

09.

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO**
**CADERNO DE EXERCÍCIOS
E TESTES**

Materiais disponíveis em formato fotocopiável em

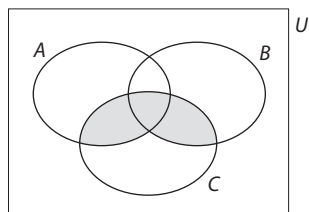
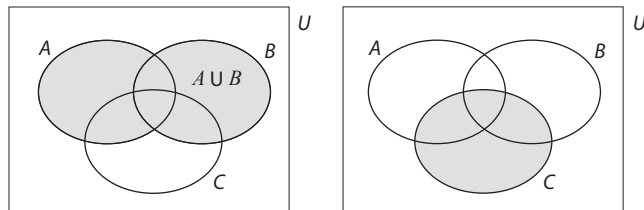
20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Tema I - Cálculo Combinatório

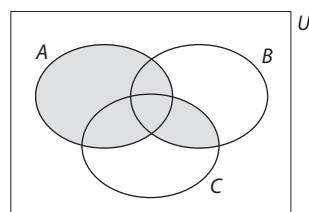
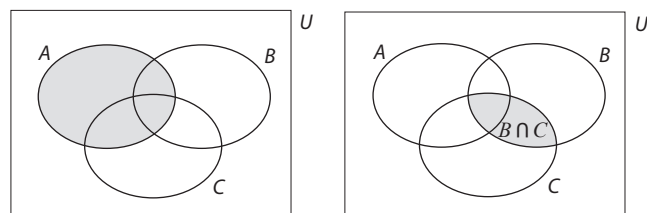
Páginas 9 a 15

1.

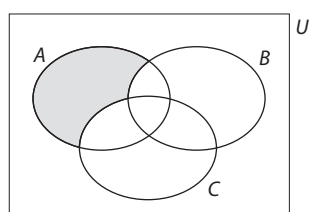
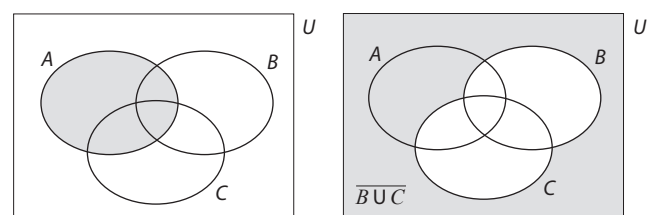
1.1. $(A \cup B) \cap C$



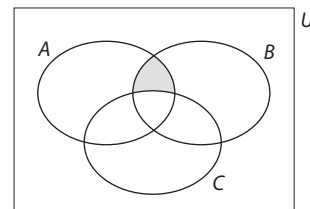
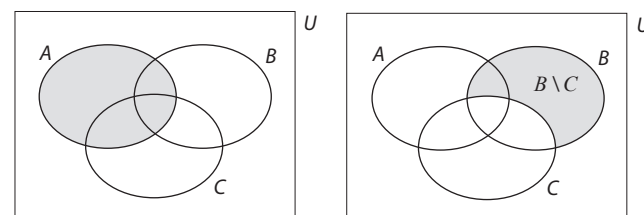
1.2. $A \cup (B \cap C)$



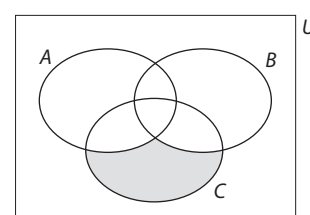
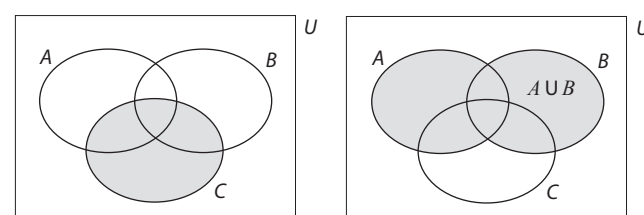
1.3. $A \cap (\overline{B \cup C})$



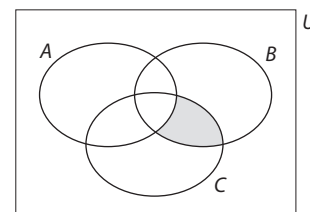
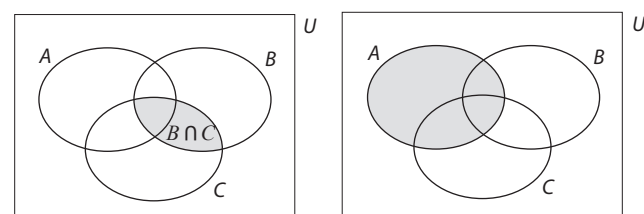
1.4. $A \cap (B \setminus C)$



1.5. $C \setminus (A \cup B)$



1.6. $(B \cap C) \setminus A$



2.

$$\begin{aligned} 2.1. A \cap (\overline{A \cap B}) &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \\ &= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = \\ &= A \cap \overline{B} = \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) &= \\ &= [A \cap (B \cup \overline{B})] \cup (\overline{A} \cap B) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap U) \cup (\bar{A} \cap B) = \\
&= A \cup (\bar{A} \cap B) = \\
&= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = \\
&= U \cap (A \cup B) = \\
&= A \cup B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2.3. } &\overline{(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})} = \\
&= (A \cup B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} = \\
&= (A \cup B) \cup (\bar{A} \cap B) = \\
&= B \cup [A \cup (\bar{A} \cap B)] = \\
&= B \cup [(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)] = \\
&= B \cup [U \cap (A \cup B)] = \\
&= B \cup (A \cup B) = \\
&= A \cup B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2.4. } &\overline{(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)} = \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup \overline{(\bar{A} \cup B)} = \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B}) = \\
&= A \cap (B \cup \bar{B}) = \\
&= A \cap U = \\
&= A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2.5. } &(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \\
&= [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup B] = \\
&= (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = \\
&= U \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) \cap U = \\
&= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) = \\
&= \overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B) = \\
&= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})
\end{aligned}$$

$$\text{3. } A = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{2x+3}{5} + 2 > 2x-1 \right\} =]-\infty, 1[$$

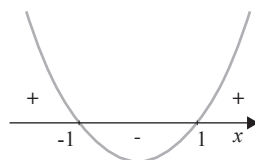
Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
-\frac{2x+3}{5} + 2 > 2x-1 &\Leftrightarrow -2x-3+10 > 10x-5 \\
&\Leftrightarrow -12x > -12 \\
&\Leftrightarrow x < 1
\end{aligned}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 2\} = [-1, 1]$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 \leq 2 &\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \leq 0
\end{aligned}$$



$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\} =]1, 3]$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+1-2x+2}{x-1} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \geq 0$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$-x+3$	+	+	+	0	-
$x-1$	-	0	+	+	+
$\frac{-x+3}{x-1}$	-	n.d.	+	0	-

3.

$$\text{3.1. } A \cup B =]-\infty, 1[\cup [-1, 1] =]-\infty, 1]$$

$$\text{3.2. } B \cup C = [-1, 1] \cup]1, 3] = [-1, 3]$$

$$\text{3.3. } A \cap C =]-\infty, 1[\cap]1, 3] = \emptyset$$

$$\text{3.4. } \bar{A} = [1, +\infty[$$

$$\text{3.5. } \bar{C} =]-\infty, 1] \cup]3, +\infty[$$

$$\text{3.6. } A \cup B \cup C =]-\infty, 1[\cup [-1, 1] \cup]1, 3] =]-\infty, 3]$$

$$\text{3.7. } A \cap \bar{B} =]-\infty, 1[\cap (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) =]-\infty, -1[$$

$$\begin{aligned}
\text{3.8. } \bar{B} \cap \bar{C} &= (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, 1] \cup]3, +\infty[) = \\
&=]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[
\end{aligned}$$

$$\text{3.9. } A \setminus \bar{B} = A \cap B =]-\infty, 1[\cap [-1, 1] = [-1, 1[$$

$$\begin{aligned}
\text{3.10. } \overline{B \cap C} &= \overline{B} \cup \overline{C} = \\
&= (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \cup (]-\infty, 1] \cup]3, +\infty[) = \\
&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

4.

4.1. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Então, $(A \cup B) \setminus A = \{4\} \neq B$.

4.2. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$.

$B \setminus A = \{4\}$

Então, $B \setminus (B \setminus A) = \{2\} \neq A$.

4.3. A afirmação é verdadeira.

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} = \\
&= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = \\
&= A \setminus B \cup A \setminus C
\end{aligned}$$

4.4. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5\}$.

$B \setminus C = \{2, 4\}$

Logo, $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 3\}$.

$A \setminus B = \{1, 3\}$

Então, $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \neq A \setminus (B \setminus C)$.

4.5. A afirmação é verdadeira.

Sejam $A \subset B$ e $C \subset D$.

$A \times C = \{(x, y): x \in A \wedge y \in C\}$

Seja (a, b) um elemento qualquer de $A \times C$.

Como $a \in A$ e $A \subset B$, então $a \in B$.

Como $b \in C$ e $C \subset D$, então $b \in D$.

Então, (a, b) é um elemento de $B \times D$.

Logo, $A \times C \subset B \times D$.

5.

$$5.1. \frac{6!}{3 \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{3 \times 4!} = \frac{6 \times 5}{3} = 10$$

$$5.2. \frac{8!}{4! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 5 = 280$$

$$5.3. \frac{9!}{5! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times (1 \times 6)} = 9 \times 8 \times 6 = 432$$

$$5.4. {}^7C_4 \times 3! = \frac{7!}{4! \times 3!} \times 3! = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$5.5. {}^5A_2 \times 3! = \frac{5!}{3!} \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

$$5.6. {}^6C_4 \times {}^4A_2 = \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 180$$

$$5.7. \frac{{}^5A_3}{4!} = \frac{\frac{5!}{2!}}{4!} = \frac{5!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{5}{2}$$

$$5.8. \frac{{}^5C_3}{4!} = \frac{\frac{5!}{3! \times 2!}}{4!} = \frac{5!}{3! \times 2! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{6 \times 2 \times 4!} = \frac{5}{12}$$

6.

$$6.1. 16 \times 12 = 192$$

$$6.2. 16 \times 15 + 12 \times 11 = 372$$

$$6.3. 1 \times 27 \times 2 = 54$$

7.

$$7.1. 7! = 5040$$

$$7.2. 3! \times 4! \times 5 = 720$$

$$7.3. 2 \times 3! \times 4! = 288$$

$$7.4. 3! \times 4! = 144$$

8.

$$8.1. 9 \times 20 \times 8 = 1440$$

$$8.2. 9 \times 20 \times 8 \times 3! = 8640$$

$$8.3. {}^{37}A_3 = 46\,620 \text{ ou } {}^{37}C_3 \times 3! = 46\,620$$

9.

$$9.1. {}^{37}C_5 = 435\,897$$

$$9.2. {}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_1 = 69\,300$$

$$9.3. {}^{15}C_3 \times {}^{22}C_2 = 105\,105$$

$$9.4. {}^{25}C_5 + {}^{25}C_4 \times {}^{12}C_1 + {}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2 = 356\,730$$

10.

$$10.1. \frac{(n+2)! + (n+1)!}{n!} = 120 \quad (n! \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)n! + (n+1)n!}{n!} = 120$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n+1) + n+1 - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + n + 2 + n + 1 - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 117 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 117}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 9 \vee n = -13$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 9$.

$$10.2. {}^nA_2 = 342$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 342 \quad ((n-2)! \neq 0, \forall n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 342$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - 342 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 342 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 342}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 19 \vee n = -18$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 19$.

$$10.3. {}^{n-1}A_3 = 3^{n-2}A_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 3 \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \quad ((n-4)! \neq 0, \forall n \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)! = 3(n-2)!$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2)! = 3(n-2)!$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 3((n-2)! \neq 0, \forall n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow n = 4$$

$$10.4. {}^nC_2 = 136$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 136 \quad ((n-2)! \neq 0, \forall n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 136$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 2 \times 136$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 272}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -16$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 17$.

$$10.5. {}^{n-1}C_3 = 3^{n-2}C_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = 3 \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \quad ((n-4)! \neq 0, \forall n \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)!}{3!} = 3 \frac{(n-2)!}{2!}$$

$$\Leftrightarrow n-1 = \frac{3 \times 3!}{2!}$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 9$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

$$10.6. {}^nC_2 + {}^nA_2 = 360$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 360 \quad ((n-2)! \neq 0, \forall n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 360$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = 360$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n^2 - 2n - 720 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 3n - 720 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 240 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 240}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 16 \vee n = -15$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 16$.

11.

$$11.1. 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Logo, o número de divisores naturais de 2310 é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

$$11.2. 2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

Logo, o número de divisores naturais de 2700 é $3 \times 4 \times 3 = 36$.

12.

$$12.1. 7 \times 8 \times 7 \times 6 = 2352$$

$$12.2. 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$$

$$12.3. 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 336$$

$$12.4. \text{Números inferiores a 5000: } 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$$

$$\text{Números entre 5000 e 5800: } 1 \times 6 \times 7 \times 6 = 252$$

$$\text{Números entre 5800 e 5840: } 1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$$

$$\text{Assim, } 1344 + 252 + 18 = 1614.$$

13.

$$13.1. 5 \times 4! = 120$$

$$13.2. 3! \times 4! = 144$$

$$13.3. 2 \times 3! \times 3! = 72$$

$$13.4. 4! = 24$$

$$13.5. 2 \times 5! - 4! = 216$$

14.

$$14.1. \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1}_{0 \text{ é o último algarismo}} + \underbrace{8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4}_{\substack{\text{o último algarismo é 2} \\ \text{ou 4 ou 6 ou 8}}} = 13\,776$$

$$14.2. \underbrace{8 \times 7 \times 6}_{\substack{\text{entre 89 000} \\ \text{e 89 999}}} + \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6}_{\substack{\text{entre 90 000} \\ \text{e 99 999}}} = 3360$$

15.

$$15.1. 2! \times (n-1)!$$

$$15.2. n! - 2! \times (n-1)! = (n-2)(n-1)!$$

$$15.3. 3!(n-2)!$$

$$15.4. 3! \times 2! \times (n-3)!$$

16.

$$16.1. \frac{2 \times 4!4!}{8} = 144$$

$$16.2. 2^4 \times \frac{4!}{4} = 96$$

$$16.3. 2 \times \frac{4!}{4} = 12$$

17.

$$17.1. {}^8C_5 = 56$$

$$17.2. {}^3C_2 \times {}^5C_3 = 30$$

$$17.3. {}^8C_5 - {}^3C_2 \times {}^5C_3 = 56 - 30 = 26$$

$$17.4. {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 18$$

$$17.5. {}^8C_5 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 56 - 18 = 38$$

$$17.6. {}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 30 + 30 - 18 = 42$$

$$17.7. {}^8C_5 - ({}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2) = 56 - 42 = 14$$

$$18. 1 + n = 33 \Leftrightarrow n = 32$$

$$18.1. {}^{32}C_3 = 4960$$

$$18.2. {}^{32}C_{16} = 601\,080\,390$$

$$18.3. {}^{33}C_4 + {}^{33}C_5 = 278\,256$$

$$18.4. 2^{31} = 2\,147\,483\,648$$

18.5. 17 elementos.

19.

$$\begin{aligned} 19.1. (2 + 3x)^5 &= \\ &= {}^5C_0 2^5(3x)^0 + {}^5C_1 2^4(3x)^1 + {}^5C_2 2^3(3x)^2 + \\ &\quad + {}^5C_3 2^2(3x)^3 + {}^5C_4 2^1(3x)^4 + {}^5C_5 2^0(3x)^5 = \\ &= 32 + 5 \times 16 \times 3x + 10 \times 8 \times 9x^2 + 10 \times 4 \times \\ &\quad \times 27x^3 + 5 \times 2 \times 81x^4 + 243x^5 = \\ &= 32 + 240x + 720x^2 + 1080x^3 + 810x^4 + 243x^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.2. (2-x)^6 &= \\
 &= {}^6C_0 2^6(-x)^0 + {}^6C_1 2^5(-x)^1 + {}^6C_2 2^4(-x)^2 + \\
 &\quad + {}^6C_3 2^3(-x)^3 + {}^6C_4 2^2(-x)^4 + {}^6C_5 2^1(-x)^5 + \\
 &\quad + {}^6C_6 2^0(-x)^6 = \\
 &= 64 + 6 \times 32 \times (-x) + 15 \times 16 \times x^2 + 20 \times 8 \times \\
 &\quad \times (-x^3) + 15 \times 4 \times x^4 + 6 \times 2 \times (-x^5) + x^6 = \\
 &= 64 - 192x + 240x^2 - 160x^3 + 60x^4 - 12x^5 + x^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.3. (2y+x)^4 &= \\
 &= {}^4C_0 (2y)^4 x^0 + {}^4C_1 (2y)^3 x^1 + {}^4C_2 (2y)^2 x^2 + \\
 &\quad + {}^4C_3 (2y)^1 x^3 + {}^4C_4 (2y)^0 x^4 = \\
 &= 16y^4 + 4 \times 8y^3x + 6 \times 4y^2x^2 + 4 \times 2yx^3 + x^4 = \\
 &= 16y^4 + 32xy^3 + 24x^2y^2 + 8x^3y + x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.4. \left(2 + \frac{2}{x}\right)^5 &= \\
 &= {}^5C_0 2^5 \left(\frac{2}{x}\right)^0 + {}^5C_1 2^4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 + {}^5C_2 2^3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \\
 &\quad + {}^5C_3 2^2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^5C_4 2^1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 + {}^5C_5 2^0 \left(\frac{2}{x}\right)^5 = \\
 &= 32 + 5 \times 16 \times \frac{2}{x} + 10 \times 8 \times \frac{4}{x^2} + 10 \times 4 \times \frac{8}{x^3} + \\
 &\quad + 5 \times 2 \times \frac{16}{x^4} + \frac{32}{x^5} = \\
 &= 32 + \frac{160}{x} + \frac{320}{x^2} + \frac{320}{x^3} + \frac{160}{x^4} + \frac{32}{x^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.5. \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= \\
 &= {}^6C_0 x^6 \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + {}^6C_1 x^5 \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + {}^6C_2 x^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \\
 &\quad + {}^6C_3 x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6C_4 x^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5 x^1 \left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \\
 &\quad + {}^6C_6 x^0 \left(-\frac{1}{x}\right)^6 = \\
 &= x^6 + 6 \times x^5 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + 15 \times x^4 \times \frac{1}{x^2} + 20 \times x^3 \times \\
 &\quad \times \left(-\frac{1}{x^3}\right) + 15 \times x^2 \times \frac{1}{x^4} + 6 \times x \times \left(-\frac{1}{x^5}\right) + \frac{1}{x^6} = \\
 &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}
 \end{aligned}$$

$$20. 2^{13} = 8192 \quad {}^{14}C_7 = 3432$$

21.

$$\begin{aligned}
 21.1. {}^{2017}C_{998} + {}^{2017}C_{999} + {}^{2018}C_{1000} &= \\
 &= {}^{2018}C_{999} + {}^{2018}C_{1000} = \\
 &= {}^{2019}C_{1000}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21.2. {}^{2021}C_{890} - {}^{2020}C_{889} + {}^{2020}C_{891} &= \\
 &= {}^{2020}C_{889} + {}^{2020}C_{890} - {}^{2020}C_{889} + {}^{2020}C_{891} = \\
 &= {}^{2020}C_{890} + {}^{2020}C_{891} = \\
 &= {}^{2021}C_{891}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21.3. {}^{2019}C_{1000} + 3 \times {}^{2019}C_{1001} + 3 \times {}^{2019}C_{1002} + \\
 + {}^{2019}C_{1003} &= \\
 &= {}^{2019}C_{1000} + {}^{2019}C_{1001} + {}^{2019}C_{1001} + {}^{2019}C_{1001} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ {}^{2019}C_{1002} + {}^{2019}C_{1002} + {}^{2019}C_{1002} + {}^{2019}C_{1003} = \\
 &= {}^{2020}C_{1001} + {}^{2020}C_{1002} + {}^{2020}C_{1002} + {}^{2020}C_{1003} = \\
 &= {}^{2021}C_{1002} + {}^{2021}C_{1003} = \\
 &= {}^{2022}C_{1003}
 \end{aligned}$$

22.

22.1. Tem-se que:

$$10 \geq 2x + 1 \wedge 10 \geq x + 3 \Leftrightarrow 2x \leq 9 \wedge x \leq 7$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{9}{2} \wedge x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{2}$$

Assim:

$${}^{10}C_{2x+1} = {}^{10}C_{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = x + 3 \vee 2x + 1 = 10 - (x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee 2x + 1 = 10 - x - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee 3x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

22.2. Tem-se que:

$$21 \geq x \wedge 21 \geq x + 1 \wedge 22 \geq 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq 21 \wedge x \leq 20 \wedge x \leq 10$$

$$\Leftrightarrow x \leq 10$$

Assim:

$${}^{21}C_x + {}^{21}C_{x+1} = {}^{22}C_{2x+2}$$

$$\Leftrightarrow {}^{22}C_{x+1} = {}^{22}C_{2x+2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2x + 2 \vee x + 1 = 22 - (2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x + 1 = 22 - 2x - 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee 3x = 19$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{19}{3}$$

Como nenhum dos valores obtidos é um número natural, tem-se que C.S. = $\emptyset$

22.3. Tem-se que:

$$30 \geq x + 1 \wedge 30 \geq 2x + 16 \Leftrightarrow x \leq 29 \wedge x \leq 7$$

$$\Leftrightarrow x \leq 7$$

Assim:

$${}^{30}C_{x+1} = {}^{30}C_{2x+16}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2x + 16 \vee x + 1 = 30 - (2x + 16)$$

$$\Leftrightarrow x = -15 \vee x + 1 = 30 - 2x - 16$$

$$\Leftrightarrow x = -15 \vee 3x = 13$$

$$\Leftrightarrow x = -15 \vee x = \frac{13}{3}$$

Como nenhum dos valores obtidos é um número natural, tem-se que C.S. = $\emptyset$

22.4. Tem-se que:

$$3x \geq 12 \wedge 2x + 17 \geq 12 \Leftrightarrow x \geq 4 \wedge x \geq -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

Assim:

$${}^{3x}C_{12} = {}^{2x+17}C_{12} \Leftrightarrow 3x = 2x + 17 \Leftrightarrow x = 17$$

$$\text{C.S.} = \{17\}$$

22.5. Tem-se que:

$$2x + 4 \geq 15 \wedge 2x + 4 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{2} \wedge x \geq 6 \\ \Leftrightarrow x \geq 6$$

Assim:

$${}^{2x+4}C_{15} + {}^{2x+4}C_{16} = {}^{35}C_{16} \Leftrightarrow {}^{2x+5}C_{16} = {}^{35}C_{16} \\ \Leftrightarrow 2x + 5 = 35 \\ \Leftrightarrow 2x = 30 \\ \Leftrightarrow x = 15$$

$$\text{C.S.} = \{15\}$$

22.6. Tem-se que:

$$2x + 1 \geq 21 \wedge 2x \geq 20 \Leftrightarrow x \geq 10$$

Assim:

$${}^{2x+1}C_{21} - {}^{2x}C_{20} = {}^{40}C_{21} \\ \Leftrightarrow {}^{2x}C_{20} + {}^{2x}C_{21} - {}^{2x}C_{20} = {}^{40}C_{21} \\ \Leftrightarrow {}^{2x}C_{21} = {}^{40}C_{21} \\ \Leftrightarrow 2x = 40 \\ \Leftrightarrow x = 20$$

$$\text{C.S.} = \{20\}$$

23.

$$\mathbf{23.1.} {}^{10}C_4 (3x)^6 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 210 \times 729x^6 \times \frac{1}{x^4} \\ = 153\,090x^2$$

23.2. Termo geral:

$${}^{10}C_p (3x)^{10-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^{10}C_p 3^{10-p} x^{10-p} x^{-p} \\ = {}^{10}C_p 3^{10-p} x^{10-2p}$$

Então:

$$10 - 2p = 4 \Leftrightarrow -2p = -6 \\ \Leftrightarrow p = 3$$

Logo, ${}^{10}C_7 3^7 = 262\,440$ é o coeficiente de x^4 .

$$\mathbf{23.3.} {}^{10}C_5 3^5 x^{-10+2 \times 5} = 61\,236$$

$$\mathbf{23.4.} \sum_{p=10}^{10} {}^{10}C_p = 2^{10} = 1024$$

$$\mathbf{24.} {}^nC_2 = 105 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 105 \\ \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 105 \\ \Leftrightarrow n(n-1) = 210 \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0 \\ \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 210}}{2} \\ \Leftrightarrow n = \underbrace{-14}_{\notin \mathbb{N}_0} \vee n = 15$$

15 + 1 = 16 elementos

25. Sabe-se que a soma dos quatro primeiros elementos de uma linha é 299:

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 299$$

$$\Leftrightarrow 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + 220 = 299$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_1 + {}^nC_2 = 78$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_2 = 78$$

78 é, então, o terceiro elemento da linha $n + 1$.

26.

$$\mathbf{26.1.} {}^{11}C_7 (\sqrt{x})^4 (2x)^7 = 330 \times x^2 \times 128x^7 = \\ = 42\,240x^9$$

26.2. Termo geral:

$${}^{11}C_p (\sqrt{x})^{11-p} (2x)^p = {}^{11}C_p x^{\frac{11-p}{2}} 2^p x^p = \\ = {}^{11}C_p 2^p x^{\frac{11}{2} + \frac{p}{2}}$$

Então:

$$\frac{11}{2} + \frac{p}{2} = 8 \Leftrightarrow 11 + p = 16 \Leftrightarrow p = 5$$

Logo, ${}^{11}C_5 2^5 = 14\,784$.

26.3. Termo geral: ${}^{11}C_p 2^p x^{\frac{11}{2} + \frac{p}{2}}$

Então:

$$\frac{11}{2} + \frac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow 11 + p = 0 \Leftrightarrow p = -11$$

Como $-11 \notin \mathbb{N}_0$, então não existe termo independente de x .

27. Termo geral:

$${}^nC_p (\sqrt{2x})^{n-p} \left(-\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^p = \\ = {}^nC_p (\sqrt{2})^{n-p} (\sqrt{x})^{n-p} (-1)^p (\sqrt{2})^{-p} (\sqrt{y})^{-p} = \\ = {}^nC_p (\sqrt{2})^{n-2p} (-1)^p x^{\frac{n-p}{2}} y^{-\frac{p}{2}}$$

Então:

$$\begin{cases} \frac{n-p}{2} = 3 \\ -\frac{p}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-p = 6 \\ p = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ p = 4 \end{cases}$$

Logo, $n = 10$.

28. As comissões formadas têm de ter alunos de ambos os sexos.

Então, existem duas possibilidades mutuamente exclusivas: escolher duas raparigas e um rapaz ou escolher dois rapazes e uma rapariga.

$15 \times {}^{13}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente uma das 15 raparigas e, para cada uma destas, escolher aleatoriamente dois dos 13 rapazes.

$13 \times {}^{15}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente um dos 13 rapazes e, para cada uma destas, escolher aleatoriamente duas das 15 raparigas.

Assim, $15 \times {}^{13}C_2 + 13 \times {}^{15}C_2$ é uma resposta correta.

Por outro lado, ${}^{28}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 28 alunos da turma, independentemente do sexo.

${}^{13}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 13 rapazes.

${}^{15}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 15 raparigas.

Se ao número de maneiras de escolhermos três pessoas retirarmos o número de maneiras de escolher três raparigas e o número de maneiras de escolher três rapazes, obtemos o número de maneiras de escolher comissões de três pessoas formadas por pessoas de ambos os sexos.

Assim, ${}^{28}C_3 - {}^{13}C_3 - {}^{15}C_3$ também é uma resposta correta.

- 29.** ${}^{64}C_{10}$ é o número de maneiras de colocar aleatoriamente as 10 peças brancas em 10 das 64 casas do tabuleiro.

Por cada uma destas maneiras, há ${}^{54}C_{12}$ maneiras de colocar aleatoriamente as 12 peças pretas em 12 das restantes 54 casas do tabuleiro.

Assim, ${}^{64}C_{10} \times {}^{54}C_{12}$ é uma resposta correta.

${}^{64}C_{22}$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente 22 das 64 casas do tabuleiro onde se vão colocar as 22 peças.

Para cada uma destas maneiras, há ${}^{22}C_{10}$ maneiras de escolher aleatoriamente 10 das 22 casas para colocar as 10 peças brancas, ficando as peças pretas nas restantes 12 casas. Assim, ${}^{64}C_{22} \times {}^{22}C_{10}$ é também uma resposta correta.

30.

- 30.1.** A resposta correta é a II.

Depois de preenchida a primeira linha com as quatro peças azuis, é preciso colocar as restantes 12 peças, das quais nove são amarelas e três têm cores diferentes.

${}^{12}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 12 posições possíveis.

Para cada uma destas maneiras, há $3!$ maneiras de colocar de forma ordenada as três peças de cores diferentes nas três posições escolhidas.

Assim, ${}^{12}C_3 \times 3!$ é uma resposta correta.

${}^{12}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente três das 12 posições possíveis para colocar as peças de cores diferentes.

As peças amarelas ficarão nas restantes nove posições. Assim, ${}^{12}A_3$ é uma resposta correta.

- 30.2.** Pelo menos uma das diagonais tem de ficar preenchida por peças amarelas.

Então, ou fica uma das duas diagonais ou ficam ambas preenchidas por peças amarelas.

Preenchendo apenas uma das diagonais com peças amarelas, sobram cinco peças amarelas e doze posições onde se podem colocar estas peças.

${}^{12}C_5$ é o número de maneiras de colocar aleatoriamente as cinco peças amarelas restantes nas doze posições possíveis.

Para cada uma destas maneiras, há 7A_3 de colocar ordenadamente as três peças de cores diferentes nas sete posições que sobram ($16 - 4 - 5 = 7$). As peças restantes são todas da mesma cor e ficam nas posições que restam.

Como há duas diagonais, então $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^7A_3$ é o número de maneiras diferentes de ocupar pelo menos uma das diagonais com peças amarelas. No entanto, $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^7A_3$ contabilizou o dobro das vezes o caso em que ambas as diagonais ficam preenchidas em simultâneo por peças amarelas. Logo, é necessário subtrair o número de maneiras de preencher as duas diagonais em simultâneo com peças amarelas.

Se se preencherem as duas diagonais com peças amarelas, restam quatro peças azuis e quatro peças de cores diferentes para colocar nas oito posições restantes.

8C_4 é o número de maneiras de colocar aleatoriamente as quatro peças azuis em quatro dos oito lugares restantes.

Para cada uma destas maneiras, há $4!$ maneiras de colocar as restantes peças de quatro cores diferentes nos quatro lugares restantes.

Assim, ${}^8C_4 \times 4!$ é o número de maneiras de preencher as duas diagonais em simultâneo com peças amarelas.

Então, $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^7A_3 - {}^8C_4 \times 4!$ é uma resposta correta ao problema.

Tema II - Probabilidades

Páginas 19 a 23

1.

1.1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1.2. a) Por exemplo, "sair o número 10".

b) Por exemplo, "sair um número positivo".

c) Por exemplo, "sair um número primo".

d) Por exemplo, "sair um múltiplo de 5".

e) Por exemplo, "sair um número par".

f) Por exemplo, "sair um número par" e "sair um número primo".

g) Por exemplo, "sair um divisor de 8" e "sair um múltiplo de 3".

h) Por exemplo, "sair um número par" e "sair um número ímpar".

1.3. $A = \{2, 3, 5, 7\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $A \cap B = \{2, 3\}$

c) $\bar{A} \cap B = \{1, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6\} = \{1, 4, 6\}$

d) $A \cup \bar{B} = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{5, 7, 8\} = \{2, 3, 5, 7, 8\}$

e) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 6, 8\} \cap \{5, 7, 8\} = \{8\}$

f) $\overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2. $P(\bar{A} \cap B) = 0,22 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0,22$

$\Leftrightarrow P(B) = 0,22 + 0,18$

$\Leftrightarrow P(B) = 0,4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{1}{5} + 0,4 - 0,18 =$

$= 0,42$

3.

3.1. a) $P = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{64}$

b) $P = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{676}$

c) $P = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} \times 3! = \frac{6}{2197}$

d) $P = 1 - \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

3.2. a) $P = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{11}{850}$

b) $P(\text{"sair rei de copas e dama de copas"}) =$

$= \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} \times \frac{11}{50}$

$P(\text{"sair rei de copas e dama de não copas"}) =$

$= \frac{1}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{12}{50}$

$P(\text{"sair rei de não copas e dama de copas"}) =$

$= \frac{3}{52} \times \frac{1}{51} \times \frac{12}{50}$

$P(\text{"sair rei de não copas e dama de não copas"}) =$

$= \frac{3}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{13}{50}$

Logo:

$P = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} \times \frac{11}{50} + \frac{1}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{12}{50} + \frac{3}{52} \times \frac{1}{51} \times \frac{12}{50} + \frac{3}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{13}{50} = \frac{1}{663}$

c) $P = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{4}{50} \times 3! = \frac{16}{5525}$

d) $P = 1 - \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = 1 - \frac{11}{850} = \frac{839}{850}$

4. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Ir ao ginásio"

B : "Correr"

$P(A) = 0,42$

$P(B) = 0,33$

$P(A \cap B) = 0,12$

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,12	0,21	0,33
$\bar{B}$	0,3	0,37	0,67
Total	0,42	0,58	1

4.1. $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$

4.2. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,37$

5.

