+» e «×» (adição e multiplicação de números complexos, respetivamente), calcule:

a) $(3, 1) + (2, -1)$

e) $(-1, 0) \times (0, -1)$

b) $(3, 1) \times (2, -1)$

f) $(-1, 1) \times (2, -2)$

c) $(1, 2) + (-1, 3)$

g) $(-\sqrt{2}, -3) \times \left(\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2} \right) + \left(\frac{3}{2}, -\sqrt{2} \right) \right)$

d) $(1, 2) \times (-1, 3)$

6 Identifique $Re(z)$ e $Im(z)$ nos seguintes complexos:

a) $z = 3 + 2i$

e) $z = i + 2$

b) $z = 1 - i$

f) $z = \sqrt{2}i - \ln 2$

c) $z = 4$

g) $z = 2i$

d) $z = -\frac{1}{4} + \frac{i}{2}$

h) $z = 0$

7 Determine os valores de x e de y para os quais os números complexos seguintes são iguais:

a) $z_1 = x - 2i$ e $z_2 = 3 + \frac{y}{2}i$

b) $z_1 = \sqrt{2}x + i$ e $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}yi$

c) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2i$ e $z_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}yi$

d) $z_1 = -\sqrt{3}x + \sqrt{2}yi$ e $z_2 = \sqrt{6} - 2i$

e) $z_1 = \pi x + \pi^2 i$ e $z_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}yi$

f) $z_1 = \frac{1}{4}x - \sqrt{6}yi$ e $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{8}i$

8 Calcule:

- a) $(3 - i) + (4 + 2i) - (5 + 3i)$
 b) $(4 + 3i) - (2 - 2i) + (3 - 4i)$
 c) $(1 - 2i) \times (3 + i)$
 d) $(7 + i) \times (1 - 3i)$
 e) $(\sqrt{2} - i) \times (\sqrt{2} + i)$
 f) $(2 - \sqrt{3}i) \times (1 + \sqrt{3}i)$
 g) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) \times (1 - i)$
 h) $\left(\frac{1}{2} + i\right) \times \left(\frac{3}{2} + i\right)$
 i) $(1 - i) \times (1 - i)$
 j) $i(-2i) \times (2 + i)$
 k) $i(1 + i) + 2i(2 + i)$
 l) $-i(5 + i) - (1 + 2i) \times (1 - 3i)$
 m) $i(\sqrt{6} - \sqrt{6}i) - (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$

9 Determine o valor de a para o qual:

- a) $(1 - ai) + (3 + 4i)$ é um número real.
 b) $(3a - 2i) + (1 + 3i)$ é um número imaginário puro.
 c) $(2 - ai) + (a - i)$ é um número real.
 d) $(3a - 4i) + (-6 + a^2i)$ é um número real.
 e) $(\ln a - 2i) + (-1 + 3i)$ é um número imaginário puro.
 f) $(-\log a + 2i) + (2 + 3i)$ é um número imaginário puro.

10 Seja A o afixo do complexo $z = 2 - 3i$. Indique as coordenadas do afixo B do complexo:

- a) $z + z_0$, em que $z_0 = -1 - 3i$.
 b) $z + z_0$, em que $z_0 = -2 + 4i$.
 c) $z - z_0$, em que $z_0 = 3 - 2i$.
 d) $z - z_0$, em que $z_0 = -1 + 3i$.
 e) $z_0 - z$, em que $z_0 = 2 + i$.
 f) $z_0 - z$, em que $z_0 = 1 - 3i$.

11 Seja A o afixo do complexo $z = 1 - i$. Indique o complexo z_0 , de modo que o afixo B do complexo:

- a) $z + z_0$ tenha as coordenadas $(2, 3)$.
 b) $z + z_0$ tenha as coordenadas $(-1, -2)$.
 c) $z + z_0$ tenha as coordenadas $(0, 2)$.
 d) $z - z_0$ tenha as coordenadas $(-3, 1)$.
 e) $z - z_0$ tenha as coordenadas $(1, 4)$.
 f) $z_0 - z$ tenha as coordenadas $(-2, 0)$.
 g) $z_0 - z$ tenha as coordenadas $(3, -1)$.
 h) $z - z_0$ tenha as coordenadas $(-1, -1)$.

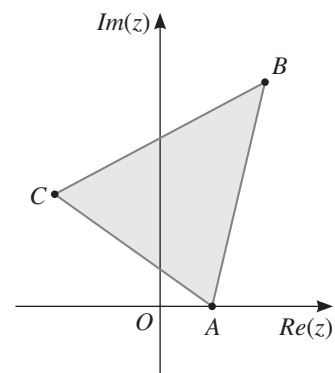
12 Considere, no plano complexo, um triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

- A é o afixo do complexo $z_1 = 1$;
- B é o afixo do complexo $z_2 = 2 + 4i$;
- C é o afixo do complexo $z_3 = -2 + 2i$.

12.1 Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.
 Apresente o resultado arredondado às décimas.

12.2 Determine a área do triângulo $[ABC]$.

12.3 Considere um ponto D , que é a imagem do afixo de C pela translação de vetor $\vec{u}(0, a)$. Sabe-se que a área do triângulo $[ABD]$ é superior em uma unidade à área do triângulo $[ABC]$.
 Determine a .



FICHA DE TRABALHO 16 Números complexos: Operações na forma algébrica

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Calcule na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | | | |
|------------------------|-----------------------|--|---|
| a) $(3i)^2$ | e) $(3 - i)(-2 - i)$ | i) $(2 + 2\sqrt{2}i)^2$ | k) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)^2$ |
| b) $(-\sqrt{2}i)^2$ | f) $(2 - 2i)(3 + 4i)$ | j) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ | l) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ |
| c) $(1 + 2i)(-1 - 3i)$ | g) $(1 - 2i)^2$ | | |
| d) $(-2 + i)(1 + 2i)$ | h) $(\sqrt{2} - i)^2$ | | |

2 Simplifique:

- | | | | |
|----------|---------------|----------------|----------------------|
| a) i^3 | e) i^{20} | i) i^{-1000} | m) i^{2019} |
| b) i^4 | f) i^{50} | j) i^{2000} | n) i^{2099} |
| c) i^5 | g) i^{-100} | k) i^{2017} | o) $(i^{-17})^{138}$ |
| d) i^6 | h) i^{500} | l) i^{-2018} | |

3 Calcule na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $(4 + i)(3 - i)(2 + 2i)$ | c) $2(3 - i) - i(1 + i)$ |
| b) $(3i)(2i)(1 - 2i)(4 - 5i)$ | d) $i(1 + 5i) - 3i(2 - 4i)$ |

4 Calcule na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--------------------|--|
| a) $(2i)^3$ | f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$ |
| b) $(\sqrt{3}i)^3$ | g) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$ |
| c) $(1 - i)^3$ | h) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ |
| d) $(3 + 2i)^3$ | |
| e) $(-2 + i)^3$ | |

5 Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que:

- a) $(a - 2i)(3 + 3i)$ seja um número real.
 b) $(1 + ai)(3 + 2i)$ seja um número imaginário puro.
 c) $(a^2 - i)(a + 3i)$ seja um número real.
 d) $(a + i)^2 + (1 + ai)^2$ seja um número imaginário puro.

6 Escreva $\sqrt{6 + 8i}$ na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

7 Sabe-se que $z = 2 - 3i$ e $w = 1 + 2i$. Calcule:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{1}{z}$ | d) $\frac{1}{\bar{w}}$ | g) $\frac{z}{1+i} + \frac{w}{1-i}$ |
| b) $\frac{1}{w}$ | e) $\frac{w}{z}$ | h) $\frac{\bar{z}\bar{w}}{-2-i}$ |
| c) $\frac{1}{\bar{z}}$ | f) $\frac{\bar{z}}{w}$ | i) $\frac{1}{\bar{z} + \bar{w}}$ |

8 Determine o conjugado dos seguintes complexos:

a) $\frac{2+i}{1-i}$

b) $\frac{3+2i}{2+i}$

c) $\frac{-1-3i}{1-2i}$

d) $\frac{(1+i)^2}{3+i} - i^3$

e) $\frac{(2-3i)(1+2i)^2}{1+i} - \frac{i^{11}(2-i)}{2}$

f) $\frac{(1-4i)^2 - (2+i)^2}{1+i} + \frac{i^7(1+i^{13})}{1-i}$

9 Determine o módulo dos seguintes complexos:

a) $z = 2 - i$

b) $w = \frac{1-2i}{3+i}$

c) $s = \frac{6-8i}{8+6i}$

d) $t = \frac{2-4i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$

10 Seja f a função, de domínio $\mathbb{C}$, definida por $f(z) = (1-i)z^2 - (3+2i)z + 1+4i$. Determine:

a) $f(1)$

b) $f(1+i)$

c) $f\left(\frac{1}{2-i}\right)$

11 Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações e apresente os resultados na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^3 + 4z = 0$

c) $z^2 + 2z + 4 = 0$

d) $\frac{z-2i}{3-z} = 1+3i$

e) $\frac{i-z}{3+i} = z+1$

f) $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$

g) $(1+3i)z - i\bar{z} = 7+5i$

h) $z^2 - 15 + 8i = 0$

i) $z + |z| = 8 + 4i$

j) $z + 2|z| + 2\bar{z} = 5 + \sqrt{3}i$

k) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

l) $5z^2 - 8iz - 13 = 0$

12 Considere, em $\mathbb{C}$, as equações $z^2 + kz - 1 = 0$ e $z^2 + z + k = 0$.Determine k , de modo que as duas equações tenham uma solução em comum.**13** Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $az^2 + bz + c = 0$, com $a \neq 0$.