5.1. $P(A \cup B) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$

$= P(A \cup B) - (1 - P(A \cap B)) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - 1 + P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - 1 =$

$= P(B) - (1 - P(A)) =$

$= P(B) - P(\bar{A})$

5.2. $P(\bar{A} \cap (A \cup B)) + P(\bar{B}) =$

$= P((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)) + 1 - P(B) =$

$= P(\emptyset \cup (\bar{A} \cap B)) + 1 - P(B) =$

$= P(\bar{A} \cap B) + 1 - P(B) =$

$= P(B) - P(A \cap B) + 1 - P(B) =$

$= 1 - P(A \cap B) =$

$= P(\overline{A \cap B}) =$

$= P(\bar{A} \cup \bar{B})$

6.

$$6.1. P = \frac{{}^7C_3 \times {}^9C_2 + {}^7C_4 \times {}^9C_1 + {}^7C_5}{{}^{16}C_5} = \frac{19}{52}$$

$$6.2. P = \frac{{}^4C_2 \times 2! \times 3!}{5!} = \frac{3}{5}$$

7. Sejam A e B os acontecimentos:

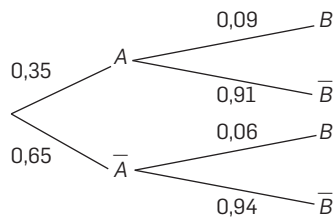
A : "Ser comprado ao fornecedor A ."

B : "Estar impróprio para vender."

$$P(A) = 0,35$$

$$P(B | A) = 0,09$$

$$P(B | \bar{A}) = 0,06$$



$$\begin{aligned} P(\bar{A} | \bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \\ &= \frac{0,65 \times 0,94}{0,35 \times 0,91 + 0,65 \times 0,94} = \\ &= \frac{94}{143} \end{aligned}$$

8. $P(A) \times P(B | A) \times P(C | (A \cap B)) =$

$$= P(A) \times \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \times \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} =$$

$$= P(A \cap B) \times \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} =$$

$$= P(A \cap B \cap C)$$

$$9. P(B | A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{7}$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{7} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} + P(B) - \frac{3}{20} = \frac{6}{7}$$

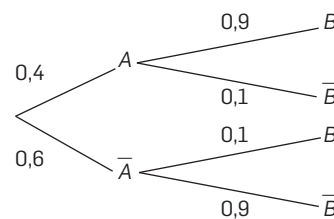
$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{36}{140} \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{35}$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{35}} = \frac{7}{12}$$

10. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "A Elsa tem um jogo melhor."

B : "A Elsa aumenta a aposta."



$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{0,4 \times 0,9}{0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,1} = \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

11. Sejam A , B , C e D os acontecimentos:

A : "Ser produzido pela máquina A ."

B : "Ser produzido pela máquina B ."

C : "Ser produzido pela máquina C ."

D : "Apresentar defeito."

$$P(A) = P(B)$$

$$P(C) = 2P(A)$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A) + 2P(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

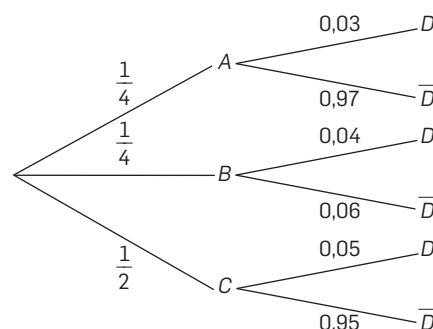
$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(D | A) = 0,03$$

$$P(D | B) = 0,04$$

$$P(D | C) = 0,05$$



$$11.1. P(\bar{D}) = \frac{1}{4} \times 0,97 + \frac{1}{4} \times 0,96 + \frac{1}{2} \times 0,95 = \frac{383}{400}$$

$$11.2. P(A | \bar{D}) = \frac{\frac{1}{4} \times 0,97}{\frac{1}{4} \times 0,97 + \frac{1}{4} \times 0,96 + \frac{1}{2} \times 0,95} = \frac{97}{383}$$

$$11.3. P(D) = \frac{1}{4} \times 0,03 + \frac{1}{4} \times 0,04 + \frac{1}{2} \times 0,05 = \frac{17}{400}$$

$$P(A) \times P(D) = \frac{1}{4} \times \frac{17}{400} = \frac{17}{1600}$$

$$P(A \cap D) = \frac{1}{4} \times 0,03 = \frac{3}{400}$$

Como $P(A) \times P(D) \neq P(A \cap D)$, então os acontecimentos A e D não são acontecimentos independentes.

12. Sejam A , B e C os acontecimentos:

A : "O André passa no exame de condução."

B : "A Bárbara passa no exame de condução."

C : "A Catarina passa no exame de condução."

$$12.1. P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) =$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$12.2. P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \times P(B) \times P(C) =$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$12.3. 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{89}{90}$$

$$12.4. P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) =$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{19}{45}$$

13.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$13.1. P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$13.2. P = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$13.3. P = 0$$

$$13.4. P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$14. 2 + 3 + 5 = 10$$

$$2 + 4 + 4 = 10$$

$$2 + 2 + 6 = 10$$

$$3 + 3 + 4 = 10$$

$$P = \frac{3! + 3 + 3}{3! + 3 + 3 + 3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$15. P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(\{c\}) = P(\{d\}) = P(\{e\}) = P(\{f\}) = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{8}}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{8}$$

Logo, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(\{a, c\}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

Como $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = P(\{a, d\}) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} =$$

$$= \frac{5}{16}$$

Como $P(A) \times P(C) \neq P(A \cap C)$, os acontecimentos A e C não são independentes.

$$P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = P(\{a, e\}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

Como $P(B) \times P(C) \neq P(B \cap C)$, os acontecimentos B e C não são independentes.

16.

$$16.1. P = \frac{4! \times {}^5C_4}{8C_4 \times 4!} = \frac{1}{14}$$

$$16.2. P = 1 - \frac{4! \times {}^5C_4}{8C_4 \times 4!} = \frac{13}{14}$$

17.

$$17.1. a) P = \frac{{}^8C_2 - 8}{8C_2} = \frac{5}{7}$$

$$b) P = \frac{4}{8C_2} = \frac{1}{7}$$

$$17.2. a) P = \frac{3 \times 8}{8C_3} = \frac{3}{7}$$

$$b) P = \frac{8 \times 4}{8C_3} = \frac{4}{7}$$

$$c) P = \frac{8}{8C_3} = \frac{1}{7}$$

$$17.3. a) P = \frac{{}^{12}A_9}{12^9} =$$

$$= \frac{1925}{124\,416}$$

$$b) P = \frac{12 \times {}^{11}A_5}{12^9} =$$

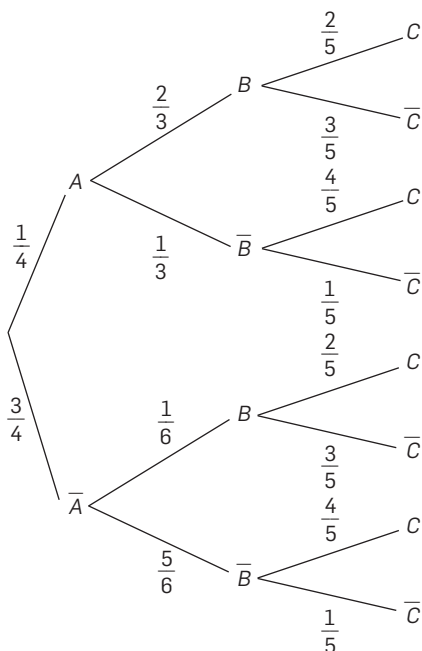
$$= \frac{385}{2\,985\,984}$$

18. Sejam A, B e C os acontecimentos:

A: "Está a chover."

B: "O João perde o autocarro."

C: "O João chega a horas ao emprego."



$$P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} =$$

$$= \frac{2}{15}$$

Tema III - Funções Reais de Variável Real

Páginas 26 a 31

$$1. \lim u_n = \lim \frac{n+1}{2n+3} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim v_n &= \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 2}}{4n} = \\ &= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(4 + \frac{2}{n^2}\right)}}{4n} = \\ &= \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n = \lim v_n = \frac{1}{2}$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, tem-se que $\lim w_n = \frac{1}{2}$.

2.

$$2.1. \frac{2n^2+1}{n+3} > n, \forall n > 2$$

$$\lim n = +\infty$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{2n^2+1}{n+3} = +\infty.$$

$$2.2. 2^{2n+1} > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim 2^n = +\infty$$

$$\text{Logo, } \lim 2^{2n+1} = +\infty.$$

$$2.3. \frac{-n^2+2}{2n+1} < -\frac{n}{2} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim \left(-\frac{n}{2} + 1\right) = -\infty$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{-n^2+2}{2n+1} = -\infty.$$

3.

3.1. Tem-se que:

$$-1 \leq \cos n^2 \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n^2}{n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, $\lim \frac{\cos n^2}{n} = 0$.

3.2. Tem-se que:

$$-1 \leq \cos n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim:

$$-1 \leq -\cos n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+3} \leq \frac{2 - \cos n}{n+3} \leq \frac{3}{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+3} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos n}{n+3} = 0.$$

3.3. Tem-se que:

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $3 - 2n < 0$, se $n > 1$, então:

$$\frac{1}{3-2n} \leq \frac{\cos^2 n}{3-2n} \leq 0, \forall n > 1$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-2n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n}{3-2n} = 0.$$

4.

4.1. Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem-se que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, então, pelo teorema das funções encastradas, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = 0.$$

4.2. Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem-se que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{2+x}{x}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{2+x}{x}\right) \leq x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, então, pelo teorema das funções encastradas, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{2+x}{x}\right) \right] = 0.$$

4.3. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$-1 \leq -\cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2 + 2} \leq \frac{2}{x^2 + 2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 2} = 0$, então, pelo

teorema das funções encastradas, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 2} = 0.$$

4.4. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \cos^2 x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{2} \leq \frac{3x^2}{1 + \cos^2 x} \leq 3x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2) = 0$, então, pelo

teorema das funções encastradas, conclui-se

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 + \cos^2 x} = 0.$$

4.5. Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, tem-se que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2} \leq (x-1)^2 2^{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)} \leq 2(x-1)^2$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{2} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} [2(x-1)^2] = 0,$$

então, pelo teorema das funções encastradas,

$$\text{conclui-se que } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1)^2 2^{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)} \right] = 0.$$

4.6. Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem-se que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x^2} \leq \frac{x^2 + \sin x}{2x^2} \leq \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ então, pelo}$$

teorema das funções encastradas, conclui-se

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \sin x}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.

5.1. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$.

A sucessão (a_n) é monótona decrescente, uma vez que:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \frac{n+2}{3n+5} - \frac{n+1}{3n+2} = \\
 &= \frac{(n+2)(3n+2) - (n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \\
 &= \frac{3n^2 + 8n + 4 - 3n^2 - 8n - 5}{(3n+5)(3n+2)} = \\
 &= \frac{-1}{(3n+5)(3n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Um majorante dos termos desta sucessão é

$$a_1 = \frac{2}{5}.$$

Por outro lado:

$$\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n+2)} > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r}
 n+1 \quad | \quad 3n+2 \\
 -n - \frac{2}{3} \quad | \quad \frac{1}{3} \\
 \hline
 \frac{1}{3}
 \end{array}$$

Então, $\frac{1}{3} < \frac{n+1}{3n+2} \leq \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ e $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas,

$$\lim \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n = 0.$$

$$\begin{aligned}
 5.2. \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\
 &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim 0 = 0$ e $\lim \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas,

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

5.3. Tem-se que:

$$-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq \cos^2 n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim:

$$-1 \leq \sin n + \cos^2 n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow -n^2 \leq n^2(\sin n + \cos^2 n) \leq 2n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2}{n^3+1} \leq \frac{n^2(\sin n + \cos^2 n)}{n^3+1} \leq \frac{2n^2}{n^3+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Como } \lim \frac{-n^2}{n^3+1} = \lim \frac{-1}{n + \frac{1}{n^2}} = 0 \text{ e}$$

$$\lim \frac{2n^2}{n^3+1} = \lim \frac{2}{n + \frac{1}{n^2}} = 0, \text{ então, pelo teo-}$$

rema das sucessões encastradas,

$$\lim \frac{n^2(\sin n + \cos^2 n)}{n^3+1} = 0.$$

$$5.4. \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{n^2-k} = \frac{n+1}{n^2-1} + \frac{n+1}{n^2-2} + \dots + \frac{n+1}{n^2-n}$$

Como $\frac{n+1}{n^2-1} > \frac{n+1}{n^2-2} > \dots > \frac{n+1}{n^2-n}$, então:

$$\begin{aligned}
 \frac{n+1}{n^2-1} + \frac{n+1}{n^2-2} + \dots + \frac{n+1}{n^2-n} &< \frac{n+1}{n^2-1} + \frac{n+1}{n^2-1} + \dots + \\
 + \frac{n+1}{n^2-1} &= n \times \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n}{n-1}
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \frac{n+1}{n^2-1} + \frac{n+1}{n^2-2} + \dots + \frac{n+1}{n^2-n} &> \frac{n+1}{n^2-n} + \frac{n+1}{n^2-n} + \dots + \\
 + \frac{n+1}{n^2-n} &= n \times \frac{n+1}{n^2-n} = \frac{n(n+1)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n-1}
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{n}{n-1} < \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{n^2-k} < \frac{n+1}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$\text{Como } \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \text{ e}$$

$$\lim \frac{n}{n-1} = \lim \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1, \text{ então, pelo teorema}$$

das sucessões encastradas, $\lim \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{n^2-k} = 1$.

6.

6.1. No intervalo $]-1, +\infty[$, a função é contínua por se encontrar definida por uma função racional, em que o denominador não se anula.

No intervalo $]-\infty, -1[$, a função é contínua por se encontrar definida pelo quociente entre duas funções contínuas, em que o denominador não se anula.

Para que a função f seja contínua em $x = -1$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\bullet f(-1) = -2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \frac{\sqrt{1 + 3}}{-1} = -2$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 1) = -2 \end{aligned}$$

Logo, a função f é contínua em $x = -1$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}$.

6.2. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[-2, 0]$ e, então, podemos concluir, pelo teorema de Weierstrass, que a função f admite, neste intervalo, máximo e mínimo absolutos.

6.3. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[-2, -1]$.

$$f(-2) = \frac{\sqrt{4 + 3}}{-2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \approx -1,32 \text{ (2 c.d.)}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f(-1) < -\frac{3}{2} < f(-2)$$

Assim, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = -\frac{3}{2}$ no intervalo $]-2, -1[$.

7.

7.1. No intervalo $]0, +\infty[$, a função é contínua por se encontrar definida por uma função polinomial, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

No intervalo $]-\infty, 0[$, a função é contínua por se encontrar definida pelo quociente entre duas funções contínuas, em que o denominador não se anula, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

Para que a função g seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\bullet g(0) = k$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - k}{x - 1} = \frac{-k}{-1} = k$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + k) = k$$

Logo, a função g é contínua em $x = 0$, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

Assim, g é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, g é contínua em $[-1, 1]$.

Como g é contínua em $[-1, 1]$, podemos concluir, pelo teorema de Weierstrass, que a função g admite, neste intervalo, máximo e mínimo absolutos.

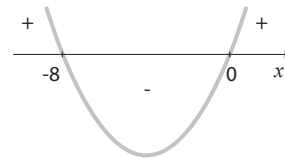
7.2. Como g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0, 2]$.

$$g(0) = k$$

$$g(2) = 4 + 4 + k = 8 + k$$

Para que se possa usar o teorema de Bolzano-Cauchy, para concluir que a função g admite pelo menos um zero no intervalo $[0, 2]$, tem de se ter:

$$g(0) \times g(2) < 0 \Leftrightarrow k(8 + k) < 0$$



Assim, $k \in]-8, 0[$.

8. A função h é contínua em $[a, b]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$$h(a) = g \circ f(a) - a = g(a) - a = b - a$$

$$h(b) = g \circ f(b) - b = g(b) - b = a - b$$

$$h(b) < 0 < h(a)$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe pelo menos um zero de h no intervalo $[a, b]$.

9. $g(x) = xf(x)$

$$g'(x) = x'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$$

$$g''(x) = f'(x) + x'f'(x) + xf''(x) =$$

$$= f'(x) + f'(x) + xf''(x) =$$

$$= 2f'(x) + xf''(x)$$

10.

$$\mathbf{10.1.} \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f(-1) = -1 + 3 + 5 + 1 = 8$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(-1, 8)$.

10.2. $g(x) = x^4 - 6x^2$

$D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 - 12x$

$g''(x) = 12x^2 - 12$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow 12(x-1)(x+1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de g''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

$g(-1) = 1 - 6 = -5$

$g(1) = 1 - 6 = -5$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$; apresenta dois pontos de inflexão de coordenadas $(-1, -5)$ e $(1, -5)$.

10.3. $h(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$h'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

$h''(x) = \frac{-2(x^2 - 1)^2 - (-2x)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} =$

$= \frac{(x^2 - 1)[-2(x^2 - 1) + 8x^2]}{(x^2 - 1)^4} =$

$= \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

$h''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de h''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de h	∪	n.d.	∩	n.d.	∪

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$; não apresenta pontos de inflexão.

10.4. $i(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$i'(x) = \frac{3x^2 \times x^2 - 2x(x^3 - 1)}{x^4} = \frac{x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^3 + 2}{x^3}$

$i''(x) = \frac{3x^2 \times x^3 - (x^3 + 2)3x^2}{x^6} = \frac{-6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$

$i''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de i''	-	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de i	∩	n.d.	∩

O gráfico de i tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$; não apresenta pontos de inflexão.

10.5. $j(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$D_j = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$j'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$j''(x) = \frac{-2 \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{4}{(x+1)^3}$

$j''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de j''	+	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de j	∪	n.d.	∩

O gráfico de j tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, +\infty[$; não apresenta pontos de inflexão.

10.6. $k(x) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2$

$D_k = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$k'(x) = 2 \times \frac{x+2}{x-3} \times \frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} = \frac{-10(x+2)}{(x-3)^3}$

$k''(x) = \frac{-10(x-3)^3 + 10(x+2)3(x-3)^2}{(x-3)^6} =$

$= \frac{(x-3)^2[-10(x-3) + 30(x+2)]}{(x-3)^6} =$

$= \frac{10(2x+9)}{(x-3)^4}$

$k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$		3	$+\infty$
Sinal de k''	-	0	+	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de k	∩	P.I.	∪	n.d.	∪

$k\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{9}$

O gráfico de k tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\frac{9}{2}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\frac{9}{2}, 3[$ e em $]3, +\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{9})$.

10.7. $l(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D_l = \mathbb{R}$

$l'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$l''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

$l''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

O gráfico de l tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$; não apresenta pontos de inflexão.

10.8. $m(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$

$D_m = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$m'(x) = \frac{3(x^2 - 9) - 3x \times 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-3x^2 - 27}{(x^2 - 9)^2}$

$m''(x) = \frac{-6x(x^2 - 9)^2 - (-3x^2 - 27) \times 2(x^2 - 9)2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{(x^2 - 9)[-6x(x^2 - 9) + 4x(3x^2 + 27)]}{(x^2 - 9)^4} = \frac{2x(-3x^2 + 27 + 6x^2 + 54)}{(x^2 - 9)^3} = \frac{6x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$

$m''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$6x(x^2 + 27)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 9)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de m''	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de m	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$m(0) = 0$

O gráfico de m tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -3[$ e em $]0, 3[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-3, 0[$ e em $]3, +\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

10.9. $n(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

$D_n = \mathbb{R}$

$n'(x) = \frac{2x(x^2 + 4) - (x^2 - 4)2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$

$n''(x) = \frac{16(x^2 + 4)^2 - 16x \times 2(x^2 + 4)2x}{(x^2 + 4)^4} = \frac{16(x^2 + 4) - 64x^2}{(x^2 + 4)^3} = \frac{64 - 48x^2}{(x^2 + 4)^3}$

$n''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{64 - 48x^2}{(x^2 + 4)^3} = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal de n''	-	0	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de n	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

$n(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -\frac{1}{2}$

$n(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -\frac{1}{2}$

O gráfico de n tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}[$ e em $]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}[$; apresenta dois pontos de inflexão de coordenadas $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$ e $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$.

10.10. $o(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 1}$

$D_o = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$o'(x) = \frac{9x^2(x^2 - 1) - 3x^3 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 9x^2}{(x^2 - 1)^2}$

$o''(x) = \frac{(12x^3 - 18x)(x^2 - 1)^2 - (3x^4 - 9x^2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(12x^3 - 18x)(x^2 - 1) - (3x^4 - 9x^2)4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{6x^3 + 18x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{6x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$

$$o''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$6x(x^2 + 3)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 1)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de o''	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de o	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$$o(0) = 0$$

O gráfico de o tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

$$10.11. p(x) = \sqrt{x-2}$$

$$D_p = [2, +\infty[$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$p''(x) = \frac{-2 \times \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\sqrt{x-2})^2} = -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$p''(x) < 0, \forall x \in]2, +\infty[$$

O gráfico de p tem a concavidade voltada para baixo em $]2, +\infty[$; não apresenta pontos de inflexão.

$$10.12. q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$D_q =]-1, +\infty[$$

$$q'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x \times \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$

$$= \frac{2x+2-x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$q''(x) = \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\left[2\sqrt{x+1} + 2(x+1)\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]}{[2(x+1)\sqrt{x+1}]^2} =$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\left[2\sqrt{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right]}{4(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2 - 3(x+2)(x+1)}{4(x+1)^3\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{2(x+1) - 3(x+2)}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{-x-4}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$q''(x) < 0, \forall x \in]-1, +\infty[$$

O gráfico de q tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, +\infty[$; não apresenta pontos de inflexão.

11. O gráfico que pode representar a função f é o gráfico I.

O gráfico IV não pode representar a função f , por se tratar do gráfico de uma função que não tem derivada finita no ponto de abscissa 4.

O gráfico III não pode representar a função f , uma vez que no ponto de abscissa 2 a derivada não é nula.

O gráfico II não pode representar a função f , porque a derivada da função por si representada é negativa em $]-\infty, 2[$.

12.

$$12.1. f'(x) \times f(x) < 0$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
Variação de f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.
Sinal de f'	-	-	-	0	+	+	+	0
Sinal de f	+	0	-	-	-	0	+	+
Sinal de $f' \times f$	-	0	+	0	-	0	+	0

x		1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
Variação de f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
Sinal de f'	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de f	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de $f' \times f$	-	0	+	0	-	0	+

$$C.S. =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]\frac{3}{2}, 2[$$

12.2. $f(x) \times f''(x) > 0$

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
Sentido das concavidades do gráfico de f	∪	∪	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	∪	∪
Sinal de f''	+	+	+	0	-	0	+	+	+
Sinal de f	+	0	-	0	+	0	-	0	+
Sinal de $f'' \times f$	+	0	-	0	-	0	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$$

12.3. $f'(x) \times f''(x) \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
Sinal de f'	-	0	+	+	+	0
Sinal de f''	+	+	+	0	-	-
Sinal de $f'' \times f'$	-	0	+	0	-	0

x		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Sinal de f'	-	-	-	0	+
Sinal de f''	-	0	+	+	+
Sinal de $f'' \times f'$	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

13. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x^2 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2 + 1)^2 - 4x \times 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{4(x^2 + 1) - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	0	-
Variação de f	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

A função derivada tem máximo relativo em

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$$

Logo, a função f' tem máximo absoluto em

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico de f atinge o seu valor máximo no ponto de abscissa

$$\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{9}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \times 9}{16 \times 3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{2}$$

A equação pedida é da forma $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ pertence a esta reta, tem-se:

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Assim, a equação pedida é:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}$$

14. $a(t) = -5t^2 + 100t + 1500$

14.1. $a'(t) = -10t + 100$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 10$$

t	0		10	$+\infty$
Sinal de a'		+	0	-
Variação de a		↗	Máx.	↘

$$a(10) = -5 \times 100 + 100 \times 10 + 1500 = 2000$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 2000 metros.

14.2. $t.m.v._{[0, 5]} = \frac{a(5) - a(0)}{5 - 0} = \frac{1875 - 1500}{5} = 75$

A velocidade média do projétil nos primeiros 5 segundos foi 75 m/s.

14.3. $a(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 100t + 1500 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + 20 \times 1500}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{100 \pm 200}{10}$$

$$\Leftrightarrow t = 30 \vee t = -10$$

Como $t \geq 0$, então $t = 30$, ou seja, o projétil atingiu o solo ao fim de 30 segundos.

$$a'(t) = -10t + 100$$

$$a'(30) = -10 \times 30 + 100 = -200$$

A velocidade do projétil quando atingiu o solo foi -200 m/s .

14.4. $\frac{a'(5) - a'(0)}{5 - 0} = \frac{50 - 100}{5} = -10$

A aceleração média nos primeiros cinco segundos foi -10 m/s^2 .

14.5. $a''(t) = -10$

$$a''(5) = -10$$

A aceleração no instante $t = 5$ foi -10 m/s^2 .

15. $f(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{3}$$

$$\text{Logo, } -\frac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = -3.$$

16.

16.1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Divisores inteiros de 2: $-2, -1, 1, 2$

$$f(2) = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

$$f(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$\text{Logo, } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2 - \sqrt{7}}{3}$		$\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right) = \frac{20 + 14\sqrt{7}}{27}$$

$$f\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right) = \frac{20 - 14\sqrt{7}}{27}$$

A função f é estritamente crescente em

$\left]-\infty, \frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ e é estrita-

mente decrescente em $\left[\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right]$;

tem máximo relativo em $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ e tem

mínimo relativo em $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f

$$f'(x) = 6x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{27}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ e tem a concavidade voltada

para cima em $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$; o ponto de coordenadas

$\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

Assíntotas ao gráfico de f

A função f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

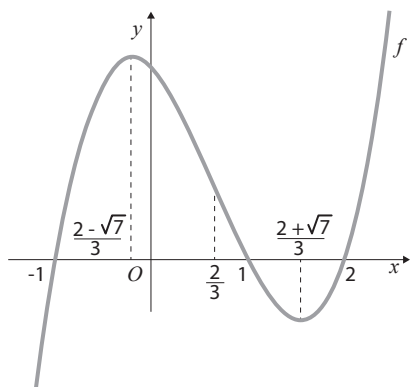
$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico de f não admite assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty\end{aligned}$$

O gráfico de f não admite assíntotas não verticais quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



16.2. $g(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

Domínio

$$D_g = \mathbb{R}$$

Zeros

$$\begin{aligned}g(x) = 0 &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{8 \pm 6}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 7 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}\end{aligned}$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$\begin{aligned}g'(x) &= 4x^3 - 16x \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2\end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$4x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de g''	-	0	+	0	-	0	+
Variação de g	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(-2) &= -9 \\ g(0) &= 7 \\ g(2) &= -9\end{aligned}$$

A função g é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, 2]$ e é estritamente crescente em $[-2, 0]$ e em $[2, +\infty[$ tem máximo relativo em $x = 0$ e tem mínimo relativo em $x = -2$ e em $x = 2$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g

$$g''(x) = 12x^2 - 16$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal de g''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$g\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{17}{9}$$

$$g\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{17}{9}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para

cima em $]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}[$ e em $]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}[$; os pontos de coordenadas $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$ e $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de g .

Assíntotas ao gráfico de g

A função g é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

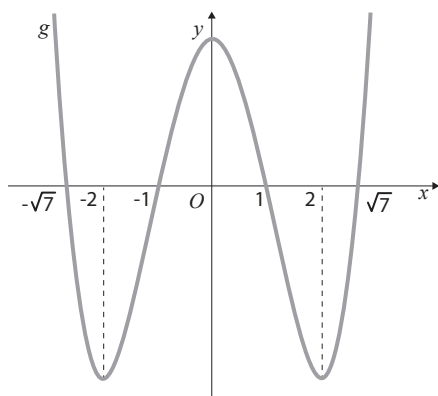
$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty\end{aligned}$$

O gráfico de g não admite assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty\end{aligned}$$

O gráfico de g não admite assíntotas não verticais quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



16.3. $h(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 1}$

Domínio

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Zeros

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$h'(x) = \frac{10x(x^2 - 1) - 5x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-10x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-10x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de h'	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-
Variação de h	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

$$h(0) = 0$$

A função h é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $[-1, 0[$ e é estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$; tem máximo relativo em $x = 0$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-10(x^2 - 1)^2 - (-10x)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{-10(x^2 - 1) + 40x^2}{(x^2 - 1)^3} = \\ &= \frac{30x^2 + 10}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{30x^2 + 10}{(x^2 - 1)^3} = 0, \text{ que é uma equação impossível em } \mathbb{R}.$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de h''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 1[$; não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de h

A função h é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, por se tratar de uma função racional, logo só as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

As retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x^3 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x^2} = \\ &= 5 \end{aligned}$$

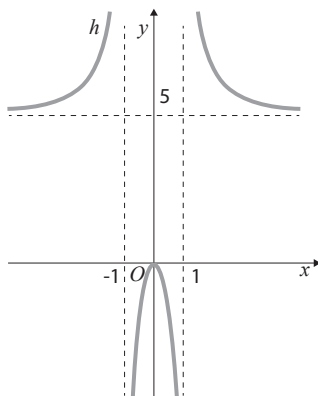
A reta de equação $y = 5$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^3 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2} = \\ &= 5 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 5$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



16.4. $i(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$

Domínio

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Zeros

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{3x^2(x^2 - 9) - x^3 \times 2x}{(x^2 - 9)^2} = \\ &= \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2} = \\ &= \frac{x^2(x^2 - 27)}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3\sqrt{3} \vee x = -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-3\sqrt{3}$		-3		0
x^2	+	+	+	+	+	0
$x^2 - 27$	+	0	-	-	-	-
$(x^2 - 9)^2$	+	+	+	0	+	+
Sinal de i'	+	0	-	n.d.	-	0
Variação de i	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	$\searrow$

x		3		$3\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+
$x^2 - 27$	-	-	-	0	+
$(x^2 - 9)^2$	+	0	+	+	+
Sinal de i'	-	n.d.	-	0	+
Variação de i	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$i(-3\sqrt{3}) = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$i(3\sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

A função i é estritamente crescente em $]-\infty, -3\sqrt{3}]$ e em $[3\sqrt{3}, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $]-3\sqrt{3}, -3[$, em $]-3, 3[$ e em $]3, 3\sqrt{3}[$; tem máximo relativo em $x = -3\sqrt{3}$ e tem mínimo relativo em $x = 3\sqrt{3}$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de i

$$\begin{aligned} i''(x) &= \frac{(4x^3 - 54x)(x^2 - 9)^2 - (x^4 - 27x^2)2(x^2 - 9)2x}{(x^2 - 9)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 54x)(x^2 - 9) - (x^4 - 27x^2)4x}{(x^2 - 9)^3} = \\ &= \frac{18x^3 + 486x}{(x^2 - 9)^3} = \\ &= \frac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3} \\ i''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$18x(x^2 + 27)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 9)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de i''	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de i	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$$i(0) = 0$$

O gráfico de i tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -3[$ e em $]0, 3[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-3, 0[$ e em $]3, +\infty[$; o ponto de coordenadas (0, 0) é ponto de inflexão do gráfico de i .

Assíntotas ao gráfico de i

A função i é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, por se tratar de uma função racional, logo só as retas de equação $x = -3$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de i .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \frac{-27}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \frac{-27}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \frac{27}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \frac{27}{0^+} = +\infty$$

As retas de equação $x = -3$ e $x = 3$ são assíntotas verticais ao gráfico de i .

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [i(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{x^2-9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x} = 0\end{aligned}$$

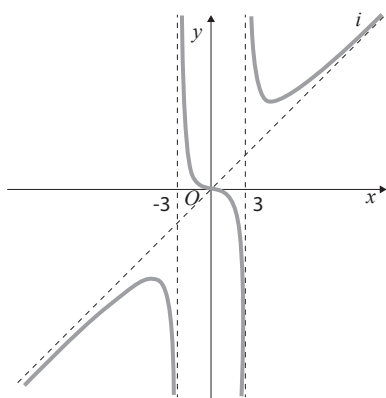
A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de i quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [i(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x^2-9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de i quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



$$16.5. j(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

Domínio

$$D_j = \mathbb{R}$$

Zeros

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$j'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned}j'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de j'	-	0	+	0	-
Variação de j	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$j(1 - \sqrt{2}) = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$$

$$j(1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

A função j é estritamente decrescente em $]-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ e em $[1 + \sqrt{2}, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$; tem máximo relativo em $x = 1 + \sqrt{2}$ e tem mínimo relativo em $x = 1 - \sqrt{2}$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de j

$$\begin{aligned}j''(x) &= \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - (-x^2+2x+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{(-2x+2)(x^2+1) - (-x^2+2x+1)4x}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}\end{aligned}$$

$$j''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 - \sqrt{3} \vee x = 2 + \sqrt{3}$$

Cálculos auxiliares

$$\text{Seja } P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1.$$

Divisores inteiros de 1: -1 e 1

$$P(-1) = -1 - 3 + 3 + 1 = 0$$

	1	-3	-3	1
-1		-1	4	-1
	1	-4	1	0

Assim, $P(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$.

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \vee x = 2 + \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	-1		$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$2(x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 4x + 1$	+	+	+	0	-	0	+
$(x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+	+	+
Sinal de j''	-	0	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de j	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$j(-1) = -1$$

$$j(2 - \sqrt{3}) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4}$$

$$j(2 + \sqrt{3}) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$$

O gráfico de j tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 2 - \sqrt{3}[$ e em $]2 + \sqrt{3}, +\infty[$; os pontos de coordenadas $(-1, -1)$, $(2 - \sqrt{3}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{4})$ e $(2 + \sqrt{3}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{4})$ são pontos de inflexão do gráfico de j .

Assíntotas ao gráfico de j

A função j é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função racional, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^3+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [j(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

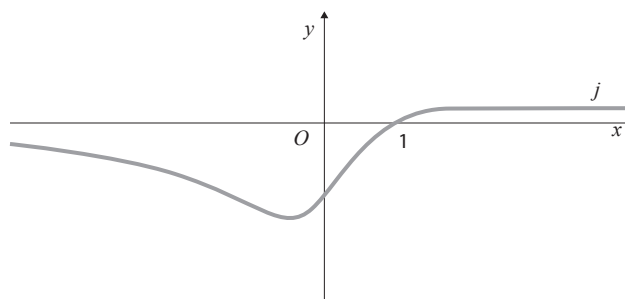
A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de j quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^3+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [j(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de j quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



$$16.6. k(x) = \frac{2x}{x^4 - 1}$$

Domínio

$$D_k = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Zeros

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$k'(x) = \frac{2(x^4 - 1) - 2x \times 4x^3}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-6x^4 - 2}{(x^4 - 1)^2}$$

$$k'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

A função k é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$, em $]-1, 1[$ e em $]1, +\infty[$; não admite extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de k

$$\begin{aligned} k''(x) &= \frac{-24x^3(x^4 - 1)^2 - (-6x^4 - 2)2(x^4 - 1)4x^3}{(x^4 - 1)^4} = \\ &= \frac{-24x^3(x^4 - 1) - (-6x^4 - 2)8x^3}{(x^4 - 1)^3} = \\ &= \frac{8x^3(3x^4 + 5)}{(x^4 - 1)^3} \end{aligned}$$

$$k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^3(3x^4 + 5)}{(x^4 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$8x^3(3x^4 + 5)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^4 - 1)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de k''	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de k	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$$k(0) = 0$$

O gráfico de k tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de k .

Assíntotas ao gráfico de k

A função k é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, por se tratar de uma função racional, logo só as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de k .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x^4 - 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x^4 - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^4 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x^4 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

As retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de k .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^4 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^5 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^4} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [k(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^4 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de k quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^4 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^5 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^4} = 0$$

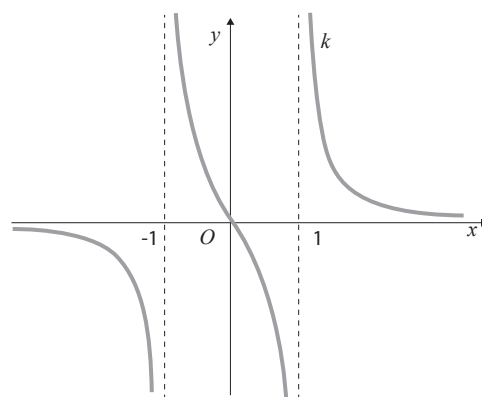
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^4 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de k quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



$$16.7. l(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Domínio

$$D_l = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Zeros

$$l(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$l'(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0, \text{ que é uma equação}$$

impossível em $D_l =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Sinal de l'	-	0	0	+
Varição de l	$\searrow$	Mín.	Mín.	$\nearrow$

$$l(-2) = 0$$

$$l(2) = 0$$

A função l é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$, tem mínimos absolutos em $x = -2$ e em $x = 2$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de l

$$l''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x \times \frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{x^2-4} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} =$$

$$= \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$$l''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

O gráfico de l tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$; não admite pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de l

A função l é contínua no seu domínio $\mathbb{R} \setminus]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, por se tratar da composta da função raiz quadrada com uma função polinomial, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right) = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [l(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4} + x)(\sqrt{x^2-4} - x)}{\sqrt{x^2-4} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} - x} = \frac{-4}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de l quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

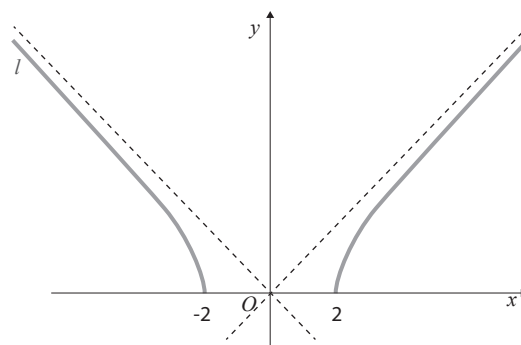
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [l(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-4} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4} - x)(\sqrt{x^2-4} + x)}{\sqrt{x^2-4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de l quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



$$16.8. m(x) = \sqrt{x^2+2} - x$$

Domínio

$$D_m = \mathbb{R}$$

Zeros

$$m(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = x^2, \text{ que é uma equação impossível em } \mathbb{R}.$$

Intervalos de monotonia e extremos

$$m'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - 1$$

$m'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo m é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e não admite extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de m

$$m''(x) = \frac{\sqrt{x^2+2} - x \times \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{x^2+2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} =$$

$$= \frac{2}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}}$$

$m''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

O gráfico de m tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$; não admite pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de m

A função m é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar da diferença entre a composta da raiz quadrada com uma função polinomial e uma função afim, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [m(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de m quando $x \rightarrow -\infty$.

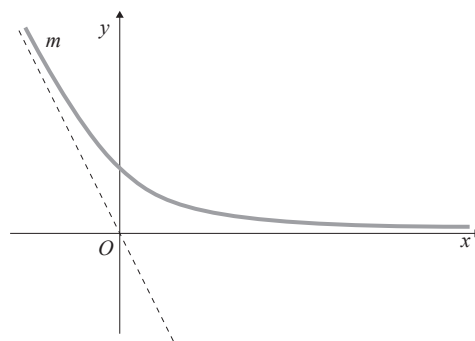
$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - x}{x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [m(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota oblíqua ao gráfico de m quando $x \rightarrow +\infty$.

Representação gráfica



17.

17.1. A função f é contínua em $]-\infty, 2]$, por se tratar da soma entre a composta da raiz quadrada com uma função afim e uma constante.

A função f é contínua em $]2, 5]$, por se tratar de uma função racional.

A função f é contínua em $]5, +\infty[$, por se tratar de uma função racional.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{2-x} + \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3} = f(2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{(x-1)(x-5)} = \frac{-4}{1 \times (-3)} = \frac{4}{3}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, então f é contínua em $x = 2$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{5}{9} = f(5)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-2x}{(x-1)(x-5)} = \frac{-10}{0^-} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5)$, então f não é contínua em $x = 5$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

17.2. Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, em particular, é contínua em $[0, 4]$. Então, podemos concluir, pelo teorema de Weierstrass, que a função f admite neste intervalo máximo e mínimo absolutos.

17.3. Seja $g(x) = f(x) - x^3$. Pretende-se mostrar que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $] -2, 2[$.

Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, em particular, f é contínua em $[-2, 2]$. Assim, g é contínua em $[-2, 2]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

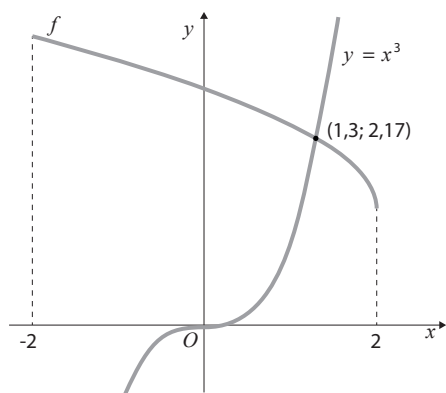
$$g(-2) = f(-2) - (-2)^3 = 2 + \frac{4}{3} + 8 = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = f(2) - 2^2 = \frac{4}{3} - 8 = -\frac{20}{3}$$

$$g(2) < 0 < g(-2)$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $] -2, 2[$, ou seja, a equação $f(x) = x^3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $] -2, 2[$.

17.4.



Assim, $x \approx 1,3$

17.5. Se $x \in]5, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 16} \right)' = \frac{x^2 - 16 - x \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 16)^2 - (-x^2 - 16)2(x^2 - 16)2x}{(x^2 - 16)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 - 16) + (x^2 + 16)4x}{(x^2 - 16)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 + 96x}{(x^2 - 16)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 96x}{(x^2 - 16)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin]5, +\infty[$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in]5, +\infty[$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]5, +\infty[$ e não admite pontos de inflexão neste intervalo.

18. Pelo teorema de Pitágoras:

$$4^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 16 = 2\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 8$$

e:

$$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 4$$

Logo, $\overline{OC} = 2$.

Assim, a reta BC contém os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, 0)$, logo uma equação desta reta é $y = -x + 2$.

Seja $x \in]0, 2[$.

O comprimento de cada um dos retângulos que se podem construir nas condições do enunciado é, então, $2x$ e a sua altura é $-x + 2$.

A área de cada um desses retângulos é dada por:

$$A(x) = 2x(-x + 2) = -2x^2 + 4x$$

$$A'(x) = (-2x^2 + 4x)' = -4x + 4$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		2
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Varição de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

O retângulo de área máxima obtém-se quando $x = 1$.

$$\overline{DE} = 2 \times 1 = 2$$

$$\overline{EF} = -1 + 2 = 1$$

O comprimento do retângulo de área máxima é 2 e a sua altura é 1.

19. $P(x, \sqrt{x}), x \in \mathbb{R}_0^+$

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - \sqrt{x})^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4} + x} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}$$

$$\text{Seja } d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}.$$

$$d'(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 - 2x + \frac{9}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} (2x - 2) =$$

$$= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de d'		-	0	+
Varição de d	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A distância entre P e A é mínima quando P é o ponto de coordenadas $(1, 1)$.

20. Seja $x \in]0, 2[$.

O comprimento de cada retângulo nas condições do enunciado é dado por $2x$.

Uma condição que define a circunferência representada na figura é $x^2 + y^2 = 4$.

Como $y > 0$, tem-se $y = \sqrt{4 - x^2}$.

A altura de cada retângulo é, então, dada por $\sqrt{4 - x^2}$.

Assim, a área dos retângulos em função de x é dada por:

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

$$A'(x) = (2x\sqrt{4 - x^2})' =$$

$$= 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \times \frac{1}{2} (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) =$$

$$= 2\sqrt{4 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} =$$

$$= \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Como $x \in]0, 2[$, então $x = \sqrt{2}$.

x	0		$\sqrt{2}$		2
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$2x = 2\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

Assim, o comprimento do retângulo de área máxima é $2\sqrt{2}$ e a sua altura é $\sqrt{2}$.

21. Sejam r o raio e h a altura do cone.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$(\sqrt{3})^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow r^2 = 3 - h^2$$

O volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

Ou seja, o volume do cone é dado, em função de h , por:

$$V(h) = \frac{\pi(3 - h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3} (3h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} (3 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} (3 - 3h^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h = 1 \vee h = -1$$

Como $h > 0$, então $h = 1$.

x	0		1	$+\infty$
Sinal de V'	n.d.	+	0	-
Variação de V	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Logo, a altura do cone de volume máximo é igual a 1.

$$r^2 = 3 - 1^2 \Leftrightarrow r^2 = 2, \text{ logo } r = \sqrt{2}.$$

O raio do cone de volume máximo é igual a $\sqrt{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2 \times 1 = \frac{2\pi}{3}$$

O volume máximo é $\frac{2\pi}{3}$.

Tema IV - Trigonometria e Funções Trigonômicas

Páginas 34 a 41

1.

$$1.1. \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1.2. \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$1.3. -\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -1$$

$$1.4. \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{9}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0$$

$$1.5. \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$1.6. \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.

$$2.1. \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta -$$

$$- \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$2.2. \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta -$$

$$- \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$2.3. \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} =$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} =$$

$$2.4. \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$2.5. \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta -$$

$$- \cos \alpha \sin \beta) =$$

$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta =$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$2.6. \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta +$$

$$+ \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$2.7. \cos^2 \alpha + \cos(2\alpha) =$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 2(1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 - 2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 - 3 \sin^2 \alpha$$

$$2.8. \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \tan \alpha$$

$$2.9. \frac{\sin \alpha + \sin(2\alpha)}{1 + \cos \alpha + \cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \tan \alpha$$

$$2.10. \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \tan^2 \alpha$$

$$3. \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ então } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{144}{169}$$

$$\text{Como } \beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ então } \sin \beta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \bullet \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{12}{13} = \\ &= -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \\ &= \frac{56}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \\ &= -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \tan(2\beta) &= \frac{\sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} = \\ &= \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{2 \times \frac{12}{13} \times \left(-\frac{5}{13}\right)}{\left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \\ &= \frac{120}{119} \end{aligned}$$

$$4. \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então:

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{15}{16}} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{15}{16} =$$

$$= -\frac{7}{8}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Assim:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$= -\frac{7}{16} - \frac{3\sqrt{5}}{16} =$$

$$= -\frac{7 + 3\sqrt{5}}{16}$$

$$5. \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3 \left(\cos x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \times \frac{1}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 3 \left(\cos x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \times \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{3}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} &= \frac{\overline{AC}}{\sin (2\theta)} \Leftrightarrow \frac{x}{\sin \theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin (2\theta)} \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= \frac{x \sin (2\theta)}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= \frac{2x \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= 2x \cos \theta\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}7.1. \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) &= \sin \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} \right) = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7.2. \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) &= \\ &= \sin \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) + \\ &\quad + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7.3. \cos \left(\frac{11\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) &= \\ &= \cos \left(\frac{9\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + \\ &\quad + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7.4. \operatorname{tg} \left(\frac{17\pi}{12} \right) &= \\ &= \frac{\sin \left(\frac{17\pi}{12} \right)}{\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right)} = \\ &= \frac{\sin \left(\frac{8\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} \right)}{\cos \left(\frac{8\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} \right)} = \\ &= \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \\ &= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \\ &= \frac{-6 - 2\sqrt{12} - 2}{2 - 6} = \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}8.1. \cos x \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{5} \right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{11\pi}{30} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{30} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8.2. \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \cos x \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{2} \cos x\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.3. \sin(2x) + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.4. \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \times \frac{1}{2} + \cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.5. 3 \cos(2x) + 5 \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos(2x) - 1 + 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1 + 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - 1 + 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2 \cos^2 x - 1) - 1 + 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 x - 3 - 1 + 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{12}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \underbrace{\cos x = -\frac{4}{3}}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.6. \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3} + 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.7. \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \left[\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \times \frac{1}{2} =$$

$$= 2 \left[\cos x \times \frac{1}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \cos x + 2\sqrt{3} \sin x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.8. \cos(3x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (1 - \sin^2 x - 3 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 - 4 \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

9.

$$9.1. \cos x \sin(3x) + \sin x \cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{16} \vee x = \frac{5\pi}{16}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{7\pi}{16} \vee x = \frac{13\pi}{16}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } x = \frac{15\pi}{16} \vee x = \frac{21\pi}{16}.$$

$$\text{Como } x \in]0, \pi[, \text{ então C.S.} = \left\{ \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16} \right\}.$$

9.2. $\sin x - \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi.$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\pi.$$

$$\text{Como } x \in [-\pi, \pi], \text{ então C.S.} = \left\{ -\pi, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}.$$

9.3. $\sin(2x) - \sqrt{3} \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{3} \vee x = \frac{8\pi}{3}.$$

$$\text{Como } x \in]0, 2\pi[, \text{ então C.S.} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

9.4. $2 \cos(2x) + 1 + 4 \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + 1 + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin^2 x) + 1 + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4 \sin^2 x + 1 + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-8}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-8}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{4 \pm 8}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = \frac{3}{2}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{13\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Como } x \in]-\pi, \pi[, \text{ então C.S.} = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}.$$

9.5. $\cos(2x) - \sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (-2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee -2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = 0 \vee x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \pi \vee x = \frac{11\pi}{6} \vee x = \frac{19\pi}{6}.$$

$$\text{Como } x \in]0, 2\pi[, \text{ então C.S.} = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

9.6. $\sqrt{3} \sin(2x) + 3 \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2\sqrt{3} \sin x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sqrt{3} \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{7\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Como } x \in]-\pi, 0[, \text{ então C.S.} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right\}.$$

9.7. $\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{6}$.

Como $x \in]0, 2\pi[$, então C.S. = $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

9.8. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2 \left(\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{3}{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{3}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \sin x = 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{6}$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{7\pi}{6}$.

Se $k = 2$, então $x = \frac{5\pi}{6}$.

Como $x \in]-\pi, 2\pi[$, então C.S. = $\left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

10.

10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$
 $= 3 \times 1 =$
 $= 3$

10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} =$
 $= 3 \times 1 =$
 $= 3$

10.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$
 $= \frac{1}{3} \times 1 =$
 $= \frac{1}{3}$

10.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 =$
 $= \frac{1}{5} \times 1 \times 2 =$
 $= \frac{2}{5}$

11.

11.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

11.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)} =$
 $= 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{1}{2} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} =$
 $= 3 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 =$
 $= \frac{3}{2}$

11.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x =$
 $= 1$

11.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} =$
 $= \frac{1}{2} \lim_{\frac{1}{2}x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} \lim_{\frac{1}{2}x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} =$
 $= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 =$
 $= \frac{1}{4}$

11.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(3\pi x)} =$
 $= \pi \lim_{\pi x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \times \lim_{3\pi x \rightarrow 0} \frac{3\pi x}{\sin(3\pi x)} \times \frac{1}{3\pi} =$

$$= \pi \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\text{11.6. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{1 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{11.7. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times \sqrt{1 + 1} =$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\text{11.8. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(2x)}{x - \sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin(2x)}{x}}{1 - \frac{\sin(3x)}{x}} =$$

$$= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}}{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}} =$$

$$= \frac{1 - \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2}{1 - \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times 3} =$$

$$= \frac{1 - 1 \times 2}{1 - 1 \times 3} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

12.

12.1. Para que a função f seja contínua em $x = -1$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\bullet f(-1) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cos(x+1) - 1}{x+1} =$$

$$\stackrel{y=x+1}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 y - 1}{y(\cos y + 1)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 y}{y(\cos y + 1)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{\cos y + 1} =$$

$$= 1 \times 0 =$$

$$= 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sin(x+1)}{x^2 + 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sin(x+1)}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x+1 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x+1)}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+2} =$$

$$= 1 \times 1 =$$

$$= 1$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = -1$.

Para que a função g seja contínua em $x = 0$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\bullet g(0) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(x^2)}{x} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x^2 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) + 1 =$$

$$= 1 \times 0 + 1 =$$

$$= 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} =$$

$$= 0 + 1 =$$

$$= 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$, então a função g é contínua em $x = 0$.

12.2. Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$, então não há assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x+1)}{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \sin(x+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^3+3x^2+2x} \leq \frac{\sin(x+1)}{x^3+3x^2+2x} \leq \frac{1}{x^3+3x^2+2x},$$

$$\forall x \in]0, +\infty[$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^3+3x^2+2x} \right) = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+3x^2+2x} = 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x+1)}{x^3+3x^2+2x} = 0.$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x+1)}{x^2+3x+2} = 0$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \sin(x+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+3x+2} \leq \frac{\sin(x+1)}{x^2+3x+2} \leq \frac{1}{x^2+3x+2}, \forall x \in]-1, +\infty[$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2+3x+2} \right) = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} = 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x+1)}{x^2+3x+2} = 0.$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x+1) - 1}{x^2+x} = 0$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \cos(x+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \cos(x+1) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2+x} \leq \frac{\cos(x+1) - 1}{x^2+x} \leq \frac{0}{x^2+x}, \forall x \in]-\infty, -1[$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x^2+x} \right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{x^2+x} = 0,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x+1) - 1}{x^2+x} = 0.$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x+1) - 1}{x+1} = 0$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \cos(x+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \cos(x+1) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x+1} \geq \frac{\cos(x+1) - 1}{x+1} \geq \frac{0}{x+1}, \forall x \in]-\infty, -1[$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1} \right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{x+1} = 0,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x+1) - 1}{x+1} = 0.$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, então não há assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x^2} = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x^2} = \\ &= 1 - 0 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} \right) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} \leq \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\text{Como, além disso, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} = 0.$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \\ &= 0 + 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(x^2)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como, além disso, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin(x^2)}{x} + 1 \right) = \\ &= 0 + 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin(x^2)}{x} \geq \frac{1}{x}, \forall x \in]-\infty, 0[$$

Como, além disso, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0.$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

13.

$$13.1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(3x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(3x)} =$$

$$\stackrel{y=x-\frac{\pi}{2}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos\left(3y + \frac{3\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin(3y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{3y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin(3y)} \times \frac{1}{3} =$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$\stackrel{y=x-\frac{\pi}{6}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2\left(\sin y \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos y \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2\left(\sin y \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos y \times \frac{1}{2}\right)}{\sin y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3} \sin y - \cos y}{\sin y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin y} - \sqrt{3} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y}{\sin y (1 + \cos y)} - \sqrt{3} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{\sin y (1 + \cos y)} - \sqrt{3} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 + \cos y} - \sqrt{3} =$$

$$= \frac{0}{1 + 1} - \sqrt{3} =$$

$$= -\sqrt{3}$$

$$13.3. \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)} =$$

$$\stackrel{y=x-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y \sin\left(\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)} =$$

$$= \lim_{\frac{\pi}{2} y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} y}{\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)} \times \frac{2}{\pi} \times \lim_{y \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) =$$

$$= 1 \times \frac{2}{\pi} \times 1 =$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} =$$

$$= 1^3 \times \frac{1}{1 \times (1 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

14.

$$14.1. d'(x) = (2 \sin x + \operatorname{tg} x)' =$$

$$= 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$14.2. b'(x) = (4 \sin x \cos x)' =$$

$$= 4 (\cos x \cos x + \sin x (-\sin x)) =$$

$$= 4 (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= 4 \cos (2x)$$

$$14.3. c'(x) = (\sin (5x + 2))' = 5 \cos (5x + 2)$$

$$14.4. d'(x) = (\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x =$$

$$= \frac{\cos x}{2 \sqrt{\sin x}}$$

$$14.5. e'(x) = (x^2 (\sin x - 2x))' =$$

$$= 2x (\sin x - 2x) + x^2 (\cos x - 2) =$$

$$= 2x \sin x - 4x^2 + x^2 \cos x - 2x^2 =$$

$$= 2x \sin x + x^2 \cos x - 6x^2$$

$$14.6. f'(x) = (\sin^2 x)' =$$

$$= 2 \sin x \cos x =$$

$$= \sin (2x)$$

$$14.7. g'(x) = (\cos (x^2 + 2x + 2))' =$$

$$= -(2x + 2) \sin (x^2 + 2x + 2)$$

$$14.8. h'(x) = (\operatorname{tg}^2 (3x + 1))' =$$

$$= 2 \operatorname{tg} (3x + 1) \times \frac{3}{\cos^2 (3x + 1)} =$$

$$= \frac{6 \sin (3x + 1)}{\cos^3 (3x + 1)}$$

$$14.9. i'(x) = (\operatorname{tg} (\cos x))' = \frac{-\sin x}{\cos^2 (\cos x)}$$

$$14.10. j'(x) = (\cos (2x + 1)^2)' =$$

$$= -2 (2x + 1) \times 2 \sin (2x + 1)^2 =$$

$$= -4 (2x + 1) \sin (2x + 1)^2$$

$$14.11. k'(x) = (\cos^2 (2x + 1))' =$$

$$= 2 \cos (2x + 1) (-2 \sin (2x + 1)) =$$

$$= -2 \times 2 \sin (2x + 1) \cos (2x + 1) =$$

$$= -2 \sin (4x + 2)$$

$$14.12. l'(x) = \left(\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \right)' =$$

$$= \frac{-\sin x \times 2 \sin^2 x - \cos x \times 2 \times 2 \sin x \cos x}{4 \sin^4 x} =$$

$$= \frac{-2 \sin^3 x - 4 \sin x \cos^2 x}{4 \sin^4 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - 2 \cos^2 x}{2 \sin^3 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - 2 (1 - \sin^2 x)}{2 \sin^3 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - 2 + 2 \sin^2 x}{2 \sin^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x - 2}{2 \sin^3 x}$$

$$14.13. m'(x) = \left(\frac{\cos x}{x^2} \right)' =$$

$$= \frac{-\sin x \times x^2 - \cos x \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$$

$$14.14. n'(x) = (\cos^2 (x^3))' =$$

$$= 2 \cos (x^3) (3x^2 \times (-\sin (x^3))) =$$

$$= -3x^2 \times 2 \sin (x^3) \cos (x^3) =$$

$$= -3x^2 \sin (2x^3)$$

15.

$$15.1. f'(x) = (\cos x + \sin x)' = -\sin x + \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $x = \frac{\pi}{4}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de f'		+	0	-	
Variação de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

A função f é estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; -1 e 1

são mínimos relativos para $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, res-

petivamente, $\sqrt{2}$ é máximo relativo para $x = \frac{\pi}{4}$.

$$15.2. g'(x) = (\sin (2x) - x)' = 2 \cos (2x) - 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos (2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos (2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que $x \in [0, 2\pi]$, então $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

$$\vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}.$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Sinal de g'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
Varição de g	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

$$g(0) = \sin(0) - 0 = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$$

$$g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{6}$$

$$g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11\pi}{6}$$

$$g(2\pi) = \sin(4\pi) - 2\pi = -2\pi$$

A função g é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$,

em $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ e é estritamente

decrecente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$; 0 é mí-

nimo relativo para $x = 0$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$ é mínimo

relativo para $x = \frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11\pi}{6}$ é mínimo rela-

tivo para $x = \frac{11\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ é máximo relativo

para $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{6}$ é máximo relativo para

$x = \frac{7\pi}{6}$ e -2π é máximo relativo para $x = 2\pi$.

$$15.3. h'(x) = (2x - \operatorname{tg} x)' = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 0 \wedge \cos^2 x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de h'	n.d.	-	0	+	0	-	n.d.
Varição de h	n.d.	↘	Mín.	↗	Máx.	↘	n.d.

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

A função h é estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

e é estritamente decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ e em

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; $-\frac{\pi}{2} + 1$ é mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{4}$ e

$\frac{\pi}{2} - 1$ é máximo relativo para $x = \frac{\pi}{4}$.

$$15.4. i'(x) = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x}\right)' = -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos x + \sin x = 0 \wedge (\sin x + \cos x)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \wedge (\sin x + \cos x)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então $x = \frac{\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de i'		-	0	+	
Varição de i	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

$$i(0) = \frac{1}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$i\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$i\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

A função i é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

e é estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é

mínimo relativo para $x = \frac{\pi}{4}$, 1 é máximo relativo

para $x = 0$ e para $x = \frac{\pi}{2}$.

$$16. f''(x) = (-\sin x + \cos x)' = -\cos x - \sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ então } x = -\frac{\pi}{4}.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de f''		+	0	-	
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cup$	P.I.	$\cap$	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima

em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$ e tem a concavidade voltada para

baixo em $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem um ponto de inflexão de

abscissa $x = -\frac{\pi}{4}$.

$$g''(x) = (2 \cos(2x) - 1)' = -4 \sin(2x)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee$$

$$\vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi.$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de g''	0	-	0	+	0	-	0	+	0
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima

em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e tem a concavidade vol-

tada para baixo em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$; tem três

pontos de inflexão de abscissas $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$h''(x) = \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{-1 \times (\cos^2 x)'}{\cos^4 x} =$$

$$= -\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x} =$$

$$= -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin x = 0 \wedge \cos^3 x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ então } x = 0.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de h''	n.d.	+	0	-	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de h	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima

em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo

em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; tem um ponto de inflexão de abscissa $x = 0$.

$$i''(x) = \left(-\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}\right)' =$$

$$= -\frac{(-\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)2(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^4} =$$

$$= -\frac{(\cos x - \sin x)2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^4} =$$

$$= -\frac{-(\sin x + \cos x)^3 - 2(\cos x - \sin x)^2(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^4} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + 2(\cos x - \sin x)^2}{(\sin x + \cos x)^3} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^3} =$$

$$= \frac{3 - 2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} =$$

$$= \frac{3 - \sin(2x)}{(\sin x + \cos x)^3} =$$

$$= \frac{3 - \sin(2x)}{(\sin x + \cos x)^3}$$

$$i''(x) > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

O gráfico de i tem a concavidade voltada para cima

em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; não tem pontos de inflexão.

17.

$$17.1. f(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{\cos(2x) - 1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos(2x) - 1 \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Cálculo auxiliar

$$\cos(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\cos(-2x) + 1}{\cos(-2x) - 1} = \\ &= \frac{\cos(2x) + 1}{\cos(2x) - 1} = \\ &= f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Ou seja, a função f é par.

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \frac{\cos(2(x + \pi)) + 1}{\cos(2(x + \pi)) - 1} = \\ &= \frac{\cos(2x + 2\pi) + 1}{\cos(2x + 2\pi) - 1} = \\ &= \frac{\cos(2x) + 1}{\cos(2x) - 1} = \\ &= f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Assim, f é periódica de período π .

Como f é par e periódica de período π , e tendo em conta o seu domínio, basta estudar a monotonia no intervalo $]0, \pi[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos(2x) + 1}{\cos(2x) - 1} \right)' = \\ &= \frac{-2 \sin(2x)(\cos(2x) - 1) - (\cos(2x) + 1)(-2 \sin(2x))}{(\cos(2x) - 1)^2} = \\ &= \frac{-2 \sin(2x)(\cos(2x) - 1 - \cos(2x) - 1)}{(\cos(2x) - 1)^2} = \\ &= \frac{4 \sin(2x)}{(\cos(2x) - 1)^2} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4 \sin(2x)}{(\cos(2x) - 1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \sin(2x) = 0 \wedge (\cos(2x) - 1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal de f'	n.d.	+	0	-	n.d.
Varição de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

A função f é estritamente crescente em

$\left]0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 17.2. g(x) &= \frac{\cos(2x) + \sin(2x)}{\cos(2x) - \sin(2x)} \\ D_g &= \{x \in \mathbb{R} : \cos(2x) - \sin(2x) \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \cos(2x) - \sin(2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{\cos(-2x) + \sin(-2x)}{\cos(-2x) - \sin(-2x)} = \\ &= \frac{\cos(2x) - \sin(2x)}{\cos(2x) + \sin(2x)} \end{aligned}$$

Então:

$$\exists x \in D_g : g(-x) \neq g(x) \text{ e } \exists x \in D_g : g(-x) \neq -g(x)$$

Ou seja, a função g não é par nem ímpar.

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)} = \\ &= \frac{\cos(2x + \pi) + \sin(2x + \pi)}{\cos(2x + \pi) - \sin(2x + \pi)} = \\ &= \frac{-\cos(2x) - \sin(2x)}{-\cos(2x) + \sin(2x)} = \\ &= \frac{\cos(2x) + \sin(2x)}{\cos(2x) - \sin(2x)} = \\ &= g(x), \forall x \in D_g \end{aligned}$$

Assim, g é periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

Como g é periódica de período $\frac{\pi}{2}$, e tendo em conta o seu domínio, basta estudar a monotonia no intervalo $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right[$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\cos(2x) + \sin(2x)}{\cos(2x) - \sin(2x)} \right)' = \\ &= \frac{(-2 \sin(2x) + 2 \cos(2x))(\cos(2x) - \sin(2x)) - (\cos(2x) + \sin(2x))(-2 \sin(2x) - 2 \cos(2x))}{(\cos(2x) - \sin(2x))^2} = \\ &= \frac{2(\cos(2x) - \sin(2x))^2 + 2(\cos(2x) + \sin(2x))^2}{(\cos(2x) - \sin(2x))^2} = \\ &= \frac{2(\cos^2(2x) - 2 \cos(2x) \sin(2x) + \sin^2(2x)) + 2(\cos^2(2x) + 2 \cos(2x) \sin(2x) + \sin^2(2x))}{(\cos(2x) - \sin(2x))^2} = \\ &= \frac{2(2 \cos^2(2x) + 2 \sin^2(2x))}{(\cos(2x) - \sin(2x))^2} = \\ &= \frac{4}{(\cos(2x) - \sin(2x))^2} \\ g'(x) &> 0, \forall x \in \left]\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right[\end{aligned}$$

Então, a função g é crescente em $\left[\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

18. A função f tem período $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ e encontra-se

representada no gráfico (II).

A função g tem período $\frac{2\pi}{2} = \pi$ e encontra-se representada no gráfico (IV).

A função h tem período 2π e encontra-se representada no gráfico (I).

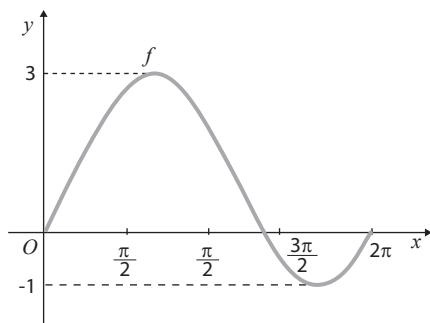
A função i tem período $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ e encontra-se representada no gráfico (VI).

A função j tem período $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ e encontra-se representada no gráfico (III).

A função k tem período $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e encontra-se representada no gráfico (V).

19.

19.1. $f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, em $[0, 2\pi]$



Período positivo mínimo: 2π

Contradomínio

Em $[0, 2\pi]$:

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$-1 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 3$$

Assim, $D' = [-1, 3]$.

Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

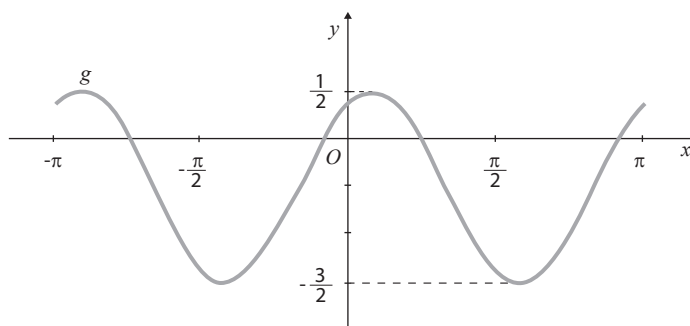
$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } [0, 2\pi], x = 0 \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 2\pi.$$

19.2. $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$, em $[-\pi, \pi]$



Cálculos auxiliares

$$g(-\pi) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$g(\pi) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Contradomínio

Em $[-\pi, \pi]$:

$$-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$-\frac{3}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } D' = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Zeros

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

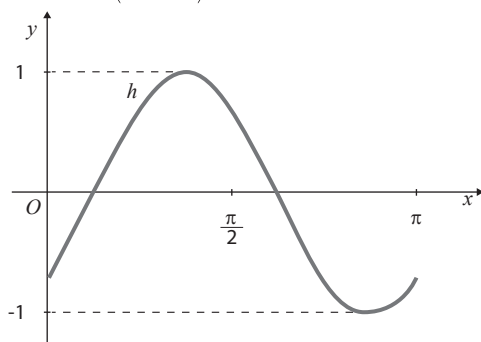
$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } [-\pi, \pi], x = -\frac{3\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{12} \vee$$

$$\vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{11\pi}{12}.$$

19.3. $h(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, em $[0, \pi]$



Cálculos auxiliares

$$h(0) = -\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h(\pi) = -\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Contradomínio

Em $[0, \pi]$:

$$-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-1 \leq -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

Assim, $D' = [-1, 1]$.