Sabe-se que:

- $a, c \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}$;
- a, b e c estão em progressão geométrica de razão r .

13.1 Mostre que as raízes da equação são da forma $z = \frac{-\sqrt{ac} \pm i\sqrt{3ac}}{2a}$.

13.2 Determine as raízes da equação quando:

a) $a = 1$ e $r = 2$

b) $b = 6$ e $r = 3$

c) $c = 50$ e $r = -5$

14 Considere, no plano complexo, os pontos A e B , afixos dos complexos $z_1 = 1+i$, $z_2 = -z_1$, respetivamente.14.1 Mostre que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow z = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$.14.2 Seja C o afixo do complexo z_3 e $\operatorname{Re}(z_3) < 0$. Considere o triângulo equilátero $[ABC]$.14.2.1 Determine z_3 .14.2.2 Represente o triângulo $[ABC]$ no plano complexo.14.2.3 Determine a área do triângulo $[ABC]$.

FICHA DE TRABALHO 17 Números complexos: Forma trigonométrica. Raízes índice n . Conjunto de pontos

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 Mostre que os complexos seguintes são unitários:

a) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $z_3 = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}i$

e) $z_5 = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$

b) $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d) $z_4 = \frac{6\sqrt{2}}{19} + \frac{17}{19}i$

f) $z_6 = \frac{2\sqrt{22}}{11} - \frac{\sqrt{33}}{11}i$

2 Considere os complexos $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

2.1 Mostre que z_1 e z_2 são unitários.

2.2 Indique um argumento de:

a) z_1

d) $\frac{z_2}{z_1}$

g) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

b) z_2

e) $z_1 z_2$

h) $\overline{(z_1 z_2)}$

c) $\frac{z_1}{z_2}$

f) $z_1 \overline{z_2}$

3 Escreva na forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ os seguintes números complexos:

a) $e^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

i) $10e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $e^{i\frac{5\pi}{3}}$

f) $\sqrt{6}e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

j) $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

c) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

g) $\frac{4}{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

k) $4e^{i\frac{\pi}{3}}$

d) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

h) $8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

l) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}}$

4 Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica. Apresente os argumentos em radianos, na forma de racionais múltiplos de π ou, caso utilize a calculadora, apresente-os com 3 casas decimais.

a) $2i$

g) $\sqrt{3} - i$

m) $6\sqrt{3} + 6i$

b) -5

h) $-\sqrt{3} - i$

n) $3 + 4i$

c) $1 - i$

i) $-1 + \sqrt{3}i$

o) $1 - 2i$

d) $1 + \sqrt{3}i$

j) $-1 - i$

p) $-10 + 5i$

e) $-2 + 2\sqrt{3}i$

k) $3 - 3\sqrt{3}i$

q) $-3 - i$

f) $-2 - 2i$

l) $-5i$

5 Considere os números complexos $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ e $z_3 = -4i$.

Calcule, apresentando o resultado na forma trigonométrica:

a) $z_1 z_2$

d) $\frac{\overline{z_1}}{z_3}$

f) $\frac{iz_1 z_3}{4}$

h) $-\frac{iz_2 z_3^3}{z_1^2}$

j) $\frac{z_1}{z_2} \times \frac{2 - 2i}{1 + i}$

b) $z_2 z_3$

e) $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}$

g) $\frac{-z_1 \overline{z_2}}{z_3^2}$

i) $\frac{\overline{z_1}^2 z_3^2}{128 z_2^3}$

c) $z_1 \overline{z_3}$

- 6** Escreva os seguintes números complexos na forma rw , com $r \in \mathbb{R}^+$ e $w \in \mathbb{C}$, tal que $|w| = 1$:
- a) $-1 + 3i$ b) $1 + 3\sqrt{3}i$ c) $3 - 2\sqrt{2}i$ d) $\sqrt{2} + \sqrt{6}i$
- 7** Determine as raízes quadradas dos complexos seguintes. Apresente o resultado na forma trigonométrica.
- a) $z = 9e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ e) $z = 25e^{i\frac{\pi}{6}}$
b) $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ d) $z = e^{i\pi}$ f) $z = 18e^{i\frac{2\pi}{5}}$
- 8** Determine as raízes indicadas. Apresente os resultados na forma algébrica:
- a) $\sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}}$ b) $\sqrt[3]{27e^{i\pi}}$ c) $\sqrt[4]{64e^{i\frac{2\pi}{3}}}$
- 9** Determine as raízes indicadas. Apresente os resultados na forma trigonométrica:
- a) $\sqrt[4]{-i}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ c) $\sqrt[3]{i(1-i)}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2-2i}{2+2i}}$ e) $\sqrt[3]{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3}$
- 10** Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^n - 1 = 0$.
- 10.1 Resolva a equação para $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Apresente o resultado na forma algébrica.
- 10.2 Para $n \geq 3$, os afijos das soluções da equação são os vértices de um polígono regular. Para cada caso, represente, no plano de Argand, esse polígono e determine o perímetro.
- 11** No plano complexo, sejam A , B e C os afijos dos complexos $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$ e $z_3 = 3 + 6i$, respetivamente.
- 11.1 Seja $w = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. Mostre que $w = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- 11.2 Conclua que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .
- 12** Determine o módulo e o argumento principal do complexo $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ e $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- 13** Sejam z_1 e z_2 dois complexos não nulos. Sabe-se que:
- $|z_1 z_2| = 1$
 - $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) + \frac{\pi}{2}$
- Determine $\overline{z_1} z_2$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.
- 14** Represente as regiões do plano definidas pelas seguintes condições:
- a) $|z - 1| = 3$ f) $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4} \wedge 1 \leq |z - i| \leq 2$
b) $|z + 2 - i| \leq 2$ g) $\text{Im}(z) \geq 1 \wedge |z - 2 - i| \leq 2 \wedge \text{Re}(1 - iz) \geq \sqrt{3}$
c) $|z - 1| = |z + i|$ h) $\text{Im}(z(1 + 2i)) \geq -1 \wedge |z + 2 - i| \leq 2 \wedge \text{Re}((1 + i)z) \geq -2$
d) $|z - 1 - i| \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1$
e) $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq 2\pi \wedge |z| \leq 2$
- 15** Sejam z e w dois complexos não nulos.
- 15.1 Represente no plano de Argand as regiões do plano definidas pelas condições:
- $|z| = 12$
 - $|w - 3 + 4i| = 5$
- 15.2 Determine o valor mínimo de $|z - w|$.
- 16** Sejam z e w dois complexos não nulos. Sabe-se que $|z| = 3$.
- 16.1 Represente no plano de Argand as regiões definidas por $|z| = 3$ e por $w = -i + \frac{12}{z}$.
- 16.2 Defina a região do plano definida por $w = -i + \frac{12}{z}$.

Soluções das Fichas de trabalho

FICHA DE TRABALHO 1 Propriedades das operações sobre conjuntos

- 1** a) $\{3, 4, 5\}$ h) $\{1, 3, 4, 5\}$
 b) $\{1, 2, 3, 5\}$ i) $\emptyset$
 c) $\{1, 2, 3\}$ j) $\{1\}$
 d) $\{1, 3, 5\}$ k) $\{1\}$
 e) $\{2\}$ l) $\emptyset$
 f) $\{2\}$ m) $\{1, 3, 5\}$
 g) $\{4, 5\}$
- 2** a) $\{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 b) $\{6, 8, 10\}$
 c) $\{3, 5\}$
 d) $\{3, 7, 9\}$
- 3** a) $]0, 5[$ c) $]0, 1[$ e) $] -\infty, 1[\cap [5, +\infty[$
 b) $] -2, 1[$ d) $[1, 5[$
- 4** $[-1, 6[$
- 5** $(1, 5), (2, 3)$ e $(3, 5)$
- 6** a) 150 b) 200 c) 50 000
- 7** 33
- 8** 130
- 9** a) 31
 b) 42
- 10** A afirmação I é falsa, 12 % das famílias tem carro e *tablet*; A afirmação II é falsa, 33 % das famílias têm carro ou *tablet*; A afirmação III é verdadeira.
- 11** Por exemplo, seja $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ e $C = \{2, 5\}$. Como $A \cap B = \{2\}$ e $A \cap C = \{2\}$, temos $A \cap B = A \cap C$ mas $B \neq C$.
- 12** a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A$
 b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$
- 13** $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$
 $A \cup B = A$, se, e só se, $B \subset A$.
- 14** $(A \cup B) \setminus B = C \setminus B \Leftrightarrow (A \cup B) \cap \bar{B} = C \setminus B \Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) = C \setminus B \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset = C \setminus B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = C \setminus B$
 Como $A = A \cap U = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B}$, então, $A = C \setminus B$.