Zeros

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

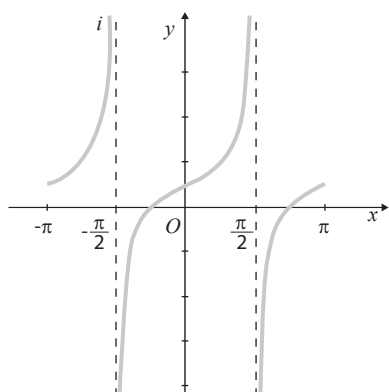
$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8}$.

19.4. $i(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{2}$, em $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$



Cálculos auxiliares

$$i(-\pi) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$i(\pi) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Período positivo mínimo: π

Contradomínio

$$D' = \mathbb{R}$$

Zeros

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$.

20.

20.1. $\forall t \in [0, 5[$:

$$-1 \leq \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}$$

A distância mínima de P ao ponto O é 0,5 cm e a distância máxima de P ao ponto O é 2,5 cm.

20.2. A amplitude do movimento de P é 1.

O ângulo de fase é $\frac{\pi}{4}$.

20.3. O período é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

A frequência é $\frac{1}{2}$.

20.4. $d(t) = 2$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \pi t = -\frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{12} + k \vee t = -\frac{7}{12} + k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 5[$, e pretende-se apenas os três primeiros instantes em que o ponto P está a uma distância de 2 cm do ponto O , então $t = \frac{1}{12}$ s ou $t = \frac{5}{12}$ s ou $t = \frac{13}{12}$ s.

21.

$$\begin{aligned}
 21.1. x(t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\
 &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = \\
 &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 \text{Como } x(t) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ e } \sqrt{2} > 0, \frac{\pi}{2} > 0 \text{ e } \\
 \frac{\pi}{4} &\in [0, 2\pi[, \text{ então } x(t) \text{ é um oscilador harmônico.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21.2. x(t) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 x'(t) &= \left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \right)' = \\
 &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \\
 &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$x''(t) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned}
 x''(t) &= -kx(t) \\
 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) &= -k \times \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} &= -k \times \sqrt{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} &= k
 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}
 22.1. A_{[ABC]} &= \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \\
 &= \frac{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha}{2} = \\
 &= \frac{\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \\
 &= \frac{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{4} = \\
 &= \frac{2 \sin \alpha + \sin (2\alpha)}{4} = \\
 &= f(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$22.2. f'(\alpha) = \left(\frac{2 \sin \alpha + \sin (2\alpha)}{4} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8 \cos \alpha + 8 \cos (2\alpha)}{16} = \\
 &= \frac{\cos \alpha + \cos (2\alpha)}{2}
 \end{aligned}$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha + \cos (2\alpha)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha + \cos (2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos (\alpha) = -\cos (2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\alpha) = \cos (\pi - 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -\pi + 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \pi + 2k\pi \vee -\alpha = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

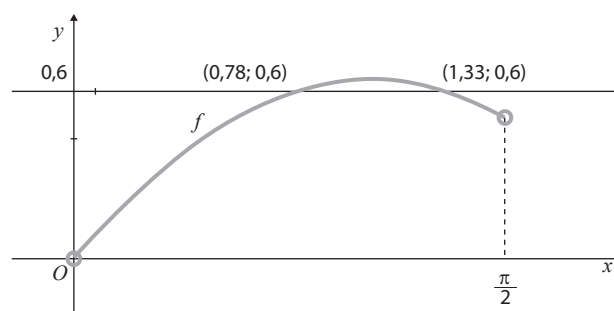
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de f	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

O valor de α para o qual a área é máxima é $\frac{\pi}{3}$.

$$22.3. f(\alpha) = 0,6$$



Os valores de α para os quais a área do triângulo $[ABC]$ é 0,6 são, aproximadamente, 0,78 e 1,33.

$$22.4. f'(x) = \frac{\cos x + \cos (2x)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{4}
 \end{aligned}$$

23.

$$23.1. f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin (2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\sin (2x)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin x &= \sin(\pi + 2x) \\ \Leftrightarrow x &= \pi + 2x + 2k\pi \vee x = \pi - (\pi + 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow -x &= \pi + 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= -\pi + 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\text{Em } [0, 2\pi], x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 2\pi.$$

$$\begin{aligned}23.2. f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \cos(2x) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \cos(2x) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \cos(2x) = \\ &= \sqrt{2} \cos x + 2 \cos(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}23.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 = \\ &= 1 + 1 \times 2 = \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}23.4. f'(x) &= (\sin x + \sin(2x))' = \\ &= \cos x + 2 \cos(2x)\end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos \pi = 0 - 2 = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) = 1 + 0 = 1$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é da forma $y = -2x + b$.

O ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pertence a esta reta, logo:

$$1 = -2 \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = 1 + \pi$$

Assim, a equação pretendida é $y = -2x + 1 + \pi$.

$$\begin{aligned}23.5. g(x) &= f(x) + \sin x = 2 \sin x + \sin(2x) \\ g'(x) &= 2 \cos x + 2 \cos(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{-1 \pm 3}{4} \\ \Leftrightarrow \cos x &= -1 \vee \cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ &\quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
Sinal de g'		+	0	-	0	-	0	+	
Variação de g	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

$$g(0) = 2 \sin 0 + \sin(2 \times 0) = 0$$

$$\begin{aligned}g\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$g(2\pi) = 2 \sin(2\pi) + \sin(2 \times 2\pi) = 0$$

A função g é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e

em $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ e é estritamente decrescente em

$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$; 0 é mínimo relativo de g para $x = 0$,

$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ é mínimo relativo de g para $x = \frac{5\pi}{3}$,

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ é máximo relativo de g para $x = \frac{\pi}{3}$ e 0 é

máximo relativo de g para $x = 2\pi$.

24.

$$\begin{aligned}24.1. f(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &\quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^2 = \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} = \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

24.2. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2}}{x} = \\
&= \frac{\sin^2 0 - \frac{1}{2}}{+\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} \right) = \\
&= \sin^2 0 - \frac{1}{2} = \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

De forma análoga se conclui que a reta de equação $y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

24.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi + 2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{1 + 2k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

24.4. $f'(x) = \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{2} \right)' =$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(\frac{\pi}{x}\right)' \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \\
&= 2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \\
&= -\frac{\pi}{x^2} \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \\
&= -\frac{\pi}{x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\pi}{x} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

Como $x \in [1, +\infty[$, então $x = 1 \vee x = 2$.

x	1		2	$+\infty$
Sinal de f'	0	+	0	-
Variação de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{1}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(2) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A função f é estritamente crescente em $[1, 2]$ e é estritamente decrescente em $[2, +\infty[$, $-\frac{1}{2}$ é mínimo relativo de f para $x = 1$ e $\frac{1}{2}$ é máximo relativo de f para $x = 2$.

25.

25.1. Para que a função f seja contínua em $x = 0$, é necessário que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \\
&= -1 \times 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos x - \sin(2x)}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

25.2. $g(x) = xf(x) = \cos(2x) - \cos^2 x, x \in \mathbb{R}^+$

a) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{13}{9}$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{13}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{13}$$

Assim:

$$g(\alpha) = \cos(2\alpha) - \cos^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha =$$

$$= -\sin^2 \alpha =$$

$$= -\frac{4}{13}$$

b) A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$; em particular, g é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$g(\pi) = \cos(2\pi) - \cos^2(\pi) = 0$$

$$\text{Logo, } g\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g(\pi).$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que existe pelo menos uma solução da equação $g(x) = -\frac{1}{2}$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$g'(x) = (\cos(2x) - \cos^2 x)' =$$

$$= -2 \sin(2x) + 2 \cos x \sin x =$$

$$= -2 \sin(2x) + \sin(2x) =$$

$$= -\sin(2x)$$

$g'(x) > 0$, para todo o $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, logo a função g é estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Então, pode concluir-se que a equação $g(x) = -\frac{1}{2}$ tem exatamente uma solução em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

26.

26.1. $v(t) = d'(t) =$

$$= \left[2,34 \left(t - \frac{60}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{60} t\right) \right) \right]' =$$

$$= 2,34 \left(1 - \frac{60}{\pi} \times \frac{\pi}{60} \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) \right) =$$

$$= 2,34 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) \right) =$$

$$d'(20) = 2,34 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{60} \times 20\right) \right) =$$

$$= 2,34 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= 2,34 - 2,34 \times \frac{1}{2} =$$

$$= 1,17$$

A velocidade, 20 segundos após a saída da primeira paragem, é 1,17 m/s.

26.2. $v(t) = 0 \Leftrightarrow 2,34 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) \right) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{60} t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 120k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 1$, então $t = 120$, ou seja, a viagem demora 2 minutos.

$$d(120) = 2,34 \left(120 - \frac{60}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{60} \times 120\right) \right) =$$

$$= 280,8 - 2,34 \times \frac{60}{\pi} \sin(2\pi) =$$

$$= 280,8$$

A distância entre as duas paragens é 280,8 metros.

26.3. $\frac{280,8}{120} = 2,34$

A velocidade média do funicular entre as duas paragens é 2,34 m/s.

26.4. $a(t) = v'(t) =$

$$= \left[2,34 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{60} t\right) \right) \right]' =$$

$$= \frac{2,34\pi}{60} \sin\left(\frac{\pi}{60} t\right)$$

$$a(30) = \frac{2,34\pi}{60} \sin\left(\frac{\pi}{60} \times 30\right) =$$

$$= \frac{2,34\pi}{60} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2,34\pi}{60}$$

$$\approx 0,12$$

A aceleração do funicular, 30 segundos após a saída da primeira paragem, é aproximadamente $0,12 \text{ m/s}^2$.

Tema V - Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

Páginas 47 a 55

1. $C_4 = 1200(1 + 0,04)^4 \approx 1403,83 \text{ €}$

2. $C_1 = 5000 \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 \approx 5627,54 \text{ €}$

3. $C_{18} = 2000 \left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2 \times 18} \approx 2861,54 \text{ €}$

4. $15\,000 = C_0(1 + 0,025)^5 \Leftrightarrow C_0 = \frac{15\,000}{(1 + 0,025)^5}$

Logo, $C_0 \approx 13\,257,81 \text{ €}$.

5. $2000 = 1000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[5]{2}$$

$$\Leftrightarrow r = (\sqrt[5]{2} - 1) \times 100$$

Logo, $r \approx 14,9\%$.

6.

6.1. $C_1 = 100\,000 (1 + 1)^1 = 200\,000 \text{ €}$

6.2. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 225\,000 \text{ €}$

6.3. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 244\,140,63 \text{ €}$

6.4. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 261\,303,53 \text{ €}$

6.5. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{52}\right)^{52} \approx 269\,259,70 \text{ €}$

6.6. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 271\,456,75 \text{ €}$

6.7. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{365 \times 24}\right)^{365 \times 24} \approx 271\,812,67 \text{ €}$

6.8. $C_1 = 100\,000 \left(1 + \frac{1}{365 \times 24 \times 60}\right)^{365 \times 24 \times 60}$

$$\approx 271\,827,92 \text{ €}$$

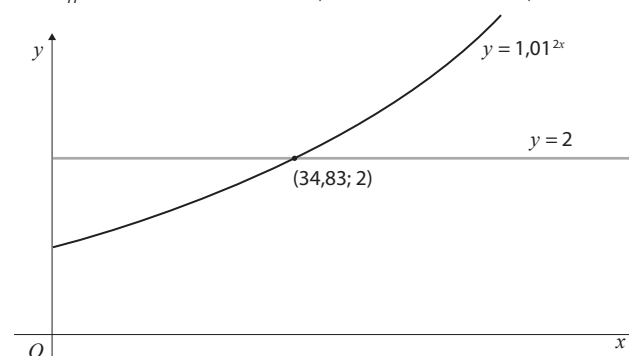
6.9. $C_1 = 100\,000 \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 100\,000 \times e$

$$\approx 271\,828,18 \text{ €}$$

7.

7.1. $C_n = 6000 \left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow C_n = 6000 \times 1,01^{2n}$

7.2. $C_n = 12\,000 \Leftrightarrow 6000 \times 1,01^{2n} = 12\,000 \Leftrightarrow 1,01^{2n} = 2$



A Fátima duplica o seu investimento ao fim de 35 anos.

8. $C_3 = 3000 (1 + 0,1)^3 = 3993 \text{ €}$

$$C_8 = 3993 (1 + 0,08)^5 \approx 5867,03 \text{ €}$$

9. $C_2 = C_0 (1 + 0,03)^2 \Leftrightarrow C_0 + 487,20 = C_0 \times 1,0609$

$$\Leftrightarrow 0,0609 C_0 = 487,20$$

$$\Leftrightarrow C_0 = \frac{487,20}{0,0609}$$

$$\Leftrightarrow C_0 = 8000 \text{ €}$$

10. $C_1 = 1500 (1 + 0,015) = 1522,5 \text{ €}$

$$C_2 = 2022,5 (1 + 0,015) \approx 2052,84 \text{ €}$$

$$C_3 = 2552,84 (1 + 0,015) \approx 2591,13 \text{ €}$$

$$C_4 = 3091,13 (1 + 0,015) \approx 3137,50 \text{ €}$$

$$C_5 = 3637,50 (1 + 0,015) \approx 3692,06 \text{ €}$$

11.

11.1. $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

$$\text{C.S.} = \{-3\}$$

11.2. $2^{x-2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^6$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

$$\text{C.S.} = \{8\}$$

11.3. $3^{3-x} = 9^{x-3} \Leftrightarrow 3^{3-x} = 3^{2x-6}$

$$\Leftrightarrow 3 - x = 2x - 6$$

$$\Leftrightarrow -3x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

$$11.4. 16^{x-2} = 2 \Leftrightarrow 2^{4x-8} = 2^1 \Leftrightarrow 4x-8=1 \\ \Leftrightarrow 4x=9 \\ \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{9}{4} \right\}$$

$$11.5. 3 \times 81^{2x-1} = 9^{2x} \Leftrightarrow 3 \times 3^{8x-4} = 3^{4x} \\ \Leftrightarrow 3^{8x-3} = 3^{4x} \\ \Leftrightarrow 8x-3=4x \\ \Leftrightarrow 4x=3 \\ \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$$

$$11.6. \frac{1}{8^{x-2}} = 2^{4-x} \Leftrightarrow 2^{-3x+6} = 2^{4-x} \\ \Leftrightarrow -3x+6=4-x \\ \Leftrightarrow -2x=-2 \\ \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

12.

$$12.1. 25^{2x-1} < 1 \Leftrightarrow 5^{4x-2} < 5^0 \Leftrightarrow 4x-2 < 0 \\ \Leftrightarrow 4x < 2 \\ \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$$

$$12.2. 16^{2x-4} \geq 32^{x-1} \Leftrightarrow 2^{8x-16} \geq 2^{5x-5} \\ \Leftrightarrow 8x-16 \geq 5x-5 \\ \Leftrightarrow 3x \geq 11 \\ \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{11}{3}, +\infty \right[$$

$$12.3. 2^{x+1} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{x+1} \leq 2^{-4} \\ \Leftrightarrow x+1 \leq -4 \\ \Leftrightarrow x \leq -5$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -5]$$

$$12.4. 256^x \leq 4 \times 16^{x+1} \Leftrightarrow 2^{8x} \leq 2^2 \times 2^{4x+4} \\ \Leftrightarrow 2^{8x} \leq 2^{4x+6} \\ \Leftrightarrow 8x \leq 4x+6 \\ \Leftrightarrow 4x \leq 6 \\ \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$$

$$12.5. \frac{2^{10}}{2^x \times 16} \geq 2^x \Leftrightarrow \frac{2^{10}}{2^x \times 2^4} \geq 2^x \\ \Leftrightarrow \frac{2^{10}}{2^{x+4}} \geq 2^x \\ \Leftrightarrow 2^{-x+6} \geq 2^x \\ \Leftrightarrow -x+6 \geq x \\ \Leftrightarrow -2x \geq -6 \\ \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 3]$$

$$12.6. 125 < 5 \times 25^{2x-1} \Leftrightarrow 5^3 < 5 \times 5^{4x-2} \\ \Leftrightarrow 5^3 < 5^{4x-1} \\ \Leftrightarrow 3 < 4x-1 \\ \Leftrightarrow -4x < -4 \\ \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{C.S.} =]1, +\infty[$$

13.

$$13.1. \lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$13.2. \lim \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{2n}{n+1}} = \\ = (e^3)^2 = \\ = e^6$$

$$13.3. \lim \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{n+2} = \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n+1} \right]^{\frac{n+2}{2n+1}} = \\ = (e^1)^{\frac{1}{2}} = \\ = \sqrt{e}$$

$$13.4. \lim \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{n+3} = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0$$

$$13.5. \lim \left(\frac{3n+1}{n+2} \right)^{2n-2} = 3^{+\infty} = +\infty$$

$$13.6. \lim \left(\frac{n+3}{n} \right)^{n+1} = \lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{n+1} = \\ = \lim \left[\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n \right]^{\frac{n+1}{n}} = \\ = (e^3)^1 = \\ = e^3$$

$$13.7. \lim \left(\frac{n+5}{n+3} \right)^{3n-1} = \lim \left(1 + \frac{2}{n+3} \right)^{3n-1} = \\ = \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n+3} \right)^{n+3} \right]^{\frac{3n-1}{n+3}} = \\ = (e^2)^3 = \\ = e^6$$

$$13.8. \lim \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+3} = \lim \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right)^{n+3} = \\ = \lim \left[\left(1 - \frac{2}{2n+1} \right)^{2n+1} \right]^{\frac{n+3}{2n+1}} =$$

$$= (e^{-2})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= e^{-1} =$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$13.9. \lim \left(1 + \frac{n}{n^2+1} \right)^{2n} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{n}} \right)^{2n} =$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{n}} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} \right]^{\frac{2n^2}{n^2+1}} =$$

$$= (e^1)^2 =$$

$$= e^2$$

14.

$$14.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{5x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} \times 5 = 1 \times 5 = 5$$

limite notável

$$14.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{1-e^x} = -5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} = -5 \times 1 = -5$$

limite notável

$$14.3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{e^x-e^5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{e^5(e^{x-5}-1)} =$$

$$= -\frac{1}{e^5} \lim_{x-5 \rightarrow 0} \frac{x-5}{e^{x-5}-1} =$$

limite notável

$$= -\frac{1}{e^5} \times 1 =$$

$$= -\frac{1}{e^5}$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x+1}-e}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{2x}-1)}{5x} =$$

$$= \frac{e}{5} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2 =$$

limite notável

$$= \frac{e}{5} \times 1 \times 2 =$$

$$= \frac{2e}{5}$$

$$14.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \frac{2}{3} =$$

limite notável limite notável

$$= 1 \times 1 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$14.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} \times \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 1 \times 0 = 0$$

limite notável

15.

$$15.1. f'(x) = (e^{-x+1})' = (-x+1)' e^{-x+1} =$$

$$= -e^{-x+1}$$

$$15.2. f'(x) = (\sqrt{e^{x^2-1}})' = \left(e^{\frac{x^2-1}{2}} \right)' =$$

$$= \left(\frac{x^2-1}{2} \right)' e^{\frac{x^2-1}{2}} =$$

$$= x e^{\frac{x^2-1}{2}} =$$

$$= x \sqrt{e^{x^2-1}}$$

$$15.3. f'(x) = (e^{\sin x + \cos x})' =$$

$$= (\sin x + \cos x)' e^{\sin x + \cos x} =$$

$$= (\cos x - \sin x) e^{\sin x + \cos x}$$

$$15.4. f'(x) = \left(\frac{x+1}{e^{x+1}} \right)' =$$

$$= \frac{(x+1)' e^{x+1} - (x+1) (e^{x+1})'}{(e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{e^{x+1} - (x+1)e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{e^{x+1}(1-x-1)}{(e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{-x}{e^{x+1}}$$

$$15.5. f'(x) = ((ex+2)(e^{3x}+1))' =$$

$$= (ex+2)' (e^{3x}+1) + (ex+2) (e^{3x}+1)' =$$

$$= e(e^{3x}+1) + (ex+2) (3x)' e^{3x} =$$

$$= e^{3x+1} + e + (ex+2) \times 3e^{3x} =$$

$$= e^{3x+1} + e + 3xe^{3x+1} + 6e^{3x} =$$

$$= (3x+1)e^{3x+1} + 6e^{3x} + e$$

$$15.6. f'(x) = (2^{x+1})' = (x+1)' 2^{x+1} \ln(2) = 2^{x+1} \ln(2)$$

16.

$$16.1. 2^{-a} = \frac{1}{2^a} = \frac{1}{3}$$

$$16.2. 2^{b+1} = 2^b \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$$16.3. 3^{2a} = (3^a)^2 = 7^2 = 49$$

$$16.4. 2^{\frac{a}{2}} = \sqrt{2^a} = \sqrt{3}$$

$$16.5. 2^{a^2} = (2^a)^a = 3^a = 7$$

$$16.6. 2^{a+b} = 2^a \times 2^b = 3 \times 5 = 15$$

$$16.7. 2^{2a-b} = (2^a)^2 \times 2^{-b} = 3^2 \times \frac{1}{2^b} = \frac{9}{5}$$

$$16.8. \left(\frac{2}{3} \right)^a = \frac{2^a}{3^a} = \frac{3}{7}$$

$$16.9. 3^{-\frac{a}{2}} = (3^a)^{-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$16.10. 6^a = 2^a \times 3^a = 3 \times 7 = 21$$

17.

$$17.1. 2^{x+1} \times 2^{x-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^8$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

$$17.2. 2^{2x} - 3 \times 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \quad (y = 2^x)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^2 \vee \underbrace{2^x = -1}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

$$17.3. 3^{3x} + 3^{x+2} - 18 \times 3^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} + 3^x \times 3^2 - 18 \times 3^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} - 9 \times 3^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x (3^{2x} - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 3^{2x} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

$$17.4. \frac{3}{1+2^{-x+2}} = 2 \Leftrightarrow 1+2^{-x+2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x+2} = 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -x+2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

$$17.5. 2^{4x+1} - 3 \times 2^{2x+2} = -16$$

$$\Leftrightarrow 2^{4x} \times 2 - 3 \times 2^{2x} \times 2^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2^{4x} - 12 \times 2^{2x} + 16 = 0 \quad (y = 2^{2x})$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 12y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \vee 2^{2x} = 2^1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 \vee 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$17.6. 3^{\frac{x-2}{x+2}} = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x-2}{x+2}} = 3^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-3x-6}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-8}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x-8 = 0 \wedge x+2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{C.S.} = \{-4\}$$

$$17.7. \sqrt[3]{3^{x^2}} = 9^{1-\frac{x}{6}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x^2}{3}} = 3^{2-\frac{x}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} = 2 - \frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 2\}$$

$$17.8. 2^{x+1} + 14 = 2^{-x+4}$$

$$\Leftrightarrow 2^x \times 2 + 14 - 2^{-x} \times 2^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2^x + 14 - \frac{16}{2^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} + 14 \times 2^x - 16 = 0 \quad (y = 2^x)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 14y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 7y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = -8$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 1 \vee \underbrace{2^x = -8}_{\text{condição impossível}}$$

$$\text{condição impossível}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{C.S.} = \{0\}$$

18.

$$18.1. 5^{\frac{x^2-9}{x^2+3}} < 1 \Leftrightarrow 5^{\frac{x^2-9}{x^2+3}} < 5^0$$

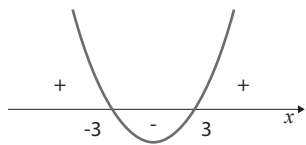
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 < 0$$

(já que $x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

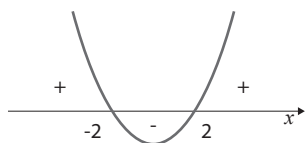


$$\text{C.S.} =]-3, 3[$$

$$\begin{aligned} 18.2. 2^{x^2} &> 2^4 \Leftrightarrow x^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 18.3. \underbrace{3^x}_{> 0, \forall x \in \mathbb{R}} (2^x - 1) &\leq 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 \leq 0 \\ &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2^x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0]$$

$$\begin{aligned} 18.4. 2 \times 3^x &< 6 \times 9^{2x} \Leftrightarrow 2 \times 3^x < 2 \times 3 \times 3^{4x} \\ &\Leftrightarrow 3^x < 3^{4x+1} \\ &\Leftrightarrow x < 4x+1 \\ &\Leftrightarrow -3x < 1 \\ &\Leftrightarrow 3x > -1 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$$

$$\begin{aligned} 18.5. x \times 2^{x+3} &\geq 16x \Leftrightarrow x \times 2^{x+3} - 16x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(2^{x+3} - 16) \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$2^{x+3} - 16$	-	-	-	0	+
$x(2^{x+3} - 16)$	+	0	-	0	+

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 16 &= 0 \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^4 \\ &\Leftrightarrow x+3 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

$$18.6. 81^{\frac{1}{x}} \geq 3^{5-x} \Leftrightarrow 3^{\frac{4}{x}} \geq 3^{5-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x} \geq 5-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x} - 5 + x \geq 0$$

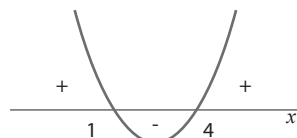
$$\Leftrightarrow \frac{4-5x+x^2}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	0		1		4	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$	+	+	+	0	-	0	+
x	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 5x + 4}{x}$	-	n.d.	+	0	-	0	+

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$



$$\text{C.S.} =]0, 1] \cup [4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 18.7. 3^x + 3^{-x+2} &\leq 6 \Leftrightarrow 3^x + \frac{9}{3^x} - 6 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3^{2x} + 9 - 6 \times 3^x \leq 0 \quad (y = 3^x) \\ &\Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (y-3)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow y = 3 \\ &\Leftrightarrow 3^x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

$$18.8. 2^{x+1} + 2^{x-1} > 20 \Leftrightarrow 2^x \times 2 + 2^x \times \frac{1}{2} > 20$$

$$\Leftrightarrow 2^x \left(2 + \frac{1}{2} \right) > 20$$

$$\Leftrightarrow 2^x \times \frac{5}{2} > 20$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 8$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 2^3$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{C.S.} =]3, +\infty[$$

$$18.9. 6 - 2^{3-x} > 2^x \Leftrightarrow 6 - 2^{3-x} - 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - \frac{8}{2^x} - 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 2^x - 8 - 2^{2x} > 0 \quad (y = 2^x)$$

$$\Leftrightarrow 6y - 8 - y^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow y > 2 \wedge y < 4$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 2 \wedge 2^x < 4$$

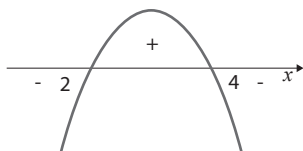
$$\Leftrightarrow x > 1 \wedge x < 2$$

Cálculo auxiliar

$$-y^2 + 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 2$$



$$\text{C.S.} =]1, 2[$$

$$18.10. x^2 e^x + x e^{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{> 0, \forall x \in \mathbb{R}} (x^2 + x e^{-1}) \leq 0$$

$$> 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x(x + e^{-1}) \leq 0$$

x	$-\infty$	0		$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$x + \frac{1}{e}$	-	-	-	0	+
$x(x + \frac{1}{e})$	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$$

19.

$$19.1. f(1) = 2e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x e^x - e}{x - 1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)e^{y+1} - e}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y e^{y+1} + e^{y+1} - e}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y+1} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e(e^y - 1)}{y} = \\ &= e + e \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = \\ &= e + e \times 1 = \\ &= 2e \end{aligned}$$

Mudança de variável: $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

$$\begin{aligned} 19.2. m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - e}{x^2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{+\infty - 0}{1 - 0} = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x - e}{x^2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}}{x - 1} = \\ &= \frac{0 - 0}{-\infty - 1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{0 - 0}{1 - 0} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

19.3. Para $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x e^x - e}{x - 1} \right)' = \\ &= \frac{(x e^x - e)'(x - 1) - (x e^x - e)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(e^x + x e^x)(x - 1) - (x e^x - e)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{x e^x - e^x - x^2 e^x - x e^x + e}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^x(x^2 - x - 1) + e}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } f'(0) = \frac{1 \times (-1) + e}{(-1)^2} = e - 1.$$

$$f(0) = \frac{0 - e}{0 - 1} = e$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 0 é do tipo $y = (e - 1)x + b$.

O ponto de coordenadas (0, e) pertence a esta reta, logo:

$$e = (e - 1) \times 0 + b \Leftrightarrow b = e$$

A equação pedida é $y = (e - 1)x + e$.

20.

20.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_2 (x - 1) = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 2^5$$

$$\Leftrightarrow x = 33$$

C.S. = $\{33\}$

20.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2x > 0\} =]-\infty, \frac{1}{2}[$

Cálculo auxiliar

$$1 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_5 (1 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow -2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

C.S. = $\{-2\}$

20.3. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_2 (x) + 2\log_2 (3) = \log_2 (6)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x) + \log_2 (9) = \log_2 (6)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (9x) = \log_2 (6)$$

$$\Leftrightarrow 9x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

C.S. = $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

20.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4 > 0\} = \mathbb{R}$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_3 (x^2 + 4) - \log_3 (2) = \log_3 (4)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 4) = \log_3 (4) + \log_3 (2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 4) = \log_3 (8)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

C.S. = $\{-2, 2\}$

20.5. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_2 (x) > 2 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x) > \log_2 (4) + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x) > \log_2 (2)$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

C.S. = $]2, +\infty[\cap \mathbb{R}^+ =]2, +\infty[$

20.6. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_3 (x) \leq \log_3 (2x) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x) \leq \log_3 (2x) + \log_3 (3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x) \leq \log_3 (6x)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 6x$$

$$\Leftrightarrow -5x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

C.S. = $[0, +\infty[\cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

20.7. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log (x) < -1 + \log (5) \Leftrightarrow \log (x) + 1 < \log (5)$$

$$\Leftrightarrow \log (x) + \log (10) < \log (5)$$

$$\Leftrightarrow \log (10x) < \log (5)$$

$$\Leftrightarrow 10x < 5$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

C.S. = $] -\infty, \frac{1}{2}[\cap \mathbb{R}^+ =]0, \frac{1}{2}[$

20.8. $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 3 > 0\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\ln (2x - 3) \geq 2 \ln (3) \Leftrightarrow \ln (2x - 3) \geq \ln (9)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 12$$

$$\Leftrightarrow x \geq 6$$

C.S. = $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\cap [6, +\infty[= [6, +\infty[$

20.9. $D = \{x \in \mathbb{R}: (x + 1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\log_2 (x + 1)^2 < 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 < 1$$

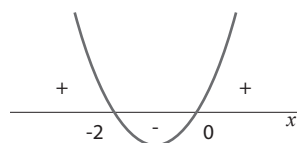
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x < 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$



C.S. = $[-2, 0] \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = [-2, 0] \setminus \{-1\}$

$$20.10. D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0\} = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

Para qualquer valor de $x \in D$:

$$\begin{aligned} \log(2x + 1) &> -\log(2) + 1 \\ \Leftrightarrow \log(2x + 1) + \log(2) &> \log(10) \\ \Leftrightarrow \log(4x + 2) &> \log(10) \\ \Leftrightarrow 4x + 2 &> 10 \\ \Leftrightarrow 4x &> 8 \\ \Leftrightarrow x &> 2 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =]2, +\infty[\cap \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[=]2, +\infty[$$

21.

$$\begin{aligned} 21.1. \log_a(ab^2) &= \log_a(a) + \log_a(b^2) = \\ &= 1 + 2 \log_a(b) = \\ &= 1 + 2 \times (-2) = \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21.2. \log_a\left(\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right) &= \log_a(a) - \log_a(\sqrt[3]{b}) = \\ &= 1 - \frac{1}{3} \log_a(b) = \\ &= 1 + \frac{2}{3} = \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$21.3. \log_b(c) + \log_b(a) = \frac{\log_c(c)}{\log_c(b)} + \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 21.4. \log_b(a^2b) &= \log_b(a^2) + \log_b(b) = \\ &= 2 \log_b(a) + 1 = \\ &= 2 \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} + 1 = \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$21.5. \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)} = \frac{\frac{\log_a(a)}{\log_a(c)}}{\frac{\log_a(b)}{\log_a(c)}} = \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 21.6. \log_b\left(\frac{ab^3}{\sqrt{c}}\right) &= \log_b(a) + \log_b(b^3) - \log_b\left(c^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} + 3 - \frac{1}{2} \times \frac{\log_c(c)}{\log_c(b)} = \\ &= -\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

22.

$$22.1. D = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 > 0 \wedge x + 1 > 0 \wedge x - 2 > 0\} =]3, +\infty[$$

Para $x \in D$:

$$\begin{aligned} \log(x - 3) - \log(x + 1) &= -\log(x - 2) \\ \Leftrightarrow \log(x - 3) + \log(x - 2) &= \log(x + 1) \\ \Leftrightarrow \log(x^2 - 5x + 6) &= \log(x + 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{6 \pm 4}{2} \\ \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1 \\ &\quad \underbrace{\in D} \quad \underbrace{\notin D} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{5\}$$

$$22.2. D = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0 \wedge 2x + 1 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$$

Para $x \in D$:

$$\begin{aligned} \log_2(x + 4) - \log_2(2x + 1) &= \log_2(x) \\ \Leftrightarrow \log_2(x + 4) &= \log_2(x) + \log_2(2x + 1) \\ \Leftrightarrow \log_2(x + 4) &= \log_2(2x^2 + x) \\ \Leftrightarrow x + 4 &= 2x^2 + x \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \\ &\quad \underbrace{\in D} \quad \underbrace{\notin D} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{\sqrt{2}\}$$

$$22.3. D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + e - 1 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$$

Para $x \in D$:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + e - 1) &= 2 \ln(x) + 1 \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 + e - 1) &= \ln(x^2) + \ln(e) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 + e - 1) &= \ln(ex^2) \\ \Leftrightarrow x^2 + e - 1 &= ex^2 \\ \Leftrightarrow (1 - e)x^2 + e - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - e)x^2 &= 1 - e \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \\ &\quad \underbrace{\in D} \quad \underbrace{\notin D} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

$$22.4. D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$$

Para $x \in D$:

$$\begin{aligned} \log_3(x + 1)(1 - \log_6(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_3(x + 1) &= 0 \vee 1 - \log_6(x) = 0 \\ \Leftrightarrow x + 1 &= 1 \vee \log_6(x) = 1 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6 \\ &\quad \underbrace{\notin D} \quad \underbrace{\in D} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{6\}$$