FICHA DE TRABALHO 2 Cálculo combinatório

- 1** $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. São equipotentes.
- 2** $A = \left\{-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ e $B = \{-1, 1, 2\}$. Não são equipotentes.
- 3** 32 trajetos
- 4** 180
- 5** 1951
- 6** a) 162
b) 225
- 7** a) 2880
b) 144
c) 5
d) 96
e) 110
f) 6840
- 8** a) 720;
b) 1000;
c) 900.
- 9** a) 720
b) 576
c) 720
d) 288
e) 144
f) 144
g) 5040
h) 3600
i) 4896
- 10** a) 2730
b) 2652
a) 2262
- 11** a) 6
b) 302 400
c) 151 200A
d) 29 937 600
e) 831 600
f) 35
- 12** 360
- 13** 185
- 14** 66
- 15** 36
- 16** a) 362 880
b) 14 400
c) 2 880
- 17** a) 24
b) 72
c) 36
- 18** a) 4368
b) 1764
c) 2646
d) 1596

19 102

20 a) 3

b) 11

c) 9

FICHA DE TRABALHO 3 Triângulo de Pascal e binómio de Newton

1 4753

2 24

3 21

4 65 780

5 5.1 231

5.2 4 194 304

5.3 13

6 165 668 499

7 a) 184 756

b) 705 432

8 a) 32 192

b) 32 526

9 2

10 495

11 $\frac{405}{256}$

12 2043

13 14

14 Ordem 7

15 $n = 4$ e $p = 2$.

16 $n = 12$

17 a) $2(x^4 + 6x^3y^2 + y^4)$

b) 136

18 $n = 9$

19 3

20 $k = \pm 2$

21 $a = -\frac{3}{10}$

22 27

23 a) ${}^m C_n \times {}^n C_p = \frac{m!}{(m-n)!n!} \times \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{m!}{(m-n)!(n-p)!p!}$
 ${}^m C_p \times {}^{m-p} C_{n-p} = \frac{m!}{(m-p)!p!} \times \frac{(m-p)!}{(m-n)!(n-p)!} = \frac{m!}{(m-n)!(n-p)!p!}$

b) $2 {}^n C_2 + n^2 = 2 \frac{n!}{(n-2)!2!} + n^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} + n^2 = 2n^2 - n = \frac{2n(2n-1)}{2} =$
 $= \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!2} = {}^{2n} C_2$

c) ${}^n C_p = {}^n C_{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-p)(n-p-1)!p!} = \frac{n}{n-p} {}^{n-1} C_p$

24 ${}^n C_1 + 6 {}^n C_2 + 6 {}^n C_3 = n + 6 \frac{n!}{(n-2)!2!} + 6 \frac{n!}{(n-3)!3!} = n + \frac{6n(n-1)}{2} + \frac{6n(n-1)(n-2)}{6} =$
 $= n + 3n^2 - 3n + (n^2 - n)(n-2) = 3n^2 - 2n + n^3 - 2n^2 - n^2 + 2n = n^3$

25 ${}^{15} C_4 + \sum_{i=1}^5 {}^{20-i} C_3 =$
 $= {}^{15} C_4 + {}^{19} C_3 + {}^{18} C_3 + {}^{17} C_3 + {}^{16} C_3 + {}^{15} C_3 = ({}^{15} C_4 + {}^{15} C_3) + {}^{16} C_3 + {}^{17} C_3 + {}^{18} C_3 + {}^{19} C_3 =$
 $= ({}^{16} C_4 + {}^{16} C_3) + {}^{17} C_3 + {}^{18} C_3 + {}^{19} C_3 = ({}^{17} C_4 + {}^{17} C_3) + {}^{18} C_3 + {}^{19} C_3 =$
 $= ({}^{18} C_4 + {}^{18} C_3) + {}^{19} C_3 = ({}^{19} C_4 + {}^{19} C_3) = {}^{20} C_4$

FICHA DE TRABALHO 4 Definição de probabilidade

- 1** a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$
 b) $\#P(E) = 16$
 c) $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

- 2** 2.1 a) $A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\}$
 b) $B = E \setminus (1, 1) = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$
 c) $C = \{(6, 4)\}$
 d) $D = \emptyset$
 e) $E = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (6, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (6, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (6, 3)\}$
 f) $F = \{(2, 1), (4, 1), (6, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

- 2.2 a) C
 b) A , por exemplo.
 c) Não existe.
 d) D
 e) A e D , por exemplo.
 f) A e F

3 3.1 780

3.2 6

3.3 a) $\frac{1}{130}$

b) $\frac{12}{13}$

4 a) $\frac{10}{21}$

b) $\frac{4}{21}$

c) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{5}{21}$

5 a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{15}$

c) $\frac{2}{15}$

6 a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{12}$

7 7.1 a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{2}{15}$

c) $\frac{2}{15}$

d) $\frac{1}{3}$

7.2 a) $\frac{77}{225}$

b) $\frac{64}{225}$

c) $\frac{1}{15}$

d) $\frac{4}{225}$

7.3 a) $\frac{2}{91}$

b) $\frac{34}{455}$

c) $\frac{24}{91}$

d) $\frac{24}{65}$

e) $\frac{3}{91}$

8 8.1 $\frac{1}{6}$

8.2 $\frac{1}{420}$

9 $\frac{7}{19}$

10 $\frac{3}{5}$

11 11.1 $\frac{52}{105}$

11.2 $\frac{7}{105}$

12 a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

13 $\frac{457}{1001}$

FICHA DE TRABALHO 5 Propriedades da probabilidade, probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e teorema da probabilidade total

1 $1 + P(A \cap B) - P(B) - P(A) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

2 $\frac{31}{30}$

3 $\frac{3}{20}$

4 4.1 $\frac{7}{8}$

4.2 $\frac{1}{8}$

4.3 $\frac{3}{4}$

4.4 a) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

f) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

g) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{1}{10}$

h) $\frac{1}{3}$

4.5 $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$; $P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1$; $P(A|\overline{B}) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$; $P(B|\overline{A}) + P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$

5 $\frac{1}{3}$

6 $\frac{1}{3}$

7 $\frac{2}{3}$

8 $\frac{2}{11}$

9 a) Os acontecimentos são equiprováveis.

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{5}{16}$

10 10.1 $\frac{3}{4}$

10.2 $\frac{11}{21}$

11 $\frac{1}{6}$

10 $y = x - 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

11 Tem-se que $f(5) = \frac{10-3}{5+4} = \frac{7}{9}$ e $f(8) = \frac{16-3}{8+4} = \frac{13}{12}$, ou seja, $f(5) < 1 < f(8)$.

Como a função f é contínua em $[5, 8]$, pois é o quociente de duas funções polinomiais contínuas nesse intervalo, e $f(5) < 1 < f(8)$, pode concluir-se, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que, no intervalo $]5, 8[$, existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 1$, pelo que a reta r interseca o gráfico de f em pelo menos um ponto.

12 $g(-2) = (-2) - 2 - f(-2) = -4 - f(-2)$, como $f(-2) \in [1, 3]$, vem $g(-2) < 0$.
 $g(6) = 6 - 2 - f(3) = 4 - f(3)$, como $f(3) \in [1, 3]$, vem $g(6) > 0$.

Como g é contínua, por ser a diferença de duas funções contínuas, e como $g(-2) < 0$ e $g(6) > 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função g tem pelo menos um zero no intervalo $] -2, 6[$.

13 Como a função f é contínua em $[-3, -1]$, a função g , por ser a diferença entre duas funções contínuas, também é contínua em $[-3, -1]$.

Tem-se que $g(-3) = f(-3) - 2f(-3) = -f(-3) > 0$ e que
 $g(-1) = f(-1) - 2f(-1) = -f(-1) < 0$

Como a função g é contínua em $[-3, -1]$ e como se tem $g(-3) > 0$ e $g(-1) < 0$, pode concluir-se, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que a função g tem pelo menos um zero em $] -3, -1[$.

14 a) A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser a diferença entre duas funções contínuas, logo, é contínua em $[1, 6]$.

$$f(1) = \sqrt{1+10} - \sqrt{1} = \sqrt{11} - 1 > 2 \text{ e } f(6) = \sqrt{6+10} - \sqrt{6} = 4 - \sqrt{6} < 2.$$

Tem-se, então, que $f(6) < 2 < f(1)$ e, pelo o teorema de Bolzano-Cauchy, pode garantir-se que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 6[$.

b) 0

15 15.1 $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq -3 \\ -6 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

15.2 O máximo absoluto de g é -2 e o mínimo absoluto de g é -8 .

FICHA DE TRABALHO 7 Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

1 a) $f'(x) = \frac{1}{2}x - 8$

b) $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

d) $f'(x) = 7$

e) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 15x^2 + 2$

g) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

h) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

i) $f'(x) = \frac{x^2 - 12x + 1}{(x^2 - 1)^2}$

j) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2}x)^2}$

k) $f'(x) = 24x^2(1 + 2x^3)^3$

l) $f'(x) = 9(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 1)^2$

2 a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$

3 3.1 $a = 2, b = -6$

3.2 $y = 6x - 18$ e $y = -4x - \frac{1}{2}$

4 a) $f''(x) = 2$, concavidade voltada para cima.

b) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, concavidade voltada para baixo.

c) $f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3}$, concavidade voltada para cima.

d) $f''(x) = 12x^2$, concavidade voltada para cima.

e) $f''(x) = 12x^2 - 18x$, concavidade voltada para baixo.

f) $f''(x) = 6(x^2 - 4)(5x^2 - 4)$, concavidade voltada para cima.

g) $f''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{3^5} \sqrt{x^4}}$, concavidade voltada para baixo.