22.5 $D = \{x \in \mathbb{R}: 2-x > 0 \wedge x > 0\} =]0, 2[$

Para $x \in D$:

$$\log_2(2-x) - \log_{\frac{1}{2}}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2-x) - \frac{\log_2(x)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2-x) + \log_2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\in D)$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

22.6 $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0 \wedge x - 1 > 0 \wedge 2x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$

Para $x \in D$:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) > \log(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - 1) > \log(x - 1) + \log(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - 1) > \log(2x^2 - 3x + 1)$$

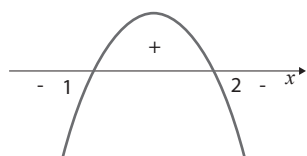
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 > 0$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$



$$\text{C.S.} =]1, 2[\cap]1, +\infty[=]1, 2[$$

22.7 $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 > 0 \wedge 4x^2 > 0 \wedge x > 0\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

Para $x \in D$:

$$\log_3(2x - 1) - \log_9(4x^2) \leq 1 - \log_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x - 1) - \frac{\log_3(4x^2)}{\log_3(9)} \leq \log_3(3) - \log_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x - 1) + \log_3(x) \leq \log_3(3) + \frac{\log_3(4x^2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 - x) \leq \log_3(3) + \log_3(2x)$$

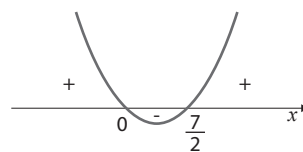
$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 - x) \leq \log_3(6x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x \leq 6x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{7}{2}$$



$$\text{C.S.} = \left[0, \frac{7}{2}\right] \cap \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[= \left]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right[$$

22.8 $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

Para $x \in D$:

$$(\ln(x))^2 - \ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - y \leq 0 \quad (y = \ln(x))$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 0 \wedge \ln(x) \leq 1$$

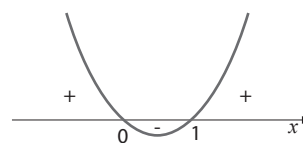
$$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \leq e$$

$$\text{C.S.} = [1, e]$$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y = 1$$



22.9 $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$

Para $x \in D$:

$$(\log_2(x^2) - 2) \left(2 - \log_{\frac{1}{2}}(x) \right) < 0$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet \log_2(x^2) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$\bullet 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		2	$+\infty$
$\log_2(x^2) - 2$	n.d.	-	-	-	0	+
$2 - \log_{\frac{1}{2}}(x)$	n.d.	-	0	+	+	+
$(\log_2(x^2) - 2) \left(2 - \log_{\frac{1}{2}}(x) \right)$	n.d.	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left] \frac{1}{4}, 2 \right[$$

22.10 $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$

Para $x \in D$:

$$2x \ln(x+1) - \ln(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \ln(x+1) \geq 0$$

Cálculo auxiliar

$$\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	n.d.	-	-	-	0	+
$\ln(x+1)$	n.d.	-	0	+	+	+
$(2x-1) \ln(x+1)$	n.d.	+	0	-	0	+

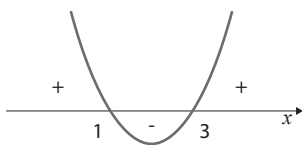
$$\text{C.S.} =]-1, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

22.11 $e^{2x} + 3 < 4e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 < 0 \quad (y = e^x)$
 $\Leftrightarrow y > 1 \wedge y < 3$
 $\Leftrightarrow e^x > 1 \wedge e^x < 3$
 $\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < \ln(3)$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = 1$$



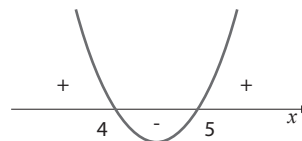
$$\text{C.S.} =]0, \ln(3)[$$

22.12 $e^{5x} - 9e^{3x} + 20e^x \geq 0$
 $\Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{> 0, \forall x \in \mathbb{R}} (e^{4x} - 9e^{2x} + 20) \geq 0$
 $\Leftrightarrow e^{4x} - 9e^{2x} + 20 \geq 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 \geq 0 \quad (y = e^{2x})$
 $\Leftrightarrow y \leq 4 \vee y \geq 5$
 $\Leftrightarrow e^{2x} \leq 4 \vee e^{2x} \geq 5$
 $\Leftrightarrow 2x \leq \ln(4) \vee 2x \geq \ln(5)$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln(4)}{2} \vee x \geq \frac{\ln(5)}{2}$
 $\Leftrightarrow x \leq \ln(2) \vee x \geq \ln(\sqrt{5})$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 9y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \vee y = 4$$



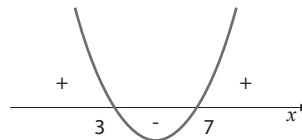
$$\text{C.S.} =]-\infty, \ln(2)] \cup [\ln(\sqrt{5}), +\infty[$$

22.13 $2^{2x} - 5 \times 2^{x+1} + 21 < 0$
 $\Leftrightarrow 2^{2x} - 10 \times 2^x + 21 < 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 10y + 21 < 0 \quad (y = 2^x)$
 $\Leftrightarrow y > 3 \wedge y < 7$
 $\Leftrightarrow 2^x > 3 \wedge 2^x < 7$
 $\Leftrightarrow x > \log_2(3) \wedge x < \log_2(7)$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 10y + 21 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 7 \vee y = 3$$



$$\text{C.S.} =]\log_2(3), \log_2(7)[$$

22.14 $e^x + 4e^{-x} \leq 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (e^x - 2)^2 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (e^x - 2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow e^x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow e^x = 2$
 $\Leftrightarrow x = \ln(2)$

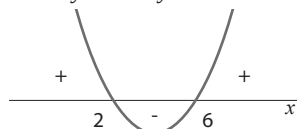
$$\text{C.S.} = \{\ln(2)\}$$

22.15 $3^x + 4 \times 3^{1-x} - 8 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 3^x + 12 \times 3^{-x} - 8 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \times 3^x + 12 \geq 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 8y + 12 \geq 0 \quad (y = 3^x)$
 $\Leftrightarrow y \leq 2 \vee y \geq 6$
 $\Leftrightarrow 3^x \leq 2 \vee 3^x \geq 6$
 $\Leftrightarrow x \leq \log_3(2) \vee x \geq \log_3(6)$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 8y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 6 \vee y = 2$$

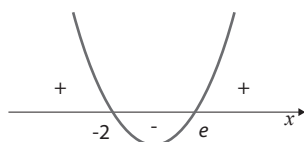


$$\text{C.S.} =]-\infty, \log_3(2)] \cup [\log_3(6), +\infty[$$

$$\begin{aligned}
22.16 \quad & e^{2x-1} + (2-e)e^{x-1} < 2 \\
& \Leftrightarrow e^{2x} + (2-e)e^x - 2e < 0 \\
& \Leftrightarrow y^2 + (2-e)y - 2e < 0 \quad (y = e^x) \\
& \Leftrightarrow y > -2 \wedge y < e \\
& \Leftrightarrow \underbrace{e^x > -2}_{\text{condição universal}} \wedge e^x < e \\
& \Leftrightarrow x < 1
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
y^2 + (2-e)y - 2e = 0 & \Leftrightarrow y = \frac{-2+e \pm \sqrt{(2-e)^2 + 8e}}{2} \\
& \Leftrightarrow y = \frac{-2+e \pm \sqrt{4-4e+e^2+8e}}{2} \\
& \Leftrightarrow y = \frac{-2+e \pm \sqrt{e^2+4e+4}}{2} \\
& \Leftrightarrow y = \frac{-2+e \pm \sqrt{(e+2)^2}}{2} \\
& \Leftrightarrow y = \frac{-2+e \pm (e+2)}{2} \\
& \Leftrightarrow y = -2 \vee y = e
\end{aligned}$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[$$

23.

$$\begin{aligned}
23.1. \quad & f(x) = ((e^x - x) \ln(x))' = \\
& = (e^x - x)' \ln(x) + (e^x - x) (\ln(x))' = \\
& = (e^x - 1) \ln(x) + (e^x - x) \times \frac{1}{x} = \\
& = (e^x - 1) \ln(x) + \frac{e^x}{x} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.2. \quad & f(x) = \left(\frac{\ln(x) + 4}{e^x} \right)' = \\
& = \frac{(\ln(x) + 4)' e^x - (\ln(x) + 4) (e^x)'}{(e^x)^2} = \\
& = \frac{\frac{1}{x} \times e^x - (\ln(x) + 4) e^x}{(e^x)^2} = \\
& = \frac{\frac{1}{x} - \ln(x) - 4}{e^x} = \\
& = \frac{1 - 4x - x \ln(x)}{xe^x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.3. \quad & f(x) = \left(\ln \left(\frac{x^2-1}{2x} \right) \right)' = \frac{\left(\frac{x^2-1}{2x} \right)'}{\frac{x^2-1}{2x}} = \\
& = \frac{\frac{2x \times 2x - (x^2-1) \times 2}{4x^2}}{\frac{x^2-1}{2x}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{(4x^2 - 2x^2 + 2) \times 2x}{(x^2-1) \times 4x^2} = \\
& = \frac{2x^2 + 2}{(x^2-1) \times 2x} = \\
& = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.4. \quad & f(x) = (\ln(\cos x^2))' = \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2} = \\
& = \frac{-2x \sin x^2}{\cos x^2} = \\
& = -2x \operatorname{tg} x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.5. \quad & f(x) = ((\ln(\ln(x)))^2)' = \\
& = 2 \ln(\ln(x)) \times (\ln(\ln(x)))' = \\
& = 2 \ln(\ln(x)) \times \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \\
& = 2 \ln(\ln(x)) \times \frac{1}{x \ln(x)} = \\
& = \frac{2 \ln(\ln(x))}{x \ln(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.6. \quad & f(x) = \left(\ln \left(\frac{e^x}{x} \right) \right)' = \frac{\left(\frac{e^x}{x} \right)'}{\frac{e^x}{x}} = \\
& = \frac{\frac{e^x \times x - e^x}{x^2}}{\frac{e^x}{x}} = \\
& = \frac{e^x(x-1)x}{e^x x^2} = \\
& = \frac{x-1}{x}
\end{aligned}$$

24.

$$24.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x + 1}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x + 1}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$24.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \ln(x)}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = \\
&= 0 + 0 + 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24.3. \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2-1)e^{\frac{1}{x-1}} \right] = \\
& \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \\
&= 2 \times (+\infty) = \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Mudança de variável: $y = \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x^2 - 1)e^{\frac{1}{x-1}} \right] = \\ &= 0 \times e^{\frac{1}{0^-}} = \\ &= 0 \times e^{-\infty} = \\ &= 0 \times 0 = \\ &= 0\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\begin{aligned}24.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{3x} - e^{2x}}{2e^{3x} + 3e^x - e^{-x}} = \\ &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}(4 - e^{-x})}{e^{3x}(2 + 3e^{-2x} - e^{-4x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - e^{-x}}{2 + 3e^{-2x} - e^{-4x}} = \\ &= \frac{4 - 0}{2 + 0 - 0} = \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{3x} - e^{2x}}{2e^{3x} + 3e^x - e^{-x}} = \\ &= \frac{0 - 0}{0 + 0 - (+\infty)} = \\ &= \frac{0}{-\infty} = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+x) - \ln(x)) = \\ &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \\ &= \ln(1) = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} + \ln(x)} = \\ &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} + 1} = \\ &= \frac{1}{+\infty + 1} = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} + \ln(x)} = \\ &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{y}} + \ln\left(\frac{1}{y}\right)} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{\frac{1}{\sqrt{y}} - \ln(y)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{y} \ln(y)} - 1} = \\ &= \frac{-1}{0 - 1} = \\ &= 1\end{aligned}$$

Mudança de variável: $x = \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned}24.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x^2 + 1} = \\ &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{0}{+\infty} = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.8. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{\ln(x-1)} = \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(e^y + 1) - 4}{y} = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= 2 \times 1 = \\ &= 2\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x-1) \Leftrightarrow x-1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{\ln(x-1)} = \\ &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln(x-1)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\ln(y)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \\ &= +\infty \times 2 = \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Mudança de variável: $y = x - 1$

$$\begin{aligned}24.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2) - \ln(ex^2 + x)) = \\ &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{ex^2 + x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{e + \frac{1}{x}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x^2) - \ln(ex^2 + x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{ex^2 + x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{ex + 1}\right) = \\ &= \ln(0^+) = \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{e^{2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((\ln(x))^2)}{(e^x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{e^x}\right)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}\right)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = \\ &= 0 \times 0 = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.11. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{3x}\right)\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x\right) = \\ &= \lim_{3x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \\ &= \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.12. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{y}\right)^y = \\ &= e^2\end{aligned}$$

Mudança de variável: $y = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(1 + 2x) \cdot \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1 + 2x)}{x}} = \\ &= \lim_{2x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \times 2} = \\ &= e^{0 \times 2} = \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25. 2017 - 1990 &= 27 \\ G(27) &= 178 \times e^{0,05 \times 27} \approx 687 \text{ gatos}\end{aligned}$$

26.

$$26.1. c(1) = 1300 \times (1 - 0,23) = 1001 \text{ €}$$

$$\begin{aligned}26.2. c(0) &= 1300 \Leftrightarrow ae^0 = 1300 \Leftrightarrow a = 1300 \\ c(1) &= 1001 \Leftrightarrow 1300e^b = 1001 \\ &\Leftrightarrow e^b = 0,77 \\ &\Leftrightarrow b = \ln(0,77)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}26.3. c(t) &= \frac{1300}{2} \Leftrightarrow 1300e^{\ln(0,77)x} = 650 \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(0,77)x} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,77)x = \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,77)}\end{aligned}$$

Então, $x \approx 2,7$ anos.

$$\begin{aligned}26.4. \frac{c\left(x + \frac{1}{12}\right)}{c(x)} &= \frac{1300 e^{\ln(0,77)\left(x + \frac{1}{12}\right)}}{1300 e^{\ln(0,77)x}} = \\ &= e^{\ln(0,77)x + \frac{\ln(0,77)}{12} - \ln(0,77)x} = \\ &= e^{\frac{\ln(0,77)}{12}} \approx 0,98\end{aligned}$$

O computador desvaloriza, aproximadamente, 2% por mês.

$$\begin{aligned}27. T(t) &= 20 + (T_0 - 20)e^{-kt} \\ T(0) &= 80 \\ \text{Logo, } T(t) &= 20 + (80 - 20)e^{-kt}. \\ T(1) &= 40 \Leftrightarrow 20 + (80 - 20)e^{-k} = 40 \\ &\Leftrightarrow 60e^{-k} = 20 \\ &\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow k = \ln(3)\end{aligned}$$

Assim, $T(t) = 20 + 60e^{-t \ln(3)}$.

$$\begin{aligned}T(t) &= 25 \Leftrightarrow 20 + 60e^{-t \ln(3)} = 25 \\ &\Leftrightarrow 60e^{-t \ln(3)} = 5 \\ &\Leftrightarrow e^{-t \ln(3)} = \frac{1}{12} \\ &\Leftrightarrow -t \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{12}\right) \\ &\Leftrightarrow t \ln(3) = \ln(12) \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln(12)}{\ln(3)}\end{aligned}$$

Assim, $t \approx 2,26$ horas.

$0,26 \times 60 = 15,6$ minutos

O bolo atingiu os 25 °C às 12 horas e 16 minutos, aproximadamente.

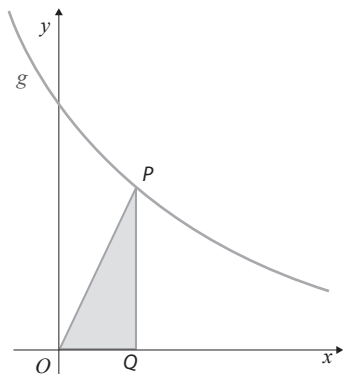
28. Seja f a função que dá a área do triângulo $[OPQ]$ em função da abscissa x de P .

$$\text{Então, } f(x) = \frac{x \times e^{-2x}}{2} \quad (x > 0).$$

$$f(x) = \frac{e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x}}{2} = \frac{e^{-2x}(1-2x)}{2}$$

$$f(x) = \frac{e^{-2x}(1-2x)}{2} = 0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de f	n.d.	+	0	-
Varição de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$



A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima quando $x = \frac{1}{2}$.

29.

29.1. $f(x) \geq -\ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq -\ln(x^2 - 1)$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Para $x \in D$:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq -\ln(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2 - 1) \geq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times (x^2 - 1)\right] \geq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \times (x-1)(x+1) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 1$$

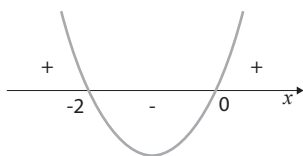
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$



$$\text{C.S.} = (]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[) \cap (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$$

$$=]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$$

29.2. A função f é contínua em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, por se tratar da composta entre duas funções contínuas, uma função logarítmica e uma função racional. Assim, as únicas candidatas a assíntotas verticais ao seu gráfico são as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

29.3. Seja $g(x) = f(x) - x$.

Pretende-se mostrar que a função g tem, pelo menos, um zero em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

A função g é contínua em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}\right) - \frac{3}{2} =$$

$$= \ln(5) - \frac{3}{2} > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = \ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) - 2 = \ln(3) - 2 < 0$$

Assim, $g(2) < 0 < g\left(\frac{3}{2}\right)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[: g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[: f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[: f(c) = c$$

29.4. $f(3) = \left(\frac{3+1}{3-1}\right) = \ln(2)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$= \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^2-1}$$

$$f'(3) = \frac{-2}{9-1} = -\frac{1}{4}$$

$$r: y = -\frac{1}{4}x + b$$

$(3, \ln(2)) \in r$, logo:

$$\ln(2) = -\frac{1}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} + \ln(2)$$

$$\text{Então, } r: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \ln(2).$$

Logo, $C\left(0, \frac{3}{4} + \ln(2)\right)$, $B(3, \ln(2))$ e $A(3, 0)$.

Assim:

$$A_{[OABC]} = \frac{\left(\frac{3}{4} + \ln(2) + \ln(2)\right) \times 3}{2} =$$

$$= \left(\frac{3}{4} + 2 \ln(2)\right) \times \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{9}{8} + 3 \ln(2)$$

30.

$$30.1. D = \{x \in \mathbb{R}: x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por se tratar da soma de funções contínuas: uma constante e outra que é a composta de uma função exponencial com uma função racional. Assim, a única candidata a assíntota vertical é a reta de equação $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) =$$

$$= 1 + e^{\frac{2}{0^+}} =$$

$$= 1 + e^{+\infty} =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{\frac{2}{x-1}}}{x} = \frac{1 + e^0}{+\infty} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) = 1 + e^0 = 2$$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{\frac{2}{x-1}}}{x} = \frac{1 + e^0}{-\infty} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) = 1 + e^0 = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

$$30.2. f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 + e^{\frac{2}{x-1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{x-1}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \ln(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - x \ln(2) + \ln(2)}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - x \ln(2) + \ln(2) = 0 \wedge x-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + \ln(2)}{\ln(2)}$$

$$30.3. 1 + e^{\frac{2}{x-1}} = y \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x-1}} = y-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \ln(y-1)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{2}{\ln(y-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{\ln(y-1)}$$

$$\text{Então, } f^{-1}(x) = 1 + \frac{2}{\ln(x-1)}.$$

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x-1 > 0 \wedge \ln(x-1) \neq 0\} =$$

$$=]1, +\infty[\setminus \{2\}$$

Cálculo auxiliar

$$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$30.4. f'(x) = \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right)' = \left(\frac{2}{x-1}\right)' e^{\frac{2}{x-1}} =$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{2}{x-1}}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Assim, f é estritamente decrescente em $] -\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

$$30.5. D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x-3}{x+2} > 0 \wedge x+2 \neq 0\right\} =$$

$$=]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+	0	-	0	+

$$\begin{aligned}
30.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-3}{x+2} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = \\
&= \ln(1) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

O eixo Ox é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x-3}{x+2} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = \\
&= \ln(1) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

O eixo Ox é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

30.7. A função g é contínua em $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$, por se tratar da composta entre duas funções contínuas, uma logarítmica e uma racional. Assim, apenas as retas de equação $x = -2$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \left(\frac{x-3}{x+2} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \left(\frac{x-3}{x+2} \right) = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

30.8. Para $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
g(x) < 0 &\Leftrightarrow \ln \left(\frac{x-3}{x+2} \right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x-3-x-2}{x+2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-5}{x+2} < 0 \\
&\Leftrightarrow x+2 > 0 \\
&\Leftrightarrow x > -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{C.S.} &=]-2, +\infty[\cap (]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[) = \\
&=]3, +\infty[
\end{aligned}$$

31.

31.1. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{2x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \\
&= 1 \times (-\infty) = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

31.2. Para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = (\ln(x^2 + x))' = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Logo, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

31.3. Para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{2x+1}{x^2+x} \right)' = \frac{2(x^2+x) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \\
&= \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2}
\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 2x - 1 = 0 \wedge (x^2+x)^2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{-4} \wedge (x^2+x)^2 \neq 0 \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

$$f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Logo, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

31.4. Para $x \in \mathbb{R}^-$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{e^x - 1}{2x^2} \right)' = \frac{e^x \times 2x^2 - (e^x - 1) \times 4x}{4x^4} = \\
&= \frac{2x^2 e^x - 4x e^x + 4x}{4x^4} = \\
&= \frac{e^x(x-2) + 2}{2x^3}
\end{aligned}$$

$$f'(-1) = \frac{e^{-1} \times (-3) + 2}{-2} = \frac{-3+2e}{-2e} = \frac{3-2e}{2e}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 é do tipo

$$y = \frac{3-2e}{2e}x + b.$$

$$f(-1) = \frac{e^{-1} - 1}{2} = \frac{1-e}{2e}$$

$$\frac{1-e}{2e} = -\frac{3-2e}{2e} + b \Leftrightarrow b = \frac{4-3e}{2e}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 é $y = \frac{3-2e}{2e}x + \frac{4-3e}{2e}$.

31.5. Para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 1 + \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2+x) &\geq 1 + \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2+x) &\geq \ln(e) + \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2+x) &\geq \ln(ex+e) \\ \Leftrightarrow x^2+x &\geq ex+e \\ \Leftrightarrow x(x+1) - e(x+1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{(x+1)}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}^+} (x-e) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x-e &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\geq e \\ \text{C.S.} &= [e, +\infty[\end{aligned}$$

32. A função g é contínua em $]1, +\infty[$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: uma que é o produto de uma constante pela composta de uma função seno com uma função afim e outra que é uma função logarítmica.

A função g é contínua em $]-\infty, 1[$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função afim e outra que é uma função polinomial.

$$g(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \sin(x-1)}{\ln(x)} = \\ &= 2 \times \lim_{x-1 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = \\ &= 2 \times 1 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= 2 \times 1 \times 1 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

Mudança de variável: $y = \ln(x)$

Como $g(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, a função g não é contínua em $x = 1$.

Assim, a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

33.

33.1. $f(x) = x^2 e^x$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = \\ &= e^x (2x + x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x (2x + x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x(2+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f(-2) = (-2)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

$$f(0) = 0$$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-2, 0]$; tem máximo $\frac{4}{e^2}$ em $x = -2$ e tem mínimo 0 em $x = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x (2x + x^2))' = \\ &= e^x (2x + x^2) + e^x (2 + 2x) = \\ &= e^x (2x + x^2 + 2 + 2x) = \\ &= e^x (x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x (x^2 + 4x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 + 4x + 2 = 0 \end{aligned}$$

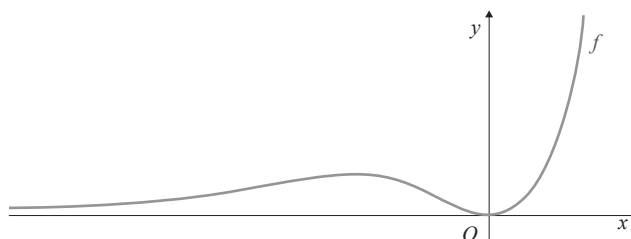
$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{2} \vee x = -2 - \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2 - \sqrt{2}[$ e em $]-2 + \sqrt{2}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}[$.



33.2. $f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{2}}(4x-1)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 1 > 0\} = \left] \frac{1}{4}, +\infty \right[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 + \log_{\frac{1}{2}}(4x-1) \right)' = \frac{4}{(4x-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{-4}{(4x-1) \ln(2)} \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in D_f$$

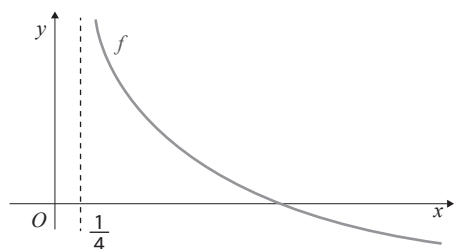
A função f é estritamente decrescente em

$$\left] \frac{1}{4}, +\infty \right[.$$

$$f''(x) = \left(\frac{-4}{(4x-1) \ln(2)} \right)' = \frac{4 \times 4 \ln(2)}{((4x-1) \ln(2))^2} = \frac{16}{(4x-1)^2 \ln(2)}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in D_f$$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left] \frac{1}{4}, +\infty \right[$.



$$33.3. f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-1} > 0 \wedge x-1 \neq 0 \right\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

$$f'(x) = \left(\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1} \right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{2}{x^2-1}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

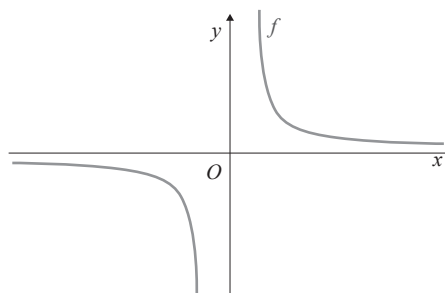
A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$.

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{x^2-1} \right)' = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	n.d.	n.d.	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	n.d.	n.d.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.



$$33.4. f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 > 0\} =]0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

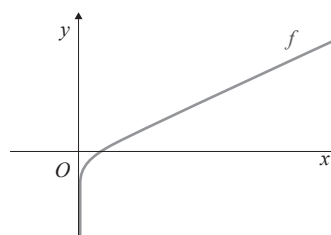
$$f'(x) = (\ln(e^x - 1))' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$, logo a função f é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f''(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$.



$$33.5. f(x) = -x + 4 + e^{-x}$$

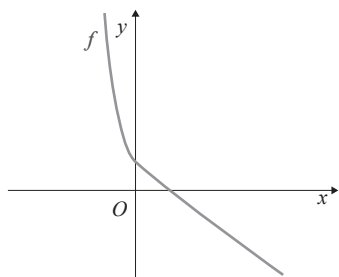
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (-x + 4 + e^{-x})' = -1 - e^{-x}$$

$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo a função f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = (-1 - e^{-x})' = e^{-x}$$

$f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.



33.6. $f(x) = x^3 \ln(x)$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = (x^3 \ln(x))' = 3x^2 \ln(x) + x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 (3 \ln(x) + 1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 (3 \ln(x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 3 \ln(x) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = -\frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	-	0	+
Variação de f	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A função f é estritamente decrescente em

$]0, e^{-\frac{1}{3}}]$ e é estritamente crescente em $[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$; tem mínimo relativo em $x = e^{-\frac{1}{3}}$.

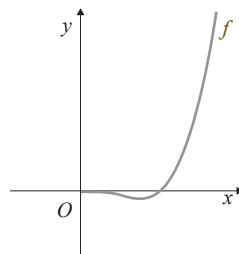
$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2 (3 \ln(x) + 1))' = \\ &= 2x(3 \ln(x) + 1) + x^2 \times \frac{3}{x} = \\ &= x(6 \ln(x) + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x(6 \ln(x) + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 6 \ln(x) + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = -\frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

x	0		$e^{-\frac{5}{6}}$	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada

para cima em $]0, e^{-\frac{5}{6}}[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]e^{-\frac{5}{6}}, +\infty[$.



33.7. $f(x) = \frac{2x}{\ln(x) - 1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln(x) - 1 \neq 0\} = \\ &=]0, +\infty[\setminus \{e\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x}{\ln(x) - 1} \right)' = \\ &= \frac{2(\ln(x) - 1) - 2x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = \\ &= \frac{2 \ln(x) - 4}{(\ln(x) - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \ln(x) - 4 = 0 \wedge (\ln(x) - 1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

x	0		e		e^2	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	-	n.d.	-	0	+
Variação de f	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

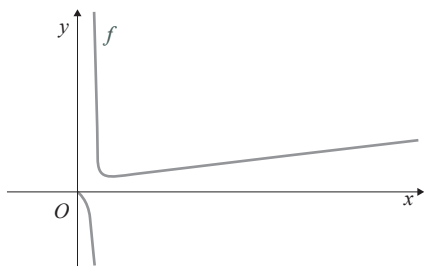
A função f é estritamente decrescente em $]0, e[$ e em $]e, e^2[$ e é estritamente crescente em $[e^2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2 \ln(x) - 4}{(\ln(x) - 1)^2} \right)' = \\ &= \frac{\frac{2}{x} (\ln(x) - 1)^2 - (2 \ln(x) - 4) 2 (\ln(x) - 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x) - 1)^4} = \\ &= \frac{2 (\ln(x) - 1) - 2 (2 \ln(x) - 4)}{x (\ln(x) - 1)^3} = \\ &= \frac{-2 \ln(x) + 6}{x (\ln(x) - 1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 \ln(x) + 6 = 0 \wedge x(\ln(x) - 1)^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 3 \\ &\Leftrightarrow x = e^3 \end{aligned}$$

x	0		e		e^3	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	-	n.d.	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e[$ e em $]e^3, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e, e^3[$.



34.

34.1. Para que a função f seja contínua em $x = 1$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\bullet f(1) = k - 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{2x-2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{e^y - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Então:

$$k - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

34.2. Se $x \in [-2, 0]$, então:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1 \end{aligned}$$

Logo, a afirmação é falsa.