5 a) $f''(x) = 2$. Concavidade voltada para cima, não tem pontos de inflexão.

b) $f''(x) = -\frac{8}{x^3}$. Concavidade voltada para cima em $] -\infty, 0[$, concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$, não tem pontos de inflexão.

c) $f''(x) = 6x - 12$. Concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 2[$, concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$, ponto de inflexão em $x = 2$.

d) $f''(x) = \frac{10}{(x-2)^3}$. Concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 2[$, concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$, não tem pontos de inflexão.

e) $f''(x) = 12x^2 - 6$. Concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$, tem 2 pontos de inflexão em $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2 \\ -\frac{\sqrt{x-2}}{4(x-2)^2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Concavidade voltada para baixo

em $]2, +\infty[$, concavidade voltada para cima em $] -\infty, 2[$, não tem pontos de inflexão.

6 6.1 $a = -4, b = -6$

6.2

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	n. d	-
f	U	P.I.	∩		∩

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima no intervalo $] -\infty, 0[$, concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

7 a) Como $f''(2) = -12 < 0$ e $f''(6) = 12 > 0$, pode concluir-se que a função f admite um máximo relativo em $x = 2$ e um mínimo relativo em $x = 6$.

Como $f''(x) = 0$ para $x = 4$, pode concluir-se que o gráfico da função f admite um ponto de inflexão em 4.

x	$-\infty$	2		6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	↗	máx.	↘	mín.	↗

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	∩	P.I.	U

- b) Como $f''(0) = 0$ e $f''(1) = 0$ e como $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$, nada se pode concluir sobre a existência de máximo e mínimo relativo. Como os zeros de f' são 0 e 1, construindo o quadro de sinais de f' e de variação de f , obtém-se:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	—	0	+
f	$\searrow$		$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Portanto, f é decrescente no intervalo $]-\infty, 1]$, crescente no intervalo $[1, +\infty[$, tem um mínimo relativo $f(1) = -2$.

Como os zeros de f'' são 0 e $\frac{2}{3}$, construindo o quadro de sinais de f'' e de sentido das concavidades de f , obtém-se:

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	—	0	+
f	U	P.I.	$\cap$	P.I.	U

Portanto, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $[\frac{2}{3}, +\infty[$, concavidade voltada para baixo em $[0, \frac{2}{3}]$, e tem dois pontos de inflexão em 0 e $\frac{2}{3}$.

- c) Como $f''(0) = -12 < 0$, e $f''(-\sqrt{3}) = f''(\sqrt{3}) = 24 > 0$, pode concluir-se sobre a existência de máximo relativo em $x = 0$ e de mínimos relativos em $x = -\sqrt{3}$ e em $x = \sqrt{3}$. Como os zeros de f' são 0, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, construindo o quadro de sinais de f' e de variação de f , obtém-se:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0	$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	—	0	+
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Portanto, f é decrescente nos intervalos $]-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[0, \sqrt{3}]$, crescente no intervalo $[-\sqrt{3}, 0]$ e $[\sqrt{3}, +\infty[$, tem dois mínimos relativos $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$ e um máximo relativo $f(0) = 9$.

Como os zeros de f'' são -1 e 1 , construindo o quadro de sinais de f'' e de sentido das concavidades de f , obtém-se:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	—	0	+
f	U	P.I.	$\cap$	P.I.	U

Portanto, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$, concavidade voltada para baixo em $[-1, 1]$, e tem dois pontos de inflexão em -1 e 1 .

8 a) Zeros:

Como $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Paridade:

Como para qualquer $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ e $f(-x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$, a função f é par.

Assíntotas:

A função f é contínua por ser racional e tem domínio $\mathbb{R}$. Então, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$, a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$.

Monotonia e extremos:

Pela derivada do quociente, tem-se:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Como o zero de f' é 0 e $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + 1)^2 > 0$, construindo o quadro de sinais de f' e de variação de f , obtém-se:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x$	—	0	—
$(x^2 + 1)^2$	+	+	+
$f'(x)$	—	0	—
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Portanto, f é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, +\infty[$, tem um mínimo relativo $f(0) = -1$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x)' \times (x^2 + 1)^2 - [(x^2 + 1)^2]' \times (4x)}{[(x^2 + 1)^2]^2} = \frac{4 \times (x^2 + 1)^2 - 2 \times (x^2 + 1) \times 2x \times 4x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 + 1) \times [4 \times (x^2 + 1) - 4x \times 4x]}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-12x + 4}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Calculando os zeros de f'' , obtém-se $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Construindo o quadro de sinais da segunda derivada e do sentido das concavidades do gráfico de f .

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$4(1 - 3x^2)$	—	0	+	0	—
$(x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+
$f''(x)$	—	0	+	0	—
f	$\cap$	P.I.	U	P.I.	$\cap$

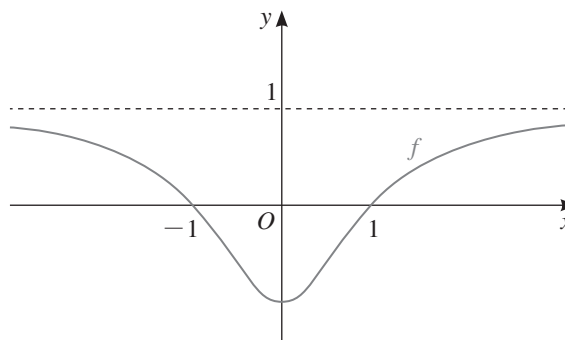
O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo nos intervalos $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$,

concavidade voltada para cima no intervalo $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e tem dois pontos de inflexão

de abscissas $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Conjugando a informação recolhida neste estudo, pode traçar-se a seguinte representação para o gráfico de f :

Pode ainda afirmar-se que -1 é o mínimo absoluto de f e que o seu contradomínio é $[-1, 1]$.



b) Zeros:

Como $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{x-1} \in \mathbb{R}$, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Paridade:

Como para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ e

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x-1} \neq f(x) \text{ e } f(-x) = \sqrt[3]{-x-1} \neq -f(x)$$

a função f não é par nem ímpar.

Assíntotas:

A função f é contínua por ser irracional e tem domínio $\mathbb{R}$. Então, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$ não existem assíntotas horizontais ao gráfico de f .

Tem-se que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^3}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^3}} = 0$$

não existem assíntotas oblíquas ao gráfico de f .

Monotonia e extremos:

Pela derivada da raiz, tem-se: $f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(x-1)'}{(\sqrt[3]{x-1})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{3(x-1)}$.

Como f' não tem zeros, pois não é definida em $x = 1$, é sempre positiva, f é estritamente crescente no seu domínio.

Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-[\sqrt[3]{(x-1)^2}]' \times 1}{[\sqrt[3]{(x-1)^2}]^2} = -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \frac{[\sqrt[3]{(x-1)^2}]' \times (x-1)'}{[\sqrt[3]{(x-1)^2}]^2} = -\frac{2\sqrt[3]{x-1}}{9(x-1)^2}$$

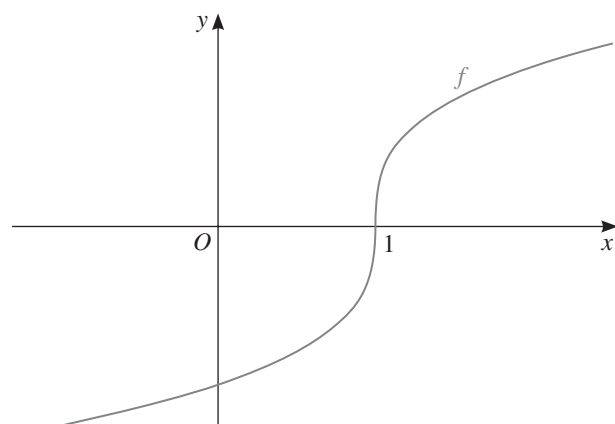
Constata-se que f'' não tem zeros, no entanto, construindo o quadro de sinais da segunda derivada e do sentido das concavidades do gráfico de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2\sqrt[3]{x-1}$	+	0	-
$9(x-1)^2$	+	0	+
$f''(x)$	+	n.d.	-
f	U	P.I.	∩

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 1]$ e concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão de abcissas 1.

Conjugando a informação recolhida neste estudo, pode traçar-se a representação à direita para o gráfico de f :

Pode ainda afirmar-se que f não tem extremos e que o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.



- 9** 9.1 a) $v(3) = 3 \text{ m/s}$
 b) $a(3) = 6 \text{ m/s}^2$
 c) $s(0) = 0, v(0) = 12 \text{ m/s}$ e $a(0) = -12 \text{ m/s}^2$
 d) $v_{[0,5]} = 7 \text{ m/s}$

9.2 Velocidade mínima é 0 em $t = 2$.

- 10** $v = 7 \text{ m/s}$ em $t = 2 \text{ s}; d = 10 \text{ m}$

- 11** 11.1 $v(2) = 21 - 19,6 = 1,4 \text{ m/s}$

11.2 $v\left(\frac{30}{7}\right) = -21 \text{ m/s}$

- 12** Quando o retângulo for um quadrado de lado $\sqrt{2}$.

- 13** $P(2, 1)$ e $d = \sqrt{5}$

- 14** $k \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

- 15** $a = 1, b = -6, c = 12, d = -8$

FICHA DE TRABALHO 8 Fórmulas trigonométricas: seno, cosseno e tangente da diferença e da soma de dois ângulos

1 a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

g) $-2 + \sqrt{3}$

b) $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

e) $2 - \sqrt{3}$

h) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $2 + \sqrt{3}$

f) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 a) $\frac{33}{65}$

b) $-\frac{63}{65}$

c) $\frac{56}{65}$

d) $\frac{16}{65}$

e) $\frac{33}{56}$

f) $-\frac{63}{16}$

3 $\frac{25\sqrt{3} - 8\sqrt{6}}{21}$

4 $\frac{25\sqrt{2} - 54}{28}$

5 -1

6 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

7 a) $\cos(x - y)\cos(x + y) = (\cos x \cos y + \sin x \sin y)(\cos x \cos y - \sin x \sin y) =$
 $= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x) \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y$

b) $\tan(a - b) = \frac{x + 1 - x + 1}{1 + (x + 1) \times (x - 1)} = \frac{2}{1 + x^2 - 1} = \frac{2}{x^2}$

8 0

9 $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

10 $x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$

11 a) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $x = \frac{2\pi}{15} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{15} + 2k\pi$

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

12 a) $\frac{24}{25}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{24}{7}$

d) $\frac{117}{125}$

e) $-\frac{44}{125}$

f) $-\frac{117}{44}$

13 a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

14
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{9}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{9}}}{\cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{9} \right)}{\cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{2 \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{9} \right)}{\cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{4 \sin \left(2 \frac{\pi}{9} \right)}{\sin \left(2 \frac{\pi}{9} \right)} = 4$$

15 $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

16 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

17 $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 + (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1 - (1 - \sin^2 x - \sin^2 x)}{1 + (1 - \sin^2 x - \sin^2 x)} = \frac{2 \sin^2 x}{2(1 - \sin^2 x)} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x$

18 a) $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

b) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

c) $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

d) $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$

19 a) $4 \sin(2x)$

b) $5 \cos(2x)$

c) $6 \cos(2x)$

d) $-2 \cos(2x)$

e) $-\frac{\tan(2x)}{4}$

20 **20.1** $A(x) = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \overline{BD} \times \overline{CD} = 2 \cos x \times 2 \sin x = 2(2 \sin x \cos x) = 2 \sin(2x)$

20.2 $P(x) = 2 + 2 + 2(2 \cos x) = 4 + 4 \cos x = 4(1 + \cos x)$

FICHA DE TRABALHO 9 Limites e derivadas de funções trigonométricas. Gráficos de funções e osciladores harmónicos

- 1** a) $\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\frac{1}{2\pi}$ j) $-\frac{16}{3}$ m) $\frac{\pi}{3}$
 b) $\sqrt{3}$ e) 3 h) $-\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ k) $\sqrt[4]{3}$ n) $-\frac{\pi}{4}$
 c) $-\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3} - 1$ i) $-\infty$ l) $\frac{\pi}{6}$
- 2** a) 4 e) a/b i) -1 m) $\frac{5}{4}$ q) $\frac{\pi}{3}$
 b) 1 f) 1 j) -10 n) 3 r) $-\frac{\pi}{4}$
 c) 9 g) 8 k) $\frac{1}{8}$ o) 4 s) 1
 d) $\frac{3}{4}$ h) 4 l) $\frac{1}{4}$ p) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ t) 3
- 3** $a = -15$
- 4** 4.1 1 4.2 -1 4.3 $\frac{1}{2\pi}$ 4.4 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$
- 6** $a = -1$
- 7** 7.1 $D = \mathbb{R} \quad D' = [-2, 0]$
 7.2 $x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$
 7.3 $x \in \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right\}$
- 8** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$
- 9** a) $f'(x) = 1 + 3\cos x$ k) $f'(x) = \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 \cos^2 x}$
 b) $f'(x) = 2x - 2\sin x$ l) $f'(x) = -12x^2 \sin x^3$
 c) $f'(x) = \sin x + x \cos x$ m) $f'(x) = 15 \sin^2 x \cos x$
 d) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ n) $f'(x) = 3(1 - \cos x)^2 \sin x$
 e) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ o) $f'(x) = 2(x + \sin 2x)(1 + 2\cos 2x)$
 f) $f'(x) = 3x^2 + 2\sin x$ p) $f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}$
 g) $f'(x) = 4 \sin x \cos x$ q) $f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3(x)}$
 h) $f'(x) = 4 \sin x + 2x \cos x$ r) $f'(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
 i) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
 j) $f'(x) = 3 \left(\frac{\sin x \cos x + x}{\cos^2 x} \right)$

10 $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$

11 $\left(\frac{2\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$

12 **12.1** $A = 2, \omega = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{\pi}{12}$

12.2 $T = 12 \text{ s}$ e $f = \frac{1}{12}$

12.3 $x(0) = 1, x(16) = -2, x(23) = \sqrt{3}$ e $x(48) = 1$

12.4 10

12.5 A função x é decrescente para $t \in [0, 4] \cup [10, 16] \cup [22, 28] \cup [34, 40] \cup [46, 52] \cup [58, 60]$ e decrescente nos restantes intervalos do seu domínio. A função x tem máximos em $t \in \{10, 22, 34, 46, 58\}$ e mínimos em $t \in \{4, 16, 28, 40, 52\}$.

13 **13.1** $A = 2, \omega = \pi, T = 2 \text{ s}$ e $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

13.2 $x(t) = 3 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

13.3 C.S. = $\left\{\frac{7}{12}, \frac{23}{12}, \frac{31}{12}, \frac{47}{12}, \frac{55}{12}, \frac{71}{12}, \frac{79}{12}, \frac{95}{12}\right\}$

FICHA DE TRABALHO 10 Juros compostos. Funções exponenciais

1 a) Opção I

2 **2.1** 9 anos e 330 dias

2.2 11,6 %

3 a) $x = -4$

b) $x = -3$

c) $x = -2$

d) $x = 3$

e) $x = 4$

f) $x = 0$

g) $x = -\frac{3}{2}$

h) $x = -6$

i) $x = \frac{2}{5}$

j) $x = -5$

k) $x = 1$

l) $x = \frac{15}{4}$

m) $x = 1 \vee x = -\frac{2}{3}$

n) $x = 2 \vee x = -\frac{3}{5}$

o) $x = 2$

p) $x = -6 \vee x = 2$

4 a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = 0$

d) $x = -1 \vee x = 1$

e) $x = 0 \vee x = 1$

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

g) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi$

5 a) $6x > 36$ $x \in]2, +\infty[$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$ $x \in]6, +\infty[$

c) $(2\sqrt{5})^x < 1$ $x \in]-\infty, 0[$

d) $5^x \leq 0,008$ $x \in]-\infty, -3]$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < 0$ $x \in \emptyset$

f) $e^{3x+6} > -2$ $x \in \mathbb{R}$

g) $3^{-x} - \frac{1}{3} < 0$ $x \in]1, +\infty[$

h) $\frac{e^x - 1}{e^{2x}} < 0$ $x \in]-\infty, 0[$

i) $10^{x^2 - 2x} \leq 1000$ $x \in [-1, 3]$

j) $e^{-\cos 2x} \leq e^{\cos x}$ $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

6 a) $(x, y) = (-1, 2)$

b) $(x, y) = (2, 1)$

7 a) e^2

b) e^{-4}

c) $e^{\frac{3}{2}}$

d) e^{-1}

e) e^{-5}

8 a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{e^3}{3}$

f) e^{-1}

g) $e^{\frac{3}{4}}$

h) $e^{-\frac{3}{2}}$

i) 1

j) $+\infty$

e) $\frac{1}{2}$

f) $-\frac{1}{6}$

g) -1

h) 5

k) 0

l) e^{-2}

m) e^{-1}

i) 1

j) $-\frac{1}{3}$

k) 1

l) 2

9 9.1 a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

9.2 $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

10 a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $(1; e - 2)$

c) $] -\infty, -2[\cup [e - 2, +\infty[$

FICHA DE TRABALHO 11 Operações com logaritmos. Equações e inequações

1 a) 5

b) -2

2 a) 16

b) 27

c) 1000

d) e

e) 3

f) 30

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{\pi}{6}$

h) $\frac{e^3}{4}$

i) 2

j) 3

k) -1

l) 4

e) $\frac{3}{4}$

f) $\frac{17}{3}$

m) $\frac{1}{2}$

n) -2

o) 8

p) 20

q) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

r) 15

3 a) 1000

b) $\frac{8}{125}$

c) 64

d) 100

e) $\frac{1}{25}$

f) $\frac{3}{2}$

g) $\frac{1}{2}$

h) $\sqrt{5}$

i) $\frac{1}{16}$

4 a) $\frac{1}{2}$

b) 2

c) $\frac{1}{10}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\sqrt[3]{5}$

f) 100

g) $\sqrt[6]{2}$

h) $\sqrt[3]{5}$

i) $\frac{1}{343}$

j) $\sqrt[3]{a}$

5 a) $\log_a x^3 + \log_a y = 3 \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a x^2 + \log_a y^3 = 2 \log_a x + 3 \log_a y$

c) $\log_a x + \log_a y - \log_a z$

d) $\frac{1}{3} \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y - \frac{1}{3} \log_a z$

e) $\log_a x + \frac{3}{2} \log_a y$

f) $\frac{2}{3} \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y - 2 \log_a z$

g) $\frac{2}{3} \log_a x + \frac{1}{9} \log_a y - \frac{1}{9} \log_a z$

h) $\frac{1}{6} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a y - \frac{1}{3} \log_a z$

i) $\frac{5}{12} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a y$

6 a) $\log_a \frac{xz}{y^2}$

c) $\log_a \frac{8xz\sqrt{z}}{\sqrt{y}}$

e) $\log_a 8\sqrt[6]{2^5}$

b) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

d) $\log_a 3$

f) $\log_a 12$

7 a) Seja $x = \log_a b \Leftrightarrow b = a^x$ e $y = \log_a c \Leftrightarrow c = a^y$ e então $bc = a^{x+y}$.