Tema VI - Primitivas e Cálculo Integral

Páginas 58 a 61

1.

$$\begin{aligned} 1.1. \int (2x + 1) dx &= 2 \times \frac{x^2}{2} + x + c \\ &= x^2 + x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \int (3x^2 + 2x + 5) dx &= 3 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} + 5x + c \\ &= x^3 + x^2 + 5x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$1.3. \int (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 1.4. \int (1-2x)^3 dx &= -\frac{1}{2} \int -2(1-2x)^3 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{(1-2x)^4}{4} + c = \\ &= -\frac{(1-2x)^4}{8} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.5. \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \right) dx &= \frac{1}{3} \times \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c = \\ &= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.6. \int \frac{3}{x^3} dx &= 3 \int x^{-3} dx = 3 \times \frac{x^{-2}}{-2} + c = \\ &= -\frac{3}{2x^2} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.7. \int \frac{3x}{(2x^2+1)^3} dx &= \frac{3}{4} \int (4x(2x^2+1)^{-3}) dx = \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{(2x^2+1)^{-2}}{-2} + c = \\ &= -\frac{3}{8(2x^2+1)^2} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.8. \int 2(x^2 + 2x + 1) dx &= 2 \int (x+1)^2 dx = \\ &= 2 \times \frac{(x+1)^3}{3} + c = \\ &= \frac{2(x+1)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.9. \int x^2 (2x^3 + 2)^3 dx &= \frac{1}{6} \int 6x^2 (2x^3 + 2)^3 dx = \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{(2x^3 + 2)^4}{4} + c = \\ &= \frac{(2x^3 + 2)^4}{24} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.10. \int (x-1)(x^2-2x+3)^2 dx &= \frac{1}{2} \int (2x-2)(x^2-2x+3)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-2x+3)^3}{3} + c = \\ &= \frac{(x^2-2x+3)^3}{6} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$1.11. \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \\ = \frac{3^3}{4} x \sqrt[3]{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.12. \int 3 \sqrt{2x} dx = \frac{3}{2} \int 2(2x)^{\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{3}{2} \times \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ = 2x\sqrt{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.13. \int (2 + \sqrt{x}) dx = 2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ = 2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.14. \int \frac{2}{\sqrt{2x}} dx = \int 2(2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\ = 2\sqrt{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.15. \int \frac{1}{\sqrt[4]{5x}} dx = \frac{1}{5} \int 5(5x)^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{5} \frac{(5x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \\ = \frac{4 \sqrt[4]{(5x)^3}}{15} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.16. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x \right) dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x dx = \\ = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2} + c = \\ = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.17. \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ = \frac{(2x+1) \sqrt{2x+1}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$1.18. \int x \sqrt{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+2)^{\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2} \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ = \frac{(x^2+2) \sqrt{x^2+2}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

2.

$$2.1. \int \frac{2}{x-1} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx = 2 \ln |x-1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2.2. \int \frac{3x}{2x^2-1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{2x^2-1} dx = \frac{3}{4} \ln |2x^2-1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2.3. \int \frac{x+1}{x^2+2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x-1} dx = \\ = \frac{1}{2} \ln |x^2+2x-1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2.4. \int \frac{4x^2}{1-2x^3} dx = -\frac{4}{6} \int \frac{-6x^2}{1-2x^3} dx = \\ = -\frac{2}{3} \ln |1-2x^3| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2.5. \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \\ = 2 \int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{1-x} dx = \\ = 2 \ln |x-3| - \ln |1-x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2.6. \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1} \right) dx = \\ = \int (x-1)^{-2} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx = \\ = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 2 \ln |x+1| + c = \\ = -\frac{1}{x-1} + 2 \ln |x+1| + c, c \in \mathbb{R}$$

3.

$$3.1. \int e^{x+1} dx = e^{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3.2. \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int -2e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3.3. \int (e^x + 1) dx = e^x + x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3.4. \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3 \int \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3.5. \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3.6. \int (2e^x - 3x^2) dx = 2e^x - x^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

4.

$$4.1. \int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$4.2. \int 4 \sin(-x) dx = -4 \int \sin x dx = 4 \cos x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$4.3. \int x \cos(x^2+2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2+2) dx = \\ = \frac{1}{2} \sin(x^2+2) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$4.4. \int 3x^2 \sin(x^3-1) dx = -\cos(x^3-1) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$4.5. \int 3 \sin(\pi+x) dx = -3 \int \sin x dx = 3 \cos x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$4.6. \int 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + c, c \in \mathbb{R}$$

5.

$$5.1. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2}} dx = \frac{1}{4} \int 4x^3(x^4+2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(x^4 + 2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.2. \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx = \ln |1 - \cos x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.3. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \sqrt{x^2 + 3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.4. \int \frac{2 \cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = 2 \int \cos x (2 + \sin x)^{-2} dx =$$

$$= 2 \frac{(2 + \sin x)^{-1}}{-1} + c =$$

$$= -\frac{2}{2 + \sin x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.5. \int \frac{x + \ln(x)}{x} dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{x} \ln(x) dx =$$

$$= x + \frac{(\ln(x))^2}{2} + c =$$

$$= x + \frac{1}{2} \ln^2(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.6. \int \frac{2x + \sqrt{x}}{x^2} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$= 2 \ln |x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 2 \ln |x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.7. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int -\sin x (\cos x)^{-2} dx =$$

$$= -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + c =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.8. \int \sin x \cos^3 x dx = -\frac{(\cos x)^4}{4} + c =$$

$$= -\frac{\cos^4 x}{4} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.9. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \cos x (\sin x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 2 \sqrt{\sin x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.10. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln |e^x + 1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.11. \int e^x \cos(e^x + 1) dx = \sin(e^x + 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$5.12. \int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln(x))^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{(\ln(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3} \ln(x) \sqrt{\ln(x)} + c, c \in \mathbb{R}$$

6.

$$6.1. \int \left(-\frac{x}{e - x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{e - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |e - x^2| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln |e - 0^2| + c = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(e) + c = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + c = 2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } F(x) = \frac{1}{2} \ln |e - x^2| + \frac{3}{2}.$$

$$6.2. \int \frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^2} dx = \int (1 + \cos x)(x + \sin x)^{-2} dx =$$

$$= \frac{(x + \sin x)^{-1}}{-1} + c =$$

$$= -\frac{1}{x + \sin x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(\pi) = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi + \sin \pi} + c = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\pi} + c = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Logo, } F(x) = -\frac{1}{x + \sin x}.$$

$$7. f'(x) = \int (x^3 + 2x + 1) dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 + 1 + c = 2 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Assim, } f'(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + x - \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \int \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + x - \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} x + k, k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} x + 1.$$

8.

$$\begin{aligned}
 8.1. \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{(x^3+1)^3}}{\frac{3}{2}} + c = \\
 &= \frac{2}{9} (x^3+1) \sqrt{x^3+1} + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$8.2. \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$8.3. \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \ln |\ln(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 8.4. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx = \\
 &= 2 \sin(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.5. \int \sin x \cos^3 x dx &= - \int (-\sin x) \cos^3 x dx = \\
 &= - \frac{\cos^4 x}{4} + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.6. \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c = \\
 &= \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.7. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx &= - \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx = \\
 &= - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + c = \\
 &= \frac{1}{\cos x} + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.8. \int \frac{\ln(x^2)}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2}{x} \ln(x^2) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(\ln(x^2))^2}{4} + c = \\
 &= \frac{(\ln(x^2))^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.9. \int \frac{e^{2x}}{2-e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2e^{2x}}{2-e^{2x}} dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |2-e^{2x}| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$9. f''(x) = \int (24x-6) dx = 12x^2 - 6x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\text{Logo } f''(x) = 12x^2 - 6x.$$

$$f'(x) = \int (12x^2 - 6x) dx = 4x^3 - 3x^2 + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow c_2 = 2$$

$$\text{Logo } f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$f(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + 2) dx = x^4 - x^3 + 2x + c_3, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c_3 = 1$$

$$\text{Logo, } f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1.$$

$$10. \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - 2 \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x \cos x}{1 - 3 \sin^2 x} dx$$

Mudança de variável:

$$t = 1 - 3 \sin^2 x$$

$$dt = -6 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x \cos x}{1 - 3 \sin^2 x} dx &= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{6} \ln |t| + c = \\
 &= -\frac{1}{6} \ln |1 - 3 \sin^2 x| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

11.

$$11.1. \int_0^7 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx = 5 + 3 = 8$$

$$11.2. \int_3^0 f(x) dx = - \int_0^3 f(x) dx = -5$$

$$11.3. \int_0^3 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx = 5 + 2 = 7$$

$$\begin{aligned}
 11.4. \int_0^3 (2f(x) - 3g(x)) dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = \\
 &= 2 \times 5 - 3 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
 12.1. \int_{-1}^1 (4x^2 + 5x) dx &= \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{5}{2} - \left(-\frac{4}{3} + \frac{5}{2} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2. \int_1^2 \frac{3x}{x^2+1} dx &= \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} [\ln |x^2+1|]_1^2 = \\
 &= \frac{3}{2} (\ln(5) - \ln(2)) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.3. \int_1^3 \frac{x^2-1}{x} dx &= \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln |x| \right]_1^3 = \\
 &= \frac{9}{2} - \ln(3) - \left(\frac{1}{2} - \ln(1) \right) = \\
 &= \frac{9}{2} - \ln(3) - \frac{1}{2} = 4 - \ln(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$12.5. \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) = \frac{e-1}{2}$$

$$12.6. \int_1^3 \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2} dx = -\frac{1}{3} \left[e^{\frac{3}{x}} \right]_3^1 = -\frac{1}{3} (e - e^3) = \frac{e^3 - e}{3}$$

$$12.7. \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(x^2 + 1)^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$12.8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \left[\cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\cos^3 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos^3 0 \right) = -\frac{1}{3} (0 - 1) = \frac{1}{3}$$

$$12.9. \int_1^e \frac{\sqrt{2 - \ln(x)}}{x} dx = -\int_1^e \left(-\frac{1}{x} (2 - \ln(x))^{\frac{1}{2}} \right) dx = -\left[\frac{(2 - \ln(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^e = -\frac{2}{3} \left[\sqrt{(2 - \ln(x))^3} \right]_1^e = -\frac{2}{3} (\sqrt{(2 - \ln(e))^3} - \sqrt{(2 - \ln(1))^3}) = -\frac{2}{3} (1 - \sqrt{8}) = \frac{2\sqrt{2} - 2}{3}$$

13.

$$13.1. \int_1^a (x + 1) dx = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^a = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + a - \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + a - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -1$$

$$13.2. \int_{-1}^2 (3 + ax) dx = 4 \Leftrightarrow \left[3x + \frac{ax^2}{2} \right]_{-1}^2 = 4 \Leftrightarrow 6 + 2a - \left(-3 + \frac{1}{2}a \right) = 4 \Leftrightarrow 9 + \frac{3}{2}a = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3}$$

$$13.3. \int_0^2 (a - x^3) dx = 18 \Leftrightarrow \left[ax - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 18 \Leftrightarrow 2a - 4 - 0 = 18 \Leftrightarrow 2a = 22 \Leftrightarrow a = 11$$

$$13.4. \int_0^1 \frac{ax}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} \int_0^1 2x (x^2 + 1)^{-2} dx = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = 2 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \left[\frac{1}{x^2 + 1} \right]_0^1 = 2 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{4} = 2 \Leftrightarrow a = 8$$

14.

$$14.1. f(x) = x + 2$$

$$F_0(x) = \int_0^x (t + 2) dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,
 $F'_0(x) = f(x) = x + 2.$

$$14.2. f(x) = x^2 + 1$$

$$F_0(x) = \int_0^x (t^2 + 1) dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,
 $F'_0(x) = f(x) = x^2 + 1.$

$$\text{Além disso, } F_0(x^2) = \int_0^{x^2} (t^2 + 1) dt.$$

Então:

$$\left(\int_0^{x^2} (t^2 + 1) dt \right)' = (F_0(x^2))' = F'_0(x^2) \times (x^2)' = ((x^2)^2 + 1) \times 2x = 2x(x^4 + 1)$$

$$14.3. f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$F_8(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t} dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,
 $F'_8(x) = f(x) = \sqrt[3]{x}.$

$$14.4. f(x) = \sin x$$

$$F_1(x) = \int_1^{x^3} \sin t dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,
 $F'_1(x) = f(x) = \sin x.$

$$\text{Além disso, } F_1(x^3) = \int_1^{x^3} \sin t dt.$$

Então:

$$\left(\int_1^{x^3} \sin t dt \right)' = (F_1(x^3))' = F'_1(x^3) \times (x^3)' = \sin(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \sin(x^3)$$

$$14.5. f(x) = \sqrt{x}$$

$$F_0(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{t} dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \sqrt{x}.$$

Além disso, $F_0(\sin x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{t} dt$.

Então:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\sin x} \sqrt{t} dt \right)' &= (F_0(\sin x))' = \\ &= F_0'(\sin x) \times (\sin x)' = \\ &= \sqrt{\sin x} \times \cos x = \\ &= \cos x \sqrt{\sin x} \end{aligned}$$

14.6. $f(x) = 4x + 1$

$$F_0(x) = \int_x^{x+2} (4t + 1) dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = 4x + 1.$$

Além disso, $F_0(x + 2) = \int_0^{x+2} (4t + 1) dt$.

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{x+2} (4t + 1) dt \right)' &= (F_0(x + 2))' = \\ &= F_0'(x + 2)(x + 2)' = \\ &= 4(x + 2) + 1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \left(\int_x^{x+2} (4t + 1) dt \right)' &= \\ &= \left(\int_x^0 (4t + 1) dt + \int_0^{x+2} (4t + 1) dt \right)' = \\ &= \left(-\int_0^x (4t + 1) dt + \int_0^{x+2} (4t + 1) dt \right)' = \\ &= -(4x + 1) + 4(x + 2) + 1 = \\ &= -4x - 1 + 4x + 8 + 1 = \\ &= 8 \end{aligned}$$

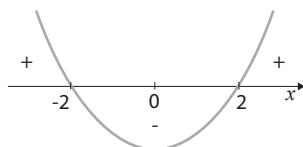
15.

$$\begin{aligned} 15.1. \int_0^3 |x^2 - 4| dx &= \int_0^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 = \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - 0 + \left(\frac{27}{3} - 12 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \\ &= -\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = \\ &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



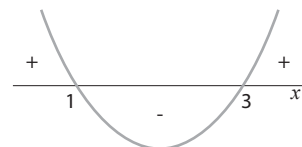
$$15.2. \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx + \\ &\quad + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 + \\ &\quad + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 0 + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) - (9 - 18 + 9) = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

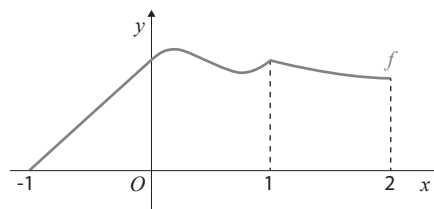
Cálculo auxiliar

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$



16.



$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \\ &= \int_{-1}^0 2(x + 1) dx + \int_0^1 (\cos(\pi x) + 2x + 1) dx + \\ &\quad + \int_1^2 \left(\frac{2}{x+1} + 1 \right) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + x^2 + x \right]_0^1 + \\ &\quad + [2 \ln |x + 1| + x]_1^2 = \\ &= 2 \left[0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] + \left[\left(\frac{\sin \pi}{\pi} + 1 + 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sin 0}{\pi} + 0 + 0 \right) \right] + [(2 \ln(3) + 2) - (2 \ln(2) + 1)] = \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 2 - 0 + \ln(9) + 2 - \ln(4) - 1 = \\ &= 4 + \ln\left(\frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

17.

$$17.1. A = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 27 - 9 - 0 = 18$$

Cálculo auxiliar

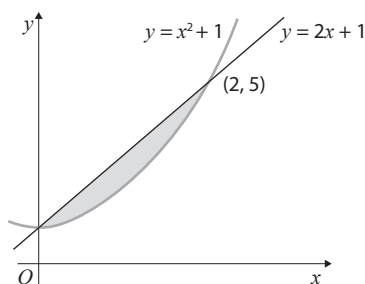
$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

$$17.2. A = \int_1^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \left[x - \frac{3}{x} \right]_1^3 = 3 - 1 - (1 - 3) = 4$$

$$\begin{aligned} 17.3. A &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 0 + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

18.

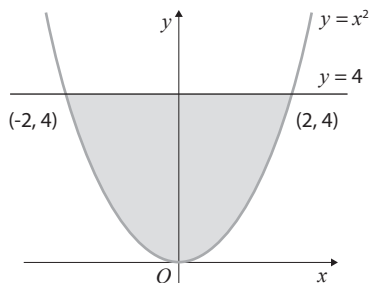
$$\begin{aligned} 18.1. x^2 + 1 &= 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$



Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (2x + 1 - (x^2 + 1)) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

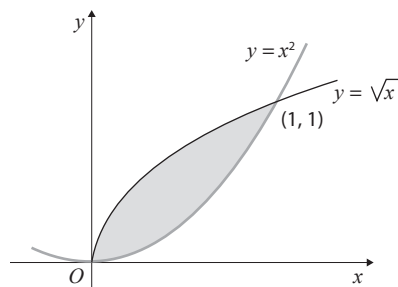
$$18.2. x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



Assim:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

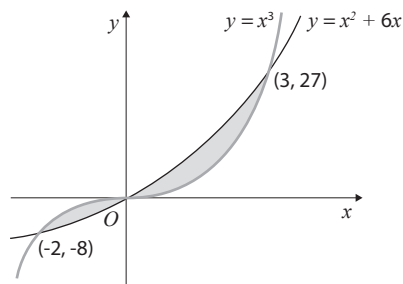
$$\begin{aligned} 18.3. \sqrt{x} &= x^2 \Rightarrow x = x^4 \\ &\Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$



Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.4. x^3 &= x^2 + 6x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3 \end{aligned}$$



Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx + \int_0^3 (x^2 + 6x - x^3) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \\ &= 0 - \left(4 + \frac{8}{3} - 12 \right) + \left(9 + 27 - \frac{81}{4} \right) - 0 = \\ &= \frac{253}{12} \end{aligned}$$

19. Seja h a função que dá a altura da árvore, em centímetros, em função do número de anos decorridos após ter sido plantada, t .

$$\begin{aligned} h(t) &= \int h'(t) dt = \int \frac{30}{\sqrt{t}} dt = 30 \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= 30 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 60 \sqrt{t} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$h(0) = 20 \Leftrightarrow 60 \times \sqrt{0} + c = 20 \Leftrightarrow c = 20$$

$$\text{Logo, } h(t) = 60\sqrt{t} + 20.$$

Assim:

$$h(t) = 200 \Leftrightarrow 60\sqrt{t} + 20 = 200$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} = 3 \Rightarrow t = 9$$

Verificação:

$$60\sqrt{9} + 20 = 200 \Leftrightarrow 60 \times 3 + 20 = 200$$

$$\Leftrightarrow 180 + 20 = 200, \text{ que é uma}$$

proposição verdadeira.

Passados nove anos de ter sido plantada, a árvore mede 2 metros.

$$20. \int_0^2 (-x(x^2 - 4)) dx = \int_2^a (x(x^2 - 4)) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = \int_2^a (x^3 - 4x) dx$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_2^a =$$

$$\Leftrightarrow -4 + 8 = \frac{a^4}{4} - 2a^2 - (4 - 8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{4} - 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left(\frac{a^2}{4} - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 0 \vee a^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2\sqrt{2} \vee a = -2\sqrt{2}$$

Como $a > 0$, então $a = 2\sqrt{2}$.

21.

21.1. $A(1, 1)$

$B(x, f(x))$

$$m_{AB} = 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2 + 1 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Logo, a abscissa do ponto B é 3.

$$AB: y = 2x + b$$

O ponto A pertence à reta AB :

$$1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Logo, $AB: y = 2x - 1$.

Assim:

$$A = \int_1^3 (2x - 1 - (x - 1)^2 - 1) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 =$$

$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) =$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$21.2. f(x) = x^3 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3$$

$$t: y = 3x + b$$

O ponto A pertence à reta t : $0 = 3 + b \Leftrightarrow b = -3$

Logo, $t: y = 3x - 3$.

$$f(x) = 3x - 3 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

Cálculo auxiliar

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

Assim:

$$A = \int_{-2}^1 (x^3 - 1 - 3x + 3) dx =$$

$$= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) =$$

$$= \frac{27}{4}$$

Tema VII - Números Complexos

Páginas 66 a 70

1. Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 os afixos de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 , respectivamente.

$$1.1. |z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

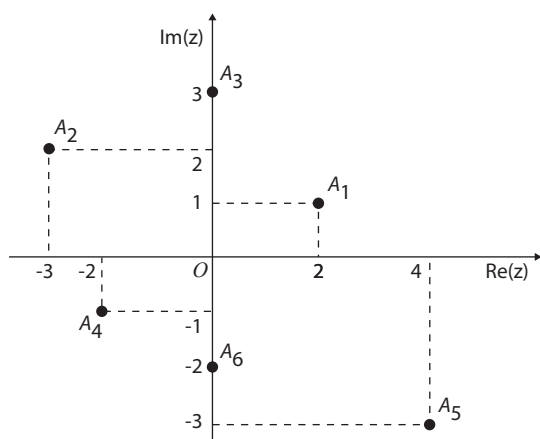
$$1.2. |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$1.3. |z_3| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

$$1.4. |z_4| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$1.5. |z_5| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$1.6. |z_6| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$



$$2. \overline{z_1} = 2 - i$$

$$-z_1 = -2 - i$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\overline{z_2} = -3 - 2i$$

$$-z_2 = 3 - 2i$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3+2i} = \frac{1}{-3+2i} \times \frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{-3-2i}{(-3)^2+2^2} = \frac{-3-2i}{13} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\overline{z_3} = -3i$$

$$-z_3 = -3i$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{3i} = \frac{1}{3i} \times \frac{-3i}{-3i} = \frac{-3i}{3^2} = -\frac{1}{3}i$$

$$\overline{z_4} = -2 + i$$

$$-z_4 = 2 + i$$

$$\frac{1}{z_4} = \frac{1}{-2-i} = \frac{1}{-2-i} \times \frac{-2+i}{-2+i} = \frac{-2+i}{2^2+1^2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\overline{z_5} = 4 + 3i$$

$$-z_5 = -4 + 3i$$

$$\frac{1}{z_5} = \frac{1}{4-3i} = \frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{4+3i}{4^2+3^2} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

$$\overline{z_6} = 2i$$

$$-z_6 = 2i$$

$$\frac{1}{z_6} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{-2i} \times \frac{2i}{2i} = \frac{2i}{2^2} = \frac{1}{2}i$$

3.

$$3.1. zw = (1+2i) \times (-2+i) = -2+i-4i+2i^2 = -4-3i$$

$$3.2. 2z - 3w = 2(1+2i) - 3(-2+i) = 2+4i+6-3i = 8+i$$

$$3.3. w^3 = (-2+i)^3 = (-2+i)^2 \times (-2+i) = (4-4i+i^2) \times (-2+i) = (3-4i) \times (-2+i) = -6+3i+8i-4i^2 = -2+11i$$

$$3.4. (z+w)(z-w) = (1+2i-2+i) \times (1+2i+2-i) = (-1+3i) \times (3+i) = -3-i+9i+3i^2 = -6+8i$$

$$3.5. (z+w)^2 = (1+2i-2+i)^2 = (-1+3i)^2 = 1-6i+9i^2 = -8-6i$$

$$3.6. \frac{z}{w} = \frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1} = -i$$

$$3.7. \frac{w}{z} = \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-2+4i+i-2i^2}{1+4} = i$$

$$3.8. \frac{1-i}{-z} = \frac{1-i}{-1-2i} = \frac{1-i}{-1-2i} \times \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{-1+2i+i-2i^2}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$3.9. \frac{\overline{w}}{1+i} = \frac{-2-i}{1+i} = \frac{-2-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2+2i-i+i^2}{1+1} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

4.

$$4.1. z + 2i = \frac{3}{i} \Leftrightarrow z = -2i + \frac{3}{i} \times \frac{-i}{-i} \Leftrightarrow z = -2i + (-3i) \Leftrightarrow z = -5i$$

$$\text{C.S.} = \{-5i\}$$

$$4.2. \overline{z} + 3z = 2 - i \Leftrightarrow \underbrace{a-bi}_{z=a+bi} + 3(a+bi) = 2-i \Leftrightarrow a-bi+3a+3bi = 2-i \Leftrightarrow 4a+2bi = 2-i$$

$$\Leftrightarrow 4a = 2 \wedge 2b = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

$$4.3. \frac{1}{z} = 2 + i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2+i} \wedge z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} \wedge z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{4+1} \wedge z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \right\}$$

$$4.4. (z+i)^2 = 2iz \Leftrightarrow z^2 + 2iz + i^2 = 2iz$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 1\}$$

$$4.5. z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 + i \vee z = 2 - i$$

$$\text{C.S.} = \{2 + i, 2 - i\}$$

$$4.6. \frac{1+z^2}{i+z} = i \Leftrightarrow 1+z^2 = i^2 + iz \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - iz + 2 = 0 \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-1-8}}{2} \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-9}}{2} \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i \pm 3i}{2} \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow (z = 2i \vee z = -i) \wedge z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z = 2i$$

$$\text{C.S.} = \{2i\}$$

5.

$$5.1. \frac{1+i}{2-ki} = \frac{1+i}{2-ki} \times \frac{2+ki}{2+ki} =$$

$$= \frac{2+ki+2i+ki^2}{4+k^2} =$$

$$= \frac{2-k}{4+k^2} + \frac{k+2}{4+k^2}i$$

Para que $\frac{1+i}{2-ki}$ represente um número imaginário puro, então:

$$\frac{2-k}{4+k^2} = 0 \wedge \frac{k+2}{4+k^2} \neq 0 \Leftrightarrow k = 2$$

$$5.2. 2ki \times \frac{1+ki}{2-i} = \frac{2ki+2k^2i^2}{2-i} =$$

$$= \frac{-2k^2+2ki}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} =$$

$$= \frac{-4k^2-2k^2i+4ki+2ki^2}{4+1} =$$

$$= \frac{-4k^2-2k}{5} + \frac{-2k^2+4k}{5}i$$

Para que $2ki \times \frac{1+ki}{2-i}$ represente um número imaginário puro, então:

$$\frac{-4k^2-2k}{5} = 0 \wedge \frac{-2k^2+4k}{5} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -4k^2-2k = 0 \wedge -2k^2+4k \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -2k(2k+1) = 0 \wedge 2k(-k+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(k = 0 \vee k = -\frac{1}{2} \right) \wedge (k \neq 0 \wedge k \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$5.3. \frac{2+ki}{k+i} = \frac{2+ki}{k+i} \times \frac{k-i}{k-i} =$$

$$= \frac{2k-2i+k^2i-ki^2}{k^2+1} =$$

$$= \frac{2k+k}{k^2+1} + \frac{k^2-2}{k^2+1}i$$

Para que $\frac{2+ki}{k+i}$ represente um número imaginário puro, então:

$$\frac{2k+k}{k^2+1} = 0 \wedge \frac{k^2-2}{k^2+1} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3k = 0 \wedge k^2 - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \wedge (k \neq \sqrt{2} \wedge k \neq -\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow k = 0$$

6. Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Im}(z) = \text{Re}(z) - 1 \Leftrightarrow b = a - 1$$

$$\text{Então, } z = a + (a-1)i.$$

$$z^2 = (a + (a-1)i)^2 =$$

$$= a^2 + 2a(a-1)i + (a-1)^2 i^2 =$$

$$= a^2 - (a-1)^2 + 2a(a-1)i.$$

Para que $z^2 \in \mathbb{R}$:

$$2a(a-1) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \vee a-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$$

Logo, se $a = 0$, então $b = -1$ e se $a = 1$, então $b = 0$.

Assim, $z = -i$ ou $z = 1$.

7.

$$7.1. (\overline{z_1 z_2} + z_1 \overline{z_2})^2 - (\overline{z_1 z_2} - z_1 \overline{z_2})^2 =$$

$$= (\overline{z_1 z_2})^2 + 2\overline{z_1 z_2} z_1 \overline{z_2} + (z_1 \overline{z_2})^2 - (\overline{z_1 z_2})^2 + 2\overline{z_1 z_2} z_1 \overline{z_2} -$$

$$- (z_1 \overline{z_2})^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{4z_1 z_1 z_2 z_2} = \\
&= 4|z_1|^2 |z_2|^2 = \\
&= (2|z_1 z_2|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.2. |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_2)} = \\
&= (z_1 - z_2) (\overline{z_1} - \overline{z_2}) = \\
&= z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = \\
&= |z_1|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 = \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1})
\end{aligned}$$

8. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z + w = 3 &\Leftrightarrow a + bi + c + di = 3 \\
&\Leftrightarrow (a + c) + (b + d)i = 3 \\
&\Leftrightarrow a + c = 3 \wedge b + d = 0 \\
&\Leftrightarrow a = 3 - c \wedge b = -d
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} = i &\Leftrightarrow \frac{a + bi}{c + di} = i \\
&\Leftrightarrow \frac{3 - c - di}{c + di} = i \\
&\Leftrightarrow \frac{(3 - c) - di}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} = i \\
&\Leftrightarrow \frac{3c - c^2 - 3di + cdi - cdi + d^2 i^2}{c^2 + d^2} = i \\
&\Leftrightarrow \frac{3c - c^2 - d^2}{c^2 + d^2} + \frac{-3d}{c^2 + d^2} i = i \\
&\Leftrightarrow \frac{3c}{c^2 + d^2} - 1 = 0 \wedge -\frac{3d}{c^2 + d^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow 3c = c^2 + d^2 \wedge -\frac{3d}{3c} = 1 \wedge c^2 + d^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow d = -c \wedge 3c = 2c^2 \wedge c \neq 0 \wedge d \neq 0 \\
&\Leftrightarrow c = \frac{3}{2} \wedge d = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } a = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ e } b = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ou seja, } z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \text{ e } w = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i.$$

9.

$$9.1. r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\text{tg } \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Logo, } \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Então, } 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$9.2. r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$\text{tg } \theta = -1 \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Logo, } \theta = -\frac{\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Então, } \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2e^{i(-\frac{\pi}{4})}.$$

$$9.3. r = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Logo, } \theta = \frac{5\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Então, } -6 + 2\sqrt{3}i = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$9.4. r = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Logo, } \theta = -\frac{5\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Então, } -\sqrt{6} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{5\pi}{6})}.$$

$$9.5. 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$9.6. -2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

10.

$$\begin{aligned}
10.1. 4e^{i\frac{\pi}{3}} &= 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \\
&= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \\
&= 2 + 2\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

$$10.2. 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$\begin{aligned}
10.3. 2e^{i\frac{3\pi}{4}} &= 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \\
&= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.4. 3e^{i\frac{5\pi}{6}} &= 3 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \\
&= 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.5. \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{4}} &= \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) = \\
&= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.6. 2e^{i\frac{4\pi}{3}} &= 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \\
&= -1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

11.

11.1. Conjugado: $4e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

Simétrico: $4e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Inverso: $\frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{4}e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

11.2. Conjugado: $2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

Simétrico: $2e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Inverso: $\frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

11.3. Conjugado: $2e^{i(-\frac{3\pi}{4})}$

Simétrico: $2e^{i(\pi + \frac{3\pi}{4})} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Inverso: $\frac{1}{2e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4})}$

11.4. Conjugado: $3e^{i(-\frac{5\pi}{6})}$

Simétrico: $3e^{i(\pi + \frac{5\pi}{6})} = 3e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Inverso: $\frac{1}{3e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{3}e^{i(-\frac{5\pi}{6})}$

11.5. Conjugado: $\sqrt{3}e^{i(-\frac{7\pi}{4})}$

Simétrico: $\sqrt{3}e^{i(\pi + \frac{7\pi}{4})} = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{4}} = \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Inverso: $\frac{1}{\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i(-\frac{7\pi}{4})}$

11.6. Conjugado: $2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}$

Simétrico: $2e^{i(\pi + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{7\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Inverso: $\frac{1}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{4\pi}{3})}$

12. $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\text{tg } \theta_1 = -\sqrt{3} \wedge \theta_1 \in 2.^\circ \text{Q}$

Logo, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

$z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\text{tg } \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta_2 \in 4.^\circ \text{Q}$

Logo, $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

12.1. $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i(-\frac{\pi}{6})} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

12.2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

12.3. $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4})} =$
 $= \sqrt{2}e^{i(-\frac{17\pi}{12})} =$
 $= \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} =$

12.4. $z_2 z_3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})} \times \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} =$
 $= 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{4})} =$
 $= 2\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

12.5. $\frac{1}{z_3} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{5\pi}{4})}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

12.6. $z_1^2 = (2e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

12.7. $z_2^3 = (2e^{i(-\frac{\pi}{6})})^3 = 8e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

12.8. $z_3^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})^4 = 4e^{i5\pi} = 4e^{i\pi}$

12.9. $\frac{2z_1}{z_2 z_3} = \frac{2 \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{13\pi}{12})} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{5\pi}{12})}$

12.10. $\overline{z_1 z_2} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

12.11. $\frac{\overline{z_1 z_3}}{z_2} = \frac{2e^{i(-\frac{2\pi}{3})} \times \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} =$
 $= \frac{2\sqrt{2}e^{i(-\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{4})}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} =$
 $= \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}{e^{i(-\frac{\pi}{6})}} =$
 $= \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{6})} =$
 $= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

12.12. $\frac{(z_1)^2 \overline{z_3}}{z_3} = \frac{4e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i(-\frac{5\pi}{4})}}{2e^{i\frac{5\pi}{4}}} =$
 $= \frac{2e^{i(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{4})}}{e^{i\frac{5\pi}{4}}} =$
 $= \frac{2e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{5\pi}{4}}} =$
 $= 2e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{4})} = 4e^{i(-\frac{7\pi}{6})} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\begin{aligned}
13. \frac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)i}{-\cos \alpha + i \sin \alpha} &= \\
&= \frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin \alpha}{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)} = \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin \alpha}{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)} = \\
&= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)} = \\
&= \frac{e^{i\alpha}}{e^{i(\pi - \alpha)}} = \\
&= e^{i(\alpha - \pi + \alpha)} = \\
&= e^{i(2\alpha - \pi)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. z &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\
z^2 &= (\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = \\
&= 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i^2(2 - \sqrt{3}) = \\
&= 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} - 2 + \sqrt{3} = \\
&= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{4 - 3} = \\
&= 2\sqrt{3} + 2i \\
|z^2| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4 \\
\operatorname{tg} \theta &= \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}
\end{aligned}$$

Logo, por exemplo, $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Assim, $z^2 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Se $z = re^{i\alpha}$, então:

$$\begin{aligned}
z^2 &= 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow (re^{i\alpha})^2 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \\
&\Leftrightarrow r^2 e^{i2\alpha} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \\
&\Leftrightarrow r^2 = 4 \wedge 2\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow r = 2 \wedge \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Logo, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

15.

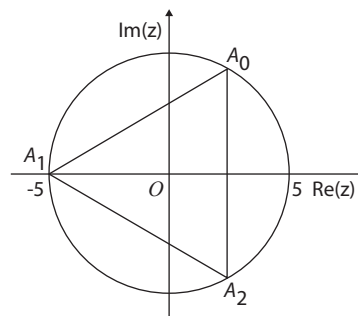
$$\begin{aligned}
15.1. z^3 &= -125 \Leftrightarrow (re^{i\theta})^3 = 125e^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 125e^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow r^3 = 125 \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\} \\
&\Leftrightarrow r = 5 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}
\end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = 5e^{i\pi}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Sendo A_0, A_1 e A_2 os afijos de z_0, z_1 e z_2 , respetivamente:



$$15.2. z^4 = 256i$$

$$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = 256e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = 256e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 256 \wedge 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow r = 4 \wedge \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

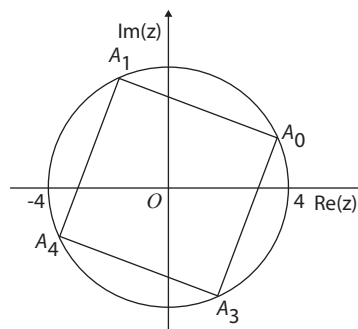
Se $k = 0$, então $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = 4e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = 4e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = 4e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

Sendo A_0, A_1, A_2 e A_3 os afijos de z_0, z_1, z_2 e z_3 , respetivamente:



$$15.3. z^5 = 243$$

$$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = 243e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = 243e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow r^5 = 243 \wedge 5\theta = 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\Leftrightarrow r = 3 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Se $k = 0$, então $z_0 = 3e^{i0}$.

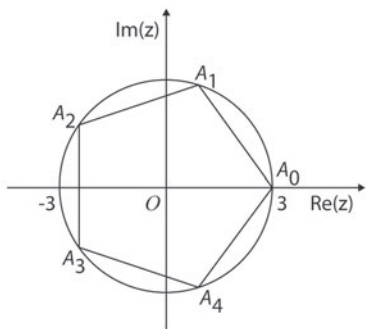
Se $k = 1$, então $z_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = 3e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = 3e^{i\frac{6\pi}{5}}$.

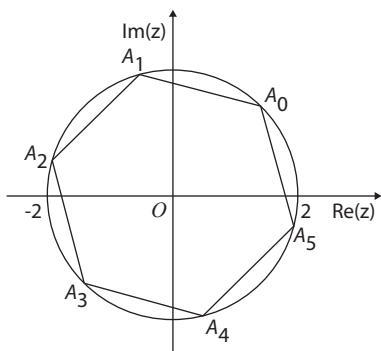
Se $k = 4$, então $z_4 = 3e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

Sendo A_0, A_1, A_2, A_3 e A_4 os afijos de z_0, z_1, z_2, z_3 , e z_4 , respectivamente:



$$\begin{aligned}
 15.4. \quad z^6 &= -64i \Leftrightarrow (re^{i\theta})^6 = 64e^{i\frac{3\pi}{2}} \\
 &\Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = 64e^{i\frac{3\pi}{2}} \\
 &\Leftrightarrow r^6 = 64 \wedge 6\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 &\Leftrightarrow r = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 \text{Se } k = 0, &\text{ então } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}. \\
 \text{Se } k = 1, &\text{ então } z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}. \\
 \text{Se } k = 2, &\text{ então } z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}. \\
 \text{Se } k = 3, &\text{ então } z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}. \\
 \text{Se } k = 4, &\text{ então } z_4 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}. \\
 \text{Se } k = 5, &\text{ então } z_5 = 2e^{i\frac{23\pi}{12}}.
 \end{aligned}$$

Sendo A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 os afijos de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 , respectivamente:



16.

$$\begin{aligned}
 16.1. \quad z &= z_0^6 \Leftrightarrow z = (2e^{i\frac{2\pi}{3}})^6 \\
 &\Leftrightarrow z = 2^6 e^{i4\pi} \\
 &\Leftrightarrow z = 64e^{i4\pi} \\
 &\Leftrightarrow z = 64(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) \\
 &\Leftrightarrow z = 64
 \end{aligned}$$

16.2. Os afijos das raízes sextas de z são os vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 2 com centro na origem do referencial. Por se tratar de um hexágono regular, a medida do raio da circunferência é igual à medida do lado do hexágono. Assim, $P = 6 \times 2 = 12$ u.c.