Assim: $\log_a bc = x + y = \log_a b + \log_a c$ c.q.d.

b) Seja $x = \log_a b \Leftrightarrow b = a^x$ e $z = \log_a c \Leftrightarrow c = a^z$ e então $b^z = a^{xz} = c$.

Assim: $\log_a c = \log_a a^{xz} = xz = \log_a b \times \log_b c$ c.q.d.

8 a) $c - b$

c) $2a + b$

e) $a + b + 2c$

g) $c - 4a$

b) $a + b - c$

d) $3a + 2b$

f) $-3a$

h) $2a - c$

9 a) $x \in]1, +\infty[$

e) $x \in]-1, +\infty[$

b) $x \in]2, +\infty[$

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $x \in]2, +\infty[$

g) $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

d) $x \in]0, +\infty[$

10 a) $\{2 + \ln 2\}$

b) $\left\{ \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{2} \right\}$

c) $\left\{ \frac{e^{\frac{4}{5}}}{2} \right\}$

d) $\left\{ -1 + \frac{1}{e^3} \right\}$

e) $\{1\}$

f) $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$

g) $\left\{ \frac{1}{2e^2 - 1} \right\}$

h) $\{-2\}$

11 a) $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

b) $(2, 1)$ ou $(1, 2)$

12 a) $x \in]0, \sqrt{2}[$

b) $x \in]0, 1000]$

c) $x \in]0, \sqrt{2}[$

d) $x \in \left]0, \frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right[$

e) $x \in]0, 4[$

f) $x \in [3\sqrt{3}, +\infty[$

g) $x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[$

h) $x \in \left] -1, -\frac{26}{27} \right[$

i) $x \in \left] 2, \frac{21}{10} \right]$

j) $\{ \}$

k) $\{1\}$

l) $\{2, 4\}$

m) $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

n) $\{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}$

o) $\{1, 1 + \sqrt{3}\}$

p) $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$

q) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

j) $x \in \left] -\frac{3}{2}, -\frac{13}{9} \right[$

k) $x \in]e, +\infty[$

l) $x \in]-6, -3[$

m) $x \in]-3, -1[\cup]0, 2[$

n) $x \in \left] \frac{3}{e}, +\infty \right[$

o) $x \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$

p) $x \in \left] 0, \frac{1}{8} \right[\cup [2, 4] \cup]8, +\infty[$

q) $x \in]\ln 2, +\infty[$

r) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

FICHA DE TRABALHO 12 Funções exponenciais e logarítmicas

1 a) $f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3}$

b) $f'(x) = 4e^{4x}$

c) $f'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$

d) $f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{3e^{\frac{2x-1}{x+2}}}{(x+2)^2}$

f) $f'(x) = \frac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$

g) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$

h) $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$

i) $f'(x) = -2 \sin 2x e^{\cos 2x}$

j) $f'(x) = 2^x \ln 2$

k) $f'(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x \ln 4$

l) $f'(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$

m) $f'(x) = \ln x + 1$

n) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

o) $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

p) $f'(x) = \frac{4}{1 - 4x^2}$

q) $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$

r) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$

s) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$

t) $f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{2}{x \ln 2}$

u) $f'(x) = 2^x \left(\ln x + \frac{1}{x \ln 2} \right)$

v) $f'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$

w) $f'(x) = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$

x) $f'(x) = x^2 e^x$

y) $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

z) $f'(x) = \frac{(1 + 2x)e^x}{2\sqrt{x}}$

aa) $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

bb) $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x + 1)^2}$

cc) $f'(x) = \frac{e^x(x \ln x - x - 1)}{x(\ln x - 1)^2}$

dd) $f'(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{(\cos x)^2}$

2 $y = x \ln 2 + 1$

4 $y = 2ex - e$

6 $y = -x + 1 + \frac{\pi}{2}$

3 $y = \frac{1}{\ln 5} (x - 1)$

5 $y = 2x - e$

7 $a = 3$

8 a) $y = 3ex$

b) $y = x + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{1}{3}$

9 $a = -3$ e $b = 2$

10 $a = -2$ e $b = 1$

11 $a = 2, b = 0$ e $c = -1$

12 12.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. O gráfico de f tem uma assíntota horizontal de equação $y = -2$

12.2 $f(x) = e^x(1 + x)$ e, então, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1 + x$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

A função f é estritamente decrescente quando $x \in]-\infty, -1]$, estritamente crescente quando $x \in [-1, +\infty[$ e tem um mínimo absoluto em $x = -1$.

12.3 Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$, então, $f(x) = 0$ não tem solução em $]-\infty, -1]$. Como $f(-1) = -\frac{1}{e} - 2 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e f é estritamente crescente em $[-1, +\infty[$, então, $f(x) = 0$ só pode ter uma única solução em $[-1, +\infty[$. Concluindo, $f(x) = 0$ tem apenas uma solução em $\mathbb{R}$.

12.4 f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre o produto de duas funções contínuas e uma função constante, logo, é contínua em $[0, 1]$. Temos que $f(0) = -2 < 0$ e $f(1) = e - 2 > 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, como $f(0) \times f(1) < 0$, podemos afirmar que f tem pelo menos um zero em $]0, 1[$ e, como vimos no item anterior, esse zero é único.

12.5 $f''(x) = e^x(2 + x)$ e, então, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2 + x$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo quando $x \in]-\infty, -2]$ e concavidade voltada para cima quando $x \in]-2, +\infty]$ e um ponto de inflexão

de coordenadas $\left(-2, -2\left(\frac{1}{e^2} + 1\right)\right)$

13 **13.1** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, o gráfico de f não tem assíntotas.

13.2 $f'(x) = 1 - \ln x$ e temos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$.

x	0	e	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

A função f é estritamente crescente quando $x \in]0, e]$, é estritamente decrescente quando $x \in [e; +\infty[$ e tem um máximo relativo em $x = e$.

13.3 $f(e) = e - 1 > 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, então, como f é estritamente crescente em $]0, e]$, $f(x) = 0$ tem apenas uma solução nesse intervalo. $f(e) = e - 1 > 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, então, como f é estritamente decrescente em $[e; +\infty[$, $f(x) = 0$, tem apenas uma solução nesse intervalo. Concluindo, $f(x) = 0$ tem apenas duas soluções.

13.4 f é uma função contínua em $[0; +\infty[$ por ser a diferença entre funções contínuas nesse intervalo, logo, é contínua em $[5, 7]$. Temos que $f(5) \approx 0,95 > 0$ e $f(7) = -0,62 < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, como $f(5) \times f(7) < 0$, podemos afirmar que f tem pelo menos um zero em $]5, 7[$ e, como vimos no item anterior, esse zero é único nesse intervalo.

13.5 $f''(x) = -\frac{1}{x}$. O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, pois $f''(x) < 0$ em $]0; +\infty[$ e não tem qualquer ponto de inflexão.

14 $a = \sqrt{e}$ e $b = -\frac{1}{2}$

15 $a = e^2$

16 **16.1** 200

16.2 298

16.3 13 h e 52 min

17 2^{96}

18 1938

19 **19.1** 54 g

19.2 1,2 %

FICHA DE TRABALHO 13 Primitivas

1 $F(x) = x^2 + x$; $G(x) = x^2 + x + 1$

2 $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$; $G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - 1$

3 $F(x) = \sqrt{2x}$; $G(x) = \sqrt{2x} + 3$

4 a) $x + c$

b) $-x^2 + c$

c) $\frac{x^2}{8} + 0,2x + c$

d) $\frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + c$

e) $\frac{x^3}{3} - x + c$

f) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$

g) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$

h) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$

i) $\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$

j) $x^3 - 4x^2 + 10x + c$

k) $2x^{\frac{3}{2}} + c$

l) $-\frac{x^{-2}}{2} + c$

m) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \ln|x| + c$

n) $\frac{e^{3x}}{3} + c$

o) $\frac{x^4 - 5x^2}{2} + c$

p) $2x^3 + 2x^2 - x + c$

5 a) $F(x) = 7x - 8$

b) $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}$

d) $F(x) = e^x - e - 1$

e) $F(x) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi} + 1\right)$

f) $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + 1\right)$

g) $F(x) = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} + 1$

q) $e^{2x} - \frac{x^2}{2} + c$

r) $x + \sin x + c$

s) $3e^{\sin x} + c$

t) $-2\cos x + c$

u) $-2\ln|x| + c$

v) $3e^{2x} + 3\sin x + c$

w) $\frac{\ln x}{4} + c$

x) $-\frac{1}{x} + c$

y) $\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + c$

z) $\frac{x^2}{2} - 5\ln x + c$

aa) $\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{2}x^2}{2} - 4x + c$

bb) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$

cc) $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + c$

dd) $\frac{2^x}{\ln 2} - e^x + c$

ee) $-\frac{e^{1-5x}}{5} + c$

6 $F(x) = x^2 + 1$

7 $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{2}{3}$

8 $a = 2; b = 2$

9 $a = 2; b = -1$

10 $a = 2; b = -4; c = 4$

11 **11.1** $F'(x) = 1 + \frac{3}{x^2}$.