17.

$$\begin{aligned}
 17.1. \quad z^5 + 1 &= 0 \\
 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = -1 \\
 &\Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow r^5 = 1 \wedge 5\theta = \pi + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
 &\Leftrightarrow r = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
 \text{C.S.} &= \left\{ e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.2. \quad z^6 - i &= 0 \\
 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^6 = i \\
 &\Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
 &\Leftrightarrow r^6 = 1 \wedge 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 &\Leftrightarrow r = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 \text{C.S.} &= \left\{ e^{i\frac{\pi}{12}}, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{12}}, e^{i\frac{7\pi}{12}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{11\pi}{12}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.3. \quad z^4 + 16i \times e^{i\frac{\pi}{4}} &= 0 \\
 &\Leftrightarrow z^4 + 16e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow z^4 + 16e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = -16e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 &\Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\frac{7\pi}{4}} \\
 &\Leftrightarrow r^4 = 16 \wedge 4\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3\} \\
 &\Leftrightarrow r = 2 \wedge \theta = \frac{7\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \\
 \text{C.S.} &= \left\{ 2e^{i\frac{7\pi}{16}}, 2e^{i\frac{15\pi}{16}}, 2e^{i\frac{23\pi}{16}}, 2e^{i\frac{31\pi}{16}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.4. \quad z^2 - 1 + \sqrt{3}i &= 0 \\
 &\Leftrightarrow z^2 = 1 - \sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})} \\
 &\Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})} \\
 &\Leftrightarrow r^2 = 2 \wedge 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0, 1\} \\
 &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \wedge \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \{0, 1\} \\
 \text{C.S.} &= \left\{ \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge \alpha \in 4.^\circ \text{Q}$$

Logo, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

17.5. $z^4 - 27z = 0$

$$\Leftrightarrow z(z^3 - 27) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee (re^{i\theta})^3 = 27e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee r^3 e^{i3\theta} = 27e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee (r^3 = 27 \wedge 3\theta = 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\})$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee \left(r = 3 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \right)$$

$$\text{C.S.} = \left\{ 0, 3e^{i0}, 3e^{i\frac{2\pi}{3}}, 3e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

17.6. $z^2 = -i\bar{z}$

$$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = re^{i(\frac{3\pi}{2} - \theta)}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = r \wedge 2\theta = \frac{3\pi}{2} - \theta + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \vee \left(r = 1 \wedge 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\} \right)$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \vee \left(r = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \right)$$

$$\text{C.S.} = \left\{ 0, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$$

18. Os afijos das raízes quintas de um número complexo, diferente de zero, são os vértices de um pentágono regular inscrito numa circunferência com centro na origem.

Tem-se que $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = -e^{i\alpha} = e^{i(\pi + \alpha)}$ e, portanto, a diferença entre os argumentos de z_1 e z_2 é π , o que significa que os seus afijos não podem ser vértices do mesmo pentágono regular com centro na origem e, assim, z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes quintas de um mesmo número complexo não nulo.

19.

19.1. Seja $z = -2 - 2i$ e seja P afixo de z .

O ponto P é simétrico de A relativamente à origem do referencial.

Seja $[OBCDE]$ o pentágono referido no enunciado. Os vértices B, C, D e E deste pentágono são os afijos de P por rotações de centro O e ângulo orientado de medida $\frac{2\pi}{5}n, n \in \{1, 2, 3, 4\}$, respetivamente, compostas com uma translação de vetor $\vec{OA}$.

Assim, B é o afixo de:

$$\begin{aligned} z_1 &= (-2 - 2i) \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right) + (2 + 2i) = \\ &= -2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2i \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \\ &\quad - 2i^2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 + 2i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \right) + \\ &\quad + \left(-2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \right) i = \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} B \left(-2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2, -2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \right. \\ \left. - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \right) \approx (3,28; -0,52) \end{aligned}$$

C é o afixo de:

$$\begin{aligned} z_2 &= (-2 - 2i) \times \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right) + (2 + 2i) = \\ &= -2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2i \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \\ &\quad - 2i^2 \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 + 2i = \\ &= \left(-2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \right) + \\ &\quad + \left(-2 \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \right) i = \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} C \left(-2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2, -2 \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \right. \\ \left. - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \right) \approx (4,79; 2,44) \end{aligned}$$

D é o afixo de:

$$\begin{aligned} z_3 &= (-2 - 2i) \times \left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \right) + (2 + 2i) = \\ &= -2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2i \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) - \\ &\quad - 2i^2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 + 2i = \\ &= \left(-2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 \right) + \\ &\quad + \left(-2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 \right) i = \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} D \left(-2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2, -2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - \right. \\ \left. - 2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2 \right) \approx (2,44; 4,79) \end{aligned}$$

E é o afixo de:

$$\begin{aligned} z_4 &= (-2 - 2i) \times \left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \right) + (2 + 2i) = \\ &= -2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2i \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - \\ &\quad - 2i^2 \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2 + 2i = \\ &= \left(-2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2 \right) + \\ &\quad + \left(-2 \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2 \right) i = \end{aligned}$$

Ou seja:

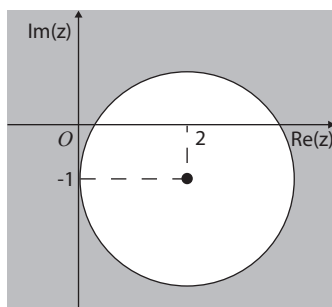
$$E\left(-2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2, -2 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2\right) \approx (0,52; 3,28)$$

$$\begin{aligned} 19.2. (-2 - 2i)^5 &= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^5 = \\ &= 128\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{4}} = \\ &= 128\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= 128\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= 128 + 128i \end{aligned}$$

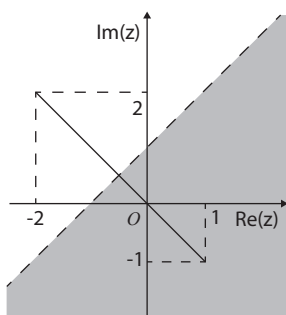
Uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do pentágono é, por exemplo, $(z - 2 - 2i)^5 = 128 + 128i$.

20.

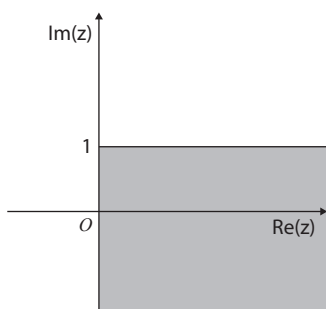
$$20.1. |z - 2 + i| \geq 2 \Leftrightarrow |z - (2 - i)| \geq 2$$



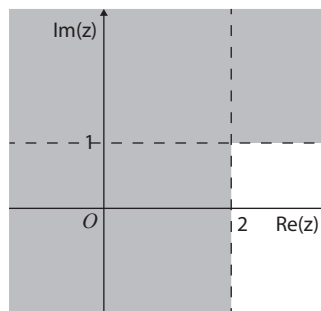
$$\begin{aligned} 20.2. |z - 1 + i| &< |z + 2 - 2i| \\ \Leftrightarrow |z - (1 - i)| &< |z - (-2 + 2i)| \end{aligned}$$



$$20.3. -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq 0$$

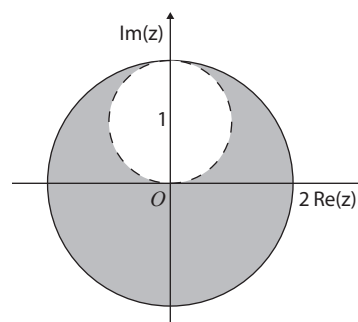


$$20.4. \operatorname{Re}(z) < 2 \vee \operatorname{Im}(z) > 1$$

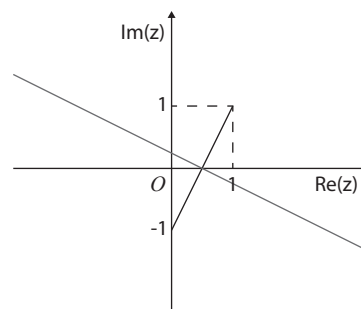


21.

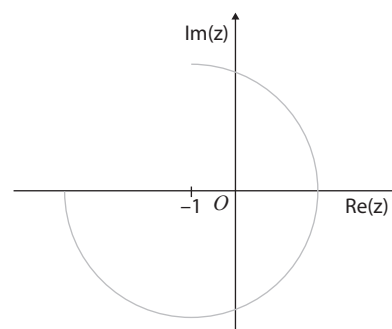
$$21.1. |z| \leq 2 \wedge |z - i| > 1$$



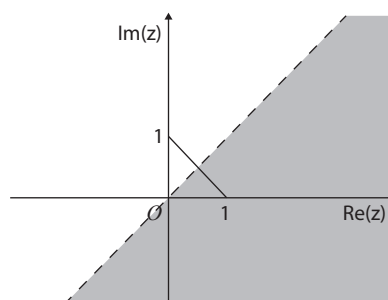
$$21.2. |z - 1 - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = |z - (-1)|$$



$$21.3. -\pi < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} \wedge |z + 1| = 3$$

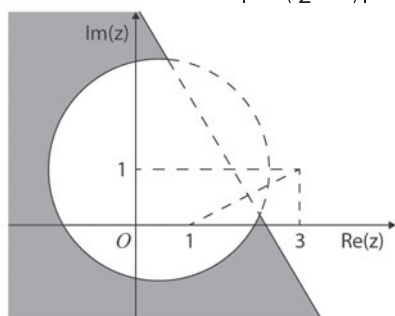


$$21.4. |z - 1| < |z - i|$$



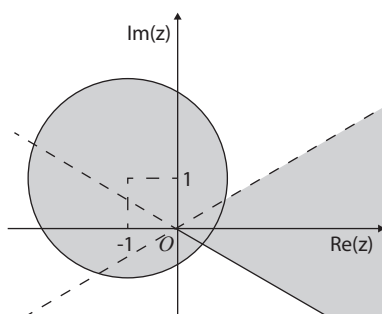
$$21.5. |z - 3 - i| \geq |z - 1| \wedge \left| z - \frac{1}{2} - i \right| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow |z - (3 + i)| \geq |z - 1| \wedge \left| z - \left(\frac{1}{2} + i \right) \right| \geq 2$$



$$21.6. -\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z} \right) < \frac{\pi}{3} \vee |z + 1 - i| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{6} \vee |z - (-1 + i)| \leq 2$$



22.

$$22.1. |z - 2| \leq 2 \wedge \left(|z| \leq 4 \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$22.2. |z| \leq 2 \wedge \left(0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi \vee \frac{4\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{3} \right)$$

23.

$$23.1. 2|z| = |z - i| \Leftrightarrow 2|x + yi| = |x + yi - i|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

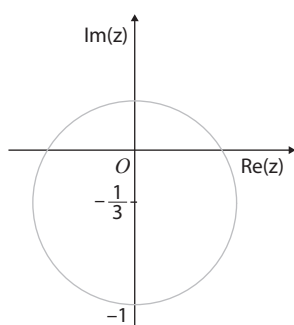
$$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

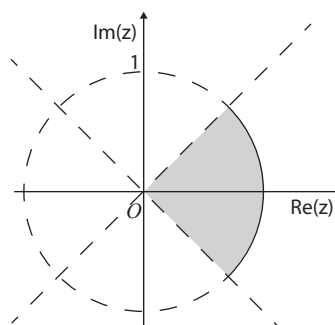
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$



$$23.2. \left| \frac{1}{z} \right| \geq 1 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \geq 1 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow |z| \leq 1 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$$



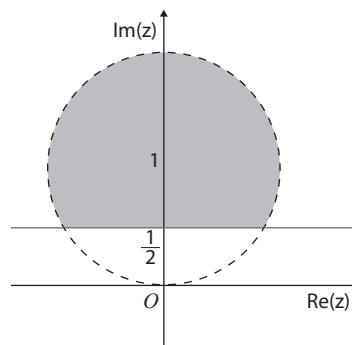
$$23.3. \operatorname{Im}(z - \bar{z}) \geq 1 \wedge |z - i| < 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}((x + yi) - (x - yi)) \geq 1 \wedge |z - i| < 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(2yi) \geq 1 \wedge |z - i| < 1$$

$$\Leftrightarrow 2y \geq 1 \wedge |z - i| < 1$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} \wedge |z - i| < 1$$



24.

$$24.1. z_1^3 - z_1^2 + 2z_1 + 4 =$$

$$= (1 + \sqrt{3}i)^3 - (1 + \sqrt{3}i)^2 + 2(1 + \sqrt{3}i) + 4 =$$

$$= (1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2)(1 + \sqrt{3}i) - (1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2) +$$

$$+ 2 + 2\sqrt{3}i + 4 =$$

$$= (-2 + 2\sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) + 2 - 2\sqrt{3}i + 6 + 2\sqrt{3}i =$$

$$= -2 - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i + 6i^2 + 8 =$$

$$= -2 - 6 + 8 = 0$$

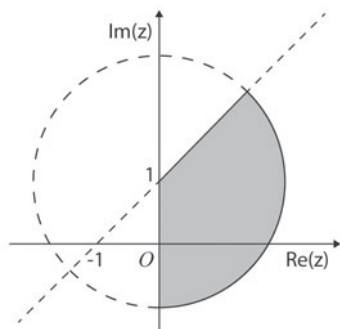
Logo, z_1 é raiz do polinômio $z^3 - z^2 + 2z + 4$.

$$24.2. |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Logo:

$$|z - i| \leq |z_1| \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow |z - i| \leq 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$$



$$A_R = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} \times 2^2 = \frac{3\pi}{2}$$

24.3. $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\text{tg } \theta_1 = \sqrt{3} \wedge \theta_1 \in 1.^\circ \text{Q}$

Logo, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por exemplo.

$$(z_1)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

Para que $(z_1)^n$ seja um número real negativo:

$$\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor de n natural, nestas condições, obtém-se quando $k = 0$.

Assim, $n = 3$.

25.

$$\begin{aligned} \text{25.1. } \frac{z_1 \times z_2 - 2\sqrt{6}}{(z_1)^3} &= \frac{(3 - \sqrt{3}i)e^{i\frac{5\pi}{12}} - 2\sqrt{6}}{(3 - \sqrt{3}i)^3} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \times e^{i\frac{5\pi}{12}} - 2\sqrt{6}}{\left(2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^3} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{6}}{2^3 \times 3\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \\ &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \sqrt{2}}{-4 \times 3i} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{2}}{-12i} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{-12i} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{24i} \times \frac{-i}{-i} = \\ &= \frac{-\sqrt{2}i + \sqrt{2}i^2}{24} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}}{24}i \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet |z_1| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet \text{tg } \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta_1 \in 4.^\circ \text{Q}$$

Logo, $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

25.2. $z_1 = 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{6} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 4$$

25.3. $z^4 = -\overline{z_2} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = -e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

$$\Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 1 \wedge 4\theta = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \wedge \theta = \frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{C.S.} = \left\{e^{i\frac{7\pi}{48}}, e^{i\frac{13\pi}{48}}, e^{i\frac{19\pi}{48}}, e^{i\frac{\pi}{48}}\right\}$$

25.4. $w = i^{2019} \times e^{i2\theta} = i^4 \times 504 + 3 \times e^{i2\theta} =$

$$= i^3 \times e^{i2\theta} = -i \times e^{i2\theta} =$$

$$= e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i2\theta} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\theta\right)}$$

$$\frac{w}{z_3} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\theta\right)}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{i\left(2\theta + \frac{7\pi}{6}\right)}$$

Para que $\frac{w}{z_3}$ seja um imaginário puro:

$$2\theta + \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]-\pi, \pi[$, então $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (para $k = 0$) ou

$\theta = \frac{\pi}{6}$ (para $k = 1$) ou $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (para $k = 2$) ou

$\theta = -\frac{5\pi}{6}$ (para $k = -1$).

26. Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-i} &= \frac{a+bi}{a+bi-i} = \frac{a+bi}{a+(b-1)i} \times \frac{a-(b-1)i}{a-(b-1)i} = \\ &= \frac{a^2 - a(b-1)i + abi - b(b-1)i^2}{a^2 + (b-1)^2} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - b) + (-ab + a + ab)i}{a^2 + (b-1)^2} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - b) + ai}{a^2 + (b-1)^2} \end{aligned}$$

Como $\frac{z}{z-i}$ é um número real, não nulo, então $a = 0$,

$b \neq 0$ e $b \neq 1$.

Logo, $z = bi$, com $b \neq 0$, ou seja, z é um número imaginário puro.

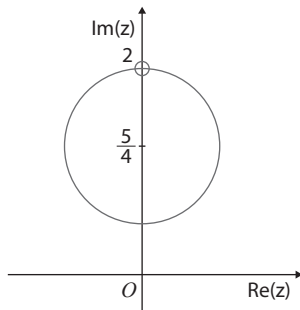
27.

27.1. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2z-i}{2+iz} &= \frac{2(x+yi)-i}{2+i(x+yi)} = \frac{2x+2yi-i}{2+xi+yi^2} = \\ &= \frac{2x+(2y-1)i}{(2-y)+xi} \times \frac{(2-y)-xi}{(2-y)-xi} = \\ &= \frac{2x(2-y) - 2x^2i + (2y-1)(2-y)i - (2y-1)xi^2}{(2-y)^2 + x^2} = \\ &= \frac{2x(2-y) + (2y-1)x}{(2-y)^2 + x^2} + \frac{-2x^2 + 4y - 2y^2 - 2 + y}{(2-y)^2 + x^2} i = \\ &= \frac{4x - 2xy + 2xy - x}{(2-y)^2 + x^2} + \frac{-2x^2 - 2y^2 + 5y - 2}{(2-y)^2 + x^2} i = \\ &= \frac{3x}{(2-y)^2 + x^2} + \frac{-2x^2 - 2y^2 + 5y - 2}{(2-y)^2 + x^2} i \end{aligned}$$

Para que $\frac{2z-i}{2+iz}$ seja um número real:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 - 2y^2 + 5y - 2}{(2-y)^2 + x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 &= 0 \wedge (2-y)^2 + x^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y &= -1 \wedge (x, y) \neq (0, 2) \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} &= \frac{9}{16} \wedge (x, y) \neq (0, 2) \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{9}{16} \wedge (x, y) \neq (0, 2) \end{aligned}$$



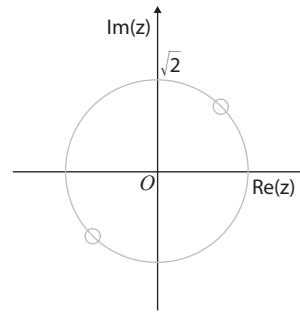
27.2. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{z-1-i}{z+1+i} &= \frac{x+yi-1-i}{x+yi+1+i} = \\ &= \frac{(x-1)+(y-1)i}{(x+1)+(y+1)i} \times \frac{(x+1)-(y+1)i}{(x+1)-(y+1)i} = \\ &= \frac{(x-1)(x+1) - (x-1)(y+1)i + (y-1)(x+1)i - (y-1)(y+1)i^2}{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1 - (xy + x - y - 1)i + (xy + y - x - 1)i + (y^2 - 1)}{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x+1)^2 + (y+1)^2} + \frac{-2x + 2y}{(x+1)^2 + (y+1)^2} i \end{aligned}$$

Para que $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ seja um número imaginário puro:

$$\frac{x^2 + y^2 - 2}{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 0 \wedge \frac{-2x + 2y}{(x+1)^2 + (y+1)^2} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2 \wedge (x+1)^2 + (y+1)^2 \neq 0 \wedge -2x + 2y \neq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2 \wedge (x+1)^2 + (y+1)^2 \neq 0 \wedge x \neq y \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2 \wedge (x, y) \neq (1, 1) \wedge (x, y) \neq (-1, -1) \end{aligned}$$



28. $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z^2 + 1 &= 2z \cos \alpha \\ \Leftrightarrow z^2 - 2z \cos \alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2} = \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm 2i \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{2} = \\ \Leftrightarrow z &= \cos \alpha + i \sin \alpha \vee z = \cos \alpha - i \sin \alpha \\ \Leftrightarrow z &= e^{i\alpha} \vee z = e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Então, se $z = e^{i\alpha}$, para todo o número natural n , tem-se:

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= (e^{i\alpha})^n + \frac{1}{(e^{i\alpha})^n} = \\ &= e^{in\alpha} + \frac{1}{e^{in\alpha}} = \\ &= e^{in\alpha} + e^{i(-n\alpha)} = \\ &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha) = \\ &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha) = \\ &= 2 \cos(n\alpha) \end{aligned}$$

E, se $z = e^{i(-\alpha)}$, para todo o número natural n , tem-se:

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= (e^{i(-\alpha)})^n + \frac{1}{(e^{i(-\alpha)})^n} = \\ &= e^{i(-n\alpha)} + \frac{1}{(e^{i(-\alpha)})^n} = \\ &= e^{i(-n\alpha)} + e^{in\alpha} = \\ &= \cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha) + \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = \\ &= \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = \\ &= 2 \cos(n\alpha) \end{aligned}$$

Testes de Autoavaliação

Teste n.º 1

Páginas 73 a 75

1. Opção (B)

$$\begin{aligned} & 7 + {}^7A_2 + {}^7A_3 + {}^7A_4 + {}^7A_5 + {}^7A_6 + {}^7A_7 = \\ & = 7 + 42 + 210 + 840 + 2520 + 5040 + 5040 = \\ & = 13\,699 \end{aligned}$$

2. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Colocar questões."

B : "Comprar pelo menos um livro."

Sabe-se que:

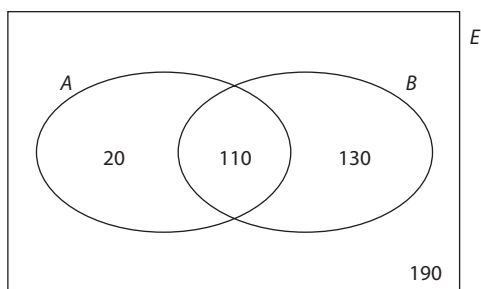
$$\# E = 450$$

$$\# B = 240$$

$$\# (A \cap B) = 110$$

$$\# (A \cap \bar{B}) = 20$$

Então, tem-se:



Cálculos auxiliares

- $\# (\bar{A} \cap B) = 240 - 110 = 130$
- $\# (\bar{A} \cap \bar{B}) = 450 - 20 - 240 = 190$

$$2.1. P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{190}{450} = \frac{19}{45}$$

$$2.2. P(B | A) = \frac{110}{130} = \frac{11}{13}$$

$$P(B | \bar{A}) = \frac{130}{130 + 190} = \frac{13}{32}$$

Como $P(B | A) > P(B | \bar{A})$, então uma pessoa que entra na livraria e coloca questões está mais predisposta a efetuar uma compra do que uma pessoa que entra na livraria e não coloca questões.

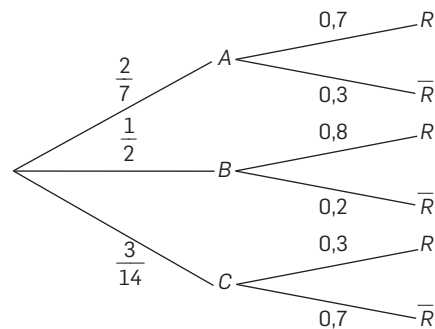
3. Sejam A , B , C e R os acontecimentos:

A : "O doente está infetado com o vírus A."

B : "O doente está infetado com o vírus B."

C : "O doente está infetado com o vírus C."

R : "O doente recupera totalmente em cinco dias ou menos."



$$3.1. P(R) = \frac{2}{7} \times 0,7 + \frac{1}{2} \times 0,8 + \frac{3}{14} \times 0,3 = \frac{93}{140}$$

$$3.2. P(C | \bar{R}) = \frac{P(C \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{3}{14} \times 0,7}{1 - \frac{93}{140}} = \frac{21}{47} \approx 45\%$$

4. Opção (A)

$$\begin{aligned} {}^{n-1}C_9 + {}^{n-1}C_{10} - {}^nC_{14} &= 0 \Leftrightarrow {}^nC_{10} - {}^nC_{14} = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^nC_{10} = {}^nC_{14} \end{aligned}$$

Logo:

$$n = 10 + 14 \Leftrightarrow n = 24$$

Assim, o maior elemento da linha 24 é

$${}^{24}C_{12} = 2\,704\,156.$$

5.

$$\begin{aligned} 5.1. {}^{n+3}C_2 &= 21 \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{2! \times (n+3-2)!} = 21 \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2 \times (n+1)!} = 21 \\ &\Leftrightarrow (n+2)(n+3) = 42 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 5n - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm 13}{2} \\ &\Leftrightarrow n = -9 \vee n = 4 \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 4$.

5.2. P ("Pelo menos um conto inédito ser incluído na compilação") =

$$= 1 - P(\text{"nenhum conto inédito ser incluído na compilação"}) =$$

$$= 1 - \frac{{}^3C_2}{{}^9C_2} =$$

$$= 1 - \frac{3}{\frac{9!}{7!2!}} =$$

$$= 1 - \frac{3 \times 2}{9 \times 8} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \times 4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{11}{12}$$

6. Opção (A)

$$P = \frac{3 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

7. Termo geral:

$${}^{12}C_p x^{12-p} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^p = {}^{12}C_p x^{12-p} 2^p \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^p =$$

$$= {}^{12}C_p 2^p x^{12-p} x^{-\frac{1}{2}p} =$$

$$= {}^{12}C_p 2^p x^{12-\frac{3}{2}p}$$

Então:

$$12 - \frac{3}{2}p = 9 \Leftrightarrow 24 - 3p = 18$$

$$\Leftrightarrow -3p = -6$$

$$\Leftrightarrow p = 2$$

Logo, o coeficiente do termo de grau 9 é

$${}^{12}C_2 2^2 = \frac{12!}{10!2!} \times 4 = 12 \times 11 \times 2 = 264.$$

8. Opção (B)

$$P(\overline{A \cap B}) = 0,4 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,4$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6$$

$$\Leftrightarrow P(A) + 0,2 = 0,6$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0,4$$

$$9. P(B) \times [1 - P(\overline{A} | B)] = P(B) - P(\overline{A \cap B}) =$$

$$= P(B) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - P(A \cup B) =$$

$$= P(\overline{A \cup B}) =$$

$$= P(\overline{A \cap B})$$

10. Opção (A)

$P(\overline{X} | Y)$ designa a probabilidade de a figura escolhida não ser um triângulo, sabendo que a figura escolhida está pintada de preto. Como esta probabilidade é igual a $\frac{2}{3}$, na resposta correta, duas em cada três figuras pintadas de preto não podem ser triângulos. Na opção (A), há três figuras pintadas de preto, sendo duas delas um quadrado e um círculo e essa é, portanto, a opção correta.

11.

$$11.1. P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{20+12}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{18} = \frac{10}{81}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, então os acontecimentos A e B não são acontecimentos independentes.

11.2. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, se estes forem todos equiprováveis.

O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher ordenadamente cinco das nove bolas, o que pode ser feito de 9A_5 maneiras diferentes.

Para que o número formado seja par e a soma dos seus algarismos seja ímpar, dois casos se podem dar: ou um dos algarismos é ímpar ou três dos algarismos são ímpares.

No primeiro caso, como o último algarismo tem de ser par, sobram quatro posições possíveis para colocar o algarismo ímpar, ou seja, há quatro maneiras diferentes de escolher a posição do algarismo ímpar. Para cada uma destas, existem cinco maneiras de escolher esse algarismo ímpar. Para cada posição do algarismo ímpar e para cada valor deste, existem $4!$ maneiras diferentes de as quatro bolas com algarismos pares ocuparem os restantes quatro lugares. Há então $4 \times 5 \times 4!$ nas condições do primeiro caso.

No segundo caso, como o último algarismo tem de ser par e três algarismos são ímpares, o quinto algarismo tem de ser par. Como o último algarismo tem de ser par, sobram quatro posições possíveis para colocar o outro algarismo par, ou seja, há quatro maneiras diferentes de escolher a posição do segundo algarismo par. Para cada uma destas, existem 4A_2 maneiras de escolher ordenadamente dois dos quatro algarismos pares para colocar nas respetivas posições. Para cada uma destas, existem 5A_3 maneiras de escolher ordenadamente três dos cinco algarismos ímpares para ocuparem os restantes três lugares. Há, então, $4 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2$ nas condições do segundo caso. O número de casos favoráveis é, então, $4 \times 5 \times 4! + 4 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2$.

Assim, a probabilidade pedida é

$$\frac{4 \times 5 \times 4! + 4 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2}{{}^9A_5}.$$

Teste n.º 2

Páginas 78 a 80

1.

1.1. $1 \times 7! = 5040$ maneiras

1.2. $P = \frac{6! \times {}^7C_3 \times 3!}{9!} = \frac{5}{12}$

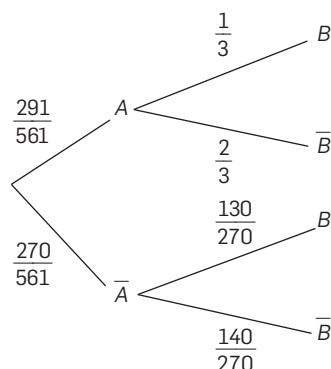
2. Opção (A)

$$P = \frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625}$$

3. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Frequentar o Ensino Básico."

B : "Ser rapaz."



$$\begin{aligned} P(\bar{A} | B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{\frac{270}{561} \times \frac{130}{270}}{\frac{270}{561} \times \frac{130}{270} + \frac{291}{561} \times \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{130}{227} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 4.1. P(t) = 0 &\Leftrightarrow -t^3 + 3,4t^2 + 83,6t = 0 \\ &\Leftrightarrow t(-t^2 + 3,4t + 83,6) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -t^2 + 3,4t + 83,6 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-3,4 \pm \sqrt{11,56 + 334,4}}{-2} \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{3,4 \pm 18,6}{2} \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 11 \vee t = -7,6 \end{aligned}$$

Como $t > 0$, então $t = 11$.

As portas do recinto fecharam 11 horas após as 16 horas, ou seja, às 3 horas do dia seguinte.

4.2. Opção (C)

$$20\,000 = 200 \text{ centenas}$$

A função P é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, por se tratar de uma função polinomial; em particular, P é contínua em qualquer intervalo fechado contido em $\mathbb{R}_0^+$.

$$P(0) = 0$$

$$P(1) = -1 + 3,4 \times 1^2 + 83,6 \times 1 = 86$$

$$P(2) = -2^3 + 3,4 \times 2^2 + 83,6 \times 2 = 172,8$$

$$P(3) = -3^3 + 3,4 \times 3^2 + 83,6 \times 3 = 254,4$$

$$P(4) = -4^3 + 3,4 \times 4^2 + 83,6 \times 4 = 324,8$$

$$\text{Então, } P(2) < 200 < P(3).$$

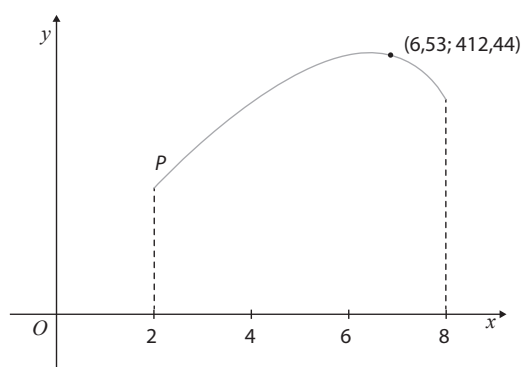
Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um instante c no intervalo $]2, 3[$ tal que $P(c) = 200$, ou seja, existe pelo menos um instante entre as 18 e as 19 horas em que estavam no recinto 20 000 pessoas do público.

4.3. Como a função P é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, em particular, é contínua no intervalo $[2, 8]$. Pode então concluir-se, pelo teorema de Weierstrass, que a função P admite neste intervalo um máximo e um mínimo, ou seja, no intervalo entre as 18 horas e as 24 horas houve um momento em que ocorreu uma maior concentração de pessoas no recinto.

Cálculo auxiliar

$$18 - 16 = 2$$

$$24 - 16 = 8$$



Cálculo auxiliar

$$0,53 \times 60 = 31,8$$

A maior concentração de pessoas no recinto ocorreu, aproximadamente, às 22 horas e 32 minutos.

$$\begin{aligned}
5. \quad & {}^{2n+1}C_3 + {}^{2n+1}C_4 - {}^{2n+3}C_5 + {}^{2n+2}C_{n+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_4 - ({}^{2n+2}C_4 + {}^{2n+2}C_5) + {}^{2n+2}C_{n+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_4 - {}^{2n+2}C_4 - {}^{2n+2}C_5 + {}^{2n+2}C_{n+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow -{}^{2n+2}C_5 + {}^{2n+2}C_{n+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_{n+1} = {}^{2n+2}C_5 \\
& \Leftrightarrow n+1+5 = 2n+2 \\
& \Leftrightarrow n = 4
\end{aligned}$$

6. Opção (A)

$$\begin{aligned}
(x-1)^5 &= x^5 - 6x^4 - 11x^2 \\
\Leftrightarrow x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 &= x^5 - 6x^4 - 11x^2 \\
\Leftrightarrow x^4 + 10x^3 + x^2 + 5x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

7. Opção (D)

$$\begin{aligned}
P(\overline{A \cup B}) &= \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow P(A \cup B) &= \frac{3}{4} \text{ (logo, } A \text{ e } B \text{ não são aconteci-} \\
&\quad \text{mentos contrários.)} \\
\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{7}{12} - P(A \cap B) &= \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow P(A \cap B) &= \frac{1}{3} \text{ (logo, } A \text{ e } B \text{ não são aconteci-} \\
&\quad \text{mentos incompatíveis.)} \\
P(A) \times P(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \neq \frac{1}{3} = P(A \cap B), \text{ logo } A \text{ e} \\
&\quad B \text{ não são acontecimentos independentes.} \\
\text{Então, } A \text{ e } B &\text{ são acontecimentos compatíveis.}
\end{aligned}$$

8. No contexto da situação descrita, $P(Y | X)$ significa "probabilidade de sair bola azul, sabendo que saiu face europeia na moeda". Se saiu face europeia na moeda, então a bola foi retirada da caixa B. Uma vez que $P(Y | X) = \frac{1}{4}$, tem-se que $\frac{1}{4}$ das bolas da caixa B é azul, ou seja, a caixa B tem $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ bolas azuis e $8 - 2 = 6$ bolas amarelas.

9. Opção (B)

Uma vez que o declive da reta, que é o gráfico da função f , tem declive negativo e interseção o eixo Oy no ponto $(0, -1)$, então o ponto de interseção desta reta com o eixo Ox tem abcissa negativa e $g''(x) < 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$. Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

10.

10.1. Para que a função seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-0}{1+0} = 1 = f(0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Para todo o número real não nulo x , tem-se que:

$$-1 \leq \cos \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \leq x^2$$

Como, além disso, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, então conclui-se, pelo teorema das funções enquadadas, que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 0$.

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

10.2. Em $]0, +\infty[$, tem-se $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\
&= \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = \\
&= -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \\
f'(1) &= -\frac{4}{(1+1)^2} = -1 \\
f(1) &= \frac{1-1}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = -x + b$. O ponto de coordenadas $(1, 0)$ pertence a esta reta, logo $0 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Assim, a equação pedida é $y = -x + 1$.

10.3. Em $]0, +\infty[$, tem-se:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(-\frac{4x}{(1+x^2)^2} \right)' = \\
&= -\frac{4(1+x^2)^2 - 4x \times 2(1+x^2) \times 2x}{(1+x^2)^4} = \\
&= -\frac{(1+x^2)[4(1+x^2) - 16x^2]}{(1+x^2)^4} = \\
&= -\frac{4-12x^2}{(1+x^2)^3} = \\
&= \frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3} \\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3} = 0 \\
&\Leftrightarrow 12x^2-4 = 0 \wedge (1+x^2)^3 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in]0, +\infty[$, então $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal de f''		-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. $x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x$

A medida da hipotenusa é dada, em função de x , por:

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x^2 + (8-x)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + 64 - 16x + x^2} = \\ &= \sqrt{2x^2 - 16x + 64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sqrt{2x^2 - 16x + 64})' = \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 - 16x + 64)^{-\frac{1}{2}} (2x^2 - 16x + 64)' = \\ &= \frac{4x - 16}{2\sqrt{2x^2 - 16x + 64}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4x - 16}{2\sqrt{2x^2 - 16x + 64}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 16 = 0 \wedge \underbrace{2x^2 - 16x + 64 > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x + 64 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 32 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 32}}{2} \end{aligned}$$

Equação impossível em $\mathbb{R}$.

x	0		4		8
Sinal de h'		-	0	+	
Variação de h		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	

$$h(4) = \sqrt{2 \times 16 - 16 \times 4 + 64} = 4\sqrt{2}$$

Teste n.º 3

Páginas 83 a 86

1.

1.1. Número de elementos do conjunto A que começam por 4 e têm exatamente três algarismos iguais a 4: ${}^4C_2 \times 9^2 = 486$

Número de elementos do conjunto A que não começam por 4 (nem por 0) e têm exatamente três algarismos iguais a 4: $8 \times 4 \times 9 = 288$

Assim, o número de elementos do conjunto A que têm exatamente três algarismos iguais a 4 é $486 + 288 = 774$.

1.2. Opção (B)

$$\begin{aligned} P(\text{"produto dos algarismos ser igual a zero"}) &= \\ &= 1 - P(\text{"não conter o algarismo 0"}) = \\ &= 1 - \frac{9^5}{9 \times 10^4} = \\ &= 0,3439 \end{aligned}$$

2.

2.1. $28 - 12 = 16$ raparigas

Número de grupos com dois rapazes e uma rapariga: ${}^{12}C_2 \times 16 = 1056$

Número de grupos com duas raparigas e um rapaz: ${}^{16}A_2 \times 12 = 2880$

Total: $1056 + 2880 = 3936$ maneiras

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Ser do sexo masculino."

B : "Levar um doce."

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \bullet P(A) &= \frac{12}{28} \\ \bullet P(A \cap \bar{B}) &= \frac{5}{14} \\ \bullet P(B | \bar{A}) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{28} \\ &\Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

	A	$\bar{A}$	Total
B	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$
$\bar{B}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{14}$
Total	$\frac{12}{28}$	$\frac{16}{28}$	1

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{5}{14}} = \frac{1}{5}$$

3. Opção (C)

$${}^nC_3 = 73\,150$$

$$1 + n + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 76\,154$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + {}^nC_2 + 73\,150 = 76\,154$$

$$\Leftrightarrow n + {}^nC_2 = 3003$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_2 = 3003$$

4.

$$\begin{aligned} 4.1. f'(x) &= \left(\frac{1}{x} + x + \cos(\pi x) \right)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} + 1 - \pi \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Seja g a função definida, em $]0, 2\pi]$, por:

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x) - x = \\ &= -\frac{1}{x^2} + 1 - \pi \sin(\pi x) - x \end{aligned}$$

A função g é contínua em $\left] \frac{5}{4}, 2 \right]$, por se tratar da soma de funções contínuas neste intervalo.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{5}{4}\right) &= -\frac{1}{\frac{25}{16}} + 1 - \pi \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \frac{5}{4} = \\ &= -\frac{89}{100} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi > 0 \end{aligned}$$

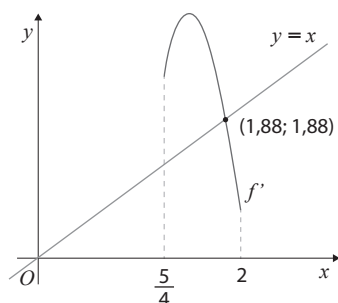
$$g(2) = -\frac{1}{4} + 1 - \pi \sin(2\pi) - 2 = -\frac{5}{4} < 0$$

$$\text{Ou seja, } g(2) < 0 < g\left(\frac{5}{4}\right).$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists x \in \left] \frac{5}{4}, 2 \right[: g(x) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \left] \frac{5}{4}, 2 \right[: f'(x) = x.$$

4.2.



$$x \approx 1,88$$

$$5. P(A \cup \bar{B}) - P(B) \times P(B|A) =$$

$$= P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) - P(B) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= P(A) + P(\bar{B}) - P(A) + P(A \cap B) - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(A e B são acontecimentos equiprováveis)

$$= P(\bar{B}) + P(A \cap B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(\bar{B})$$

6. Opção (B)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x+1} = 0 = f(0)$$

• Para a opção (A), tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 0 + 1 = 1$$

$$(f+g)(0) = 0 + 0 = 0$$

• Para a opção (B), tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 1 + (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 0 + 0 = 0$$

$$(f+g)(0) = 0 + 0 = 0$$

• Para a opção (C), tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 1 + (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 0 + 1 = 1$$

$$(f+g)(0) = 0 + 1 = 1$$

• Para a opção (D), tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 0 + 0 = 0$$

$$(f+g)(0) = 0 + 1 = 1$$

Apenas na opção (B) se tem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = (f+g)(0).$$

7. A afirmação (I) é verdadeira, pois, como toda a função com derivada finita num ponto do seu domínio é contínua nesse ponto, então se f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R}$, pode concluir-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

A afirmação (II) é falsa, pois, da igualdade

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2) = 0$, pode concluir-se que a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$, pelo que o gráfico da função f não admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

A afirmação (III) é falsa, pois, como f' é decrescente em $\mathbb{R}^+$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo nesse intervalo.

8. Opção (A)

$$\begin{aligned} A_{[ABCDE]} &= A_{[ABCE]} + A_{[CDE]} = \\ &= 2 \times (-\cos \alpha \sin \alpha) + 2 \times \frac{1 \times \sin \alpha}{2} = \\ &= -2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha = \\ &= -\sin(2\alpha) + \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha - \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

9.

9.1. A função f , de domínio $]0, +\infty[$, é contínua em $]1, +\infty[$ e em $]0, 1[$, por se tratar, em ambos os intervalos, do quociente de funções contínuas cujos denominadores não se anulam nos intervalos considerados. Assim, as retas de equação $x = 0$ e $x = 1$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico da função f .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\pi x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \times \pi = \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \pi = \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(\pi x)}{2x} = \frac{\sin \pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

A reta de equação $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} 9.2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2x - 1} &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Se $0 < x < 1$, então:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin(\pi x)}{2x} \right)' = \\ &= \frac{\pi \cos(\pi x) \times 2x - \sin(\pi x) \times 2}{(2x)^2} = \\ &= \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{2x^2} \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

10.

10.1. Opção (D)

$$\lim u_n = \lim \frac{\pi - n}{n^2} = \lim \left(\frac{\pi}{n^2} - \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\cos 0}{2 + \sin 0} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 10.2. f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{2 + \sin x} \right)' = \\ &= \frac{-\sin x (2 + \sin x) - \cos x \times \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \\ &= \frac{-2 \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(2 + \sin x)^2} = \\ &= \frac{-2 \sin x - 1}{(2 + \sin x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2 \sin x - 1}{(2 + \sin x)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \sin x - 1 = 0 \wedge \underbrace{(2 + \sin x)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \\ &\Leftrightarrow -2 \sin x = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como a abscissa de A pertence a $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $x = \frac{7\pi}{6}$.

$$11. f(x) = 3 \sin x - \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 \sin x - \frac{\cos(2x)}{2} \right)' = \\ &= 3 \cos x - \frac{1}{2} \times (-2 \sin(2x)) = \\ &= 3 \cos x + \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 \cos x + \sin(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (3 + 2 \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 3 + 2 \sin x = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \underbrace{\sin x = -\frac{3}{2}}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, então $x = \frac{\pi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal de f'		+	0	-	
Variação de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

$$f(0) = 3 \sin 0 - \frac{\cos 0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos \pi}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(\pi) = 3 \sin \pi - \frac{\cos 2\pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

A função f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; tem máximo absoluto $\frac{5}{2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$ e mínimo absoluto $-\frac{1}{2}$ para $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\text{Tem-se, então, } D'_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Teste n.º 4

Páginas 89 a 91

1. Opção (A)

$$\begin{aligned} P(\overline{(A \cap B)} \mid A) &= \frac{P(\overline{(A \cap B)} \cap A)}{P(A)} = \\ &= \frac{P((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap A)}{P(A)} = \\ &= \frac{P((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{B} \cap A))}{P(A)} = \\ &= \frac{P(\emptyset \cup (\overline{B} \cap A))}{P(A)} = \\ &= \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} = \\ &= 1 - P(B) = \\ &= 1 - 0,43 = 0,57 \end{aligned}$$

2.

$$21. f(x) = x^2 e^x$$

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$$

$$f''(x) = (e^x(2x + x^2))' =$$

$$= e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) =$$

$$= e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 + 4x + 2 = 0$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{2} \vee x = -2 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Variação de f'	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, o ponto do gráfico que admite reta tangente com o menor declive possível tem abscissa $-2 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} f'(-2 + \sqrt{2}) &= e^{-2 + \sqrt{2}}(2 \times (-2 + \sqrt{2}) + (-2 + \sqrt{2})^2) \\ &\approx -0,5 \end{aligned}$$

O valor do menor declive possível da reta tangente ao gráfico de f é, aproximadamente, $-0,5$.

$$22. f'(x) = e^x(2x + x^2)$$

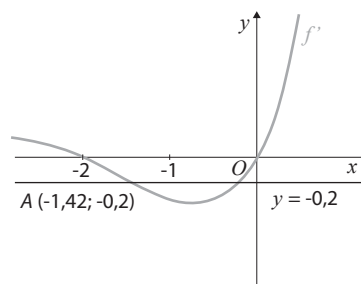
f' é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do produto de duas funções contínuas; em particular, f' é contínua em $[-2, -1]$.

$$f'(-2) = e^{-2}(-4 + 4) = 0$$

$$f'(-1) = e^{-1}(-2 + 1) = -\frac{1}{e} \approx -0,4$$

$$\text{Logo, } f'(-1) < -0,2 < f'(-2).$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um ponto do gráfico de f no qual a reta tangente tem declive $-0,2$.



Logo, $A(-1,42; -0,2)$.

3. Opção (C)

$$10\,000 = 5000 \times (1 + 0,1)^n \Leftrightarrow 1,1^n = 2$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,1}(2)$$

Logo, $n \approx 7$ anos.

4.

$$\begin{aligned}
 4.1. f(t) = 8 &\Leftrightarrow 8 + 7e^{-0,2t} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 8 \\
 &\Leftrightarrow 7e^{-0,2t} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{7e^{-0,2t} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{3}{2} + 3k, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Como $t \in [0, 10]$, então $t = \frac{3}{2} \vee t = \frac{9}{2} \vee t = \frac{15}{2}$.

O centro do cubo encontra-se a 8 cm do solo aos 1,5 segundos, 4,5 segundos e 7,5 segundos.

$$4.2. f(1) = 8 + 7e^{-0,2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 10,866$$

$$g(1) = 8 + 7e^{-0,1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 12,479$$

$$g(1) - f(1) \approx 12,479 - 10,866 = 1,613$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 3^2 + 1,613^2 \Leftrightarrow d^2 = 11,601\,769$$

$$\text{Logo, } d = \sqrt{11,601\,769} \approx 3,406$$

1 segundo após o instante inicial, os centros do cubo e da esfera encontram-se a 3,4 cm um do outro.

5. Opção (B)

O número de casos possíveis é $10!$, que é o número de maneiras de se retirar de forma ordenada, sem reposição, as dez bolas do saco.

O número de casos favoráveis é ${}^{10}C_5 = {}^{10}C_5 \times 1 \times 1$. Este valor corresponde ao número de maneiras diferentes de escolher, aleatoriamente, cinco das dez posições possíveis para os números ímpares. Para cada uma destas maneiras, há apenas uma forma de colocar os algarismos ímpares por ordem crescente; para cada uma destas maneiras, há apenas uma maneira de colocar os números pares nas posições restantes, por ordem crescente.

6. Opção (C)

Os zeros de f'' são os pontos de inflexão do gráfico de f . Por observação do gráfico, pode afirmar-se que, dos quatro valores apresentados, apenas o 1 pode ser abcissa desse ponto de inflexão.

7.

$$\begin{aligned}
 7.1. A_{[ABC]} &= \frac{(2 \times 2 \sin \alpha) \times (4 - 2 \cos \alpha)}{2} = \\
 &= 2 \sin \alpha \times (4 - 2 \cos \alpha) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 \sin \alpha - 2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\
 &= 8 \sin \alpha - 2 \sin (2\alpha) = \\
 &= f(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.2. (\cos 2\theta) &= \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{3}{5} \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta = \frac{3}{5} \\
 &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \theta = \frac{8}{5} \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \\
 &= 8 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin\left(2 \times \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \\
 &= 8 \left(\sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \\
 &\quad - 2 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &= 8 \left(\sin \theta \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \theta \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 \cos (2\theta) = \\
 &= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2 \times \frac{3}{5} = \\
 &= \frac{4}{5} \sqrt{10} + \frac{8}{5} \sqrt{10} - \frac{6}{5} = \\
 &= \frac{12 \sqrt{10} - 6}{5}
 \end{aligned}$$

8. Opção (C)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} = \\
 &= \lim_{2x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\text{limite notável}} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{x}{e^x - 1}}_{\text{limite notável}} =
 \end{aligned}$$

$$= 1 \times 2 \times 1 =$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(x+1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x+1)} = \\
&= \lim_{2x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = \\
&\quad \underbrace{\lim_{2x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\text{limite notável}} \quad \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = \\
&= 1 \times 2 \times 1 = \\
&= 2
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\begin{aligned}
y = \ln(x+1) &\Leftrightarrow x+1 = e^y \\
&\Leftrightarrow x = e^y - 1
\end{aligned}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$, então, pelo teorema das funções encaixadas, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 2$.

9.

9.1. Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$:

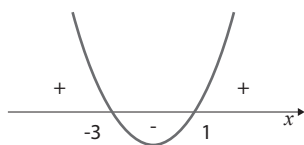
$$\begin{aligned}
f(x) &= \log_3\left(\frac{x^2}{9}\right) - 2 \log_9(x) = \\
&= \log_3(x^2) - \log_3(9) - 2 \times \frac{\log_3(x)}{\log_3(9)} = \\
&= 2 \log_3(x) - 2 - 2 \times \frac{\log_3(x)}{2} = \\
&= 2 \log_3(x) - 2 - \log_3(x) = \\
&= \log_3(x) - 2
\end{aligned}$$

9.2. Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
f(x) \geq -1 - \log_3(x+2) &\Leftrightarrow \log_3(x) - 2 \geq -1 - \log_3(x+2) \\
&\Leftrightarrow \log_3(x) + \log_3(x+2) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2x) \geq \log_3(3) \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 3 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 1
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$



Então, C.S. = $(]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[) \cap \mathbb{R}^+ = [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
9.3. f(x) = y &\Leftrightarrow \log_3(x) - 2 = y \\
&\Leftrightarrow \log_3(x) = y + 2 \\
&\Leftrightarrow x = 3^{y+2}
\end{aligned}$$

Logo, $f^{-1}(x) = 3^{2+x}$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x) &= 21 - 2 \times 3^{-x+1} \\
&\Leftrightarrow 3^{x+2} = 21 - 2 \times 3^{-x+1} \\
&\Leftrightarrow 3^x \times 9 - 21 + 6 \times 3^{-x} = 0 \\
&\Leftrightarrow 9 \times 3^{2x} - 21 \times 3^x + 6 = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3 \times 3^{2x} - 7 \times 3^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 2 \vee 3^x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_3(2) \vee x = -1$$

Então, C.S. = $\{-1, \log_3(2)\}$.

10.

10.1. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1 + x}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} + 1 = \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

10.2. Em $\mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \\
&= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\
f''(x) &= \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2}\right)' = \\
&= \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x}{x^4} = \\
&= \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \\
&= \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 \ln(x) = 0 \wedge x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$$

x	0		$e\sqrt{e}$	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e\sqrt{e}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e\sqrt{e}, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de abscissa $x = e\sqrt{e}$.

Teste n.º 5

Páginas 94 a 96

1.

1.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Ser do sexo feminino."

B : "Ter reservado alojamento para as férias."

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,26	0,24	0,5
$\bar{A}$	0,44	0,06	0,5
Total	0,7	0,3	1

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,12 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = 0,12$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0,5 \times 0,12$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0,06$$

Então:

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,24}{0,30} = \frac{4}{5}$$

1.2. Opção (C)

$$0,7 \times 20 = 14$$

Assim:

$$P = \frac{{}^{14}C_3 \times {}^6C_1 + {}^{14}C_4}{{}^{20}C_4} =$$

$$= \frac{2184 + 1001}{4845} =$$

$$= \frac{637}{969}$$

2. Seja $f(x) = \sin x - x - 1$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas; em particular, f é contínua em $[-\pi, 0]$.

$$f(-\pi) = \sin(-\pi) + \pi - 1 = \pi - 1$$

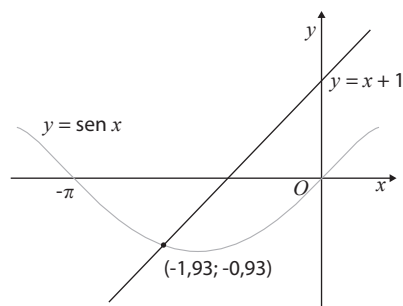
$$f(0) = \sin 0 - 0 - 1 = -1$$

$$f(0) < 0 < f(-\pi)$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in [-\pi, 0]: f(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in [-\pi, 0]:$$

$\sin c - c - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin c = c + 1$, isto é, a equação $\sin x = x + 1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $[-\pi, 0]$.



Logo, $x \approx -1,9$.

3.

$$3.1. \begin{cases} M(6) = 3,6 \\ M(12) = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times e^{6k} = 3,6 \\ a \times e^{12k} = 1,8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3,6}{e^{6k}} \\ \frac{3,6}{e^{6k}} \times e^{12k} = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ e^{6k} = 0,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 6k = \ln(0,5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3,6}{e^{-\ln(2)}} \\ k = -\frac{\ln(2)}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3,6 \times e^{\ln(2)} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7,2 \\ k = -\frac{\ln(2)}{6} \end{cases}$$

$$3.2. \frac{M(t+1)}{M(t)} = \frac{a \times e^{-0,34 \times (t+1)}}{a \times e^{-0,34t}} =$$

$$= \frac{e^{-0,34t-0,34}}{e^{-0,34t}} =$$

$$= e^{-0,34t-0,34+0,34t} =$$

$$= e^{-0,34} \approx 0,71$$

A massa da substância diminui, aproximadamente, 29% por hora.

4. Opção (C)

$$\int_0^7 10e^{-0,5t} dt = \frac{10}{-0,5} \int_0^7 (-0,5e^{-0,5t}) dt =$$

$$= -20 [e^{-0,5t}]_0^7 =$$

$$= -20 (e^{-3,5} - e^0) \approx 19,4$$

5. Como a reta de equação $y = 3x + 2$ é assíntota ao

gráfico de f , tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 2$.

Assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{3}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{3}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - xf(x)}{3f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x(f(x) - 3x)}{3f(x)} = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g .

6. Opção (A)

$$\lim x_n = \lim \sin \left(\frac{1}{n} \right) = \sin(0^+) = 0^+$$

Então:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x_n) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{3x}}{2x} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{3x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^{3x} - 1}{3x}}_{\text{limite notável}} \times 3 = \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

7.

7.1. Para que f seja contínua em $x = 0$, temos de ter

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \\ &= 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} =\end{aligned}$$

$$= 2 \times 1 \times 1 =$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2 - \ln(1 - x)] = \\ &= 0 - \ln(1) = \\ &= 0 = \\ &= f(0)\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

7.2. Para $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = x^2 - \ln(1 - x)$.

$$f'(x) = (x^2 - \ln(1 - x))' = 2x - \frac{-1}{1 - x} = 2x + \frac{1}{1 - x}$$

$$f''(x) = \left(2x + \frac{1}{1 - x} \right)' = 2 + \frac{-(-1)}{(1 - x)^2} = 2 + \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Como $2 + \frac{1}{(1 - x)^2} > 0$, $\forall x \in]-\infty, 0]$, então o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$.

7.3. Em $\mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$.

$$\text{Então, } g(x) = x^2 f(x) = 1 - \cos(2x).$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}\bullet 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{13} \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{13}\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}g(\alpha) &= 1 - \cos(2\alpha) = 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = \\ &= \frac{18}{13}\end{aligned}$$

8. Opção (D)

$$\log_x(e^a) = \log_a(e) \Leftrightarrow a \log_x(e) = \log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow a \frac{\log_a(e)}{\log_a(x)} = \log_a(e)$$

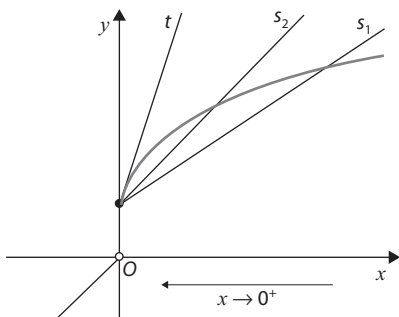
$$\Leftrightarrow \frac{a}{\log_a(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x) = a$$

$$\Leftrightarrow x = a^a$$

9. Opção (A)

O gráfico da opção (B) não é correto, pois $f'(0^+) \in \mathbb{R}^+$:



O gráfico da opção (C) não é correto, pois existe um número real a , positivo, a partir do qual a função é decrescente, ou seja, a partir do qual $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

é negativo.

O gráfico da opção (D) não é correto, pois tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$, o que não pode acontecer já que $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

10.

$$10.1. \int f(x) dx = \int (-x^2 - 2x) dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(1) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$$

$$\text{Logo, } F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{7}{3}.$$

$$10.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow x(-x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - h(x)) dx + \int_0^4 (g(x) - h(x)) dx = \\ = \int_{-2}^0 \left(-x^2 - 2x - \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) \right) dx + \\ + \int_0^4 \left(-x^2 + 4x - \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) \right) dx = \\ = \int_{-2}^0 \left(-\frac{3}{2}x^2 - x + 4 \right) dx + \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 5x + 4 \right) dx = \\ = \left[-\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_0^4 = \\ = (0 - (4 - 2 - 8)) + (-32 + 40 + 16 - 0) = \\ = 6 + 24 = \\ = 30 \text{ u.a.}$$

Teste n.º 6

Páginas 99 a 101

1. Opção (A)

$$16^{10} = (2^4)^{10} = 2^{40}$$

A linha referida no enunciado tem 41 elementos. O número de maneiras de escolher ao acaso dois desses 41 elementos é ${}^{41}C_2$, que é o número de casos possíveis. O número de casos favoráveis é 20, uma vez que os elementos dessa linha são iguais dois a dois, com exceção do termo central.

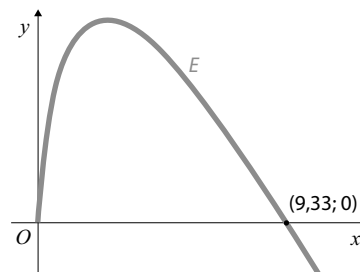
$$\text{Assim, } P = \frac{20}{{}^{41}C_2}.$$

2.

2.1. Para $t \in [0, a]$:

$$E(t) = 10 \ln(0,2t + 0,1)^{11} - 10 \ln(2t + 1) + \\ + 10 \ln(10) - 32t + 231 = \\ = 10 \ln(0,2t + 0,1)^{11} - 10(\ln(2t + 1) - \\ - \ln(10)) - 32t + 231 = \\ = 10 \ln(0,2t + 0,1)^{11} - 10 \ln(0,2t + 0,1) - 32t + \\ + 231 = \\ = 10(\ln(0,2t + 0,1)^{11} - \ln(0,2t + 0,1)) - 32t + \\ + 231 = \\ = 10 \ln(0,2t + 0,1)^{10} - 32t + 231 = \\ = 100 \ln(0,2t + 0,1) - 32t + 231$$

$$2.2. E(t) = 0 \Leftrightarrow 100 \ln(0,2t + 0,1) - 32t + 231 = 0$$



As coordenadas do ponto de interseção do gráfico de E com o eixo Ox são $(9,33; 0)$.

Assim, $a \approx 9,33$.

2.3. Opção (C)

A função E é contínua em todo o seu domínio; em particular, é contínua em qualquer um dos intervalos apresentados.

$$E(6) = 100 \ln(0,2 \times 6 + 0,1) - 32 \times 6 + 231 \approx 65,24 \\ E(7) = 100 \ln(0,2 \times 7 + 0,1) - 32 \times 7 + 231 \approx 47,55 \\ E(8) = 100 \ln(0,2 \times 8 + 0,1) - 32 \times 8 + 231 \approx 28,06 \\ E(9) = 100 \ln(0,2 \times 9 + 0,1) - 32 \times 9 + 231 \approx 7,19 \\ E(10) = 100 \ln(0,2 \times 10 + 0,1) - 32 \times 10 + 231 \\ \approx -14,81$$

$$2.4. E'(t) = (100 \ln(0,2t + 0,1) - 32t + 231)' =$$

$$= 100 \times \frac{0,2}{0,2t + 0,1} - 32 =$$

$$= \frac{20}{0,2t + 0,1} - 32$$

$$E'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{0,2t + 0,1} - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow 20 - 6,4t - 3,2 = 0 \wedge 0,2t + 0,1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 6,4t = 16,8 \wedge t \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = 2,625$$

t	0		2,625		a
Sinal de E'		+	0	-	
Variação de E	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

A função E é estritamente crescente em $[0; 2,625]$ e é estritamente decrescente em $[2,625; a]$, atinge o seu máximo em $t = 2,625$.

$$0,625 \times 60 = 37,5$$

A bateria do telemóvel atingiu o nível máximo às 10 horas e 38 minutos, aproximadamente.

$$3. A = 4116 \Leftrightarrow \int_{-a}^a 18x^2 dx = 4116 \Leftrightarrow 6 \int_{-a}^a 3x^2 dx = 4116$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^a 3x^2 dx = 686 \Leftrightarrow \int_0^a 3x^2 dx = 343$$

$$\Leftrightarrow [x^3]_0^a = 343 \Leftrightarrow a^3 = 343 \Leftrightarrow a = 7$$

4. Opção (B)

$$f(x) = e^{kx}$$

$$f'(x) = ke^{kx}$$

$$f''(x) = k^2 e^{kx}$$

Então:

$$\begin{aligned} af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= ak^2 e^{kx} + bke^{kx} + ce^{kx} = \\ &= e^{kx}(ak^2 + bk + c) = \\ &= e^{kx} \times 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.

5.1. Se $x \in [0, 2\pi]$, então:

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos(2x) =$$

$$= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= -\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x =$$

$$= -\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x =$$

$$= -2\cos^2 x - \cos x + 1$$

Então:

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

5.2. Opção (D)

Para que f seja contínua em $x = 0$, tem de se ter

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos(2x) \right) = \\ &= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos 0 = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-kx)}{x} = \\ &= -k \sin \lim_{-kx \rightarrow 0} \frac{\sin(-kx)}{-kx} = \\ &= -k \times 1 = -k \end{aligned}$$

$$\bullet f(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

$$\text{Logo, } -k = -2 \Leftrightarrow k = 2.$$

5.3. O domínio de f apenas permite a existência de assíntota horizontal ao seu gráfico quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$$

Para qualquer valor real negativo de x, tem-se:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

5.4. Em $\mathbb{R}^-$:

$$g(x) = f(x) \times x \cos x =$$

$$= \frac{\sin(-x)}{x} \times x \cos x =$$

$$= -\sin x \cos x$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x \cos x) dx = \\
 &= \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^2 x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \\
 &= \frac{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin^2(-\pi)}{2} + \frac{\cos^2 0}{2} - \frac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} - 0 = 1 \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 6.1. \frac{1}{(z_1)^2} &= \frac{1}{(3 + \sqrt{3}i)^2} = \frac{1}{9 + 6\sqrt{3}i + 3i^2} = \\
 &= \frac{1}{6 + 6\sqrt{3}i} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \times \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + 3} = \\
 &= \frac{1}{24} (1 - \sqrt{3}i) = \\
 &= \frac{1}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24} i
 \end{aligned}$$

$$6.2. z_1 \times z = e^{i\theta} \times 2\sqrt{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet r_1 = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta_1 \in 4.^\circ \text{Q}$$

Logo, $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

$$\text{Ou seja, } z_1 = 2\sqrt{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Para que $z_1 \times z$ seja um imaginário puro:

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

6.3. O polígono cujos vértices são os afijos, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 é um quadrado inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial e de raio $2\sqrt{3}$ ($r_1 = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$).

Como as diagonais de um quadrado formam um ângulo reto, pelo teorema de Pitágoras, sendo x o comprimento do lado do quadrado, tem-se:

$$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 = 12 + 12 \Leftrightarrow x^2 = 24$$

Logo, a área do polígono cujos vértices são os afijos, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 é 24 u. a.

6.4. Opção (A)

A condição $|z - z_1| \leq 3$ define o círculo de centro no ponto de coordenadas $(3, -\sqrt{3})$ e raio 3, pelo que se exclui a opção (C).

A condição $0 \leq \operatorname{Arg}(z - z_1) \leq \frac{\pi}{2}$ define o ângulo cujo vértice é o ponto de coordenadas $(3, -\sqrt{3})$ e cujos lados são as semirretas com origem nesse ponto e que são paralelas às semirretas definidas por

$\operatorname{Arg}(z) = 0$ e $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, pelo que se excluem as opções (B) e (D).

$$\begin{aligned}
 7. |z + w|^2 + |z - w|^2 &= \\
 &= (z + w)(\overline{z + w}) + (z - w)(\overline{z - w}) = \\
 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) = \\
 &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} = \\
 &= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} = \\
 &= 2|z|^2 + 2|w|^2
 \end{aligned}$$

Título
Expoente¹²
Dossiê do Professor
Ensino Secundário
12.º Ano de Escolaridade

Autoras
Daniela Raposo
Luzia Gomes

Com a colaboração de:
Alexandra Queirós

Ilustração
Sérgio Veterano

Execução Gráfica
Multitipo

Depósito Legal
N.º 420 898/17

ISBN
978-888-89-1041-3

Ano / Edição
2017 / 1.ª Edição

ASA

Edições ASA II, S.A.

© 2017, ASA, uma editora do Grupo LeYa

E-mail: apoio@leyaeducacao.com
Internet: www.asa.pt
Livraria Online: www.leyaonline.com

Apoio ao Professor
707 231 231
210 417 495

LIVRARIAS

Aveiro

LeYa em Aveiro
Centro Comercial Glicínias Plaza, Lj 68-70
Rua D. Manuel Barbuda e Vasconcelos
3810-498 Aveiro

Funchal

LeYa no Funchal
Rua do Hospital Velho, 44
Sta. Maria Maior
9060-129 Funchal

Lisboa

LeYa na Buchholz
Rua Duque de Palmela, 4
1200-098 Lisboa

Porto

LeYa na Latina
Rua de Santa Catarina, 2-10
4000-441 Porto

Santarém

LeYa em Santarém
Rua Pedro de Santarém, 41
2000-223 Santarém

Viseu

LeYa na Pretexto
Rua Formosa, 83
3500-135 Viseu



www.expoente12.asa.pt



AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

De acordo com o artigo 71.º da
Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto,
este exemplar destina-se ao órgão
da escola competente para a
adoção de manuais escolares.