Como $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2} = F'(x)$, logo, F é uma primitiva de f .

11.2 $G(x) = x - \frac{3}{x} - 1$

12 **a)** $\sin(3x) + c$

b) $-\frac{\cos(4x)}{2} + c$

c) $2e^{2x} + c$

d) $\frac{e^{3x}}{3} + 3 \ln|x| + c$

e) $\frac{8}{9}(3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^6}{2} + c$

f) $-2 \cos^3 x + c$

g) $\frac{3 \ln|x^2 - 1|}{2} + c$

h) $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$

i) $\frac{(x^3 + 2)^6}{3} + c$

j) $-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + c$

13 $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$

14 **14.1** $F(x) = -x^2 + x + 2$

14.2 $C = -\frac{9}{4}$

15 $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 4\sqrt{3}$

16 $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x + 1$

FICHA DE TRABALHO 14 Cálculo integral

1 a) 6
b) 12
c) 18
d) $\frac{125}{6}$

e) 4
f) $\frac{16}{3}$
g) 1
h) $\frac{e-1}{2}$

i) 1
j) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
k) $\ln\sqrt{5}$

2 a) -5
b) -4
c) -4
d) $-\frac{20}{3}$

e) $\frac{e^2-1}{e} - 6$
f) $-\frac{14}{3} + 2\sqrt{3}$
g) 0
h) $\frac{1}{2}$

i) -2
j) $\ln 2$
k) $-2\ln 2$
l) $\ln 2 - 24$

3 $A = \ln 3\sqrt{3}$

4 $A = 9$

5 $A = 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

6 $A = 1 + \frac{3\pi}{2}$

7 $A=4$

8 a) $F'(x) = x^2$
b) $F'(x) = 8x^2 + 2$
c) $F'(x) = 2x^5 + 2x^3$
d) $F'(x) = 3x^5 - 6x^2$
e) $F'(x) = 2\cos(2x) - 4x$

f) $F'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g) $F'(x) = \frac{e^x + x}{2}$

h) $F'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

9 a) $F'(x) = 16x$
b) $F'(x) = 2x - 1$
c) $F'(x) = 2\sin 2x - \sin x$
d) $F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}(3x^3 - 1)$

10 $\frac{1}{2}$

11 a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\ln\frac{x}{2} - 2$ com $x \in]0, +\infty[$

b) $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{4}{3}$ com $x \in \mathbb{R}$

12 24 m

13 P está afastado 8 m da origem no sentido negativo.

14 $\frac{9}{4}$

15 $\frac{1}{4}$

16 $\frac{125}{24}$

FICHA DE TRABALHO 15 Números complexos. Representação geométrica

1 1.1 $x = 4$

1.2 $x^3 - 12x - 16 = (x - 4)(x + 2)^2$

2 2.1 $x = 3$

2.2 $x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$

3 3.1 $x = 2$

3.2 $x^3 - 6x + 4 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

4 4.1 $x = -4$

4.2 $x^3 - 18x - 8 = (x + 4)(x - 2 - \sqrt{6})(x - 2 + \sqrt{6})$

5 a) $(5, 0)$ c) $(0, 5)$ e) $(0, 1)$ g) $(-8\sqrt{2}, -2)$

b) $(7, -1)$ d) $(-7, 1)$ f) $(0, 4)$

6 a) $Re(z) = 3, Im(z) = 2$

e) $Re(z) = 2, Im(z) = 1$

b) $Re(z) = 1, Im(z) = -1$

f) $Re(z) = -\ln 2, Im(z) = \sqrt{2}$

c) $Re(z) = 4, Im(z) = 0$

g) $Re(z) = 0, Im(z) = 2$

d) $Re(z) = -\frac{1}{4}, Im(z) = \frac{1}{2}$

h) $Re(z) = 0, Im(z) = 0$

7 a) $x = 3 \wedge y = -4$

d) $x = -\sqrt{2} \wedge y = -\sqrt{2}$

b) $x = \sqrt{2} \wedge y = -\sqrt{2}$

e) $x = \frac{1}{2} \wedge y = 4\pi$

c) $x = \sqrt{3} \wedge y = -4\sqrt{2}$

f) $x = 4\sqrt{2} \wedge y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8 a) $2 - 2i$

e) 3

i) $-2i$

b) $5 + i$

f) $5 + \sqrt{3}i$

j) $4 + 2i$

c) $5 - 5i$

g) $1 - 2i$

k) $-3 + 5i$

d) $10 - 20i$

h) $-\frac{1}{4} + 2i$

l) $-6 - 4i$

m) $-2 + 2i$

9 a) $a = 4$

c) $a = -1$

e) $a = e$

b) $a = -\frac{1}{3}$

d) $a = -2$ ou $a = +2$

f) $a = 100$

10 a) $(1, -6)$

c) $(-1, -1)$

e) $(0, 4)$

b) $(0, 1)$

d) $(3, -6)$

f) $(-1, 0)$

11 a) $z_0 = 1 + 4i$

d) $z_0 = 4 - 2i$

g) $z_0 = 4 - 2i$

b) $z_0 = -2 - i$

e) $z_0 = -5i$

h) $z_0 = 2$

c) $z_0 = -1 + 3i$

f) $z_0 = -1 - i$

12 12.1 $P = 12,2$

12.2 $A = 7$

12.3 $a = 2$

FICHA DE TRABALHO 16 Números complexos. Operações na forma algébrica

1 a) -9

b) -2

c) $5 - 5i$

d) $-4 - 3i$

2 a) $-i$

b) 1

c) i

d) -1

e) 1

3 a) $28 + 24i$

b) $36 + 78i$

4 a) $-8i$

b) $-3\sqrt{3}i$

c) $-2 - 2i$

5 a) $a = 2$

b) $a = \frac{3}{2}$

e) $-7 - i$

f) $14 + 2i$

g) $-3 - 4i$

h) $1 - 2\sqrt{2}i$

f) -1

g) 1

h) 1

i) 1

j) 1

c) $7 - 3i$

d) $-17 - 5i$

d) $-9 - 46i$

e) $-2 + 11i$

f) i

c) $a = 0 \vee a = \frac{1}{3}$

d) $a \neq 0$

i) $-4 + 8\sqrt{2}i$

j) $-i$

k) $-\frac{1}{4} + \sqrt{3}i$

l) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

k) i

l) -1

m) $-i$

n) $-i$

o) -1

g) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

h) -1

6 $z = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ou $z = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

7 a) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

b) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

c) $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

8 a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$

9 a) $|z| = \sqrt{5}$

b) $|w| = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10 a) $f(1) = -1 + i$

b) $f(1 + i) = i + 2$

c) $f\left(\frac{1}{2-i}\right) = \frac{12}{25} + \frac{66}{25}i$

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

e) $-\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$

f) $-\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

c) $1 + i$

d) $\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$

c) $|s| = 1$

d) $|t| = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$

g) $-1 - i$

h) $-3 + 2i$

i) $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

e) $12 - \frac{13}{2}i$

f) $-14 - 3i$

- 11** a) C.S. = $\{-3i; 3i\}$
 b) C.S. = $\{-2i; 0; 2i\}$
 c) C.S. = $\{-1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$
 d) C.S. = $\{3 + i\}$
 e) C.S. = $\left\{-\frac{12}{17} + \frac{3}{17}i\right\}$
 f) C.S. = $\{1 + 2i\}$
 g) C.S. = $\{3 - i\}$
 h) C.S. = $\{-4 + i; 4 - i\}$
 i) C.S. = $\{3 + 4i\}$
 j) C.S. = $\{1 - \sqrt{3}i\}$
 k) C.S. = $\{2 + i; -2 + i\}$
 l) C.S. = $\left\{\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i; -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i\right\}$

12 $k \in \{-\sqrt{3}i; 0; \sqrt{3}i\}$

13 **13.1** $b = ar, c = br = ar^2$ então $b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$ e vem $z = \frac{-\sqrt{ac} \pm \sqrt{3ac}}{2a}$ c.q.d.

13.2 a) C.S. = $\{-1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$

b) C.S. = $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$

c) C.S. = $\left\{\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i; \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right\}$

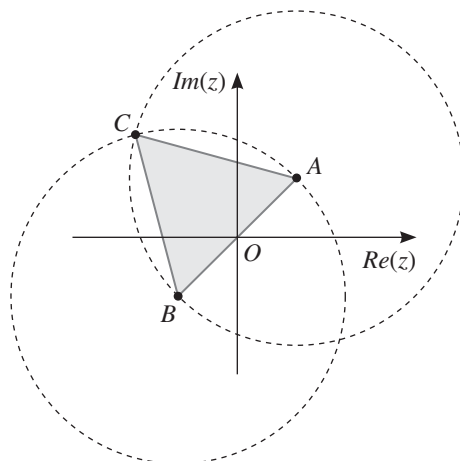
14 **14.1** $z = a + bi$

$$|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow -4a = 4b \Leftrightarrow b = -a,$$

Logo, $z = a - ai$ c.q.d

14.2 **14.2.1** $z_3 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

14.2.2



14.2.3 $A = 2\sqrt{3}$ unidades quadradas

FICHA DE TRABALHO 17 Números complexos: Forma trigonométrica. Raízes índice n . Conjuntos de pontos

1 a) $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

b) $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

c) $|z_3| = \sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{289} + \frac{64}{289}} = 1$

d) $|z_4| = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{2}}{19}\right)^2 + \left(\frac{17}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{72}{361} + \frac{289}{361}} = 1$

e) $|z_5| = \sqrt{\left(-\frac{12}{139}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}} = 1$

f) $|z_6| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{33}}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{88}{121} + \frac{33}{121}} = 1$

2 2.1 $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ e $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

2.2 a) $\frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{13\pi}{12}$

d) $-\frac{13\pi}{12}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

f) $\frac{13\pi}{12}$

g) $\frac{7\pi}{12}$

h) $\frac{13\pi}{12}$

3 a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $1 - i$

e) $2\sqrt{3} - 2i$

f) $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

g) $-\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}i$

h) $-8i$

i) $-5\sqrt{3} + 5i$

j) $-\sqrt{3} - i$

k) $2\sqrt{3} + 2i$

l) $2 + 2i$

4 a) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $5e^{i\pi}$

c) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

e) $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

f) $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

g) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

h) $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

i) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

j) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

k) $6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

l) $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$

m) $12e^{i\frac{\pi}{6}}$

n) $5e^{i0,927}$

o) $\sqrt{5}e^{-i1,107}$

p) $5\sqrt{5}e^{i2,678}$

q) $\sqrt{10}e^{-i2,820}$

5 a) $e^{-i\frac{\pi}{12}}$

e) $\frac{1}{8}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

h) $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

f) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

i) $4e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

g) $\frac{1}{16}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

j) $8e^{-i\frac{\pi}{12}}$

d) $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

6 a) $\sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i\right)$

b) $2\sqrt{7}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14} + \frac{3\sqrt{21}}{14}i\right)$

c) $\sqrt{17}\left(\frac{3\sqrt{17}}{17} - \frac{2\sqrt{34}}{17}i\right)$

d) $2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

7 a) $z_0 = 3e^{i\frac{5\pi}{12}}; z_1 = 3e^{i\frac{17\pi}{12}}$

b) $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

c) $z_0 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}; z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

d) $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}; z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

e) $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{12}}; z_1 = 5e^{i\frac{13\pi}{12}}$

f) $z_0 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}; z_1 = 5e^{i\frac{6\pi}{5}}$

8 a) $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i$

b) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -3; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $\sqrt{6} + \sqrt{2}i; -\sqrt{2} + \sqrt{6}i; -\sqrt{6} - \sqrt{2}i; \sqrt{2} - \sqrt{6}i$

9 a) $z_0 = e^{-i\frac{\pi}{8}}; z_1 = e^{i\frac{3\pi}{8}}; z_3 = e^{i\frac{7\pi}{8}}; z_4 = e^{i\frac{11\pi}{8}}$

b) $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{\pi}{18}}; z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{11\pi}{18}}; z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{23\pi}{18}}$

c) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}; z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

d) $z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}}; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}; z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

e) $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}; z_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}; z_3 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

10 10.1 $n = 1 \Rightarrow z = 1$

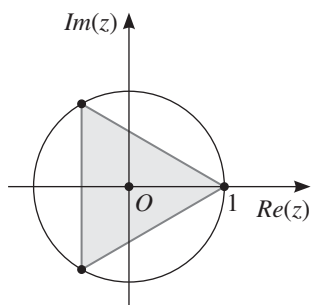
$n = 2 \Rightarrow z = 1 \vee z = -1$

$n = 3 \Rightarrow z = 1 \vee z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

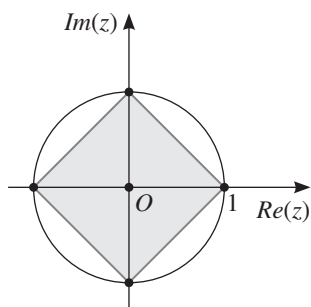
$n = 4 \Rightarrow z = 1 \vee z = i \vee z = -1 \vee z = -i$

$n = 6 \Rightarrow z = 1 \vee z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -1 \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee$

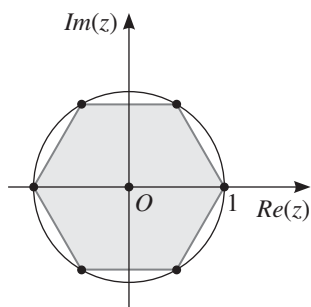
$\vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10.2 $n = 3; P = 3\sqrt{3}$ 

$$n = 4; P = 4\sqrt{2}$$



$$n = 6; P = 6$$



$$\begin{aligned} \text{11.1} \quad w &= \frac{3 + 6i + 2 - 3i}{1 - 2i + 2 - 3i} = \frac{5 + 3i}{3 - 5i} = \frac{5 + 3i}{3 - 5i} \times \frac{3 + 5i}{3 + 5i} = \\ &= \frac{15 + 25i + 9i - 15}{9 + 25} = \frac{34i}{34} = i. \end{aligned}$$

$$\text{Então: } w = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

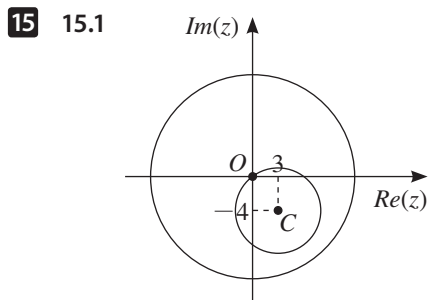
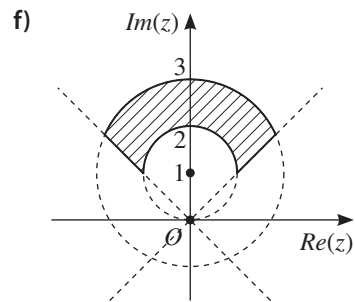
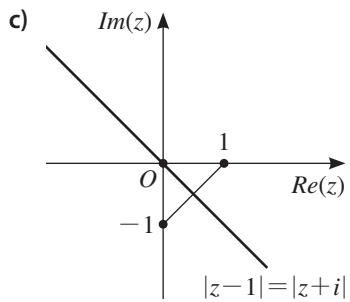
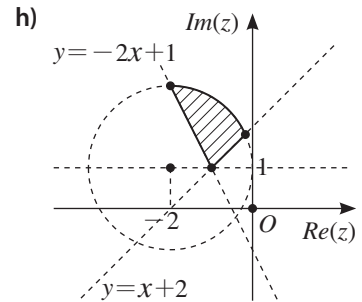
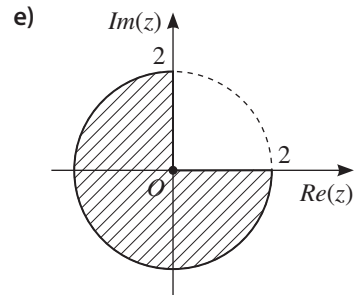
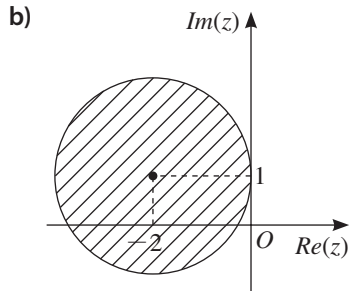
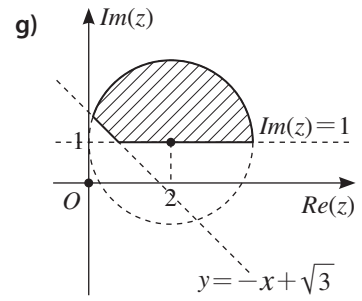
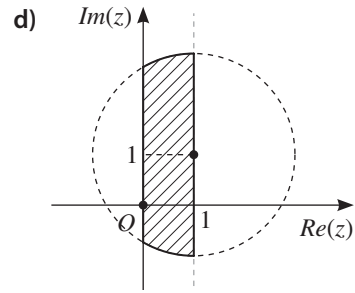
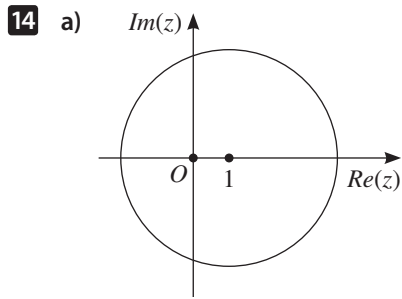
11.2 Sejam $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ os vetores definidos pelos afixos de z_1 , z_2 e z_3 .

Como $\text{Arg}(w) = \text{Arg}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$, então, o retângulo é retângulo em A e, como

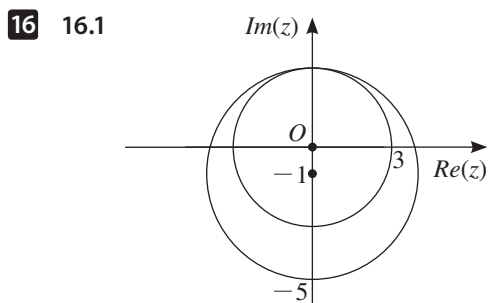
$|w| = \left| \frac{\vec{AC}}{\vec{AB}} \right| = 1$, então, conclui-se que o triângulo é retângulo em A e isósceles.

$$\text{12} \quad |z| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \wedge \text{Arg}(z) = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{13} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



15.2 $\min |z - w| = 2$



16.2 Circunferência, com centro no afixo de $-i$ e com raio 4.